



Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



## Frações Contínuas e aplicações no Ensino Médio

Amanda Melo do Nascimento

Goiânia

2013

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:** **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

**2. Identificação do Trabalho**

Autor (a):	AMANDA MELO DO NASCIMENTO				
E-mail:	amanda2076@gmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input type="checkbox"/> Sim		<input checked="" type="checkbox"/> Não		
Vínculo empregatício do autor	COLÉGIO MILITAR DE BRASÍLIA				
Agência de fomento:	CAPES			Sigla:	CAPES
País:	BRASIL	UF:	DF	CNPJ:	00889834/0001-08
Título:	Frações Contínuas e aplicações no Ensino Médio				
Palavras-chave:	Números Irracionais, Algoritmo de Euclides e Frações Contínuas				
Título em outra língua:	Continuos fractions and applications in High School				
Palavras-chave em outra língua:	Irrational Numbers, Euclidean Algorithm and Continued Fractions.				
Área de concentração:	MATEMÁTICA				
Data defesa:	15/03/2013				
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT – SBM				
Orientador (a):	Durval José Tonon				
E-mail:	djtonon@mat.ufg.br				
Co-orientador(a):*					
E-mail:					

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM  NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Data: 01 / 05 / 2013

Assinatura do (a) autor (a)

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Amanda Melo do Nascimento

## Frações Contínuas e aplicações no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.

Goiânia

2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
GPT/BC/UFG**

N244f Nascimento, Amanda Melo do.  
Fracções contínuas e aplicações no Ensino Médio [manuscrito]  
/ Amanda Melo do Nascimento. – 2013.  
66 f. : il., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,  
Instituto de Matemática e Estatística, 2013.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras, abreviaturas, siglas e tabelas.

Apêndices.

1. Fracções contínuas – Ensino Médio. 2. Euclides,  
Algoritmos de. 3. Números irracionais. I. Título.

CDU: 511.14:373.5

**Amanda Melo do Nascimento**

**Frações Contínuas e Aplicações no Ensino  
Médio**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 15 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



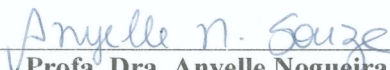
---

**Prof. Dr. Durval José Tonon**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG  
Presidente da Banca



---

**Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Avila Rodrigues**  
Membro/UnB



---

**Profa. Dra. Anyelle Nogueira de Souza**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Amanda Melo do Nascimento** graduou-se em Matemática pela Universidade de Brasília e aperfeiçoou-se em Matemática e Estatística pela UFLa. É professora há quinze anos, sendo que neste período já atuou e atua como professora do Ensino Fundamental e Médio. Atualmente, leciona Desenho Geométrico no Colégio Militar de Brasília.

Dedico este Trabalho aos meus dois amores, minha razão de viver, meus filhos Maria Fernanda do Nascimento Lamellas e Heitor do Nascimento Lamellas.





# Agradecimentos

À Deus, que me deu força, fé e segurança ao longo desses dois anos, para enfrentar todas as dificuldades encontradas. Me guiando semanalmente a cada 400km de estrada perigosa, guardando meus 2 filhos em seu manto sagrado e permitindo alcançar neste momento um êxito para toda a minha vida.

Ao meu maridão e meus dois pequenos, que no decorrer de todo o curso, me incentivaram a continuar, mesmo eu estando ausente, com o coração partido, em alguns momentos importantes da nossa família. A cada pedido choroso de “fica mamãe”, eu sabia que eu precisava persistir e buscar uma vida melhor para todos nós.

À minha amada mãe, que sempre foi o meu porto seguro. Te amo muito e obrigada por cuidar dos nossos filhos.

Aos meus dois companheiros, amigos, irmãos, colegas de jornada: Túlio e Viviane. Sem vocês seria muito mais difícil. Cada estudo, cada prova ultrapassada, cada quilômetro de estrada, todas as risadas e preocupações. Espero ter vocês por perto sempre.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Durval José Tonon por compartilhar seus conhecimentos e orientar meus estudos neste trabalho. Peço desculpas por eventuais falhas.

Aos meus colegas de turma pelo companheirismo, estudos em grupo e momentos de descontração.

E finalmente, ao PROFMAT e a CAPES pela sua ajuda financeira e ao proporcionar essa chance única a todos os professores do Brasil.

# Frações Contínuas e aplicações no Ensino Médio.

Amanda Melo do Nascimento

15 de março de 2013

## Resumo

*Frações Contínuas e aplicações no Ensino Médio* inicia-se com o contexto histórico, socialmente construído a mais de 2500 anos, sobre o qual se originou o estudo e formação dos conjuntos numéricos com o objetivo de fundamentar a importância dos números irracionais e suas peculiaridades. Retoma alguns conceitos básicos de Sequências Numéricas e seus convergentes que são importantes para a compreensão do estudo das aproximações a partir do estudo de Fração contínua. A discussão é centralizada no estudo das frações contínuas, explorando sua parte histórica, conceitos básicos e sua relação com o Algoritmo de Euclides. É mostrada a importância das aproximações tanto de números racionais como irracionais,afim de diminuir o abismo existente entre o finito e o infinito para a construção do conjunto dos Reais. No capítulo final apresento um minicurso para alunos do Ensino Médio, de escola pública, que buscam por cursos superiores na área de exatas e objetivam alcançar uma maior integração com este importante segmento. Todos os assuntos abordados neste Trabalho serão desenvolvidos no curso, mostrando suas propriedades e aplicações.

**Palavras Chave:** Frações Contínuas, Algoritmo de Euclides, Números Irracionais, Sequências numéricas, Aproximações e Aplicações.

## Abstract

*Continued Fractions and applications in High School* begins with the historical context, the socially constructed over 2500 years, over which originated the study and training of numerical sets in order to substantiate the importance of irrational numbers and their peculiarities . Reintroducing some basic concepts of Numerical Sequences and their converging that are important for understanding the study of approaches from the study of continuous fraction. The discussion and centered on the study of continued fractions, exploring its historical part, basic concepts and their relation to the Euclidean algorithm. It is shown the importance of both approximations of rational numbers as irrational, in order to decrease the gap between finite and infinite for the construction of all the dollars. In the final chapter I present a mini-course for high school students, public school, looking for higher courses in the exact sciences and aim to achieve greater integration with this important segment. All matters discussed in this work will be developed in the course, showing their properties and applications.

**Keywords:** Continuos Fractions, Euclidean algorithm, irrational numbers, numerical sequences, approximations and application.

## Lista de Figuras

1	Representação do diálogo entre Sócrates e um escravo . . . . .	19
2	Áreas de polígonos . . . . .	31
3	Intervalo . . . . .	32
4	Gráfico $f(x) = \frac{1}{k^2}$ . . . . .	37
5	Gráfico $f(x) = \frac{1}{k}$ . . . . .	38
6	Segmentos encaixados . . . . .	48
7	Representação Geométrica da diagonal do quadrado. . . . .	49

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>9</b>
<b>Abstract</b>	<b>10</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>11</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2 O Conjunto dos Números Reais e as Frações Contínuas</b>	<b>16</b>
<b>3 Sequências Numéricas</b>	<b>22</b>
3.1 Definição . . . . .	22
3.2 Progressão Aritmética . . . . .	23
3.2.1 <b>Soma dos Finitos Termos de uma Progressão Aritmética</b>	26
3.3 Progressão Geométrica . . . . .	27
3.3.1 <b>Soma dos Finitos Termos de uma PG</b> . . . . .	29
3.3.2 <b>Soma dos Infinitos Termos de uma PG Decrescente</b> . . .	30
3.4 Convergência de Sequências . . . . .	30
3.5 Sequências Limitadas . . . . .	32
3.6 Sequências Monótonas . . . . .	33
3.7 Subsequências . . . . .	35
<b>4 Frações Contínuas</b>	<b>39</b>
4.1 Contexto Histórico . . . . .	39
4.2 O Algoritmo de Euclides . . . . .	41
4.3 Conceitos Básicos . . . . .	43
4.4 Expansão dos números Racionais em Frações Contínuas . . . . .	45
4.5 Finito X Infinito . . . . .	47
4.6 Expansão dos Números Irracionais em Frações Contínuas . . . . .	49
4.7 Univocidade nos Reais . . . . .	52
<b>5 Conclusão</b>	<b>55</b>

5.1	Frações Contínuas e o Ensino Médio . . . . .	55
5.2	Planejamento de Aula . . . . .	55
	<b>Bibliografia</b>	<b>65</b>

# 1 Introdução

A Educação hoje, vai além das aulas monótonas e baseadas no conteudismo que conhecíamos na nossa época de estudante. O mundo está em constante evolução e o ensinar/aprender não poderia deixar de seguir esses passos. Muitos pontos evoluíram, alguns exemplos são: aulas dinâmicas, uso de tecnologia e conteúdos contextualizados, aproximando o dia-a-dia à sala de aula. Outros, nem tanto, como por exemplo a renovação das propostas curriculares de temas matemáticos.

Há muito ainda a ser desenvolvido nessa área e um dos pontos essenciais é diminuir o espaço existente entre cada mudança do ciclo educacional. A passagem entre Ensino Médio e Superior é, sem dúvidas, o mais difícil. Alguns conteúdos são tão poucos relacionados que a maioria dos alunos não conseguem associá-los aos seus estudos anteriores resultando em rendimento insatisfatório nos semestres iniciais.

O objetivo desta monografia é discorrer sobre alguns dos assuntos do Ensino Superior que podem ser abordados no Ensino Médio, de uma forma simplificada, afim de diminuir as dificuldades nessa importante transição.

Sabemos que não é fácil dispor de alguns horários de aula, em uma grade tão apertada. O conteúdo a ser trabalhado/cumprido é extenso. Por isso mesmo, que a proposta é baseada em aulas extracurriculares para alunos que tenham como objetivo seguir a área de exatas e que busquem um “algo a mais” em seu currículo.

O assunto escolhido foi Frações Contínuas por ser muito rico e abranger aplicações em várias ciências. Trabalharemos com as representações de números racionais e irracionais, alguns exemplos com equações do 2º grau e enigmas.

Sendo assim, o trabalho se desenvolve, além da introdução, em mais quatro capítulos: O primeiro narra um pouco da história da construção dos números, seus principais personagens, a sistematização para a formação dos respectivos conjuntos, a crise dos Irracionais e sua estreita relação com as Frações Contínuas.

O segundo e terceiro trazem toda a teoria necessária para embasar nossa pesquisa, partindo de conceitos básicos de sequências numéricas, propriedades e convergência para em seguida, se possa compreender o que é uma Fração Contínua, suas principais propriedades e principalmente, as expansões de números Racionais e Irracionais, para a formação do conjunto dos Reais.



O quarto capítulo desenvolve a formulação de uma aula voltada para o Ensino Médio com os conteúdos elucidados nos capítulos anteriores, mostrando como é possível aproximar duas fases tão importantes no conhecimento de todo aluno.

## 2 O Conjunto dos Números Reais e as Frações Contínuas

A teoria de frações contínuas é um dos mais instigantes e belos assuntos da Matemática elementar, sendo ainda hoje tema de diversas pesquisas. Suas aproximações de números finitos e infinitos apesar de ser estudado apenas na Educação Superior apresenta um grande potencial para ser adaptado ao estudo dos Conjuntos Numéricos, conteúdo este bastante trabalhado no Ensino Fundamental e Médio.

Nas inclusões  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  feitas no Ensino Fundamental, a passagem por cada conjunto é feita de forma simples e bem recebida pelos alunos. Eles conseguem visualizar a necessidade dessa expansão. O número natural é visto como um conceito primitivo, os números inteiros com seus sinais de  $+$  e  $-$  os remete à ideia de se ter ou faltar algo; e finalmente os racionais, com a ideia de números “quebrados” e frações como razão entre um inteiro e um natural não nulo. Já a passagem de  $\mathbb{Q}$  para  $\mathbb{R}$ , ou ainda, a inclusão dos Irracionais ( $\mathbb{I}$ ) é sem dúvida a mais instigante e complicada conceitualmente. Infelizmente, não é dado o devido valor, sendo feita de uma forma simplificada, sem ressaltar suas importantes peculiaridades.

As aproximações realizadas a partir das frações contínuas são essenciais nesta passagem ( $\mathbb{Q} - \mathbb{I} - \mathbb{R}$ ), esclarecendo algumas das interrogações deixadas. Assim, segundo Cunha [10]:

“(...) frações contínuas constituem um exemplo interessante de procedimento que é finito, quando operado sobre números racionais, e infinito, quando o número dado é irracional. A origem das frações contínuas está na Grécia, onde as frações, para efeito de comparações, eram todas escritas com numerador 1”.

A história do desenvolvimento da Matemática nos mostra que os povos antigos utilizavam sistematicamente aproximações numéricas. Há referência, no papiro de Ahmes, do cálculo da área de círculo em relação à área de um quadrado considerado equivalente. Alguns autores, segundo Boyer [5], fazem uso deste conhecimento empírico para calcular o valor de  $\pi$ . Também, há referência aos mesopotâmios, em Brolezzi [7], que através do uso da base sexagesimal realizaram aproximações de números irracionais.

A História e o conhecimento sobre os números é fundamental, seja para elucidarmos o nosso estudo de frações contínuas ou para a sociedade como um todo. Desde o início da sua história, o homem sentiu a necessidade de contar. Era uma questão de sobrevivência. Segundo Caraça [8],

“ Toda a gente sabe como as necessidades da vida corrente exige que, a cada momento, se façam contagens – o pastor para saber se não perdeu alguma cabeça do seu rebanho, o operário para saber se recebeu todo o salário que lhe é devido, a dona de casa ao regular suas despesas pelo dinheiro de que dispõe, o homem de laboratório ao determinar o número exato de segundos que deve durar uma experiência – a todos se impõe constantemente, nas mais variadas circunstâncias, a realização de contagens”.

O processo de contagem foi longo e gradativo, pois, de início, o homem começou estabelecendo relações entre as semelhanças e as diferenças na natureza, para depois perceberem que podiam representar quantidades pequenas com o uso dos dedos das mãos, dos pés, e em quantidades maiores com o uso de pedras, madeiras, ... Pouco a pouco, o homem foi ampliando e desenvolvendo novas formas de contagem, e assim, operacionalizando esses números de acordo com suas necessidades diárias.

O amadurecimento do conceito de número ocorreu ao longo dos séculos, através de indagações vindas de leigos, filósofos e matemáticos. Nesse período, considerado pelo historiador soviético Konstantin Ribnikov [16], como o nascimento da Matemática, o homem teve a necessidade de organizar os números e com eles operacionalizar situações de modo que satisfizesse o seu trabalho diário.

O caminho dessa organização numérica não se deu conforme a ordem escolar na qual aprendemos cada um dos conjuntos. Existe todo o contexto histórico que se inicia da necessidade inata de saber contar, como usar, sua representação até as atividades de natureza intelectual, presentes em todas as civilizações.

Nos primórdios da história do homem, no período paleolítico, não houve registros da ideia de números, apenas pinturas nas cavernas e a percepção do objeto em duas dimensões. Somente na transição do paleolítico para o neolítico, fase marcada pelo surgimento da agricultura e pastoreio, que se tem registro de manifestações numéricas, como o uso do um, dois, três e muitos. Como cita Boyer [5]:

“...nossos mais antigos antepassados a principio contavam só até dois, qualquer conjunto, além desse nível era dado como ‘muitos’....Os dedos de uma mão podem facilmente ser usados para indicar um conjunto de dois, três, quatro ou cinco objetos...”

Por volta de 3000 a.C. na civilização egípcia surgiu o que hoje chamamos de frações. Às margens do Rio Nilo, o faraó Sesóstris dividia os terrenos entre seus agricultores:

“... repartiu o solo do Egito às margens do rio Nilo entre seus habitantes. Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem, o faraó mandava funcionários examinarem e determinarem por medida a extensão exata da perda.”

Nas épocas de cheia, período de Junho a Setembro, o rio avançava sobre as margens e derrubava as cercas que cada agricultor usava para marcar os limites de seu terreno. Perdendo-se um pedaço de seu lote, tornou-se necessário a remarcação. O faraó mandava os *estiradores* de corda, responsáveis pela marcação, examinar o prejuízo. Estes mediam os terrenos com cordas esticadas nas quais já havia uma unidade de medida marcada. Era verificado quantas vezes a unidade cabia no terreno, e nem sempre o cálculo era exato. Surgindo então a necessidade de se dividir a unidade por eles estabelecida, ou seja, o surgimento do número fracionário.

Enquanto os egípcios tratavam o número como uma ferramenta utilitária e empírica, os gregos os concebiam como entidades abstratas e teóricas, com propriedades merecedoras de estudos aprofundados e pragmáticos. Um importante representante desta época foi Pitágoras, fundador da seita onde todas as coisas podiam ser associadas aos números. A escola pitagórica considerava os números naturais (exceto o zero e o um) como originários dos deuses e imersos numa relação de direcionamento de todos os objetos.

Por volta do ano 600 a.C., a escola pitagórica com todo o seu fascínio e estudo dos números naturais e suas propriedades obteve duas importantes descobertas na história da Matemática: O Teorema de Pitágoras e o surgimento dos números irracionais. Pitágoras foi do céu ao inferno em tempo recorde.

A partir de seu Teorema e o estudo da relação entre a diagonal e o lado do quadrado, os pitagóricos perceberam que estes segmentos não eram comensuráveis. Dois

segmentos são ditos incomensuráveis se a razão entre estes não puder ser expressa como uma razão de números inteiros (com denominador não nulo).

O problema da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado não se adequava a filosofia grega, onde todo número é inteiro ou é composto de uma relação simples entre inteiros. Com tal descoberta os Pitagóricos consideraram quebrada a harmonia do universo e estavam convencidos de que os deuses os castigariam caso divulgassem aquilo que lhes parecia uma imperfeição divina. Este episódio representou um momento crítico, que, posteriormente, foi denominado ‘A Crise dos Incomensuráveis’.

Apesar de toda a problemática gerada, os pitagóricos contornaram o impasse com uma solução típica da cultura matemática grega da época: a relação entre a diagonal e o lado do quadrado não deveria ser expressa por um número, mas por meio de elementos geométricos.

Uma referência a esta solução grega se encontra em Bekken [3], que relata um trecho dos Diálogos, de Platão, onde Sócrates desenha um quadrado de lado 2, veja Figura 1a, e pede a um escravo que lhe mostre um quadrado com o dobro da área. Depois de algumas tentativas feitas pelo escravo, Sócrates lhe mostra a resolução correta, veja Figura 1d.

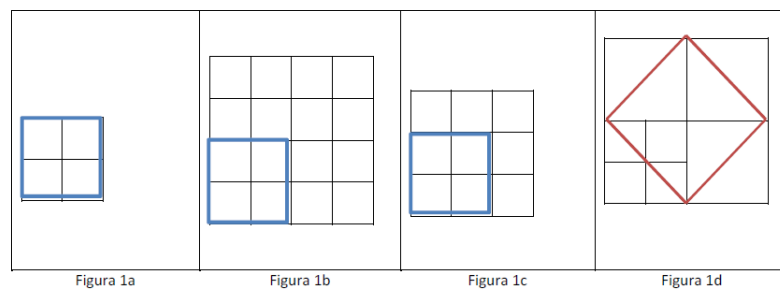


Figura 1: Representação do diálogo entre Sócrates e um escravo

A solução do problema conciliando os estudos de Aritmética e da Geometria melhorou a tensão entre os pitagóricos. E este “novo” número passou a ser conhecido como irracional. Mas se manteve confinado a Geometria. A crença dos números inteiros impeliu os gregos a ocultar os números irracionais, gerando o conceito de número. Como cita Schubring [19]:

“...ligado à Geometria. Somente os números inteiros eram considerados números, enquanto que os outros números eram considerados áreas; particularmente as frações eram tidas como quantidades; e Euclides entendeu que até os números inteiros eram concebidos geometricamente, como segmentos de reta. Naquele tempo a Aritmética grega fazia parte da Geometria”.

Por muitos séculos, os números irracionais permaneceram no “limbo” matemático, e apenas no século XVIII, com a necessidade de se conceituar os números reais, obtiveram sua importância edificada e enraizada no estudo dos conjuntos numéricos. Iniciando-se com a representação da diagonal do quadrado de lado 1, pelo símbolo  $\sqrt{2}$ , como também o uso do  $\pi$ , do  $e$  (número de Euler), do  $\phi$  (número de ouro) e das raízes inexatas.

O número negativo, assim como os Irracionais, demorou a ser aceito como número. Estima-se que tenha sido utilizado pela primeira vez, por volta do ano 630, pelo matemático Brahma Gupta, que viveu na Índia, associado a problemas comerciais que envolviam ganhos e perdas. E na China antiga, como cita Boyer [5]:

“Os chineses estavam acostumados a calcular com duas coleções de barras - vermelhas para os números positivos e pretos para os números negativos. No entanto, não aceitavam a ideia de um número negativo poder ser solução de uma equação.”

A ideia de número negativo só foi plenamente aceita a partir do século XV quando a partir da resolução de um algoritmo para resolução de equações quadráticas, matemáticos indianos descobriram os números negativos, antes chamados de “*numeri absurdi*” e “*numeri ficti*”, e começaram a escolher uma melhor notação para expressar o novo número, que não indicaria apenas quantidade, mas que também, representasse o ganho ou a perda. E no século XVI, foi incorporado à condição de número, já com sinal, positivo ou negativo.

Findo todo o contexto sócio-histórico-cultural da importância e construção dos números, passa-se ao tratamento da criação, regulação e sistematização dos conjuntos numéricos, que se deu por volta do século XIX.

Com o desenvolvimento, nos séculos XVIII e XIX, da Física, da Química e da Biologia, o homem passou a trabalhar com o movimento e com as quantidades infinitamente pequenas. Mas, para isso, tiveram de resolver o problema pendente com a crise da

escola pitagórica: números que não podiam ser escritos como a razão de números inteiros? Existência de números com variações infinitamente pequenas que escapam à medição? Ou ainda, números que furam a continuidade dos Racionais?

A solução matemática foi desenvolvida pelos alemães Dedekind (1831 a 1916) e Cantor (1829 a 1920). Eles estabeleceram que, a continuidade das quantidades não era coberta pelo campo racional, mas isto não significava que os pontos de descontinuidade não fossem números. Seriam números, mas de outro tipo, que não poderiam ser expressos por razões: seriam os números irracionais.

Para estabelecer esta continuidade, e diminuir o abismo existente entre o finito (racionais) e o infinito (irracionais) foi necessário se trabalhar com aproximações. Essa continuidade foi primeiramente trabalhada no conjunto dos racionais, com representações compostas de uma finita soma de frações com denominador na forma  $10^n$ . A segunda etapa foi trabalhar com as dízimas periódicas, onde o método anterior se tornou ultrapassado, passando-se a estudar limites tendendo a infinito e a convergência dessas séries numéricas (soma de frações) e na alçada do Ensino Médio foi ensinado com o estudo de progressões geométricas e no nível Fundamental, com equações do 1º grau.

Finalmente, os tão temidos números irracionais. Conhecidos por serem formados por dízimas infinitas e não periódicas, era impossível transformá-lo em uma razão de números inteiros (com denominador diferente de zero), então, a solução era trabalhar com aproximações “precisas” que diferissem dos racionais por erros milionessimamente pequenos. Vários métodos foram desenvolvidos, estudados e provados com o maior rigor matemático, e dentre estes, um dos que mais se adequa ou se correlaciona com os conteúdos do Ensino Básico e Médio, é o estudo de frações contínuas.

Sendo assim, o trabalho tem como objetivo desenvolver uma aula, à nível de Ensino Médio, sobre aproximações de números racionais e irracionais com o uso de frações contínuas, começando por relembrar os conteúdos das progressões aritmética e geométrica, perpassando no estudo sobre sequências numéricas para assim fundamentar o nosso objetivo, mostrando suas propriedades e peculiaridades.

## 3 Sequências Numéricas

### 3.1 Definição

Uma sequência numérica é, informalmente, uma sucessão infinita de números. Cada número desta sequência é chamado de termo, e escrito sob a forma  $a_n$ . Cada termo tem uma ordem definida. Portanto, o primeiro termo pode ser representado por  $a_1$ ; o segundo por  $a_2$ , e assim por diante.

**Definição:** Uma sequência numérica real é uma função que associa a cada número natural  $n \geq 1$  um número real  $a_n$ .

$$a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a_n$$

Detonaremos por  $a_n$  cada termo da sequência numérica  $(a_n)$ .

**Exemplos:** A sequência dos números:

1. Pares:  $(a_n) = (2n - 2) = (0, 2, 4, \dots, 2n, \dots)$ ;
2. Ímpares:  $(a_n) = (2n - 1) = (1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots)$ ;
3. Primos:  $(a_n) = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \dots)$ ;
4. Naturais:  $(a_n) = (n), n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$ ;
5. Inverso dos Naturais:  $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ ;
6.  $(a_n) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots\right)$ ;
7.  $(a_n) = (1 + (-1)^n) = (0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots)$ ;

Podemos observar que:

Dada uma sequência, nem sempre podemos determiná-la por uma lei de formação, ou seja, nem sempre podemos determinar o termo geral explicitamente, por exemplo, a sequência dos números primos, dada no item 3.

Existem sequências que, a partir de certo elemento, os demais se aproximam de um determinado número real, à medida que os valores de  $n$  crescem. É o caso da sequência



$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$  dado no item 5, onde à medida que os valores de  $n$  crescem, os valores de  $a_n$  se aproximam do zero.

Iniciaremos por relembrar duas importantes sequências numéricas trabalhadas no Ensino Médio, para em seguida aprimorarmos o conhecimento com o estudo das convergências e subsequências.

### 3.2 Progressão Aritmética

Seja dada a sequência  $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots)$ . Observamos que, a partir do segundo termo, a diferença entre qualquer termo e seu antecessor é sempre a mesma:

$$r = 4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8 = 12 - 10 = \dots = 2$$

Sequências como esta são denominadas progressões aritméticas (PA). A diferença constante é chamada de razão da progressão e costuma ser representada por  $r$ . Na PA dada, temos  $r = 2$ .

**Definição:** Uma progressão aritmética é uma sequência numérica  $(a_n)$  em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante  $r$ , chamada de razão da progressão.

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Uma **progressão aritmética crescente** é toda progressão aritmética em que cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo que o antecede, sendo que, para isso, a razão  $r$  tem que ser sempre positiva e diferente de zero.

**Exemplo:**

- $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots)$  razão  $r = 2$ ;
- $(3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots)$  razão  $r = 3$ ;

Uma **progressão aritmética decrescente** é toda progressão aritmética em que cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo que o antecede, sendo que para isso a razão  $r$  tem que ser sempre negativa e diferente de zero.

**Exemplo:**

- $(8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, \dots)$  razão  $r = -2$ ;
- $(9, 6, 3, 0, -3, -6, -9, -12, \dots)$  razão  $r = -3$ ;

Uma **progressão aritmética constante** é toda progressão aritmética em que todos os termos são iguais, sendo que, para isso, a razão  $r$  tem que ser sempre igual a zero.

**Exemplo:**

- $(1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$  razão  $r = 0$ .

**Propriedades**

1. Numa PA, qualquer termo, a partir do segundo, é a média aritmética do seu antecessor e do seu sucessor.

**Exemplo:** Seja a PA  $(4, 8, 12, 16, 20, 24, 28)$ , em quaisquer três termos consecutivos, o termo médio é sempre a média aritmética dos outros dois termos. Observe que:  $\frac{8 + 16}{2} = 12$ .

2. Ao selecionarmos uma quantidade ímpar e sucessiva de termos de uma PA, o termo do meio (médio) é a média aritmética do primeiro termo e do último termo, do 2º termo com o penúltimo e assim por diante.

**Exemplo:** Dada a PA de 7 termos  $(3, 6, 9, 12, 15, 18, 21)$ , observe que o termo médio é 12 e que  $12 = \frac{3 + 21}{2} = \frac{6 + 18}{2} = \frac{9 + 15}{2}$ .

3. Ao selecionarmos uma determinada quantidade sucessiva de termos de uma PA, a soma de dois termos quaisquer será a mesma, se a soma de seus índices também forem iguais, ou seja,  $a_i + a_j = a_k + a_l \Leftrightarrow i + j = k + l$ .

**Exemplo:** Seja a PA  $(3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31)$ , observe que:

$$a_2 + a_5 = a_3 + a_4$$

$$7 + 19 = 11 + 15$$

### Termo Geral

**Proposição 1.** A fórmula do termo geral de uma progressão aritmética é expressa por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

*Demonstração.* Sabemos que o valor de qualquer termo é igual ao anterior mais a constante  $r$ , ou seja:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2 \cdot r$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2 \cdot r) + r = a_1 + 3 \cdot r$$

$$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3 \cdot r) + r = a_1 + 4 \cdot r$$

$\vdots$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

□

**Exemplo1:** Determine o trigésimo quarto termo da PA (3,9,15,...)

**Solução:** Temos que  $a_1 = 3$  e  $a_2 = 9$ . Logo,  $r = a_2 - a_1 = 6$ .

Portanto:

$$a_{34} = a_1 + 33 \cdot r = 3 + 33 \cdot 6 = 201$$

**Exemplo2:** Determine o décimo oitavo termo da PA, na qual  $a_3 = 8$  e  $r = -2$

**Solução:** Temos que  $a_n = a_k + (n - k) \cdot r$ . Portanto:

$$a_{18} = a_3 + 15 \cdot r = 8 + 15 \cdot (-2) = -22$$

### Interpolação Aritmética

É a ação de inserir ou interpolar uma quantidade de meios aritméticos entre os extremos de uma progressão aritmética.

**Exemplo:** Interpola 3 meios aritméticos entre 2 e 18.

**Solução:** Devemos formar  $(2, a_2, a_3, a_4, 18)$ , em que:  $a_1 = 2$  e  $a_5 = 18$ .

Para interpolarmos os três termos, devemos determinar primeiramente a razão da PA. Temos que:

$$a_5 = a_1 + 4 \cdot r;$$

$$18 = 2 + 4 \cdot r \text{ e}$$

$$r = 4$$

Portanto, a solução é dada por  $(2, 6, 10, 14, 18)$

### 3.2.1 Soma dos Finitos Termos de uma Progressão Aritmética

**Proposição 2.** *A soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

*Demonstração.* Temos que:  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$ , ou ainda,  $S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$ .

Adicionando-se as duas equações, ficamos com:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1).$$

Mas, de acordo com a propriedade 3, temos que :

$$(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) = \dots$$

A soma tem  $n$  termos, portanto:

$$2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}. \quad \square$$

**Exemplo:** Calcule a soma dos 50 primeiros termos da PA  $(2, 6, 10, \dots)$

**Solução:** Temos que  $a_1 = 2$  e  $r = a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4$ .

Calculando  $a_{50}$ , temos:

$$a_{50} = a_1 + 49 \cdot r = 2 + 49 \cdot 4 = 2 + 196 = 198.$$

Aplicando a fórmula da soma dos elementos de uma PA, temos:

$$S_{50} = \frac{(2 + 198) \cdot 50}{2} = 200 \cdot 25 = 5.000$$

Logo, a soma dos 50 primeiros números é 5.000.

**Exemplo:** Um ciclista percorre 20 km na primeira hora; 17 km na segunda hora, e, assim por diante, em progressão aritmética. Qual será o total de quilômetros percorridos em 5 horas?

**Solução:** Neste exemplo, a progressão aritmética é  $(20, 17, 14, \dots)$  e, desta forma, o primeiro elemento é  $a_1 = 20$ . Subtraindo elementos consecutivos, encontramos a razão da PA, que, neste caso, é:  $r = a_2 - a_1 = 17 - 20 = -3$ .

Para podermos achar quantos quilômetros ele percorrerá em 5 horas, devemos somar os 5 primeiros termos da PA e, para isto, precisamos do elemento  $a_5$ . Dessa forma:

Temos a PA  $(20, 17, 14, 11, 8, \dots)$  e aplicando a fórmula  $S_n = 14 \cdot 5 = 70$

Logo, o ciclista percorreu em 5 horas, 70km.

### 3.3 Progressão Geométrica

Na sucessão de números  $(5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, \dots)$  cada número é o dobro do número anterior. Ou ainda, se escolhermos qualquer um dos números desta sucessão e dividí-lo pelo seu antecedente, o mesmo quociente será constante.

Essa sequência numérica  $(a_n)$  é chamada de progressão geométrica (PG), onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante  $q$ , chamada de razão da PG.

Portanto, a razão de uma PG é obtida pelo quociente entre um de seus termos por seu antecessor, ou seja,

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_{i+1}}{a_i}, \quad \text{com } a_i \neq 0$$

Uma PG pode ser classificada como: oscilante, crescente, decrescente, constante e quase nula.

Uma **PG crescente** é toda progressão geométrica em que cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo que o antecede, sendo que, para isso, a razão  $q$  tem que ser sempre positiva e diferente de zero.

**Exemplos:**

(2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, 13122, ...) razão  $q = 3$ ;

(5, 25, 125, 625, ...) razão  $q = 5$

Uma **PG decrescente** é toda progressão geométrica em que cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo que o antecede.

**Exemplos:**

(8, 4, 2, 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$  ...) razão  $q = \frac{1}{2}$

(-2, -4, -8, -16, ...) razão  $q = 2$ .

Uma **PG constante** é toda progressão geométrica em que todos os termos são iguais.

**Exemplos:**

(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...) razão  $q = 1$ ;

(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...) razão  $q$  indeterminada

(3, 3, 3, 3, ...) razão  $q = 1$ .

Uma **PG oscilante** (ou alternante) é toda progressão geométrica em que todos os termos são diferentes de zero e dois termos consecutivos têm sempre sinais opostos, sendo que, para isso, a razão  $q$  tem que ser sempre negativa e diferente de zero.

**Exemplos:**

(3, -6, 12, -24, 48, -96, 192, -384, 768, ...) razão  $q = -2$ ;

(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...) razão  $q = -1$ .

**Termo Geral**

Trabalhando da mesma forma feita na PA, temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \cdot q = a_1 \cdot q^4$$

⋮

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Sendo assim, a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica  $(a_n)$ , onde  $a_1$  é o primeiro termo,  $q$  é a razão e  $n$  é o número de termos, é expressa por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

**Exemplo:** Determine o 21º termo da PG (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, ...).

**Solução:** Temos que  $a_1 = 5$  e  $q = 2$ . Logo:  $a_{21} = a_1 \cdot q^{20} \Rightarrow$   
 $a_{21} = 5 \cdot 2^{20}$

### Interpolação Geométrica

Interpolar  $(n - 2)$  meios geométricos entre dois números dados  $a_1$  e  $a_n$ , significa obter uma PG com  $n$  termos de uma PG, cujos extremos são  $a_1$  e  $a_n$ , sendo que  $a_1$  é o primeiro termo da PG e  $a_n$  é o  $n$ -ésimo termo da PG.

**Exemplo:** Interpolar cinco meios geométricos entre 3 e 192.

**Solução:** Basta fazermos  $a_1 = 3$  e  $a_n = 192$ .

Como são 5 meios geométricos, temos que  $n = 7$  e, para obter a razão da PG, temos que  $a_7 = a_1 \cdot q^6$ .

Logo,  $192 = 3 \cdot q^6$ . Segue que  $q^6 = 64$ . Assim,  $q = 2$ .

Temos, então, que os 7 termos da PG são: (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192).

### 3.3.1 Soma dos Finitos Termos de uma PG

**Proposição 3.** A soma dos  $n$  primeiros termos de uma PG  $(a_n)$  é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, \text{ com } q \neq 1$$

*Demonstração.* Seja  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}$

Multiplicando-se a equação por  $q$ ,  $q \neq 0$  temos:

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}$$

Segue que,

$$q \cdot S_n - S_n = (a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n) - (a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1})$$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot q^n - a_1$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad \square$$

Vejam os alguns exemplos:

**Exemplo:** Calcule a soma dos 12 primeiros termos da PG (1, 2, 4, 8, ...).

**Solução:** Temos que  $a_1 = 1$  e a razão  $q = 2$ , logo:

$$S_{12} = \frac{a_1 \cdot (q^{12}) - 1}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^{12} - 1)}{2 - 1} = \frac{1 \cdot (4096 - 1)}{1} = 4095$$

### 3.3.2 Soma dos Infinitos Termos de uma PG Decrescente

Se uma PG possui razão  $-1 < q < 1$ , a soma de seus infinitos termos é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

**Exemplo:** Resolva a equação  $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \dots = 100$

**Solução:** Observe que a equação é uma PG, onde  $a_1 = x$  e  $q = \frac{1}{2}$ .

Assim:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow 100 = \frac{x}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow 100 = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 100 \cdot \frac{1}{2} = x \Rightarrow x = 50$$

## 3.4 Convergência de Sequências

O termo *convergir/convergência* tem como significado: Dirigir-se, tender para um ponto comum. O que na Matemática nos remete a buscar uma solução única em uma



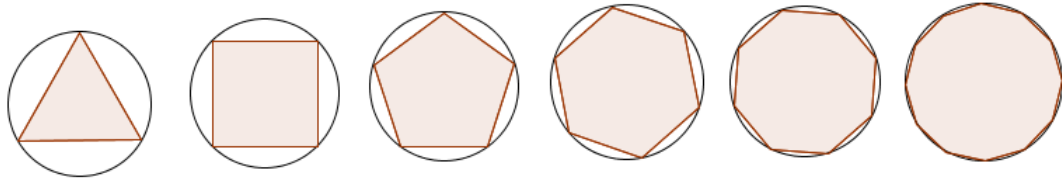


Figura 2: Áreas de polígonos

seqüência de números. Como, por exemplo, calcular a área de uma circunferência de raio  $r$ , a partir da área  $A_n, n \geq 3$  de polígonos regulares inscritos na mesma.

Observe que à medida que o número de lados aumenta indefinidamente, a área da figura se aproxima da área do círculo, ou seja, converge ao valor da área do círculo. Ou ainda, no Exemplo 5 (Seção 2.1), quando os números se tornam cada vez menores convergindo para o 0 (zero).

Nestes dois exemplos, as seqüências possuem termos que se aproximam de um determinado valor. Como podemos verificar isso? Como podemos determinar para qual valor a seqüência converge?

**Definição:** Seja  $(a_n)$  uma seqüência numérica. Dizemos que  $(a_n)$  converge para um número real  $L$  quando, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq n_0$  implica que  $|a_n - L| < \varepsilon$ .

**Notação:**  $a_n \rightarrow L$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

A ideia, portanto, de uma seqüência convergente é que, partindo-se de certo índice  $n_0$ , os termos da seqüência estão bem próximos de uma determinada constante  $L$ .

**Nota:** É importante observar que, dado  $\varepsilon > 0$ , o índice  $n_0$  será determinado a partir dele, ou seja, o índice será interpretado como uma função de  $\varepsilon$ .

**Exemplo:** Prove que  $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$

**Solução:** Dado  $\varepsilon > 0$ , teremos que:

$$|a_n - 1| < \varepsilon \iff \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$  tal que  $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$ .

Para, realmente, vermos que  $n_0$  depende de  $\varepsilon$ , vamos tomar valores para este último e observar como ficará o índice. Por exemplo, tome  $\varepsilon = \frac{1}{10}$  e teremos que  $n_0 = 9$ , enquanto que para  $\varepsilon = \frac{1}{100}$  teremos que  $n_0 = 99$ .

### 3.5 Sequências Limitadas

**Definição:** Uma sequência  $(a_n)$  é limitada quando existe um número real  $M > 0$  tal que  $|a_n| \leq M$ , para todo  $n$  inteiro positivo.

Em outras palavras, o conjunto dos termos da sequência é um conjunto limitado se existe um valor  $M$  tal que todos os seus elementos estão no intervalo  $[-M, M]$ .

**Exemplo:** A sequência  $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$  é limitada. De fato, se fizermos  $M = 1$ , observa-se, claramente, que os seus termos estarão sempre no intervalo  $[-1, 1]$ .

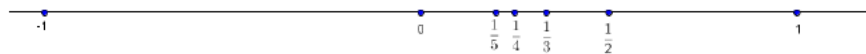


Figura 3: Intervalo

Podemos observar, neste exemplo, através da figura, que os seus limites inferior e superior são, respectivamente, os números 0 e 1.

**Proposição 4.** *Toda sequência convergente é limitada.*

*Demonstração.* Seja  $(a_n)$  uma sequência tal que  $a_n \rightarrow L$ .

Assim, pela própria definição, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \iff L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ .

Tome  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, L - \varepsilon, L + \varepsilon\}$  e considere  $\alpha_1 = \min A, \alpha_2 = \max A$ .

Logo  $\alpha_1 \leq a_n \leq \alpha_2$ . E portanto, a sequência é limitada.  $\square$

Uma das aplicações da proposição é o fato de que sequências ilimitadas não podem ser convergentes. Por exemplo, a sequência  $(a_n) = (n), n \in \mathbb{N}$ .

**Nota:** A recíproca da proposição acima não é verdadeira. Para verificar este fato, basta considerarmos a sequência alternada  $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ , a qual é divergente e limitada. Porém, temos um resultado que garante a convergência de um determinado tipo de sequência limitada. Para isto, definiremos que é uma sequência monótona.

### Propriedades

Sejam  $(a_n)$  e  $(b_n)$  sequências numéricas, tais que  $a_n \rightarrow L_1$  e  $b_n \rightarrow L_2$ . Então:

1.  $a_n + b_n \rightarrow L_1 + L_2$ ;
2.  $c \cdot a_n \rightarrow c \cdot L_1, c \in \mathbb{R}$ ;
3.  $a_n \cdot b_n \rightarrow L_1 \cdot L_2$ ;
4. Se  $L_2 \neq 0$  teremos que  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{L_1}{L_2}$ ;
5.  $|a_n| \rightarrow |L_1|$ ;
6. Se  $f$  é uma função contínua real, então  $f(a_n) \rightarrow f(L_1)$ .

## 3.6 Sequências Monótonas

**Nota:** Dada uma sequência numérica  $(a_n)$  temos que:

- o termo sucessor ao termo geral  $a_n$  é o termo  $a_{n+1}$ ;
- o termo antecessor ao termo geral  $a_n$  é o termo  $a_{n-1}$ .

Observe o comportamento das seqüências:

$$(a) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots\right) \quad (b) \left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots\right) \quad (c) (1, 1, 1, 1, 1, \dots)$$

Dizemos que a seqüência (a) é crescente ou estritamente crescente, pois podemos observar que os seus termos estão cada vez maiores, ou seja,  $a_n < a_{n+1}$ .

A seqüência (b) é decrescente ou estritamente decrescente, pois observamos que os seus termos estão cada vez menores, à medida que os termos avançam, ou seja,  $a_n > a_{n+1}$ .

Os termos da seqüência (c) são sempre os mesmos e a chamamos de seqüência constante, onde  $a_n = a_{n+1}$ . Temos ainda:

- não-decrescente: se seus termos crescem ou permanecem constantes;
- não-crescente: se seus termos decrescem ou permanecem constantes.

A partir das classificações das seqüências, definiremos seqüência monótona.

**Definição:** Dizemos que uma seqüência é monótona quando ela é não-crescente ou não-decrescente. Simbolicamente,  $(a_n)$  é monótona quando  $a_n \leq a_{n+1}$  ou  $a_n \geq a_{n+1}$ .

**Exemplo:** As seqüências  $(a_n) = (n), n \in \mathbb{N}$  e  $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$  são exemplos de seqüências monótonas.

**Nota:** As seqüências não monótonas são chamadas oscilantes. Em outras palavras, são aquelas que não apresentam comportamento somente não-crescente, não-decrescente ou constante.

**Exemplo:** A seqüência  $(a_n) = ((-1)^n \cdot n), n \in \mathbb{N}$ , é um exemplo de seqüência oscilante.

**Nota:** Numa seqüência crescente, o primeiro termo é o seu limite inferior, enquanto que, numa seqüência decrescente, ele será o limite superior.

**Proposição 5.** *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

*Demonstração.* Seja  $(a_n)$  uma sequência crescente e limitada. Assim, a sequência  $(a_n)$  possui um supremo  $S$  e, conseqüentemente, teremos que:

(i)  $a_n \leq S$ , para todo  $n$ .

(ii)  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0; S - \varepsilon \leq a_{n_0}$ .

Como  $(a_n)$  é crescente temos que  $n \leq n_0 \Rightarrow S - \varepsilon \leq a_n \leq S < S + \varepsilon \iff |a_n - S| < \varepsilon$ . Portanto,  $a_n \rightarrow S$ .

□

**Nota** Uma sequência convergente pode não ser monótona. Um exemplo interessante é a sequência  $(a_n) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ .

**Nota** Uma sequência monótona pode ser divergente, por exemplo  $(a_n) = (n!)$ .

**Nota** Uma sequência limitada pode ser divergente. Por exemplo,  $(a_n) = (-1)^n$ , pois, claramente, os pontos dela estão alternando, o que impede que a sequência tenha um limite.

### 3.7 Subseqüências

**Definição:** Seja  $S = \{n_0, n_1, \dots, n_k, \dots\}, k \in \mathbb{N}$  e  $(a_n)$  uma sequência. Uma subseqüência de  $(a_n)$  é uma sequência dada por  $(a_{n_k})$ .

Uma subseqüência é, portanto, uma nova sequência que provém de outra pela eliminação, de maneira ordenada, de alguns termos desta.

**Exemplo 3.1.** As seqüências  $(a_n) = (2n - 2) = (0, 2, 4, \dots, 2n, \dots)$  e  $(a_n) = (2n - 1) = (1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots)$  são exemplos de subseqüências da sequência  $(a_n) = (n)$ .

**Proposição 6.** *Se  $a_n \rightarrow L$ , então  $a_{n \cdot k} \rightarrow L$ .*

*Demonstração.* Como  $a_n \rightarrow L$  temos que  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que  $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$ .

Observemos que  $n \cdot k \geq k$  e, portanto,  $k \geq n_0 \Rightarrow |a_{n \cdot k} - L| < \varepsilon$ .  $\square$

**Nota** Uma importante consequência deste lema é que o limite de uma sequência é único. Além disso, quando uma sequência admite duas subsequências convergindo para pontos distintos teremos que essa sequência é divergente.

**Exemplo 3.2.** Considere a sequência  $(a_n)$  tal que:

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n}, & n \in \{2, 3, 6, \dots\} \\ \frac{n-1}{n}, & n \in \{1, 3, 5, \dots\} \end{cases}.$$

Observe que as subsequências  $\left(\frac{n+1}{n}\right)$  e  $\left(\frac{n-1}{n}\right)$  convergem para 1 e, além disso,  $(a_n)$  converge, também, para 1.

**Proposição 7.** Sejam  $(a_n)$  e  $(b_n)$  sequências tais que  $a_n \rightarrow 0$  e  $(b_n)$  é limitada. Então,  $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ .

**Teorema 3.1.** Sejam  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  e  $(c_n)$  sequências tais que  $a_n \leq c_n \leq b_n$ . Se  $a_n \rightarrow L$  e  $b_n \rightarrow L$ , então  $c_n \rightarrow L$ .

**Teorema 3.2.** Seja  $(a_n)$  converge para  $L$ , então  $\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \rightarrow L$ .

*Demonstração.* Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  temos, pela definição, que para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que  $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Logo,

$$\left| \frac{a_{n_0+1} + \dots + a_n}{n} \right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2}}{n} = \frac{n - n_0}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por outro lado,  $a_1, \dots, a_{n_0}$  é uma quantidade finita de números reais, e segue, imediatamente, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_{n_0}}{n} = 0$ . Assim, existe  $n_1$  tal que  $n \geq n_1 \Rightarrow \left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Tomemos  $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ . Segue que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right| &= \left| \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0}}{n} + \frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_n}{n} \right| < \\ &< \left| \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0}}{n} \right| + \left| \frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_n}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $\left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right) \rightarrow L$ . □

**Exemplo 3.3.** A sequência  $(a_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  é convergente ou divergente? Justifique.

**Solução:** Observamos, inicialmente, que a sequência é crescente.

De fato, quaisquer que sejam os naturais  $m$  e  $n$ , com  $1 \leq m \leq n$ ,

tem-se:

$$(a_m) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \quad \text{e} \quad (a_n) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2}$$

Como  $\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} > 0$ , resulta  $a_n > a_m$ .

Vamos provar a seguir que a sequência é limitada superiormente.

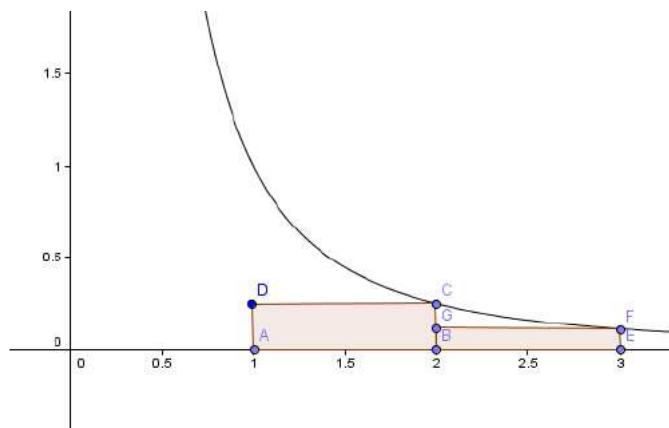


Figura 4: Gráfico  $f(x) = \frac{1}{k^2}$

Temos

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx.$$

Como a sequência  $n \rightarrow \int_1^n \frac{1}{x^2} dx$  é crescente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-1}{n} + 1 \right] = 1$$

Resulta

$$a_n \leq 2, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Segue a sequência é convergente, pois é crescente e limitada superiormente por 2.

**Exemplo 3.4.** A sequência  $(a_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  é convergente ou divergente?

*Justifique.*

**Solução:** Para todo  $n \geq 1$ ,

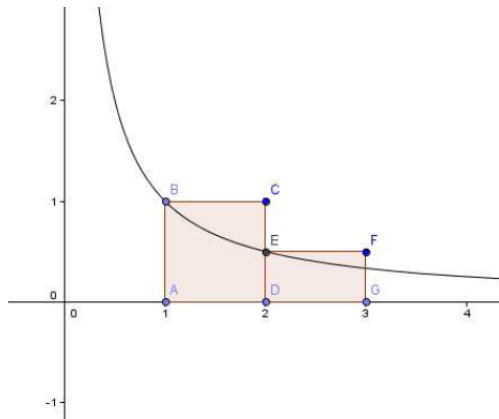


Figura 5: Gráfico  $f(x) = \frac{1}{k}$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

Resulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$



## 4 Frações Contínuas

### 4.1 Contexto Histórico

A origem exata de quando o conceito de frações contínuas foi utilizado, conforme Lima [4] (2010, p. 3 – 7) e Andrade e Bracciali [2] (2005, p. 4 – 7), não é fácil de ser datado, pois se encontram exemplos dessas frações por toda a Matemática desde anos remotos.

Em toda a escrita Matemática, grega e árabe, podemos encontrar exemplos e vestígios de frações contínuas. O cálculo do Máximo divisor comum (MDC), através do algoritmo de Euclides (325 a.C. – 265 a.C.), tem grande influência no estudo das frações contínuas. O matemático indiano Aryabhata (476-550) utilizou as frações contínuas, em exemplos específicos, para resolver equações diofantinas.

O primeiro uso conhecido de frações contínuas foi dado por Rafael Bombelli (1526-1572) que em 1572 deu a aproximação de  $\sqrt{13}$  por:

$$\sqrt{13} \simeq 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}} = \frac{18}{5}.$$

Cataldi (1548-1626), cientista italiano considerado o descobridor das frações contínuas, em 1613, obteve a aproximação para  $\sqrt{18}$ . Mas, assim como Bombelli, não seguiram com os estudos.

$$\sqrt{18} \simeq 4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \dots}}}$$

As frações contínuas se transformaram em objeto de estudos através do trabalho de John Wallis (1616-1703). Em seu livro “Arithmetica Infinitorum”(1655), desenvolveu e apresentou a identidade:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \dots}$$

Que posteriormente foi transformada, pelo primeiro presidente da Royal Society of London, Lord Brouncker, Lord W. Brouncker (1620-1686), na sequência abaixo, que consagrou-se um importantíssimo passo nas aproximações de  $\pi$ .

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}$$

Em seu livro “*Opera Mathematica* ” (1695), Wallis utilizou o termo “fração contínua” pela primeira vez e colocou alguns dos seus fundamentos básicos, como por exemplo, o cálculo do  $n$ -ésimo convergente, descobrindo algumas de suas propriedades.

O matemático e astrônomo holandês Christian Huygens (1629-1695) foi o primeiro a mostrar uma aplicação prática de frações contínuas. Escreveu um artigo explicando como usar os convergentes de uma fração contínua para encontrar as melhores aproximações racionais para as relações entre as engrenagens. Essas aproximações permitiram-lhe escolher as engrenagens com o número correto de dentes.

Parte da teoria moderna foi desenvolvida por Euler em seu trabalho de 1737, “*De Fractionibus Continuis*”, onde cada racional pode ser expresso como uma fração contínua simples finita, além, de uma expressão para o número  $e$ .

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

Euler usou esta expressão para mostrar que  $e$  e  $e^2$  são irracionais. Demonstrou, também, a representação se uma série a partir de fração contínua e vice-versa.

J.H. Lambert generalizou o trabalho de Euler sobre o número  $e$ . Em 1766, ele mostrou que:

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{6}{x} + \frac{1}{\frac{10}{x} + \frac{1}{\frac{14}{x} + \dots}}}}}$$

Em 1768, Lambert encontrou expansões em frações contínuas para as funções  $\log(1+x)$ ,  $\arctg(x)$  e  $tg(x)$ . Ele usou essas expressões para mostrar que  $e^x$  e  $tg(x)$  são irracionais se  $x$  for racional. Lagrange usou frações contínuas para encontrar o valor de raízes irracionais e provou que os números quadráticos irracionais são dados por uma fração contínua periódica.

Enfim, a teoria das frações contínuas se desenvolveu muito e hoje está presente em diversas áreas. Como por exemplo: algoritmos para computador calculando aproximações racionais para os números reais, resoluções de equações diofantinas, problemas na Física e Teoria dos Números. Acredita-se que tanto as suas aplicações; quanto suas pesquisas, estão longe de terminarem.

## 4.2 O Algoritmo de Euclides

A mais antiga descrição que se conhece do método usado no algoritmo de Euclides é da sua obra Elementos (300 a.C). O algoritmo original foi descrito apenas para números naturais e comprimentos geométricos, e a partir do século XIX foi generalizado para outras classes numéricas, conduzindo à noções da Álgebra Abstrata.

O algoritmo é essencial no cálculo do MDC de dois números inteiros, onde o maior dos números é reduzido, a partir de sucessivas divisões, até o resto convergir em zero.

Em uma divisão simples entre dois números inteiros  $a$  e  $b$ , com  $a > b$  temos:

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < b$$

onde  $a$  é o dividendo,  $b$  o divisor,  $q$  o quociente e  $r$  o resto. Por exemplo, se dividirmos 35 por 8 obtemos:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q + r \\ 35 &= 8 \cdot 4 + 3 \end{aligned}$$

Dados  $a, b \in \mathbb{N}$ , com  $a \geq b \geq 0$ . O algoritmo de Euclides, para a determinação do MDC entre  $a$  e  $b$ , compõe-se dos seguintes passos:

Divisões	Quociente	Resto
$a$ por $b$	$a_0$	$r_0$
$b$ por $r_0$	$a_1$	$r_1$
$r_0$ por $r_1$	$a_2$	$r_2$
$r_1$ por $r_2$	$a_3$	$r_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Equacionalizando a tabela teremos:

$$\begin{aligned}
a &= q_0 \cdot b + r_0 (0 < r_0 < b); \\
b &= q_1 \cdot r_0 + r_1 (0 < r_1 < r_0); \\
r_0 &= q_2 \cdot r_1 + r_2 (0 < r_2 < r_1); \\
r_1 &= q_3 \cdot r_2 + r_3 (0 < r_3 < r_2); \\
&\vdots \\
r_{n-3} &= q_{n-1} \cdot r_{n-2} + r_{n-1} (0 < r_{n-1} < r_{n-2}); \\
r_{n-2} &= q_n \cdot r_{n-1}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Segue, que se  $r_i = 0$ , o processo de aplicação do algoritmo findará, seja na 1ª equação ou após certo número de passos, e  $r_{n-1}$  é o MDC dos números  $a$  e  $b$ .

Vejamos um exemplo:

**Exemplo 4.1.** *Seja  $a = 61$  e  $b = 27$ , aplique o algoritmo de Euclides e determine  $MDC(a, b)$ .*

$$\begin{aligned}
61 &= 2 \cdot 27 + 7 \\
&= 3 \cdot 7 + 6 \\
7 &= 1 \cdot 6 + 1 \\
6 &= 6 \cdot 1 \quad \therefore \quad MDC(61, 27) = 1
\end{aligned}$$

As igualdades (3.1) podem ser escritas sob a forma:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= q_0 + \frac{r_0}{b}; & \frac{b}{r_0} &= q_1 + \frac{r_1}{r_0}; & \frac{r_0}{r_1} &= q_2 + \frac{r_2}{r_1}; & \dots \\
\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= q_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} & \text{e} & & \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_n.
\end{aligned}$$

Cada igualdade (exceto a última) contém a representação de uma soma de um número inteiro com uma fração própria. Se fizermos as devidas substituições, atentando que o resto da 1ª equação é o divisor da 2ª, e assim sucessivamente, teremos que:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{r_2}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{r_3}}}}$$

Prolongando este processo, obteremos o desenvolvimento de  $\frac{a}{b}$  sob a forma de uma **Fração Contínua**.

Esses números foram designados como números irracionais. E convencionou-se que todo número irracional corresponde a uma sucessão infinita de segmentos “encaixados”, que não podem ser expressos sob a forma da razão entre números naturais.

### 4.3 Conceitos Básicos

Uma **fração contínua** simples é uma expressão da forma

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_n}}}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_n}}} \quad (3.2)$$

onde  $q_1, q_2, \dots, q_n$  são números inteiros positivos e  $q_0$ , um número inteiro qualquer. O número de termos pode ser finito ou infinito. A fração representada em (3.2) também pode ser representada como  $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$ .

Usando o Exemplo 1 na Seção 3.2, reescrevendo-o em forma de fração contínua, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{61}{27} &= 2 + \frac{7}{27} = 2 + \frac{1}{\frac{27}{7}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{7}{6}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}, \\ &= [2; 3, 1, 6] \end{aligned}$$

O exemplo citado representa um número racional que corresponde à uma fração contínua finita. Ou seja, o número  $\frac{61}{27}$  é igual à fração contínua  $[2; 3, 1, 6]$ .

**Teorema 4.1.** *Todo número racional pode ser representado de duas maneiras distintas sob a forma de fração contínua finita e toda fração contínua finita representa um número racional.*

A fração  $q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_n}}}}$  tem seus termos chamados de quocientes parciais. E a partir deles, determinamos os convergentes (ou aproximante) da fração contínua representada em (3.2).

Seja a sequência  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$  constituída da seguinte maneira:

(3.3)

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{q_0}{1} \\ S_1 &= q_0 + \frac{1}{q_1} \\ S_2 &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} \\ &\vdots \\ S_n &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_n}}}} \end{aligned}$$

Dizemos que  $S_n$  é o  $n$ -ésimo convergente da fração contínua.

**Definição:** Uma fração contínua converge para um valor  $K$  (finito) se no máximo um número finito de  $S_n$  é indefinido e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = K$$

Caso contrário, dizemos que a fração contínua diverge.

**Corolário 1:** Os numeradores  $a_n$  e os denominadores  $b_n$  de uma fração contínua simples satisfazem

$$\begin{cases} a_n = q_n \cdot a_{n-1} + a_{n-2} \\ b_n = q_n \cdot b_{n-1} + b_{n-2} \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} a_{-1} = 1 \\ b_{-1} = 0 \end{cases}$$

## 4.4 Expansão dos números Racionais em Frações Contínuas

Se  $\frac{a}{b}$  é um número racional, ele possui uma expansão em fração contínua simples finita dada por:

$$S_n = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_n}}}} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$$

A representação de um número racional por uma fração contínua simples não é uma tarefa difícil, como pode ser visto nos exemplos a seguir.

$$(a) \quad \frac{91}{62} = 1 + \frac{29}{62} = 1 + \frac{1}{\frac{62}{29}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{29}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{29}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{4}}} = [1; 2, 7, 4]$$

$$(b) \quad \frac{62}{91} = 0 + \frac{62}{91} = 0 + \frac{1}{\frac{91}{62}} = [0; 1, 2, 7, 4]$$

Frações equivalentes possuem a mesma representação (exemplo c).

$$(c) \quad \frac{91 \times 3}{62 \times 3} = \frac{273}{186} = 1 + \frac{87}{186} = 1 + \frac{1}{\frac{186}{87}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{12}{87}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{87}{12}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{7 + \frac{3}{12}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{4}}} = [1; 2, 7, 4]$$

**Teorema 4.2.** *Qualquer fração contínua simples finita representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita.*

*Demonstração.* A demonstração da primeira parte é imediata, pelo fato de se tratar de uma fração contínua simples finita.

Para provar a recíproca, consideremos um número racional  $\frac{a}{b}$  qualquer. Pelo algoritmo da divisão, obtemos:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b}$$

onde  $0 \leq r_0 < b$  e  $q_0 = \frac{a}{b}$ .

Se eles tiverem o mesmo número de elementos, e os elementos correspondentes de uma e outra coincidirem, isto é,  $a_0 = b_0$ ,  $a_1 = b_1$ , ... Se  $r_0 = 0$  e  $\frac{a}{b}$  é um número inteiro, nada há para provar. Porém, se  $r_0 \neq 0$ , então fazemos:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}}, \quad 0 < r_0 < b.$$

Fazemos o mesmo para  $\frac{b}{r_0}$  e obtemos

$$\frac{b}{r_0} = q_1 + \frac{r_1}{r_0}.$$

Se  $r_1 = 0$ , temos:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1} = [q_0; q_1].$$

Terminando a prova.

Se  $r_1 \neq 0$ , repetimos o mesmo procedimento com a fração  $\frac{r_1}{r_0}$ . Observamos que o processo termina quando  $r_n = 0$  para algum  $n$ , o que ocorre, pois  $b > r_0 > r_1 > \dots$  é uma sequência decrescente de inteiros positivos. Temos então:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= q_0 + \frac{r_0}{b}, & 0 < r_0 < b, \\ \frac{b}{r_0} &= q_1 + \frac{r_1}{r_0}, & 0 < r_1 < r_0, \\ & \vdots \\ \frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= q_{n-2} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, & 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\ \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_{n-1}, & r_n = 0. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_{n-1}}}}}$$

Terminando a demonstração. □



## 4.5 Finito X Infinito

Muitos conceitos matemáticos, que no caso finito são bem conhecidos, têm análogos infinitos interessantes. Vejamos alguns exemplos.

O significado de uma fração decimal finita é perfeitamente claro. Por exemplo,  $0,33 = \frac{33}{100}$ . Mas e  $0,333333 \dots$  ?

A soma de um número finito de parcelas também tem sempre um valor definido. Por exemplo,  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ . Mas como entender a soma  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \dots$  ?

Como procurar valores aproximados de algo infinito? É importante que primeiro definamos tanto o significado do número infinito como da soma infinita para depois, calcularmos seus valores.

Apesar das semelhanças superficiais, entre o finito e o infinito existe um abismo. Até o séc. XIX os matemáticos ignoravam estes números. Sem perceber, eles trabalhavam com objetos infinitos, tal como se fossem finitos, obtendo por vezes resultados absurdos. Durante o séc. XIX aprendeu-se a trabalhar com o infinito e foram construídas pontes firmes que permitiram transpor este abismo.

São várias as pontes, mas, em particular, usaremos o *Princípio dos segmentos encaixados ou axioma de Cantor*, que exprime precisamente a propriedade de continuidade de uma reta.

Consideremos uma sucessão infinita de segmentos  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ , contida em uma reta e dotada das propriedades:

- 1) Cada segmento (a começar pelo 2º) está “encaixado” no anterior, e
- 2) O comprimento dos segmentos tende para zero, quando  $n \rightarrow \infty$ .

Nestas condições, existe um e só um ponto que pertença a todos os segmentos.

*Axioma de Cantor: Se em uma reta for dada uma sucessão infinita de segmentos que obedeça às seguintes condições: 1) cada segmento está contido no anterior; 2) o comprimento dos segmentos tende para zero, então existe um e só um ponto que pertence a todos os segmentos.*

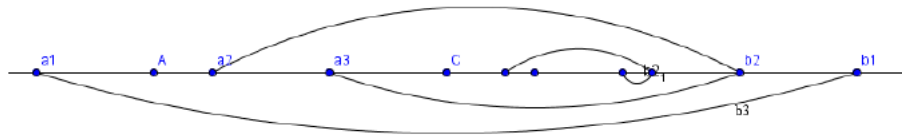


Figura 6: Segmentos encaixados

**Exemplo 4.2.** Considerem no eixo numérico os segmentos

$$[0, 1], \quad \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right], \quad \left[ \frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right], \quad \left[ \frac{7}{16}, \frac{9}{16} \right], \quad \dots, \quad \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \right], \quad \dots,$$

É evidente que o ponto  $\frac{1}{2}$  (e só ele) pertence a todos os segmentos.

**Exemplo 4.3.** Seja dada a sucessão de segmentos

$$[0, 1], \quad \left[ 0, \frac{1}{2} \right], \quad \left[ 0, \frac{1}{3} \right], \quad \dots, \quad \left[ 0, \frac{1}{n} \right], \quad \dots,$$

O ponto 0 (e só ele) pertence a todos os segmentos.

Sendo assim, conseguimos inscrever no intervalo  $[0, 1]$  infinitos números racionais. Mas será que os pontos do conjunto  $\mathbb{Q}$  preenchem inteiramente a reta? Sabemos que não. Um exemplo clássico é a diagonal do quadrado de lado unitário.

Ao construirmos, na reta, o segmento (lado do quadrado), sua diagonal não pertence a este intervalo.

“...Se no eixo numérico forem inscritos todos os pontos racionais e se traçarmos um arco de circunferência com centro em  $O$  e raio  $\overline{OA}$  (fig. 3), esse arco passará por entre os pontos do conjunto  $\mathbb{Q}$  no eixo sem intersectar este conjunto”. (N. Beskin – 1987, pag.53)

Apesar do conjunto  $\mathbb{Q}$  ser **denso**, qualquer segmento por menor que seja contém pontos racionais, não é possível se preencher todo o eixo numérico. Ou seja, mesmo que observadas as condições do *axioma de Cantor*, podem não existir pontos (do conjunto  $\mathbb{Q}$ ) que pertençam a todos estes segmentos.

Esses pontos foram designados como números irracionais. E convencionou-se que todo número irracional corresponde a uma sucessão infinita de segmentos “encaixados”, que não podem ser expressos sob a forma da razão entre números naturais.

## 4.6 Expansão dos Números Irracionais em Frações Contínuas

A partir do momento que se passou a definir e aceitar os números irracionais, muito se evoluiu tanto na Matemática como em outras áreas. E, da mesma forma, o estudo das frações contínuas se estendeu às suas aproximações.

Para construir uma expansão de um número irracional em fração contínua simples, utilizaremos substituições sucessivas, de modo que:

**Definição:** Seja  $x$  um número irracional qualquer e  $a_0 = [x]$ . Onde o operador  $[a]$  significa maior inteiro menor que  $a$ . Então  $x$  pode ser escrito como

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad \text{sendo } 0 < \frac{1}{x_1} < 1 \quad (3.4)$$

Assim

$$x_1 = \frac{1}{x - a_0} > 1$$

é um número irracional.

Da mesma forma, podemos escrever

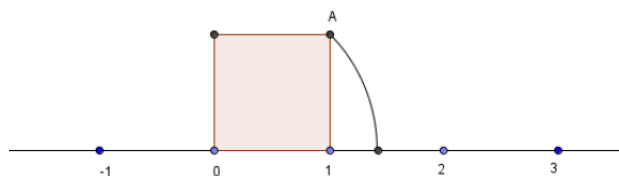


Figura 7: Representação Geométrica da diagonal do quadrado.

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad a_1 = [x_1] \geq 1 \text{ e } 0 < \frac{1}{x_2} < 1$$

e, obtemos então

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} > 1,$$

que, também é um número irracional.

Repetindo esse processo, sucessivamente, obtemos as equações

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 + \frac{1}{x_1}, & x_1 &> 1, \\ x_1 &= a_1 + \frac{1}{x_2}, & x_2 &> 1, a_1 \geq 1, \\ & & \vdots & \\ x_n &= a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, & x_{n+1} &> 1, a_n \geq 1, \\ & & \vdots & \end{aligned}$$

Onde  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  são inteiros e  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  irracionais.

Naturalmente, o processo anterior só terminaria se tivéssemos  $x_n = a_n$  para algum  $n$ , o que é impossível, pois  $x_n$  é um número irracional para todo  $n$ .

Fazendo substituições dos respectivos  $x_i = 1, 2, \dots, n, \dots$  na equação (3.4), obtemos uma fração contínua simples infinita,

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}} \\ &= [a_0; a_1, a_2, \dots] \end{aligned}$$

que é a expansão do número irracional  $x$ .

**Exemplo 4.4.** Expressar  $\sqrt{3}$  como uma fração contínua simples.

Como

$$\sqrt{3} = a_1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{x_1}.$$

*Temos*

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2},$$

*ou seja,*

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}}.$$

*Daí*

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{x_2},$$

*o que nos fornece*

$$x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - 1} = \sqrt{3} + 1.$$

*Dessa forma,*

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3} + 1}},$$

*ou seja,*

$$\sqrt{3} + 1 = x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3} = 2 + \frac{1}{x_3}.$$

*Portanto*

$$x_3 = \frac{1}{(\sqrt{3} + 1) - 2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

*Como  $x_3 = x_1$ , concluímos que  $x_4$  será igual a  $x_2$  e desta forma, continuando com este processo, iremos obter para a sequência  $a_1, a_2, a_3, \dots$  os valores  $1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$ . Logo a fração contínua infinita representando  $\sqrt{3}$  será dada por:*

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

Vejamos um exemplo para o convergente de uma fração contínua simples para números Irracionais.

**Exemplo 4.5.** *Considere a fração contínua simples*

$$x = 4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \dots}}} \quad (1)$$

*Temos então*

$$S_0 = \frac{a_0}{b_0} = \frac{4}{1} = 4,$$

$$S_1 = \frac{a_1}{b_1} = 4 + \frac{2}{8} = \frac{34}{8} = 4,25,$$

$$S_2 = \frac{a_2}{b_2} = \frac{q_2 a_1 + a_0}{q_2 b_1 + b_0} = \frac{8 \cdot 34 + 4}{8 \cdot 8 + 1} = \frac{276}{65} = 4,2461538,$$

$$S_3 = \frac{a_3}{b_3} = \frac{q_3 a_2 + a_1}{q_3 b_2 + b_1} = \frac{8 \cdot 276 + 34}{8 \cdot 65 + 8} = \frac{2242}{528} = 4,22462121,$$

$$S_4 = \frac{a_4}{b_4} = \frac{q_4 a_3 + a_2}{q_4 b_3 + b_2} = \frac{8 \cdot 2242 + 276}{8 \cdot 528 + 65} = \frac{18212}{4289} = 4,2462112$$

Sabemos que  $\sqrt{18} = 4,2426406 \dots$ . Desta forma, a fração contínua (1) pode ser obtida da expansão de  $\sqrt{18}$ . E, os convergentes desta fração tendem para este valor.

Desta forma, podemos preencher a continuidade da reta numérica com os números racionais e irracionais, a partir das aproximações feitas por fração contínuas simples finita(conjunto  $\mathbb{Q}$ ) e infinita(conjunto Irracionais). Essa “reunião” dos conjuntos, afim da busca da continuidade, nos permite uma designação comum: os números reais. Conjunto onde o conceito de número passa a seguir um princípio comum de fatoração e de representação.

## 4.7 Univocidade nos Reais

Admitamos o conjunto dos números Reais como a reunião dos conjuntos dos Racionais e Irracionais. Ao longo do capítulo, representamos cada um destes conjuntos através de frações contínuas. Mas, ainda persiste uma dúvida: Poder-se-á afirmar que qualquer número real pode ser representado por uma fração contínua, sendo essa fração definida univocamente?

Para responder esta pergunta, devemos demonstrar que:

**Teorema 4.3.** Duas frações contínuas  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  e  $[b_0; b_1, b_2, \dots]$  (finitas ou infinitas) são iguais entre si, se e só se,

1. Tiverem o mesmo número de elementos, e
2. Os elementos correspondentes de uma e outra coincidirem, isto é,  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots$ .

**Nota:** “o mesmo número de elementos” deve ser entendido de modo que ambas as frações são finitas e têm o mesmo número de elementos, ou são ambas infinitas.

*Demonstração.* Representemos por  $\alpha$  o valor das duas frações contínuas iguais.

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] = [b_0; b_1, b_2, \dots]$$

O elemento  $a_0$  (tal como  $b_0$ ) é igual a  $[\alpha]$ , e, por conseguinte, é definido univocamente pelo valor de  $\alpha$ . Logo,

$$a_0 = b_0$$

Subtraia-se  $a_0$  a  $\alpha$

$$\alpha - a_0 = [0; a_1, a_2, \dots] = [0; b_1, b_2, \dots].$$

Consideremos a grandeza inversa

$$\frac{1}{\alpha - a_0} = [a_1; a_2, \dots] = [b_1; b_2, \dots].$$

O elemento  $a_1$  (tal como  $b_1$ ) é igual a  $\left[ \frac{1}{\alpha - a_0} \right]$ , e por conseguinte, define-se univocamente a partir do valor de  $\frac{1}{\alpha - a_0}$ . Logo,

$$a_1 = b_1,$$

E assim sucessivamente.

Poderá o número de elementos ser diferente em frações contínuas de valor igual?

Suponhamos que a primeira fração contínua é finita e tem  $s$  elementos, enquanto a segunda é finita e tem  $t$  elementos, sendo  $t > s$ ; ou é infinita. Isso significa que:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \cdots + \frac{1}{a_s}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_s + \frac{1}{b_{s+1} + \cdots}}}}$$

ou

$$a_s = a_s + \frac{1}{b_{s+1} + \cdots}.$$

E, portanto,

$$\frac{1}{b_{s+1} + \cdots} = 0$$

O que é impossível. Concluindo, que  $t = s$ .

Logo, qualquer número real pode ser representado por uma fração contínua, sendo definida univocamente.  $\square$



## 5 Conclusão

### 5.1 Frações Contínuas e o Ensino Médio

A busca por um ensino de qualidade percorre um caminho longo e árduo. Vai além do desejo de cada professor despertar em seu aluno o querer e o prazer de aprender.

O ensinar/aprender se estrutura em quatro alicerces: o professor, o aluno, a estrutura física e a proposta curricular. Sabemos quão importante é o papel de cada um desses alicerces. E que para cada um, é necessário uma reestruturação e aperfeiçoamento constante.

A proposta curricular dos temas matemáticos está passando por avanços, onde se torna essencial a busca por um currículo mais coeso, com conteúdos interrelacionados a cada progressão serial e aplicáveis ao dia-a-dia. A coesão na progressão serial não deve acontecer apenas entre os ensinos Fundamental e Médio. É fundamental também diminuir o distanciamento entre os ensinos Médio e Superior, que acredito ser uma das causas da grande parte das reprovações no início de cada semestre letivo nas disciplinas de Matemática e Cálculo 1.

Nessa perspectiva, minha conclusão e objetivo é tentar mostrar que um conteúdo como Frações Contínuas - visto apenas no Ensino Superior, pode ser abordado de forma mais simples no Ensino Médio, onde será detalhada uma aula sobre a importância na construção do Conjunto dos números Irracionais, suas aproximações a partir de Frações Contínuas e suas aplicações nas mais diversas áreas.

### 5.2 Planejamento de Aula

**Projeto:** Frações Contínuas e o Ensino Médio

**Público alvo:** Alunos do ensino Médio que tenham maior interesse em desenvolver o estudo da Matemática. Alunos participantes de Olimpíadas na área de exatas.

**Duração:** 4 semanas (2 aulas por semana ministradas no contraturno).

**Objetivos:**

- Formalizar e elucidar a criação e importantes passos para a formação de cada conjunto numérico;
- Resgatar noções do infinito;
- Realizar divisões sucessivas(Algoritmo de Euclides);
- Iniciar o estudo de Frações Contínuas;
- Associar o estudo de frações contínuas com as aproximações de números Irracionais;
- Resolver exercícios aplicando os conteúdos aprendidos.

**Conteúdos:**

- História da Matemática;
- Algoritmo de Euclides;
- Frações Contínuas.

**Desenvolvimento:**

**1ª aula:** A história dos números

Faríamos um apanhado geral sobre a história dos números e seus principais estudiosos, ressaltando pontos essenciais e que geraram polêmicas no decorrer dos fatos (Capítulo1). E fecharíamos com o “ápice” do questionamento dos Pitagóricos.

Como fechamento seria pedido para pesquisa, na aula (laboratório de informática) uma pesquisa sobre o  $\sqrt{2}$ , a demonstração de sua irracionalidade e construção na reta numérica. Falaríamos do  $\pi$  e do  $\phi$ (número de ouro).

**Material utilizado:** Apresentação em powerpoint e Internet.

**2ª aula:** Demonstração da  $\sqrt{2}$  e sua Irracionalidade

A aula se concentraria na demonstração da irracionalidade do  $\sqrt{2}$  e  $\phi$  (número de ouro), e também, suas construções geométricas.

**Material utilizado:** Régua, compasso, par de esquadros.  
Geogebra.

**3ª e 4ª aulas:** Algoritmo de Euclides

Tomando como partida, que todo número racional pode ser escrito como a razão entre dois números:  $\frac{a}{b}$ , com  $b \neq 0$ . Introduziríamos o Algoritmo de Euclides (de acordo com o apresentado neste trabalho) com suas propriedades e exemplos. Terminaríamos por tecer uma relação com a aula seguinte, que será de Frações Contínuas.

*Exemplo:* Aplicando o algoritmo de Euclides, determine o MDC entre 47 e 11.

$$47 = 11 \cdot 4 + 3$$

$$11 = 3 \cdot 3 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2 \quad \therefore \quad \text{MDC}(47,11) = 1$$

E a partir desta e de outras resoluções, introduziríamos a ideia de Fração Contínua, mostrando novas formas de se escrever números racionais.

Como por exemplo:

$$\frac{47}{11} = 4 + \frac{3}{11}$$

$$\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\text{E reescreveríamos: } \frac{47}{11} = 4 + \frac{3}{11} = 4 + \frac{1}{\frac{11}{3}} = 4 + \frac{1}{3 + \frac{2}{3}} = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} =$$

$$4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

**Material utilizado:** Quadro branco.

**5ª e 6ª aulas:** Frações Contínuas

Neste momento, faríamos a introdução sobre Frações Contínuas. Onde falaríamos um pouco da história, ressaltando seus grandes estudiosos, e usaríamos das definições mais básicas e os seus convergentes.

Também usaríamos de exemplos de aproximações, tanto de números racionais, como também irracionais.

A aula seria, basicamente, um resumo do capítulo sobre Frações Contínuas abordado neste trabalho. Usaríamos bastante exemplos, afim de se trabalhar o cálculo em si.

**Material utilizado:** Apresentação em powerpoint. Quadro branco.

**7ª e 8ª aulas:** Aplicações do uso de Frações Contínuas

As duas aulas seriam dedicadas a resolução de exercícios. Onde, no 1º momento, seria dados como desafios, para no 2º momento a busca da resolução e possíveis dúvidas.

**Material utilizado:** Quadro branco

**Exercício 1:** Um fabricante de relógios precisa produzir dois tipos de rodas dentadas na razão  $\sqrt{2}$  por 1. É impraticável que estas rodas tenham mais que 20 dentes. Encontre algumas possibilidades para os números de rodas que irão aproximar a razão desejada, utilizando as aproximações dadas pelos convergentes consecutivos de uma fração contínua simples. [Adaptado de Sanches; Salomão (2003)].

A Relação de transmissão, da coroa (engrenagem maior) para o pinhão (engrenagem menor), pode ser representada por  $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$ , onde  $x$  representa o número de dentes

da coroa e  $y$  representa o número de dentes do pinhão, com  $x$  e  $y$  inteiros positivos.

Para representar a raiz na forma de frações contínuas aritmeticamente, devemos escrever, seqüencialmente, os convergentes, até se obter uma fração que responda a questão, ou seja, que respeite a condição de contorno dada pelo limite de 20 dentes, para a engrenagem maior (coroa).

$$c_0 = \sqrt{2} = 1,4142136 = 1 \quad (1^\circ \text{convergente})$$

$$c_1 = \sqrt{2} = 1,4142136 = 1 + 0,4142136 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{0,4142136}} = 1 + \frac{1}{2,4142136}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad (2^\circ \text{convergente})$$

$$c_2 = 1 + 0,4142136 = 1 + \frac{1}{2,4142136} = 1 + \frac{1}{2 + 0,4142136} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2,4142133}}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} \quad (3^\circ \text{convergente})$$

$$c_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2,4142133}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 0,4142133}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2,41421151}}}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}} = 1 + \frac{12}{5} = \frac{17}{12} \quad (4^\circ \text{convergente})$$

O 4º convergente revela que o nº de dentes da coroa seria 17 e o do pinhão 12, com aproximação dada por:  $\frac{17}{12} = 1,4166667$ , o que proporciona uma aproximação correta até a ordem das centenas, que para um par de engrenagens usuais é satisfatória. Determinando-se o 5º e 6º convergente, temos:

$$c_4 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2,4142151}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 0,4142151}}} \iff$$

$$c_4 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2,4142046}}}} \approx \frac{41}{29}$$

$$c_5 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2,1442046}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 0,4142046}}}} \iff$$

$$c_5 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2,4142658}}}} \approx \frac{99}{70}$$

Observa-se que, nos seis primeiros convergentes, existe uma repetição do algarismo 2. Será que tal conjectura é verdadeira? Para verificá-la, de modo mais geral, podemos escrever um segundo procedimento, de natureza algébrica.

$$\text{De } \sqrt{2} = 1,4142136 = 1 + \frac{1}{x_1}.$$

$$\text{Temos: } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1},$$

que racionalizando resulta:  $x_1 = \sqrt{2} + 1$ .

$$\text{Como } \sqrt{2} > 1, \text{ então: } x_1 = 1 + \sqrt{2} = 1 + 1 + \frac{1}{x_2} = 2 + \frac{1}{x_2}.$$

Assim:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_2}}. \text{ De: } x_1 = \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2} \rightarrow$$

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2} \rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_2} \rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = x_1.$$

Assim, por substituições sucessivas:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_3 + \dots}}}$$

$$[1; 2, 2, 2, 2, \dots] = [1; \bar{2}]$$

Este algoritmo exemplifica que um número irracional tem representação infinita na forma de fração contínua simples periódica.

Temos ainda, um terceiro procedimento, também de natureza algébrica, para expressar o número  $\sqrt{2}$  na forma de uma fração contínua, que consiste em escrever a equação polinomial  $x + 1 = \sqrt{2}$ .

Elevando-se ao quadrado ambos os lados, desenvolvendo o 1º membro e ordenando os termos em  $x$  no 1º membro, tem-se:  $(x + 1)^2 = 2 \rightarrow x^2 + 2 \cdot x + 1 = 2 \rightarrow x^2 + 2 \cdot x = 1$ . O próximo passo é fatorar o 1º membro e isolar  $x$ , de modo que:  $x^2 + 2 \cdot x = 1 \rightarrow x \cdot (x + 2) = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2 + x}$ . Deste modo, no denominador do 2º membro está presente a incógnita  $x$ , que novamente por ser substituída, de modo recorrente, resultando a expressão em forma de fração contínua.

$$x = \frac{1}{2+x} \rightarrow x = \frac{1}{2+\frac{1}{2+x}} \Rightarrow x = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}} \Rightarrow x = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}} = [0; 2, 2, 2, 2, \dots]$$

Como  $\sqrt{2} = x + 1$ , temos que  $\sqrt{2} = 1 + [0; 2, 2, 2, \dots] = [1; 2, 2, 2, \dots]$

**Exercício2:** O número de ouro ( $\phi$ ) tem sua representação a partir da fração contínua mais simples (e bela!) de se escrever :  $\phi = [1; 1, 1, 1, \dots]$ .

Vejamos como ela se desenvolve:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x + 1}{x} \Rightarrow x = \frac{x + 1}{x} \Rightarrow$$

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180340 \dots$$

Ao escrevermos os convergentes tem-se:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 1,61803398874989 = 2 \quad (1^\circ \text{convergente}) \\
 x_1 &= 1,6180340 = 1 + 0,6180340 = 1 + \frac{1}{1,618034} \approx \\
 1 + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \quad (2^\circ \text{convergente}) \\
 x_2 &= 1 + \frac{1}{1,6180340} = 1 + \frac{1}{1 + 0,6180340} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1,6180341}}} \\
 &\approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{5}{3} \quad (3^\circ \text{conv.}) \\
 x_3 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1,6180341}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 0,6180341}} = \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1,6180338}}}} \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{8}{5} \quad (4^\circ \text{conv.})
 \end{aligned}$$

Ao continuarmos, estes valores expressam a razão entre dois termos consecutivos da Seqüência de Fibonacci, dada por:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots).$$

Para finalizar seria lançado o desafio/enigma do Calendário

**Enigma:** O Calendário Gregoriano: Uma incrível coincidência!

Como é de conhecimento de todos, o nosso calendário segue um ciclo de 3 anos com 365 dias e 1 ano bissexto com 366 dias. Mas por que isso ocorre?

**Resolução:** O ano trópico, aquele que marca as estações, tem a duração média de 1 ano = 365 dias 5 horas 48 minutos e 46 segundos = 365, 242199 dias. O calendário Juliano, estabelecido em 45 a. C., considera a aproximação 1 ano = 365 dias 6 horas = 365,25 dias. E portanto, haverá uma diferença de cerca de 11 minutos.

Esta diferença de 11 minutos, em cem anos causava um desvio de:



$$\begin{aligned}
11\text{min } 14\text{s} &\rightarrow 1 \text{ ano} &\Rightarrow x = 67400\text{s} &= 1123,3333 \text{ min} \\
x &\rightarrow 100 \text{ anos} \\
= 1123 \text{ min } 20\text{s} &= 18\text{h } 43 \text{ min } 20\text{s}.
\end{aligned}$$

Esta aproximação causou um problema: as estações reais haviam retrocedido treze dias em relação ao calendário Juliano. Em 1582, o papa Gregório III convocou matemáticos e astrônomos para resolver este problema. Desde 45 a.C. até 1582, se passaram 1627 anos, sendo o desvio acumulado desde então:

$$\begin{aligned}
11\text{h } 43\text{min } 20\text{s} &\rightarrow 100 \text{ anos} &\Rightarrow x = 1096598\text{s} &= 18276 \text{ min } 38\text{s} = \\
x &\rightarrow 1627 \text{ anos} \\
= 304\text{h } 36\text{min } 38\text{s} &= 12\text{dias } 16\text{h } 36\text{min } 38\text{s}.
\end{aligned}$$

Para tal, principiou-se em se calcular o desvio proporcionado para um dia. Se em 1 ano o desvio é de  $11\text{min } 14\text{s}$  ( $674\text{s}$ ), então  $1\text{dia} = 24\text{h} = 1440\text{min} = 86400\text{s}$  proporciona um desvio dado por:  $86400\text{s} : 674\text{s} = 128,19$  anos. Assim, ocorre um desvio de 128 anos para cada dia, ou ainda, de cerca de 3 dias em cada 400 anos.

Este encaminhamento proporcionou uma pequena alteração na intercalação de três anos de 365 dias e um ano de 366 dias do calendário juliano. Para retirar estes 3 dias, a regra foi introduzir o ano bissexto, que era aquele dado pela seguinte regra: os anos múltiplos de 100 deixariam de ser bissextos, exceto pelos múltiplos de 400.

Enquanto a duração média do ano Juliano era de 365 dias 6h, com a retirada de três dias do calendário gregoriano, o valor passou a ser  $365\frac{97}{400}$  dias =  $365,242500$  dias = 365 dias 5 horas 49 min 12 s .O que ainda causa uma diferença de cerca de 26 segundos do valor real.

A duração média de 1 ano = 365 dias 5 horas 48 min 46 s =  $365,242199$  dias.

$$\text{A fração } \frac{5\text{h } 48\text{min } 46\text{s}}{1\text{dia}} = \frac{20926}{86400} = \frac{10463}{43200}$$

Usando o algoritmo de Euclides:

$a_i$	4	7	1	3	5	64
43200	10463	1348	1027	321	64	1
1348	1027	321	64	1	0	

A fração contínua correspondente a 1 ano = 365 dias 5 horas 48 min 46 s = [365; 4, 7, 1, 3, 5, 64].

O 1º convergente é 365 dias.

O 2º convergente é dado por:  $365\frac{1}{4}$  dias, própria do calendário Juliano.

O 3º convergente é dado por:  $365\frac{1}{4 + \frac{1}{7}} = 365\frac{7}{29}$  dias, ou seja, 7 anos bissextos a cada 29 anos.

O 4º convergente é dado por:  $365\frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1}}} = 365\frac{8}{33}$  dias, ou seja, 8 anos bissextos a cada 33 anos.

O 5º convergente é dado por  $365\frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} = 365\frac{31}{128}$  dias, ou seja, 31 anos a cada 128 anos bissextos.

O que nos leva a:

31anos bissextos → 128 anos do calendário →  $x = 96,875 \approx 97$   
 $x$  → 400 anos do calendário  
 anos bissextos.

Isto não é uma incrível coincidência, levando-se em consideração que na época do papa Gregoriano III as frações contínuas não eram um assunto estabelecido.

## Referências

- [1] **Aaboe, A.** *Episódios da História Antiga da Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro-1984.
- [2] **Andrade, E.X.L. e Bracciali, C.F.** *Frações Contínuas*. Editora Plêiade, 2005 .
- [3] **Bekken, O.B.** *Equações de Ahmes até Abel*. Universidade de Santa Úrsula, 1994. Tradução de José Paulo Quinhões Carneiro.
- [4] **Beskin, N.M.** *Frações Contínuas - Iniciação à Matemática*. Editora Mir Moscovo, 1987. Tradução de Pedro Lima.
- [5] **Boyer, C.B.** *História da Matemática*. Ed. da Universidade de São Paulo, São Paulo-1974 .
- [6] **Brolezzi, A.C.** *A Arte de Contar*. Dissertação de Mestrado. São Paulo, Faculdade de Educação da USP, 1991.
- [7] **Brolezzi, A.C.** *A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática*. Tese de Doutorado. São Paulo, USP-1996.
- [8] **Caraça, Bento de J.** *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa-1989, p. 3.
- [9] **Carneiro, José P.Q.** *Um processo finito para a raiz quadrada*. RPM 34, 1997, p.36-44.
- [10] **Cunha, M.O.** *Sobre a idéia de algoritmo*. SEMA/USP, 2007 .
- [11] **Guidorizzi, H.L.** *Um curso de Cálculo-vol.4*. GRUPO GEN - LTC, 2002.
- [12] **Nascimento, Paulo H. R. e Rodrigues, Fábio S.** *Licenciatura em Matemática-Cálculo III*. FTC-EaD, Bahia-2007.
- [13] **Niven, I.** *Números Racionais e Irracionais*. SBM, 1984.
- [14] **Olds, C.D.** *Continued Fractions-New Mathematical Library* Random House.

- [15] **Pommer, W.M.** *Frações Contínuas no Ensino Médio?*. São Paulo: FEUSP,2009. p.3-4,11-12.
- [16] **Ribnikov, K.** *História de las Matemáticas*. Moscou. Ed. Mir - 1987.
- [17] **Rockett, A.M. e Szüsz, P.** *Continued Fractions*. World Scientific.
- [18] **Santos, J.P.** *Introdução à Teoria dos Números*. Editora da UNICAMP, 1997.
- [19] **Schubring, G.** *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17-19th Century*. France and Germany: Springer, 2005.