



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

PAULO HENRIQUE ROBEL

**UMA ABORDAGEM PARA A MATEMÁTICA EM CURSOS  
DA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL TÉCNICA DE NÍVEL  
MÉDIO A PARTIR DE CONTEXTOS DA PRÁTICA  
PROFISSIONAL**

---

Londrina  
2019

PAULO HENRIQUE ROBEL

**UMA ABORDAGEM PARA A MATEMÁTICA EM CURSOS  
DA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL TÉCNICA DE NÍVEL  
MÉDIO A PARTIR DE CONTEXTOS  
DA PRÁTICA PROFISSIONAL**

Dissertação de mestrado apresentada ao  
Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional da Universidade Estadual de  
Londrina como requisito parcial à obtenção  
do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Regina Célia Guapo  
Pasquini

Londrina  
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Robel, Paulo Henrique.

Uma abordagem para a Matemática em Cursos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio a partir de contextos da prática profissional / Paulo Henrique Robel. – Londrina, 2019.

170 f. : il.

Orientadora: Regina Célia Guapo Pasquini.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2019.

Inclui bibliografia.

1. Educação Profissional Técnica de Nível Médio - Tese. 2. Problemas de Matemática Financeira - Tese. 3. Problemas de Estatística Aplicada - Tese. 4. Calculadora financeira e planilhas de cálculo - Tese. I. Pasquini, Regina Célia Guapo. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

PAULO HENRIQUE ROBEL

**UMA ABORDAGEM PARA A MATEMÁTICA EM CURSOS  
DA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL TÉCNICA DE NÍVEL  
MÉDIO A PARTIR DE CONTEXTOS DA PRÁTICA  
PROFISSIONAL**

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientadora: Prof. Dra. Regina Célia Guapo  
Pasquini  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dra. Luciane Grossi  
Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG

---

Prof. Dra. Magna Natália Marin Pires  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 22 de março de 2019.

Dedico este trabalho a todos os professores e professoras da Educação Básica, de todas as disciplinas, que não medem esforços para se aprimorarem e oferecerem uma educação de qualidade à população.

## **AGRADECIMENTOS**

“E, quanto fizerdes por palavras ou por obras, *fazei* tudo em nome do Senhor Jesus, dando por ele graças a Deus Pai.” (Colossenses, 3:17)

Agradeço a Deus por ter me conduzido com suas mãos no decorrer deste curso, ajudando a todo momento.

Agradeço à Professora Dra. Regina Célia Guapo Pasquini, que, como é de seu tradicional carisma, aceitou prontamente a ser minha orientadora, ajudando-me em todo momento na elaboração deste trabalho, ensinando-me em aspectos diversos como redação, normas técnicas e, principalmente, com diversas ideias que deram origem aos problemas aqui apresentados.

A minha querida esposa Jacqueline e minhas queridas filhas Laura e Lorena pelo apoio incondicional, companheirismo, incentivo e cooperação durante a realização do curso.

Agradeço à Transportadora Falcão Ltda., na pessoa de seus gerentes Romualdo e Amarildo, seus diretores Milton e Edno, que liberou-me do trabalho nos dias de aula e orientações que coincidiam com o expediente da empresa.

Agradeço à Professora Dra. Ana Lúcia da Silva pelo incentivo no decorrer deste curso.

Agradeço aos companheiros do Colégio Estadual Vicente Rijo pelo constante incentivo.

“Aristipo, filósofo socrático, lançado por uma tempestade às praias de Rodes, observando algumas figuras geométricas, conta-se que exclamou a seus companheiros desta maneira: Coragem, meus amigos, não temam, pois aqui descubro passos de homens.” (Vitruvius, *De Architectura*, livro sexto, prefácio).

ROBEL, Paulo Henrique. **Uma abordagem para a Matemática em Cursos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio a partir de contextos da prática profissional**. 2019. 170 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

## RESUMO

Este trabalho é voltado para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio, no contexto da Educação Básica. Mais especificamente, aos Cursos Técnicos subsequentes do eixo tecnológico de Gestão e Negócios, a saber, os Cursos Técnicos em Administração, Contabilidade, Logística, Recursos Humanos e Secretariado. O objetivo geral é apresentar uma proposta para o tratamento de conteúdos das disciplinas de Matemática Financeira e de Estatística Aplicada para os cursos supracitados. Realizamos este tratamento por meio de problemas que trazem situações reais a serem vivenciadas por cada egresso que opta por este tipo de formação, problemas inerentes da profissão de cada um. Subsequente à solução analítica do problema traz-se uma solução via calculadoras e/ou planilhas eletrônicas. É relevante a utilização destes recursos, visto que, no mercado de trabalho eles podem ser considerados essenciais para o desenvolvimento das operações realizadas. Escolheu-se compor o texto em uma linguagem que traz detalhadamente a solução do problema em questão, viabilizando sua utilização àqueles que desejarem. Espera-se, com a proposta apresentada, contribuir com a abordagem dos assuntos tratados, com o trabalho do professor de Matemática e, conseqüentemente, com a educação profissional em geral.

**Palavras-chave:** Educação Profissional Técnica de Nível Médio. Problemas de Matemática Financeira. Problemas de Estatística Aplicada. Calculadora financeira. Planilha de cálculo.

ROBEL, Paulo Henrique. **An approach to Mathematics in Courses of the Technical Professional Education of Middle Level from professional practical contexts**. 2019. 170 p. Dissertation (Professional Master in Mathematics) – Londrina State University, Londrina, 2019.

### **ABSTRACT**

This work aims at Technical Professional Education of Middle Level in the context of Basic Education. To be more specific, its target is subsequent Technical Courses of the technological axis of Management and Businesses, namely, Administration, Accountancy, Logistics, Human Resources and Secretariat Technical Courses. The general objective is to present a proposal on how to treat the contents of the Financial Mathematics and Applied Statistics in these courses. This treatment is worked through problems that bring forth real situations lived by each graduate that chooses this kind of course, problems inherent to each one's profession. After the analytical solution of the problem it is presented a solution using financial calculators and / or spreadsheets. It is important to use these resources since in labor market they may be considered essential in developing operations. It was chosen to write the text in a language that shows the solution in details, facilitating its use by people who wants to work with them. I hope that the presented proposal can contribute to a better approach of the treated matters, aimed at the work of Mathematics teacher and further, with professional education in general.

**Key words:** Technical Professional Education of Middle Level. Financial Mathematics problems. Applied Statistics problems. Financial calculators. Spreadsheets.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Calculadora HP12C .....	48
Figura 2: Planilha .....	51
Figura 3: Fórmulas usadas para uma aproximação de e .....	51
Figura 4: Capitalização composta contínua de R\$ 100,00 a 3% ao bimestre.....	53
Figura 5: Fórmulas utilizadas para cálculo do montante composto contínuo.....	53
Figura 6: Cálculo do rendimento líquido de um investimento .....	57
Figura 7: Fórmulas para cálculo do rendimento líquido .....	58
Figura 8: Cálculo da inflação acumulada - set/2017 a ago/2018 .....	60
Figura 9: Fórmulas utilizadas para calcular a inflação acumulada .....	60
Figura 10: Tabela do Sistema Francês de Amortização – 1º passo .....	68
Figura 11: Tabela do Sistema Francês de Amortização – 2º passo .....	69
Figura 12: Tabela do Sistema Francês de Amortização - 3º passo.....	69
Figura 13: Tabela do Sistema Francês de Amortização - final.....	70
Figura 14: Fórmulas utilizadas para cálculo do Sistema Francês de Amortização.....	70
Figura 15: Planilha com a fórmula para calcular o valor da parcela de um financiamento.....	71
Figura 16: Fórmulas para cálculo do SAC na planilha de cálculo .....	74
Figura 17: Simulação de um empréstimo por dois meses em uma financeira .....	81
Figura 18: Simulação de um empréstimo por doze meses em uma financeira .....	83
Figura 19: Cálculo da taxa de um empréstimo usando planilha de cálculo.....	84
Figura 20: Utilizando a função TAXA da planilha de cálculo .....	85
Figura 21: Entrada de dados para a função TAXA.....	85
Figura 22: Função TAXA - resultado final .....	86
Figura 23: Cálculo da taxa de uma série - a função TIR.....	88
Figura 24: Entrada de dados para a função TIR .....	89
Figura 25: Resultado final da função TIR.....	89
Figura 26: Alíquotas de ICMS .....	94
Figura 27: Planilha de cálculo de frete .....	95
Figura 28: Fórmulas utilizadas para o cálculo de frete .....	96
Figura 29: Tabelas do INSS, Imposto de Renda e de Salário Família.....	104
Figura 30: Folha de pagamento - primeira parte .....	104
Figura 31: Folha de pagamento - segunda parte .....	105
Figura 32: Fórmulas da folha de pagamento - primeira parte .....	105
Figura 33: Fórmulas da folha de pagamento - segunda parte .....	105
Figura 34: Cálculo do INSS.....	107
Figura 35: Cálculo do Imposto de Renda.....	107
Figura 36: Atualização de valores.....	110
Figura 37: Fórmulas para atualização de valores.....	111
Figura 38: Cálculo do valor futuro de uma série .....	119
Figura 39: Fórmulas para cálculo do valor futuro de uma série .....	120
Figura 40: Inflação acumulada entre 2008 e 2017.....	121
Figura 41: Fórmulas utilizadas para acumular a inflação.....	122
Figura 42: Preço Unitário (PU) de um título do Governo Federal.....	132

Figura 43: Percentuais de itens de consumo em relação à renda total.....	141
Figura 44: Fórmula para cálculo de percentuais da renda.....	141
Figura 45: O plano cartesiano .....	143
Figura 46: Dados para geração de um gráfico.....	145
Figura 47: Seleção de dados para geração de um gráfico.....	145
Figura 48: Ferramenta Gráfico da planilha de cálculo .....	146
Figura 49: Gráfico de barras gerado na planilha de cálculo .....	146
Figura 50: Gráfico de setores gerado na planilha de cálculo .....	147
Figura 51: Acumulação do índice de inflação.....	148
Figura 52: Acumulação do índice de inflação - continuação.....	149
Figura 53: Acumulação do índice de inflação - continuação.....	149
Figura 54: Acumulação do índice de inflação - continuação.....	150
Figura 55: Fórmula utilizada para acumular índices de inflação.....	150
Figura 56: Atualização da renda e itens de consumo .....	151

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: CDI de setembro de 2017 a agosto de 2018 .....	55
Tabela 2: Exemplo do Sistema de Amortização Constante.....	73
Tabela 3: Simulação de um empréstimo habitacional usando o SAC.....	75
Tabela 4: Plano de pagamento de um financiamento .....	86
Tabela 5: Cotação de frete .....	90
Tabela 6: Cotação de frete com valores.....	91
Tabela 7: Regra de três para cálculo de hora extra.....	97
Tabela 8: Tabela de INSS .....	100
Tabela 9: Tabela do Imposto de Renda.....	100
Tabela 10: Tabela do Salário Família .....	100
Tabela 11: Conversão do salário mínimo em dólar.....	109
Tabela 12: Câmbio entre real e dólar.....	138
Tabela 13: Câmbio entre Real e Euro.....	138
Tabela 14: Câmbio entre Real, Euro e Dólar .....	138
Tabela 15: Despesas médias mensais familiares .....	139

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDI	Certificado de Depósito Interbancário
DET	Departamento de Educação e Trabalho da Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná
FGV	Fundação Getúlio Vargas
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
INPC	Índice Nacional de Preços ao Consumidor
INSS	Instituto Nacional de Seguridade Social
IPEA	Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada
LDBEN	Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PROEP	Programa de Expansão da Educação Profissional
PU	Preço Unitário de um título do Tesouro Nacional
SAC	Sistema de Amortização Constante
SEED	Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná
SELIC	Sistema Eletrônico de Liquidação e Custódia

# Sumário

INTRODUÇÃO.....	3
CAPÍTULO 1.....	9
1. OS CURSOS DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL.....	9
1.1 EDUCAÇÃO PROFISSIONAL: ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS.....	9
1.2 EDUCAÇÃO PROFISSIONAL: ASPECTOS DO SEU FUNCIONAMENTO ATUALMENTE.....	16
1.3 EDUCAÇÃO PROFISSIONAL: OS CURSOS TÉCNICOS PROFISSIONALIZANTES DO COLÉGIO ESTADUAL VICENTE RIJO – LONDRINA, PR.....	18
1.3.1 CURSO TÉCNICO EM ADMINISTRAÇÃO.....	19
1.3.2 CURSO TÉCNICO EM CONTABILIDADE.....	23
1.3.3 CURSO TÉCNICO EM LOGÍSTICA.....	26
1.3.4 CURSO TÉCNICO EM SECRETARIADO.....	28
1.3.5 CURSO TÉCNICO EM RECURSOS HUMANOS.....	31
CAPÍTULO 2.....	35
2. OS CURSOS TÉCNICOS PROFISSIONALIZANTES.....	35
2.1 ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS PARA OS CURSOS TÉCNICOS: O QUE OS DOCUMENTOS OFICIAIS NOS DIZEM?.....	35
2.2 ACERCA DAS ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS NOS CURSOS TÉCNICOS PROFISSIONALIZANTES.....	39
2.3 OS PROBLEMAS NO ÂMBITO DOS CURSOS TÉCNICOS PROFISSIONALIZANTES.....	40
2.4 ACERCA DAS TECNOLOGIAS: PLANILHAS DE CÁLCULO E CALCULADORA FINANCEIRA.....	43
CAPÍTULO 3.....	45
3. PROBLEMAS E SOLUÇÕES PARA CURSOS TÉCNICOS PROFISSIONALIZANTES.....	45
3.1 PROBLEMAS PARA O CURSO TÉCNICO EM ADMINISTRAÇÃO.....	45
3.2 PROBLEMAS PARA O CURSO TÉCNICO EM LOGÍSTICA.....	90
3.3 PROBLEMAS PARA O CURSO TÉCNICO EM RECURSOS HUMANOS.....	96
3.4 PROBLEMAS PARA O CURSO TÉCNICO EM CONTABILIDADE.....	109
3.5 PROBLEMAS PARA O CURSO TÉCNICO EM SECRETARIADO.....	136
3.6 ALGUNS PROBLEMAS SOBRE TRATAMENTO DE INFORMAÇÃO.....	139
CAPÍTULO 4.....	152
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	152
REFERÊNCIAS.....	154
APÊNDICE.....	156

SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA .....	156
DEMONSTRAÇÃO DA CONVERGÊNCIA DA SEQUÊNCIA DE TERMO GERAL .....	157
PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA .....	159

# INTRODUÇÃO

---

*“Se emprestares dinheiro ao meu povo, ao pobre que está contigo, não te haverás com ele como usurário; não lhe imporás usura.”  
(Êxodo, 22:25)*

No ano de 2003 o Governo do Estado do Paraná retomou a Educação Profissional Técnica de Nível Médio, que até então estava com oferta reduzida e sendo gerenciada pela PARANATEC, extinguindo esta última e criando na Secretaria Estadual de Educação (SEED) o Departamento de Educação e Trabalho (DET).

Esta retomada foi precedida de amplos debates em âmbito estadual em fóruns que reuniam professores da Educação Profissional Técnica de Nível Médio. A partir destes debates, a Educação Profissional Técnica de Nível Médio foi retomada tendo o trabalho como princípio educativo. De acordo com as Diretrizes da Educação Profissional do Estado do Paraná:

(...) a partir de 2003, a política estabelecida para a Rede Estadual iniciou não somente a retomada da oferta pública e gratuita da formação para o trabalho mas, também, passou a assumir a concepção de ensino e currículo em que o trabalho, a cultura, a ciência e a tecnologia constituem fundamentos sobre os quais os conhecimentos escolares devem ser trabalhados e assegurados, na perspectiva da escola unitária e de uma educação politécnica.” (PARANÁ, 2006, p. 15).

A Educação Profissional Técnica de Nível Médio é ofertada nas modalidades *articulada* e *subsequente*. Na modalidade *articulada* ela pode ser ofertada na forma *integrada* ou *concomitante*. Na forma *integrada* a/o estudante cursa na mesma instituição as disciplinas do Ensino Médio Normal e as disciplinas técnicas. Na forma *concomitante* a/o estudante cursa em uma instituição as disciplinas do Ensino Médio Normal e em outra as disciplinas técnicas. A

modalidade *subsequente* é destinada a pessoas que já concluíram o Ensino Médio.

Os cursos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio são organizados por eixos tecnológicos constantes do Catálogo Nacional de Cursos Técnicos, mantido pelo Ministério da Educação. Assim, por exemplo, os Cursos Técnicos em Administração, Contabilidade, Logística, Recursos Humanos e Secretariado, mencionados no decorrer deste trabalho, pertencem ao eixo tecnológico de Gestão e Negócios. Já o Curso Técnico em Informática pertence ao eixo tecnológico de Informação e Comunicação.

O Colégio Estadual Vicente Rijo, em Londrina – PR oferta os Cursos Técnicos em Administração e Informática na modalidade integrada e os Cursos Técnicos em Administração, Contabilidade, Logística, Recursos Humanos, Secretariado e Informática na modalidade subsequente. Vale comentar que, o formato dos Cursos Técnicos de Londrina, incluindo as disciplinas constantes em cada curso, segue um padrão definido pelo Departamento de Educação e Trabalho da Secretaria Estadual de Educação (DET/SEED).

Conforme mencionado anteriormente, os Cursos Técnicos na modalidade subsequentes são destinados a estudantes que já concluíram o Ensino Médio. Por isso, estes cursos têm um público bastante variado. Encontram-se nestes cursos, desde pessoas que saíram recentemente do Ensino Médio, até pessoas que deixaram os bancos escolares há muito tempo por diferentes motivos que aqui não cabe citar. Eventualmente, encontram-se nestes cursos pessoas que estão cursando ou que já concluíram uma graduação. A faixa etária é também bastante variada, encontrando-se desde pessoas com 18 anos até aquelas que possuam idade entre 50 e 60 anos. Uma característica comum do público destes cursos é que as pessoas já estão no mercado de trabalho e voltam aos bancos escolares para se atualizarem e buscarem melhores oportunidades de emprego.

Os Cursos Técnicos de Administração, Contabilidade, Logística, Recursos Humanos e Secretariado possuem em sua grade curricular as disciplinas de Matemática Financeira e de Estatística Aplicada.

No contexto dos cursos supracitados, este trabalho de dissertação apresenta uma proposta para o trabalho com os conteúdos de Matemática necessários à formação dos estudantes que cursam estes cursos. Mais especificamente, será apresentado um tratamento para os conteúdos de Matemática a partir de situações que cada profissional formado poderá vivenciar em prática laborativa, na área desejada, seja ela em Administração, Contabilidade, Logística, Recursos Humanos, Secretariado e Informática.

O Programa de Mestrado Profissional em Matemática possui uma gama de possibilidades para a elaboração do trabalho final – a dissertação. Optamos por construir um material didático e instrutivo, para estudantes e professores da Educação Básica. Convém salientar que a formação que obtive no Programa é o que sustenta a elaboração deste texto e do tratamento realizado que aqui consta.

O material ora proposto intenta fornecer recursos para as disciplinas de Matemática Financeira e de Estatística Aplicada dos Cursos Técnicos mencionados de forma que propiciem aos estudantes situações reais de empresas que os estudantes possam enfrentar, e, além disso, face a uma das características observada nos estudantes que voltam aos bancos escolares nestes cursos, qual seja, a dificuldade em alguns conteúdos de Matemática, em momentos oportunos, junto ao tratamento do assunto, vem a possibilidade de revisão de conteúdos já estudados no Ensino Médio. E ainda, na ocasião, são abordados elementos de Educação Financeira para a vida pessoal e familiar dos estudantes.

De um modo geral, a proposta apresentada é circunstanciada a partir de problemas, que, quando resolvidos podem proporcionar a sistematização de novos conhecimentos, revisar outros, bem como situar o estudante no contexto da sua futura (ou atual) prática profissional.

Os problemas apresentados no decorrer deste trabalho têm basicamente duas origens: alguns foram enunciados a partir de situações reais de empresas, decorrentes de minha experiência profissional nesta área, e outros foram

construídos a partir da experiência referente à minha participação no Projeto<sup>1</sup> de Extensão intitulado “Educação Financeira: Matemática, Economia e Cidadania”, juntamente com a orientadora deste trabalho, coordenadora do projeto.

Embora os cursos a que se destinam a proposta anunciada sejam de nível técnico, há a necessidade do tratamento dos conteúdos básicos quando a carência dos mesmos for evidenciada pelos estudantes. Nossa experiência demonstra que é possível realizar um trabalho integrado dos conhecimentos básicos e dos conhecimentos técnicos referentes à cada área nas disciplinas de Matemática Financeira e Estatística Básica. A esse respeito, nos diz as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio:

Art. 9º Na oferta de cursos na forma subsequente, caso o diagnóstico avaliativo evidencie necessidade, devem ser introduzidos conhecimentos e habilidades inerentes à Educação Básica, para complementação e atualização de estudos, em consonância com o respectivo eixo tecnológico, garantindo o perfil profissional de conclusão. (BRASIL, 2012, p. 4).

Outra característica importante deste trabalho é a utilização de dois dispositivos computacionais de ampla utilização no mercado de trabalho quando o assunto se refere ao setor financeiro: *planilhas de cálculo* e a utilização da consagrada *calculadora financeira HP12C*. Deste modo, para os problemas apresentados, além de uma solução Matemática, traz-se uma solução utilizando estes dispositivos, quando cabível.

Gostaria de mencionar alguns pontos que se referem à minha trajetória pessoal e profissional, pois, ao meu ver, possuem implicações no resultado final deste trabalho.

Estou no mercado de trabalho a trinta e três anos e neste tempo passado, atuei em empresas de basicamente duas áreas distintas: informática (trabalhando

---

<sup>1</sup> Este projeto pertence ao Departamento de Matemática da UEL. Maiores informações podem ser obtidas no site:

[https://www.sistemasweb.uel.br/index.php?contents=system/prj/pex/index.php&pagina=pex\\_qry\\_nu\\_meroordem2.php](https://www.sistemasweb.uel.br/index.php?contents=system/prj/pex/index.php&pagina=pex_qry_nu_meroordem2.php)

desde como usuário de sistemas diversos como ERP (*Enterprise Resource Planning* – Sistema Integrado de Gestão Empresarial – são programas de computador para gestão empresarial), por exemplo, até com programação usando linguagens diversas – Linguagem C, COBOL, PYTHON, dentre outras) e na área financeira de empresas, na qual atuo atualmente. Este meu envolvimento na área empresarial deve-se à minha formação inicial – Bacharel em Ciências Econômicas (1990 – 1995) nesta Universidade. Concomitantemente, desde 1998 dedico-me à Matemática, inicialmente cursando a Licenciatura em Matemática, com conclusão em 2002, e atuando a partir de 2007 como professor da Rede Estadual de Educação do Estado do Paraná pertencente ao Quadro Próprio do Magistério (QPM). Atuo desde então em Cursos Técnicos subsequentes, lecionando as disciplinas de Matemática Financeira, Estatística Aplicada, Administração da Produção e Materiais, Elaboração e Análise de Projetos, Marketing e Informática. Além disso, foi-me necessário cursar uma Licenciatura para atuar no Ensino Técnico Profissionalizante de Nível Médio, que é uma complementação pedagógica obrigatória para professores desta área ofertada pela Universidade Estadual de Londrina em convênio com a Secretaria Estadual de Educação (realizada em 2009). Outrora cursei dois cursos em nível de Pós-graduação (Latu Sensu) - Especialização em Administração Empresarial, pela Universidade Norte do Paraná (1997-1998) e especialização em Metodologia e Ensino de Matemática, pela Faculdade Eficaz de Maringá (2015). Sem dúvida, esta minha caminhada aproximou-me das áreas as quais dedico integrar neste trabalho e espero contribuir para o ensino de Matemática nos cursos ao qual destina-se a proposta em tela.

De fundamental importância para o desenvolvimento dos problemas propostos neste trabalho foi minha experiência com algoritmos computacionais (programação de computadores), pois ela influenciou no desenvolvimento das soluções sugeridas, com uso da calculadora financeira HP12C e de planilha de cálculo.

Quanto à composição do texto a seguir, inicia-se com o primeiro capítulo que apresenta uma breve história da Educação Profissional Técnica de Nível Médio no Brasil, mostrando sua evolução desde o Brasil colônia. Apresenta-se

também como ela funciona no âmbito do Ministério da Educação, Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná, abordando-se desde aspectos legais a administrativos. Neste capítulo são apresentadas ainda uma relação dos Cursos Profissionais Técnicos de Nível Médio do eixo tecnológico de Gestão e Negócios ofertados pelo Colégio Estadual Vicente Rijo na modalidade subsequente, com seus respectivos perfis profissionais, disciplinas e ementas.

O capítulo dois aborda questões de ordem metodológicas do ensino de Matemática nos Cursos Profissionalizantes Técnicos de Nível Médio, abordando sobre o que os documentos legais (Diretrizes Nacionais e Estaduais e o Projeto Político Pedagógico) dizem a esse respeito e quais os encaminhamentos que a proposta apresentada segue no decorrer do texto.

No capítulo três apresentam-se os problemas elaborados com sugestões de soluções matemáticas, com uso de calculadora financeira e/ou planilhas de cálculo.

Finalmente, apresentam-se as considerações finais do texto.

# CAPÍTULO 1

---

## 1. OS CURSOS DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL

### 1.1 EDUCAÇÃO PROFISSIONAL: ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS

Neste capítulo apresentamos uma breve exposição trazendo fragmentos da educação profissional na história da educação do Brasil. Nossa intenção é situar o leitor no assunto em questão.

Não há registros anteriores ao século XIX do que hoje se concebe como Educação Profissional no Brasil. Do ponto de vista histórico, o Ensino Médio constitui-se em um nível intermediário, no qual deve ocorrer a consolidação e aprofundamento do ensino fundamental rumo ao ingresso no Ensino Superior. Em contrapartida, a educação profissional foi inicialmente concebida como meio de fornecer instrumentos para as pessoas atuarem diretamente nas empresas. Portanto, a divisão da educação em ensino propedêutico e profissional reproduz o sistema de produção vigente, provendo duas escolas: uma para a elite dirigente e uma para o trabalhador, adentrando para o mercado de trabalho.

No sistema de produção vigente, o capitalismo, cujo surgimento dá-se principalmente no século XVIII, há uma divisão da sociedade em classes, a saber, a classe dos capitalistas e a classe operária (ou proletária) que tem sua mais-valia extraída pelos proprietários dos meios de produção levando a uma relação antagônica entre estas classes. Com a evolução tecnológica de modo de produção, para o modo taylorista e fordista, por exemplo, estas duas classes continuam existindo, sendo que na educação esta divisão é reproduzida. Assim, neste paradigma, surgem escolas para formação profissional fora do âmbito da educação propedêutica visando formar mão de obra em diferentes níveis.

A educação profissional tem seu princípio no Brasil com a criação dos *Colégios das Fábricas*, em 1809, por D. João VI, que surgiu da demanda de fabricação de produtos para consumo no mercado interno com a transferência da corte de Portugal para o Brasil, bem como uma demanda por educação pública por classes emergentes.

Mesmo de forma não sistemática, a educação profissional nasce em nosso país estigmatizada, (...) a formação do trabalhador ficou marcada, já no início da colonização, com o estigma da servidão, por terem sido os índios e os escravos os primeiros aprendizes de ofício, sendo vista pela população como uma forma de ensino destinada somente a elementos das mais baixas categorias sociais. (GARCIA, 2009, p. 42)

Ainda com esta aversão pela população e pela elite, no princípio do século XX a educação profissional é usada para poder fazer frente às necessidades do desenvolvimento econômico. Assim, a educação profissional ganha mais um estigma, sendo vista como um ensino destinado aos desvalidos da sorte.

A Constituição da República de 1891 descentralizou o ensino e o sistema dual, ficando a cargo da União a criação e o controle do ensino superior e o ensino secundário. Seria tarefa dos Estados criar e controlar o ensino primário e ensino profissional.

Sob a argumentação de melhorar a mão de obra no Brasil, vários segmentos da sociedade começaram a demandar um ensino que preparasse o trabalhador para as atividades da indústria.

No governo Nilo Peçanha foram criadas as Escolas de Aprendizes Artífices, sendo que em 1910 já havia dezenove escolas. Este governo organizou também o ensino agrícola.

Na década de 1920 começa no Brasil um processo de substituição de importações, que representou um momento importante para a educação profissional, uma vez que, passando o Brasil a fabricar no país, demandava mais mão de obra para a linha de produção. Aumenta consideravelmente o número de escolas profissionais, carregando ainda o estigma de se tratar de uma educação para os menos favorecidos da sociedade.

Uma característica marcante do ensino profissional nessa época era de um divórcio que existia entre esse nível de ensino e a educação formal. A formação profissional era apenas um “adestramento” para execução de trabalho na fábrica.

Mesmo com a criação do Ministério da Educação e Saúde Pública em 1930 e do Conselho Nacional da Educação em 1931 e com o Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova, que visava a uma escola democrática para todos, manteve-se a separação da educação formal e da educação profissional. E em 1942, ano até o qual não havia regulação do ensino profissional, as escolas de aprendizes foram transformadas em escolas técnicas federais.

Entre 1942 e 1946 foram criadas Leis orgânicas dos ensinos primário e secundário que permitiam o acesso ao ensino superior através dos cursos médios de segundo ciclo e dos cursos: o agrotécnico, o comercial, o industrial e o normal, todos com duração de três anos.

É dessa época também a criação do “Sistema S”<sup>2</sup>, começando pelo Serviço Nacional dos Industriários, futuro SENAI, que passou a existir das demandas do setor produtivo por um sistema de ensino secundário alternativo para a formação do trabalhador, tendo sido o sistema criado pela União em convênio com a Confederação Nacional da Indústria.

Era destinado a organizar e administrar escolas de aprendizagem industrial em todo país, podendo manter, além dos cursos de aprendizagem, que eram mais rápidos, segundo a Lei Orgânica do Ensino Industrial, e tinham por objetivo a preparação dos aprendizes menores dos estabelecimentos industriais, cursos de formação e continuação para trabalhadores não sujeitos à aprendizagem. (ROMANELLI, 1980, p.166)

Nota-se aqui uma dualidade no ensino, com uma escola para dirigentes e outra para o exercício de atividades no processo produtivo.

A primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação data dos anos 60 e previa a possibilidade de ascensão ao ensino superior também com curso profissionalizante. Mas aqui nota-se uma dificuldade por parte do estudante que aspirava ao acesso ao ensino superior quando este era egresso de curso

---

<sup>2</sup> O Sistema “S” é composto pelo Senai, Sesi, Sesc, Senac, Senar, SESCOOP, Senat, Sest e Sebrae.

profissionalizante, tendo em vista que os conteúdos eram elaborados de forma a satisfazer as necessidades da parte técnica. Sendo assim, cursos como de técnico em contabilidade e a Escola Normal (para formação de professores) não tinham disciplinas como Física, Química ou Biologia.

Já no Regime Militar, o Brasil contempla um crescimento econômico que demanda mais mão de obra para a produção. Surge a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDBEN 5.692/71, que no tocante à educação profissional traz uma mudança drástica, que foi a de tornar todo o segundo grau no país profissionalizante, pelo menos na rede pública. Na rede privada permanecia-se o ensino propedêutico.

Esta obrigatoriedade do ensino profissional em nível de segundo grau trouxe uma série de problemas, desde a discordância da sociedade até dificuldades em cumprir com a Lei, uma vez que os estados não conseguiam financiar esta profissionalização. Havia a necessidade de, por exemplo, a existência de laboratórios para os cursos e as escolas eram desprovidas de tais.

A Lei 7.044/82 acaba com essa obrigatoriedade, trazendo de volta o dualismo educação propedêutica e educação profissionalizante.

Após mobilizações sociais e discussões é aprovada no governo de Fernando Henrique Cardoso a Lei 9.394/96, levando o Ensino Médio à condição de Educação Básica e relegando o ensino profissional a um tratamento à parte.

Na sequência surge o Decreto 2.208/97, que promoveu uma reforma no Ensino Médio regular e profissional. Esse Decreto promoveu a separação entre ensino regular e técnico. Foi criado o PROEP – Programa de Expansão da Educação Profissional, com o qual se promoveu modernização das escolas técnicas federais, provendo recursos para a rede privada e para redes estaduais.

Segundo GARCIA,

O PROEP cumpriu sua missão que era, na verdade, de realizar a reforma da rede federal técnica (CEFETs, Escolas Técnicas e Escolas Agrotécnicas), separando a educação profissional do ensino médio. (...) a reforma da rede federal era “necessária”, porque como seu ensino de qualidade não cumpria o seu objetivo de inserção imediata no mercado de trabalho, os seus

alunos optavam pela continuidade de estudos em nível superior. (GARCIA, 2009, p. 57)

Com o PROEP foram criadas imediatamente uma série de escolas privadas que não conseguiram apresentar resultados na educação profissional, e que passaram, posteriormente, a serem incorporadas à rede federal de educação profissional e tecnológica, o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - IFET.

No ano de 2005 o governo federal publicou a Lei nº 11.195 implantando a primeira fase do Plano de Expansão da Rede Federal de Educação Profissional e Tecnológica, prevendo a construção de 64 unidades de ensino. A segunda fase veio em 2007 e previa a construção de 150 novas unidades de ensino.

Em 2011 foi instituído o PRONATEC – Programa Nacional de Acesso ao Ensino Técnico e Emprego aumentando assim, a oferta de cursos de educação profissional e tecnológica, com participação do sistema S. Em 2015 o PRONATEC obteve 9,5 milhões de matrículas, das quais 38% eram em Cursos Técnicos.

A respeito deste programa, Ramos (2015, p. 111) afirma que:

Quando analisamos a política de educação profissional no Brasil, concluimos que, de fato as oportunidades de formação de trabalhadores se ampliaram significativamente nos últimos onze anos. Porém, como também vimos, trata-se de uma formação para o “trabalho barato”, pois somente este tipo de trabalho pode incorporar pessoas formadas em cursos de formação inicial e continuada, na sua maioria, de 160 horas. Não por acaso, é neste tipo de curso que se concentram as matrículas gratuitas advindas de acordo entre os Sistema S e o MEC. (RAMOS, 2015, p. 111)

No ano de 2014 a Lei nº 13.005 instituiu o segundo Plano Nacional de Educação para o período de 2014 a 2024, que apresenta 20 metas e 254 estratégias. A Educação Profissional Técnica de Nível Médio é mencionada na meta 11: “Triplicar as matrículas da Educação Profissional Técnica de Nível Médio, assegurando a qualidade da oferta e pelo menos 50% de expansão no segmento público”. (BRASIL, 2015, p. 187)

A Meta 11 surge em um momento em que se verificou acentuado crescimento de matrículas na Educação Profissional Técnica de Nível Médio. Basta notar

que em 2008 o número de matrículas na Educação Profissional Técnica de Nível Médio era de 1.129.584 e em 2013, 1.602.946, um aumento de 41,90%.

Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, [...] entre 2008 e 2013, a rede privada e as redes estaduais eram as maiores responsáveis por essas matrículas: em 2013 representavam, respectivamente, 44,8% e 38,3% das matrículas, ao passo que a rede federal respondia por 15,1% e as redes municipais por apenas 2,3% das matrículas. (BRASIL, 2015, p. 193)

No ano de 2016, as matrículas na Educação Profissional Técnica de Nível Médio foram em um número de 1.775.324 no Brasil, sendo 1.033.464 na rede pública e 741.860 na rede privada. Houve, portanto, um aumento de 10,75% em relação a 2013. As matrículas na rede pública representavam 58,21% do total e na rede privada, 41,79% (CRUZ, 2018, p. 95).

Estes números mostram a importância da Educação Profissional Técnica de Nível Médio. E, de acordo com LUCCHESI (2018, p. 99),

Outra modernização importante foi a possibilidade de o jovem optar pela formação técnica e profissional. Desde 2008, a maioria dos países desenvolvidos passou a investir em Educação Profissional como uma das maneiras de responder aos abalos do mercado de trabalho. (LUCCHESI, 2018, p. 99).

Tratando da Educação Profissional Técnica de Nível Médio, o Mapa da Educação Profissional e Tecnológica do Brasil nos diz que:

[...] se o Brasil objetiva, como vem sendo indicado nas propostas governamentais, dar um salto tecnológico que nos permita atingir uma nova etapa de desenvolvimento industrial de forma a garantir que o país se insira nos circuitos de produção tecnológica mais sofisticada, ele necessita continuar fortalecendo o ensino técnico de nível médio a fim de conseguir formatar um sistema de formação profissional de qualidade, para o qual os apontamentos anteriores podem ser de grande valia. Isso significa adequar a formação profissional a uma alternativa de desenvolvimento econômico que tenderia a substituir o modelo atual, baseado no trabalho pouco qualificado, nas taxas de rotatividade da força de trabalho e em altas taxas de lucro das empresas, por um modelo assentado no trabalho qualificado, com baixas taxas rotatividade e taxas de lucro menos gananciosas, mais centradas no longo prazo; um modelo de desenvolvimento baseado um aumento importante da produtividade e na equidade social. (Relatório Final, 2015, p. 23)

No Paraná mudanças na educação já estavam sendo implantadas antes mesmo do Decreto 2.208/97. Em 1995 nasce a PARANATEC (Agência para o Desenvolvimento do Ensino Técnico), que visava implantar um ensino profissional com participação do setor produtivo com o estado mediando desde os cursos até a administração do estabelecimento de ensino junto ao setor privado, promovendo total separação do Ensino Médio e o ensino profissional.

A parceria do setor produtivo consistia em ceder recursos materiais e humanos e ambientes específicos para a prática pedagógica. Em contrapartida, os parceiros participariam na elaboração dos currículos dos cursos técnicos, bem como dos cursos básicos, podendo com isso atender suas necessidades. (GARCIA, 2009, p. 59)

Com esse instrumento, o estado reduz drasticamente a oferta de educação profissional, passando sua oferta a ser majoritariamente privada.

Foi assim que o sistema público de oferta profissionalizante durante o referido período, mais precisamente até 2003, foi reduzido a uma diminuta frente de escolas que a ofertavam, caracterizadas como de resistência, com a qual estão identificados os Colégios Agrícolas e os de Formação de Professores. (PARANÁ, 2006, p. 15)

Em 2003, o novo governo do estado do Paraná retoma a educação profissional, criando na Secretaria Estadual de Educação o Departamento de Educação e Trabalho e desativando o PARANATEC. Segundo as Diretrizes Estaduais da Educação Profissional:

A partir de 2003, a política estabelecida para a Rede Estadual iniciou não somente a retomada da oferta pública e gratuita da formação para o trabalho, mas também passou a assumir a concepção de ensino e currículo em que o trabalho, a cultura, a ciência e a tecnologia constituem fundamentos sobre os quais os conhecimentos escolares devem ser trabalhados e assegurados, na perspectiva da escola unitária e de uma educação politécnica. (PARANÁ, 2006, p. 15)

Deve-se mencionar que esta retomada foi possível a partir da revogação do Decreto 2.208/97 e a promulgação do Decreto 5.154/04. Segundo as Diretrizes Estaduais,

Essa nova legislação possibilitou conceber propostas curriculares considerando a necessária articulação entre as diferentes dimensões do trabalho de formação profissional do cidadão / aluno, na perspectiva da oferta pública da Educação Profissional técnica de nível médio, enfatizando o trabalho, a cultura, a ciência e a tecnologia, como princípios fundantes da

organização curricular integrada ao Ensino Médio. (PARANÁ, 2006, p. 18).

É importante mencionar que a nova postura da Secretaria de Educação do Estado do Paraná incorpora a ideia de se ter uma educação profissional politécnica que tem o trabalho como princípio educativo no sentido de Gramsci. Para ele, a educação deve ter o trabalho como princípio educativo. Segundo Gramsci,

Pode-se dizer, por isso, que o princípio educativo sobre o qual se baseavam as escolas elementares era o conceito de trabalho, que não se pode realizar em todo seu poder de expansão e de produtividade sem um conhecimento exato e realista das Leis naturais e sem uma ordem legal que regule organicamente a vida recíproca dos homens, ordem que deve ser respeitada por convenção espontânea e não apenas por imposição externa, por necessidade reconhecida e proposta a si mesmo como liberdade e não simples coação. O conceito e o fato do trabalho (da atividade teórico-prática) é o princípio educativo imanente à escola elementar, já que a ordem social e estatal (direitos e deveres) é introduzida pelo trabalho. (GRAMSCI, 2010, p. 115).

Assim, a Secretaria Estadual de Educação do Paraná incorpora o trabalho como princípio educativo colocando nas Diretrizes Estaduais.

Em síntese, a SEED assumiu o compromisso com uma política de Educação Profissional que tem o trabalho como princípio educativo, princípio este que considera o homem em sua totalidade histórica, e a articulação entre trabalho manual e intelectual a partir do processo produtivo contemporâneo, com todas as contradições daí decorrentes para os processos de formação humana no e para o trabalho. (PARANÁ, 2006, p.19)

Portanto, neste contexto, pretende-se formar um cidadão conhecedor de sua realidade sócio-econômica e cultural.

## **1.2 EDUCAÇÃO PROFISSIONAL: ASPECTOS DO SEU FUNCIONAMENTO ATUALMENTE**

A oferta de cursos profissionalizantes é regulamentada em nível nacional pela Resolução n. 6, de 20 de setembro de 2012, que define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio; e em nível estadual, pelas Diretrizes da Educação Profissional: Fundamentos Políticos e Pedagógicos, de 2003.

Os Cursos Técnicos são organizados por eixos tecnológicos definidos pelo Ministério da Educação, sendo que os eixos e seus respectivos cursos devem constar do Catálogo Nacional de Cursos. A Secretaria de Estado da Educação do Paraná também mantém um Cadastro Estadual de Cursos Técnicos que segue os mesmos moldes do cadastro nacional.

Um Curso Técnico Profissionalizante pode ser, de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio, na modalidade *articulada* ou, na modalidade *subsequente*. Na modalidade *articulada*, pode ser ainda, da forma *integrada* ou da forma *concomitante*. Apresenta-se a seguir um extrato das Diretrizes Nacionais, que descrevem essas modalidades de ensino:

Art. 7º A Educação Profissional Técnica de Nível Médio é desenvolvida nas formas *articulada* e *subsequente* ao Ensino Médio:

I – a *articulada*, por sua vez, é desenvolvida nas seguintes formas:

a) *Integrada*, ofertada somente a quem já tenha concluído o Ensino Fundamental, com matrícula única na mesma instituição, de modo a conduzir o estudante à habilitação profissional técnica de nível médio ao mesmo tempo em que conclui a última etapa da Educação Básica;

b) *Concomitante*, ofertada a quem ingressa no Ensino Médio ou já o esteja cursando, efetuando-se matrículas distintas para cada curso, aproveitando oportunidades educacionais disponíveis, seja em unidades de ensino da mesma instituição ou em distintas instituições de ensino;

c) *Concomitante* na forma, uma vez que é desenvolvida simultaneamente em distintas instituições educacionais, mas *integrada* no conteúdo, mediante a ação de convênio ou acordo de intercomplementaridade, para a execução de projeto pedagógico unificado;

II – a *subsequente*, desenvolvida em cursos destinados exclusivamente a quem já tenha concluído o Ensino Médio. (BRASIL, 2012, p. 3, grifo nosso)

O Art. 13 das Diretrizes Nacionais instrui sobre a estruturação dos cursos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio:

Art. 13º A estruturação dos cursos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio, orientada pela concepção de eixo tecnológico, implica considerar:

I – a matriz tecnológica, contemplando métodos, técnicas, ferramentas e outros elementos das tecnologias relativas aos cursos;

II – o núcleo politécnico comum correspondente a cada eixo tecnológico em que se situa o curso, que compreende os fundamentos científicos, sociais, organizacionais, econômicos, políticos, culturais, ambientais, estéticos e éticos que alicerçam as tecnologias e a contextualização do mesmo no sistema de produção social;

III – os conhecimentos e as habilidades nas áreas de linguagens e códigos, ciências humanas, matemática e ciências da natureza, vinculados à Educação Básica deverão permear o currículo dos cursos técnicos de nível médio, de acordo com as especificidades dos mesmos, como elementos essenciais para a formação e o desenvolvimento profissional do cidadão;

IV – a pertinência, a coerência, a coesão e a consistência de conteúdos, articulados do ponto de vista do trabalho assumido como princípio educativo, contemplando as necessárias bases conceituais e metodológicas;

V – a atualização permanente dos cursos e currículos, estruturados em ampla base de dados, pesquisas e outras fontes de informação pertinentes. (BRASIL, 2012, p. 4)

Assim, o conhecimento científico, tecnológico, econômico, social e cultural construído na Educação Básica é a base da formação profissional.

### **1.3 EDUCAÇÃO PROFISSIONAL: OS CURSOS TÉCNICOS PROFISSIONALIZANTES DO COLÉGIO ESTADUAL VICENTE RIJO – LONDRINA, PR**

Considera-se esta seção necessária visto que a proposta construída se sintoniza com a experiência que obtivemos. É a partir da vivência construída ao longo de 12 anos no Colégio Vicente Rijo e da formação que obtivemos ao longo dos anos incluindo os conhecimentos advindos de nossa participação neste Programa, que reunimos subsídios para a elaboração do produto apresentado neste trabalho de dissertação.

O Colégio Estadual Vicente Rijo oferta dois Cursos Técnicos profissionalizantes na modalidade integrada que são o Curso Técnico em Administração e o Curso Técnico em Informática. Estes cursos têm duração de quatro anos.

Em relação à oferta de Cursos Técnicos Profissionalizantes na modalidade subsequente o colégio oferece os cursos em dois eixos tecnológicos:

- I. Eixo Tecnológico de Gestão e Negócios: Curso Técnico em Administração, Técnico em Contabilidade, Técnico em Logística, Técnico em Recursos Humanos e Técnico em Secretariado.

## II. Eixo Tecnológico de Informação e Comunicação: Curso Técnico em Informática.

Destes cursos, o Técnico em Administração e o Técnico em Informática possuem duração de três semestres. Os demais possuem duração de dois semestres.

A forma de ingresso nos Cursos Técnicos subsequentes é realizada por meio de uma análise dos dados do candidato, que são obtidas por meio de uma ficha que deve ser preenchida pelo mesmo. Na análise leva-se em consideração as notas que o candidato obteve em seu Ensino Médio e a renda familiar.

Como neste trabalho pretende-se apresentar problemas de matemática financeira e estatística, típicos dos Cursos Técnicos Subsequentes do Eixo Tecnológico e Gestão e Negócios, considera-se conveniente apresentar os perfis profissionais dos egressos, extraídos do Catálogo Estadual de Cursos Técnicos de Nível Médio, as grades curriculares dos cursos Técnico em Administração, Contabilidade, Logística, Recursos Humanos e Secretariado, bem como as ementas das disciplinas de cada curso, para que se possa elucidar as relações que as disciplinas possuem com a Matemática.

### **1.3.1 CURSO TÉCNICO EM ADMINISTRAÇÃO**

O perfil profissional do Técnico em Administração é apresentado a seguir:

Perfil profissional: O Técnico em Administração domina conteúdos e processos relevantes do conhecimento científico, tecnológico, social e cultural utilizando suas diferentes linguagens, o que lhe confere autonomia intelectual e moral para acompanhar as mudanças, de modo a intervir no mundo do trabalho. Executa as funções de apoio administrativo: protocolo e arquivo, confecção e expedição de documentos administrativos e controle de estoques. Opera sistemas de informações gerenciais de pessoal e material. Utiliza ferramentas da informática básica, como suporte às operações organizacionais. (PARANÁ, 2013, p. 47).

No curso Técnico em Administração, as disciplinas são:

#### TA.1 Administração da Produção e Materiais.

Ementa: Introdução e descrição da gestão de produção e de materiais. Descrição e interpretação de indicadores gerenciais. Aplicação da logística dos processos produtivos, movimentação e distribuição de produção e materiais.

#### TA.2 Administração Financeira e Orçamentária.

Ementa: Conhecimento do Sistema Financeiro Nacional. Identificação dos componentes do mercado financeiro e suas relações. Estudo das políticas econômicas. Identificação de fontes de financiamentos e ciclos econômicos financeiros. Análise do ponto de equilíbrio. Aplicação de diferentes tipos de orçamento. Estudo das demonstrações financeiras projetadas.

#### TA.3 Comportamento Organizacional.

Ementa: Estudo da abordagem comportamental da administração e conceituação das organizações. Comparação entre os estilos de liderança e os sistemas administrativos. Análise do processo de comunicação organizacional e das relações entre cultura e clima organizacional. Fundamentação de empreendedorismo.

#### TA.4 Contabilidade.

Ementa: Estudo preliminar da Contabilidade por meio das técnicas Contábeis e análise das demonstrações contábeis.

#### TA.5 Elaboração e Análise de Projetos.

Ementa: Elaboração e análise de Projetos na área empresarial, análise dos setores de atuação da empresa, estudo de caso, perfil do consumidor, discussão de métodos e análise de projetos de investimento empresarial, teoria sobre diversificação de riscos e estrutura das organizações, aplicado ao Plano de Negócios.

#### TA.6 Estatística Aplicada.

Ementa: Estudo conceitual da Estatística. Compreensão das fontes de dados. Análise e interpretação dos resultados para tomada de decisões.

#### TA.7 Fundamentos do Trabalho.

Ementa: Estudo do trabalho humano nas perspectivas ontológica e histórica. Compreensão do trabalho como mercadoria no industrialismo e na dinâmica capitalista. Reflexão sobre tecnologia e globalização diante das transformações no mundo do trabalho. Análise sobre a inclusão do trabalhador no mundo do trabalho.

#### TA.8 Gestão de Pessoas.

Ementa: Estudo sobre a evolução da gestão de pessoas. Reflexão sobre planejamento estratégico em gestão de pessoas. Análise de processos e de atividades de gestão de pessoas nas organizações.

#### TA.9 Informática.

Ementa: Estudo do histórico e da evolução da Informática. Compreensão da arquitetura dos computadores. Estabelecimento de relações entre sistemas computadorizados e operacionais. Utilização de aplicativos de escritório e da internet. Aplicação das ferramentas de sistemas operacionais. Conhecimento dos mecanismos de segurança para a internet.

#### TA.10 Introdução à Economia.

Ementa: Estudo dos conceitos fundamentais de economia. Interpretação da economia como ciência social. Caracterização dos fatores de produção, bens e serviços. Reflexão e Análise sobre os conceitos de microeconomia, macroeconomia. Caracterização dos objetivos das políticas econômicas. Análise da balança comercial e os efeitos na economia.

#### TA.11 Marketing.

Ementa: Definição e fundamentos do Marketing. Análise do Marketing na integração das estratégias empresariais. Detalhamento das ferramentas fundamentais do Marketing. Busca de compreensão do mercado. Investigação sobre o comportamento do consumidor. Estudo da Gestão de Vendas. Estudo de Sistema Integrado de Marketing.

#### TA.12 Matemática Financeira.

Ementa: Aplicação dos conhecimentos específicos para a realização de cálculos financeiros. Análise de fatores financeiros e de investimentos para a tomada de decisão na gestão empresarial.

#### TA.13 Metodologia Científica.

Ementa: Estudo dos métodos científicos e desenvolvimento de pesquisas científicas.

#### TA.14 Noções de Direito e Legislação Social e do Trabalho.

Ementa: Caracterização do Estado Moderno. Noções de direito: fundamentos e doutrina do direito; Ordenamento Jurídico da Legislação: Constituição Federal, legislação trabalhista. Direito Civil, Administrativo, Empresarial, Previdenciário, Tributário e Direito Difuso.

#### TA.15 Organização, Sistemas e Métodos.

Ementa: Estudo da Organização e seus componentes estruturais. Análise e estabelecimento de relações entre os diversos sistemas. Análise dos processos administrativos e métodos de trabalho. Detalhamento da manualização.

#### TA.16 Teoria Geral da Administração.

Ementa: Estudo da evolução da ciência da administração. Desenvolvimento histórico das diferentes abordagens teóricas e seus pressupostos. Análise das mudanças nas organizações públicas e privadas e a integração da empresa com a sociedade.

Das ementas aqui expostas é possível verificar que todas as disciplinas possui alguma relação com a Matemática. Tomemos, por exemplo, a disciplina de Fundamentos do Trabalho. Trata-se de uma disciplina por meio da qual a/o estudante irá construir o conhecimento de sua realidade social e econômica. Ao tratar das relações entre trabalhadores e capitalistas, aos estudantes serão apresentados dados diversos, como do mercado de trabalho, sobre o qual há ricas estatísticas e a necessidade de interpretação de dados. Deste modo é importante salientar que esta disciplina se sustenta sobre noções que a

Matemática possui e que são básicas para a análise e compreensão dos fatos apresentados.

Considere agora a disciplina de Noções de Direito e Legislação Social e do Trabalho. Aqui as/os estudantes se depararão com os conceitos de frações, porcentagens, relações de proporções etc. O conhecimento destes conceitos da Matemática é essencial para o desenvolvimento desta disciplina.

### **1.3.2 CURSO TÉCNICO EM CONTABILIDADE**

Do egresso do Técnico em Contabilidade espera-se:

Perfil Profissional: O Técnico em Contabilidade domina conteúdos e processos relevantes do conhecimento científico, tecnológico, social e cultural utilizando suas diferentes linguagens, o que lhe confere autonomia intelectual e moral para acompanhar as mudanças, de forma a intervir no mundo do trabalho. Efetua anotações financeiras da organização e examina documentos fiscais e parafiscais. Analisa a documentação contábil e elabora planos de determinação de taxas de depreciação e exaustão dos bens materiais, de amortização dos valores imateriais. Organiza, controla e arquiva os documentos relativos à atividade contábil e controla movimentações. Registra as operações contábeis da empresa, ordenando os movimentos pelo débito e crédito. Prepara a documentação, apura haveres, direitos e obrigações legais. (PARANÁ, 2013, p. 49).

No curso Técnico em Contabilidade, as disciplinas são:

TC.1 Abertura e Fechamento de Empresas.

Ementa: Estudo sobre o comércio. Análise do funcionamento das sociedades contratuais. Compreensão do processo de desenvolvimento de abertura e fechamento de empresas.

TC.2 Contabilidade Geral.

Ementa: Caracterização do patrimônio e da estática patrimonial. Desenvolvimento das técnicas de escrituração contábil. Estudo de relatórios contábeis e as demonstrações financeiras.

TC.3 Contabilidade Intermediária.

Ementa: Fundamentação geral sobre estoque. Estudo das operações bancárias e de crédito. Estudo da aquisição de bens e despesa do exercício seguinte. Estudo e análise de fluxo de caixa e notas explicativas.

#### TC.4 Contabilidade Orçamentária.

Ementa: Estudo do processo orçamentário e dos instrumentos do sistema de informação gerencial.

#### TC.5 Contabilidade Tributária.

Ementa: Fundamentação sobre legislação tributária. Estudo das técnicas contábeis. Compreensão da escrituração dos tributos diretos e indiretos.

#### TC.6 Contas e Balanços.

Ementa: Estudo das demonstrações contábeis e financeiras. Análise da estrutura contábil, considerando a legislação vigente.

#### TC.7 Custos.

Ementa: Estudo da natureza dos custos.

#### TC.8 Estatística Aplicada.

Ementa: Estudo conceitual da Estatística. Compreensão das fontes de dados. Análise e interpretação dos resultados para tomada de decisões.

#### TC.9 Ética Geral e Comercial.

Ementa: Estudo dos princípios éticos. Estudo dos códigos de ética.

#### TC.10 Fundamentos da Administração.

Ementa: Estudo da evolução e das funções da administração. Estudo e análise das teorias da Administração. Estudo sobre empreendedorismo.

#### TC.11 Fundamentos do Trabalho.

Ementa: Estudo do trabalho humano nas perspectivas ontológica e histórica. Compreensão do trabalho como mercadoria no industrialismo e na dinâmica capitalista. Reflexão sobre tecnologia e globalização diante das

transformações no mundo do trabalho. Análise sobre a inclusão do trabalhador no mundo do trabalho.

#### TC.12 Informática.

Ementa: Estudo do histórico e da evolução da Informática. Compreensão da arquitetura dos computadores. Estabelecimento de relações entre sistemas computadorizados e operacionais. Utilização de aplicativos de escritório e da *internet*. Aplicação das ferramentas de sistemas operacionais. Conhecimento dos mecanismos de segurança para a *internet*.

#### TC.13 Introdução à Economia.

Ementa: Estudo da evolução do pensamento econômico. Estudo da macroeconomia e microeconomia. Compreensão do crescimento e desenvolvimento econômico.

#### TC.14 Matemática Financeira.

Ementa: Estudo do regime de juros simples e juros compostos. Estudo das taxas. Estudo sobre desconto. Estudo dos pagamentos e financiamentos. Estudo da estratégia. Estudo do sistema de amortização.

#### TC.15 Noções de Direito e Legislação do Trabalho.

Ementa: Estudo do Direito. Compreensão da legislação social do trabalho. Fundamentação sobre Seguridade Social.

#### TC.16 Documentação Técnica.

Ementa: Estudo da estrutura e organização da documentação da área de Contabilidade. Redação oficial dos principais documentos utilizados como instrumentos na organização das empresas.

#### TC.17 Teoria Geral da Contabilidade.

Ementa: Estudo e análise da evolução e a importância da Contabilidade no mundo moderno. Compreensão da atuação empresarial do profissional contábil.

É notório que a presença de matemática em contabilidade é ubíqua. Mas até mesmo uma disciplina como ética geral e comercial pode encontrar na Matemática instrumentos para se sustentar como a lógica, por exemplo.

### 1.3.3 CURSO TÉCNICO EM LOGÍSTICA

O perfil deste técnico será:

Perfil Profissional: O Técnico em Logística domina conteúdos e processos relevantes do conhecimento científico, tecnológico, social e cultural utilizando suas diferentes linguagens, o que lhe confere autonomia intelectual e moral para acompanhar as mudanças, de forma a intervir no mundo do trabalho, orientado por valores éticos que dão suporte a convivência democrática. Tem competência profissional para realizar os procedimentos de planejamento, organização e controle da logística do transporte e armazenagem atendendo às exigências legais e seus procedimentos normatizadores. Executa e agenda programa de manutenção de máquinas e equipamentos, compras, recebimento, armazenagem, movimentação, expedição e distribuição de materiais e produtos. Colabora na gestão de estoques. Presta atendimento aos clientes. Implementa os procedimentos de qualidade, segurança e higiene do trabalho o sistema logístico. (PARANÁ, 2013, p. 50).

No curso Técnico em Logística, as disciplinas são:

TL.1 Administração de Materiais.

Ementa: Estudo e análise das características básicas da administração e gestão de materiais.

TL.2 Aplicações Operacionais da Logística.

Ementa: Estudo de sistemas produtivos e sua interface com operações logísticas de armazenagem, gestão de materiais e logística reversa.

TL.3 Controle de Produção e Custos.

Ementa: Estudo de custos logísticos, relações e aplicações práticas.

TL.4 Direito e Legislação.

Ementa: Estudo de legislação aplicada à logística. Introdução ao estudo do direito. Noções de Direito Constitucional, Civil, do Consumidor, Empresarial e

Comercial, Tributário, Administrativo, do Trabalho, Previdenciário, Ambiental e Internacional.

TL.5 Elaboração e Análise de Projetos.

Ementa: Elaboração de planejamento e desenvolvimento de projetos. Estudo de Técnicas de Apresentação.

TL.6 Espanhol Instrumental.

Ementa: Uso do discurso enquanto prática social no mundo do trabalho. Estudos das diferentes práticas discursivas (oralidade, Leitura e escrita) e análise linguística aplicada ao curso de logística.

TL.7 Fundamentos do Trabalho.

Ementa: Estudo do trabalho humano nas perspectivas ontológica e histórica. Compreensão do trabalho como mercadoria no industrialismo e na dinâmica capitalista. Reflexão sobre tecnologia e globalização diante das transformações no mundo do trabalho. Análise sobre a inclusão do trabalhador no mundo do trabalho.

TL.8 Inglês Instrumental.

Ementa: Uso do discurso enquanto prática social no mundo do trabalho. Estudos das diferentes práticas discursivas (oralidade, Leitura e escrita) e análise linguística aplicada ao curso de logística.

TL.9 Introdução à Logística.

Ementa: Estudo dos conceitos e fundamentos logísticos.

TL.10 Matemática Financeira e Noções de Estatística.

Ementa: Demonstração de números e álgebra. Aplicação de regime de capitalização. Distinção de situações de utilização de juro simples e juro composto. Aplicação de cálculos de valores no regime de capitalização composto. Estudo de conceitos de Matemática financeira em situações do cotidiano. Fundamentação de estatística no âmbito logístico. Compreensão de juízo de informações estatísticas de diferentes naturezas. Compreensão de

informações publicadas em gráficos e tabelas. Diferenciação das medidas de tendência central.

TL.11 Processos, Qualidade e Sistemas.

Ementa: Estudo aplicado ao mapeamento, análise e melhorias de processos e sistemas logísticos.

TL.12 Redação e Comunicação na Logística.

Ementa: Uso do discurso como prática social no mundo do trabalho. Estudo das práticas discursivas (oralidade, Leitura e escrita).

TL.13 Segurança e Saúde Ocupacional.

Ementa: Reflexão sobre a Integridade Física, Mental e Qualidade de Vida. Estudo das Normas de Segurança e Saúde Ocupacional. Investigação sobre os Meios de Prevenção de Riscos. Fundamentação do Meio Ambiente do Trabalho.

TL.14 Transporte e Distribuição.

Ementa: Estudo dos diferentes conceitos e modais de transportes, Gerenciamento da distribuição física e cadeias de distribuição.

Em Logística, acredita-se que as disciplinas que possivelmente não teriam relação com Matemática seriam as de Línguas Estrangeiras Modernas. Em todas as demais é possível de se imaginar processos, dados, análises tais que, a Matemática seja necessária para a sua compreensão.

#### **1.3.4 CURSO TÉCNICO EM SECRETARIADO**

O perfil profissional do Técnico em Secretariado é apresentado a seguir:

Perfil Profissional: O Técnico em Secretariado domina conhecimentos científicos, tecnológicos e históricos sociais, com formação orientada por valores democráticos que fundamentam o agir ético em relação à Natureza, à Sociedade e ao mundo do trabalho. Detém conhecimentos para organizar

a rotina diária e mensal da chefia / direção e para o cumprimento dos compromissos agendados. Estabelece os canais de comunicação da chefia/direção com interlocutores, internos e externos, em língua nacional e estrangeira. Estrutura tarefas relacionadas com o expediente geral do secretariado da chefia/direção. Controla e arquiva documentos. Preenche e confere documentação de apoio à gestão organizacional. Utiliza aplicativos e a *internet* na elaboração, organização e pesquisa de informação. (PARANÁ, 2013, p. 52).

No Curso Técnico em Secretariado, as disciplinas são:

#### TS.1 Administração.

Ementa: Compreensão e correlação entre o conceito e a importância da administração, suas funções básicas e grandes áreas funcionais.

#### TS.2 Cerimonial e Protocolo.

Ementa: Introdução ao cerimonial e protocolo. Caracterização de eventos. Desenvolvimento e organizações protocolares. Aplicação da etiqueta social e profissional.

#### TS.3 Contabilidade.

Ementa: Estudo da contabilidade e do patrimônio a partir do método das partidas dobradas e das demonstrações contábeis.

#### TS.4 Fundamentos do Trabalho.

Ementa: Estudo do trabalho humano nas perspectivas ontológica e histórica. Compreensão do trabalho como mercadoria no industrialismo e na dinâmica capitalista. Reflexão sobre tecnologia e globalização diante das transformações no mundo do trabalho. Análise sobre a inclusão do trabalhador no mundo do trabalho.

#### TS.5 Gestão de Pessoas.

Ementa: Estudo e identificação dos sistemas de gestão de pessoas, dos sindicatos e suas negociações. Análise da evolução dos Recursos Humanos nas organizações e as rotinas relacionadas à gestão de pessoas.

#### TS.6 Informática.

Ementa: Estudo do histórico e da evolução da Informática. Compreensão da arquitetura dos computadores. Estabelecimento de relações entre sistemas computadorizados e operacionais. Utilização de aplicativos de escritório e da internet. Aplicação das ferramentas de sistemas operacionais. Conhecimento dos mecanismos de segurança para a *internet*.

#### TS.7 Introdução às Finanças.

Ementa: Compreensão de sistema financeiro, tributação, contribuições e taxas. Processamento de tesouraria e controle de fluxo de caixa.

#### TS.8 Espanhol.

Ementa: Uso do discurso enquanto prática social no mundo do trabalho. Estudos das diferentes práticas discursivas: oralidade, Leitura e escrita.

#### TS.9 Inglês.

Ementa: Uso do discurso enquanto prática social no mundo do trabalho. Estudo das diferentes práticas discursivas: oralidade, Leitura e escrita.

#### TS.10 Língua Portuguesa e Redação Empresarial.

Ementa: Compreensão da Redação Empresarial e Oficial nas organizações e aplicabilidade dos documentos do mundo corporativo. Uso do discurso como prática social no mundo do trabalho. Estudo das práticas discursivas (oralidade, Leitura e escrita).

#### TS.11 Matemática Financeira.

Ementa: Aplicação de cálculos matemáticos relacionados ao contexto empresarial e ao mundo do trabalho.

#### TS.12 Metodologia Científica.

Ementa: Estudo dos métodos científicos e desenvolvimento de pesquisas científicas.

#### TS.13 Noções de Direito e Legislação Social e do Trabalho.

Ementa: Estudo dos conhecimentos básicos de direito público e direito privado. Reflexão nas áreas de direito constitucional, civil, comercial, trabalhista, tributário, administrativo e previdenciário.

#### TS.14 Psicologia Organizacional.

Ementa: Estudo da Psicologia e das relações humanas. Definição de personalidade e maturidade. Construção da comunicação nas organizações. Experimentação de dinâmicas de grupo.

#### TS.15 Técnicas de Secretariado.

Ementa: Análise e reflexão da evolução da profissão. Compreensão do perfil, atribuições e responsabilidades do profissional de secretariado, proatividade e integração, conduta secretarial em relação ao mundo corporativo. Conhecimento e utilização do marketing pessoal. Estudo, organização e domínio da gestão documental. Estudo e organização das técnicas secretariais.

Em secretariado os conceitos e as ideias da Matemática são frequentes, quer seja para a construção ou análise de tabelas, de relatórios diversos com informações do mercado financeiro, ou mesmo para a preparação de um cerimonial etc.

### **1.3.5 CURSO TÉCNICO EM RECURSOS HUMANOS**

O profissional técnico em Recursos Humanos possui o perfil:

Perfil Profissional: O Técnico em Recursos Humanos domina conteúdos e processos relevantes do conhecimento científico, tecnológico, social e cultural utilizando suas diferentes linguagens, o que lhe confere autonomia intelectual e moral para acompanhar as mudanças, de forma a intervir no mundo do trabalho. Executa rotinas de departamento de pessoal (pesquisa, integração, treinamento, folha de pagamento, tributos e benefícios). Descreve e classifica postos de trabalho, aplicação de questionários e processamento de informações acerca dos trabalhadores. Presta serviços de comunicação, liderança, motivação, formação de equipes e desenvolvimento pessoal. Atua em processos de orientação sobre a importância da segurança no trabalho e da saúde ocupacional. (PARANÁ, 2013, p. 51).

No Curso Técnico em Recursos Humanos, as disciplinas são:

T.RH.1 Formação e Desenvolvimento de Pessoal.

Ementa: Compreensão e discussão de estratégias, gerenciamento, elaboração, execução e avaliação de programas de capacitação e desenvolvimento de pessoas.

T.RH.2 Fundamentos do Trabalho.

Ementa: Estudo do trabalho humano nas perspectivas ontológica e histórica. Compreensão do trabalho como mercadoria no industrialismo e na dinâmica capitalista. Reflexão sobre tecnologia e globalização diante das transformações no mundo do trabalho. Análise sobre a inclusão do trabalhador no mundo do trabalho.

T.RH.3 Fundamentos Sociológicos das Organizações.

Ementa: Reflexão sobre as políticas públicas, as ideologias e a identidade cultural. Compreensão da dinâmica das organizações e das práticas sociais nas organizações.

T.RH.4 Fundamentos Teóricos da Administração.

Ementa: Estudo dos fundamentos da Administração. Fundamentação das principais abordagens teóricas. Elaboração e análise de planejamento, organização, gestão, controle e avaliação. Estudo e compreensão da administração de Recursos Humanos, conceitos básicos de logística. Reflexão e aplicação dos principais conceitos e técnicas utilizados pelo Marketing.

T.RH.5 Informática.

Ementa: Estudo do histórico e da evolução da Informática. Compreensão da arquitetura dos computadores. Estabelecimento de relações entre sistemas computadorizados e operacionais. Utilização de aplicativos de escritório e da internet. Aplicação das ferramentas de sistemas operacionais. Conhecimento dos mecanismos de segurança para a internet.

T.RH.6 Introdução à Economia.

Ementa: Introdução à economia. Levantamento de conceitos básicos. Introdução a Microeconomia. Estudo das estruturas de mercado. Introdução a Macroeconomia. Investigação e interpretação da economia brasileira. Análise dos conceitos e impactos da globalização, do papel do Estado, das desigualdades sociais e distribuição de renda.

#### T.RH.7 Matemática Financeira e Estatística.

Ementa: Estudo dos métodos e técnicas de cálculos financeiros e estatísticos, na aprendizagem do conhecimento da administração dos recursos humanos de uma empresa.

#### T.RH.8 Noções de Direito e Legislação Social do Trabalho.

Ementa: Estudo das relações trabalhistas e legislações específicas. Análise dos direitos dos trabalhadores e dos empregadores sob a ótica da CF, OIT, CLT.

#### T.RH.9 Planejamento e Análise de Funções.

Ementa: Compreensão dos princípios, objetivos, métodos e função da análise de funções. Construção do planejamento, seus objetivos e estratégias na gestão dos recursos humanos.

#### T.RH.10 Rotinas Trabalhistas.

Ementa: Análise das rotinas de admissão e demissão. Estudos dos dados para elaboração da folha de pagamento e da incidência de impostos sobre o salário. Reflexão sobre os acidentes de trabalho, as condições ambientais e as condições de trabalho. Aplicação do gerenciamento eficaz no meio ambiente laboral, à saúde e a segurança ocupacional. Estudo das modalidades de contratos.

#### T.RH.11 Tecnologia da Informação.

Ementa: Estudo da tecnologia da informação e seu uso nas organizações. Compreensão das principais questões técnicas e gerenciais sobre a tecnologia da informação para o desenvolvimento e implantação de sistema de informações em recursos humanos.

T.RH.12 Psicologia Social e do Trabalho.

Ementa: Introdução às correntes da psicologia. Fundamentação da psicologia social e institucional. Compreensão do comportamento humano nas organizações, formação da identidade, autoestima, consciência ecológica e comportamento ambiental nas empresas.

Na área de recursos humanos utiliza-se com muita frequência porcentagem, razões, proporções etc. para cálculos diversos como folha de pagamento, férias, rescisões e qualquer cálculo trabalhista, além da utilização na gestão de pessoas, como índices diversos, tais como o de absenteísmo em uma indústria, por exemplo. Um egresso deste Curso Técnico depende extremamente de conhecimentos matemáticos que sustentam a base destes cálculos. Não basta o sensível apertão de teclas ou da fluência de um programa, frequentemente aparecem novidades que desafiam um funcionário de uma empresa que se dedica a esta função.

Conclusivamente, ainda que a partir de uma rápida análise apresentada ao leitor acredita-se que é possível elucidar a importância e o modo pelo qual a Matemática é de suma importância nestes cursos. E, mais ainda, a necessidade de integrarmos os conceitos que desejamos ensinar para cada estudante a partir da realidade que ele deverá enfrentar na prática ao exercer a função para a qual ele é formado.

Deste modo, no capítulo que segue, apresentamos alguns aspectos no sentido de orientar o professor destes cursos para realizar seu trabalho.

Pretende-se, na próxima seção, apresentar situações-problema relativas às disciplinas de Matemática Financeira e de Estatística, apresentando soluções que remetem à Matemática do Ensino Médio, bem como ao uso da calculadora HP12C e de planilha de cálculo.

# CAPÍTULO 2

---

## 2. OS CURSOS TÉCNICOS PROFISSIONALIZANTES

### 2.1 ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS PARA OS CURSOS TÉCNICOS: O QUE OS DOCUMENTOS OFICIAIS NOS DIZEM?

Em sintonia aos cursos ofertados pela escola pública, os Cursos Técnicos possuem documentos orientadores próprios. Desta forma, convém questionar se existe alguma menção sobre a forma de conduzir o ensino nestes cursos. Mais precisamente, se existe alguma orientação quanto às estratégias metodológicas para a disciplina de Matemática nos Cursos Técnicos Profissionalizantes, já que para os cursos de Ensino Fundamental e Médio existem. Entretanto, as Diretrizes Curriculares Nacionais e a Estadual não tratam diretamente sobre alguma estratégia metodológica a ser adotada no ensino de Matemática financeira e de estatística dos cursos subsequentes. Porém, em seu Artigo 9º, as Diretrizes Curriculares Nacionais nos dá uma ideia da atitude a ser tomada em quaisquer disciplinas, quando nos diz:

Art. 9º Na oferta de cursos na forma subsequente, caso o diagnóstico avaliativo evidencie necessidade, devem ser introduzidos conhecimentos e habilidades inerentes à Educação Básica, para complementação e atualização de estudos, em consonância com o respectivo eixo tecnológico, garantindo o perfil profissional de conclusão. (BRASIL, 2012, p. 4).

Ainda neste documento, o Artigo 13º diz:

Art. 13º A estruturação dos cursos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio, orientada pela concepção de eixo tecnológico, implica considerar:

I – a matriz tecnológica, contemplando métodos, técnicas, ferramentas e outros elementos das tecnologias relativas aos cursos;

II – o núcleo politécnico comum correspondente a cada eixo tecnológico em que se situa o curso, que compreende os fundamentos científicos, sociais, organizacionais, econômicos, políticos, culturais, ambientais, estéticos e éticos que alicerçam

as tecnologias e a contextualização do mesmo no sistema de produção social;

III – os conhecimentos e as habilidades nas áreas de linguagens e códigos, ciências humanas, matemática e ciências da natureza, vinculados à Educação Básica deverão permear o currículo dos cursos técnicos de nível médio, de acordo com as especificidades dos mesmos, como elementos essenciais para a formação e o desenvolvimento profissional do cidadão;

IV – a pertinência, a coerência, a coesão e a consistência de conteúdos, articulados do ponto de vista do trabalho assumido como princípio educativo, contemplando as necessárias bases conceituais e metodológicas. (BRASIL, 2012, p. 4).

Já as Diretrizes Estaduais da Educação Profissional, nos dão uma ideia do tratamento metodológico relativo às disciplinas dos Cursos Técnicos Profissionalizantes, ao abordar em seu quinto capítulo, as dimensões teórico-metodológicas da educação profissional.

Neste capítulo, a metodologia será guiada a partir de considerarmos o trabalho como princípio educativo. Portanto, toma-se o trabalho como um eixo que articula todo conhecimento científico, cultural e artístico gerados pela humanidade, e que, portanto, formará um cidadão conhecedor e crítico de seu meio social e que tem uma formação emancipadora que pode articular sua capacidade de pensar à sua capacidade produtiva.

Assim, a formação da educação profissional pretende ser tal que, propicie às pessoas uma capacidade de rápida mudança segundo os caminhos orientados pelas tecnologias.

A Educação Profissional, para propiciar tal formação, deve contemplar, conforme o item 5.1 do quinto capítulo:

- Os princípios científicos gerais sobre os quais se fundamentam as relações sociais e produtivas;
- Os conhecimentos relativos às formas tecnológicas que estão na raiz dos processos sociais e produtivos contemporâneos;
- As formas de linguagem próprias das diferentes atividades sociais e produtivas;
- Os conhecimentos sócio-históricos e as categorias de análise que propiciem a compreensão crítica da sociedade capitalista e das formas de atuação do homem, como cidadão e trabalhador, sujeito e objeto da história. (PARANÁ, 2006, p. 36)

Ainda no quinto capítulo do documento, o item 5.2 discute a integração do conhecimento básico e aplicado mediado pelo processo produtivo:

A integração entre conhecimento básico e aplicado é possível somente pela mediação do processo produtivo, posto que não se resolve pela juntada de conteúdos ou mesmo de instituições com diferentes especificidades. Ela exige outro tratamento a ser dado ao projeto pedagógico, que torne o processo de trabalho e as relações sociais como eixo definidor dos conteúdos, além do conhecimento que compõe as áreas do conhecimento.

Tomar o trabalho como ponto de partida para o planejamento curricular relativamente à politecnia significa superar a tarefa como foco, o que originou o procedimento das séries metódicas e que fez história principalmente no Senai – Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial.

Substitui-se, portanto, conhecer a tarefa por conhecer a relação entre produto e processo, o que vale dizer, conhecer um produto do conhecimento humano a ser apreendido de forma mecânica, rotineira, pelo conhecimento do processo, como um conjunto de relações que revelam movimento.

### 5.3 RELACIONAR TEORIA E PRÁTICA E PARTE E TOTALIDADE

O tratamento metodológico privilegiará a relação entre teoria e prática e entre parte e totalidade. São outras as competências a desenvolver, para além da simples memorização de passos e procedimentos, que incluem as habilidades de comunicação, a capacidade de buscar informações em fontes e meios diferenciados e a possibilidade de trabalhar cientificamente com tais informações para resolver situações problemáticas e criar novas soluções; e sobretudo, é o outro processo de conhecer, que ultrapassa a relação apenas individual do homem com o conhecimento, para incorporar as múltiplas mediações do trabalho coletivo. (PARANÁ, 2006, p. 37, grifo nosso).

Portanto, conforme está apresentado acima, o planejamento curricular está centrado na *politecnia*. *Politecnia* foi um termo inicialmente utilizado por Marx em suas análises relativas às demandas da mão de obra para a produção. De acordo com Saviani (2003), “Politecnia, literalmente, significaria múltiplas técnicas, multiplicidade de técnicas (...)”. Mas, definido desta forma, o termo corria o risco de gerar ambiguidades. Assim, no debate concernente à educação profissional, Saviani diz:

Politecnia diz respeito ao domínio dos fundamentos científicos das diferentes técnicas que caracterizam o processo de trabalho produtivo moderno. Está relacionada aos fundamentos das diferentes modalidades de trabalho e tem como base

determinados princípios, determinados fundamentos, que devem ser garantidos pela formação técnica. (SAVIANI, 2003, P. 140).

Em continuidade, o autor questiona sobre a necessidade da exigência desta vinculação e/ou necessidade do apontado. Ele coloca que o domínio destes fundamentos tornará o trabalhador apto e em condições de desenvolver as diferentes modalidades de trabalho, em sua essência.

(...) trata-se de propiciar-lhe um desenvolvimento multilateral, um desenvolvimento que abarca todos os ângulos da prática produtiva na medida em que ele domina aqueles princípios que estão na base da organização da produção moderna. (SAVIANI, 2003, 140).

Ainda em referência aos aspectos metodológicos, no capítulo as Diretrizes Estaduais ponderam a respeito da interdisciplinaridade como meio de formação em sua totalidade crítica e social.

Os conteúdos que compõem cada percurso formativo deverão ser organizados de modo a integrar as dimensões disciplinar e interdisciplinar. A compreensão da totalidade das relações exigida para a inserção responsável do aluno na vida social e produtiva indica um currículo que articule projetos transdisciplinares e ações disciplinares, para permitir ao aluno o acesso a formas superiores de compreensão da realidade, pela apreensão das complexas conexões que articulam a parte e totalidade. (PARANÁ, 2006, P. 39).

Isto nos permite dizer que a educação profissional deve seguir estratégias metodológicas semelhantes às do Ensino Médio. Porém, intrinsecamente, os conteúdos devem ser construídos, de forma vinculada à realidade profissional de cada curso. Entende-se que desta forma, os conteúdos de Matemática devem ser trabalhados a partir de situações e contextos da prática profissional do estudante. Com isso, deverão ser promovidas nas aulas de cada disciplina, e em particular nas aulas de Matemática, associações que possam refletir aspectos do mundo do trabalho.

Em particular, no âmbito do Colégio Estadual Vicente Rijo, no texto do Projeto Político Pedagógico, a respeito da metodologia do trabalho pedagógico, consta que:

O Colégio deve empenhar-se em proporcionar aos alunos uma metodologia de ensino que promova a inserção do aluno aos

saberes científicos, culturais e artísticos, atualizados, conjuntamente com o desenvolvimento do sentido crítico. Deve ser desenvolvido um trabalho participativo na construção do conhecimento em sala de aula. (PPP, 2018, p. 38)

Mas, considerando o Art. 9º das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnico de Nível Médio citado acima, que faz menção de retomar os conteúdos do Ensino Médio, caso necessário, considerando o quinto capítulo das Diretrizes Estaduais da Educação Profissional, recomendando a relação entre teoria e prática e a integração do conhecimento básico e aplicado, e que segundo o Projeto Político Pedagógico do colégio, em sua proposta pedagógica curricular de Matemática para o Ensino Médio,

[...] o professor deve apresentar e desenvolver conteúdos através de situações-problema e resgatar a compreensão da construção do conceito matemático em situações reais que possibilitem o aluno tomar consciência de que já possui algum conhecimento sobre o assunto [...] (PPP, 2018, p. 188).

Pode-se depreender disso, que é recomendável utilizar nos Cursos Técnicos Profissionalizantes subsequentes as mesmas estratégias metodológicas recomendadas no ensino de Matemática do Ensino Médio, dentre elas, a Resolução de Problemas e de Modelagem Matemática.

## **2.2 ACERCA DAS ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS NOS CURSOS TÉCNICOS PROFISSIONALIZANTES**

Estudantes de Cursos Técnicos Profissionalizantes subsequentes têm algumas características peculiares. Em geral, trata-se de pessoas que deixaram os bancos escolares há alguns anos, foram para o mercado de trabalho e, agora, voltam para a escola procurando um aperfeiçoamento ou, uma qualificação profissional com objetivos dos mais diversos. Em uma turma, é comum e possível encontrar pessoas cujas idades variam de 20 anos até pessoas na casa dos 60. É necessário para o ingresso que todos os estudantes já tenham concluído o Ensino Médio, conforme mencionado anteriormente. Mas há estudantes que concluíram na modalidade Educação para Jovens e Adultos (EJA), supletivo (em tempo reduzido) e a normal. É comum encontrar em uma turma de curso subsequente algum estudante cursando uma graduação ou,

que já a concluiu, e até mesmo estudantes que já cursaram algum curso de pós-graduação.

As características mencionadas acima revelam que os estudantes de cursos subsequentes trazem consigo uma bagagem de conhecimentos do mundo do trabalho, de experiências vividas que podem tornar a sala de aula um ambiente fértil e profícuo para que sejam utilizadas estratégias de ensino de Matemática que recorram justamente a estas características que podem ser singular de cada estudante ou se estender a um grupo da turma. Assim, coloca-se a seguir como sugestão de estratégia metodológica o trabalho circunstanciado em problemas.

### **2.3 OS PROBLEMAS NO ÂMBITO DOS CURSOS TÉCNICOS PROFISSIONALIZANTES**

Uma questão com a qual o professor pode se deparar em sala de aula na Educação Básica é sobre a utilidade da Matemática que está sendo ensinada que provavelmente surja como uma pergunta dos seus alunos.

Por isso, os cursos de graduação em Matemática têm buscado formas de preparar os professores de Matemática para esta situação. A esse respeito, encontramos em Bassanezi, 2006:

A tônica dos cursos de graduação é desenvolver disciplinas matemáticas “aplicáveis”, em especial aquelas básicas que já serviram como auxiliares na modelagem de fenômenos de alguma realidade como Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, Teoria de Controle Ótimo, Programação Linear e não Linear, Teoria das Matrizes, Métodos Computacionais, Análise Numérica etc. (BASSANEZI, 2006, p. 35).

Uma possibilidade para satisfazer a esta demanda, no que diz respeito à Matemática escolar é utilizar estratégias de ensino de Matemática como a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática.

No processo evolutivo da Educação Matemática, a inclusão de aspectos de aplicações e mais recentemente, resolução de problemas e modelagem, têm sido defendidas por várias pessoas envolvidas com o ensino de matemática. Isto significa,

entre outras coisas, que a matéria deve ser ensinada de um modo significativo matematicamente, considerando as próprias realidades do sistema educacional (BASSANEZI, 2006, p. 36).

Uma das capacidades requeridas de um profissional no mundo do trabalho é a de resolver problemas. O desenvolvimento tecnológico experimentado pela sociedade nas últimas décadas mostra a necessidade das pessoas se adaptarem rapidamente às mudanças e traçar estratégias para resolverem problemas e atuarem em diversos setores da economia.

Assim, para se ter um melhor aproveitamento do retorno do estudante à sala de aula e, tendo como premissa as habilidades que devem desenvolver para se integrar ao mundo do trabalho, tendo-o como princípio educativo, é interessante convidar os/as estudantes dos Cursos Técnicos Profissionalizantes a construir ou reconstruir seu conhecimento matemático, nas disciplinas de Matemática Financeira e Estatística Aplicada, a partir da utilização de problemas.

Para tanto, vamos apresentar uma breve revisão metodológica destacando um dos personagens na história da Educação Matemática que marcou a relevância de incorporarmos os problemas no ensino de Matemática, trata-se de George Pólya (1887-1985) um notável matemático húngaro e professor de Matemática em na Universidade de Stanford. Uma de suas obras foi essencial na ênfase em resolver problemas para se ensinar Matemática, a obra intitulada – “A arte de resolver problemas”. Neste livro, apresenta um arrazoado sobre utilizar problemas no ensino e delinea quatro fases para a resolução de problemas, são elas: 1) compreender o problema; 2) estabelecer um plano; 3) executar o plano; 4) examinar a solução obtida (ONUICHIC, 2014, p. 23).

Na Educação Matemática há um constante trabalho no sentido de trazer os problemas como meio para o ensino na Matemática, especialmente em tendências como a Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática e a Investigação Matemática.

Na Resolução de Problemas (RP) um problema é o ponto de partida de uma aula de Matemática. A partir dele o/a estudante constrói seu conhecimento matemático utilizando aqueles que já possui, pelo estabelecimento de novas relações, conceitos e ideias matemáticas. Desse modo, o estudante torna-se ativo na construção do conhecimento, ao invés de ser mero receptor de conhecimentos prontos onde o professor é o centro da aula. Neste contexto, o/a professor (a) será um mediador do trabalho em sala de aula deixando de ser alguém que simplesmente *repassa* ou *transfere* o conhecimento pronto. Aqui, entende-se por problema alguma tarefa da qual não se tem conhecimento prévio para resolver. Uma ideia central da RP é a de que o conteúdo necessário para a construção do conhecimento do (a) estudante ainda não tenha sido apresentada, de modo que os/as próprios (as) estudantes o irão construir durante a sua solução. (ONUChIC; ALLEVATO, 2011, p. 85).

Deve-se lembrar de que, no caso particular dos Cursos Técnicos subsequentes, todos (as) estudantes já tiveram, de alguma forma, contato com os conteúdos da Educação Básica. Mesmo assim, por já terem deixado a escola há algum tempo, fica a ideia de que estes estudantes poderão reconstruir esse conhecimento. Neste trabalho não se optou por apresentar os problemas seguidos da forma tal como o professor deveria proceder para que esta estratégia fosse utilizada. Entretanto, a referência Onuchic (2014) e outras que se referem a tal podem ser consultadas. O que aqui apresenta-se, no capítulo que segue, são os problemas que foram elaborados a partir de situações que os egressos dos Cursos Técnico Profissionalizantes vivenciarão na prática. Dessa forma, deixa-se a cargo do professor dar o encaminhamento devido para a aula conforme a liberdade que possui para a adoção de estratégias que melhor lhe convém em cada turma que desenvolverá seu trabalho.

Sobre outras tendências citadas acima pode-se consultar algumas obras sobre o assunto, tais como os livros “Investigações matemáticas na sala de aula”, de João Pedro da Ponte e “Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática”, de Rodney Carlos Bassanezi. Ambos os livros constam nas Referências.

## 2.4 ACERCA DAS TECNOLOGIAS: PLANILHAS DE CÁLCULO E CALCULADORA FINANCEIRA

Nos Cursos Técnicos Subsequentes é recomendável a utilização de calculadoras e de planilhas de cálculo para que o estudante aprenda a utilizar tais instrumentos, e, percebe-se que isto torna os/as estudantes mais interessados (as). No caso particular do trabalho que se apresenta, são utilizadas as planilhas de cálculo *Calc* ou o *Excel*. A calculadora utilizada é a calculadora financeira HP12C, que pode ser baixada no telefone celular.

A esse respeito, diz Santos (2008):

(...) o computador, por sua capacidade em termos de cálculo, visualização e simulação, consiste em poderoso instrumento de que atualmente dispõe os educadores matemáticos a fim de proporcionar aos alunos experiências que os colocam em contato com contextos e situações variáveis e lhes oportuniza buscar caminhos para a solução dos problemas (SANTOS, 2008, p. 15).

E a utilização destes instrumentos pode favorecer a concentração do estudante no foco da situação apresentada pelo problema.

Todo aluno pode somar, subtrair, multiplicar e dividir quando usa uma calculadora. As dificuldades do cálculo inerentes ao trabalho com lápis e papel se amenizam, e os alunos podem centrar a atenção no processo de resolução de problemas. (DUEA, 1998, p. 166).

No decorrer do texto que segue serão apresentados os problemas que se referem a proposta deste trabalho. Para cada problema tem-se a solução, e, seguida de duas situações: com o uso da calculadora HP12 C e com o uso de planilhas de cálculo. Para cada caso os pormenores serão descritos no sentido de auxiliar o professor que se interessar em utilizar este material em sala de aula. Pois, conforme Duea (1998):

A calculadora fornece aos alunos uma nova maneira de justificar um método de solução. Um código de calculadora mostra as sequências de teclas pressionadas para produzir a resposta. Um código de calculadora, como uma equação, registra os processos de raciocínio de quem está resolvendo o problema. Ademais, como o aluno desenvolve e segue o código, a resposta é exibida na calculadora.

O código usado para resolver um problema servirá para outros análogos, com ligeiras modificações. (DUEA, 1998, p. 167).

A experiência que adquirimos ao longo do tempo de atuação confirma a importância da utilização dos recursos supracitados. Sem dúvida é essencial que os estudantes egressos destes cursos saibam utilizar as calculadoras eletrônicas e as planilhas de cálculos, pode-se dizer que, atualmente, essa habilidade é exigência do mercado do trabalho. Por isso, destaca-se a relevância dos instrumentos na proposta apresentada.

Na seção seguinte o texto será dividido segundo o curso a que se refere o problema, algumas interseções são possíveis de serem realizadas, pois, alguns problemas podem ser utilizados em cursos distintos. E ainda, ao final desta lista, incluíram-se alguns problemas que tratam de situações presentes no cotidiano do trabalho de qualquer pessoa na administração de recursos financeiros.

# CAPÍTULO 3

---

## 3. PROBLEMAS E SOLUÇÕES PARA CURSOS TÉCNICOS PROFISSIONALIZANTES

Os problemas desempenham um papel de grande relevância no ensino da Matemática. Conforme anunciado anteriormente, este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de tratamento da Matemática para os Cursos Técnicos. Este capítulo é dedicado a isto. No texto que segue será apresentado a proposta proveniente dos estudos realizados para a elaboração deste trabalho. Escolheu-se apresentar cada problema em uma seção direcionada ao curso ao qual ele se destina. Vale comentar que alguns problemas são passíveis de serem utilizados em mais de um curso.

A redação aqui construída foi dedicada ao professor, para que ele possa utilizar os problemas para o ensino, quer seja nos cursos destinados para os quais foram construídos ou onde desejar abordar o conteúdo envolvido.

A primeira seção traz os problemas para o curso Técnico em Administração.

### 3.1 PROBLEMAS PARA O CURSO TÉCNICO EM ADMINISTRAÇÃO

A partir de uma situação que o profissional de um Curso Técnico em Administração poderá enfrentar apresenta-se um problema que introduz o conceito de montante e juros compostos, ferramenta amplamente utilizada no mercado financeiro. Para o tratamento desses conceitos as/os estudantes devem possuir conhecimentos prévios sobre cálculo de porcentagem, de juros simples, montante simples e de potenciação. Oportunamente pode-se introduzir ao final deste problema<sup>3</sup> a constante  $e$  como resultado de um cálculo de montante composto.

---

<sup>3</sup> Maiores detalhes podem ser encontrados em “E – The Story of a Number, Eli Maor”. Essa obra consta nas Referências.

**PROBLEMA 1:** Uma empresa fez uma aplicação financeira de R\$ 2.000.000,00 a uma taxa composta de 1,5% ao mês. O recurso ficou aplicado por dois anos e cinco meses, sendo então resgatado. Sabe-se que no momento do resgate incide sobre o rendimento a alíquota de 17,5% de imposto de renda. Calcule o montante e o valor dos juros compostos antes do imposto de renda e o valor líquido obtido, após a incidência do imposto de renda.

**SOLUÇÃO:**

Este é um problema de montante e juros compostos. Portanto, a fórmula que será utilizada é

$$M = C(1+i)^n \quad (1)$$

Onde  $M$  significa montante,  $C$  é o capital,  $i$  é a taxa de juros contratada e  $n$  é o prazo. Esta fórmula vem de aplicações sucessivas da fórmula para montante simples, que pode ser expressa assim:

$$M_s = C(1+in) \quad (2)$$

Onde  $M_s$  é o montante simples.

No âmbito de juros simples, sabe-se que o cálculo do valor de juros é dado por

$$J = Cin \quad (3)$$

Onde  $J$  significa juros.

O montante simples é dado por

$$M_s = C + J \quad (4)$$

Substituindo nessa expressão a fórmula para cálculo dos juros (3), teremos:

$$M_s = C + Cin \quad (5)$$

E, então, isolando o capital nesta expressão, obtemos:

$$M_s = C(1+in) \quad (6)$$

Como o valor do montante composto de cada período (dia, mês, bimestre etc.) é obtido da aplicação da taxa de juros contratada sobre o período imediatamente anterior, podemos então calcular o montante aplicando sucessivamente a fórmula anterior. Isso dará:

- Montante no primeiro período:

$$M_1 = C(1+i)$$

- Montante no segundo período:

$$M_2 = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$$

Continuando dessa forma, obteremos a fórmula (1), inicialmente sugerida para cálculo do montante composto. Ou seja, no regime de juros compostos, um capital  $C_0$  é transformado, em determinado período de tempo  $n$  (considerando o tempo como um número natural), segundo uma taxa  $i$  em um montante

$$C_n = C_0(1+i)^n.$$

De fato, pode-se demonstrar por indução em  $n$  a fórmula acima, considerando  $n$  um número natural. Para  $n = 1$ , tem-se que  $C_1 = C_0(1+i)$ . Vamos colocar  $C_n = C_0(1+i)^n$  como nossa hipótese de indução. Então temos que  $C_{n+1} = C_n + C_n \cdot i = C_0(1+i)^n + C_0(1+i)^n \cdot i = C_0(1+i)^n \cdot (1+i) = C_0(1+i)^{n+1}$  como queríamos demonstrar.

No apêndice é enunciado o princípio da indução finita.

Vamos usar essa fórmula (1) para calcular o montante antes do imposto de renda:

$$M = C(1+i)^n$$

$$M = 2.000.000(1+0,015)^{29}$$

$$M = 2.000.000 \times 1,015^{29}$$

$$M = 2.000.000 \times 1,539981$$

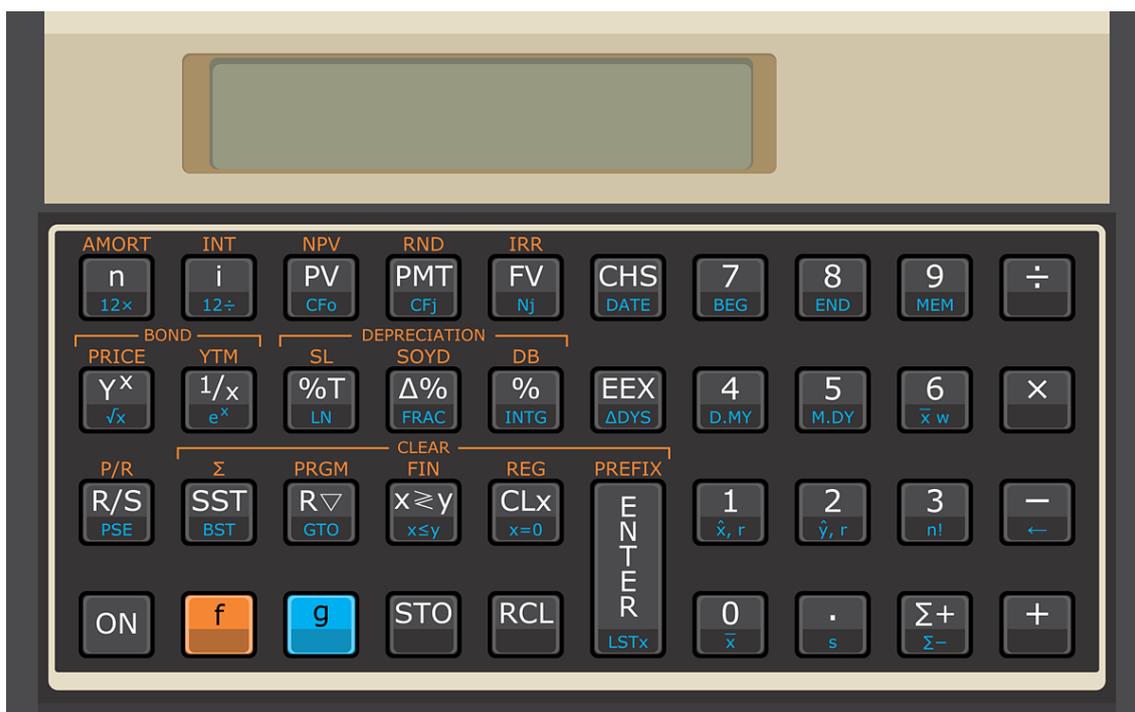
$$M = 3.079.961,03$$

Então, o valor do montante composto antes do imposto de renda é de R\$ 3.079.961,03.

Conforme anunciamos anteriormente, no decorrer deste trabalho, alguns problemas propostos terão sua solução apresentada com uso da calculadora HP12C<sup>4</sup> (figura 1). Trata-se de uma calculadora financeira programável que utiliza o método da notação polonesa reversa para realizar suas operações e conta com o conceito de fluxo de caixa para operações financeiras. Justifica seu uso por ser uma calculadora já consagrada no mercado financeiro mundial.

Na notação polonesa reversa, basicamente introduz-se primeiramente os valores para então realizar a operação desejada. Por exemplo, fazer  $5+2$  na HP12C se deve digitar 5, enter, 2, +, para obter o resultado, 7.

Figura 1: Calculadora HP12C



Fonte: <http://www.encurtador.com.br/qBV18>

<sup>4</sup> O manual da calculadora financeira HP12C pode ser encontrado em <http://h10032.www1.hp.com/ctg/Manual/bpia5239.pdf>



### CALCULADORA HP12C.

Voltando ao enunciado do problema um, vamos apresentar uma solução usando essa fórmula e fazendo os cálculos com a calculadora HP12C é:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
2000000	ENTER	2.000.000,00
1,015	ENTER	1,015
29	$y^x$	1,539981
	X	3.079.961,03

Obtendo o montante de R\$ 3.079.961,03.

O valor dos juros compostos é dado por

$$J = M - C \quad (7)$$

Dai,

$$J = 3.079.961,03 - 2000.000,00$$

$$J = 1.079.961,03$$

Usando HP12C:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
3079961,03	ENTER	3.079.961,03
2000000	-	1.079.961,03

Obtendo os juros de R\$ 1.079.961,03.

Quando esse valor for resgatado, será descontado de o valor correspondente a 17,50%.

Então, teremos:

$$IR = 1.079.961,03 \times 17,5\%$$

$$IR = 188.993,18$$

Na calculadora HP12C:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
1079961,03	ENTER	1.079.961,03
17,5	%	188.993,18

Daí, para calcular rendimento líquido, faz-se:

$$L = J - IR$$

$$L = 1.079.961,03 - 188.993,18$$

$$L = 890.967,85$$

O montante líquido será dado por:

$$M = C + L$$

Na calculadora HP12C:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
1079961,03	<b>ENTER</b>	1.079.961,03
188993,18	-	890.967,85
2000000	<b>+</b>	2.890.967,85

E o montante líquido será de R\$ 2.890.967,85.

Com o uso da calculadora HP12C, um procedimento utilizando as funções financeiras poderia ser o seguinte:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
2000000	<b>PV</b>	2.000.000,00
1,5	<b>I</b>	1,50
29	<b>N</b>	29
	<b>FV</b>	-3.079.961,03
	<b>CHS</b>	3.079.961,03
2000000	-	1.079.961,03
17,5	<b>%</b>	188.993,18
	-	890.967,85

Observação: Sobre a CONSTANTE  $e$

Intimamente relacionada com o cálculo de montante composto está uma constante real muito importante em Matemática Pura e Aplicada: a constante  $e$ . Ela aparece quando determinada taxa, dita nominal é capitalizada por muitas subdivisões de um período determinado. Por exemplo, considere que um capital de R\$ 1,00 seja aplicado por um ano, à taxa “imaginária” de 100% ao ano. Vamos simular a capitalização deste valor por várias subdivisões do ano utilizando a planilha de cálculo, conforme a figura 2:

Figura 2: Planilha

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Período de				
3		capitalização	n	taxa/n	$[1+(taxa/n)]^n$	
4		Anual	1	1	2,0000000000	
5		Semestral	2	0,5	2,2500000000	
6		Quadrimestral	3	0,3333333333	2,3703703704	
7		Trimestral	4	0,25	2,4414062500	
8		Mensal	12	0,0833333333	2,6130352902	
9		Diário	365	0,002739726	2,7145674820	
10		Por hora	8.760	0,000114155	2,7181266916	
11		Por minuto	525.600	1,90259E-06	2,7182792426	
12		Por segundo	31.536.000	3,17098E-08	2,7182817813	
13		Por milissegundos	31.536.000.000	3,17098E-11	2,7182778814	
14						
15						

Fonte: o próprio autor.

E, a planilha (figura 3) mostrando as fórmulas utilizadas:

Figura 3: Fórmulas usadas para uma aproximação de e

	A	B	C	D	E
1					
2		Período de			
3		capitalização	n	taxa/n	$[1+(taxa/n)]^n$
4		Anual	1	=1/C4	=(1+D4)^C4
5		Semestral	2	=1/C5	=(1+D5)^C5
6		Quadrimestral	3	=1/C6	=(1+D6)^C6
7		Trimestral	4	=1/C7	=(1+D7)^C7
8		Mensal	12	=1/C8	=(1+D8)^C8
9		Diário	365	=1/C9	=(1+D9)^C9
10		Por hora	8760	=1/C10	=(1+D10)^C10
11		Por minuto	525600	=1/C11	=(1+D11)^C11
12		Por segundo	31536000	=1/C12	=(1+D12)^C12
13		Por milissegundos	31536000000	=1/C13	=(1+D13)^C13
14					
15					

Fonte: o próprio autor.

O número  $e$  escrito com sete casas decimais é 2,7182818, que aparece na simulação acima (figura 2). Prova-se em cálculo diferencial e integral que a sequência de termo geral

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

converge e expressa-se a constante **e** como um limite para a sequência:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathbf{e}$$

Uma demonstração deste fato é apresentada no apêndice.

Quando se utiliza a constante **e** para cálculo de montante composto, diz-se que a capitalização é contínua. Em finanças, a capitalização contínua é comumente utilizada no mercado acionário devido ao fato de que em uma carteira de ações uma empresa paga dividendos em dias variados e, se a carteira for bastante diversificada poderão ocorrer pagamentos de dividendos todos os dias.

A capitalização contínua é utilizada também no cálculo de opções (instrumentos financeiros de opção de compra de uma ação). A constante **e** aparece ainda em vários modelos de análise de carteira de ações e modelos de análise de riscos de carteiras, como o modelo de precificação de ativos de Black-Scholes<sup>5</sup>, que é um modelo que usa equações diferenciais estocásticas. A função exponencial (potências de **e**) é utilizada nesses modelos pela facilidade de cálculo quando envolve derivadas, integrais e equações diferenciais, como no caso do modelo citado.

Para calcularmos a capitalização contínua de um capital usamos a fórmula:

$$M = C \cdot e^{in} \quad (8)$$

Onde *i* é a taxa na sua forma unitária (dividida por 100), *C* é o capital, *M* representa o montante e *n* é o tempo. A calculadora financeira HP12C tem a função “*e<sup>x</sup>*” para efetuar esse cálculo. A título de exemplo, vamos calcular o montante composto continuamente de R\$ 100,00, à taxa de 3% ao mês, por dois meses utilizando esta fórmula (8):

$$M = 100 \cdot e^{0,03 \times 2} \cong 106,18$$

---

<sup>5</sup> Mais detalhes podem ser obtidos em

[https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall09/cos323/papers/black\\_scholes73.pdf](https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall09/cos323/papers/black_scholes73.pdf)

A planilha abaixo (figura 4) mostra o cálculo deste valor usando o conceito inicial de capitalização composta:

Figura 4: Capitalização composta contínua de R\$ 100,00 a 3% ao bimestre

	A	B	C	D	E
1					
2			n	taxa/n	$100 \times [1 + (\text{taxa}/n)]^{2 \times n}$
3		Bimestre	1	0,03	106,09000
4		Mês	2	0,015	106,13636
5		Dias	60	0,0005	106,18206
6		Horas	1.440	2,08333E-05	106,18359
7		Minutos	86.400	3,47222E-07	106,18365
8		Segundos	5.184.000	5,78704E-09	106,18365
9		Milissegundos	5.184.000.000	5,78704E-12	106,18353
10					
11					

Fonte: o próprio autor.

A figura 5 apresenta a mesma planilha mostrando as fórmulas utilizadas:

Figura 5: Fórmulas utilizadas para cálculo do montante composto contínuo

	A	B	C	D	E
1					
2			n	taxa/n	$100 \times [1 + (\text{taxa}/n)]^{2 \times n}$
3		Bimestre	1	=0,03/C3	=100*(1+D3)^(C3*2)
4		Mês	2	=0,03/C4	=100*(1+D4)^(C4*2)
5		Dias	60	=0,03/C5	=100*(1+D5)^(C5*2)
6		Horas	1440	=0,03/C6	=100*(1+D6)^(C6*2)
7		Minutos	86400	=0,03/C7	=100*(1+D7)^(C7*2)
8		Segundos	5184000	=0,03/C8	=100*(1+D8)^(C8*2)
9		Milissegundos	5184000000	=0,03/C9	=100*(1+D9)^(C9*2)
10					
11					
12					

Fonte: o próprio autor.

Relacionado com a constante  $e$  temos os logaritmos naturais, que são os de base  $e$ , muito importantes também em Matemática pura e aplicada, em particular no cálculo diferencial e integral.

Na calculadora financeira HP12C os logaritmos são na base  $e$ , e calculado com o uso da tecla  $\boxed{\text{LN}}$ , que é acionada pressionando-se a tecla g azul e a tecla %T, na qual aparece escrito LN em azul.

O ponto principal do problema a seguir é introduzir o conceito de taxa média a partir da definição de média geométrica. O cálculo de taxa média é muito frequente no mercado financeiro, motivando assim sua apresentação.

PROBLEMA 2: Uma empresa aplicou R\$ 2.150.000,00 em um fundo de renda fixa que remunera o recurso diariamente, sendo que a taxa aplicada é o CDI (Certificado de Depósito Interbancário), que é uma taxa composta. O recurso ficou aplicado de 1° setembro de 2017 a 1° de setembro de 2018. Quando é feito o resgate incide sobre o rendimento a alíquota de 20% de imposto de renda. Calcule o montante obtido antes do imposto de renda e o valor líquido, obtido após a aplicação da alíquota de imposto de renda. Calcule a taxa média mensal considerando o montante antes do imposto e a taxa mensal média líquida, calculada considerando o valor líquido do resgate. Para este exercício é necessário pesquisar, no portal do Banco Central do Brasil, por exemplo, qual foi o CDI no período mencionado. Resolva este exercício usando uma planilha de cálculo.

### SOLUÇÃO.

Todos os dias os bancos do país encerram seu caixa calculando a diferença entre depósitos e saques. Eventualmente, em certo dia, algum banco pode obter um resultado negativo nessa apuração. Se for esse o caso, ele emite um Certificado de Depósito Interbancário (CDI), que é um empréstimo feito em curtíssimo prazo (um dia) junto a outros bancos para cobrir essa posição, ou *déficit*. Por esse certificado é combinada uma taxa de remuneração diária. Dessa forma, o CDI tem se tornado uma taxa de referência para aplicações de renda fixa e para ser utilizada como taxa para fins de comparação com outras taxas. A taxa CDI é uma taxa composta, aplicável apenas em dias úteis. A taxa mensal divulgada pelo Banco Central do Brasil é a acumulação das taxas diárias.

Para o período mencionado no enunciado do exercício a tabela 1 mostra a taxa CDI por mês.

Tabela 1: CDI de setembro de 2017 a agosto de 2018

DATA	PERCENTUAL AO MÊS
Setembro de 2017	0,64%
Outubro de 2017	0,64%
Novembro de 2017	0,57%
Dezembro de 2017	0,54%
Janeiro de 2018	0,58%
Fevereiro de 2018	0,46%
Março de 2018	0,53%
Abril de 2018	0,52%
Maio de 2018	0,52%
Junho de 2018	0,52%
Julho de 2018	0,54%
Agosto de 2018	0,57%

Fonte: Banco Central do Brasil.

Uma forma de resolver o que se pede é acumular as taxas apresentadas na tabela da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 TA &= (1+0,0064)(1+0,0064)(1+0,0057)(1+0,0054)(1+0,0058) \\
 & (1+0,0046)(1+0,0053)(1+0,0052)(1+0,0052)(1+0,0052)(1+0,0054)(1+0,0057) \\
 & = 1,06835071664
 \end{aligned}$$

Onde  $TA$  é a taxa acumulada. E assim, a taxa percentual é de 6,835071664% para o período.

Usando agora essa taxa, aplicamos sobre o capital, usando (3) obtendo:

$$Juros = 2.150.000 \times 6,835071664\% = 146.954,04.$$

Assim, o valor do montante (4) antes do imposto de renda será:

$$2.150.000,00 + 146.954,04 = 2.296.954,04$$

Quanto ao imposto de renda,  $IR$ , teremos:

$$IR = 146.954,04 \times 20\% = 29.390,80$$

Sendo o rendimento líquido assim obtido:

$$L = 146.954,04 - 29.390,80 = 117.563,24$$

Logo, o montante líquido será:

$$2.150.000,00 + 117.563,24 = 2.267.563,24$$

Para calcular a taxa média mensal, precisamos da definição que segue.

Define-se a média de uma lista de números como um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar determinada característica da lista. Se a característica considerada for o produto dos elementos da lista, tem-se a *média geométrica*. (MORGADO, 2015, p. 162).

Definição: A média geométrica de  $n$  números positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é um valor positivo  $x$  tal que

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x = x^n$$

Do que decorre a seguinte definição:

A média geométrica do  $n$  números positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é dada por

$$x = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (9)$$

Quanto à taxa média mensal, pelo fato da taxa do CDI ser composta, esta média deve ser a geométrica, isto é, será obtida da seguinte forma, usando (9):

$$\left(\sqrt[12]{1,06835071664} - 1\right) \times 100 = 0,552488 \quad (10)$$

Com isso, a taxa média mensal é de 0,552488%.



#### CALCULADORA HP12C

Na calculadora HP12C, o cálculo da expressão (10) pode ser feito da seguinte forma:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
1,06835071644	<b>ENTER</b>	1,06835071644
12	<b>1/x</b>	0,083333333
	<b>y<sup>x</sup></b>	1,005524879
1	<b>-</b>	0,005524879
100	<b>X</b>	0,552488

Para calcular a taxa média líquida, primeiramente, calcula-se a taxa de variação percentual entre o capital aplicado e o montante líquido. Ou seja, resolve-se a regra de três simples:

$$\frac{117.563,24}{2.150.000} = \frac{y}{100}$$

Logo,

$$y = \frac{117563,24 \times 100}{2150000}$$

Isto nos dá,  $y = 5,4680576$ , o que significa que a taxa líquida desta aplicação foi de 5,4680576% no período.



CALCULADORA HP12C

O cálculo da variação percentual feito acima com uso da HP12C seria:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
2150000	<b>ENTER</b>	2.150.000,00
2267563,24	<b>Δ%</b>	5,4680576

O cálculo da taxa líquida mensal é feito utilizando a fórmula (9) da média geométrica, da seguinte forma:

$$\left(\sqrt[12]{1,054680576} - 1\right) \times 100 = 0,444635$$

Ou seja, a taxa líquida foi de 0,444635% ao mês.

A planilha abaixo (figura 6) mostra todos esses cálculos:

Figura 6: Cálculo do rendimento líquido de um investimento

	B	C	D	E	F	G	H	I
1	<b>Cálculo do montante composto</b>				<b>Cálculo da taxa acumulada:</b>			
2	<b>DATA</b>	<b>PERCENTUAL</b>	<b>JUROS</b>	<b>SALDO</b>	<b>DATA</b>	<b>PERCENTUAL</b>	<b>ACUMULADA</b>	
3				2.150.000,00	set/2017	0,64		0,64
4	set/2017	0,64	13.760,00	2.163.760,00	out/2017	0,64		1,284096
5	out/2017	0,64	13.848,06	2.177.608,06	nov/2017	0,57		1,861415347
6	nov/2017	0,57	12.412,37	2.190.020,43	dez/2017	0,54		2,41146699
7	dez/2017	0,54	11.826,11	2.201.846,54	jan/2018	0,58		3,005453499
8	jan/2018	0,58	12.770,71	2.214.617,25	fev/2018	0,46		3,479278585
9	fev/2018	0,46	10.187,24	2.224.804,49	mar/2018	0,53		4,027718761
10	mar/2018	0,53	11.791,46	2.236.595,95	abr/2018	0,52		4,568662899
11	abr/2018	0,52	11.630,30	2.248.226,25	mai/2018	0,52		5,112419946
12	mai/2018	0,52	11.690,78	2.259.917,03	jun/2018	0,52		5,65900453
13	jun/2018	0,52	11.751,57	2.271.668,60	jul/2018	0,54		6,229563154
14	jul/2018	0,54	12.267,01	2.283.935,61	ago/2018	0,57		6,835071664
15	ago/2018	0,57	13.018,43	2.296.954,04				
16								
17	<b>Cálculo do juro composto:</b>			146.954,04				
18	<b>Cálculo da taxa mensal:</b>			0,552487891	% ao mês			
19								
20	<b>Cálculo do valor líquido:</b>							
21	<b>Rendimento bruto:</b>			146.954,04				
22	<b>(-) Imposto de renda:</b>			29.390,81				
23	<b>(=) Rendimento líquido:</b>			117.563,23				
24								
25	<b>Cálculo da taxa líquida:</b>			5,468057331	% no período	0,4446351	% ao mês	
26								

Fonte: o próprio autor.

A figura 7 mostra a mesma planilha apresentando as fórmulas utilizadas.

Figura 7: Fórmulas para cálculo do rendimento líquido

Cálculo do montante composto					Cálculo da taxa acum		
DATA	PERCENTUAL	JUROS	SALDO	DATA	PERCENTUAL	ACUMULADA	
			2150000	42979	0,64	=H3	
42979	0,64	=E3*C4%	=E3+D4	43009	0,64	=((I3/100+1)*(H4/100+1))-1)*100	
43009	0,64	=E4*C5%	=E4+D5	43040	0,57	=((I4/100+1)*(H5/100+1))-1)*100	
43040	0,57	=E5*C6%	=E5+D6	43070	0,54	=((I5/100+1)*(H6/100+1))-1)*100	
43070	0,54	=E6*C7%	=E6+D7	43101	0,58	=((I6/100+1)*(H7/100+1))-1)*100	
43101	0,58	=E7*C8%	=E7+D8	43132	0,46	=((I7/100+1)*(H8/100+1))-1)*100	
43132	0,46	=E8*C9%	=E8+D9	43160	0,53	=((I8/100+1)*(H9/100+1))-1)*100	
43160	0,53	=E9*C10%	=E9+D10	43191	0,52	=((I9/100+1)*(H10/100+1))-1)*100	
43191	0,52	=E10*C11%	=E10+D11	43221	0,52	=((I10/100+1)*(H11/100+1))-1)*100	
43221	0,52	=E11*C12%	=E11+D12	43252	0,52	=((I11/100+1)*(H12/100+1))-1)*100	
43252	0,52	=E12*C13%	=E12+D13	43282	0,54	=((I12/100+1)*(H13/100+1))-1)*100	
43282	0,54	=E13*C14%	=E13+D14	43313	0,57	=((I13/100+1)*(H14/100+1))-1)*100	
43313	0,57	=E14*C15%	=E14+D15				
Cálculo do juro composto:		=E15-E3					
Cálculo da taxa mensal:		=((I14/100+1)^(1/12))-1)*100 % ao mês					
Cálculo do valor líquido:							
Rendimento bruto:		=D17					
(-) Imposto de renda:		=D17*20%					
(=) Rendimento líquido:		=D21-D22					
Cálculo da taxa líquida:		=D23*100)E3	% no período			=((D25/100+1)^(1/12))-1)% ao mês	

Fonte: o próprio autor.

Assim, vimos a solução do problema 2 algebricamente, com uso da calculadora financeira e com uso de planilha de cálculo.

O próximo problema introduz o conceito de rentabilidade real de uma aplicação financeira.

**PROBLEMA 3:** Diz-se que a rentabilidade real de um fundo é a rentabilidade líquida expurgada a inflação. Pesquise o IPCA (Índice de Preços ao Consumidor – Amplo) do período citado no problema anterior, e calcule a rentabilidade real da aplicação mencionada.

**SOLUÇÃO.**

Inflação significa aumento persistente de preços. No caso oposto, uma redução nos preços chama-se deflação. No Brasil, existem diversas instituições que monitoram a inflação do país bem como a inflação regional. Dentre esses institutos, destacam-se o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a Fundação Getúlio Vargas (FGV) e o Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA). A inflação é, em geral, sinal de desequilíbrios entre oferta e demanda de bens e serviços na economia de uma nação. Por esse motivo o

governo, via Banco Central do Brasil, monitora de perto as oscilações da inflação, uma vez que uma inflação persistente pode causar danos à economia.

Um princípio importante em economia é o princípio do valor real. Este princípio revela o que de fato interessa, o valor real da moeda e não propriamente o seu valor nominal. Por exemplo, vamos imaginar que alguém invista R\$ 100,00 num fundo de aplicação no começo do ano e, no fim do ano tenha R\$ 110,00. Então, essa pessoa terá recebido R\$ 10,00 de juros, ou seja, sua aplicação rendeu 10%. Mas, esse valor pode não ser real, se no decorrer desse período tiver ocorrido inflação. Isso porque se houve inflação, o valor de R\$ 100,00 no final do ano não tem mais o mesmo poder de compra que tinha no começo do ano. Isto é, não compra mais, no final do ano, tanto quanto comprava no começo. A mesma ideia vale para o rendimento de R\$ 10,00. Portanto, o ganho real, de nosso investidor hipotético, é seu rendimento no ano expurgada a inflação.

A ideia de expurgo da inflação para calcular a rentabilidade real de uma aplicação funciona assim: suponha que no ano houve uma inflação de 7%. Então, para nosso investidor imaginário comprar no final do ano o que R\$ 100,00 comprava no começo do ano, seria necessário que ele tivesse R\$ 107,00. Como ele ficou com R\$ 110,00, a variação percentual de R\$ 107,00 para R\$ 110,00 é de aproximadamente 2,80374%. Este resultado pode também ser obtido da seguinte forma:

$$\left( \frac{\frac{10}{100} + 1}{\frac{7}{100} + 1} - 1 \right) \times 100 = 2,80374$$

E, essa é a ideia que será usada para calcular a rentabilidade real solicitada no problema. Para isso, é preciso pesquisar no portal do Banco Central do Brasil<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup> Os dados sobre a inflação podem ser obtidos no site:

<https://www.bcb.gov.br/>

a inflação no período. Assim, na figura 8 apresentamos o IPCA e o cálculo da inflação acumulada no período:

Figura 8: Cálculo da inflação acumulada - set/2017 a ago/2018

	A	B	C	D	E
1					
2		<b>DATA</b>	<b>IPCA (%)</b>	<b>ACUMULADO</b>	
3		set/17	0,16	0,16	
4		out/17	0,42	0,580672	
5		nov/17	0,28	0,862297882	
6		dez/17	0,44	1,306091992	
7		jan/18	0,29	1,599879659	
8		fev/18	0,32	1,924999274	
9		mar/18	0,09	2,016731773	
10		abr/18	0,22	2,241168583	
11		mai/18	0,40	2,650133258	
12		jun/18	1,26	3,943524937	
13		jul/18	0,33	4,286538569	
14		ago/18	-0,09	4,192680684	
15					
16					

Fonte: www.bcb.gov.br

A figura 9 mostra as fórmulas digitadas para realizar o cálculo da inflação acumulada:

Figura 9: Fórmulas utilizadas para calcular a inflação acumulada

	A	B	C	D
1				
2		<b>DATA</b>	<b>IPCA (%)</b>	<b>ACUMULADO</b>
3		42979	0,16	=C3
4		43009	0,42	=(((D3/100+1)*(C4/100+1))-1)*100
5		43040	0,28	=(((D4/100+1)*(C5/100+1))-1)*100
6		43070	0,44	=(((D5/100+1)*(C6/100+1))-1)*100
7		43101	0,29	=(((D6/100+1)*(C7/100+1))-1)*100
8		43132	0,32	=(((D7/100+1)*(C8/100+1))-1)*100
9		43160	0,09	=(((D8/100+1)*(C9/100+1))-1)*100
10		43191	0,22	=(((D9/100+1)*(C10/100+1))-1)*100
11		43221	0,4	=(((D10/100+1)*(C11/100+1))-1)*100
12		43252	1,26	=(((D11/100+1)*(C12/100+1))-1)*100
13		43282	0,33	=(((D12/100+1)*(C13/100+1))-1)*100
14		43313	-0,09	=(((D13/100+1)*(C14/100+1))-1)*100
15				

Fonte: o próprio autor.

Portanto, para obtermos a inflação acumulada no período, fizemos os seguintes cálculos:

$$IA = \left\{ \left[ \prod_1^n \left( 1 + \frac{IPCA}{100} \right) \right] - 1 \right\} \times 100 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{Inflação acumulada} = & ((1,0016 \times 1,0042 \times 1,0028 \times 1,0044 \times 1,0029 \times 1,0032 \times 1,0009 \\ & \times 1,0022 \times 1,004 \times 1,0126 \times 1,0033 \times 0,9991) - 1) \times 100 = 4,192680684. \end{aligned}$$

Isto significa que a inflação acumulada no período corresponde a 4,192680684%.

Como a taxa líquida calculada no problema 2 foi de 5,468057331% no período, então, a taxa real será:

$$\left( \frac{\frac{5,468057331}{100} + 1}{\frac{4,192680684}{100} + 1} - 1 \right) \times 100 = 1,224055892.$$

Ou seja, a taxa real de rentabilidade obtida foi de 1,224055892% no período todo, isto é, um ano. Pode-se também calcular a rentabilidade real ao mês que será a média geométrica da taxa anual obtida. O cálculo será da forma:

$$\left( \sqrt[12]{1,01224055892} - 1 \right) \times 100 = 0,101437$$

O que significa que a rentabilidade real ao mês foi de 0,101437%.

Alternativamente, poderíamos calcular a inflação média (geométrica) mensal, que é:

$$\left( \sqrt[12]{1,04192680684} - 1 \right) \times 100 = 0,342850542$$

Ou seja, a inflação média mensal foi de 0,342850542%.

Como a rentabilidade líquida mensal foi de 0,444635%, a rentabilidade real será dada por:

$$\left( \frac{1,00444635}{1,00342850542} - 1 \right) \times 100 \cong 0,101437$$

Confirmando o resultado encontrado anteriormente.

Introduz-se no problema 4 o conceito de taxas equivalentes, conceito este bastante difundido no mercado financeiro.

PROBLEMA 4: O CDI de outubro de 2018 foi de 6,40% ao ano. Qual a taxa equivalente do CDI ao dia?

SOLUÇÃO.

Antes de iniciar propriamente a solução do problema, é importante que alguns conceitos sejam considerados.

O cálculo de taxas equivalentes é decorrente de um resultado que relaciona taxas de crescimento referidas a períodos de tempo diversos. Tem-se o seguinte lema:

“Lema: Se  $I$  é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo  $T$  e  $i$  é a taxa de crescimento relativamente ao período  $t$ , e se  $T = nt$ , então  $1+I = (1+i)^n$ .”

Demonstração: Seja  $G_0$  o valor inicial da grandeza. Após um período de tempo  $T$ , o valor da grandeza será  $G_0(1+I)^1$ . Como um período de tempo  $T$  equivale a  $n$  períodos de tempo igual a  $t$ , o valor da grandeza será também igual a  $G_0(1+i)^n$ . Logo,  $G_0(1+I)^1 = G_0(1+i)^n$  e  $1+I = (1+i)^n$ .” (MORGADO et al, 2001, p. 22).

A fim de ilustrar o lema, considere que um capital de R\$ 100,00 evolua 25% por três meses consecutivos. Então, no primeiro mês o valor passa de R\$ 100,00 para R\$ 125,00. No segundo mês o capital evolui de R\$ 125,00 para R\$ 156,25. No terceiro mês o valor evolui de R\$ 156,25 para R\$ 195,31. Portanto, a variação percentual total desse capital foi de  $(1+0,25)^3 \approx 1,953125$ , ou seja, aproximadamente 95,3125%.

No mercado financeiro diz-se que duas ou mais taxas são equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital por igual período de tempo, produzirem o mesmo montante. Por exemplo, considere uma aplicação de R\$ 100,00 a 10% ao mês por um ano e uma aplicação de R\$ 100,00 a 33,10% ao trimestre, também por um ano.

No caso da primeira aplicação, o montante é calculado usando a fórmula (1):

$$M = 100(1 + 0,1)^{12} = 313,84$$

No caso da segunda, tem-se:

$$M = 100(1 + 0,331)^4 = 313,84$$

Como quatro trimestres correspondem a um ano e, as aplicações foram de valor igual e produziram o mesmo montante, diz-se que as taxas de 10% ao ano e 33,10% ao trimestre são equivalentes.

Outra forma de escrever a equação  $1 + I = (1 + i)^n$  e que é comumente usada por quem tem que calcular taxas equivalentes com frequência é a seguinte:

$$\left[ \left( \frac{\text{taxa}}{100} + 1 \right)^{\frac{PQ}{PT}} - 1 \right] \times 100 \quad (12)$$

Onde  $PT$  significa periodicidade da taxa que se tem, ou seja, a taxa dada no problema. e  $PQ$  é a periodicidade da taxa que se deseja encontrar. Neste caso, se deve escrever estas periodicidades em termos da menor unidade de tempo entre as duas taxas ou uma unidade comum às duas.

Por exemplo, se a taxa é de 33,10% ao trimestre, qual é a taxa equivalente ao mês?

Usando a fórmula (12), tem-se:

$$\left[ \left( \frac{33,1}{100} + 1 \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] \times 100 = 10$$

Ou seja, a taxa de 33,10% ao trimestre é equivalente à taxa de 10% ao mês.

Para o caso do exercício enunciado acima, se deve lembrar que o CDI – Certificado de Depósito Interbancário – é uma taxa aplicada em dias úteis. Como o ano tem 252 dias úteis, usando a fórmula (12) acima, teremos:

$$\left[ \left( \frac{6,4}{100} + 1 \right)^{\frac{1}{252}} - 1 \right] \times 100 = 0,024620249$$

O que significa que o CDI de 6,40% ao ano é equivalente a 0,024620249% ao dia.



CALCULADORA HP12C

Na calculadora HP12C este cálculo pode ser feito de forma que a sequência das teclas que são pressionadas corresponde à forma de resolver algebricamente:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
6,4	<b>ENTER</b>	6,4
100	<b>÷</b>	0,064
1	<b>+</b>	1,064
252	<b>1/x</b>	0,003968254
	<b>Y<sup>x</sup></b>	1,000246202
1	<b>-</b>	0,000246202
100	<b>X</b>	0,024620249

O problema 5 apresenta o sistema francês de amortização, que é bastante utilizado em empréstimos e financiamentos de bens de consumo duráveis. A fim de chegar a uma fórmula para o cálculo do valor da prestação de um empréstimo, apresenta-se também o conceito de desconto composto e uma aplicação da fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica.

**PROBLEMA 5:** Uma empresa pretende adquirir um equipamento cujo valor é de R\$ 200.000,00. Ela vai pagar 60.000,00 à vista e financiar o saldo junto a uma instituição financeira que oferece uma taxa de 2,10% ao mês, para 10 meses. Calcule o valor das prestações deste financiamento. Apresente uma tabela do sistema francês de amortização.

**SOLUÇÃO.**

Para o mercado financeiro, a ideia do cálculo das prestações em casos de financiamentos como o sugerido é a seguinte: o valor das prestações, que é o mesmo todos os meses, deve ser tal que aplicando o desconto composto a cada uma e calculando seus valores líquidos (também conhecidos como valores atuais ou valores presentes), a soma dos mesmos deve resultar no valor financiado.

O cálculo do valor presente é da seguinte forma:

$$PV = \frac{N}{(1+i)^n} \quad (13)$$

Onde  $PV$  significa valor presente ou líquido,  $N$  representa o valor nominal, que é o valor de uma dívida no futuro, por exemplo;  $n$  é o tempo e  $i$  é a taxa de juros praticada.

Um momento importante na gênese desta fórmula de cálculo do valor presente foi a publicação por Leibniz de seu artigo “Meditatio Juridico-Mathematica de Interusurio Simplicite” (Discussões legal e matemática sobre juros simples) na revista *Acta Eruditorum* de 1683.

Em seu artigo, Leibniz escreveu a fórmula do valor presente da seguinte forma:

$$a \left( \frac{v}{v+1} \right)^z.$$

Nesta fórmula,  $a$  representa o valor nominal,  $z$  é o prazo e  $1/v$  é a taxa de juros.

Ao enunciar sua fórmula, Leibniz considerou os seguintes princípios, sobre os quais ele pensava que era de comum acordo entre as pessoas:

- 1) Quem paga uma quantidade de dinheiro antecipadamente pode reclamar um valor de juros por isso.
- 2) Pagamentos não são obrigatórios. Pode ser feita uma troca entre recebíveis e títulos a serem pagos.
- 3) Ambas as partes podem chegar a um acordo sobre pagamentos antecipados ou troca de títulos.

O valor do desconto composto é a diferença entre o valor nominal e o valor líquido, isto é:

$$D = N - PV \quad (14)$$

Então, se calcularmos para cada uma das prestações (PMT) o seu valor líquido e somarmos esses valores líquidos para ter o valor presente, teremos:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \dots + \frac{PMT}{(1+i)^n} \quad (15)$$

Ao observar a expressão acima é possível notar uma regularidade nas parcelas, o que motiva lembrar a definição de progressão geométrica. Por

definição, uma progressão geométrica é uma sequência numérica na qual a taxa de crescimento ou decrescimento de um termo para o próximo é sempre a mesma.

Portanto, calcular o valor da prestação implica em calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica.

A expressão acima pode ser reescrita assim:

$$PV = PMT \left( \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right) \quad (16)$$

E vemos que a progressão geométrica tem razão igual a  $\frac{1}{(1+i)}$ .

Deve-se aplicar a fórmula de cálculo da soma dos termos de uma progressão geométrica, para calcular a soma entre parêntesis em (16), que é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \quad (17)$$

Onde  $S_n$  é a soma dos termos da progressão geométrica,  $a_1$  é seu primeiro termo e  $q$  é a razão. Uma demonstração desta fórmula é apresentada no apêndice.

Portanto, aplicando essa fórmula, teremos:

$$q = \frac{1}{(1+i)}, \quad a_1 = \frac{1}{(1+i)}.$$

Logo, substituindo estes valores na fórmula (17), temos:

$$S_n = \frac{1}{(1+i)} \times \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{\frac{1}{(1+i)}}$$

Após algumas operações algébricas, obtemos:

$$S_n = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

Que é justamente o fator utilizado no mercado financeiro para operações desse tipo.

Aplicando esse fator à expressão para o cálculo de  $PV$  para calcular o  $PMT$ :

$$PV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \quad (18)$$

E, para calcular a prestação dado o valor financiado, teremos:

$$PMT = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \quad (19)$$

Utilizando essa fórmula para o exercício proposto, obtemos:

$$PV = 200000 - 60000 = 140000,$$

$$\text{Taxa} = i = 2,1\% = 0,021$$

$$\text{Prazo} = n = 10 \text{ meses.}$$

Dessa forma, o valor das prestações será, aplicando (19):

$$PMT = 140000 \times \frac{(1+0,021)^{10} \times 0,021}{(1+0,021)^{10} - 1} = 15667,37$$

Ou seja, para o financiamento mencionado, pagar-se-á dez prestações iguais e consecutivas de R\$ 15.667,37.



CALCULADORA HP12C

Utilizando a calculadora financeira HP12C para resolver essa questão, temos:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
140000	<b>PV</b>	140.000,00
2,1	<b>i</b>	2,1
10	<b>n</b>	10
	<b>PMT</b>	-15.667,37

Deve-se observar que o valor da parcela apresentada no visor é negativo, o que significa que é um desembolso que será realizado em determinada data. A calculadora HP12C trabalha com essa convenção, conhecida como convenção de fluxo de caixa.

### O Sistema Francês de Amortização

O sistema francês de amortização foi inventado pelo economista inglês Richard Price e consiste num plano de pagamentos com valores constantes de prestação. Seu cálculo é feito utilizando a fórmula (17). Esse plano pode ser feito numa planilha de cálculo. Segue um exemplo mostrando os passos.

Primeiramente, organizamos uma tabela disposta de uma forma preferida, como na figura 10, por exemplo, para a qual usamos os dados do problema 5:

Figura 10: Tabela do Sistema Francês de Amortização – 1º passo

	A	B	C	D	E	F	G
1		<b>SIMULAÇÃO DE UM EMPRÉSTIMO - SISTEMA FRANCÊS</b>					
2		<b>TAXA:</b>	2,1 %	<b>VALOR:</b>		140.000,00	
3		<b>PRAZO:</b>	10 MESES				
4						<b>SALDO</b>	
5		<b>TEMPO</b>	<b>PARCELA</b>	<b>JUROS</b>	<b>PRINCIPAL</b>	<b>DEVEDOR</b>	
6		0				140.000,00	
7		1					
8		2					
9		3					
10		4					
11		5					
12		6					
13		7					
14		8					
15		9					
16		10					
17							

Fonte: o próprio autor.

No campo parcela do primeiro mês, insere-se a função da planilha que calcula esse valor, PGTO, conforme a figura 11:

Figura 11: Tabela do Sistema Francês de Amortização – 2º passo

TEMPO	PARCELA	JUROS	PRINCIPAL	DEVEDOR
0				
1	=			
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

**SIMULAÇÃO DE UM EMPRÉSTIMO - SISTEMA FRANCÊS**

**TAXA:** 2,1 %      **VALOR:** 140.000,00

**PRAZO:** 10 MESES

**SALDO**

**TEMPO PARCELA JUROS PRINCIPAL DEVEDOR**

0

1 =

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Fonte: o próprio autor.

O próximo passo é o preenchimento da caixa de diálogo com a taxa, prazo e valor financiado, colocando as células respectivas, conforme a figura 12:

Figura 12: Tabela do Sistema Francês de Amortização - 3º passo

TEMPO	PARCELA	JUROS	PRINCIPAL	DEVEDOR
0				
1	=			
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

**SIMULAÇÃO DE UM EMPRÉSTIMO - SISTEMA FRANCÊS**

**TAXA:** 2,1 %      **VALOR:** 140.000,00

**PRAZO:** 10 MESES

**SALDO**

**TEMPO PARCELA JUROS PRINCIPAL DEVEDOR**

0

1 =

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Fonte: o próprio autor.

O valor dos juros é calculado aplicando a taxa sobre o saldo devedor do período anterior, o *principal* (parcela do capital emprestado que será amortizado), que é a diferença entre o valor da parcela e o valor do juro e o

saldo devedor do período, que é calculado subtraindo do saldo devedor do período anterior o valor do principal do período atual. A planilha fica assim:

Figura 13: Tabela do Sistema Francês de Amortização - final

	A	B	C	D	E	F	G
1		<b>SIMULAÇÃO DE UM EMPRÉSTIMO - SISTEMA FRANCÊS</b>					
2		<b>TAXA:</b>	2,1	%	<b>VALOR:</b>	140.000,00	
3		<b>PRAZO:</b>	10	MESES			
4						<b>SALDO</b>	
5		<b>TEMPO</b>	<b>PARCELA</b>	<b>JUROS</b>	<b>PRINCIPAL</b>	<b>DEVEDOR</b>	
6		0				140.000,00	
7		1	15.667,37	2.940,00	12.727,37	127.272,63	
8		2	15.667,37	2.672,73	12.994,65	114.277,98	
9		3	15.667,37	2.399,84	13.267,53	101.010,45	
10		4	15.667,37	2.121,22	13.546,15	87.464,30	
11		5	15.667,37	1.836,75	13.830,62	73.633,68	
12		6	15.667,37	1.546,31	14.121,06	59.512,61	
13		7	15.667,37	1.249,76	14.417,61	45.095,00	
14		8	15.667,37	947,00	14.720,38	30.374,63	
15		9	15.667,37	637,87	15.029,50	15.345,12	
16		10	15.667,37	322,25	15.345,12	0,00	
17							
18							

Fonte: o próprio autor.

Na figura 14 apresentamos a mesma planilha mostrando as fórmulas utilizadas.

Figura 14: Fórmulas utilizadas para cálculo do Sistema Francês de Amortização

	A	B	C	D	E	F
1		<b>SIMULAÇÃO</b>				
2		<b>TAXA:</b>	2,1	%	<b>VALOR:</b>	140000
3		<b>PRAZO:</b>	10	MESES		
4						<b>SALDO</b>
5		<b>TEMPO</b>	<b>PARCELA</b>	<b>JUROS</b>	<b>PRINCIPAL</b>	<b>DEVEDOR</b>
6		0				140000
7		1	=PGTO(\$C\$2%;\$C\$3;-\$F\$2)	=F6*\$C\$2%	=C7-D7	=F6-E7
8		2	=PGTO(\$C\$2%;\$C\$3;-\$F\$2)	=F7*\$C\$2%	=C8-D8	=F7-E8
9		3	=PGTO(\$C\$2%;\$C\$3;-\$F\$2)	=F8*\$C\$2%	=C9-D9	=F8-E9
10		4	=PGTO(\$C\$2%;\$C\$3;-\$F\$2)	=F9*\$C\$2%	=C10-D10	=F9-E10
11		5	=PGTO(\$C\$2%;\$C\$3;-\$F\$2)	=F10*\$C\$2%	=C11-D11	=F10-E11
12		6	=PGTO(\$C\$2%;\$C\$3;-\$F\$2)	=F11*\$C\$2%	=C12-D12	=F11-E12
13		7	=PGTO(\$C\$2%;\$C\$3;-\$F\$2)	=F12*\$C\$2%	=C13-D13	=F12-E13
14		8	=PGTO(\$C\$2%;\$C\$3;-\$F\$2)	=F13*\$C\$2%	=C14-D14	=F13-E14
15		9	=PGTO(\$C\$2%;\$C\$3;-\$F\$2)	=F14*\$C\$2%	=C15-D15	=F14-E15
16		10	=PGTO(\$C\$2%;\$C\$3;-\$F\$2)	=F15*\$C\$2%	=C16-D16	=F15-E16
17						
18						

Fonte: o próprio autor.

É instrutivo mostrar para as/os estudantes a fórmula 17 digitada na planilha de cálculo, que, para o mesmo exemplo fica como na figura 15.

Figura 15: Planilha com a fórmula para calcular o valor da parcela de um financiamento

	A	B	C	D	E	F
1		SIMULA				
2		TAXA: 2,1		%	VALOR:	140000
3		PRAZO: 10		MESES		
4						SALDO
5		TEMPO	PARCELA	JUROS	PRINCIPAL	DEVEDOR
6		0				140000
7		1	$=(((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3*\$C\$2/100})/((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3-1})*\$F\$2$	$=F6*\$C\$2\%$	$=C7-D7$	$=F6-E7$
8		2	$=(((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3*\$C\$2/100})/((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3-1})*\$F\$2$	$=F7*\$C\$2\%$	$=C8-D8$	$=F7-E8$
9		3	$=(((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3*\$C\$2/100})/((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3-1})*\$F\$2$	$=F8*\$C\$2\%$	$=C9-D9$	$=F8-E9$
10		4	$=(((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3*\$C\$2/100})/((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3-1})*\$F\$2$	$=F9*\$C\$2\%$	$=C10-D10$	$=F9-E10$
11		5	$=(((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3*\$C\$2/100})/((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3-1})*\$F\$2$	$=F10*\$C\$2\%$	$=C11-D11$	$=F10-E11$
12		6	$=(((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3*\$C\$2/100})/((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3-1})*\$F\$2$	$=F11*\$C\$2\%$	$=C12-D12$	$=F11-E12$
13		7	$=(((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3*\$C\$2/100})/((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3-1})*\$F\$2$	$=F12*\$C\$2\%$	$=C13-D13$	$=F12-E13$
14		8	$=(((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3*\$C\$2/100})/((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3-1})*\$F\$2$	$=F13*\$C\$2\%$	$=C14-D14$	$=F13-E14$
15		9	$=(((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3*\$C\$2/100})/((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3-1})*\$F\$2$	$=F14*\$C\$2\%$	$=C15-D15$	$=F14-E15$
16		10	$=(((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3*\$C\$2/100})/((\$C\$2/100+1)^{\$C\$3-1})*\$F\$2$	$=F15*\$C\$2\%$	$=C16-D16$	$=F15-E16$
17						

Fonte: o próprio autor.



CALCULADORA HP12C

Nesta sequência de figuras acompanhamos os cálculos usando planilhas de cálculo. Veremos agora como efetuar estes cálculos usando a calculadora financeira HP12C.

Valor digitado	Tecla da	Valor no visor	Observação
140000	PV	140.000,00	
2,1	<i>i</i>	2,1	
10	<i>n</i>	10	
	PMT	-15.667,37	
1	f AMORT	-2.940,00	Juros
	x<>y	12.727,37	Principal
	RCL PV	127.272,63	Saldo devedor

Repetindo esse processo consecutivamente a partir de 1 f AMORT, obtém-se todos os valores mostrados na planilha acima, terminando quando o saldo devedor for igual a zero.

Ainda abordando sobre o Sistema Francês de Amortização, uma pergunta que pode ser feita seria: “Qual é o saldo devedor depois do pagamento de  $k$  prestações?”.

Para encontrar uma fórmula para calcular este saldo, chamemos de  $D_k$  o saldo devedor no período  $k$ , após o pagamento das  $k$  prestações. Temos que:

$$D_k = PMT \times \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} \times i} \quad (20)$$

Ou seja, o saldo devedor em  $k$  é o valor presente das parcelas que faltam ser liquidadas. Substituindo PMT pela fórmula (19), teremos:

$$D_k = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} \times i}$$

Após algumas operações algébricas, obtemos:

$$D_k = PV \times \frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1} \quad (21)$$

Esta é a expressão para cálculo do saldo devedor em determinado tempo  $k$  em função do valor presente.

Para exemplificar, usando os dados do problema 5, vamos supor que se queira saber o saldo devedor do sétimo mês. Usando a fórmula (21), segue:

$$D_7 = 140000 \times \frac{(1+0,021)^{10} - (1+0,021)^7}{(1+0,021)^{10} - 1} = 45095$$



CALCULADORA HP12C

Com a calculadora HP12C, podemos fazer assim:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
140000	<b>PV</b>	140.000,00
2,1	<b>i</b>	2,1
10	<b>n</b>	10
	<b>PMT</b>	-15.667,37
7	<b>f AMORT</b>	-14.766,60
	<b>RCL PV</b>	45.095,00

Na solução acima, o valor de R\$ 14.766,60 é o total de juros pagos até o sétimo mês (inclusive).

### O Sistema de Amortização Constante

O Sistema de Amortização Constante (SAC) é usado pelos bancos para financiamento de imóveis. Neste sistema, amortiza-se um percentual fixo do valor principal, o que faz com que o valor das parcelas pagas diminua com o passar do tempo.

**PROBLEMA 6:** Uma pessoa deseja financiar junto a um banco um imóvel de R\$ 125.000,00. O banco financia 80% deste valor, ou seja, R\$ 100.000,00, por 10 anos, à taxa de 0,7199623% ao mês. O sistema de amortização utilizado pelo banco é o Sistema de Amortização Constante (SAC). Elabore um plano de amortização por esse sistema.

**SOLUÇÃO:**

A título de exemplo, apresenta-se a tabela 2 com o Sistema de Amortização Constante de um empréstimo de R\$ 100,00, por um período de quatro meses à taxa de 10% ao mês, para melhor entender seu mecanismo:

*Tabela 2: Exemplo do Sistema de Amortização Constante*

<b>Tempo</b>	<b>Principal</b>	<b>Juros</b>	<b>Parcela</b>	<b>Saldo</b>
0				100,00
1	25,00	10,00	35,00	75,00
2	25,00	7,50	32,50	50,00
3	25,00	5,00	30,00	25,00
4	25,00	2,50	27,50	0,00

Os valores apresentados na tabela 2 são calculados conforme as fórmulas utilizadas na figura 16.

Figura 16: Fórmulas para cálculo do SAC na planilha de cálculo

	A	B	C	D	E	F
1						
2		SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE - SAC				
3						
4		VALOR FINANCIADO		100		
5		PRAZO:	4	TAXA CONTRATADA:	10	%
6						
7		TEMPO	PRINCIPAL	JUROS	PARCELA	SALDO
8		0				=D4
9		1	=D\$4/\$C\$5	=F8*\$F\$5%	=C9+D9	=F8-C9
10		2	=D\$4/\$C\$5	=F9*\$F\$5%	=C10+D10	=F9-C10
11		3	=D\$4/\$C\$5	=F10*\$F\$5%	=C11+D11	=F10-C11
12		4	=D\$4/\$C\$5	=F11*\$F\$5%	=C12+D12	=F11-C12
13						

Fonte: o próprio autor.

Chamando de  $A_k$  o valor da amortização no período  $k$ ,  $D_k$  o saldo devedor no período  $k$ ,  $J_k$  o valor do juro no período  $k$  e  $P_k$  o valor da prestação no período  $k$ , encontra-se em MORGADO (2001) o seguinte teorema:

“No SAC, sendo  $n$  o número de pagamentos e  $i$  a taxa de juros,  $A_k = \frac{D_0}{n}$ ,

$$D_k = \frac{n-k}{n} D_0, J_k = iD_{k-1}, P_k = A_k + J_k.$$

Prova: Se a dívida  $D_0$  é amortizada em  $n$  quotas iguais, cada quota vale  $A_k = D_0/n$  e o estado da dívida, após  $k$  amortizações, é

$$D_k = D_0 - k \cdot A_k = D_0 \frac{n-k}{n}.”$$

(MORGADO, 2001, p.60)

Para o caso do problema 6, simulou-se no portal da *internet* de um banco o financiamento mencionado e obteve-se o seguinte resultado:

Tabela 3: Simulação de um empréstimo habitacional usando o SAC

Parcela	Data Amortização	Valor Prestação R\$	Valor de Amortização R\$	Valor Juros R\$	Valor Seguro DFI R\$	Valor Seguro MIP R\$	Valor Tarifa R\$	Valor Saldo Devedor R\$
0	03/12/2018	61,25	0,00		6,25	55,00		100.000,00
1	03/01/2019	1.639,08	833,33	719,96	6,25	54,54	25,00	99.166,67
2	03/02/2019	1.632,62	833,33	713,96	6,25	54,08	25,00	98.333,34
3	03/03/2019	1.626,17	833,33	707,96	6,25	53,63	25,00	97.500,01
4	03/04/2019	1.619,71	833,33	701,96	6,25	53,17	25,00	96.666,68
5	03/05/2019	1.613,25	833,33	695,96	6,25	52,71	25,00	95.833,35
6	03/06/2019	1.606,79	833,33	689,96	6,25	52,25	25,00	95.000,02
7	03/07/2019	1.600,33	833,33	683,96	6,25	51,79	25,00	94.166,69
8	03/08/2019	1.593,87	833,33	677,96	6,25	51,33	25,00	93.333,36
9	03/09/2019	1.587,42	833,33	671,96	6,25	50,88	25,00	92.500,03
10	03/10/2019	1.580,97	833,33	665,97	6,25	50,42	25,00	91.666,70
11	03/11/2019	1.574,51	833,33	659,97	6,25	49,96	25,00	90.833,37
12	03/12/2019	1.568,05	833,33	653,97	6,25	49,50	25,00	90.000,04
13	03/01/2020	1.561,59	833,33	647,97	6,25	49,04	25,00	89.166,71
14	03/02/2020	1.555,13	833,33	641,97	6,25	48,58	25,00	88.333,38
15	03/03/2020	1.548,68	833,33	635,97	6,25	48,13	25,00	87.500,05
16	03/04/2020	1.542,22	833,33	629,97	6,25	47,67	25,00	86.666,72
17	03/05/2020	1.535,76	833,33	623,97	6,25	47,21	25,00	85.833,39
18	03/06/2020	1.529,30	833,33	617,97	6,25	46,75	25,00	85.000,06
19	03/07/2020	1.522,84	833,33	611,97	6,25	46,29	25,00	84.166,73
20	03/08/2020	1.516,38	833,33	605,97	6,25	45,83	25,00	83.333,40
21	03/09/2020	1.509,93	833,33	599,97	6,25	45,38	25,00	82.500,07
22	03/10/2020	1.503,47	833,33	593,97	6,25	44,92	25,00	81.666,74
23	03/11/2020	1.497,01	833,33	587,97	6,25	44,46	25,00	80.833,41
24	03/12/2020	1.490,55	833,33	581,97	6,25	44,00	25,00	80.000,08
25	03/01/2021	1.484,09	833,33	575,97	6,25	43,54	25,00	79.166,75
26	03/02/2021	1.477,63	833,33	569,97	6,25	43,08	25,00	78.333,42
27	03/03/2021	1.471,18	833,33	563,97	6,25	42,63	25,00	77.500,09
28	03/04/2021	1.464,72	833,33	557,97	6,25	42,17	25,00	76.666,76
29	03/05/2021	1.458,26	833,33	551,97	6,25	41,71	25,00	75.833,43
30	03/06/2021	1.451,80	833,33	545,97	6,25	41,25	25,00	75.000,10
31	03/07/2021	1.445,34	833,33	539,97	6,25	40,79	25,00	74.166,77
32	03/08/2021	1.438,88	833,33	533,97	6,25	40,33	25,00	73.333,44
33	03/09/2021	1.432,43	833,33	527,97	6,25	39,88	25,00	72.500,11
34	03/10/2021	1.425,97	833,33	521,97	6,25	39,42	25,00	71.666,78
35	03/11/2021	1.419,51	833,33	515,97	6,25	38,96	25,00	70.833,45

36	03/12/2021	1.413,05	833,33	509,97	6,25	38,50	25,00	70.000,12
37	03/01/2022	1.406,59	833,33	503,97	6,25	38,04	25,00	69.166,79
38	03/02/2022	1.400,13	833,33	497,97	6,25	37,58	25,00	68.333,46
39	03/03/2022	1.393,69	833,33	491,98	6,25	37,13	25,00	67.500,13
40	03/04/2022	1.387,23	833,33	485,98	6,25	36,67	25,00	66.666,80
41	03/05/2022	1.380,77	833,33	479,98	6,25	36,21	25,00	65.833,47
42	03/06/2022	1.374,31	833,33	473,98	6,25	35,75	25,00	65.000,14
43	03/07/2022	1.367,85	833,33	467,98	6,25	35,29	25,00	64.166,81
44	03/08/2022	1.361,39	833,33	461,98	6,25	34,83	25,00	63.333,48
45	03/09/2022	1.354,94	833,33	455,98	6,25	34,38	25,00	62.500,15
46	03/10/2022	1.348,48	833,33	449,98	6,25	33,92	25,00	61.666,82
47	03/11/2022	1.342,02	833,33	443,98	6,25	33,46	25,00	60.833,49
48	03/12/2022	1.335,56	833,33	437,98	6,25	33,00	25,00	60.000,16
49	03/01/2023	1.329,10	833,33	431,98	6,25	32,54	25,00	59.166,83
50	03/02/2023	1.322,64	833,33	425,98	6,25	32,08	25,00	58.333,50
51	03/03/2023	1.316,19	833,33	419,98	6,25	31,63	25,00	57.500,17
52	03/04/2023	1.309,73	833,33	413,98	6,25	31,17	25,00	56.666,84
53	03/05/2023	1.303,27	833,33	407,98	6,25	30,71	25,00	55.833,51
54	03/06/2023	1.296,81	833,33	401,98	6,25	30,25	25,00	55.000,18
55	03/07/2023	1.290,35	833,33	395,98	6,25	29,79	25,00	54.166,85
56	03/08/2023	1.283,89	833,33	389,98	6,25	29,33	25,00	53.333,52
57	03/09/2023	1.277,44	833,33	383,98	6,25	28,88	25,00	52.500,19
58	03/10/2023	1.270,98	833,33	377,98	6,25	28,42	25,00	51.666,86
59	03/11/2023	1.264,52	833,33	371,98	6,25	27,96	25,00	50.833,53
60	03/12/2023	1.258,06	833,33	365,98	6,25	27,50	25,00	50.000,20
61	03/01/2024	1.251,60	833,33	359,98	6,25	27,04	25,00	49.166,87
62	03/02/2024	1.245,14	833,33	353,98	6,25	26,58	25,00	48.333,54
63	03/03/2024	1.238,69	833,33	347,98	6,25	26,13	25,00	47.500,21
64	03/04/2024	1.232,23	833,33	341,98	6,25	25,67	25,00	46.666,88
65	03/05/2024	1.225,77	833,33	335,98	6,25	25,21	25,00	45.833,55
66	03/06/2024	1.219,31	833,33	329,98	6,25	24,75	25,00	45.000,22
67	03/07/2024	1.212,85	833,33	323,98	6,25	24,29	25,00	44.166,89
68	03/08/2024	1.206,39	833,33	317,98	6,25	23,83	25,00	43.333,56
69	03/09/2024	1.199,95	833,33	311,99	6,25	23,38	25,00	42.500,23
70	03/10/2024	1.193,49	833,33	305,99	6,25	22,92	25,00	41.666,90
71	03/11/2024	1.187,03	833,33	299,99	6,25	22,46	25,00	40.833,57
72	03/12/2024	1.180,57	833,33	293,99	6,25	22,00	25,00	40.000,24
73	03/01/2025	1.174,11	833,33	287,99	6,25	21,54	25,00	39.166,91
74	03/02/2025	1.167,65	833,33	281,99	6,25	21,08	25,00	38.333,58
75	03/03/2025	1.161,20	833,33	275,99	6,25	20,63	25,00	37.500,25
76	03/04/2025	1.154,74	833,33	269,99	6,25	20,17	25,00	36.666,92

77	03/05/2025	1.148,28	833,33	263,99	6,25	19,71	25,00	35.833,59
78	03/06/2025	1.141,82	833,33	257,99	6,25	19,25	25,00	35.000,26
79	03/07/2025	1.135,36	833,33	251,99	6,25	18,79	25,00	34.166,93
80	03/08/2025	1.128,90	833,33	245,99	6,25	18,33	25,00	33.333,60
81	03/09/2025	1.122,45	833,33	239,99	6,25	17,88	25,00	32.500,27
82	03/10/2025	1.115,99	833,33	233,99	6,25	17,42	25,00	31.666,94
83	03/11/2025	1.109,53	833,33	227,99	6,25	16,96	25,00	30.833,61
84	03/12/2025	1.103,07	833,33	221,99	6,25	16,50	25,00	30.000,28
85	03/01/2026	1.096,61	833,33	215,99	6,25	16,04	25,00	29.166,95
86	03/02/2026	1.090,15	833,33	209,99	6,25	15,58	25,00	28.333,62
87	03/03/2026	1.083,70	833,33	203,99	6,25	15,13	25,00	27.500,29
88	03/04/2026	1.077,24	833,33	197,99	6,25	14,67	25,00	26.666,96
89	03/05/2026	1.070,78	833,33	191,99	6,25	14,21	25,00	25.833,63
90	03/06/2026	1.064,32	833,33	185,99	6,25	13,75	25,00	25.000,30
91	03/07/2026	1.057,86	833,33	179,99	6,25	13,29	25,00	24.166,97
92	03/08/2026	1.051,40	833,33	173,99	6,25	12,83	25,00	23.333,64
93	03/09/2026	1.044,95	833,33	167,99	6,25	12,38	25,00	22.500,31
94	03/10/2026	1.038,49	833,33	161,99	6,25	11,92	25,00	21.666,98
95	03/11/2026	1.032,03	833,33	155,99	6,25	11,46	25,00	20.833,65
96	03/12/2026	1.025,57	833,33	149,99	6,25	11,00	25,00	20.000,32
97	03/01/2027	1.019,11	833,33	143,99	6,25	10,54	25,00	19.166,99
98	03/02/2027	1.012,66	833,33	138,00	6,25	10,08	25,00	18.333,66
99	03/03/2027	1.006,21	833,33	132,00	6,25	9,63	25,00	17.500,33
100	03/04/2027	999,75	833,33	126,00	6,25	9,17	25,00	16.667,00
101	03/05/2027	993,29	833,33	120,00	6,25	8,71	25,00	15.833,67
102	03/06/2027	986,83	833,33	114,00	6,25	8,25	25,00	15.000,34
103	03/07/2027	980,37	833,33	108,00	6,25	7,79	25,00	14.167,01
104	03/08/2027	973,91	833,33	102,00	6,25	7,33	25,00	13.333,68
105	03/09/2027	967,46	833,33	96,00	6,25	6,88	25,00	12.500,35
106	03/10/2027	961,00	833,33	90,00	6,25	6,42	25,00	11.667,02
107	03/11/2027	954,54	833,33	84,00	6,25	5,96	25,00	10.833,69
108	03/12/2027	948,08	833,33	78,00	6,25	5,50	25,00	10.000,36
109	03/01/2028	941,62	833,33	72,00	6,25	5,04	25,00	9.167,03
110	03/02/2028	935,16	833,33	66,00	6,25	4,58	25,00	8.333,70
111	03/03/2028	928,71	833,33	60,00	6,25	4,13	25,00	7.500,37
112	03/04/2028	922,25	833,33	54,00	6,25	3,67	25,00	6.667,04
113	03/05/2028	915,79	833,33	48,00	6,25	3,21	25,00	5.833,71
114	03/06/2028	909,33	833,33	42,00	6,25	2,75	25,00	5.000,38
115	03/07/2028	902,87	833,33	36,00	6,25	2,29	25,00	4.167,05
116	03/08/2028	896,41	833,33	30,00	6,25	1,83	25,00	3.333,72
117	03/09/2028	889,96	833,33	24,00	6,25	1,38	25,00	2.500,39

118	03/10/2028	883,50	833,33	18,00	6,25	0,92	25,00	1.667,06
119	03/11/2028	877,04	833,33	12,00	6,25	0,46	25,00	833,73
120	03/12/2028	864,73	833,33	6,00			25,00	0,00

Fonte: [www.santander.com.br](http://www.santander.com.br), consultado em 03/12/2018.

Nesta simulação, observa-se:

$$A_k = \frac{D_0}{n} = \frac{100000}{120} = 833,33$$

$$J_1 = iD_0 = 100000 \times 0,7199623\% = 719,96.$$

A simulação inclui, ainda, o seguro e uma tarifa de administração.

Somadas à parcela de amortização, o valor de juros, o seguro e a tarifa, obtém-se o valor da prestação.

Os problemas 7 e 8 a seguir têm como objetivo calcular a taxa de juros de um empréstimo. Neste caso, solicita-se que a/o estudante utilize seu conhecimento de solução de uma equação do segundo grau, ilustrando a ideia de que o cálculo da taxa de juros de um empréstimo consiste em calcular as raízes de um polinômio.

PROBLEMA 7: Fez-se um empréstimo de R\$ 50,00 para pagar em duas prestações iguais e consecutivas de R\$ 28,00. Utilize uma equação do segundo grau para calcular a taxa de juros composta deste empréstimo. Depois utilize a calculadora HP12C para calcular esta taxa.

SOLUÇÃO.

Do enunciado temos, usando a fórmula (14), que:

$$50 = \frac{28}{(1+i)} + \frac{28}{(1+i)^2}$$

Fazendo a substituição:

$$x = \frac{1}{(1+i)}$$

Teremos:

$$50 = 28x + 28x^2$$

De onde obtém-se:

$$28x^2 + 28x - 50 = 0$$

E aplicando a fórmula de resolução de uma equação quadrática, teremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Efetuada as devidas substituições,

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \times 28 \times (-50)}}{2 \times 28}$$

o que resulta em:

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{784 + 5600}}{56}$$

Desse modo,  $x = 0,92678458928$  ou  $x = -1,92678458928$ .

Utilizando o valor positivo e voltando à substituição feita acima, obtemos:

$$\frac{1}{(1+i)} = 0,92678458928$$

Resolvendo a equação acima, isolando  $i$  obtemos o valor da taxa que é de aproximadamente  $i = 7,9\%$  por período, ao mês.

A raiz negativa não será utilizada pois dará uma taxa negativa.



CALCULADORA HP12C

Utilizando a Calculadora HP12C, pode-se proceder assim:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
50	<b>PV</b>	50,00
2	<b>N</b>	2
28	<b>CHS</b>	-28
	<b>PMT</b>	-28
	<b>I</b>	7,899937

**PROBLEMA 8:** Considere, como no problema anterior, um empréstimo de R\$ 50,00 que foi pago da seguinte forma: R\$ 35,00 um mês após o empréstimo ter sido efetuado e R\$ 20,44 após dois meses. Calcule a taxa de juros compostos utilizada neste empréstimo usando a equação do segundo grau.

**SOLUÇÃO.**

Do enunciado, deve-se ter, usando a fórmula (15):

$$50 = \frac{35}{(1+i)} + \frac{20,44}{(1+i)^2}$$

Fazendo substituições, como no exercício anterior, obtém-se:

$$20,44x^2 + 35x - 50 = 0$$

Resolvendo a equação, vem:

$$x = \frac{-35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \times 20,44 \times (-50)}}{2 \times 20,44}$$

Cuja solução pode ser obtida de modo análogo à solução apresentada no problema anterior, o que nos dá a taxa de aproximadamente 7,9% ao mês.



**CALCULADORA HP12C**

Uma solução utilizando a calculadora HP12C será:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
50	<b>CHS</b>	-50,00
	<b>g CF<sub>0</sub></b>	-50,00
35	<b>g CF<sub>i</sub></b>	35,00
20,44	<b>g CF<sub>j</sub></b>	20,44
	<b>f IRR</b>	7,890329

Que nos dá a mesma taxa do exercício anterior, mostrando que os planos de pagamentos são equivalentes.

Em Matemática Financeira, diz-se que dois ou mais fluxos financeiros são equivalentes quando produzem um mesmo valor presente a uma determinada taxa.

O problema a seguir mostra uma simulação feita por uma financeira e utiliza as mesmas ferramentas de cálculo dos dois problemas anteriores.

**PROBLEMA 9:** A figura 17 é a impressão da tela de uma simulação de um empréstimo de R\$ 500,00, para pagamento em duas vezes mensais de R\$ 284,04, realizada por meio de um sítio de Internet de uma empresa financeira. Utilize equação de segundo grau para calcular a taxa de juros compostos deste empréstimo. Confirme o resultado utilizando a calculadora HP12C.

*Figura 17: Simulação de um empréstimo por dois meses em uma financeira*

The screenshot shows a web browser window with the URL [https://www.ferratum.com.br/?utm\\_source=Financer&utm\\_medium=affiliates&utm\\_campaign=financer\\_site\\_0001](https://www.ferratum.com.br/?utm_source=Financer&utm_medium=affiliates&utm_campaign=financer_site_0001). The page displays a simulation form for a loan. The form has two sliders: the first is for the loan amount, set to R\$ 500 (range R\$ 200 to R\$ 3.000), and the second is for the number of installments, set to 2 (range 2 to 12). Below the sliders, it states "Parcela mensal: R\$ 284,04". At the bottom of the form is a button labeled "SOLICITE SEU EMPRÉSTIMO AQUI". At the very bottom of the page, there is a cookie consent banner with a "Saiba mais" link and a "DE ACORDO" button.

Fonte: [https://www.ferratum.com.br/?utm\\_source=Financer&utm\\_medium=affiliates&utm\\_campaign=financer\\_site\\_0001](https://www.ferratum.com.br/?utm_source=Financer&utm_medium=affiliates&utm_campaign=financer_site_0001). Consultada em 25/10/2018.

**SOLUÇÃO.**

De acordo com o enunciado, devemos ter, usando a fórmula (15):

$$500 = \frac{284,04}{(1+i)} + \frac{284,04}{(1+i)^2}$$

Fazendo a substituição:

$$x = \frac{1}{(1+i)}$$

Teremos:

$$500 = 284,04x + 284,04x^2$$

E reorganizando, teremos:

$$284,04x^2 + 284,04x - 500 = 0$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, teremos:

$$x = \frac{-284,04 \pm \sqrt{284,04^2 - 4 \times 284,04 \times (-500)}}{2 \times 284,04}$$

Que resulta em:

$$x = \frac{-284,04 \pm \sqrt{648758,7216}}{568,08}$$

O que nos dá:

$$x = 0,917856 \text{ ou } x = -1,917856$$

Utilizando o valor positivo encontrado e retornando à substituição feita anteriormente, teremos:

$$0,917856 = \frac{1}{(1+i)}$$

Daí,

$$1+i = \frac{1}{0,917856} \cong 1,08949552$$

De onde resulta que a taxa é de, aproximadamente, 8,949552% ao mês.



## CALCULADORA HP12C

Uma solução utilizando a calculadora HP12C é:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
500	PV	500,00
2	n	2
284,04	CHS	-284,04
	PMT	-284,04
	i	8,94956

PROBLEMA 10. Observe a figura 18. Ela mostra uma simulação de um empréstimo na página de uma empresa financeira. Nesta simulação, um empréstimo de R\$ 3.500,00 será pago em 12 prestações de R\$ 726,32. Calcule a taxa de juros deste empréstimo utilizando a calculadora HP12C. Utilize também a função TAXA<sup>7</sup> da planilha de cálculo para calcular esta taxa de juros.

Figura 18: Simulação de um empréstimo por doze meses em uma financeira

### Empréstimo pessoal

**1. Quer um empréstimo pessoal de quanto?**

R\$ 500

R\$ 3500

R\$ 3500

**2. Quer pagar em quantas parcelas?**

3X de  
R\$ 1676,77

6X de  
R\$ 1022,99

9X de  
R\$ 818,93

12X de  
R\$ 726,32

**SOLICITE JÁ!**

Informações adicionais: Prazo de pagamento: O período mínimo é de 3 meses e o máximo de 12 meses. Sendo possível efetuar o pagamento antecipado a partir do primeiro mês. Custo Efetivo Total: O Custo Efetivo Total (CET) praticado varia de 572,32% a 1777,54% ao ano. Exemplo: Valor do empréstimo de R\$ 1.500,00 para pagar em 6 (seis) meses. Total de 6 (seis) parcelas de R\$ 447,93. Detalhes referentes as taxas do empréstimo: Valor total a pagar: R\$ 2.687,58. IOF: R\$ 19,18. Tarifas: R\$ 100,00. Taxa de juros: 15,80% a.m. Taxa de juros anual: 481,44% a.a. CET: 661,11% a.a.

Fonte: [https://www.simplic.com.br/ppc/emprestimo-pessoal?utm\\_source=google&utm\\_medium=g&utm\\_campaign=804862229&utm\\_adgr\\_oup=39267739342&utm\\_matchtype=e&utm\\_keyword=emprestimo%20pessoal&utm\\_device=c&utm\\_content=294520733203&utm\\_position=1t1&qclid=EAlalQobChMII8v3ltWf3glVi4iRCh2Riwc6EAAYASAAEgLS7fD\\_BwE](https://www.simplic.com.br/ppc/emprestimo-pessoal?utm_source=google&utm_medium=g&utm_campaign=804862229&utm_adgr_oup=39267739342&utm_matchtype=e&utm_keyword=emprestimo%20pessoal&utm_device=c&utm_content=294520733203&utm_position=1t1&qclid=EAlalQobChMII8v3ltWf3glVi4iRCh2Riwc6EAAYASAAEgLS7fD_BwE)

Consultada em 24/10/2018.

<sup>7</sup>Função da planilha de cálculo utilizada para calcular a taxa de um fluxo de caixa.

SOLUÇÃO.



CALCULADORA HP12C

Uma solução usando a calculadora HP12C é apresentada a seguir:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
3500	PV	3.500,00
12	n	12
726,32	CHS	-726,32
	PMT	-726,32
	i	17,865049

Ou seja, a taxa de juros compostos deste empréstimo é de 17,865049% ao mês.

Uma solução para o problema 10 utilizando a planilha de cálculo poderia ser obtida usando os passos das figuras 20 e 21, sendo que a figura 19 apresenta os dados:

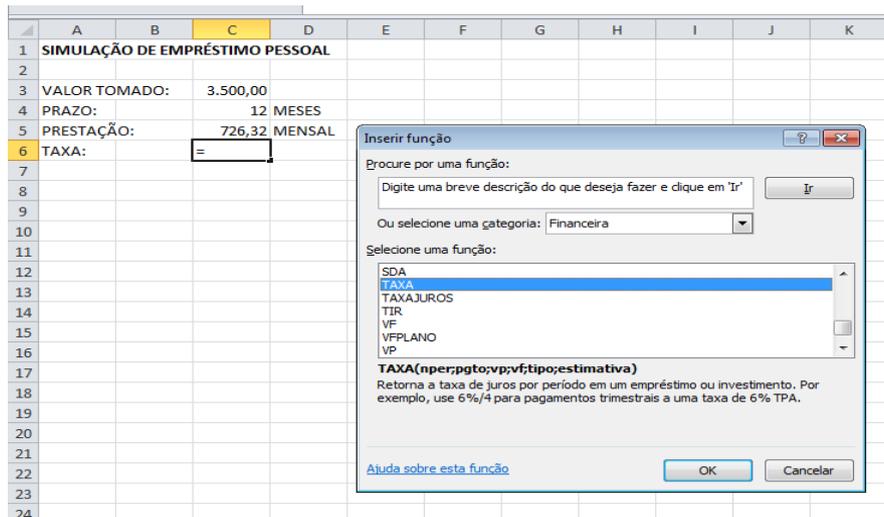
Figura 19: Cálculo da taxa de um empréstimo usando planilha de cálculo

	A	B	C	D
1	<b>SIMULAÇÃO DE EMPRÉSTIMO PESSOAL</b>			
2				
3	VALOR TOMADO:		3.500,00	
4	PRAZO:		12	MESES
5	PRESTAÇÃO:		726,32	MENSAL
6	TAXA:			
7				

Fonte: o próprio autor.

Na continuidade, deve-se inserir a função TAXA, conforme mostra a figura 20:

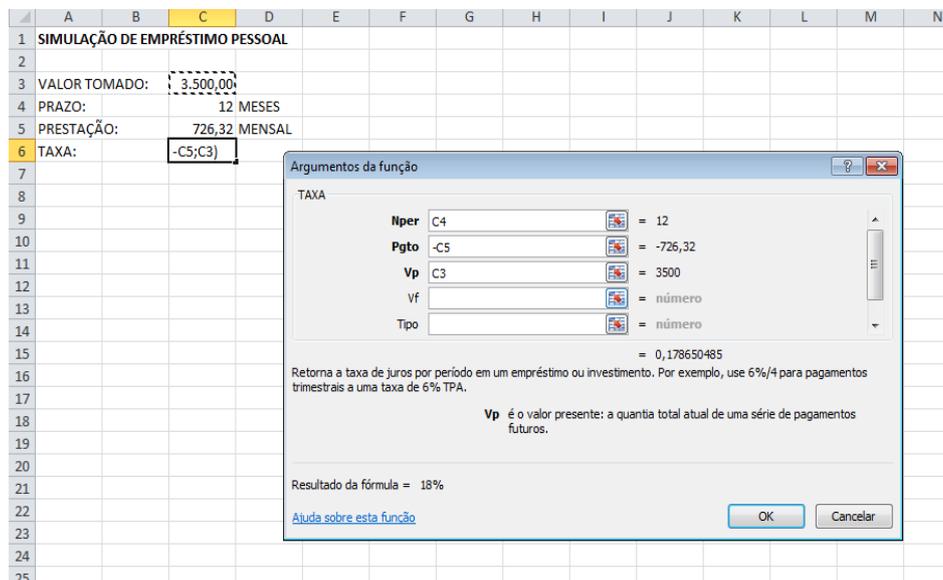
Figura 20: Utilizando a função TAXA da planilha de cálculo



Fonte: o próprio autor.

A caixa de diálogo, na figura 21, solicitará o prazo, a prestação e o valor do empréstimo:

Figura 21: Entrada de dados para a função TAXA



Fonte: o próprio autor.

Note que foi informado o valor da prestação com o sinal negativo, cujo significado indica que é um pagamento.

E o resultado obtido é apresentado na figura 22:

Figura 22: Função TAXA - resultado final

		C6	fx =TAXA(C4;-C5;C3)			
	A	B	C	D	E	F
1	<b>SIMULAÇÃO DE EMPRÉSTIMO PESSOAL</b>					
2						
3	VALOR TOMADO:		3.500,00			
4	PRAZO:		12	MESES		
5	PRESTAÇÃO:		726,32	MENSAL		
6	TAXA:		17,865049%			
7						
8						
9						

Fonte: o próprio autor.

Observamos na figura 22 o valor da taxa de 17,865049%, tal como obtido com a calculadora financeira.

O problema abaixo tem por objetivo introduzir a série de pagamentos não uniforme e apresentar o instrumento matemático propício para sua análise.

**PROBLEMA 11:** Uma empresa financia um equipamento de R\$ 56.000,00 em sete meses e irá pagá-lo conforme o esquema apresentado na tabela 4. Calcule a taxa efetiva deste financiamento.

Tabela 4: Plano de pagamento de um financiamento

MÊS	VALOR
1	8.000,00
2	8.700,00
3	9.000,00
4	9.050,00
5	9.050,00
6	10.000,00
7	10.250,00

**SOLUÇÃO.**

A taxa efetiva (que em um projeto de investimento é conhecida como taxa interna de retorno) é aquela que, calculando o valor líquido, por desconto

composto de cada um dos valores do fluxo e, posteriormente, somam-se esses valores líquidos, o que resultará no valor financiado.

Convém destacar o valor de um problema desta natureza visto que sua solução utiliza-se do conceito de polinômio e de uma equação polinomial, nesse caso, uma equação polinomial envolvendo um polinômio de sétimo grau.

De acordo com a definição dada de taxa efetiva, devemos ter:

$$56000 = \frac{8000}{(1+i)} + \frac{8700}{(1+i)^2} + \frac{9000}{(1+i)^3} + \frac{9050}{(1+i)^4} + \frac{9050}{(1+i)^5} + \frac{10000}{(1+i)^6} + \frac{10250}{(1+i)^7}$$

Então, fazendo a substituição:

$$x = \frac{1}{(1+i)}$$

Teremos:

$$56000 = 8000x + 8700x^2 + 9000x^3 + 9050x^4 + 9050x^5 + 10000x^6 + 10250x^7$$

Geralmente, quando uma equação polinomial tem solução, essa solução é encontrada por meio de radicais. Uma equação do quinto grau, conforme demonstrou Abel em 1824, não tem solução por radicais. Atribui-se a Evariste Galois a teoria algébrica que estuda se uma equação de grau superior a cinco tem ou não solução por radicais. Mais detalhes sobre o assunto podem ser encontrados no livro “Introdução à álgebra”, de Adilson Gonçalves. Os instrumentos computacionais mencionados neste trabalho (calculadora financeira HP12C e planilha de cálculo) dispõem de algoritmos que calculam a raiz de uma equação polinomial.



CALCULADORA HP12C

Como nos cursos técnicos utiliza-se planilhas e calculadora financeira, para encontrar a taxa, apresenta-se abaixo como calcular a taxa com uso da HP12C:

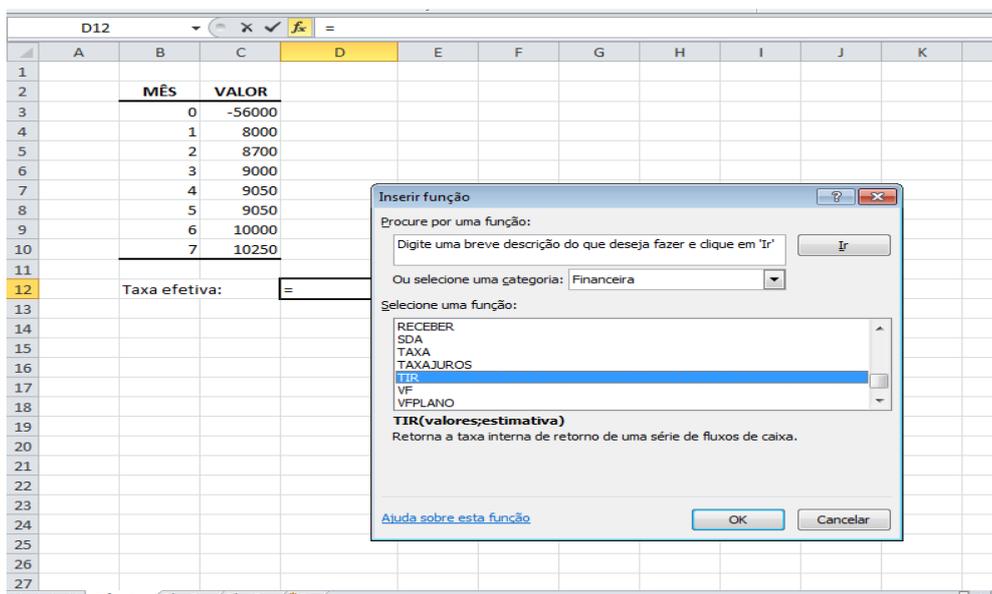
Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
56000	CHS	-56.000,00
	g CF <sub>0</sub>	-56.000,00
8000	g CF <sub>i</sub>	8.000,00
8700	g CF <sub>i</sub>	8.700,00
9000	g CF <sub>i</sub>	9.000,00
9050	g CF <sub>i</sub>	9.050,00
2	g N <sub>j</sub>	2
10000	g CF <sub>i</sub>	10.000,00
10250	g CF <sub>i</sub>	10.250,00
	f IRR	3,345943278

Uma observação sobre esse procedimento é o uso de N<sub>j</sub>, que significa que o valor 9.050 é para dois períodos consecutivos. Ou seja, quando um fluxo de caixa tem valores que se repetem consecutivamente, não é necessário digitar o valor repetidamente, mas informar quantas vezes esse valor se repete.

Portanto, a taxa procurada é de 3,345943278% ao mês.

A seguir, apresenta-se uma solução do problema 11 com uso da função TIR da planilha de cálculo, conforme mostra a figura 23:

Figura 23: Cálculo da taxa de uma série - a função TIR



Fonte: o próprio autor.

Para dar sequência à obtenção do resultado desejado, quando digitado o fluxo, seleciona-se a função TIR. Deve-se observar que como a função TIR trabalha

com o conceito de fluxo de caixa, ou seja, para saídas de caixa devem ter entradas de caixa, o valor de 56.000,00 foi colocado negativo. Poderíamos colocar também o valor de 56.000,00 positivo e os valores do fluxo negativos.

Figura 24: Entrada de dados para a função TIR

MÊS	VALOR
0	-56000
1	8000
2	8700
3	9000
4	9050
5	9050
6	10000
7	10250

Argumentos da função

TIR

Valores: C3:C10 = {-56000;8000;8700;9000;9050;9050;10000;10250}

Estimativa: = número

Resultado da fórmula = 0,033459433

Fonte: o próprio autor.

Após selecionar a função TIR, a caixa de diálogo na figura 24 solicitará os parâmetros, que é justamente o *fluxo*. Note que há um campo “estimativa”. Como a planilha resolve a equação polinomial por iterações, em fluxos com muitas parcelas pode ser necessário informar uma taxa aproximada.

Figura 25: Resultado final da função TIR

MÊS	VALOR
0	-56000
1	8000
2	8700
3	9000
4	9050
5	9050
6	10000
7	10250

Taxa efetiva: 3,345943278%

Fonte: o próprio autor.

E, finalizando, obtém-se a taxa apresentada na figura 25.

### 3.2 PROBLEMAS PARA O CURSO TÉCNICO EM LOGÍSTICA

Nesta seção apresenta-se uma lista de problemas voltados para o Curso Técnico em Logística. Assim como fora apresentado na seção anterior, os problemas foram elaborados com a intenção de explorar situações que podem ser vivenciadas por aqueles que exercerem funções que demandam este tipo de formação, segundo o perfil deste egresso.

**PROBLEMA 12:** Uma empresa de logística é contratada para transportar uma carga entre duas cidades, a saber, de Paranaguá – PR para Corumbá – MS. Para realizar o transporte, a empresa subcontrata o serviço para um carreteiro autônomo, que receberá R\$ 6.000,00 de carreto. Além desse valor a empresa tem custos administrativos de R\$ 1.250,00. A empresa deve informar para o cliente o valor do frete, e possui as informações sobre a incidência e o valor do ICMS (Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços), cuja alíquota é de 7%. Sobre esse valor do frete incidirá ainda, um percentual de 1,65% de PIS (programa de integração social), 7,60% de COFINS (Contribuição para Financiamento da Seguridade Social) e 4,50% de INSS (Instituto Nacional de Seguridade Social). Calcule qual deve ser o valor do frete, considerando que a empresa de logística deseja ter 20% de rentabilidade sobre o preço do frete.

**SOLUÇÃO.**

Coloquemos essas informações em uma tabela para dar uma ideia de como serão feitos os cálculos, conforme tabela 5:

*Tabela 5: Cotação de frete*

<b>Frete</b>	<b>Valor do frete</b>
<b>(-) Carreto</b>	6.000,00
<b>(-) Custos administrativos</b>	1.250,00
<b>(-) ICMS</b>	7% sobre o valor do frete
<b>(-) PIS</b>	1,65% sobre o valor do frete
<b>(-) COFINS</b>	7,60% sobre o valor do frete

<b>(-) INSS</b>	4,50% sobre o valor do frete
<b>(=) Rentabilidade desejada</b>	20% do valor do frete

Chamando o valor do frete de  $x$ , a solução do problema resume-se à solução de uma equação linear. Teremos:

$$x - 6000 - 1250 - 0,07x - 0,0165x - 0,076x - 0,045x = 0,2x$$

Ou ainda,

$$x - 0,07x - 0,0165x - 0,076x - 0,045x - 0,2x = 6000 + 1250$$

Portanto,

$$x - 0,4075x = 6000 + 1250$$

Segue que:

$$0,5925x = 7250$$

De onde obtemos:

$$x = \frac{7250}{0,5925}$$

$$x = 12236,29$$

Portanto, o preço do frete que satisfaz as condições solicitadas será de R\$ 12.236,29.

É instrutivo construir uma tabela com os cálculos realizados referentes à tabela 5. Os valores são apresentados na tabela 6.

*Tabela 6: Cotação de frete com valores*

<b>Frete</b>	12.236,29
<b>(-) Carreto</b>	6.000,00
<b>(-) Custos administrativos</b>	1.250,00
<b>(-) ICMS</b>	856,54
<b>(-) PIS</b>	201,90
<b>(-) COFINS</b>	929,96
<b>(-) INSS</b>	550,63

<b>(=) Rentabilidade desejada</b>	2.447,26
-----------------------------------	----------

Calculando o valor de  $x$  em

$$\frac{2447,26}{12236,29} = \frac{x}{100}$$

Daí,

$$12236,29x = 2447,26 \times 100$$

$$x = \frac{2447,26 \times 100}{12236,29} = 20$$

Verifica-se que o resultado obtido é o desejado, ou seja, 20% do valor do frete.

Vale ressaltar que, a solução apresentada nesse problema está relacionada com o que se chama em Matemática Financeira de desconto simples por fora, também conhecido como desconto bancário ou desconto por fora.

Nesta modalidade de desconto, tem-se que:

$$D = N \times i \times n \quad (22)$$

Onde  $D$  representa o valor do desconto,  $N$  o valor nominal de um título,  $i$ , a taxa de desconto e  $n$ , o prazo.

Dado o valor do desconto, calcula-se o valor líquido de um título:

$$L = N - D \quad (23)$$

Substituindo a expressão para cálculo de  $D$  (fórmula 22) na expressão acima, tem-se:

$$L = N - N \times i \times n$$

De onde segue que:

$$L = N(1 - i \times n)$$

E, portanto,

$$N = \frac{L}{(1 - i)}$$

Se colocarmos  $L = 7250$ ,  $i = 0,4075$ , obteremos:

$$N = \frac{7250}{1 - 0,4075}$$

Expressão esta igual à utilizada para calcular o valor do frete.

O problema que segue busca generalizar o resultado obtido no problema anterior para várias possibilidades.

PROBLEMA 13: Usando uma planilha de cálculo, é possível fazer uma planilha de cotação de frete mais completa, na qual podemos selecionar qualquer Estado do Brasil como Estado de origem e/ou destino, uma vez que a alíquota de ICMS altera de acordo com essa variação dos Estados do país, já que possuem autonomia para isso. Elabore esta planilha.

SOLUÇÃO.

Ressalta-se que uma planilha como a proposta é de grande utilidade em uma empresa de transporte rodoviário de cargas, por exemplo. Aqui será montada uma planilha simples. Na empresa, uma planilha como essa leva em consideração várias outras situações que não estão colocadas aqui.

Esta decisão de eliminar estas variáveis torna o problema mais simples, porém, não menos importante. Do ponto de vista do Ensino de Matemática, a elaboração dessa planilha leva o estudante a revisar diversos conceitos de Matemática, entre eles, porcentagem, resolução de uma equação o primeiro grau, como visto no problema anterior e, além disso, o estudante verá uma aplicação de matrizes, qual seja, encontrar um elemento de uma matriz. Para isso, serão utilizadas funções próprias de planilha de cálculo.

A mencionada matriz terá as alíquotas de ICMS (Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços), sendo a primeira coluna referente aos estados de origem de uma carga e, a primeira linha, aos estados de destino.

Na figura 26 que apresenta a planilha, podemos observar a matriz com seus elementos sendo as alíquotas de ICMS de cada estado.

Figura 26: Alíquotas de ICMS

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	
1		TABELA DE ICMS																												
2		D E S T I N O																												
3		AC	AL	AM	AP	BA	CE	DF	ES	GO	MA	MT	MS	MG	PA	PB	PR	PE	PI	RN	RS	RJ	RO	RR	SC	SP	SE	TO		
4		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
5	O	AC	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
6	R	AL	12	17	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
7	I	AM	12	12	17	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
8	G	AP	12	12	12	17	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
9	E	BA	12	12	12	12	17	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
10	M	CE	12	12	12	12	12	17	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
11		DF	12	12	12	12	12	12	0	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12		ES	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
13		GO	12	12	12	12	12	12	12	17	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
14		MA	12	12	12	12	12	12	12	12	17	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
15		MT	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
16		MS	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	17	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
17		MG	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	18	7	7	12	7	7	7	12	12	7	7	12	12	7	7	12	7
18		PA	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	17	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
19		PB	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	17	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
20		PR	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	12	7	7	12	7	7	7	12	12	7	7	12	12	7	7	12	7
21		PE	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	0	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
22		PI	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	17	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
23		RN	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
24		RS	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	12	7	7	12	7	7	7	0	12	7	7	12	12	7	7	12	7
25		RJ	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	12	7	7	12	7	7	7	12	18	7	7	12	12	7	7	12	7
26		RO	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
27		RR	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	17	12	12	12	12
28		SC	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	12	7	7	12	7	7	7	12	12	7	7	17	12	7	7	12	7
29		SP	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	12	7	7	12	7	7	7	12	12	7	7	12	12	7	7	12	7
30		SE	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	17	12
31		TO	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	17

Fonte: o próprio autor.

Note na figura 26 que a segunda linha da tabela está numerada de 1 a 28. Isso servirá para encontrar o elemento na coluna. Para procurar um elemento nessa matriz serão utilizadas as funções PROCV e PROCH. A função PROCH vai encontrar o número que está logo abaixo do estado de destino, sendo esse número a coluna da matriz. A função PROCV vai encontrar na matriz o estado de origem e pegar o valor que está na coluna encontrada pela PROCH. A fórmula que será usada será a seguinte:

```
=PROCV(C5; ICMS!$B$3:$AC$31; PROCH('Cotação de frete!'E5; ICMS!$B$3:$AC$4; 2; FALSO()); FALSO())
```

Onde C5 é a célula da planilha (figura 27) que tem o estado de origem. A PROCV vai encontrar em que linha da matriz está este estado, sendo a pesquisa feita na primeira coluna.

ICMS!\$B\$3:\$AC\$31 é a matriz inteira onde será feita a busca, figura 26.

'Cotação de frete!'E5 é o estado de destino na matriz, o qual será informado pelo usuário na planilha da figura 27.

ICMS!\$B\$3:\$AC\$4; 2 é a matriz a ser usada para encontrar o estado de destino, que nesse caso é constituída apenas pelas primeira e segunda linhas, uma vez que o que interessa aqui é encontrar o número da coluna onde está a alíquota. O número 2 citado acima diz que é para a função PROCH tomar o elemento da segunda linha abaixo do estado que ela encontrou. O estado de destino também será informado pelo usuário na planilha da figura 27

FALSO()); FALSO() diz que as funções aqui utilizadas devem fazer a pesquisa na tabela exatamente da forma como ela está.

Então, a planilha de cotação de frete ficará conforme a figura 27.

Figura 27: Planilha de cálculo de frete

PLANILHA PARA COTAÇÃO DE FRETE															
						ALÍQUOTA DE		VALOR				FRETE		VALOR	
	CIDADE DE ORIGEM	UF	CIDADE DE DESTINO	UF	CARRETO	CUSTOS	ICMS (%)	DO ICMS	PIS	COFINS	INSS	RENTABILIDADE (%)	CALCULADO	LÍQUIDO	
5	Londrina	PR	São Paulo	SP	6.000,00	1.000,00	12	1.548,39	212,90	980,65	580,65	20	12.903,23	2.580,65	
6	Paranaguá	PR	Corumbá	MS	6.000,00	1.250,00	7	856,54	201,90	929,96	550,63	20	12.236,29	2.447,26	
7	Paranaguá	PR	Bauru	SP	3.000,00	1.010,00	12	887,00	121,96	561,77	332,63	20	7.391,71	1.478,34	

Fonte: o próprio autor.

A planilha da figura 27 mostra uma cotação de frete onde são fornecidos os dados necessários para tal, como cidade de origem, estado de origem, cidade de destino, estado de destino, valor do carreto, custos logísticos e a rentabilidade desejada. O ICMS, PIS, COFINS, INSS, frete calculado e valor líquido serão calculados automaticamente a partir de fórmulas construídas naquela planilha.

Na planilha da figura 27 pode-se a função que encontra a alíquota de ICMS na barra de fórmulas.

As outras fórmulas, para calcular o ICMS, PIS, CONFINS, INSS, frete calculado e valor líquido, são apresentadas na figura 28.

Figura 28: Fórmulas utilizadas para o cálculo de frete

	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	PLANILHA PARA COTAÇÃO DE FRETE								
2									
3		ALÍQUOTA DE	VALOR						
4	CUSTOS	ICMS (%)	DO ICMS	PIS	COFINS	INSS	RENTABILIDADE (%)	FRETE	VALOR
5	1000	=PROCV(C5;ICMS!\$B\$3:\$A\$3;=N5*H5%		=N5*1,65%	=N5*7,6%	=N5*4,5%	20		
6	1250	=PROCV(C6;ICMS!\$B\$3:\$A\$3;=N6*H6%		=N6*1,65%	=N6*7,6%	=N6*4,5%	20		
7	1010	=PROCV(C7;ICMS!\$B\$3:\$A\$3;=N7*H7%		=N7*1,65%	=N7*7,6%	=N7*4,5%	20		
8									
9									

Fonte: o próprio autor.

A partir desta planilha da figura 28 pode-se especificar diversas outras situações vivenciadas numa empresa de logística.

### 3.3 PROBLEMAS PARA O CURSO TÉCNICO EM RECURSOS HUMANOS

Apresenta-se a seguir problemas voltados para o Curso Técnico em Recursos Humanos, levando em consideração situações típicas desta área. De certa forma a Matemática necessária para atuar nessa é elementar. Um aspecto importante que se deve observar nessa área é a Legislação Trabalhista, que é levada em consideração no que se apresenta adiante.

**PROBLEMA 14:** Um funcionário de uma empresa recebe seu salário mensalmente, e seu salário é de R\$ 3.500,00. Em determinado mês o funcionário trabalhou 24 horas e 48 minutos em horário extra e durante todo o período do mês em questão não faltou ao serviço. Calcule o valor das horas extras que deve ser creditado em seu contra cheque<sup>8</sup>.

**SOLUÇÃO.**

Este é um típico exercício de rotinas trabalhistas, que do ponto de vista matemático envolve cálculo de variação percentual e regra de três simples.

Para o cálculo do valor de horas extras solicitados, calcula-se primeiramente o salário do funcionário em horas. Teremos:

<sup>8</sup> O Contra cheque é o demonstrativo do salário de um trabalhador.

$$SH = \frac{3500}{220} = 15,91$$

Onde  $SH$  significa salário por hora.

Aqui estamos considerando um funcionário que trabalha em horário comercial: de segunda-feira a sexta-feira trabalha das 8 horas da manhã às 18 horas com duas horas de almoço, perfazendo, portanto, 8 horas de trabalho diário e no sábado trabalha das 8 horas da manhã ao meio dia, portanto, 4 horas de trabalho. Com esta carga horária o funcionário trabalha 220 horas por mês. Esta jornada de trabalho está prevista na Consolidação das Leis do Trabalho (CLT).

Para fins de cálculo do valor de horas extras, deve-se adicionar a esse valor 50% do mesmo, conforme preceitua a Consolidação das Leis do Trabalho (CLT).

Portanto, tem-se:

$$15,91 \times 50\% = 7,96.$$

E o valor da hora, usado para o cálculo será:

$$15,91 + 7,96 = 23,87$$

Em rotinas trabalhistas é tradição usar o salário por hora para cálculo de horas extras, logo, os 48 minutos devem ser convertidos em fração de horas, momento em que se usa a regra de três simples, conforme apresenta a tabela 7:

*Tabela 7: Regra de três para cálculo de hora extra*

HORAS	MINUTOS
1	60
x	48

Neste momento é necessário chamar a atenção para a forma como medimos e representamos as medidas de tempo. Desse modo, esse procedimento é realizado devido ao fato de que a medida das horas não é representada na base decimal, mas para efeito destes cálculos é necessária essa representação na base decimal. Alguns estudantes pensam que 24 horas e 48 minutos se escreve como 24,48 que não é o caso.

Utilizando regra de três, tem-se:

$$\frac{1}{x} = \frac{60}{48}$$

Que nos dá:

$$60x = 48$$

Ou ainda,

$$x = \frac{48}{60}$$

$$x = 0,8$$

Portanto, 48 minutos corresponde a 0,8 hora, logo o funcionário trabalhou 24,8 horas extras, e o valor que receberá será de  $23,87 \times 24,8 = 591,98$ .

O problema a seguir é de suma importância no Curso Técnico em Recursos Humanos, uma vez que trata da elaboração de uma folha de pagamentos. Uma das funções atribuídas a um departamento de recursos humanos é a confecção da folha de pagamentos de funcionários da empresa, peça que a empresa deve ter em seu sistema ou arquivos tanto por ser uma exigência legal bem como para controles internos. Assim, uma das atividades frequentemente solicitada no Curso Técnico em Recursos Humanos, em geral na disciplina de rotinas trabalhistas, é a elaboração de uma folha de pagamentos.

**PROBLEMA 15:** elabore uma Folha de Pagamento para uma empresa a partir dos dados apresentados em uma situação fictícia<sup>9</sup>.

**SOLUÇÃO.**

Uma empresa possui cinco funcionários e como funcionário do Setor de Recursos Humanos, você foi escolhido / escolhida para elaborar uma planilha de cálculo que calcula a folha de pagamento para a empresa. Cada funcionário possui características distintas em relação ao cálculo do salário. Descrevamos a seguir quais são elas:

---

<sup>9</sup> Os dados do problema serão apresentados na solução a fim de evitar o enunciado demasiadamente longo.

Funcionário: Márcio Amando Silveira.

Salário: R\$ 3.450,00

Fez 25 horas extras no decorrer do mês.

Tem dois dependentes: a esposa e um filho menor de 14 anos.

Teve um adiantamento salarial de R\$ 1.300,00.

Funcionário: Leonardo Gonçalves.

Salário: R\$ 4.065,00.

Tem três dependentes: a esposa e dois filhos menores de 14 anos.

Teve um adiantamento salarial de R\$ 1.600,00.

Foi contratado em 1º de setembro de 2017, não tendo trabalhado com registro em carteira até esta contratação, devendo descontar-lhe a contribuição sindical correspondente a um dia de trabalho.

Funcionária: Karina Guiomar.

Salário: R\$ 1.062,00.

Foi admitida no dia 11 de setembro, tendo trabalhado 19 dias neste mês.

Tem dois dependentes: dois filhos menores de 14 anos.

Funcionária: Maria Renata.

Salário: R\$ 2.580,00.

Teve um adiantamento salarial de R\$ 1.032,00.

Teve uma falta não justificada.

Funcionário: Mário Rosa.

Salário: R\$ 1.320,00.

Teve R\$ 4.680,00 a título de comissão sobre vendas.

Tem quatro dependentes: a esposa e três filhos menores de 14 anos.

Teve adiantamento salarial de R\$ 528,00.

Deve-se observar que neste exercício, está-se trabalhando com o mês de setembro de 2017, que teve 25 dias de trabalho, quatro domingos e um feriado.

Para a elaboração da referida folha de pagamentos, deverão ser considerados descontos relativos a previdência social (INSS), imposto de renda e provento referente a salário família. Para tanto, deve-se consultar as respectivas tabelas, que são as seguintes:

### TABELA DO INSS

*Tabela 8: Tabela de INSS*

DE	ATÉ	ALÍQUOTA (%)
0,00	1.556,94	8%
1.556,96	2.594,92	9%
2.594,93	5.189,82	11%

Deve-se observar nesta tabela que o teto de contribuição é de R\$ 5.189,82. Portanto, o valor de rendimento que exceder esse teto não sofre retenção de INSS.

### TABELA DO IMPOSTO DE RENDA

*Tabela 9: Tabela do Imposto de Renda*

DE	ATÉ	ALÍQUOTA (%)	DEDUZIR
0,00	1.903,98	0%	
1.903,99	2.896,65	7,5%	142,80
2.826,66	3.751,05	15,0%	354,80
3.751,06	4.664,68	22,50%	636,13
4.664,68	ACIMA	27,50%	869,36
DEPENDENTES		189,59	CADA UM

Aqui se deve observar que dependentes para fins de imposto de renda são os filhos menores de 18 anos e esposa, caso esta não tenha renda própria.

### TABELA DE SALÁRIO FAMÍLIA

*Tabela 10: Tabela do Salário Família*

DE	ATÉ	VALOR
0,00	806,80	41,37
806,81	1.212,64	29,16

Os dependentes para fins de salário família são apenas filhos menores de 14 anos. O benefício recebido será o número de dependentes multiplicado pelo valor segundo a faixa que recai o salário do/da funcionário / funcionária.

Os proventos de um funcionário são compostos de seu salário (parte fixa), remuneração referente a horas extras, comissões sobre vendas, adicionais de periculosidade e de insalubridade e, se o funcionário se enquadrar, salário família (parte variável).

No caso da funcionária Karina Guiomar, seu salário será proporcional à quantidade de dias restantes do mês, isto é, dezenove dias. Assim, seu provento inicialmente corresponderá a:

$$\frac{1062}{30} \times 19 = 672,60$$

A funcionária Maria Renata, que tem um salário de R\$ 2.580,00, teve uma falta não justificada. Neste caso, a legislação trabalhista permite que, além do desconto desse dia da falta, a empresa desconte também um dia referente a descanso semanal remunerado. Assim, seu provento será proporcional a 28 dias:

$$\frac{2580}{30} \times 28 = 2408$$

No caso do funcionário Márcio Amando Silveira, ele teve 25 horas extras. Então, deve-se calcular seu salário por hora, dividindo-o por 220, conforme reza a CLT – Consolidação das Leis do Trabalho. Depois se deve acrescentar a este valor 50% do mesmo e multiplicar o resultado pela quantidade de horas extras trabalhadas. Além disso, as horas extras têm reflexo no descanso semanal remunerado. Portanto, ao funcionário será creditado o valor da hora extra multiplicado por cinco – quatro domingos mais um feriado. Ou, equivalentemente, multiplica-se o valor da hora extra por trinta. Então, o cálculo é o que segue:

$$\frac{3450}{220} \times 1,5 \times 30 = 705,68$$

É importante aqui que as/os estudantes entendam que ao multiplicar 3450/220, está-se acrescentando 3450/220 em 50%. Isto pode ser apresentado assim:

$$15,68 + 15,68 \times 50\% = 15,68 + 15,68 \times 0,5 = 15,68(1 + 0,5) = 15,68 \times 1,5$$

O funcionário Mauro Rosa teve uma comissão de R\$ 4.680,00, resultante de suas vendas em 25 dias de trabalho. Esse valor tem reflexo no descanso semanal remunerado. Assim, o valor desse reflexo será proporcional ao número de dias trabalhados e multiplicado por cinco – quatro domingos e um feriado:

$$\frac{4680}{25} \times 5 = 936$$

Assim, esse funcionário receberá, a título de comissão, o valor de:

$$4680 + 936 = 5616$$

Sobre o total de proventos incide um percentual (alíquota) referente à previdência oficial, conforme a tabela de INSS mostrada acima. Por exemplo, no caso do funcionário Márcio Amando Silveira, a alíquota de INSS será de 11%. Portanto, terá um desconto de:

$$4155,68 \times 11\% = 457,13$$

E que terá ainda um desconto de imposto de renda.

Para calcular o imposto de renda, primeiramente calcula-se a base, da seguinte forma:

Base de cálculo do Imposto de Renda = total de proventos – INSS – (quantidade de dependentes x valor por dependente)

Após ter obtido a base, verifica-se em qual faixa de tributação a mesma recai. Aplica-se, então, a alíquota correspondente e, sem seguida, subtrai-se a parcela a deduzir.

No caso desse funcionário, ter-se-á:

$$\text{Base de cálculo} = 4155,68 - 457,13 - 2 \times 189,59 = 3319,37$$

E o imposto de renda será:

$$\text{Imposto de renda} = (3319,37 \times 15\%) - 354,80 = 143,11$$

Portanto o valor líquido deste funcionário será:

$$3450 + 705,68 - 457,13 - 143,11 - 1300 = 2255,44$$

No caso do funcionário Mauro Rosa, observa-se que seu total de proventos será de R\$ 6.936,00, ultrapassando, portanto, o teto da tabela de INSS. Assim, o valor de INSS a ser descontado deste funcionário será de:

$$5189,82 \times 11\% = 570,88$$

O salário da funcionária Karina Guiomar permite que ela receba o salário família, sendo duas quotas (por ter dois dependentes) proporcionais aos dias trabalhados. Isto nos dará:

$$\frac{29,16 \times 2}{30} \times 19 = 36,94$$

Considerando os exemplos acima, uma atividade prática para o Curso Técnico em Recursos Humanos é montar uma planilha que efetua os cálculos como nesses exemplos.

Primeiramente, coloca-se as tabelas de INSS, imposto de renda e de salário família em uma planilha, como no exemplo da figura 29, as quais serão utilizadas para todos(as) os/as funcionários(as).

Figura 29: Tabelas do INSS, Imposto de Renda e de Salário Família

	A	B	C	D	E
1	<b>TABELA DO INSS</b>				
2	<b>SALÁRIO DE CONTRIBUIÇÃO</b>				
3	<b>DE</b>	<b>ATÉ</b>	<b>ALÍQUOTA (%)</b>		
4	0,00	1.556,94	8,00%		
5	1.556,95	2.594,92	9,00%		
6	2.594,93	5.189,82	11,00%		
7					
8	<b>TABELA DO IMPOSTO DE RENDA</b>				
9	<b>DE</b>	<b>ATÉ</b>	<b>ALÍQUOTA (%)</b>	<b>PARCELA A DEDUZIR</b>	
10	0,00	1.903,98	0	0	
11	1.903,99	2.826,65	7,50%	142,8	
12	2.826,66	3.751,05	15,00%	354,8	
13	3.751,06	4.664,68	22,50%	636,13	
14	4.664,68	ACIMA	27,50%	869,36	
15	<b>DEPENDENTE:</b>	<b>189,59</b>	<b>CADA UM</b>		
16					
17					
18	<b>SALÁRIO FAMÍLIA</b>				
19	<b>DE</b>	<b>ATÉ</b>	<b>VALOR</b>		
20	0,00	806,80	41,37		
21	806,81	1.212,64	29,16		
22					
23					
24					

Fonte: o próprio autor.

Depois elabora-se, em outra planilha, a folha de pagamento de todos os funcionários. Como todas as informações não couberam em uma figura, optou-se por dividir a planilha em duas partes, apresentadas nas figuras 30 e 31:

Figura 30: Folha de pagamento - primeira parte

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	<b>FOLHA DE PAGAMENTO</b>													
2	EMPRESA:													
3	ENDEREÇO:													
4		<b>REMUNERAÇÃO</b>							<b>DESCONTOS</b>					
5	<b>Nº DE</b>	<b>SALÁRIO</b>		<b>HORAS EXTRAS</b>					<b>I N S S</b>		<b>I R R F</b>			
6	<b>ORDEM</b>	<b>NOME</b>	<b>DIAS/HORAS</b>	<b>SALÁRIO</b>	<b>VALOR</b>	<b>HORAS</b>	<b>VALOR</b>	<b>RESERVADO</b>	<b>TOTAL</b>	<b>%</b>	<b>VALOR</b>	<b>DEPENDENTES</b>	<b>BASE</b>	<b>IR</b>
7	1	Márcio Amando Silveira	30	3.450,00	3.450,00	30	705,68		4.155,68	11%	457,13	2	3.319,38	143,11
8	2	Leonardo Gonçalves	30	4.065,00	4.065,00	0	0,00		4.065,00	11%	447,15	3	3.049,08	102,56
9	3	Karina Guiomar	19	1.062,00	672,60	0	0,00		672,60	8%	53,81	2	239,61	0,00
10	4	Maria Renata	28	2.580,00	2.408,00	0	0,00		2.408,00	9%	216,72	0	2.191,28	21,55
11	5	Mauro Rosa	30	1.320,00	1.320,00	0	0,00	5.616,00	6.936,00	11%	570,88	4	5.606,76	672,50
12														
13														
14														
15														

Fonte: o próprio autor.

Figura 31: Folha de pagamento - segunda parte

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	
1										
2										
3							MÊS DE REFERÊNCIA:	Setembro de 2017.		
4	CONTOS					SALÁRIO FAMÍLIA		LÍQUIDO	VALORES INFORMATIVOS	
5			CONTRIBUIÇÃO			QUANT.	VALOR	A RECEBER	SALÁRIO	FGTS
6	IR	ADIANTAMENTO	SINDICAL	TOTAL						
7	143,11	1.300,00		1.900,23	1	0,00	2.255,45	4.155,68	332,45	
8	102,56	1.600,00	135,50	2.285,21	2	0,00	1.779,79	4.065,00	325,20	
9	0,00	0,00		53,81	2	36,94	655,73	672,60	53,81	
10	21,55	1.032,00		1.270,27	0	0,00	1.137,73	2.408,00	192,64	
11	672,50	528,00		1.771,38	3	0,00	5.164,62	6.936,00	554,88	
12										
13										

Fonte: o próprio autor.

Nas figuras 32 e 33 mostra-se as fórmulas utilizadas nos resultados das figuras 30 e 31.

Figura 32: Fórmulas da folha de pagamento - primeira parte

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	EMPRESA:						
3	ENDEREÇO:						
4					REMUNERAÇÃO		
5	Nº DE			SALÁRIO		HORAS EXTRAS	
6	ORDEM	NOME	DIAS/HORAS	SALÁRIO	VALOR	HORAS	VALOR
7	1	Márcio Amando Silveira	30	3450	=D7/30*C7	30	=D7/220*1,5*F7
8	2	Leonardo Gonçalves	30	4065	=D8/30*C8	0	=D8/220*1,5*F8
9	3	Karina Guiomar	19	1062	=D9/30*C9	0	=D9/220*1,5*F9
10	4	Maria Renata	28	2580	=D10/30*C10	0	=D10/220*1,5*F10
11	5	Mauro Rosa	30	1320	=D11/30*C11	0	=D11/220*1,5*F11
12							
13							
14							
15							

Fonte: o próprio autor.

Figura 33: Fórmulas da folha de pagamento - segunda parte

	H	I	J	K	L	M	N
1	FOLHA DE PAGAMENTO						
2							
3							
4					DESCONTOS		
5	RESERVADO	TOTAL	%	VALOR	DEPENDENTES	I R R F	IR
6						BASE	
7		=E7+G7+H7	=SE(E(17)>=Tabelas!\$A\$4;17<=Tabelas!\$B\$4);Tabelas!\$C\$4;SE(E(17)>=Tabelas!\$A\$5;17<=Tabelas!\$B\$5);Tabelas!\$C\$5;SE(E(17)>=Tabelas!\$A\$6;17<=Tabelas!\$B\$6);Tabelas!\$C\$6;Tabelas!\$C\$6))	=SE(I7>=Tabelas!\$B\$6;Tabe 2		=I7-K7-L7*Tabelas!\$B\$15	=SE(M7<=Tabelas!\$B\$10;C10
8		=E8+G8+H8	=SE(E(18)>=Tabelas!\$A\$4;18<=Tabelas!\$B\$4);Tabelas!\$C\$4;SE(E(18)>=Tabelas!\$A\$5;18<=Tabelas!\$B\$5);Tabelas!\$C\$5;SE(E(18)>=Tabelas!\$A\$6;18<=Tabelas!\$B\$6);Tabelas!\$C\$6;Tabelas!\$C\$6))	=SE(I8>=Tabelas!\$B\$6;Tabe 3		=I8-K8-L8*Tabelas!\$B\$15	=SE(M8<=Tabelas!\$B\$10;C10
9		=E9+G9+H9	=SE(E(19)>=Tabelas!\$A\$4;19<=Tabelas!\$B\$4);Tabelas!\$C\$4;SE(E(19)>=Tabelas!\$A\$5;19<=Tabelas!\$B\$5);Tabelas!\$C\$5;SE(E(19)>=Tabelas!\$A\$6;19<=Tabelas!\$B\$6);Tabelas!\$C\$6;Tabelas!\$C\$6))	=SE(I9>=Tabelas!\$B\$6;Tabe 2		=I9-K9-L9*Tabelas!\$B\$15	=SE(M9<=Tabelas!\$B\$10;C10
10		=E10+G10+H10	=SE(E(110)>=Tabelas!\$A\$4;110<=Tabelas!\$B\$4);Tabelas!\$C\$4;SE(E(110)>=Tabelas!\$A\$5;110<=Tabelas!\$B\$5);Tabelas!\$C\$5;SE(E(110)>=Tabelas!\$A\$6;110<=Tabelas!\$B\$6);Tabelas!\$C\$6;Tabelas!\$C\$6))	=SE(I10>=Tabelas!\$B\$6;Tab 0		=I10-K10-L10*Tabelas!\$B\$15	=SE(M10<=Tabelas!\$B\$10;C10
11	5616	=E11+G11+H11	=SE(E(111)>=Tabelas!\$A\$4;111<=Tabelas!\$B\$4);Tabelas!\$C\$4;SE(E(111)>=Tabelas!\$A\$5;111<=Tabelas!\$B\$5);Tabelas!\$C\$5;SE(E(111)>=Tabelas!\$A\$6;111<=Tabelas!\$B\$6);Tabelas!\$C\$6;Tabelas!\$C\$6))	=SE(I11>=Tabelas!\$B\$6;Tab 4		=I11-K11-L11*Tabelas!\$B\$15	=SE(M11<=Tabelas!\$B\$10;C10
12							
13							
14							
15							

Fonte: o próprio autor.

Observe na tela da figura 33, na barra de fórmulas, a fórmula para encontrar na tabela de INSS a alíquota que se enquadra aos proventos:

```
=SE(E(I7>=Tabelas!$A$4;I7<=Tabelas!$B$4);Tabelas!$C$4;SE(E(I7>=Tabelas!$A$5;I7<=Tabelas!$B$5);Tabelas!$C$5;SE(E(I7>=Tabelas!$A$6;I7<=Tabelas!$B$6);Tabelas!$C$6;Tabelas!$C$6))) (**)
```

Nas planilhas de cálculo CALC e EXCEL a função SE tem a seguinte estrutura:

SE(A; B se verdadeiro; C se falso).

Esta função nos diz o seguinte: se a proposição A for verdadeira, faça B, senão faça C.

É possível usar esta função para testes consecutivos, que é o caso de procurar valores nas tabelas que estão sendo usadas. Por exemplo, para procurar uma alíquota na tabela de INSS, fazemos assim:

SE proventos maior do que ou igual a zero E proventos menor do que ou igual a 1.556,94 ENTÃO alíquota igual a 8%

SE NÃO

SE proventos maior do que ou igual a 1.556,95 E proventos menor do que ou igual a 2.594,92 ENTÃO alíquota igual a 9%

SE NÃO

SE proventos maior do que ou igual a 2.594,93 E proventos menor do que ou igual a 5.189,82 ENTÃO alíquota igual a 11%.

Que é o que a função (\*\*) apresentada acima faz.

Agora é preciso escrever uma expressão que calcula o INSS, ou seja, que aplica a alíquota encontrada sobre os proventos. Na planilha apresentada na figura 34 tem-se:

Figura 34: Cálculo do INSS

RESERVADO	TOTAL	%	VALOR	DEPENDENTES	BASE
=E7+G7+H7	=SE(E(I7>=Tabelas!\$A\$4,I7<=T)=SE(I7>Tabelas!\$B\$6;Tabelas!\$B\$6*I7*J7)	=SE(E(I7>=Tabelas!\$A\$4,I7<=T)=SE(I7>Tabelas!\$B\$6;Tabelas!\$B\$6*I7*J7)		2	=I7-K7-L7*Tabelas!\$E
=E8+G8+H8	=SE(E(I8>=Tabelas!\$A\$4,I8<=T)=SE(I8>Tabelas!\$B\$6;Tabelas!\$B\$6*I8*J8)	=SE(E(I8>=Tabelas!\$A\$4,I8<=T)=SE(I8>Tabelas!\$B\$6;Tabelas!\$B\$6*I8*J8)		3	=I8-K8-L8*Tabelas!\$E
=E9+G9+H9	=SE(E(I9>=Tabelas!\$A\$4,I9<=T)=SE(I9>Tabelas!\$B\$6;Tabelas!\$B\$6*I9*J9)	=SE(E(I9>=Tabelas!\$A\$4,I9<=T)=SE(I9>Tabelas!\$B\$6;Tabelas!\$B\$6*I9*J9)		2	=I9-K9-L9*Tabelas!\$E
=E10+G10+H10	=SE(E(I10>=Tabelas!\$A\$4,I10<=T)=SE(I10>Tabelas!\$B\$6;Tabelas!\$B\$6*I10*J10)	=SE(E(I10>=Tabelas!\$A\$4,I10<=T)=SE(I10>Tabelas!\$B\$6;Tabelas!\$B\$6*I10*J10)		0	=I10-K10-L10*Tabelas!\$E
5616	=E11+G11+H11	=SE(E(I11>=Tabelas!\$A\$4,I11<=T)=SE(I11>Tabelas!\$B\$6;Tabelas!\$B\$6*I11*J11)		4	=I11-K11-L11*Tabelas!\$E

Fonte: o próprio autor.

Na planilha da figura 34, na barra de fórmula aparece a fórmula:

=SE(I7>Tabelas!\$B\$6;Tabelas!\$B\$6\*Tabelas!\$C\$6;I7\*J7)

Esta fórmula apresenta que:

SE proventos for maior do que 5.189,82 ENTÃO inss = 5,189,82 x 11% SE NÃO inss = proventos x alíquota%.

A figura 35 mostra a planilha com a fórmula para o cálculo do imposto de renda:

Figura 35: Cálculo do Imposto de Renda

DEPENDENTES	BASE	IR	ADIANTAMENTO	CONTRIBUIÇÃO SINDICAL	TOTAL	SALÁRIO FAMÍLIA QUANT.	VALOR	LÍQUIDO A RECEBER	SALÁRIO INSS	FGTS
2	3.319,38	143,11	1.300,00		1.900,23	1	0,00	2.255,45	4.155,68	332,45
3	3.049,08	102,56	1.600,00	135,50	2.285,21	2	0,00	1.779,79	4.065,00	325,20
2	239,61	0,00	0,00		53,81	2	36,94	655,73	672,60	53,81
0	2.191,28	21,55	1.032,00		1.270,27	0	0,00	1.137,73	2.408,00	192,64
4	5.606,76	672,50	528,00		1.771,38	3	0,00	5.164,62	6.936,00	554,88

Fonte: o próprio autor.

A fórmula escrita para calcular o imposto de renda na planilha da figura 35 é a seguinte:

=SE(M7<=Tabelas!\$B\$10;0;SE(E(M7>=Tabelas!\$A\$11;M7<=Tabelas!\$B\$11);  
M7\*Tabelas!\$C\$11-  
Tabelas!\$D\$11;SE(E(M7>=Tabelas!\$A\$12;M7<=Tabelas!\$B\$12);M7\*Tabelas!\$  
C\$12-  
Tabelas!\$D\$12;SE(E(M7>=Tabelas!\$A\$13;M7<=Tabelas!\$B\$13);M7\*Tabelas!\$  
C\$13-Tabelas!\$D\$13;M7\*Tabelas!\$C\$14-Tabelas!\$D\$14))))

O que essa fórmula nos traz refere-se a:

SE base de cálculo for menor do que ou igual a 1.903,98

ENTÃO imposto = 0

SE NÃO

SE base de cálculo for maior do que ou igual a 1.903,99 E base de  
cálculo for menor do que ou igual a 2.826,65 ENTÃO imposto = base de  
cálculo x 7,5% - 142,80

SE NÃO

SE base de cálculo for maior do que ou igual a 2.826,66 E base de  
cálculo for menor do que ou igual a 3.751,05 ENTÃO imposto = base de  
cálculo x 15% - 354,80

SE NÃO

SE base de cálculo for maior do que ou igual a 3.751,06 E base de  
cálculo for menor do que ou igual a 4.664,68 ENTÃO imposto = base de  
cálculo x 22,5% - 636,13

SE NÃO

Imposto = base de cálculo x 27,5% - 869,36.

De forma semelhante escreve-se uma função para tratar o salário família.

Passemos a alguns problemas sugeridos para o Curso Técnico em  
Contabilidade.

### 3.4 PROBLEMAS PARA O CURSO TÉCNICO EM CONTABILIDADE

**PROBLEMA 16:** Pesquise na Internet o valor do salário mínimo nacional dos últimos 10 anos. Monte uma tabela mostrando a data em que vigorou esse salário e o valor. Crie também uma coluna para calcular sua variação percentual, outra para informar qual era a cotação do dólar na data mencionada e uma última coluna para converter o valor daquele salário mínimo em dólares. Analise a evolução do salário mínimo em reais e em dólares.

**SOLUÇÃO.**

A tabela 11 apresenta os dados solicitados no problema 16.

*Tabela 11: Conversão do salário mínimo em dólar*

<b>ANO</b>	<b>VIGÊNCIA</b>	<b>VALOR</b>	<b>PERCENTUAL</b>	<b>DÓLAR</b>	<b>VALOR</b>
2008	01/03/2008	415,00		1,6808	246,91
2009	01/02/2009	465,00	12,05%	2,3467	198,15
2010	01/01/2010	510,00	9,68%	1,7232	295,96
2011	01/01/2011	540,00	5,88%	1,6502	327,23
2011	01/03/2011	545,00	0,93%	1,6619	327,94
2012	01/01/2012	622,00	14,13%	1,8676	333,05
2013	01/01/2013	678,00	9,00%	2,0409	332,21
2014	01/01/2014	724,00	6,78%	2,3969	302,06
2015	01/01/2015	788,00	8,84%	2,6923	292,69
2016	01/01/2016	880,00	11,68%	4,0380	217,93
2017	01/01/2017	937,00	6,48%	3,2723	286,34
2018	01/01/2018	954,00	1,81%	3,2691	291,82

O problema 17 trata de correção de valores segundo um índice escolhido> Problemas deste tipo são frequentes em empresas.

**PROBLEMA 17:** Ocorre eventualmente em empresas a necessidade de se corrigir algum valor por algum índice de inflação ou taxa de juros escolhido, por consenso ou determinação judicial. Suponha que, por determinação judicial, uma dívida de R\$ 759.400,00 em maio de 2017 deva ser corrigida pela SELIC (taxa do Sistema Eletrônico de Liquidação e Custódia, que remunera os títulos do governo federal). Atualize esse valor até setembro de 2018.

**SOLUÇÃO.**

A SELIC é uma taxa básica de juros da economia brasileira. Trata-se da taxa de remuneração de títulos do tesouro nacional. A taxa é a média ponderada dos juros praticados pelas instituições financeiras para operações de curtíssimo prazo (um dia).

Esta atividade de correção ou atualização de valor é ideal para ser feita em planilha de cálculo para exploração de operações aritméticas simples.

Na figura 36 tem-se uma planilha mostrando tal atualização:

*Figura 36: Atualização de valores*

	A	B	C	D	E	F	G	
1								
2		<b>CORREÇÃO DE UM VALOR PELA SELIC</b>						
3								
4			VALOR A SER CORRIGIDO:			759.400,00		
5								
6			<b>MÊS/ANO</b>	<b>SELIC</b>	<b>CORREÇÃO</b>	<b>SALDO</b>		
7			mai/17	0,93	7.062,42	766.462,42		
8			jun/17	0,81	6.208,35	772.670,77		
9			jul/17	0,80	6.181,37	778.852,13		
10			ago/17	0,80	6.230,82	785.082,95		
11			set/17	0,64	5.024,53	790.107,48		
12			out/17	0,64	5.056,69	795.164,17		
13			nov/17	0,57	4.532,44	799.696,60		
14			dez/17	0,54	4.318,36	804.014,96		
15			jan/18	0,58	4.663,29	808.678,25		
16			fev/18	0,47	3.800,79	812.479,04		
17			mar/18	0,53	4.306,14	816.785,18		
18			abr/18	0,52	4.247,28	821.032,46		
19			mai/18	0,52	4.269,37	825.301,83		
20			jun/18	0,52	4.291,57	829.593,40		
21			jul/18	0,54	4.479,80	834.073,20		
22			ago/18	0,57	4.754,22	838.827,42		
23			set/18	0,35	2.935,90	841.763,32		
24								

Fonte: o próprio autor.

E a planilha apresentada na figura 37 mostra as fórmulas utilizadas para esta correção:

Figura 37: Fórmulas para atualização de valores

	A	B	C	D	E	F
1						
2		CORREÇÃO DE I				
3						
4			VALOR A SER CORRIG			759400
5						
6			MÊS/ANO	SELIC	CORREÇÃO	SALDO
7			42856	0,93	=F4*D7%	=F4+E7
8			42887	0,81	=F7*D8%	=F7+E8
9			42917	0,8	=F8*D9%	=F8+E9
10			42948	0,8	=F9*D10%	=F9+E10
11			42979	0,64	=F10*D11%	=F10+E11
12			43009	0,64	=F11*D12%	=F11+E12
13			43040	0,57	=F12*D13%	=F12+E13
14			43070	0,54	=F13*D14%	=F13+E14
15			43101	0,58	=F14*D15%	=F14+E15
16			43132	0,47	=F15*D16%	=F15+E16
17			43160	0,53	=F16*D17%	=F16+E17
18			43191	0,52	=F17*D18%	=F17+E18
19			43221	0,52	=F18*D19%	=F18+E19
20			43252	0,52	=F19*D20%	=F19+E20
21			43282	0,54	=F20*D21%	=F20+E21
22			43313	0,57	=F21*D22%	=F21+E22
23			43344	0,35	=F22*D23%	=F22+E23
24						
25						
26						

Fonte: o próprio autor.

Pretende-se abordar no problema 18 sobre planejamento familiar, lembrando que raciocínio semelhante é aplicável em empresas.

**PROBLEMA 18:** Uma situação desejável em um planejamento financeiro familiar é que sobre no final do mês algum valor que a família possa guardar para algum evento futuro. Suponhamos que uma família trace um plano de guardar mensalmente, por 12 meses, o valor de R\$ 1.000,00 em um fundo que remunera esse recurso à taxa de 1,15% ao mês. Quanto a família terá na conta ao final desse período? Apresente os cálculos e sequência, exiba a solução usando as funções financeiras da calculadora HP12C.

**SOLUÇÃO.**

Esta ideia simples de guardar algum recurso de forma programada e ter um rendimento sobre cada parcela depositada no fundo é a mesma de um plano de previdência privada, por exemplo.

A ideia é basicamente a seguinte: cada parcela depositada será capitalizada a partir da data do depósito até o momento de encerramento do plano. Assim, por exemplo, no caso do enunciado do exercício, o valor de R\$ 1.000,00 depositado no primeiro mês será capitalizado por 11 meses, o valor depositado no segundo mês será capitalizado por 10 meses e assim por diante.

Assim, o montante no final do prazo estabelecido será a soma dos valores futuros das parcelas depositadas, a uma determinada taxa.

Tem-se, portanto, um problema que envolve a soma dos termos de uma progressão geométrica.

O valor futuro citado acima refere-se à capitalização composta do valor, dada por:

$$FV = C(1+i)^n$$

Em particular, para o cálculo do valor futuro de depósitos constantes e consecutivos, tem-se:

$$FV = PMT(1+i)^{n-1} + PMT(1+i)^{n-2} + \dots + PMT(1+i)^2 + PMT(1+i) + PMT \quad (24)$$

Onde  $PMT$  é o valor do depósito periódico.

Isolando  $PMT$  na fórmula (24) acima, tem-se:

$$FV = PMT \left[ 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1} \right] \quad (25)$$

Dessa forma, ao observar que a expressão entre colchetes é uma progressão geométrica, o seu primeiro termo é igual a 1 e sua razão é  $(1+i)$ . A fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica de razão  $q$  e primeiro termo  $a_1$  é:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Substituindo as informações conhecidas, temos:

$$S_n = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Substituindo a soma dentro do colchete de (25), obtemos o cálculo do valor futuro de depósitos de parcelas iguais e consecutivas à determinada taxa por:

$$FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (26)$$

Substituindo à fórmula os dados do problema 18, tem-se:

$$FV = 1000 \times \frac{(1 + 0,0115)^{12} - 1}{0,0115}$$

Ou seja,

$$FV = 12.788,86$$

A família terá em conta ao final de 12 meses o valor R\$ 12.788,86.



CALCULADORA HP12C

Em uma calculadora HP12C, os passos para resolver o exercício são:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
1000	<b>CHS</b>	-1.000,00
	<b>PMT</b>	-1.000,00
1,15	<b>i</b>	1,15
12	<b>n</b>	12
	<b>FV</b>	12.788,86

O problema 19 visa apresentar o cálculo do tempo, em meses, para acumular determinado valor.

**PROBLEMA 19:** Por quantos meses devo depositar na caderneta de poupança o valor de R\$ 150,00 para ter um montante de R\$ 20.000,00, considerando que o rendimento mensal da caderneta é de 0,50% ao mês?

**SOLUÇÃO.**

A caderneta de poupança é o investimento mais popular no Brasil devido ao fato das pessoas poderem aplicar qualquer valor, tendo sempre liquidez imediata, sendo que sobre os rendimentos não incidem imposto de renda nem imposto sobre operações financeiras. A caderneta de poupança foi lançada com a criação da Caixa Econômica Federal em 1861, por Decreto imperial de Dom Pedro II, e remunerava os recursos nela aplicados à taxa de 6% ao ano. Com o tempo o rendimento da caderneta passou por diversas modificações. A partir de maio de 2012 o rendimento da poupança tem variado de acordo com a variação da taxa SELIC (Sistema Eletrônico de Liquidação e Custódia), funcionando da seguinte forma: se a SELIC for igual ou menor do que 8,5% ao ano, a caderneta de poupança rende 70% da SELIC composta com a taxa

referencial. Se a SELIC for maior do que 8,5% ao ano, então o rendimento da caderneta de poupança será a taxa referencial composta com 0,5% ao mês. Vale observar que a mencionada taxa referencial está em 0,00% desde setembro de 2017, tendo ficado zerada durante o ano de 2018. A SELIC em dezembro de 2018 é de 6,40%. Portanto, o rendimento da caderneta de poupança é calculado como segue:

$$\left(\sqrt[12]{1,064} - 1\right) \times 100 \times 0,7 \cong 0,3628.$$

Isto é, para dezembro de 2018 o rendimento da caderneta de poupança é de aproximadamente 0,3628%.

Dos recursos aplicados na caderneta, cerca de 65% são aplicados em financiamento habitacional.

Para trabalhar a solução do problema 19 é interessante retomar com os/as estudantes o conceito de logaritmo do Ensino Médio.

De acordo com Elon Lages Lima, "(...) na abordagem de logaritmos no Ensino Médio, é fortemente recomendada a ênfase na ideia fundamental de que o logaritmo é o expoente em uma exponenciação. Esta ideia pode facilitar consideravelmente a compreensão das propriedades e características básicas das funções logarítmicas (...)." (LIMA, 2011, p. 262).

Assim, tem-se a seguinte definição de logaritmo:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Desta definição, temos que, se  $u = \log_a x$  e  $v = \log_a y$ , então  $a^u = x$  e  $a^v = y$  de onde segue que  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ , pois  $a^{u+v} = a^u \times a^v$ .

Então, temos que, por exemplo,  $\log_a(x \cdot x) = \log_a x^2 = \log_a x + \log_a x = 2\log_a x$ .

Isto nos leva a uma propriedade de logaritmos muito útil em Matemática financeira quando precisamos encontrar o prazo de uma operação financeira, que é o caso do problema ora proposto, qual seja:

$$\log_a x^n = n \log_a x.$$

Esta propriedade será usada para resolver o problema 19.

No problema 18 foi visto que uma fórmula (26) para calcular o valor futuro de uma série de pagamentos uniformes postecipados, dada uma taxa de juros compostos é:

$$FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Com manipulações algébricas apropriadas pode-se obter da fórmula acima a seguinte expressão:

$$(1+i)^n = \frac{FV \times i}{PMT} + 1$$

Como o enunciado do problema pede para calcular o tempo da aplicação em questão, então, aplica-se o logaritmo em ambos os lados da equação:

$$\log(1+i)^n = \log\left[\frac{FV \times i}{PMT} + 1\right]$$

Agora aplicando a propriedade, vem:

$$n \times \log(1+i) = \log\left[\frac{FV \times i}{PMT} + 1\right]$$

E, portanto, isolando  $n$ :

$$n = \frac{\log\left[\frac{FV \times i}{PMT} + 1\right]}{\log(1+i)}$$

Substituindo os dados do problema 19 nesta expressão, ter-se-á:

$$n = \frac{\log\left[\frac{20000 \times 0,005}{150} + 1\right]}{\log(1+0,005)} = 102,420325$$

Ou seja, para obter o valor de R\$ 20.000,00 depositando R\$ 150,00 mensalmente na caderneta de poupança que rende 0,50% ao mês, é necessário que se faça tais depósitos durante aproximadamente 103 meses.



CALCULADORA HP12C

Resolvendo com uso de calculadora HP12C, obteremos:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
150	<b>CHS PMT</b>	-150,00
.5	<b>i</b>	0,5
20000	<b>FV</b>	20.000,00
	<b>n</b>	103

Finanças é um assunto de muita importância para as pessoas e famílias, pois ter uma boa organização financeira pessoal ou familiar permite as pessoas usufruírem de forma racional dos bens e serviços colocados pelo mercado à sua disposição bem como permite a elaboração de um planejamento para realização de eventos futuros.

Uma situação ideal de um bom planejamento financeiro é que uma pessoa ou família consiga fazer com que, após realizar gastos diversos para sua manutenção, reste algum recurso que possa guardar para alguma situação futura. Neste caso, pode ser interessante separar esse recurso, geralmente após o recebimento de suas rendas – em geral salário – e transferir para alguma conta de poupança.

Neste sentido, é sempre importante que as pessoas e famílias revisem frequentemente seu comportamento quanto ao consumo (em geral, mensal), visando poderem guardar algum recurso. Uma atitude que pode ser interessante para motivar as pessoas a ser mais racionais quanto ao consumo poderia ser a de fazer uma simulação de quanto recurso a pessoa ou a família pode ter em determinado prazo caso guardasse na caderneta de poupança um determinado valor periodicamente, oriundo de cortes no consumo. Com isso em mente, apresentamos o problema 20.

PROBLEMA 20: Suponha que ao analisar seu orçamento doméstico uma família conclua que possa fazer um corte de despesas de forma que possa guardar um recurso extra de R\$ 50,00 por mês na caderneta de poupança. Considerando que a taxa de juros 0,50% ao mês, calcule quanto essa caderneta terá de saldo em 15 anos, por exemplo. Vamos supor que nossa família decida que, ao chegar o décimo quinto ano, ela vai cessar os depósitos, deixar o dinheiro obtido guardado por mais dois anos e, então, passar a usar esse recurso como complemento de renda, para ajudar no pagamento de alguma despesa extra, como mensalidade de faculdade dos filhos. Se ela decide que vai sacar dessa caderneta um determinado valor mensal por quatro anos, considerando ainda a taxa de 0,50% ao mês, qual o valor mensal deverá sacar?

SOLUÇÃO.

Para resolução do problema 20 será utilizada a mesma fórmula do problema 19 para o cálculo do saldo no décimo quinto ano:

$$FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Substituindo os dados do problema 20 na fórmula, temos:

$$FV = 50 \times \frac{(1 + 0,005)^{180} - 1}{0,005}$$

$$FV = 14.540,94$$

Portanto, estima-se que o saldo no décimo quinto ano será de R\$ 14.540,94.

Como nossa família decidiu parar os depósitos e deixar o recurso depositado por mais dois anos, então, ao final desses dois anos o valor na conta de poupança será calculado utilizando a fórmula de montante composto, lembrando que o cálculo será feito por mês. Portanto, 24 meses. Utilizando a fórmula abaixo:

$$M = C(1+i)^n$$

Obtemos após inserir os dados do problema:

$$M = 14540,94(1 + 0,005)^{24}$$

$$M = 16.389,96.$$

Ou seja, vinte e quatro meses após cessarem os depósitos, o saldo da conta de poupança será de R\$ 16.389,94.

Para estimar que valor pode ser retirado mensalmente por quatro anos à taxa de 0,50% ao mês, usa-se a fórmula (19):

$$PMT = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

Substituindo os valores do problema:

$$PMT = 16389,94 \times \frac{(1 + 0,005)^{48} \times 0,005}{(1 + 0,005)^{48} - 1}$$

$$PMT = 384,91$$

Ou seja, a família pode sacar em torno de R\$ 384,91 mensalmente por quatro anos.



CALCULADORA HP12C

Uma solução usando a calculadora HP12C pode ser assim:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
50	<b>CHS PMT</b>	-50,00
15	<b>g n</b>	180
0,5	<b>i</b>	0,50
	<b>FV</b>	14.540,93
	<b>CLx</b>	0,00
	<b>RCL FV</b>	14.540,93
	<b>CHS PV</b>	-14.540,93
2	<b>g n</b>	24
0	<b>PMT</b>	0,00
	<b>FV</b>	16.389,96
	<b>CLx</b>	0,00
	<b>RCL FV</b>	16.389,96
	<b>CHS PV</b>	-16.389,96
4	<b>g n</b>	48

0	<b>FV</b>	0
	<b>PMT</b>	384,91

Portanto, a família poderá realizar saques de R\$ 384,91 por quatro anos.

O problema 21 lida com aplicações de valores diferentes no decorrer do tempo e o cálculo do valor futuro da série.

**PROBLEMA 21:** Suponha que uma pessoa programe em seu orçamento aplicar em um fundo que remunera seus recursos à taxa de 1,05% ao mês os valores conforme segue: em junho, R\$ 1.100,00; em julho, R\$ 900,00; em agosto, R\$ 890,00; em setembro, R\$ 1.210,00; em outubro, R\$ 1.700,00 e em novembro, R\$ 980,00. Calcule o valor futuro desta série, ou seja, qual o montante obtido em novembro, no mesmo dia em que é feito o depósito de R\$ 980,00. Apresente uma solução usando fórmulas, monte uma tabela na planilha de cálculo, e mostre uma solução usando as funções financeiras da calculadora HP12C. Suponha agora que depois de seu último depósito a pessoa não resgate o dinheiro e deixe no banco até março do ano seguinte. Considerando a mesma taxa, qual será o montante obtido?

**SOLUÇÃO.**

Neste caso, o valor futuro será calculado assim:

$$FV = 1100(1 + 0,0105)^5 + 900(1 + 0,0105)^4 + 890(1 + 0,0105)^3 + 1210(1 + 0,0105)^2 + 1700(1 + 0,0105) + 980 = 6949,10$$

Uma possibilidade usando planilha de cálculo é como na figura 38, que aparece no formato de um extrato bancário:

*Figura 38: Cálculo do valor futuro de uma série*

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3			<b>MÊS</b>	<b>VALOR</b>	<b>JUROS</b>	<b>SALDO</b>
4			Junho	1.100,00		1.100,00
5			Julho	900,00	11,55	2.011,55
6			Agosto	890,00	21,12	2.922,67
7			Setembro	1.210,00	30,69	4.163,36
8			Outubro	1.700,00	43,72	5.907,07
9			Novembro	980,00	62,02	<b>6.949,10</b>
10						

Fonte: o próprio autor.

E as fórmulas usadas nesta planilha são mostradas na figura 39:

Figura 39: Fórmulas para cálculo do valor futuro de uma série

MÊS	VALOR	JUROS	SALDO
Junho	1100		=D4
Julho	900	=F4*1,05%	=F4+D5+E5
Agosto	890	=F5*1,05%	=F5+D6+E6
Setembro	1210	=F6*1,05%	=F6+D7+E7
Outubro	1700	=F7*1,05%	=F7+D8+E8
Novembro	980	=F8*1,05%	=F8+D9+E9

Fonte: o próprio autor.



#### CALCULADORA HP12C

No caso de uso da calculadora HP12C, deve-se usar as funções de fluxo de caixa  $CF_0$ ,  $CF_j$  e NPV para então calcular o valor futuro. Os passos são os seguintes:

Valor	Tecla da	Valor no visor	Observação
0	<b>g</b> $CF_0$	0	
1100	<b>g</b> $CF_j$	1.100,00	
900	<b>g</b> $CF_j$	900,00	
890	<b>g</b> $CF_j$	890,00	
1210	<b>g</b> $CF_j$	1.210,00	
1700	<b>g</b> $CF_j$	1.700,00	
980	<b>g</b> $CF_j$	980,00	
1,05	<b>i</b>	1,05	
	<b>f</b> NPV	6.526,95	Valor presente
	PV	6.526,95	Valor presente em PV
6	<b>n</b>	6	
	FV	6.949,10	

Uma observação a respeito deste procedimento na calculadora HP12C é que a mesma não tem uma função que calcula diretamente o valor futuro de uma série de pagamentos não uniforme. Então foi calculado o valor presente da série (função NPV) e o valor futuro desse valor é o valor futuro da série.

O problema 22 lida com planejamento financeiro de uma família.

**PROBLEMA 22:** Uma família está planejando as finanças para bancar a faculdade do filho, que segundo sua previsão, deve começar daqui dez anos e durar quatro anos. A mensalidade do curso pretendido é hoje de R\$ 1.000,00. Pesquisando sobre a inflação, a família assumiu que nos próximos dez anos a mesma deve ser de em torno de 6% ao ano. Então a família assume que a mensalidade daqui a dez anos será igual ao valor de hoje corrigido por essa inflação e a partir do décimo ano deve ficar estável nesse valor pelos próximos quatro anos. A família deseja estimar quanto deve aplicar mensalmente na caderneta de poupança, que remunera o recurso à taxa de 0,50% ao mês, pelos próximos dez anos para que acumule o recurso necessário para financiar os quatro anos de estudos do filho. Neste caso, a partir do décimo ano, os depósitos cessarão e serão feitas retiradas mensais da conta para o pagamento da mensalidade, prevendo-se que no final do quarto ano, quando o filho se formará, o saldo da conta será zero. Pede-se estimar o valor dos depósitos que devem ser feitos mensalmente pelos próximos dez anos pela família. Apresente uma solução usando a calculadora financeira HP12C. Pesquise na página da Internet do Banco Central do Brasil o IPCA dos últimos dez anos, isto é, de janeiro de 2008 a outubro de 2018 e calcule a inflação anual média (que deve ser a geométrica).

### SOLUÇÃO.

A planilha da figura 40 mostra a inflação medida pelo IPCA dos últimos dez anos, sendo que para o ano de 2018 foi acumulado o IPCA até o mês de outubro.

*Figura 40: Inflação acumulada entre 2008 e 2017*

143			
144	<b>ANO</b>	<b>IPCA (%)</b>	<b>ACUMULADO (%)</b>
145	2008	5,9023	5,9023
146	2009	4,3120	10,4689
147	2010	5,9091	16,9965
148	2011	6,5031	24,6049
149	2012	5,8386	31,8801
150	2013	5,9108	39,6753
151	2014	6,4076	48,6251
152	2015	10,6735	64,4886
153	2016	6,2881	74,8318
154	2017	2,9473	79,9847
155	2018 (1)	3,8081	86,8387
156			
157	<b>INFLAÇÃO MÉDIA:</b>		6,4502
158			
159	Fonte: Banco Central do Brasil.		
160			
161	(1) Até o mês de outubro.		

Fonte: o próprio autor.

Na figura 41 a planilha mostra as fórmulas usadas para acumular a inflação, bem como a que foi usada para calcular a inflação média (geométrica) por mês:

Figura 41: Fórmulas utilizadas para acumular a inflação

Biblioteca de Funções		
A162		
A	B	C
143		
144	<b>ANO</b>	<b>IPCA (%)</b>
145	2008	=B145
146	2009	(((C145/100+1)*(B146/100+1))-1)*100
147	2010	(((C146/100+1)*(B147/100+1))-1)*100
148	2011	(((C147/100+1)*(B148/100+1))-1)*100
149	2012	(((C148/100+1)*(B149/100+1))-1)*100
150	2013	(((C149/100+1)*(B150/100+1))-1)*100
151	2014	(((C150/100+1)*(B151/100+1))-1)*100
152	2015	(((C151/100+1)*(B152/100+1))-1)*100
153	2016	(((C152/100+1)*(B153/100+1))-1)*100
154	2017	(((C153/100+1)*(B154/100+1))-1)*100
155	2018 (1)	(((C154/100+1)*(B155/100+1))-1)*100
156		
157	<b>INFLAÇÃO MÉDIA:</b>	(((C155/100+1)^(1/10))-1)*100
158		
159	Fonte: Banco Central do Bras	
160		
161	(1) Até o mês de outubro.	
162		

Fonte: o próprio autor.

Portanto, a inflação média no período foi de aproximadamente 6,4502% ao ano, o que justifica a estimativa de usar 6% ao ano pela família citada no enunciado.

Primeiro estima-se o valor da mensalidade durante os quatro anos de curso, usando a fórmula do montante composto:

$$M = C(1+i)^n$$

Substituindo os dados do problema, temos:

$$M = 1000(1+0,06)^{10} = 1790,85$$

Então a família pode contar com a estimativa de que a mensalidade será de R\$ 1.790,85, ou seja, da caderneta de poupança serão feitos saques mensais desse valor durante quatro anos, quando seu saldo zerará.

Para estimar quanto deve ser depositado mensalmente durante os próximos 10 anos, deve-se estimar qual deve ser o saldo dessa conta daqui 120 meses para bancar a mensalidade de R\$ 1.790,85. Tal saldo deve ser o valor presente

das 48 mensalidades no 120º mês a partir do início dos depósitos. Utilizamos neste caso a fórmula:

$$PV_k = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

Onde  $PV_k$  significa o valor que deve estar disponível em determinado mês, neste caso, no 120º.  $PMT$  nesta situação é o valor previsto das mensalidades. Tem-se:

$$PV_{120} = 1790,85 \times \frac{(1+0,005)^{48} - 1}{(1+0,005)^{48} \times 0,005} = 76254,96$$

Portanto, para bancar 48 meses de mensalidades retiradas desta caderneta, o recurso inicial deve ser de R\$ 76.254,96.

Agora se deve calcular o valor a ser depositado todo mês, por dez anos nesta caderneta de poupança para obter o recurso de R\$ 76.254,96, lembrando que a remuneração desta conta é de 0,50% ao mês.

A fórmula abaixo representa esta situação:

$$PMT = FV \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Onde  $PMT$  representa o valor dos depósitos que serão feitos mensalmente durante os dez anos para formar o fundo,  $FV$  representa o valor que a conta deve ter, o que foi calculado no item anterior. Daí,

$$PMT = 76254,96 \times \frac{0,005}{(1+0,005)^{120} - 1} = 465,31$$

Portanto, para obter o fundo desejado, deve-se depositar R\$ 465,31 mensalmente por 120 meses.



CALCULADORA HP12C

Uma solução usando a calculadora HP12C é:

Valor	Tecla da	Valor no visor	Observação
1000	<b>PV</b>	1.000,00	
6	<b><i>i</i></b>	6	
10	<b><i>n</i></b>	10	
	<b>FV</b>	-1.790,85	Mensalidade prevista
0	<b>PV</b>	0,00	
	<b>RCL FV</b>	-1.790,85	
	<b>PMT</b>	-1.790,85	
48	<b><i>n</i></b>	48,00	
0	<b>FV</b>	0,00	
0.5	<b><i>i</i></b>	0,50	
	<b>PV</b>	76.254,86	Saldo do fundo
0	<b>FV</b>	0,00	
	<b>RCL PV</b>	76.254,86	
	<b>FV</b>	76.254,86	
0	<b>PV</b>	0,00	
120	<b><i>n</i></b>	120,00	
	<b>PMT</b>	465,31	Depósitos mensais

Um debate presente na economia brasileira atualmente é o problema da previdência. Há basicamente dois regimes de previdência. O regime atual, chamado de regime de partilha, que consiste em, após recolhidas as contribuições retidas dos trabalhadores em folha de pagamento, dos autônomos, e parte da empresa aos cofres públicos, repassar os valores para os aposentados e pensionistas.

O problema desse sistema surge quando a razão entre aposentados, pensionistas e trabalhadores contribuintes começa a aumentar, ou seja, quando para cada aposentado ou pensionista tem se menos contribuintes. É um problema demográfico.

Já o regime de capitalização consiste em criar uma conta para cada contribuinte e capitalizar, ou seja, aplicar o recurso no mercado financeiro, até a época da aposentadoria, quando então serão feitas retiradas deste fundo individual para bancar a aposentadoria. É como funcionam os fundos de previdência complementar dos bancos privados.

Este exercício dá uma ideia elementar do funcionamento do regime de previdência por capitalização.

Feitos estes comentários, vamos ao problema 23 e uma sugestão de solução.

**PROBLEMA 23:** Desejo formar um fundo de modo que um mês após completar 60 anos eu possa começar a fazer retiradas mensais de R\$ 1.000,00 até completar 75 anos de idade, quando o fundo zerará. Por quanto tempo é necessário guardar na caderneta de poupança, que remunera o fundo à taxa de 0,50% ao mês, o valor de R\$ 500,00 para isso?

**SOLUÇÃO.**

Para encontrarmos o que se pede, temos que primeiramente calcular o valor presente do fluxo de pagamentos de R\$ 1.000,00 mensais por quinze anos no momento em que ocorre o último depósito de R\$ 500,00, ou seja, quando eu completar 60 anos. Para tal, utiliza-se a seguinte fórmula já deduzida anteriormente:

$$PV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

Substituindo os valores do problema 23, temos:

$$PV = 1000 \times \frac{(1 + 0,005)^{180} - 1}{(1 + 0,005)^{180} \times 0,005} = 118503,51$$

Ou seja, quando o último depósito de R\$ 500,00 for efetuado, no 60º aniversário, o saldo do fundo deve ser de R\$ 118.503,51.

Agora é preciso calcular por quanto tempo efetuar os depósitos de R\$ 500,00 na caderneta de poupança à taxa de 0,50% ao mês para obter esse saldo. A seguinte fórmula será utilizada:

$$FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Então, substituindo os valores, obtém-se:

$$118503,51 = 500 \times \frac{(1 + 0,005)^n - 1}{0,005}$$

O que, após algumas operações algébricas, nos leva a:

$$2,1850351 = 1,005^n$$

Aplicando logaritmos, tem-se

$$n = \frac{\log 2,1850351}{\log 1,005} \cong 157$$

Portanto, os depósitos mensais de R\$ 500,00 deverão começar cerca de 157 meses, ou seja, aproximadamente 13 anos, antes de completar 60 anos para que se tenha o mencionado fundo.



CALCULADORA HP12C

Uma solução possível utilizando a calculadora financeira HP12C é a seguinte:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
1000	<b>CHS PMT</b>	-1.000,00
0,5	<b>i</b>	0,50
180	<b>n</b>	180,00
	<b>PV</b>	118.503,51
	<b>ENTER FV</b>	118.503,51
0	<b>PV</b>	0,00
500	<b>CHS PMT</b>	-500,00
0	<b>n</b>	0,00
	<b>n</b>	157,00

O problema a seguir retoma a simulação de um financiamento pelo Sistema de Amortização constante visando uma simulação da possibilidade de guardar o dinheiro para a aquisição de um imóvel.

**PROBLEMA 24:** Voltemos à simulação de um financiamento habitacional pelo sistema de amortização constante (SAC) do capítulo de exercícios para administração. Naquele exercício o proponente do financiamento paga R\$ 25.000,00 de entrada e financia junto ao banco R\$ 100.000,00, sendo que a primeira prestação vence um mês depois, perfazendo 120 prestações. A média aritmética das prestações daquela simulação é próxima a R\$ 1.350,00. Vamos supor que o proponente resolva aplicar a entrada na caderneta de poupança e aplicar o valor médio das prestações na mesma conta mensalmente começando os depósitos um mês após depositar a entrada. Considerando que

a caderneta de poupança remunera o recurso à taxa de 0,50% ao mês, em quantos meses o proponente terá o valor do imóvel pretendido, que é de R\$ 125.000,00?

Antes de apresentar uma solução para a situação exposta, deve-se alertar que este é um exemplo que faz muitas simplificações. Por exemplo, não está sendo considerada aqui a inflação, o custo de oportunidade entre pagar aluguel e prestações de financiamento, a possibilidade de fazer o empréstimo e fazer liquidações antecipadas (usando recursos extras ou o fundo de garantia), a evolução dos preços dos imóveis (se a pessoa resolver guardar, pode ser que futuramente o valor acumulado seja menor do que o valor do imóvel), dentre outras possibilidades. Vale observar aqui, que a aquisição de financiamentos habitacionais é um assunto relacionado a muitas pessoas, da população em geral, e relacionado à educação financeira, por tratar-se de valores expressivos, cujas decisões devem ser feitas com muita cautela.

Vamos a uma solução.

**SOLUÇÃO.**

Para encontrar o tempo solicitado, deve-se considerar que a soma do valor futuro de R\$ 25.000,00 e do valor futuro da série de depósitos de R\$ 1.350,00 deve ser R\$ 125.000,00. Portanto tem-se:

$$25000(1 + 0,005)^n + \frac{(1 + 0,005)^n - 1}{0,005} \times 1350 = 125000.$$

Após manipulações algébricas, obtém-se:

$$1,005^n = 1,338983.$$

Daí:

$$n = \frac{\log 1,338983}{\log 1,005} = 58,52790798 \cong 59.$$

Ou seja, o valor de R\$ 125.000,00 será obtido em, aproximadamente, 59 meses, ou seja, 4 anos e 11 meses.



## CALCULADORA HP12C

Uma solução utilizando a calculadora financeira HP12C é dada a seguir:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
25000	<b>CHS</b>	-25.000,00
	<b>PV</b>	-25.000,00
1350	<b>CHS</b>	-1.350,00
	<b>PMT</b>	-1.350,00
0,5	<b><i>i</i></b>	0,50
125000	<b>FV</b>	125.000,00
	<b><i>n</i></b>	59

Nos problemas anteriores a caderneta de poupança foi mencionada várias vezes por ser o tipo de aplicação financeira mais popular no Brasil. Mas desde 2002 o Tesouro Nacional, em convênio com a Bolsa de Valores BM&F Bovespa, tem empreendido esforços em popularizar a aplicação em títulos públicos. Hoje é possível pelo portal do Tesouro Direto na *internet*, fazer aplicações em títulos públicos a partir de R\$ 30,00. Os tipos de títulos disponíveis para aplicação no Tesouro Direto são os títulos prefixados, os títulos prefixados com juros semestrais, os títulos com correção pela inflação mais determinada rentabilidade, os títulos com correção pela inflação mais determinada rentabilidade com juros semestrais e os títulos com rentabilidade baseada na taxa SELIC (Sistema Eletrônico de Liquidação e Custódia). Pesquisas do Tesouro Nacional mostra que aplicações em títulos públicos podem apresentar rentabilidade líquida (ou seja, já descontados o imposto de renda e taxas de administração) superior à da caderneta de poupança. No Tesouro Direto é possível comprar frações de 1% de um título. Os seguintes problemas ilustram algumas operações típicas com títulos no Tesouro Direto.

**PROBLEMA 25:** André compra um título prefixado do governo e receberá daqui um ano R\$ 1.000,00 por esse título. A taxa de juros contratada na ocasião foi de 10% ao ano. Qual o preço unitário (PU) deste título no momento da compra?

**SOLUÇÃO.**

As fórmulas mais utilizadas para cálculos envolvendo títulos públicos são as seguintes, vistas anteriormente:

Fórmula para cálculo do valor líquido (ou valor presente) de um título no âmbito de desconto composto (fórmula de Leibniz), fórmula (13):

$$PV = \frac{N}{(1+i)^n}$$

PV significa valor presente ou valor líquido,  $N$  significa valor nominal, isto é, valor de face de um título.

Fórmula para cálculo de taxas equivalentes (fórmula 12):

$$\left[ \left( \frac{\text{taxa}}{100} + 1 \right)^{\frac{PQ}{PT}} - 1 \right] \times 100$$

Para o problema em questão, o cálculo do valor unitário do título será:

$$PU = \frac{1000}{(1+0,1)} = 909,09$$

Portanto, o preço que André pagou pelo título foi de R\$ 909,09.

Ocorre que, uma operação real com títulos do governo, leva em consideração em seus cálculos os dias úteis entre duas datas para calcular o preço unitário. O problema 26 utiliza dados reais do portal do Tesouro Direto e ilustra esse cálculo.

**PROBLEMA 26:** André consultou o portal do Tesouro Direto em 24/01/2019 para consultar títulos públicos à venda. Dentre os que encontrou, optou por uma Letra do Tesouro Nacional (LTN) prefixada, com vencimento em 01/01/2021, quando venderá o título por R\$ 1.000,00, cuja taxa de rendimento informada era de 7,20% ao ano. Nestas condições, calcule o preço unitário deste título em 24/01/2019.

## SOLUÇÃO.

Para calcular o preço solicitado, deve-se levar em consideração que o ano tem 252 dias úteis e que entre 21/01/2019 e 01/01/2021 há 487 dias úteis. Então o preço unitário (PU) solicitado será calculado assim:

$$PU = \frac{1000}{(1 + 0,072)^{\frac{487}{252}}} = 874,27$$

Portanto o preço unitário do título comprado por André foi de R\$ 874,27.



CALCULADORA HP12C

Uma solução utilizando a calculadora financeira HP12C é dada a seguir:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
1000	<b>ENTER</b>	1.000,00
1	<b>ENTER</b>	1
0,072	<b>+</b>	1,072
252	<b>1/x</b>	0,00396825
	<b>y<sup>x</sup></b>	1,00027594
487	<b>y<sup>x</sup></b>	1,14380658
	<b>÷</b>	874,2736883

Quando ocorre o resgate de um título do Tesouro Direto, incide sobre o rendimento o imposto de renda e uma taxa de custódia. Então, nesse instante, é interessante calcular a rentabilidade líquida após taxas e imposto de renda. É o que se pretende calcular com o problema 27:

**PROBLEMA 27:** No que diz respeito ao problema anterior, quando André vender o título em questão, sobre o rendimento incidirá 17,50% de imposto de renda e uma taxa de custódia de R\$ 5,42. Calcule a rentabilidade líquida após taxas e imposto de renda ao ano.

## SOLUÇÃO.

O valor do rendimento bruto será:

$$1000 - 874,27 - 5,42 = 120,31$$

O valor do imposto de renda é:

$$120,31 \times 17,5\% = 21,05$$

Portanto, o rendimento líquido é:

$$120,31 - 21,05 = 99,26$$

E o cálculo da rentabilidade líquida de todo o período é:

$$\frac{99,26}{874,27} = \frac{x}{100}$$

$$x = 11,353472$$

Ou seja, a rentabilidade para 487 dias úteis será de 11,353472%. A rentabilidade ao ano, como solicitada, deve ser a rentabilidade para 252 dias úteis, o que pode ser obtido da seguinte forma:

$$\left[ \left( \frac{11,353472}{100} + 1 \right)^{\frac{252}{487}} - 1 \right] \times 100 = 5,7223935$$

Portanto a rentabilidade deste título será, no vencimento, de 5,722406% ao ano.



CALCULADORA HP12C

O cálculo da expressão anterior com a calculadora financeira HP12C é dada a seguir:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
11,353472	<b>ENTER</b>	11,353472
100	<b>÷</b>	0,11353472
1	<b>+</b>	1,11353472
487	<b>1/x</b>	0,00205339
	<b>y<sup>x</sup></b>	1,00022084
252	<b>y<sup>x</sup></b>	1,05722394
1	<b>-</b>	0,05722394
100	<b>X</b>	5,7223935

A figura 42 apresenta uma simulação de uma operação com esse título público feito no portal do Tesouro Direto. Há aqui algumas diferenças de centavos decorrentes de arredondamentos.

*Figura 42: Preço Unitário (PU) de um título do Governo Federal*

<b>RESULTADO DA SIMULAÇÃO</b>	
<b>Título: Tesouro Prefixado (LTN)</b>	
Dias corridos entre a data de compra e a de vencimento:	707
Dias corridos entre a data de compra e a de venda:	707
Dias úteis entre a data de compra e a de vencimento:	487
Dias úteis entre a data de compra e a de venda:	487
Valor investido líquido:	R\$ 874,51
Rentabilidade bruta (a.a.):	7,20%
Taxa de Negociação (0,0%):	R\$ 0,00
Taxa de administração na entrada:	R\$ 0,00
Valor investido bruto:	R\$ 874,51
Valor bruto do resgate:	R\$ 1.000,27
Valor da taxa de custódia do resgate:	R\$ 5,42
Valor da taxa de administração do resgate:	R\$ 0,00
Alíquota média de imposto de renda:	17,50%
Imposto de renda:	R\$ 21,06
Valor líquido do resgate:	R\$ 973,79
Rentabilidade líquida após taxas e I.R. (a.a.):	5,72%

Fonte: <https://www.tesouro.gov.br/web/stn/tesouro-direto-calculadora>, consultado em 24/01/2019.

Vamos abordar no problema 28 sobre títulos públicos que pagam cupons semestrais. Este tipo de título é recomendado para quem quer ter uma renda semestral sobre o valor aplicado.

**PROBLEMA 28:** André adquiriu um título público com valor de face de R\$ 1.000,00, que paga juros semestrais e que vence daqui dois anos. Pelas regras vigentes do tesouro direto, o valor dos juros semestrais é calculado considerando a taxa equivalente semestral da taxa de 10% ao ano que deve ser aplicada sobre o valor de face do título. Aqui vamos considerar que os pagamentos dos cupons semestrais ocorrerão 120, 248, 372 e 499 dias úteis após a compra do título. Calcule o preço unitário (PU) deste título, considerando a taxa contratada de 8% ao ano.

**SOLUÇÃO.**

Primeiramente calcula-se a taxa equivalente ao semestre da taxa de 10% ao ano, assim,

$$\left[ \left( \frac{10}{100} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \times 100 \cong 4,88$$

O que significa que 10% ao ano é equivalente a 4,88% ao semestre. Portanto o valor do cupom de juros semestrais será de:

$$1000 \times 4,88\% = 48,80$$



**CALCULADORA HP12C**

Com uso da calculadora HP12C, tem-se:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
10	<b>ENTER</b>	10
100	<b>÷</b>	0,1
1	<b>+</b>	1,1
2	<b>1/x</b>	0,5
	<b>y<sup>x</sup></b>	1,04880885
1	<b>-</b>	0,04880885
100	<b>X</b>	4,8808848

Agora o cálculo do preço unitário (PU) será efetuado pela expressão:

$$PU = \frac{48,80}{(1 + 0,08)^{\frac{120}{252}}} + \frac{48,80}{(1 + 0,08)^{\frac{248}{252}}} + \frac{48,80}{(1 + 0,08)^{\frac{372}{252}}} + \frac{1048,80}{(1 + 0,08)^{\frac{499}{252}}} = 1036,39$$

Portanto, o preço de compra do título é de R\$ 1.036,39.



CALCULADORA HP12C

Uma possível solução desta expressão na HP12C é a seguinte:

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
1,08	<b>ENTER</b>	1,08
252	<b>1/x</b>	0,00396825
	<b>y<sup>x</sup></b>	1.00030545
	<b>STO 1</b>	1,00030545
120	<b>y<sup>x</sup></b>	1,03732799
	<b>1/x</b>	0,96401525
	<b>RCL 1</b>	1.00030545
	<b>ENTER</b>	1,00030545
248	<b>y<sup>x</sup></b>	1,07868158
	<b>1/x</b>	0,92705764
	<b>+</b>	1,89107289
	<b>RCL 1</b>	1,00030545
	<b>ENTER</b>	1,00030545
372	<b>y<sup>x</sup></b>	1,12031434
	<b>1/x</b>	0,89260662
	<b>+</b>	2,78367952
	<b>RCL 1</b>	1,00030545
	<b>ENTER</b>	1,00030545
499	<b>y<sup>x</sup></b>	1,16462050
	<b>1/x</b>	0,85864881
	<b>STO 2</b>	0,85864881
	<b>+</b>	3,64232832
48,8	<b>X</b>	177,7456222
1000	<b>ENTER</b>	1.000,00
	<b>RCL 2</b>	0,85864881
	<b>X</b>	858,6488082
	<b>+</b>	1.036,39443

O problema 29 trata de uma situação muito comum na vida de cada cidadão inclusive, que é a divisão em partes proporcionais de quantias de dinheiro. Esta divisão ocorre também em empresas, como na distribuição de lucros entre os sócios, por exemplo.

PROBLEMA 29: Carla e Luciana abrem uma cantina de sucos, salgados e doces. Investiram no negócio R\$ 20.000,00, sendo que Carla entrou na sociedade com R\$ 7.000,00 e Luciana com R\$ 13.000,00. Após determinado tempo de trabalho, o negócio gerou lucro de R\$ 8.000,00, a ser dividido entre as sócias. Quanto deve Carla e Luciana receber, considerando uma divisão proporcional ao capital de cada uma?

SOLUÇÃO.

Como a ideia deste problema é trabalhar com proporção, vamos usar a seguinte propriedade de proporções:

Se  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , com  $b \neq 0$ ,  $d \neq 0$  e  $b + d \neq 0$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , então  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  e

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Uma demonstração desta propriedade pode ser a seguinte:

Como por hipótese  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , segue que  $ad = bc$ . Adicionando a ambos os lados desta equação o termo  $cd$ , obtemos  $ad + cd = bc + cd$ . Segue, então, que  $(a+c)d = (b+c)c$ . Desta última expressão obtemos que  $\frac{a+c}{b+c} = \frac{c}{d}$ . Agora, adicionando  $ab$  a ambos os lados de  $ad = bc$  teremos  $ad + ab = bc + ab$ . Daí,  $(d+b)a = (c+a)b$ . Assim, obtemos que  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ , como queríamos demonstrar.

Para resolver o problema 29 utilizamos esta propriedade, seja  $C$  a parte do lucro que cabe a Carla e  $L$  a parte do lucro que cabe a Luciana. Então tem-se:

$$\frac{C}{7000} = \frac{L}{13000}.$$

Aplicando a propriedade demonstrada acima a esta proporção, obtém-se:

$$\frac{C+L}{7000+13000} = \frac{C}{7000} = \frac{L}{13000}.$$

Como  $C + L = 8000$ , temos:

$$\frac{8000}{20000} = \frac{C}{7000} = \frac{L}{13000}.$$

Simplificando, pode-se escrever:

$$\frac{2}{5} = \frac{C}{7000} = \frac{L}{13000}.$$

Então, para encontrar a parte do lucro que cabe a cada sócia, deve-se resolver:

$$\frac{C}{7000} = \frac{2}{5} \quad \text{e} \quad \frac{L}{13000} = \frac{2}{5}.$$

Da primeira expressão, tem-se:

$$5C = 14000.$$

Portanto,  $C = \frac{14000}{5} = 2800$ , ou seja, a Carla cabe o valor de R\$ 2.800,00.

Da segunda expressão, tem-se:

$$5L = 26000.$$

Portanto,  $L = \frac{26000}{5} = 5200$ , ou seja, a Luciana cabe o valor de R\$ 5.200,00.

Note que  $2.800,00 + 5.200,00 = 8.000,00$ , valor do lucro obtido.

Com esta solução terminamos esta seção de problemas para o Curso Técnico em Contabilidade.

### 3.5 PROBLEMAS PARA O CURSO TÉCNICO EM SECRETARIADO

Iniciamos com um problema típico de Matemática Financeira que está presente em várias situações de uma empresa. Em secretariado é frequente o trabalho com valores, em geral envolvendo proporção.

**PROBLEMA 30:** Um cálculo rotineiro em uma empresa é o de variação percentual entre dois valores. Por exemplo, uma matéria-prima cujo preço tem peso substancial nos custos de uma empresa de logística é o óleo diesel. Então a empresa acompanha a todo o momento as oscilações do mesmo. Se em determinada data o preço do diesel passou de R\$ 3,29 para R\$ 3,59, calcule a variação percentual deste aumento.

**SOLUÇÃO.**

O problema acima pede a variação percentual entre dois valores. É preciso que se esclareça que fazer esse cálculo significa encontrar o quanto a diferença entre esses dois valores em relação ao valor inicial equivaleria se o valor inicial fosse cem. Trata-se, portanto, de um problema que envolve regra de três simples e que nos dá um procedimento para o cálculo com uso de calculadora ou planilha de cálculo. Assim, a solução será:

$$\frac{3,59 - 3,29}{3,29} = \frac{x}{100}$$

De onde segue que

$$\frac{0,30}{3,29} = \frac{x}{100}$$

Ou ainda,

$$3,29x = 0,30 \times 100$$

O que resulta em:

$$x = \frac{0,30}{3,29} \cdot 100$$

Portanto,  $x = 9,12$ . O que significa que a variação foi de aproximadamente 9,12%.

**PROBLEMA 31:** Em determinado dia o funcionário de uma casa de câmbio informou para um cliente que com R\$ 17.000,00 era possível comprar € 3.977,35. Para outro cliente informou que com R\$ 9.000,00 era possível comprar US\$ 2.407,38. Naquele dia qual era a cotação do euro em relação ao dólar?

**SOLUÇÃO.**

Este problema envolve regra de três simples, e uma solução possível é descrita a seguir. Inicialmente, calcula-se a cotação do dólar em reais. A tabela 12 mostra a cotação segundo o problema:

Tabela 12: Câmbio entre real e dólar

R\$	US\$
9.000,00	2.407,38
x	1

Isto nos dá que:

$$x = \frac{9000}{2407,38} = 3,7385$$

Ou seja, era necessário R\$ 3,74 para comprar um dólar.

Agora calcula-se a cotação do euro em reais, conforme mostra a tabela 13.

Tabela 13: Câmbio entre Real e Euro

R\$	€
17.000,00	3.977,35
y	1

Que resulta em:

$$y = \frac{17000}{3977,35} = 4,2742$$

Ou seja, era necessário R\$ 4,2742 para comprar um Euro.

Para saber a cotação do euro em dólar, faz-se a divisão:

$$Cotação = \frac{4,2742}{3,7385} = 1,1433$$

O que significa que era necessário US\$ 1,14 para comprar € 1,00.

Para entender melhor essa cotação, elaboramos a tabela 14 com as três moedas.

Tabela 14: Câmbio entre Real, Euro e Dólar

€	R\$	US\$
1	4,2742	w
z	3,7385	1

Utilizando a tabela para o cálculo de w, usando a 2ª e 3ª colunas:

$$w = \frac{4,2742}{3,7385} = 1,1433$$

Encontra-se a cotação solicitada, ou seja, deve-se calcular quantos dólares que R\$ 4,27 compra e logo essa mesma quantidade comprará um euro. Calculando-se z, usando a 1ª e 2ª colunas, encontra-se a cotação do dólar em euro, que é

$$z = \frac{3,7385}{4,2742} = 0,8746$$

### 3.6 ALGUNS PROBLEMAS SOBRE TRATAMENTO DE INFORMAÇÃO

Nos Cursos Técnicos Subsequentes do eixo tecnológico gestão e negócios os conteúdos de Estatística são iguais. A maior ênfase é dada em construir e analisar tabelas estatísticas, montar tabelas de distribuição de frequências e confeccionar e analisar gráficos estatísticos. Para um curso como este é ideal também trabalhar os conteúdos com uso de planilha de cálculo. Segue, portanto, uma sugestão de exercício.

No biênio 2008-2009 o IBGE fez uma ampla pesquisa sobre orçamentos familiares com participação do Banco Mundial. Todo o material pode ser obtido no sítio do IBGE.

A tabela 15 constante daquela publicação é mostrada com os dados levantados:

*Tabela 15: Despesas médias mensais familiares*

**Tabela 1.1.10 - Despesas de consumo monetária e não monetária média mensal familiar, por tipos de despesa, segundo a situação do domicílio, as Grandes Regiões e as Unidades da Federação - período 2008-2009**

Situação do domicílio, Grandes Regiões e Unidades da Federação	Despesas de consumo monetária e não monetária média mensal familiar (R\$)											
	Total	Tipos de despesa										
		Alimen- tação	Habi- tação	Ves- tuário	Trans- porte	Higiene e cuidados pessoais	Assis- tência à saúde	Edu- cação	Recrea- ção e cultura	Fumo	Serviç os perso ais	Despe- sas diversas
<b>Brasil</b>	<b>2 134,77</b>	<b>421,72</b>	<b>765,89</b>	<b>118,22</b>	<b>419,19</b>	<b>51,02</b>	<b>153,81</b>	<b>64,81</b>	<b>42,76</b>	<b>11,62</b>	<b>23,85</b>	<b>61,87</b>
<b>Situação do domicílio</b>												
Urbana	2 303,56	437,45	838,24	127,27	450,28	54,69	167,58	73,89	47,85	12,29	26,70	67,32
Rural	1 220,14	336,48	373,88	69,18	250,75	31,10	79,19	15,63	15,19	8,00	8,38	32,35
<b>Norte</b>	<b>1 683,87</b>	<b>434,05</b>	<b>565,43</b>	<b>124,88</b>	<b>277,48</b>	<b>60,00</b>	<b>82,22</b>	<b>39,59</b>	<b>32,78</b>	<b>6,87</b>	<b>17,93</b>	<b>42,63</b>
Rondonia	1 866,38	357,82	644,07	144,33	370,93	53,52	125,10	53,33	33,53	5,47	19,66	58,64

Acre	1 678,53	445,25	512,66	135,99	276,93	60,13	111,63	48,72	30,23	7,56	16,92	32,52
Amazonas	1 602,12	447,07	583,38	104,33	254,20	60,51	41,54	16,34	29,83	8,51	14,85	41,56
Roraima	1 433,30	282,73	589,47	92,74	241,11	59,28	67,21	19,87	27,03	5,78	14,05	34,03
Pará	1 662,07	464,96	533,86	127,48	242,70	60,34	86,27	45,23	35,98	6,39	18,81	40,05
Amapá	2 050,02	458,23	668,83	193,14	366,38	95,26	86,87	57,54	43,17	7,32	23,96	49,32
Tocantins	1 672,91	373,42	557,38	109,73	361,52	50,09	90,62	41,76	21,13	7,01	17,57	42,68
<b>Nordeste</b>	<b>1 427,13</b>	<b>345,89</b>	<b>467,76</b>	<b>93,36</b>	<b>259,31</b>	<b>44,46</b>	<b>93,15</b>	<b>40,03</b>	<b>26,18</b>	<b>6,25</b>	<b>15,89</b>	<b>34,84</b>
Maranhão	1 206,64	293,99	421,21	76,91	205,72	36,13	71,92	31,25	19,26	6,74	12,80	30,71
Piauí	1 398,94	388,11	409,38	97,78	231,98	49,80	99,37	48,22	25,45	6,38	13,87	28,59
Ceará	1 248,31	340,98	395,56	73,76	222,92	42,57	69,95	31,58	22,63	8,37	12,34	27,65
Rio Grande do Norte	1 438,31	375,34	471,42	87,65	246,13	47,90	88,82	38,21	26,65	9,39	15,09	31,71
Paraíba	1 444,88	348,89	462,06	90,82	278,55	50,01	91,89	37,86	23,18	6,80	16,17	38,65
Pernambuco	1 468,15	330,05	484,92	120,86	226,34	49,15	110,99	48,06	35,74	5,21	19,05	37,77
Alagoas	1 064,60	228,25	403,23	69,67	178,27	33,47	76,31	28,36	15,31	3,99	11,80	15,93
Sergipe	1 542,57	408,43	477,79	95,83	271,22	50,20	96,82	60,66	30,50	5,88	18,00	27,25
Bahia	1 648,06	379,72	540,78	99,04	340,68	44,09	106,26	42,06	27,42	5,23	18,20	44,58
<b>Sudeste</b>	<b>2 529,30</b>	<b>464,04</b>	<b>939,70</b>	<b>124,23</b>	<b>492,20</b>	<b>52,83</b>	<b>198,89</b>	<b>85,81</b>	<b>53,28</b>	<b>15,07</b>	<b>30,16</b>	<b>73,10</b>
Minas Gerais	2 075,22	380,83	752,48	121,82	411,15	46,49	150,50	65,33	45,82	11,38	24,78	64,64
Espírito Santo	2 044,59	345,50	819,45	106,04	430,82	46,25	140,23	40,91	33,41	8,10	23,55	50,33
Rio de Janeiro	2 667,83	476,78	102,74 <sup>1</sup>	110,76	461,59	50,01	213,65	90,73	53,63	13,16	31,49	63,31
São Paulo	2 728,59	508,11	972,82	132,29	547,81	57,50	220,72	97,25	58,31	18,16	32,71	82,91
<b>Sul</b>	<b>2 444,16</b>	<b>451,75</b>	<b>856,39</b>	<b>145,39</b>	<b>536,03</b>	<b>53,10</b>	<b>170,74</b>	<b>61,48</b>	<b>49,53</b>	<b>14,02</b>	<b>21,88</b>	<b>83,86</b>
Paraná	2 282,69	415,61	794,06 <sup>1</sup>	136,40	526,75	49,96	171,78	49,34	40,37	10,05	20,61	67,76
Santa Catarina	2 804,09	471,38	003,24	164,92	667,45	58,52	162,91	74,43	59,85	14,76	24,99	101,65
Rio Grande do Sul	2 395,07	474,06	833,11	142,93	472,69	53,02	174,07	65,49	52,26	17,23	21,33	88,87
<b>Centro-Oeste</b>	<b>2 056,05</b>	<b>364,66</b>	<b>779,00</b>	<b>107,74</b>	<b>435,89</b>	<b>50,73</b>	<b>130,73</b>	<b>57,56</b>	<b>33,95</b>	<b>9,46</b>	<b>23,92</b>	<b>62,40</b>
Mato Grosso do Sul	1 946,80	368,15	704,04	107,33	405,63	52,17	140,78	49,74	32,28	7,35	20,62	58,70
Mato Grosso	1 593,96	303,18	618,72	90,43	333,65	48,19	85,60	23,99	20,38	8,23	16,80	44,79
Goiás	1 919,25	342,92	708,25 <sup>1</sup>	98,40	419,13	44,25	127,60	57,81	32,70	10,66	24,28	53,25
Distrito Federal	3 068,47	490,62	221,90	152,28	633,18	68,13	185,09	106,43	55,52	10,12	35,16	110,05

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa de Orçamentos Familiares 2008-2009.

Notas: 1. O termo família está sendo utilizado para indicar a unidade de investigação da pesquisa, unidade de consumo, conforme descrito na introdução da publicação.

2. Médias obtidas segundo o número de famílias de cada área considerada.

Com base nesta tabela, pede-se:

**PROBLEMA 32:** Para todo o Brasil, para cada uma das regiões e em particular, para o estado do Paraná, calcule os percentuais de cada item em relação ao correspondente total. Use uma planilha de cálculo.

**SOLUÇÃO.**

Para este exercício, o ideal é fornecer a planilha da qual foi extraída a tabela, que está também disponível na página do IBGE. Assim, as (os) estudantes podem copiar dela os dados solicitados para uma nova planilha e fazer os cálculos solicitados. Uma possibilidade seria apresentada na figura 43:

Figura 43: Percentuais de itens de consumo em relação à renda total

C22													
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Tabela 1.1.10 - Despesas de consumo monetária e não monetária média mensal familiar,												
2	por tipos de despesa, segundo a situação do domicílio, as Grandes Regiões												
3	e as Unidades da Federação - período 2008-2009												
4													
5	Despesas de consumo monetária e não monetária média mensal familiar (R\$)												
6	Situação do domicílio, Grandes Regiões e Unidades da Federação	Total	Tipos de despesa										
7			Alimentação	Habitacão	Vestutário	Transporte	Higiene e cuidados pessoais	Assistncia à saúde	Educaão	Recreação e cultura	Fumo	Serviços pessoais	Despesas diversas
8	Brasil	2 134,77	421,72	765,89	118,22	419,19	51,02	153,81	64,81	42,76	11,62	23,85	61,87
9	Percentuais		19,75%	35,88%	5,54%	19,64%	2,39%	7,20%	3,04%	2,00%	0,54%	1,12%	2,90%
10	Norte	1 683,87	434,05	565,43	124,88	277,48	60,00	82,22	39,59	32,78	6,87	17,93	42,63
11	Percentuais		25,78%	33,58%	7,42%	16,48%	3,56%	4,88%	2,35%	1,95%	0,41%	1,06%	2,53%
12	Nordeste	1 427,13	345,89	467,76	93,36	259,31	44,46	93,15	40,03	26,18	6,25	15,89	34,84
13	Percentuais		24,24%	32,78%	6,54%	18,17%	3,12%	6,53%	2,80%	1,83%	0,44%	1,11%	2,44%
14	Sudeste	2 529,30	464,04	939,70	124,23	492,20	52,83	198,89	85,81	53,28	15,07	30,16	73,10
15	Percentuais		18,35%	37,15%	4,91%	19,46%	2,09%	7,86%	3,39%	2,11%	0,60%	1,19%	2,89%
16	Sul	2 444,16	451,75	856,39	145,39	536,03	53,10	170,74	61,48	49,53	14,02	21,88	83,86
17	Percentuais		18,48%	35,04%	5,95%	21,93%	2,17%	6,99%	2,52%	2,03%	0,57%	0,90%	3,43%
18	Paraná	2 282,69	415,61	794,06	136,40	526,75	49,96	171,78	49,34	40,37	10,05	20,61	67,76
19	Percentuais		18,21%	34,79%	5,98%	23,08%	2,19%	7,53%	2,16%	1,77%	0,44%	0,90%	2,97%
20	Centro-Oeste	2 056,05	364,66	779,00	107,74	435,89	50,73	130,73	57,56	33,95	9,46	23,92	62,40
21	Percentuais		17,74%	37,89%	5,24%	21,20%	2,47%	6,36%	2,80%	1,65%	0,46%	1,16%	3,03%
22													

Fonte: o próprio autor.

A mesma planilha com as fórmulas utilizadas é apresentada na figura 44:

Figura 44: Fórmula para cálculo de percentuais da renda

C22													
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Tabela 1.1.10 - Despesas de consumo monetária e não monetária média mensal familiar,												
2	por tipos de despesa, segundo a situação do domicílio, as Grandes Regiões												
3	e as Unidades da Federação - período 2008-2009												
4													
5	Despesas de consumo monetária e não monetária média mensal familiar (R\$)												
6	Situação do domicílio, Grandes Regiões e Unidades da Federação	Total	Tipos de despesa										
7			Alimentação	Habitacão	Vestutário	Transporte	Higiene e cuidados pessoais	Assistncia à saúde	Educaão	Recreação e cultura	Fumo	Serviços pessoais	Despesas diversas
8	Brasil	2134,77	421,72	765,89	118,22	419,19	51,02	153,81	64,81	42,76	11,62	23,85	61,87
9	Percentuais		=C8/SBS8	=D8/SBS8	=E8/SBS8	=F8/SBS8	=G8/SBS8	=H8/SBS8	=I8/SBS8	=J8/SBS8	=K8/SBS8	=L8/SBS8	=M8/SBS8
10	Norte	1683,87	434,05	565,43	124,88	277,48	60	82,22	39,59	32,78	6,87	17,93	42,63
11	Percentuais		=C10/SBS10	=D10/SBS10	=E10/SBS10	=F10/SBS10	=G10/SBS10	=H10/SBS10	=I10/SBS10	=J10/SBS10	=K10/SBS10	=L10/SBS10	=M10/SBS10
12	Nordeste	1427,13	345,89	467,76	93,36	259,31	44,46	93,15	40,03	26,18	6,25	15,89	34,84
13	Percentuais		=C12/SBS12*100	=D12/SBS12*100	=E12/SBS12*100	=F12/SBS12*100	=G12/SBS12*100	=H12/SBS12*100	=I12/SBS12*100	=J12/SBS12*100	=K12/SBS12*100	=L12/SBS12*100	=M12/SBS12*100
14	Sudeste	2529,3	464,04	939,7	124,23	492,2	52,83	198,89	85,81	53,28	15,07	30,16	73,1
15	Percentuais		=C14/SBS14*100	=D14/SBS14*100	=E14/SBS14*100	=F14/SBS14*100	=G14/SBS14*100	=H14/SBS14*100	=I14/SBS14*100	=J14/SBS14*100	=K14/SBS14*100	=L14/SBS14*100	=M14/SBS14*100
16	Sul	2444,16	451,75	856,39	145,39	536,03	53,1	170,74	61,48	49,53	14,02	21,88	83,86
17	Percentuais		=C16/SBS16%	=D16/SBS16%	=E16/SBS16%	=F16/SBS16%	=G16/SBS16%	=H16/SBS16%	=I16/SBS16%	=J16/SBS16%	=K16/SBS16%	=L16/SBS16%	=M16/SBS16%
18	Paraná	2282,69	415,61	794,06	136,4	526,75	49,96	171,78	49,34	40,37	10,05	20,61	67,76
19	Percentuais		=C18/SBS18	=D18/SBS18	=E18/SBS18	=F18/SBS18	=G18/SBS18	=H18/SBS18	=I18/SBS18	=J18/SBS18	=K18/SBS18	=L18/SBS18	=M18/SBS18
20	Centro-Oeste	2056,05	364,66	779	107,74	435,89	50,73	130,73	57,56	33,95	9,46	23,92	62,4
21	Percentuais		=C20/SBS20	=D20/SBS20	=E20/SBS20	=F20/SBS20	=G20/SBS20	=H20/SBS20	=I20/SBS20	=J20/SBS20	=K20/SBS20	=L20/SBS20	=M20/SBS20
22													
23													

Fonte: o próprio autor.

Ressaltasse que o professor poderá comentar sobre as diferentes formas de digitar as fórmulas na planilha de cálculo.

Por exemplo, os percentuais em azul, referentes ao Brasil e regiões Norte e Centro-oeste e estado do Paraná, a fórmula utilizada foi a mesma. Por exemplo, no caso do Brasil, a fórmula para o cálculo do primeiro percentual referente ao item alimentação, aparece na barra de fórmulas:

=C8/\$B\$8 ou seja,  $\frac{421}{2134,77}$ .

E o resultado apresentado é 19,75%.

Neste caso, a fórmula e a formatação do resultado foram feitos assim:

Na célula onde aparece esse resultado, C9, começou-se digitando =, em seguida clicou-se sobre o valor do item alimentação, de forma que na barra de fórmulas aparece o endereço daquele valor, C8. Em seguida, digitou-se a /, que é o sinal de dividir e clicou-se sobre o item total, em B8. Como esse item será o mesmo que será utilizado para o cálculo dos percentuais dos outros itens copiando a fórmula para os mesmos (CTRL C, CTRL V) fixou-se esse item pressionando F4 após a seleção daquela célula que passou a ser \$B\$8 na fórmula. Após isto, é necessário configurar essa célula como porcentagem.

Já no caso da região Nordeste, a célula está formatada para número com duas casas decimais e a fórmula foi:

=C12/\$B\$12\*100

E no resultado apresentado não aparece o símbolo de porcentagem.

No caso da região Sudeste, a fórmula segue o mesmo estilo da anterior, mas agora aparece o símbolo de porcentagem que foi obtido criando-se um formato personalizado. Para isso, pede-se na caixa de diálogo “formatar célula” o formato personalizado, e cria-se (a não ser que já exista) um formato “0,00%”.

No caso da região Sul, a fórmula foi:

=C16/\$B\$16%

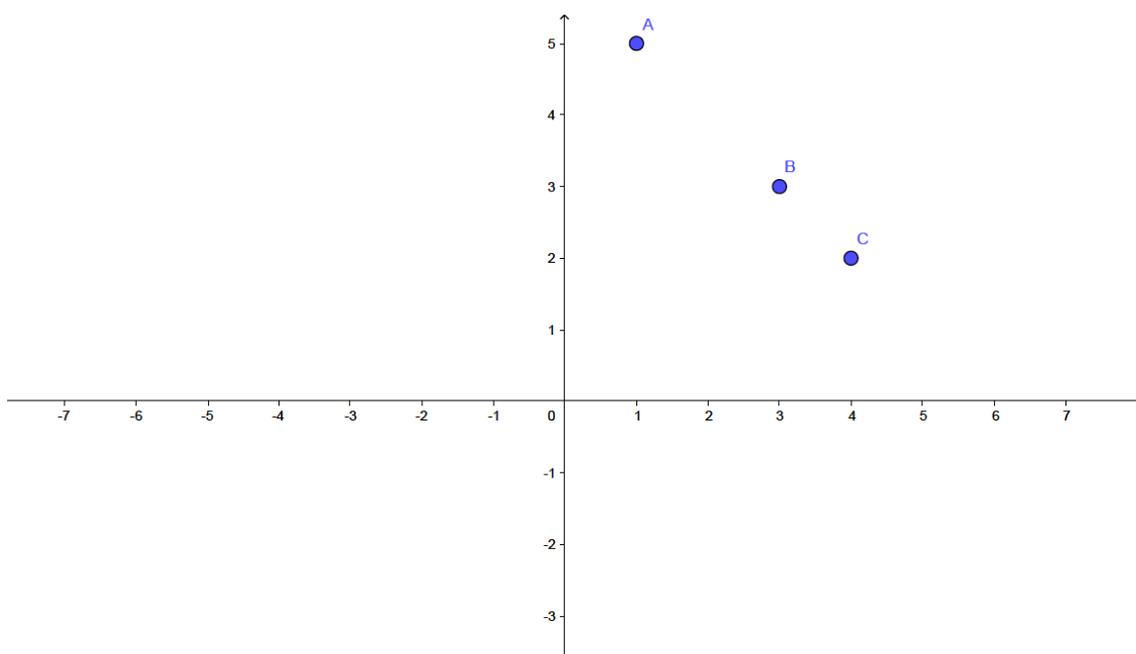
**PROBLEMA 33:** Para o Brasil, para cada uma das regiões e para o estado do Paraná, construa gráficos de barras e gráficos de setores com uso de planilha de cálculo mostrando a distribuição das despesas médias segundo os itens apresentados, para os valores absolutos e relativos.

**SOLUÇÃO.**

Para essa questão pode ser interessante retomar com as/os estudantes o conceito de gráficos de funções, ainda que, com um exemplo elementar. É interessante resgatar conceitos como o sistema de coordenadas cartesianas. Além disso, como é usual a apresentação de dados em uma tabela e em gráficos, isto pode ser retomado construindo gráficos diversos, como os de barras, de linha ou setores, manualmente no caderno. Após construir alguns gráficos usando esses conceitos, é instrutivo construí-los com uso de planilha de cálculo. A seguir apresenta-se um recorte destes assuntos.

Considere duas retas em um plano que se intersectam perpendicularmente em um ponto  $O$ , denominado a origem do sistema conforme mostra a figura 45:

Figura 45: O plano cartesiano



O eixo OX horizontal é chamado de primeira coordenada ou abcissa. O eixo OY, orientado para cima é a segunda coordenada ou ordenada. A partir da origem subdivide-se as retas em partes iguais tomando um segmento de medida  $u$  como unidade.

Tendo escolhido o sistema de eixos é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais do conjunto  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ .

A título de exemplo, tem-se no sistema acima, figura 45, os pontos (1, 5), (3, 3) e (4, 2).

Para a elaboração do gráfico de setores, é interessante comentar sobre a conversão dos valores em graus para serem colocados na circunferência com auxílio do transferidor.

Assim, para a tabela de despesas médias do IBGE para o Brasil, tabela 15, a conversão do item “alimentação” em graus, e de mesma forma para os outros, é feita resolvendo a regra de três simples:

$$\frac{421,72}{2.134,77} = \frac{x}{360}$$

O que resulta em

$$2.134,77x = 421,72 \times 360$$

$$x = \frac{421,72 \times 360}{2.134,77}$$

$$x = \frac{151.819,2}{2.134,77}$$

$$x = 71,12$$

Então, no gráfico de setores, o item alimentação será representado por um ângulo de 71,12°.

Para gerar os gráficos com a planilha de cálculo, basta selecionar os dados desejados e utilizar a ferramenta de gráfico. Nas figuras 46, 47, 48, 49 e 50 apresenta-se uma sequência de passos para gerar os gráficos de barras e de setores:

Figura 46: Dados para geração de um gráfico

Tabela 1.1.10 - Despesas de consumo monetária e não monetária média mensal familiar, por tipos de despesa, segundo a situação do domicílio, as Grandes Regiões e as Unidades da Federação - período 2008-2009													
Situação do domicílio, Grandes Regiões e Unidades da Federação	Despesas de consumo monetária e não monetária média mensal familiar (R\$)												
	Total	Tipos de despesa											Despesas diversas
		Alimentação	Habitação	Vestuário	Transporte	Higiene e cuidados pessoais	Assistência à saúde	Educação	Recreação e cultura	Fumo	Serviços pessoais		
Brasil	2 134,77	421,72	765,89	118,22	419,19	51,02	153,81	64,81	42,76	11,62	23,85	61,87	
Percentuais		19,75%	35,88%	5,54%	19,64%	2,39%	7,20%	3,04%	2,00%	0,54%	1,12%	2,90%	

Fonte: o próprio autor.

Na figura 47 selecionamos os dados:

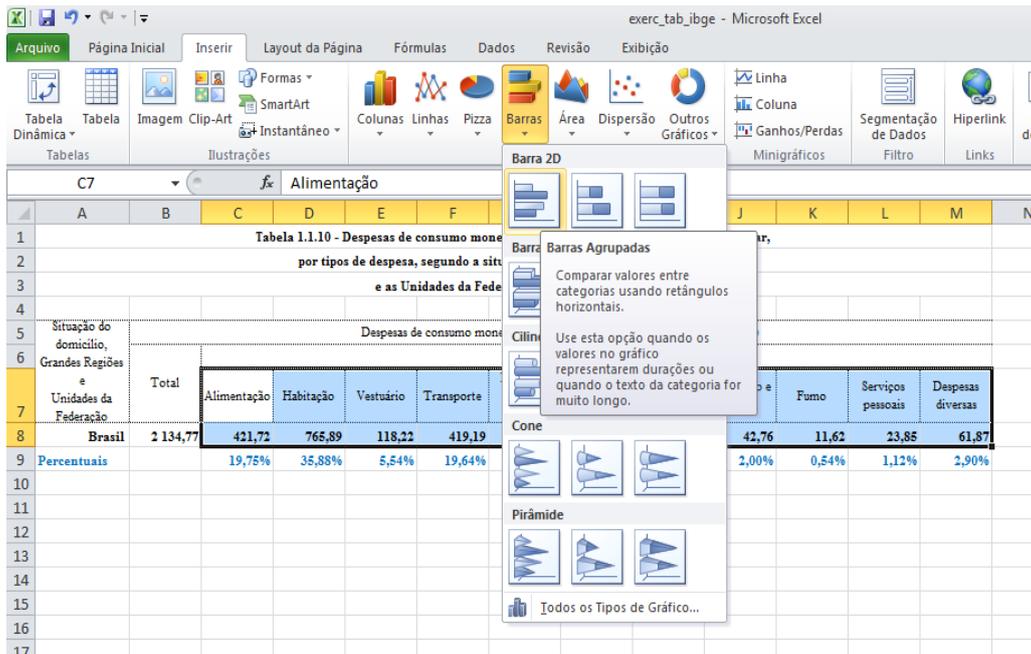
Figura 47: Seleção de dados para geração de um gráfico

Tabela 1.1.10 - Despesas de consumo monetária e não monetária média mensal familiar, por tipos de despesa, segundo a situação do domicílio, as Grandes Regiões e as Unidades da Federação - período 2008-2009													
Situação do domicílio, Grandes Regiões e Unidades da Federação	Despesas de consumo monetária e não monetária média mensal familiar (R\$)												
	Total	Tipos de despesa											Despesas diversas
		Alimentação	Habitação	Vestuário	Transporte	Higiene e cuidados pessoais	Assistência à saúde	Educação	Recreação e cultura	Fumo	Serviços pessoais		
Brasil	2 134,77	421,72	765,89	118,22	419,19	51,02	153,81	64,81	42,76	11,62	23,85	61,87	
Percentuais		19,75%	35,88%	5,54%	19,64%	2,39%	7,20%	3,04%	2,00%	0,54%	1,12%	2,90%	

Fonte: o próprio autor.

Na figura 48 seleciona-se a ferramenta de gráficos:

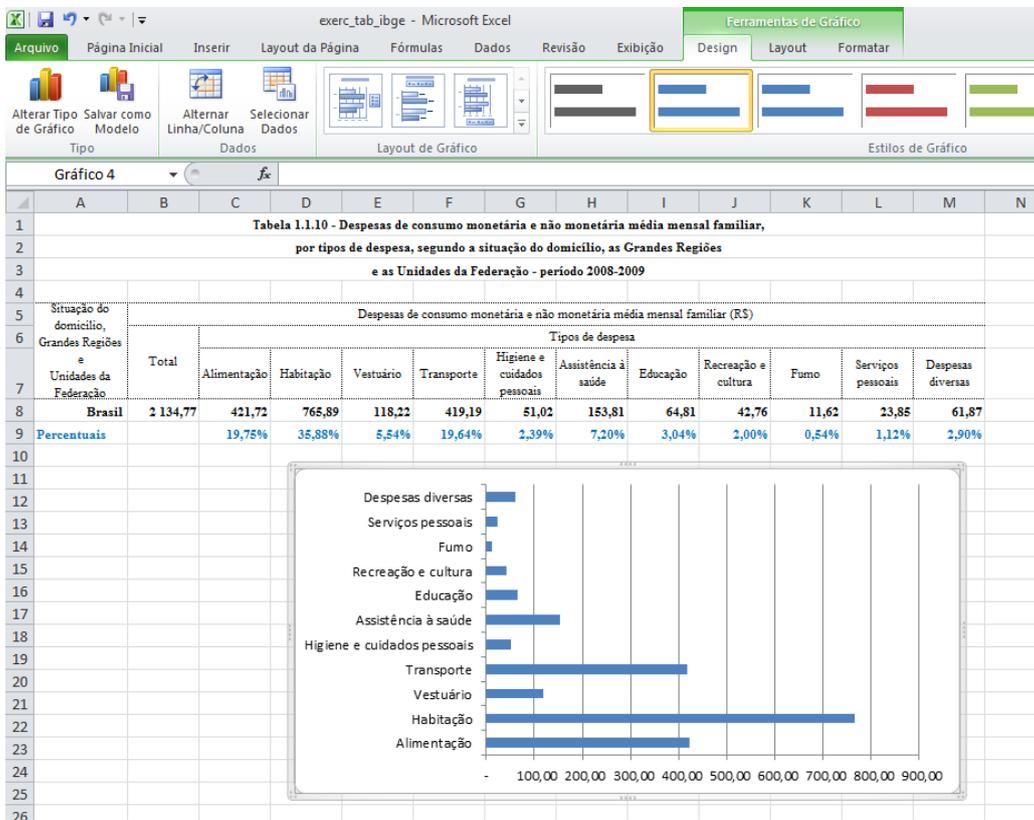
Figura 48: Ferramenta Gráfico da planilha de cálculo



Fonte: o próprio autor.

Dessa forma, obtém-se o gráfico de barras apresentado na figura 49:

Figura 49: Gráfico de barras gerado na planilha de cálculo

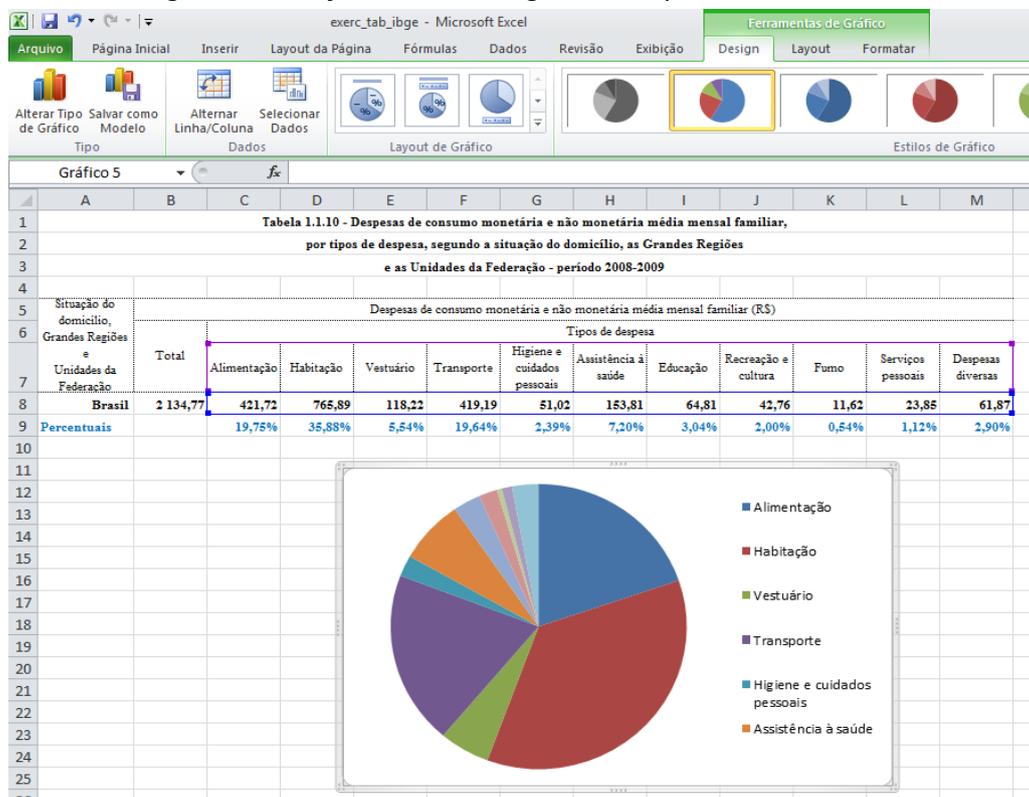


Fonte: o próprio autor.

E, para o gráfico de setores, figura 50, seleciona-se na ferramenta gráfico dessa modalidade.

Tem-se:

Figura 50: Gráfico de setores gerado na planilha de cálculo



Fonte: o próprio autor.

**PROBLEMA 34:** Considere o orçamento de sua família e classifique as despesas segundo os mesmos itens usados pelo IBGE. Calcule os percentuais e faça gráficos de barras e de setores.

Como os dados deste problema são de cunho pessoal, não será apresentada a solução aqui. É análoga ao problema anterior.

**PROBLEMA 35:** Conforme mencionado, a pesquisa citada (tabela 15) foi concluída e publicada em 2009. Pesquise o índice nacional de preços ao consumidor amplo (IPCA), que é calculado mensalmente pelo IBGE, do ano de 2009 até setembro de 2018 e atualize os valores para o Brasil (do total e dos itens), fazendo o mesmo para a região sul e para o estado do Paraná. Com os valores atualizados, calcule os percentuais de cada item em relação ao total.

## SOLUÇÃO.

Aqui será necessário calcular a inflação acumulada desde o início de 2010 até setembro de 2018.

O procedimento para tal cálculo é análogo ao exemplo seguinte: suponha que o preço de um bem seja de R\$ 100,00 em determinado mês. Se no mês seguinte há um aumento de 10%, o preço passará para R\$ 110,00. Agora, no próximo mês verifica-se um aumento de 5%, passando, portanto, para R\$ 115,50. Logo, em relação ao preço inicial, o aumento percentual total foi de 15,5%. Com esse exemplo, deve-se notar que o aumento percentual total não foi de 15%.

Uma forma de acumular esses dois percentuais de aumento no preço seria:

$$\{[(1 + 0,1) \times (1 + 0,05)] - 1\} \times 100 = 15,5$$

Este é o procedimento que será usado na planilha de cálculo para acumular a inflação do período solicitado no exercício. Obtém-se a planilha apresentada nas figuras 51, 52, 53 e 54:

Figura 51: Acumulação do índice de inflação

	A	B	C	D	E
1	<b>DATA</b>	<b>IPCA</b>	<b>ACUMULADO</b>		
2	jan/10	0,75	0,75		
3	fev/10	0,78	1,53585		
4	mar/10	0,52	2,06383642		
5	abr/10	0,57	2,645600288		
6	mai/10	0,43	3,086976369		
7	jun/10	0	3,086976369		
8	jul/10	0,01	3,097285066		
9	ago/10	0,04	3,13852398		
10	set/10	0,45	3,602647338		
11	out/10	0,75	4,379667193		
12	nov/10	0,83	5,246018431		
13	dez/10	0,63	5,909068347		
14	jan/11	0,83	6,788113615		
15	fev/11	0,8	7,642418523		
16	mar/11	0,79	8,49279363		
17	abr/11	0,77	9,328188141		
18	mai/11	0,47	9,842030625		
19	jun/11	0,15	10,00679367		
20	jul/11	0,16	10,18280454		
21	ago/11	0,37	10,59048092		
22	set/11	0,53	11,17661047		
23	out/11	0,43	11,65466989		
24	nov/11	0,52	12,23527417		
25	dez/11	0,5	12,79645055		
26	jan/12	0,56	13,42811067		
27	fev/12	0,45	13,93853717		

Fonte: o próprio autor.

Figura 52: Acumulação do índice de inflação - continuação

C28			f <sub>x</sub>	=(((C27/100+1)*(B28/10	
	A	B	C	D	E
27	fev/12	0,45	13,93853717		
28	mar/12	0,21	14,17780809		
29	abr/12	0,64	14,90854607		
30	mai/12	0,36	15,32221683		
31	jun/12	0,08	15,41447461		
32	jul/12	0,43	15,91075685		
33	ago/12	0,41	16,38599095		
34	set/12	0,57	17,0493911		
35	out/12	0,59	17,73998251		
36	nov/12	0,6	18,4464224		
37	dez/12	0,79	19,38214914		
38	jan/13	0,86	20,40883562		
39	fev/13	0,6	21,13128863		
40	mar/13	0,47	21,70060569		
41	abr/13	0,55	22,36995902		
42	mai/13	0,37	22,82272787		
43	jun/13	0,26	23,14206696		
44	jul/13	0,03	23,17900958		
45	ago/13	0,24	23,47463921		
46	set/13	0,35	23,90680044		
47	out/13	0,57	24,61306921		
48	nov/13	0,54	25,28597978		
49	dez/13	0,92	26,43861079		
50	jan/14	0,55	27,13402315		
51	fev/14	0,69	28,01124791		
52	mar/14	0,92	29,18895139		
53	abr/14	0,67	30,05451737		

Fonte: o próprio autor.

Figura 53: Acumulação do índice de inflação - continuação

C55			f <sub>x</sub>	=(((C54/100+1)*(	
	A	B	C	D	E
54	mai/14	0,46	30,65276815		
55	jun/14	0,4	31,17537922		
56	jul/14	0,01	31,18849676		
57	ago/14	0,25	31,516468		
58	set/14	0,57	32,26611187		
59	out/14	0,42	32,82162954		
60	nov/14	0,51	33,49901985		
61	dez/14	0,78	34,5403122		
62	jan/15	1,24	36,20861207		
63	fev/15	1,22	37,87035714		
64	mar/15	1,32	39,69024586		
65	abr/15	0,71	40,6820466		
66	mai/15	0,74	41,72309375		
67	jun/15	0,79	42,84270619		
68	jul/15	0,62	43,72833097		
69	ago/15	0,22	44,04453329		
70	set/15	0,54	44,82237377		
71	out/15	0,82	46,00991724		
72	nov/15	1,01	47,4846174		
73	dez/15	0,96	48,90046973		
74	jan/16	1,27	50,79150569		
75	fev/16	0,9	52,14862925		
76	mar/16	0,43	52,80286835		
77	abr/16	0,61	53,73496585		
78	mai/16	0,78	54,93409858		
79	jun/16	0,35	55,47636793		
80	jul/16	0,52	56,28484504		

Fonte: o próprio autor.

Figura 54: Acumulação do índice de inflação - continuação

	A	B	C	D	E
81	ago/16	0,44	56,97249836		
82	set/16	0,08	57,09807636		
83	out/16	0,26	57,50653136		
84	nov/16	0,18	57,79004311		
85	dez/16	0,3	58,26341324		
86	jan/17	0,38	58,86481421		
87	fev/17	0,33	59,3890681		
88	mar/17	0,25	59,78754077		
89	abr/17	0,14	60,01124333		
90	mai/17	0,31	60,50727818		
91	jun/17	-0,23	60,13811144		
92	jul/17	0,24	60,52244291		
93	ago/17	0,19	60,82743555		
94	set/17	0,16	61,08475945		
95	out/17	0,42	61,76131544		
96	nov/17	0,28	62,21424712		
97	dez/17	0,44	62,92798981		
98	jan/18	0,29	63,40048098		
99	fev/18	0,32	63,92336252		
100	mar/18	0,09	64,07089354		
101	abr/18	0,22	64,43184951		
102	mai/18	0,4	65,08957691		
103	jun/18	1,26	67,16970558		
104	jul/18	0,33	67,7213656		
105	ago/18	-0,09	67,57041637		
106	set/18	0,48	68,37475437		
107	Fonte	IBGE			

Fonte: o próprio autor.

É interessante comentar sobre como as fórmulas são colocadas na planilha de cálculo. Na figura 55 tem-se o começo da planilha mostrando as fórmulas:

Figura 55: Fórmula utilizada para acumular índices de inflação

	A	B	C	D
1	DATA	IPCA	ACUMULADO	
2	40179	0,75	=B2	
3	40210	0,78	(((C2/100+1)*(B3/100+1))-1)*100	
4	40238	0,52	(((C3/100+1)*(B4/100+1))-1)*100	
5	40269	0,57	(((C4/100+1)*(B5/100+1))-1)*100	
6	40299	0,43	(((C5/100+1)*(B6/100+1))-1)*100	
7	40330	0	(((C6/100+1)*(B7/100+1))-1)*100	
8	40360	0,01	(((C7/100+1)*(B8/100+1))-1)*100	
9	40391	0,04	(((C8/100+1)*(B9/100+1))-1)*100	
10	40422	0,45	(((C9/100+1)*(B10/100+1))-1)*100	
11	40452	0,75	(((C10/100+1)*(B11/100+1))-1)*100	
12	40483	0,83	(((C11/100+1)*(B12/100+1))-1)*100	
13	40513	0,63	(((C12/100+1)*(B13/100+1))-1)*100	
14	40544	0,83	(((C13/100+1)*(B14/100+1))-1)*100	
15	40575	0,8	(((C14/100+1)*(B15/100+1))-1)*100	
16	40603	0,79	(((C15/100+1)*(B16/100+1))-1)*100	
17	40634	0,77	(((C16/100+1)*(B17/100+1))-1)*100	
18	40664	0,47	(((C17/100+1)*(B18/100+1))-1)*100	
19	40695	0,15	(((C18/100+1)*(B19/100+1))-1)*100	
20	40725	0,16	(((C19/100+1)*(B20/100+1))-1)*100	
21	40756	0,37	(((C20/100+1)*(B21/100+1))-1)*100	
22	40787	0,53	(((C21/100+1)*(B22/100+1))-1)*100	
23	40817	0,43	(((C22/100+1)*(B23/100+1))-1)*100	
24	40848	0,52	(((C23/100+1)*(B24/100+1))-1)*100	
25	40878	0,5	(((C24/100+1)*(B25/100+1))-1)*100	
26	40909	0,56	(((C25/100+1)*(B26/100+1))-1)*100	
27	40940	0,45	(((C26/100+1)*(B27/100+1))-1)*100	

Fonte: o próprio autor.

Portanto, a inflação acumulada no período foi de 68,37475437%.

Agora para atualizar os valores solicitados, deve-se dar 68,37475437% de aumento para os mesmos. Por exemplo, a despesa média total para o Brasil era de R\$ 2.134,77. Para calcularmos o aumento percentual, faz-se:

$$2.134,77 \times 68,37475437\% = 1.459,64$$

E o valor atualizado será  $2.134,77 + 1.459,64 = 3.594,41$ .

Outra forma de atualizar o valor usando esse percentual é:

$$2.134,77 \times 1,6837475437 = 3.594,41$$

Que será usado na planilha de cálculo para essa atualização. Dessa forma tem-se:

Figura 56: Atualização da renda e itens de consumo

A10														
fx														
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Tabela 1.1.10 - Despesas de consumo monetária e não monetária média mensal familiar,													
2	por tipos de despesa, segundo a situação do domicílio, as Grandes Regiões													
3	e as Unidades da Federação - período 2008-2009													
4														
5	Despesas de consumo monetária e não monetária média mensal familiar (R\$)													
6	Tipos de despesa													
7	Situação do domicílio, Grandes Regiões e Unidades da Federação	Total	Alimentação	Habituação	Vestuário	Transporte	Higiene e cuidados pessoais	Assistência à saúde	Educação	Recreação e cultura	Fumo	Serviços pessoais	Despesas diversas	
8	Brasil	2 134,77	421,72	765,89	118,22	419,19	51,02	153,81	64,81	42,76	11,62	23,85	61,87	
9	Atualizado	3.594,41	710,07	1.289,57	199,05	705,81	85,90	258,98	109,12	72,00	19,57	40,16	104,17	
10														
11														
12														

Fonte: o próprio autor.

Assim, concluímos os problemas relacionados a tratamento da informação sugeridos para os Cursos Técnicos Subsequentes em Administração, Contabilidade, Logística, Recursos Humanos e Secretariado.

# CAPÍTULO 4

---

## 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do conteúdo apresentado no corpo deste trabalho algumas considerações e/ou reflexões não de serem colocadas aqui neste espaço.

Nossa experiência profissional com o público dos cursos de Educação Profissional Técnica de Nível Médio mostra a importância desta oportunidade de formação para a população que busca de uma qualificação para o trabalho ora já exercido ou, para aqueles que desejam algum direcionamento para a vida quer seja pessoal ou no trabalho.

A fim de familiarizarmos o leitor a respeito destes cursos, apresentamos um capítulo sobre a Educação Profissional Técnica de Nível Médio pontuando alguns fatos históricos que mostram a forma pela qual estes cursos foram construídos. E, mais especificamente, qual é o formato destes nos dias atuais, no contexto do Estado do Paraná.

Para além disto, apresentamos o resultado de nossos estudos em relação às orientações presentes nos documentos oficiais que regem os cursos. Pois, o objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta para o tratamento de conteúdos de Matemática Financeira e Estatística para estes cursos, que possa contemplar os diferentes Cursos Técnicos Subsequentes em Administração, Contabilidade, Logística, Recursos Humanos e Secretariado, cursos estes do eixo tecnológico de Gestão e Negócios.

A escolha de tais cursos é atribuída ao fato de atuarmos no Colégio Vicente Rijo, em Londrina, Paraná, nestes cursos. E mais ainda, do anseio de apresentarmos possibilidades para o ensino conteúdos de nossa área, baseados em problemas reais que aproximam os estudantes da prática profissional advinda da profissão ou ainda, da atividade que possa exercer ou já exerçam no mundo do trabalho.

Ressaltamos a importância de utilizarmos tais problemas, circunstanciados em situações reais que cada profissional possa enfrentar ao lidar com as suas atividades no trabalho ou na vida. E ainda, a possibilidade de aprender a manusear instrumentos que facilitarão sua atividade no trabalho ao lidar com problemas análogos no seu trabalho. Referimo-nos ao uso de calculadoras e das planilhas apresentadas nas soluções dos problemas propostos.

Este trabalho tornou-se possível a partir do aprimoramento, em nossa formação, que obtivemos no PROFMAT. As disciplinas foram capazes de nos dar a sustentação teórica de diversos conteúdos de Matemática, além de oportunizar a elaboração deste trabalho. Sem dúvida, a contribuição que esta oportunidade de formação ofereceu a minha pessoa foi de grande valia para o exercício da minha prática profissional.

Espera-se que tal empreendido contribua com a Educação Profissional Técnica de Nível Médio, ao apresentar-se como mais uma fonte de problemas propostos para os cursos desta modalidade de ensino, no Estado do Paraná e no Brasil.

# REFERÊNCIAS

---

- BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2006.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Resolução nº 6 de 20 de setembro de 2012. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio**. Brasília: Diário Oficial da União, 2012.
- BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Plano Nacional de Educação PNE 2014-2024: Linha de Base**. Brasília: Inep, 2015.
- COLÉGIO ESTADUAL VICENTE RIJO. **Projeto Político Pedagógico**. Londrina, 2018.
- CRUZ, Priscila et al. Org. **Anuário Brasileiro da Educação Básica**. São Paulo: Moderna, 2018.
- DUEA, Joan, et al. **Resolução de problemas com uso da calculadora**. In Krulik, Stephen, et al. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual Editora, 1998.
- GARCIA, Sandra Regina de Oliveira. **A Educação Profissional integrada ao Ensino Médio no Paraná: avanços e desafios**. Tese de doutorado em Educação. Curitiba: UFPR, 2009.
- GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- GRAMSCI, Antonio. **Cadernos do Cárcere: Caderno 12**. IN Monasta, Attilio. **Antonio Gramsci**. Tradução e organização de Paolo Nosella. Fundação Joaquim Nabuco. Ed. Massangana. Recife: 2010. Coleção Educadores – MEC. Disponível em <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me4660.pdf>
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Cálculo, volume 1**. 5ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. **Meditatio Juridico-Mathematica de Interusurio Simplex**. Lipsiae: Acta Eruditorum, p. 425-432, 1683. Disponível em <https://archive.org>.
- LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM – Coleção PROFMAT, 2015.
- LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM – Coleção PROFMAT, 2011. Disponível em <https://drive.google.com/drive/folders/0B-MqHRSopldKfIFBwkFDMTRBNTU0ZHIOZW92bThLcktpTkxTWmE1SG1UbUJXcHIQUkFXQXc>

LUCCHESI, Rafael. **A escola precisa dialogar com o mundo do trabalho**. In Anuário BrasILEIRO da Educação Básica. São Paulo: Moderna. 2018.

MAOR, Eli. **E – The Story of a Number**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press: 1994.

MORGADO, Augusto César, et al. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM – Coleção PROFMAT, 2015.

MORGADO, Augusto César, et al. **Progressões e Matemática Financeira**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2001.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. **BOLEMA**. Boletim de Educação Matemática, UNESP – Rio Claro, v. 25, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa, et al. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. São Paulo: Paco Editorial. 2014.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes da Educação Profissional**. Curitiba: 2006.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Catálogo Estadual de Cursos Técnicos**. Curitiba: 2013.

PONTE, João Pedro da, et al. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. São Paulo: Ed. Autêntica, 2013.

RAMOS, Marise. **A política de educação profissional no Brasil contemporâneo: avanços, recuos e contradições frente a projetos de desenvolvimento em disputa**. In Mapa da Educação Profissional e Tecnológica: experiências internacionais e dinâmicas regionais brasileiras. Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos. 2015.

RELATÓRIO FINAL. **Eixo Educação**. In: Mapa da Educação Profissional e Tecnológica do Brasil. Brasília. Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2015. (Produto 7).

ROMANELLI, Otaiza de Oliveira. **História da Educação no Brasil (1930/1973)**. Petrópolis: Vozes, 1980.

SANTOS, Fábio V. **Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: o uso que os alunos fazem do computador em atividades de modelagem**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SAVIANI, Demerval. **O choque teórico da politecnicidade**. Trabalho, Educação e Saúde [online]. 2003. Vol. 1, n. 1, pp. 131 – 152.

# APÊNDICE

---

## SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Para obter algumas fórmulas utilizadas nos exercícios propostos neste texto fez-se uso da fórmula da soma dos  $n$  termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Segue uma demonstração desta fórmula:

Seja  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$  a soma dos termos de uma progressão geométrica. Multiplicando ambos os membros desta igualdade, obtemos  $q S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q$ .

Agora, subtraindo as duas igualdades, tem-se:

$$S_n - q S_n = a_1 - a_n \cdot q = a_1 - a_1 q^n.$$

Portanto,

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n).$$

Segue daí que

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

## DEMONSTRAÇÃO DA CONVERGÊNCIA DA SEQUÊNCIA DE TERMO GERAL

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Esta demonstração pode ser encontrada em GUIDORIZZI, 2008.

“Definiremos, então, o *número e* como sendo o limite de tal sequência.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Para provar a convergência de tal sequência, é suficiente provar que ela é crescente e que existe  $M > 0$  tal que  $a_n < M$  para todo  $n \geq 1$ .

Primeiro, vamos provar que  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$  para todo  $n \geq 1$ . Temos

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

daí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ (por quê?).}$$

Como  $2^n \leq (n+1)!$  para todo  $n \geq 1$  (verifique), resulta que  $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$  para todo  $n \geq 1$ , daí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

e como

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2$$

resulta

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \text{ para todo } n \geq 1.$$

Vamos provar, agora, que tal sequência é crescente. Sejam  $n$  e  $m$  naturais  $\geq 1$  tais que  $n < m$ . Temos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{n!}$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{m(m-1)}{m^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{m!}{m^m} \cdot \frac{1}{m!}$$

De  $n < m$  resulta

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{m}$$

$$1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{m}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$1 - \frac{n-1}{n} < 1 - \frac{m-1}{m}$$

e daí

$$\frac{n(n-1)}{n^2} < \frac{m(m-1)}{m^2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} < \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} \text{ etc.}$$

$$\text{Observe: } \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} = \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right).$$

Segue que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

se  $n < m$ . assim, a sequência é crescente". (GUIDORIZZI, 2008, p. 119).

## PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

O axioma da indução finita pode ser escrito conforme segue:

Seja  $P(n)$  uma propriedade relativa ao número natural  $n$ . Suponhamos que:

- i)  $P(1)$  é válida.
- ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a validade de  $P(n)$  implica a validade de  $P(n + 1)$ .

Então,  $P(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .