UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO CIÊNCIA EXATA E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁICA MESTRADO
PROFISSIONAL
EM MATEMÁICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PEDRO COSTA DA SILVA

As desigualdades elementares e suas aplicações

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes

Natal/RN - 2019

PEDRO COSTA DA SILVA

As desigualdades elementares e suas aplicações

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos A. Gomes

Natal/RN - 2019

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Silva, Pedro Costa da.
As desigualdades elementares e suas aplicações / Pedro Costa da Silva. - 2019.
112f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT. Natal, 2019.
Orientador: Carlos Alexandre Gomes.

1. Matemática - Dissertação. 2. Desigualdades - Dissertação. 3. Demonstrações - Dissertação. 4. Problemas e resoluções - Dissertação. I. Gomes, Carlos Alexandre. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 51

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PEDRO COSTA DA SILVA

As desigualdades elementares e suas aplicações

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes (UFRN - Orientador)
Prof. Dr. Ronaldo Freire de Lima (UFRN - Membro interno)
Prof. Dr. Roberto Teodoro Gurgel de Oliveira (UFRN - Membro interno)
Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva (IFCE - Membro externo)

Natal/RN - 2019

Agradecimentos

Sou grato ao Eterno Deus por me conceder a oportunidade com ânimo e força para alcançar esse objetivo. Também a minha esposa e filho, à compreensão das diversas ausências. À todos os colegas da turma, pelas críticas, sugestões e reflexões. E ao meus professores, pelo empenho de transmitir o seu conhecimento. Ao meu orientador que contribuiu para chegar a reta final. Quero completar dizendo, que essa trajetória foi composta de inúmeros desafios, e, me ajudou a perceber o maravilhoso presente a me confiado, quero contribuir dando continuidade e aplicações desse conhecimento.

Dedicatória

Dedico este trabalho a DEUS, meu filho e a minha esposa, Noemia.

Resumo

Neste trabalho de conclusão do curso abordaremos o estudo das desigualdades: médias aritméticas, geométricas, harmônicas, quadráticas, Bernoulli, desigualdade na geometria e outros.Tais assuntos é muito pouco abordado nos livros brasileiros, por isso, decidi escrever sobre esse tema com mais de uma demonstração dos teoremas e trazer problemas para compreender melhor as suas aplicações. O trabalho tem como objetivo ajudar os professores em seu aperfeiçoamento, alunos que participam das olimpíadas nacionais e internacionais e alunos que estão na graduação. As desigualdades são de extrema importância para vários ramos da Matemática, tais como Álgebra, Trigonometria, Geometria e Análise, e constituem-se também ferramentas muito poderosas para a resolução de problemas de olimpíadas, demonstrações das desigualdades geométricas.

PALAVRAS-CHAVE: Desigualdades; Demonstrações; Problemas e Resoluções.

Abstract

In the present work we are going to broach up the study of mathematical inequalities, arithmetic means, geometrics, harmonics, quadratics, Bernoulli, inequalities in the Geometry and others. Such subject is very few discussed in the Brazilian titles, for this reason I decided to write about this topic with more than one demonstration of theorems and bring up some math problems for better understanding their applications. The work aims to help teachers in their improvement, students who will participate in the national and international Math Olympic Games and university students. The mathematical inequalities are extremely important to several branches of mathematic such as: Algebra, Trigonometry, Geometry and Analysis, and are also very powerful tools for solving problems in the Math Olympics Games, demonstrating Geometric inequalities.

KEYWORDS : Inequalities; demonstration; problems and resolutions.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

As desigualdades surgiram desde que se sentiu necessidade ordenar, talvez quando se começou a usar os números, a fazer medições, aproximações ou até procurando limites e cotas superiores e inferiores para certas medições e quantidades. Assim, as desigualdades têm um papel muito distinto na evolução da matemática.

O estudo das desigualdades, estima-se que tenha começado no século IV a.C. e durante muitos séculos não se conhecia nenhum método uniforme para determinar máximos ou mínimos. Os primeiros métodos sistemáticos surgiram no século XVII.

Ao longo da história da Matemática surgiram muitos problemas de desigualdades, envolvendo grandes matemáticos como Euclides, Arquimedes, Heron, Tartaglia, Johanne Jakob Bernoulli, Newton entre outros.

Para a maioria das pessoas (não foi diferente para mim) a primeira desigualdade com que se tem contato é a famosa desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, a saber: se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais não negativos, tem-se que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

A primeira vez em que me deparei com essa desigualdade, estava cursando o ensino médio no atual IFRN. Encontrei essa desigualdade como um problema numa lista disponibilizada para alunos que queriam participar da Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte e então comecei a pesquisar em revistas e livros sobre desigualdades e só encontrei na RPM nº 18, uma bela demonstração por George Pólya em [19] e mesmo assim com uma grande dificuldade de compreender e "achava que sabia de Matemática", e outras desigualdades não encontrei no nosso idioma. Hoje existem muito mais materiais escrito sobre desigualdade e mesmo assim há uma lacuna comparado com materiais escrito em inglês para preparação para competições nacionais e internacionais de Matemática.

Os principais motivos que me levaram a escrever sobre o tema desigualdades, foram a escassez de material escrito em língua portuguesa sobre o tema, e com isso pudesse disponibilizar uma nova fonte de estudo e pesquisa para os alunos que participam das competições de Matemática e estudantes de licenciatura, bacharelado, Profmat e os amantes da Matemática.

Objetivo geral:

Apresentar uma série de desigualdades com diversas aplicações e em diversas áreas.

Objetivos específico :

1. Apresentar algumas desigualdades elementares clássicas e suas demonstrações;
2. Aplicar essas desigualdades para resolver problemas de otimização;
3. Exercitar problemas envolvendo apenas criatividade;
4. Aplicar as desigualdades clássicas na resolução de problemas;
5. Disponibilizar um material que sirva como fonte de pesquisa no estudo das desigualdades.

Capítulo 1

Desigualdades clássicas

Na primeira parte deste capítulo trataremos das famosas desigualdades entre as médias aritmética, geométrica, harmônica, quadrática e médias-potência para números reais positivos. Em seguida vamos um pouco mais longe tratando de algumas desigualdades clássicas como a desigualdade de Bernoulli, Hölder, Cauchy-Schwarz, entre muitas outras, mostrando que elas são ferramentas úteis para a resolução de alguns problemas interessantes; desde problemas bem simples até problemas um pouco mais elaborados. Antes de tratarmos das desigualdades, estabeleceremos a noção de média de uma lista de números reais.

1.1 Médias

Uma média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa característica da lista.

Se a característica a permanecer constante for a soma dos elementos da lista dada, obtemos a mais simples de todas as médias, a média aritmética.

Definição 1.1.1. *Dados n números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a* **média aritmética** *da lista dos n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é o número real A capaz de substituir cada termo da lista $x_1, x_2, \cdots, x_n$, sem alterar a soma dos elementos dessa lista, isto é,*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \underbrace{A + A + \cdots + A}_{n \text{ parcelas}} = nA,$$

o que nos leva à conhecida fórmula para o cálculo da média aritmética.

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

De modo completamente análogo, podemos definir a chamada média geométrica de uma lista $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Vejamos:

Definição 1.1.2. *Dados n números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a* **média geométrica** *da lista dos n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é o número real G capaz de substituir cada termo da lista $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sem alterar o produto dos elementos dessa lista, isto é,*

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = \underbrace{G \cdot G \cdots G}_{n \text{ fatores}} = G^n,$$

o que nos leva a conhecida fórmula para o cálculo da média Geométrica.

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Note que ao contrário da média aritmética, que sempre existe para quaisquer números reais, a média geométrica nem sempre existe. Por exemplo, se tomarmos uma lista com apenas dois números reais $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$, não existe um número real G tal que $(-1) \cdot 2 = G \cdot G$, isto é, $G^2 = -2$, visto que em $\mathbb{R}$, sempre teremos $G^2 \geq 0$. Seguindo a mesma linha de raciocínio podemos definir a chamada média harmônica de uma lista de números reais.

Definição 1.1.3. *Dada uma lista de n números reais não nulos $x_1, x_2, \cdots, x_n$, tais que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \neq 0$, a* **média harmônica** *da lista dos n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é o número real H capaz de substituir cada membro da lista $x_1, x_2, \cdots, x_n$, sem alterar a soma dos inversos elementos dessa lista, isto é,*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \cdots + \frac{1}{H}}_{n \text{ parcelas}} = \frac{n}{H},$$

o que nos leva à conhecida fórmula para o cálculo da média harmônica

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Por fim, vamos definir a chamada **média quadrática** de uma lista de números reais.

Definição 1.1.4. *Dados n números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a* **média quadrática** *da lista dos n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é o número real Q capaz de substituir cada membro da lista $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sem alterar a soma dos quadrados dos elementos dessa lista, isto é,*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \underbrace{Q^2 + Q^2 + \cdots + Q^2}_{=n \text{ parcelas}} = nQ^2,$$

o que nos leva a conhecida fórmula para o cálculo da média quadrática

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Seguindo na mesma direção das definições que acima poderíamos definir muitas outras médias, como por exemplo, a **média potência**. Dada uma lista de números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e um outro número real α, podemos considerar a soma das potências α dos números dessa lista

$$x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha.$$

Chamamos de **média potência** α dessa lista de números, o número real P_α tal que

$$x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha = \underbrace{P_\alpha^\alpha + P_\alpha^\alpha + \cdots + P_\alpha^\alpha}_{n \text{ parcelas}}$$

ou seja,

$$nP_\alpha^\alpha = x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha$$

no caso em que $\alpha \neq 0$, podemos escrever

$$P_\alpha = \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Note que para $\alpha = 2$ temos que $P_2 = Q$, isto é, P_2 é a média quadrática e $P_{-1} = H$, ou seja, P_{-1} é a média harmônica.

1.1.1 Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica

Um dos fatos que faz da Matemática uma ciência tão apaixonante é que muitas vezes partindo de fatos extremamente simples podemos vislumbrar horizontes mais distantes. No estudo das desigualdades isso ocorre. Por exemplo, partindo do simples fato de que $x^2 \geq 0$ para todo x real, podemos extrair muitas consequências interessantes, produzindo ferramentas que podem ser úteis na resolução de problemas de diversas natureza como mostraremos a seguir.

Se a e b são números reais não negativos, segue que

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Além disso note que a igualdade $\sqrt{a \cdot b} = \frac{a+b}{2}$ ocorre se, e somente se $a = b$. Essa é a chamada desigualdade das médias aritmética e geométrica para dois números reais não negativos. Essa simples desigualdade pode ser útil para responder questões interessantes, tais como:

1. Com um perímetro fixo, qual a maior área com a forma retangular que podemos cercar?

2. Com um perímetro fixo, qual a maior área com a forma triangular que podemos cercar?

Neste ponto, uma pergunta natural é se essa desigualdade pode ser estendida para uma lista com uma maior quantidade de números reais positivos. No caso de uma lista $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números reais estritamente positivos, as principais médias obedecem as seguintes desigualdades

$$H \leq G \leq A \leq Q.$$

Nesta seção vamos exibir as provas dessas importantes desigualdades. Além disso, mostraremos algumas aplicações, respondendo inclusive às duas questões que propusemos acima.

Teorema 1. *Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos e $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que:*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Na literatura há diversas demonstrações para essa desigualdade. Apresentaremos aqui três demonstrações para esse fato; a primeira é uma bela demonstração feita pelo famoso matemático húngaro George Pólya e a segunda demonstração retirado de Gomes, C.A em [9]. Por fim, a terceira é uma demonstração por indução, usando um truque muito esperto, devido a matemático francês L.A.Cauchy.

Para a demonstração de Pólya, precisaremos do seguinte

Lema 1. *A desigualdade* $e^x \geq 1 + x$ *ocorre para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Além disso a igualdade ocorre se, e somente se,* $x = 0$.

Demonstração (do lema)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x - x - 1$. Segue que $f'(x) = e^x - 1$. Assim, o único ponto crítico de f ocorre em $x = 0$, pois

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

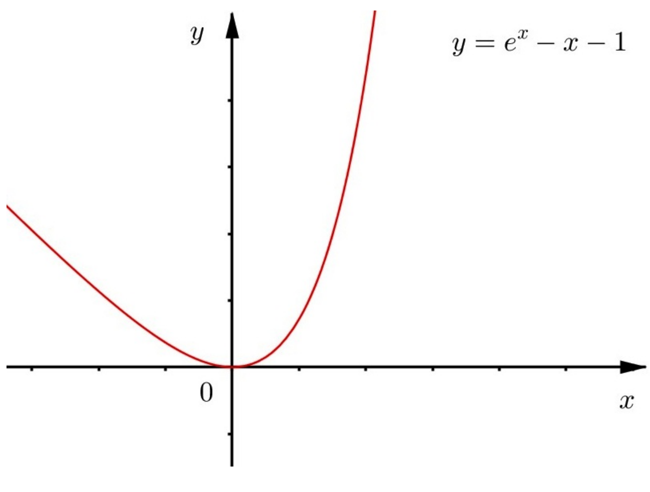


Figura 1.1: Gráfico da função $f(x) = e^x - x - 1$.

Note também que $f'(x) \leq 0$ em $(-\infty, 0]$ e $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, \infty)$, donde concluímos que f é monótona e decrescente em $(-\infty, 0]$ e monótona crescente em $[0, \infty)$. Como $f(0) = 0$, temos que $f(x) \geq 0$ para todo x real, ou seja, sempre temos $e^x \geq 1 + x$. Além disso, note que ocorre igualdade $f(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

$\square$

Observação 1.1.1. *Há um outro argumento bastante elegante para justiticar a desigualdade $e^x \geq x+1$ (no caso em que $x > 0$) que é o seguinte: podemos definir o logaritmo de um número positivo a $(\ln a)$ como sendo a área limita pelo eixo das abscissas, pela curva $y = \frac{1}{x}$ e pelas retas verticais $x = 1$ e $x = a$.*
Note que essa região está contida no retângulo de altura 1 e base $a - 1$. Como a medida da área abaixo do gráfico de $y = \frac{1}{x}$ e limitada pelas retas verticais $x = 1$ e $x = a$, pode ser calculada pela integral dessa função, segue que:

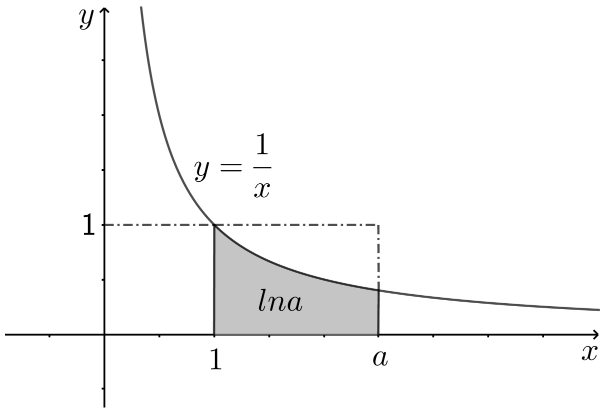


Figura 1.2: Função hipérbole

$$A = \int_1^a \frac{1}{x}\, dx = \ln x \Big|_1^a = \ln a - \ln 1 = \ln a.$$

É claro que a área da região hachurada é menor do que ou igual que a área do retângulo, ou seja, $\ln a \leq a - 1$, fazendo $a = 1 + x$, com $x > 0$, obtemos

$$\ln a \leq a - 1 \Rightarrow \ln(1 + x) \leq x.$$

Isso implica, que $e^x \geq 1 + x$, valendo a igualdade apenas se $a = 1$, ou seja, $x = 0$.

Demonstração 1.[G.Pólya] A demonstração imaginada por Pólya, que se baseia na desigualdade $e^x \geq 1 + x$ é válida para todo número real. Agora podemos demonstrar a desigualdade das médias para n números. Na desigualdade $e^x \geq 1 + x$ vamos substituir x por $\frac{x_i}{A} - 1$, com $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
Com isso, podemos fazer a substituição

$$e^{\frac{x_1}{A} - 1} \geq \frac{x_1}{A}$$

$$e^{\frac{x_2}{A}-1} \geq \frac{x_2}{A}$$

$$\vdots$$

$$e^{\frac{x_n}{A}-1} \geq \frac{x_n}{A}$$

Multiplicando, obtemos

$$e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{A}-n} \geq \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{A^n}.$$

Mas, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = nA$, logo

$$1 \geq \frac{G^n}{A^n} \quad ou \quad G \leq A.$$

Como queríamos demonstrar. É claro ainda que a igualdade vale se, somente se, $\frac{x_i}{A}-1 = 0$, ou seja, $x_i = A$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. □

Demonstração 2

Inicialmente vamos demonstrar um resultado auxiliar.

Lema 2. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais e positivos tais que $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$, então $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$, valendo a igualdade se, somente se, $x_1 = x_2 \cdots = x_n = 1$.*

Demonstração:

Vamos utilizar por indução sobre n.

Para n=1

Temos $x_1 = 1$ e portanto $x_1 \geq 1$, o que torna o resultado verdadeiro.

Suponhamos que o resultado seja válido para $n = k$, ou seja,

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_k = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k.$$

Agora vamos verificar que o resultado é válido para $n = k + 1$. De fato, sejam $x_1, x_2, \ldots x_k, x_{k+1}$ números reais positivos tais que $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1}$ Assim dois casos podem se apresentar:

Todos os números $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ são iguais, ou seja, $x_1 = x_2 \cdots = x_k = x_{k+1}$. Como estamos supondo que $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1} = 1$ segue que neste caso todos eles tem de ser iguais a 1 e portanto $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = k + 1$. O resultado vale, neste caso, para $n = k + 1$, visto que a igualdade é verificada quando cada um dos números é igual 1.

Nem todos os números são iguais, ou seja, há entre os números um deles que é menor que 1 e outro maior que 1, pois não podemos ter todos os números menores que 1 nem todos os números maiores que 1, visto que o produto de todos eles deve ser igual a 1. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_1 < 1$ e que $x_{k+1} > 1$.

Fazendo $x_1 \cdot x_{k+1} = b_1$, segue que

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1} = 1 \Rightarrow b_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_k = 1.$$

Pela hipótese de indução segue que $b_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k$. Assim,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} &= \underbrace{b_1 + x_2 + \cdots + x_k}_{\geq k} + x_1 - b_1 + x_{k+1} \\ &\geq k + x_1 - b_1 + x_{k+1} \end{aligned}$$

Para finalizar devemos verificar que $x_1 - b_1 + x_{k+1} \geq 1$.

De fato, lembrando que $x_1 \cdot x_{k+1} = b$, segue que

$$x_1 - b_1 + x_{k+1} = x_1 - x_1 \cdot x_{k+1} + x_{k+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_1 - b_1 + x_{k+1} &= x_1 - x_1 \cdot x_{k+1} + x_{k+1} \\ &= x_1(1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 + 1 \\ &= x_1(1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1}) + 1 \\ &= (1 - x_{k+1})(x_1 - 1) + 1. \end{aligned}$$

Lembrando que

$$x_1 < 1 \Rightarrow (x_1 - 1) < 0$$

$$x_{k+1} > 1 \Rightarrow (1 - x_{k+1}) < 0.$$

Segue que $(1 - x_{k+1})(x_1 - 1) > 0$ e, portanto,

$$x_1 - b_1 + x_{k+1} = (1 - x_{k+1})(x_1 - 1) + 1 \geq 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} &= k + x_1 - b_1 + x_{k+1} \\ &\Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \\ &\geq k + 1 \end{aligned}$$

que é exatamente o que queríamos demonstrar. □

Com esse lema fica imediato demonstrar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica de números reais positivos,vejamos:

Seja $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$, então

$$1 = \frac{G}{G} = \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}{G} = \sqrt[n]{\frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdots \frac{x_n}{G}} \Longrightarrow \frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdots \frac{x_n}{G} = 1.$$

Como $\frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdots \frac{X_n}{G} = 1$ segue pelo resultado que demonstramos inicialmente que:

$$\frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \cdots + \frac{x_n}{G} \geq n \Longrightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq nG \Longrightarrow G \leq \frac{x_1 + x_2 \cdots + x_n}{n} \Longrightarrow$$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração 3

Para finalizar esta seção vamos apresentar uma demonstração devida ao Matemático francês Louis Augustin Cauchy (1789-1857). A ideia da prova é fazê-la inicialmente para todo n que seja potência de 2. Depois, usando esse fato, provar para todo n que esteja entre quaisquer duas potências consecutivas de 2.

Assim, inicialmente vamos provar o resultado para o caso em que $n = 2^1 = 2$.

Como o quadrado de qualquer número real é não negativo, temos que

$$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a_1+a_2-2\sqrt{a_1\cdot a_2}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a_1\cdot a_2}\leq \frac{a_1+a_2}{2}. \quad (*)$$

Suponha que a Desigualdade da Média Aritmética e Média Geométrica seja verdadeira para $n = 2^{k-1},\ k > 2$. Isto é,

$$\sqrt[2^{k-1}]{a_1\cdot a_2\cdots a_{2^{k-1}}} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}.$$

Vamos mostrar a seguir que a Desigualdade da Média Aritmética e Média Geométrica vale para $n = 2^k$. A ideia da prova é usar o caso $n = 2$, obtido em $(*)$. Para isso, chamemos:

$$b_1 = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} \quad e \quad b_2 = \frac{a_{2^{k-1}+1}+a_{2^{k-1}+2}+\cdots+a_{2^k}}{2^{k-1}}$$

Assim, temos que:

$$\frac{b_1+b_2}{2} = \frac{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}+\frac{a_{2^{k-1}+1}+a_{2^{k-1}+2}+\cdots+a_{2^k}}{2^{k-1}}}{2} =$$

$$= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k-1}}+a_{2^{k-1}+1}+a_{2^{k-1}+2}+\cdots+a_{2^k}}{2^k}.$$

Por outro lado, usando o caso $n = 2$, veja $(*)$ acima, temos:

$$\frac{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}+\frac{a_{2^{k-1}+1}+a_{2^{k-1}+2}+\cdots+a_{2^k}}{2^{k-1}}}{2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}\right)\cdot\left(\frac{a_{2^{k-1}+1}+a_{2^{k-1}+2}+\cdots+a_{2^k}}{2^{k-1}}\right)} \geq$$

$$\geq \sqrt{(a_1\cdot a_2\cdots a_{2^{k-1}})^{\frac{1}{2^{k-1}}}(a_{2^{k-1}+1}a_{2^{k-1}+2}\cdots a_{2^k})^{\frac{1}{2^{k-1}}}} =$$

$$\geq \sqrt[2^k]{(a_1\cdot a_2\cdots a_{2^{k-1}}\cdot a_{2^{k-1}+1}\cdot a_{2^{k-1}+2}\cdots a_{2^k})},$$

como queríamos provar. $\square$

Agora, vamos provar que o resultado também vale para todo n que esteja entre duas potências consecutivas de 2.

Assim, suponha que $2^{k-1} < n < 2^k$. Provaremos que o resultado vale para n números reais não negativos quaisquer: $a_1,\ a_2,\ldots,a_n$.

Sejam $b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots,\ b_n$ os n números dados por:

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2,\ b_3 = a_3, \ldots,\ b_n = a_n,$$

e

$$b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = b_{2^k} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Assim, como o caso $n = 2^k$ é verdadeiro, temos que:

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1} + \cdots + b_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{b_1 \cdot b_2 \cdots b_n \cdot b_{n+1} \cdots b_{2^k}} \quad (**)$$

Mas, o lado esquerdo da desigualdade $(**)$ acima pode ser escrito como:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n + (2^k - n)\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}{2^k} =$$

$$= \frac{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \times n + (2^k - n)\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}{2^k} =$$

$$= \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \times \frac{\left[n + (2^k - n)\right]}{2^k} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Por outro lado, o lado direito da desigualdade $(**)$ pode ser escrito como:

$$\sqrt[2^k]{b_1 \cdot b_2 \cdots b_n \cdots b_{n+1} \cdots b_{2^k}} =$$

$$\sqrt[2^k]{(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^{2^k - n}}.$$

Logo, reescrevendo a desigualdade $(*)$, temos:

$$\left[\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right]^{2^k} \geq (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) \cdot (\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n})^{2^k - n},$$

que é equivalente a

$$\left[\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right]^{2^k - (2^k - n)} \geq (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n),$$

que nos dá:

$$\sqrt[n]{(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

como queríamos provar. $\square$

1.1.2 Desigualdade entre as Médias Geométrica e Harmônica

Teorema 2 (Desigualdade entre as Médias Geométrica e Harmônica.)**.** *Sejam* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *números reais positivos e* $n > 1$ *. Então*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração: Consideremos os números reais positivos $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$. Para essa lista de n números reais positivos, aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, segue que:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \Rightarrow H \leq G,$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \cdots = \frac{1}{x_n}$, isto é, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Como já havíamos demonstrado que $G \leq A$, segue que:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow H \leq G \leq A.$$

Para completar as desigualdades entre as principais médias, vamos mostrar na próxima seção a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática para números reais positivos. □

1.1.3 Desigualdade entre as Médias Aritmética e Quadrática

Nesta seção mostramos duas provas da desigualdade existente entre as médias aritmética e quadrática.

Teorema 3 (Desigualdade entre as médias aritmética e quadrática.)**.** *Sejam* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *números reais positivos e* $n > 1$. *Tem-se que*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_2^n}{n}}.$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração 1:
Usando a seguinte identidade

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 = (n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j. \tag{1.1}$$

Concluímos que,

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq (n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{1.2}$$

Dado que o termo da esquerda em (2.1) é não negativo. Somando em ambos os membros de (2.2) a quantidade $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ obtemos

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq (n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \cancel{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

isto é, $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$. Dividindo essa desigualdade por n^2 e tomando a raiz quadrada, obtemos

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Além disso, perceba que a igualdade (2.2) ocorre se, e somente se,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 = 0.$$

O que é verdade se, somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. $\square$

Agora exibiremos uma outra demonstração do mesmo resultado utilizando simplesmente produtos notáveis.

Demonstração 2: Sabemos que:

$$(x_i - x_j)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x_ix_j \leq x_i^2 + x_j^2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 &= \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_{n-1}x_n}{n^2} \\
&\leq \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + (x_1^2 + x_2^2) + \cdots + (x_{n-1}^2 + x_n^2)}{n^2} \\
&= \frac{n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}{n^2} \\
&= \frac{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}{n}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + a_2^n}{n}} \Rightarrow A \leq Q.$$

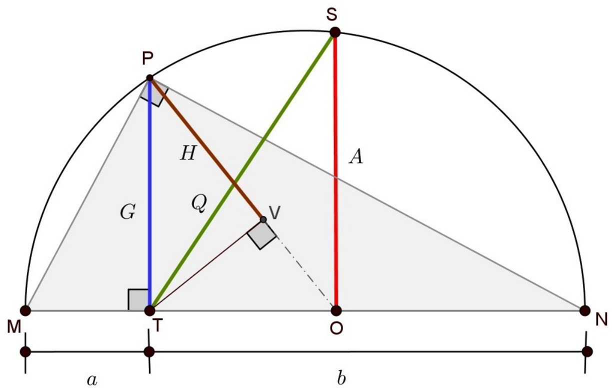
A igualdade ocorrendo se, e somente se, $2x_ix_j = x_i^2 + x_j^2$, o que é equivalente a $(x_i - x_j)^2 = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Portanto a igualdade ocorre se, e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. $\square$

Em síntese, se $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são números reais positivos, tem-se que $H \leq G \leq A \leq Q$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Um outro fato que merece destaque é que no caso para $n = 2$ podemos visualizar geometricamente as desigualdades entre as quatro principais médias,

$$H \leq G \leq A \leq Q,$$

como sugere a figura a seguir:



$$H = \frac{2ab}{a+b}, G = \sqrt{ab}, A = \frac{a+b}{2}, Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Figura 1.3: Semicírculo das médias

Para visualizar esses fatos, considere que o semicírculo da figura acima tem raio de medida R. Note que $MN = a+b$, como $MN = 2R \Rightarrow 2R = a+b$, isto é, $R = \frac{a+b}{2}$. Por outro lado, $OS = R = \frac{a+b}{2} = A$, então $A = \frac{a+b}{2}$. No triângulo retângulo MNP podemos aplicar a relação métrica $PT^2 = MT \cdot TN$ para concluirmos que $G = \sqrt{ab}$. Como OS é a medida do raio do semicírculo,segue que $PT \leq OS$, o que pode ser escrito como $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, i.e., $G \leq A$.

Por outro lado, $OT = \left(\frac{a+b}{2} - a\right) = \frac{b-a}{2}$ e $OS = \frac{a+b}{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OTS, temos:

$$\begin{aligned} TS^2 &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{2a^2 + 2b^2}{4} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $TS = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = Q$. Por fim, no triângulo OTS, temos que $OS \leq TS$, o que nos permite concluir que $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, isto é, $A \leq Q$.

Para visualizar a média harmônica, vamos observar o triângulo retângulo OTV. Uma das relações métricas desse triângulo nos diz que $PT^2 = PV \cdot OP$. Ora, como

$PT = G$ e $OP = \frac{a+b}{2} = A$, segue que

$$G^2 = OP \cdot PV = A \cdot PV \Rightarrow PV = \frac{G^2}{A}.$$

Assim,

$$PV = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = H.$$

Como $PV \leq PT$, segue que $H \leq G$. Resumindo,

$$PV \leq PT \leq OS \leq TS \Rightarrow H \leq G \leq A \leq Q.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $PV = PT = OS = TS$, o que ocorre se, o somente se $a = b$. $\square$

Como uma consequência da desigualdade existente entre as médias aritmética e geométrica de números reais positivos, mostraremos que a condição necessária e suficiente para que o produto de n números reais positivos seja máximo, quando a soma desses n números é fixada, é que todos esses números sejam iguais, como afirma a seguinte proposição.

Proposição 1. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos tais que a sua soma é constante, i.e., $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$, paral algum $k \in \mathbb{R}_+$, fixado. Então o produto $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ será máximo quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.*

Demonstração: Denotaremos a partir deste exemplo **MA: média aritmética e MG:média geométrica**

De fato, usando **desigualdade MA-MG**, segue que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{k}{n},$$

ou seja, $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{k}{n}\right)^n$. Portanto, o valor máximo $\left(\frac{k}{n}\right)^n$ é atingido, se e somente se as médias aritmética e geométrica forem iguais, o que ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. $\square$

De modo completamente análogo tem-se que a soma de n números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cujo produto é fixo, i.e., $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = p$, com $p \in \mathbb{R}$, é mínima quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. De fato, pela **desigualdade MA-MG**, segue que

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \sqrt[n]{p} \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n\sqrt[n]{p},$$

com a igualdade ocorrendo, se e somente se as médias aritmética e geométrica forem iguais, o que ocorre se, e somente, se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Agora, mostraremos alguns exemplos cuja solução pode ser feita utilizando-se os principais fatos até aqui estabelecidos.

Exemplo 1.1.1. *Mostre que entre todos os retângulos de mesmo perímetro, o que tem a maior área é um quadrado.*

Demonstração:
Sejam x e y a medida dos lados do retângulo, temos $2x+2y = 2p$, ou seja, $x+y = p$. A média aritmética de x e y é igual a $\frac{p}{2}$. A área do retângulo é $A = xy$. Temos

$$\sqrt{A} = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{p}{2}.$$

Portanto,

$$A \leq \frac{p^2}{4}.$$

E a igualdade só é obtida quando $x = y$. Portanto, o retângulo de maior área é o quadrado de área $\frac{p^2}{4}$. □

Exemplo 1.1.2. *Mostre que entre todos os retângulos de mesma área, aquele que possui o menor perímetro é um quadrado.*

Demonstração:
Se os lados do retângulo são x e y, temos $xy = A$, isto é, a média geométrica de x e y é igual $\sqrt{A}$. O perímetro do retângulo é $2(x + y)$. temos

$$2(x + y) = 4 \cdot \frac{x+y}{2} \geq 4\sqrt{xy} = 4\sqrt{A}.$$

Portanto,

$$2(x + y) \geq 4\sqrt{A}.$$

E a igualdade só é obtida quando $x = y$. Portanto, o retângulo de menor perímetro é o quadrado de perímetro $4\sqrt{A}$. □

Exemplo 1.1.3. *Mostre que entre todos os triângulos de mesmo perímetro, aquele que possui a maior área é o equilátero.*

Demonstração:
Sejam x, y e z os lados do triângulo. Por Heron, a medida da área do triângulo é dada por:

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Assim, para um triângulo de perímetro constante, a área máxima quando produto $p(p-x)(p-y)(p-z)$ é máximo. Note que a soma $(p-x)+(p-y)+(p-z) = 3p-2p = p$ é sempre constante. Logo, para que $(p-x)(p-y)(p-z)$ seja máximo deve-se $(p-x) = (p-y) = (p-z)$, ou seja, $x = y = z$. Portanto, dentre os triângulos de mesmo perímetro, o equilátero é o de maior área.
De modo análogo ao que ocorreu com o retângulo, também pode-se demonstrar que entre todos os triângulos de mesma área, o de menor perímetro é o equilátero. □

Exemplo 1.1.4. *Mostre que o polinômio $p(x) = x^5 - 10x + 35$ não possui raízes positivas.*

Solução: De fato, suponha, por absurdo, que o polinômio p possuísse uma raiz positiva, isto é, suponha que existisse $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ tal que $p(a) = 0$. Nesse caso,

$$p(a) = 0 \Leftrightarrow a^5 - 10a + 35 = 0.$$

Assim,

$$a^5 - 10a + 35 = 0 \Leftrightarrow a^5 - 10a + 1 + 1 + 1 + 32 = 0.$$

Aplicando a **desigualdade MA-MG** para os números reais positivos $a^5, 1, 1, 1$ e 32, segue que

$$\sqrt[5]{a^5.1.1.1.32} < \frac{a^5+1+1+1+32}{5} \Leftrightarrow 2a < \frac{a^5+35}{5} \Leftrightarrow a^5 - 10a + 35 > 0,$$

o que é uma contradição pois $a^5 - 10a + 35 = 0$. Diante do exposto, a nossa suposição inicial de que o polinômio p tivesse uma raiz positiva não pode ser verdadeira, o que nos permite afirmar que o polinômio $p(x) = x^5 - 10x + 35$ não possui raízes positivas. (Note que na desigualdade das médias usamos uma desigualdade estrita "$<$" pois os números usados para o cálculo das médias são distintos, e como sabemos a igualdade ocorre se, e somente se, o números são iguais).

Exemplo 1.1.5. *Sabendo-se que o polinômio*

$$p(x) = x^{100} - 600x^{99} + a_{98}x^{98} + a_{97}x^{97} + \cdots + a_1 x + a_0$$

tem 100 *raízes reais e que* $p(7) > 1$*, mostre que* p *possui pelo menos uma raiz maior que* 7*.*

Solução: Por Girad, $\sum_{i=1}^{100} x_i = \frac{600}{1} = 600$. Agora suponha, por absurdo, que todas as raízes do polinômio p sejam $x_i < 7$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, 100$. Assim,

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{100}).$$

Portanto,

$$1 < p(7) = (7 - x_1)(7 - x_2)(7 - x_3) \cdots (7 - x_{100}).$$

Mas,

$$\begin{aligned} 1 = {} & \sqrt[100]{1} < \sqrt[100]{(7 - x_1)(7 - x_2)(7 - x_3) \cdots (7 - x_{100})} \\ \leq {} & \frac{(7 - x_1) + (7 - x_2) + (7 - x_3) + \cdots + (7 - x_{100})}{100} \\ = {} & \frac{700 - \displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} \\ = {} & 1, \end{aligned}$$

ou seja, $1 < 1$, o que é um absurdo! Portanto não é possível que todas as raízes do polinômio p sejam todas menores que 7, o que nos permite concluir que pelo menos uma das raízes é maior que 7.

Geralmente quando estudamos as desigualdades entre as médias (para números reais positivos) não damos a devida atenção para o fato de que as médias são iguais se, e somente se, os números são iguais. A seguir mostraremos dois exemplos onde o fato das médias serem iguais (e portanto os números serem iguais) é a principal peça para a solução do problema.

Exemplo 1.1.6. *Um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são* a, b *e* c*. Se a medida da área total da sua superfície é* $216cm^2$ *e a medida do seu volume é* $216cm^3$*. Mostre que esse paralelepípedo é um cubo.*

Resolução: A medida da área total e do volume de um paralelepípedo retângulo cujas arestas medem a, b e c são $A_T = 2(ab + ac + bc)$ e $V = abc$, respectivamente. Então

$$\begin{cases} 2(ab+ac+bc) = 216 \\ abc = 216 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab+ac+bc = 108 \\ abc = 216 \end{cases}.$$

Calculando as médias aritmética e geométrica dos números reais positivos ab, ac e bc, segue que

$$A = \frac{ab+ac+bc}{3} = \frac{108}{3} = 36.$$
$$G = \sqrt[3]{ab.ac.bc} = \sqrt[3]{(abc)^2} = \sqrt[3]{216^2} = 36.$$

Ora, como $G = A$, segue que $ab = ac = bc \Leftrightarrow a = b = c$, o que revela que o paralelepípedo é na verdade, um cubo.

Pra finalizar essa seção, mostraremos mais um exemplo em que o fato das médias aritmética e geométrica de alguns números reais positivos serem iguais é a chave para a solução do problema.

Exemplo 1.1.7. *Determine as raízes α, β, γ e λ da equação*

$$4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0,$$

sabendo que as raízes são positivas e

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{5} + \frac{\lambda}{8} = 1.$$

Resolução: Por Girard, $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \lambda = \frac{5}{4}$. Assim,

$$\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta}{4} \cdot \frac{\gamma}{5} \cdot \frac{\lambda}{8} = \frac{1}{2.4.5.8} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{4^4}.$$

Portanto as médias aritmética e geométrica dos números $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{4}, \frac{\gamma}{5}$ e $\frac{\lambda}{8}$ são respectivamente,

$$A = \frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{5} + \frac{\lambda}{8}}{4} = \frac{1}{4}$$
$$G = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta}{4} \cdot \frac{\gamma}{5} \cdot \frac{\lambda}{8}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4^4}} = \frac{1}{4},$$

ou seja, as médias aritmética e geométrica são iguais, o que ocorre se, e somente se, os números $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{4}, \frac{\gamma}{5}$ e $\frac{\lambda}{8}$ são iguais. Como a soma deles é 1, segue que cada um desses números é igual a $\frac{1}{4}$. Assim,

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{5} = \frac{\lambda}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 1 \\ \gamma = \frac{5}{4} \\ \lambda = 2. \end{cases}$$

1.2 Desigualdade de Bernoulli

Agora vamos apresentar a famosa desigualdade de Bernoulli, que tem esse nome em homenagem ao matemático Jacob Bernoulli (1654 - 1705), membro da famosa família Bernoulli de eminentes matemáticos suíços. Nesta seção apresentaremos a desigualdade juntamente com uma demonstração e uma forma um pouco mais geral para tal desigualdade. Finalizaremos exibindo algumas aplicações interessantes do uso de tal desigualdade. Começamos enunciando o seguinte

Teorema 4 (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Se α e x são números reais tais que $x \geq -1$ e $0 < \alpha < 1$, então*

$$(1+x)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x.$$

Por outro lado, se $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$, tem-se que

$$(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x.$$

Demonstração

Suponhamos que α é um número racional com a particularidade de que $0 < \alpha < 1$. Seja $\alpha = \frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros positivos e $1 \leq m < n$. Como por hipótese $1+x>0$ temos

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= (1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m\cdot 1^{n-m}}\\ &= \sqrt[n]{\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{m}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-m}}\\ &\le \frac{(1+x)+(1+x)+\cdots+(1+x)+1+1+\cdots+1}{n}\\ &= \frac{m(1+x)+n-m}{n} = \frac{n+mx}{n} = 1+\frac{m}{n}x = 1+\alpha x.\end{aligned}$$

O sinal da igualdade ocorre apenas se todos os fatores listados abaixo do radical forem iguais, isto é, se $1+x=1$, $x=0$. Por outro lado, se $x\neq 0$, temos

$$(1+x)^\alpha < 1+\alpha x.$$

Ou seja, provamos a parte do teorema para o caso em que α é um número racional. Suponhamos agora que α, com $0<\alpha<1$, seja um número irracional. Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ uma sucessão de números racionais que tem α como limite com a particularidade que $0<r_n<1$. Das desigualdades

$$(1+x)^{r_n} \le 1+r_n x, \qquad x\ge -1, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Mostrada para o caso em que o expoente é um número racional, segue-se que

$$(1+x)^\alpha = \lim_{r_n\to\alpha}(1+x)^{r_n} \le \lim_{r_n\to\alpha}(1+r_n x) = 1+\alpha x.$$

Com isso, a desigualdade $(1+x)\alpha \le 1+\alpha x$ também é demonstrada para os valores irracionais de α. Resta demonstrar que para valores irracionais de α, sendo $0<\alpha<1$, e $x\neq 0$, tem-se

$$(1+x)^\alpha < 1+\alpha x,$$

ou seja, que o sinal de igualdade não ocorre em $(1+x)^\alpha \le 1+\alpha x$, se $x\neq 0$. Para esse propósito, tomamos um número racional r tal que $\alpha<r<1$. É evidente que

$$(1+x)^\alpha = \left[(1+x)^{\frac{\alpha}{r}}\right]^r.$$

Posto que $0<\frac{\alpha}{r}<1$. já mostramos que

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{r}} \le 1+\frac{\alpha}{r}x.$$

Por consequência,

$$(1+x)^{\alpha} \leq \left(1+\frac{\alpha}{r}x\right)^{r}.$$

Se $x \neq 0$, temos $\left(1+\frac{\alpha}{r}x\right)^{r} < 1 + r\frac{\alpha}{r}x = 1+\alpha x$, ou seja,

$$(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x.$$

Com isso, a primeira parte do teorema é totalmente demonstrada. □

Demonstraremos a segunda parte do teorema.

Se $1+\alpha x < 0$, a desigualdade $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$ é evidente, pois o seu primeiro membro não é negativo enquanto que o segundo membro é negativo.

Se $1+\alpha x \geq 0$, isto é, $\alpha x \geq -1$, vamos considerar separadamente cada um dos casos.

Seja $\alpha > 1$; então, de acordo com a primeira parte do teorema, já demonstrada, temos

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1+\frac{1}{\alpha}\alpha x = 1+x,$$

com a particularidade de que o sinal de igualdade só ocorre se $x=0$. Elevando a potência α em ambos os membros a última desigualdade, obtemos

$$1+\alpha x \leq (1+x)^{\alpha}.$$

Seja agora $\alpha < 0$. Se $1+\alpha x < 0$, a desigualdade $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$ torna-se evidente. Se $1+\alpha x \geq 0$, Tomemos um número inteiro positivo n de modo que se cumpra a desigualdade $-\frac{\alpha}{n} < 1$. Em virtude da primeira parte do teorema, temos

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}} \leq 1-\frac{\alpha}{n}x,$$

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geq \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x} \geq 1+\frac{\alpha}{n}x$$

(a última desigualdade é válida porque $1 \geq 1-\frac{\alpha^2}{n^2}x^2$). Elevando a n-ésima potência a ambos os membros da última desigualdade, obtemos

$$(1+x)^{\alpha} \geq \left(1+\frac{\alpha}{n}x\right)^{n} \geq 1+n\frac{\alpha}{n}x = 1+\alpha x.$$

Notemos que a igualdade pode ocorrer apenas no caso $x=0$. □

Tradicionalmente nos cursos de Cálculo a desigualdade de Bernoulli é a apresentada da seguinte forma: se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$, então $(1+x)^{n} \geq 1+nx$.

Note que esse é um caso particular do teorema que acabamos de apresentar, bastando tomar $\alpha = n \in \mathbb{N}$. Há uma forma um pouco menos conhecida para a desigualdade de Bernoulli que é apresentada na proposição a seguir:

Proposição 2. *Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais com o mesmo sinal, $x_i \geq -1$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Então*

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \tag{1.3}$$

Demonstração:
Provaremos por indução sobre n.
Para $n = 1 \Rightarrow 1 + x_1 \geq 1 + x_1$, o que é verdadeiro para todo x_1 real, em particular para todo $x_1 \geq 1$.
Suponha que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, i.e., se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números reais tais que $x_i > -1, i = 1, 2, \dots, k$, com o mesmo sinal, a desigualdade (2.3) é válida, isto é,

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k. \tag{1.4}$$

Agora, sejam $n = k + 1$, e os números reais $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ números reais tais que $x_i \geq -1$, com $i = 1, 2, \dots, k + 1$, arbitrários com o mesmo sinal.
Então, uma vez que $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ tenha o mesmo sinal, tem-se que:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)x_{k+1} \geq 0. \tag{1.5}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) &\overset{(2.4)}{\geq} (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(1 + x_{k+1}) \\
&= 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} + \\
&+ (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)x_{k+1} \\
&\overset{(2.5)}{\geq} 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1},
\end{aligned}$$

isto é, a desigualdade (2.3) é válida para $n = k + 1$.
Note que no caso particular em que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$, com $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq -1$, temos

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n \Rightarrow$$

$$\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{n \text{ vezes}} \geq 1 + \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ parcelas}} \Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx,$$

que é o modo tradicional da desigualdade de Bernoulli. □

A seguir apresentaremos duas aplicações da desigualdade de Bernoulli; a primeira delas mostra que uma função exponencial de base $a > 1$ é ilimitada; na segunda mostraremos um exemplo em que usaremos a desigualdade de Bernoulli para avaliar entre duas situações, qual é a que maximiza a probabilidade de ganhar numa loteria.

Exemplo 1.2.1. *Mostre que a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = a^x$, com $a > 1$, é ilimitada superiormente, isto é, dado um número real $\alpha > 0$, existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $a^x > \alpha$.*

Resolução: De fato, como $a > 1$, existe um número real $b > 0$ tal que $a = 1 + b$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{\alpha - 1}{b}$, tem-se:

$$n > \frac{\alpha - 1}{b} \Rightarrow 1 + nb > \alpha.$$

Assim, tomando $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > n$, tem-se que:

$$a^x = (1+b)^x > (1+b)^n \geq 1 + nb > \alpha,$$

o que revela que a função exponencial de base $a > 1$ é ilimitada superiormente.

Exemplo 1.2.2 ([12]). *Considere uma loteria semanal que possui N bilhetes, um único bilhete premiado a cada semana, e um apostador que compra $n \leq N$ bilhetes. É melhor fazer uma única aposta com os n bilhetes num mesmo sorteio ou apostar um único bilhete em n semanas semanas distintas?*

Resolução:

Defina:

- Ω_1 ={Os N bilhetes da loteria};
- A_n ={ser premiado fazendo-se n apostas num único sorteio} em que $A_n \subset \Omega_1$;
- $\Omega_n := {\Omega_1}^n = \underbrace{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_1}_{\text{n vezes}}$. Todas as sequências de resultados possíveis em n sorteios;

- B_i ={ser premiado no i-ésimo sorteio} com $i \in \{1, ..., n\}$;
- $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \subset \Omega_n$. Ser premiado em algum dos n sorteios.

Segue-se portanto que

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{|A_n|}{|\Omega_1|} = \frac{n}{N} \text{ e } \mathbb{P}(B) = 1 - (\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i^c)) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

Pela desigualdade de Bernoulli, tem-se que se $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$, então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Assim

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = \left(1 + \left(-\frac{1}{N}\right)\right)^n \geq 1 + n\left(-\frac{1}{N}\right) = 1 - \frac{n}{N}\text{, e portanto,}$$

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{n}{N} \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = \mathbb{P}(B).$$

Portanto, para maximizar a probabilidade de ganhar na loteria é melhor apostar todos os n bilhetes em um único sorteio.

1.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Nesta seção vamos apresentar, uma outra famosa desigualdade; a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**.

Teorema 5. *Sejam $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ números reais, então*

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2).$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $a_i = tb_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração: No caso em $a_1 = \cdots = a_n = 0$ ou $b_1 = \cdots = b_n = 0$, o resultado é verdadeiro, visto que em qualquer desses casos os dois membros da desigualdade são iguais a zero. Assim basta dar uma prova no caso em que nem todos os a's são nulos e nem todos os b's são nulos. Para isso, considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} f(x) = & \ (a_1x - b_1)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2 \\ = & \ (a_1^2x - 2a_1xb_1 + b_1^2) + \cdots + (a_n^2x^2 - 2a_nxb_n + b_n^2) \\ = & \ (a_1^2 + \cdots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)x + (b_1^2 + \cdots + b_n^2) \\ = & \ ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned} & a = a_1^2 + \cdots + a_n^2. \\ & b = -2(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n). \\ & c = b_1^2 + \cdots + b_n^2. \end{aligned}$$

Por outro lado note que $f(x) = (a_1x - b_1)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2 \geq 0$ (pois f é uma soma de quadrados de números reais). Ora, como o coeficiente de x^2 em f é $(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$, que é um número real positivo, segue que $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \leq 0$. Assim,

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac \leq 0 \Leftrightarrow b^2 \leq 4ac.$$

Mas,

$$b^2 \leq 4ac \Leftrightarrow [-2(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)]^2 \leq 4(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \Leftrightarrow$$

$$4(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq 4(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \Leftrightarrow$$

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2).$$

Além disso, perceba que a igualdade ocorre se, e somente se $\Delta = 0$. Nesse caso, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 0$. Nesse caso,

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow (a_1t - b_1)^2 + \cdots + (a_nt - b_n)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1t - b_1 = 0 \\ \vdots \\ a_nt - b_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = ta_1 \\ \vdots \\ b_n = ta_n \end{cases}$$

ou seja, a igualdade ocorre se, e somente se, os números (nessa ordem) $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ são proporcionais. □

A seguir mostraremos dois exemplos cuja solução pode ser facilmente obtida com o uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Exemplo 1.3.1. *Determine o conjunto imagem da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida pela lei* $f(x) = 4senx + 3cosx$.

Resolução: Defina duas listas de números reais, a seguir: $(4,3)$ e $(senx, cosx)$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para essas duas listas de números reais, segue que

$$(4senx + 3cosx)^2 \leq (4^2 + 3^2)\underbrace{(sen^2x + cos^2x)}_{=1} \Rightarrow$$

$$(f(x))^2 \leq 25 \Rightarrow |f(x)| \leq \sqrt{25} \Rightarrow |f(x)| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq f(x) \leq 5,$$

como a igualdade ocorre no caso em que as duas listas têm elementos proporcionais, segue que o conjunto imagem de f é o intervalo $[-5,5]$.

Exemplo 1.3.2. *Determine a distância entre um ponto da elipse* (Γ) *cuja equação cartesiana é* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1$ *e a reta* (r) *cuja equação cartesiana é* $3x - 2y - 16 = 0$.

Resolução: Da Geometria Analítica, a distância de um ponto de coordenadas (x_o, y_o) à reta de equação $3x - 2y - 16 = 0$ é dada por

$$d = \frac{|3x_o - 2y_o - 16|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|3x_o - 2y_o - 16|}{\sqrt{13}}.$$

Assim, para determinarmos o menor valor de d, basta determinarmos o menor valor de $|3x_o - 2y_o - 16|$, onde (x_o, y_o) são as coordenadas do ponto da elipse (Γ) que está a uma menor distância da reta (r) (veja a figura a seguir). Note que podemos reescrever a equação $\frac{x_o^2}{4} + \frac{y_o^2}{7} = 1$ como $\frac{(3x)^2}{4.3^2} + \frac{(-2y)^2}{7.(-2)^2} = 1$. Sendo $P = (x_o, y_o)$ as coordenadas do pondo da elipse que minimiza a distância até a reta.

Considerando os pares de números reais $(\frac{3x_o}{\sqrt{4.3^2}}, \frac{-2y_o}{\sqrt{7.(-2)^2}})$ e $(\sqrt{4.3^2}, \sqrt{7.(-2)^2})$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$(3x_o - 2y_o)^2 \leq \underbrace{\left(\frac{(3x_o)^2}{4.3^2} + \frac{(-2y_o)^2}{7.(-2)^2}\right)}_{=1}\left(4.3^2 + 7.(-2)^2\right) \Rightarrow$$

$$(3x_o - 2y_o)^2 \leq 64 \Rightarrow |3x_o - 2y_o| \leq 8 \Rightarrow -8 \leq 3x_o - 2y_o \leq 8.$$

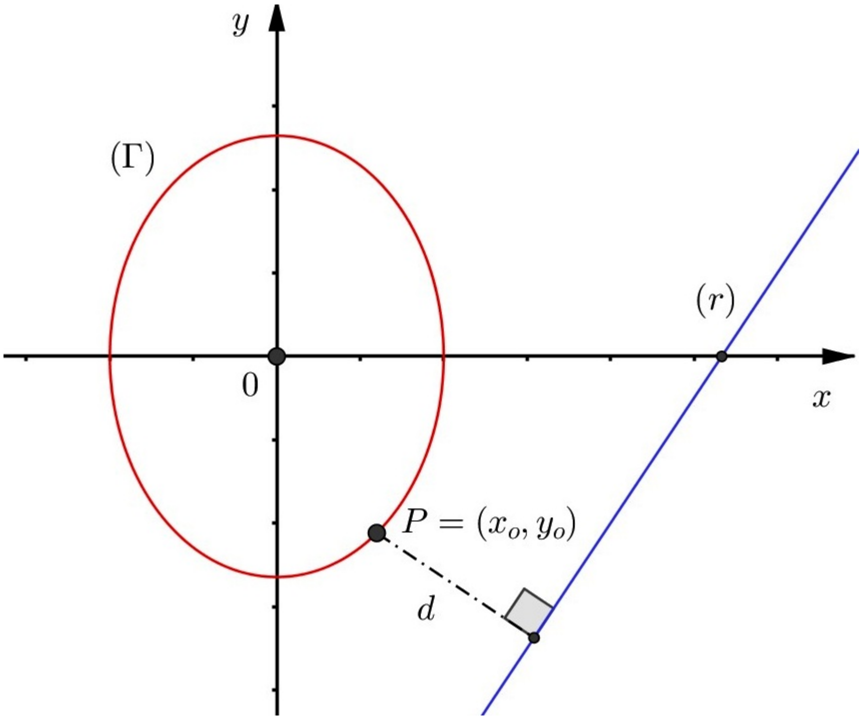


Figura 1.4: Semicírculo das médias

Portanto,

$$-8 \leq 3x_o - 2y_o \leq 8 \Rightarrow -16 - 8 \leq 3x_o - 2y_o - 16 \leq 8 - 16 \Rightarrow$$
$$-24 \leq 3x_o - 2y_o - 16 \leq -8.$$

Diante do exposto menor valor assumido pela expressão $|3x_o - 2y_o - 16|$ é 8, o que faz com que a distância entre a elipse de equação cartesiana $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1$ e a reta cuja equação cartesiana é $3x - 2y - 16 = 0$ seja

$$d = \frac{|3x_o - 2y_o - 16|}{\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13}.$$

Observação 1.3.1. *Lembrando que na desigualdade de Cauchy-Schwarz ocorre a igualdade se, e somente se, os pontos têm coordenadas proporcionais, segue que o ponto* (x_o, y_o) *(da elipse* (Γ)*) que faz com que a distância* $d = \frac{8\sqrt{13}}{13}$ *seja atingida é exatamente o ponto para o qual ocorre a igualdade em Cauchy-Schwarz, isto é, é o ponto de coordenadas* (x_o, y_o) *tal que* $\frac{\frac{3x_o}{\sqrt{4.3^2}}}{\sqrt{4.3^2}} = \frac{\frac{-2y_o}{\sqrt{7.(-2)^2}}}{\sqrt{7.(-2)^2}} \Leftrightarrow \frac{3x_o}{36} = \frac{-2y_o}{28}$*. Substituindo essas informações na equação da elipse, podemos encontrar* $x_o = \frac{3}{2}$ *e* $y_o = -\frac{7}{4}$*, que são as coordenadas do ponto da elipse* (Γ) *que está a uma menor distância da reta* (r).

Um resultado simples mas não muito conhecido e intimamente relacionado com a desigualdade de Cauchy-Schwarz é o chamado "Lema poderoso"(esse é o tradicional nome desse lema na literatura) que apresentamos a seguir:

Lema 3 (Lema poderoso)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, então*

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Demonstração: Se $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, segue que

$$(ay - bx)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy.$$

Adicionando $a^2xy + b^2xy$ a cada membro da ultima desigualdade, segue que

$$a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy \Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 + a^2xy + b^2xy \geq 2abxy + a^2xy + b^2xy \Leftrightarrow$$

$$a^2y(x+y) + b^2x(x+y) \geq xy(a^2+2ab+b^2) \Leftrightarrow a^2y(x+y) + b^2x(x+y) \geq xy(a+b)^2.$$

Dividindo ambos os membros dessa última desigualdade por $xy(x+y)$, segue que

$$a^2y(x+y) + b^2x(x+y) \geq xy(a+b)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2y(x+y)}{xy(x+y)} + \frac{b^2x(x+y)}{xy(x+y)} \geq \frac{xy(a+b)^2}{xy(x+y)} \Leftrightarrow \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Além disso, note que a igualdade ocorre se, e somente se,

$$(ay - bx)^2 = 0 \Leftrightarrow ay - bx = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$$

□

Observação 1.3.2. *Pode-se estender o "Lema poderoso"para uma quantidade finita de parcelas:*
Se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, então

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + \cdots + x_n}.$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\frac{a_1}{x_1} = \cdots = \frac{a_n}{x_n}$.
De fato, inicialmente vejamos no caso $n = 3$*:*

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right) + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Seguindo esse mesmo raciocínio passo a passo (ou fazendo indução sobre n*), pode-se demonstrar que no caso em que* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *e* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$*, então*

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + \cdots + x_n}.$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\frac{a_1}{x_1} = \cdots = \frac{a_n}{x_n}$.

Por fim, vamos mostrar que a desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser deduzida a partir do "Lema poderoso". De fato,

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = & \frac{a_1^2 b_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2 b_2^2}{b_2^2} + \cdots + \frac{a_n^2 b_n^2}{b_n^2} \\ \geq & \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

que é exatamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. *Também pode-se deduzir o ''Lema poderoso"a partir da desigualdade de Cauchy-Schwarz, o que revela a equivalência entre essas duas desigualdades. De fato, considerando as* n*-uplas* $\left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{x_2}}, \ldots, \frac{a_n}{\sqrt{x_n}}\right)$ *e* $(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n})$*, com* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *e* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$*, por Cauchy-Schwarz, segue que*

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}\sqrt{x_1} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{x_n}}\sqrt{x_n}\right)^2 \leq \left(\frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n}\right)(x_1 + \cdots + x_n).$$

Como $x_1 + \cdots + x_n > 0$*, segue que:*

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + \cdots + x_n},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\frac{a_1}{x_1} = \cdots = \frac{a_n}{x_n}$*, como queríamos demonstrar.*

□

Uma última observação é que no exemplo (1.3.2) poderíamos ter usado o "Lema poderoso"para estimar o valor de $(3x_o - 2y_o)$. Vejamos:

$$1 = \frac{(3x)^2}{4.3^2} + \frac{(-2y)^2}{7.(-2)^2} \geq \frac{(3x_o - 2y_o)^2}{36+28} \Rightarrow (3x_o - 2y_o)^3 \leq 64 \Rightarrow |3x_o - 2y_o| \leq 8.$$

1.4 Desigualdade entre as Médias de Potências

Nesta seção vamos estabelecer uma importante desigualdade entre as médias potência e a partir daí apresentar uma nova prova para as desigualdades $H \leq G \leq A \leq Q$, no caso em essas médias são calculadas para números reais positivos. Para isso, iniciaremos com o seguinte resultado:

Teorema 6. *Sejam α e β números reais tais que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são reais positivos e $\alpha < \beta$ então $P_\alpha \leq P_\beta$, isto é,*

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Demonstração

Inicialmente vamos demonstrar que se $a_1, \ldots, a_n$ são números reais positivos, e $\alpha < 0 < \beta$ então $P_\alpha < G < P_\beta$, onde G é a média geométrica dos números $a_1, \ldots, a_n$.

De fato, para números reais positivos, já provamos que a média geométrica é sempre menor do que ou igual a média aritmética. Assim,

$$\sqrt[n]{a_1^\alpha \cdot a_2^\alpha \cdots a_n^\alpha} \leq \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}.$$

Lembrando que $\alpha < 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < 0$, elevando a $\frac{1}{\alpha}$ cada um dos membros da desigualdade anterior, segue que:

$$\left(\sqrt[n]{a_1^\alpha \cdot a_2^\alpha \cdots a_n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow$$

$$G = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \geq \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = P_\alpha,$$

ou seja, se $\alpha < 0$, então $P_\alpha \leq G$.

De modo completamente análogo, se $\beta > 0$, segue que $\frac{1}{\beta} > 0$ e daí elevando a $\frac{1}{\beta}$ ambos os membros da desigualdade

$$\sqrt[n]{a_1^\beta \cdot a_2^\beta \cdots a_n^\beta} \leq \frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}$$

segue que

$$\left(\sqrt[n]{a_1^\beta \cdot a_2^\beta \cdots a_n^\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow$$

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}} = P_\beta,$$

ou seja, se $\beta > 0$, então $G \leq P_\beta$. Além disso, a igualdade ocorre se, o semente se, $a_1 = \cdots = a_n$. $\square$

Note que

$$P_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n} \right)^{\frac{1}{(-1)}} = \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \right)^{-1} = H;$$

$$P_1 = \left(\frac{a_1^1 + a_2^1 + \cdots + a_n^1}{n} \right)^{\frac{1}{1}} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right) = A.$$

Portanto, se tomarmos $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, teremos $P_{-1} \leq P_1 \Rightarrow H \leq A$, ou seja, teremos uma demonstração alternativa da desigualdade entre as médias harmônica e aritmética.

Agora vamos Investigar o caso em que α e β têm o mesmo sinal. Para começar, suponhamos que $0 < \alpha < \beta$. Seja

$$k = P_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + {a_2}^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Dividindo P_β por k, obtemos:

$$\frac{P_\beta}{P_\alpha} = \frac{P_\beta}{k} = \frac{\left(\frac{a_1^\beta + a_2{}^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{k} = \left(\frac{1}{k^\beta} \cdot \frac{a_1^\beta + a_2{}^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow$$

$$\frac{P_\beta}{k} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\beta + \cdots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Definindo, $b_1 = \left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha, b_2 = \left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha \cdots, b_n = \left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{P_\beta}{k} &= \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\beta + \cdots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&= \left(\frac{\left[\left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha\right]^{\frac{\beta}{\alpha}} + \left[\left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha\right]^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + \left[\left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha\right]^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&= \left(\frac{b_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + b_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + b_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} &= \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha + \cdots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{k}\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{k} P_\alpha \\
&= \frac{1}{P_\alpha} P_\alpha = 1,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 \Rightarrow \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = 1 \Rightarrow b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n.$$

Assim, supondo que

$$b_1 = 1 + x_1, b_2 = 1 + x_2, \ldots, b_n = 1 + x_n$$

segue que

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n \Rightarrow (1 + x_1) + (1 + x_2) + \cdots + (1 + x_n) = n$$

o que revela que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Ora, como estamos supondo que $0 < \alpha < \beta$, segue que $\frac{\beta}{\alpha} > 1$. Aplicando a desigualdade de Bermoulli, segue que:

$$\begin{aligned} b_1^{\frac{\beta}{\alpha}} &= (1 + x_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq 1 + \tfrac{\beta}{\alpha} x_1; \\ b_2^{\frac{\beta}{\alpha}} &= (1 + x_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq 1 + \tfrac{\beta}{\alpha} x_2; \\ &\vdots \\ b_n^{\frac{\beta}{\alpha}} &= (1 + x_n)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq 1 + \tfrac{\beta}{\alpha} x_n. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Adicionando membro a membro essas desigualdades, obtemos:

$$b_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + b_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + b_n^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq n + \frac{\alpha}{\beta} \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}_{=0} = n,$$

como

$$\frac{P_\beta}{k} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\beta + \cdots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

segue que

$$\frac{P_\beta}{k} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\beta + \cdots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}} \geq \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = 1.$$

Portanto,$\frac{P_\beta}{k} \geq 1 \Rightarrow P_\beta \geq k = P_\alpha$, o que prova que se $0 < \alpha < \beta$, então $P_\alpha \leq P_\beta$. Além disso perceba que a igualdade ocorre se, e somente se, ocorrem todas as igualdades em (1.6), o que ocorre se, e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, o que implica $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$, o que ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Por fim, se $\alpha < \beta < 0$, segue que $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$, poderíamos proceder de modo muito semelhante, exceto pelo fato que as desigualdades de Bernoulli em (1.6) teriam seus sinais invertidos. Assim, nesse caso podemos obter $b_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + b_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + b_n^{\frac{\beta}{\alpha}} \leq n$, o que nos permite, nesse caso, concluir que

$$\frac{b_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + b_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + b_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n} \leq 1.$$

Como $\beta < 0$ e portanto $\frac{1}{\beta} < 0$, segue que

$$\frac{b_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + b_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + b_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{b_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + b_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + b_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \geq 1^{\frac{1}{\beta}} = 1.$$

lembrando que $\frac{P_\beta}{k} = \left(\frac{b_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + b_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + b_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, temos então:

$$\frac{P_\beta}{k} = \left(\frac{b_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + b_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + b_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \geq 1 \Rightarrow P_\beta \geq k.$$

Lembrando que $k = P_\alpha$, segue que, se $\alpha < \beta < 0$, então $P_\alpha \leq P_\beta$, o que completa a demonstração. $\square$

Observação 1.4.1. *Na definição que demos para média potência α, o caso $\alpha = 0$ não está contemplado, visto que na definição aparece a fração $\frac{1}{\alpha}$. Entretanto, na literatura do assunto, como por exemplo em [17], é costume definir $P_0 = G$, isto é, se $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são número reais postivos, então*

$$P_0 = G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}.$$

Diante do exposto, temos que

$$P_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}\right)^{\frac{1}{(-1)}} = \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}\right)^{-1} = H;$$

$$P_0 = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = G;$$

$$P_1 = \left(\frac{a_1^1 + a_2^1 + \cdots + a_n^1}{n}\right)^{\frac{1}{1}} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) = A;$$

$$P_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = Q.$$

Como $-1 < 0 < 1 < 2$, segue pelo teorema de acabamos de demonstrar que $P_{-1} \leq P_0 \leq P_1 \leq P_2$, o que implica $H \leq G \leq A \leq Q$, ocorrendo a igualdade se, e somente se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Temos então é uma demonstração alternativa para as desigualdades entre as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática.

1.5 Desigualdade do Rearranjo

Agora apresentaremos uma outra desigualdade clássica; a chamada **desigualdade do rearranjo**, que está intimamente ligada com uma lista de números reais dados e todas as permutações da lista dada. Lembrando que dada uma lista de números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$, uma permutação dessa lista é uma lista $a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(n)}$, onde $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ é uma bijeção.

Teorema 7 (Desigualdade do rearranjo)**.** *Sejam $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ duas listas de números reais. Para qualquer permutação $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, tem-se que:*

$$a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 \leq a_1 b_{\sigma(1)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Além disso, a primeira igualdade ocorrendo se, e somente se, $\sigma(i) = n - i + 1$ para $1 \leq i \leq n$, e a segunda igualdade ocorrendo se, e somente se, $\sigma = Id$.

Observação 1.5.1. *É comum usar a seguinte notação para tratar da desigualdade do rearranjo:*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Reescrevendo a desigualdade do rearranjo com essa notação

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_{\sigma(1)} & b_{\sigma(2)} & \ldots & b_{\sigma(n)} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}$$

Demonstração: Considere uma soma $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$ que não seja a soma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Nesse caso, considere o menor $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\sigma(i) \neq i$. Assim,

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{i-1} b_{i-1} + a_i b_j + \cdots + a_k b_i + \cdots$$

ou seja, estamos supondo de b_i está sendo multiplicado por a_k. Como i é o menor índice tal que $\sigma(i) \neq i$, segue que $k > i$. Agora consideremos uma nova soma S' onde trocamos apenas a posição do b_i com o b_j, ou seja,

$$S' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{i-1} b_{i-1} + a_i b_i + \cdots + a_k b_j + \cdots$$

Assim,

$$S - S' = a_i b_i + a_k b_j - a_i b_j - a_k b_i = (a_i - a_k)(b_i - b_j) \geq 0.$$

Portanto $S \leq S$". Com isso conseguimos inserir pelo menos uma parcela com índices iguais, $a_i b_i$, na soma S'. Procedendo da mesma forma, podemos obter uma nova soma S'' com pelo menos mais uma parcela com índices iguais e $S \leq S' \leq S''$. Repetindo esse procedimento, após uma quantidade finita de vezes, teremos que

$$S \leq S' \leq S'' \leq \cdots \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

o que mostra que o máximo valor para expressão $a_1 b_{\sigma(1)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)}$ ocorre quando $\sigma = Id$, ou seja,

$$a_1 b_{\sigma(1)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

De modo completamente análogo, podemos provar que o valor mínimo da expressão $a_1 b_{\sigma(1)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)}$ é assumido quando $\sigma(i) = n - i + 1$ para $1 \leq i \leq n$, isto é,

$$a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 \leq a_1 b_{\sigma(1)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)}.$$

Portanto,

$$a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 \leq a_1 b_{\sigma(1)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n,$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 1.5.1. *Sejam* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *números reais e seja* $(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$ *uma permutação de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. *Mostre que*

$$a_1 a_{\sigma(1)} + \cdots + a_2 a_{\sigma(2)} + a_n a_{\sigma(n)} \leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

Demonstração:

Tomando $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \ldots, b_n = a_n$, usando a desigualdade do rearranjo,

$$a_1 b_{\sigma(1)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n,$$

segue que

$$a_1 a_{\sigma(1)} + \cdots + a_2 a_{\sigma(2)} + a_n a_{\sigma(n)} \leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

□

Exemplo 1.5.2. *Sejam* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *números reais não nulos e seja* $(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$ *a permutação de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. *Mostre que*

$$\frac{a_1}{a_{\sigma(1)}} + \frac{a_2}{a_{\sigma(2)}} + \cdots + \frac{a_n}{a_{\sigma(n)}} \geq n$$

Demonstração:
Como $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais não nulos tais que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n,$$

segue que

$$\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_{n-1}} \leq \cdots \leq \frac{1}{a_1}.$$

Considerando a n-upla de números reais

$$b_1 = \frac{1}{a_n}, b_2 = \frac{1}{a_{n-1}}, \cdots, b_n = \frac{1}{a_1}$$

segue, pela desigualdade do rearranjo que,

$$a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 \leq a_1 b_{\sigma(1)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \Rightarrow$$

$$a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + \cdots + a_n \cdot \frac{1}{a_n} \leq a_1 b_{\sigma(1)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \Rightarrow$$

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{=n} \leq a_1 \cdot \frac{1}{a_{\sigma(1)}} + a_2 \cdot \frac{1}{a_{\sigma(2)}} + \cdots + a_n \cdot \frac{1}{a_{\sigma(n)}},$$

ou seja,

$$\frac{a_1}{a_{\sigma(1)}} + \frac{a_2}{a_{\sigma(2)}} + \cdots + \frac{a_n}{a_{\sigma(n)}} \geq n,$$

como queríamos demonstrar. □

1.6 Chebyshev

Pafnuti Lvovitch Chebyshev (1821-1894) foi um matemático russo conhecido por seu trabalho no campo da Probabilidade e Estatística. Uma famosa desigualdade sua que hoje leva o nome é **Desigualdade de Chebyshev**. Podemos demonstrá-la partindo da já conhecida desigualdade do rearranjo ou fazendo uma simples manipulação algébrica, conforme exibe o teorema a seguir.

Teorema 8 (Desigualdade de Chebyshev)**.** *Sejam* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *e* $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ *duas listas de números reais. Então,*

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right) \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n},$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $a_1 = \cdots = a_n$ *e* $b_1 = \cdots = b_n$.

Demonstração 1:

Aplicando a desigualdade do rearranjo, temos

$$\begin{gathered}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2 \\
\vdots \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}
\end{gathered}$$

adicionando as desigualdades, chegamos

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n).$$

Portanto,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right) \leq \left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}\right).$$

□

Sem usar a desigualdade do rearranjo, temos a

Demonstração 2:

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} - \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{n^2}[n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0,$$

já que os a_i, b_i são igualmente ordenados.
Note que a condição do enunciado é suficiente para haver igualdade. Por outro lado, suponha que tenhamos a igualdade. Como $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ para todos i, j, devemos ter $(a_i - a_j)(b_i - b_j) = 0$ para todos os i, j. Suponha que existisse um índice k com $b_k < b_{k+1.}$. Então $b_1 \leq b_2 \cdots \leq b_k < b_{k+1} \leq \cdots \leq b_n$, e de $(a_i - a_{k+1})(b_i - b_{k+1}) = 0$, segue que $a_i = a_{k+1}$ para $i \leq k$. Portanto $a_1 = a_2 = \cdots a_k = a_{k+1}$. Assim, partindo do fato de que $(a_i - a_k)(b_i - b_k) = 0$ e $i > k$, concluímos que $a_{k+1} = \cdots = a_n$. Logo, todos os a_i devem ser iguais.

□

1.7 Desigualdade de Jensen

Uma outra importante desigualdade é a chamada **desigualdade de Jensen**, que é a chave de muitas questões envolvendo funções contínuas. Esse nome é em homenagem ao matemático dinamarquês Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925). Nesta seção apresentaremos os conceitos de função convexa, função côncava e estabeleceremos a desigualdade de Jensen assim como algumas das suas aplicações.

1.7.1 Convexidade de uma função

Neste ponto vamos estabelecer os conceitos de funções côncava e convexa e exibir as suas principais propriedades.

Definição 1.7.1. *Seja $I \subset \mathbb{R}$, um intervalo. Dizemos que a função $f : I \to \mathbb{R}$ é* **convexa** *se, para todos $a, b \in I$ e $t \in [0,1]$, tem-se que:*

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

Por outro lado, a função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita **côncava** se, para todos $a, b \in I$ e $t \in [0,1]$, tem-se que

$$f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b).$$

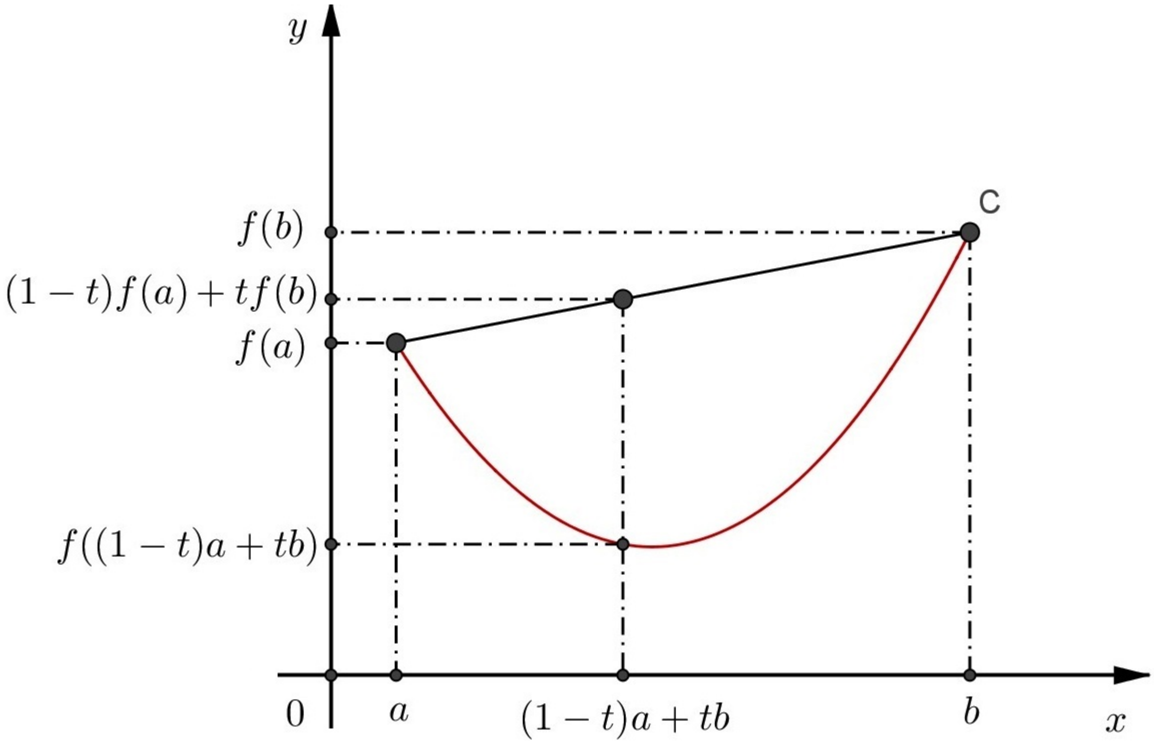


Figura 1.5: Função convexa

Para provar a desigualdade de Jensen utilizaremos o seguinte resultado que pode ser encontrado em [6].

Teorema 9. *Seja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *uma função tal que para qualquer* $x \in (a, b)$ *exista a segunda derivada* $f''(x)$. *A função* f *é convexa no* (a, b) *se, e somente se, para cada* $x \in (a, b)$ *temos* $f''(x) \geq 0$.
Por outro lado f *é côncava em* (a, b) *se, e somente se,* $f''(x) \leq 0$, *para todos* $x \in (a, b)$.

Teorema 10 (Desigualdade de Jensen)**.** *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *e* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função. Se* $x_1, \dots x_n \in I$ *e* $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$, *com* $t_1 + \cdots + t_n = 1$, *então* $t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n \in I$. *Então,*

1. *Se* f *é convexa* $\Rightarrow f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n) \leq t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)$

2. *Se* f *é côncava* $\Rightarrow f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n) \geq t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)$

Demonstração:

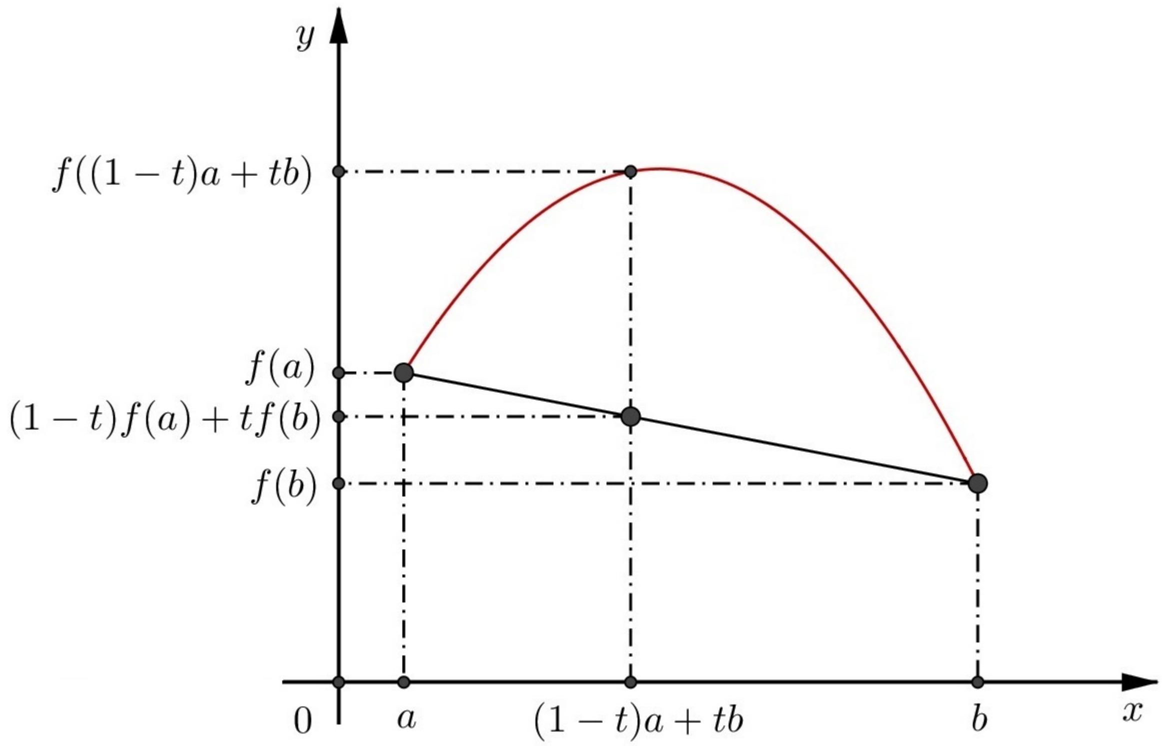


Figura 1.6: Função côncava

1. Vamos demonstrar fazendo indução sobre $n > 1$. O caso em que $n = 2$ é verdadeiro pelo fato de f ser convexa, pois

$$f(t_1x_1+t_2x_2) = f(t_1x_1+(1-t_1)x_2) \leq t_1f(x_1)+(1-t_1)f(x_2) = t_1f(x_1)+t_2f(x_2).$$

Agora, suponha que para um certo $n > 1$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ e $t_1, t_2, \ldots, \in [0, 1]$, com $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$, tenhamos

$$t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \in I \quad e \quad f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n)$$

que é a nossa hipótese da indução.
Por fim, vamos provar que a desigualdade continua verdadeira para o caso $n + 1$.
De fato, considere $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ e $t_1, \ldots, t_{n+1} \in [0, 1]$, com $t_1 + \cdots + t_{n+1} = 1$.
Se $t_{n+1} = 1$ então $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$ e nada há a fazer, pois nesse caso teríamos

$$f(0.x_1 + \cdots + 1.x_{n+1}) = f(x_{n+1}) = 0.f(x_2) + \cdots + 1.\ f(x_{b+1}) = f(x_{b+1}).$$

Caso contrário, defina

$$y = \frac{t_1x_1 + \cdots + t_nx_n}{1 - t_{n+1}} = s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_nx_n,$$

onde $s_j = \frac{t_j}{1-t_{n+1}}$, com $j = 1, 2, \ldots, n$. Note que

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \mathtt{t_1} + \cdots + \mathtt{t_n} 1 - t_{n+1} = \frac{1 - t_{n+1}}{1 - t_{n+1}} = 1.$$

Assim, pela hipótese da indução, e do fato de f ser uma função convexa, segue que:

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_{n+1}x_{n+1}) &= f\left[(1 - t_{n+1})\left(\tfrac{t_1x_1+\cdots+t_nx_n}{1-t_{n+1}}\right) + t_{n+1}x_{n+1}\right] \\ &= f\left((1 - t_{n+1})\, y + t_{n+1}x_{n+1}\right) \\ &\leq (1 - t_{n+1})\, f(y) + t_{n+1}f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $y = \frac{t_1x_1+\cdots+t_nx_n}{1-t_{n+1}} = s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_nx_n$, com $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = 1$, segue, pela hipótese da indução, que

$$\begin{aligned} f(y) = f(s_1x_1 + \cdots + s_nx_n) &\leq s_1f(x_1) + \cdots + s_nf(x_n) \\ &= \frac{t_1}{1 - t_{n+1}}f(x_1) + \cdots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}}f(x_n) \end{aligned}$$

diante do exposto,

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_{n+1}x_{n+1}) &\leq (1 - t_{n+1})\, f(y) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \\ &= (1 - t_{n+1})\left(\tfrac{t_1}{1-t_{n+1}}f(x_1) + \cdots + \tfrac{t_n}{1-t_{n+1}}f(x_n)\right). \\ &\quad +t_{n+1}f(x_{n+1}) \\ &\leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_{n+1}f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

O que demonstra o resultado. □

2.No caso em que f é uma função côncava a demonstração também é feita por indução sobre n de modo completamente análogo ao que acabamos de mostrar para o caso em que f era convexa.

Observação 1.7.1. *No caso em que $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$, a desigualdade de Jensen assume a seguite forma:*

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}, \quad \textit{se} \quad \textit{é convexa.}$$

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}, \quad \textit{se} \quad \textit{é côncava.}$$

Exemplo 1.7.1. *Use a desigualdade de Jensen e função logaritmo natural, para provar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.*

Demonstração: Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais e positivos. Existem reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que $a_j = lnx_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Como $f(x) = \ln x$ é uma côncava (pois $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,\ x \in \mathbb{R}$), segue que

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

ou seja,

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \ln \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \Rightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. $\square$

1.8 Desigualdade de Young

A desigualdade de Young, devida ao matemático William Henry Young (1863-1942), afirma que se p e q são números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ para todo par de números reais a e b não negativos. A igualdade vale se e somente se $a^p = b^q$. Nesta seção vamos apresentar essa desigualdade, exibindo uma demonstração geral, uma outra demonstração para o caso particular em que p e q são racionais e por fim uma visualização geométrica, que fornece um argumento geométrico para tal desigualdade.

Teorema 11 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam p, q números reais positivos satisfazendo a condição $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se a e b são números reais positivos , então $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. A igualdade ocorre se, e somente se, $a^b = b^q$*

Demonstração: Considerando a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = exp(x) = e^x$ tem-se que $f''(x) = e^x > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o que revela que f é convexa em $(0, \infty)$ e portanto podemos aplicar a desigualdade de Jensen usando $x = \ln a^p$, $y = \ln b^q$, $t_1 = \frac{1}{p}$ e $t_2 = 1 - t_1 = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, segue que

$$exp(t_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot x_2) \leq t_1 \cdot exp(x_1) + t_2 \cdot exp(x_2).$$

Então,

$$\begin{aligned} ab = & \; exp(\ln(ab)) = exp(\ln a + \ln b) \\ = & \; exp\left(\frac{p \cdot \ln a}{p} + \frac{q \cdot \ln b}{q}\right) \\ = & \; exp\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \frac{1}{p} exp(x) + \frac{1}{q} exp(y) \\ = & \; \frac{1}{p} exp(\ln a^p) + \frac{1}{q} exp(\ln b^q) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \\ = & \; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se,

$$x = y \Leftrightarrow \ln a^p = \ln b^q \Leftrightarrow a^p = b^q.$$

. $\square$

Observação 1.8.1. *No caso em que p e q são números racionais há uma elegante demonstração da desigualdade de Young, utilizando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, conforme ilustramos a seguir:*
Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, como p e q racionais positivos, podemos escrever:

$$\frac{1}{p} = \frac{m}{m+n} \quad e \quad \frac{1}{q} = \frac{n}{m+n}.$$

Assim $p = \frac{m+n}{m}$ e $q = \frac{m+n}{n}$ com $m, n \in \mathbb{N}$. Fazendo $a^p = x$ e $b^q = y$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} &= \frac{x}{\frac{m+n}{m}} + \frac{y}{\frac{m+n}{n}} = \frac{mx + ny}{m+n} \\ &\geq \sqrt[m+n]{x^m y^n} = (x^m y^n)^{\frac{1}{m+n}} \\ &= x^{\frac{m}{m+n}} y^{\frac{n}{m+n}} = x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \\ &= ab. \end{aligned}$$

Portanto, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, $x = y \Leftrightarrow a^p = b^q$. Apesar da demonstração acima ser feita no caso em que p e q são racionais, essa prova pode ser estendida aos reais com argumentos de continuidade e densidade dos racionais em $\mathbb{R}$.

□

Há uma maneira geométrica para visualizarmos a desigualdade de Young. A seguir temos a representação gráfica da função $y = x^{p-1}$. Note que,

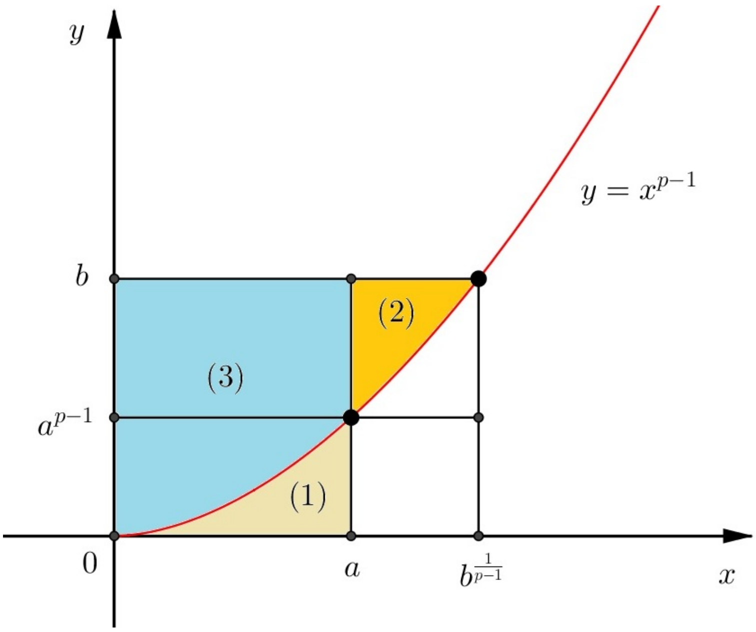


Figura 1.7: Desigualdade de Young

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q + p = pq \Rightarrow q + p - pq = 0 \Rightarrow$$

$$q + p - pq + 1 = 1 \Rightarrow (q-1)(p-1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{p-1} = q - 1.$$

Sendo S_1, S_2 e S_3 as medidas das áreas das regiões $(1), (2)$ e (3), respectivamente, segue que

$$S_1 + S_3 \leq S_1 + S_3 + S_2,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $a = b^{\frac{1}{p-1}} = b^q$.

Por outro lado,

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \left(\frac{x^p}{p}\right)_0^a = \frac{a^p}{p}.$$

Além disso,

$$y = x^{p-1} \Rightarrow x = y^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow x = y^q.$$

Então,

$$S_2 + S_3 = \int_0^b y^{q-1} dy = \left(\frac{y^q}{q}\right)_0^b = \frac{b^q}{q}.$$

Note que $S_1 + S_3$ corresponde à medida da área de um retângulo cujos lados são a e b, então:

$$S_1 + S_3 \leq S_1 + S_3 + S_2 \Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se $a^p = b^q$, como queríamos demonstrar.

$\square$

1.9 Desigualdade de Hölder

A partir da igualdade de Young podemos estabelecer a chamada **desigualdade de Hölder**, devida ao matemático alemão Otto Ludwig Hölder (1859-1937). Nesta seção vamos apresentar essa desigualdade e uma justificativa para a sua validade.

Teorema 12 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reais positivos e $p, q > 0$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\frac{x_1^p}{y_1^q} = \frac{x_2^p}{y_2^q} = \cdots = \frac{x_n^p}{y_n^q}$.

Demonstração:

Como já comentamos no início desta seção, usaremos a desigualdade de Young para provar a desigualdade de Hölder.

Defina

$$M = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad e \quad N = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

onde, $M, N \in \mathbb{R}^+$, aplicando Young

$$\frac{x_i}{M}\frac{y_i}{N} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{M}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{N}\right)^q, \quad para \quad i = 1, 2 \ldots, n.$$

Fazendo i variar de 1 até n e adicionando em i, tem-se que:

$$\frac{1}{MN}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \leq \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{M}\right)^p\right) + \frac{1}{q}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{N}\right)^q\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{MN}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \leq \frac{1}{pM^p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right) + \frac{1}{qN^q}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right).$$

Multiplicaremos a desigualdade por MN, segue que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i y_i &\leq \frac{MN}{pM^p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right) + \frac{MN}{qN^q}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right) \\
&= \frac{MN}{pM^p}M^p + \frac{MN}{qN^q}N^q \\
&= \frac{MN}{p} + \frac{MN}{q} \\
&= N\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = MN.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\frac{x_1^p}{y_1^q} = \frac{x_2^p}{y_2^q} = \cdots = \frac{x_n^p}{y_n^q}$. $\square$

Essa desigualdade pode ser generalizada para mais de duas listas de números reais positivos:

Suponha $\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ são k sequencias de números reais positivos e $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são números reais positivos cuja soma é 1. Então

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot a_{2j} \cdots a_{kj} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{1j})^{\frac{1}{p_1}}\right)^{p_1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{2j})^{\frac{1}{p_2}}\right)^{p_2} \cdots \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{kj})^{\frac{1}{p_k}}\right)^{p_k}.$$

1.10 Desigualdade de Minkowski

É bastante conhecida a desigualdade triangular, que no contexto da geometria analítica se enuncia da seguinte forma: se $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, \ldots, y_n)$ são dois vetores do $\mathbb{R}^n$, então

$$||u+v|| \leq ||u||+||v|| \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} (y_k)^2\right)^{1/2}.$$

Nesta seção mostraremos a chamada **desigualdade de Minkowski**, devida ao matemático alemão com ascendência judia-lituana Hermann Minkowski (1864-1909). Essa desigualdade é uma generalização da desigualdade triangular, conforme mostra o teorema a seguir:

Teorema 13 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ *números reais positivos e* $p > 1$, *então*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{1/p}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Demonstração:

Note que

$$(a_k+b_k)^p = a_k(a_k+b_k)^{p-1} + b_k(a_k+b_k)^{p-1}.$$

Fazendo k variar de 1 até n e somando em k, tem-se que:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k(a_k+b_k)^{p-1}. \tag{1.7}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder para cada termo da soma no lado direito da equação (1.7), com q satisfazendo $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, para obter

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k(a_k+b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Adicionando essas duas desigualdades e colocando o termo comum do segundo membro em evidência, segue que:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Note que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Leftrightarrow q(p-1)=p \Leftrightarrow \frac{1}{p} = 1-\frac{1}{q}$

Assim,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Portanto,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{1/p}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. $\square$

1.11 Desigualdade de Schur

A **desigualdade de Schur**, assim chamada em homenagem a Issai Schur (1875-1941), estabelece que se x, y, z são números reais não negativos, e n é um número inteiro, então

$$x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-x)(y-z) + z^n(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x = y = z$ ou dois deles são iguais e o outro é zero. Quando n é um número inteiro positivo par, a desigualdade vale para todos os números reais x, y e z.

Uma generalização da dsigualdade de Schur é o seguinte: Suponha que a, b e c sejam números reais positivos. Se os ternos (a, b, c) e (x, y, z) têm seus termos igualmente ordenados, a seguinte desigualdade é válida:

$$a(x-y)(x-z) + b(y-z)(y-x) + c(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Em 2007, o matemático Romeno Valentin Vornicu mostrou que existe ainda uma forma generalizada da desigualdade de Schur:

Sejam $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, com $a \geq b \geq c$, $x \geq y \geq z$ ou $z \geq y \geq x$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ é uma função convexa ou monótona, então:

$$f(x)(a-b)^k(a-c)^k + f(y)(b-a)^k(b-c)^k + f(z)(c-a)^k(c-b)^k \geq 0.$$

A forma padrão de Schur é o caso desta desigualdade tomando $x = a, y = b, z = c, k = 1$ e $f(x) = x^n$.

Outra extensão possível indica que, se os números reais não negativos $x \geq y \geq z \geq v$, $x \geq y \geq z \geq v$ com e o número real positivo t são tais que $x + v \geq y + z$, então

$$x^t(x-y)(x-z)(x-v) + y^t(y-x)(y-z)(y-v) +$$

$$+z^t(z-x)(z-y)(z-v) + v^t(v-x)(v-y)(v-z) \geq 0.$$

Nesta seção apresentaremos a desigualdade (clássica) de Schur, uma demonstração e algumas aplicações dessa desigualdade.

Teorema 14 (Desigualdade de Schur)**.** *Se x, y e z são números reais positivos e n é um número inteiro, então*

$$x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-x)(y-z) + z^n(z-x)(z-y) \geq 0.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x = y = z$ ou $x = y$ e $z = 0$ (ou permutações).

Demonstração:
Sem perda de generalidade suponhamos que $x \geq y \geq z$.Vamos separar em casos:
Caso 1 : Se $n > 0$, temos

$$z^n \geq 0 \quad e \quad (z-x)(z-y) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad z^n(z-x)(z-y) \geq 0 \tag{1.8}$$

e

$$x^n(x-z) - y^n(y-z) = (x^{n+1} - y^{n+1}) + z(x^n - y^n) \geq 0,$$

isto é,

$$x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-x)(y-z) \geq 0. \tag{1.9}$$

Por (1.8) e (1.9) claramente obtemos

$$x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-x)(y-z) + z^n(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Caso 2 : se $n \leq 0$, temos

$$x^n \geq 0 \quad e \quad (x-y)(x-z) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^n(x-y)(x-z) \geq 0 \tag{1.10}$$

e

$$z^n(x-z) - y^n(x-y) \geq z^n(x-y) - y^n(x-y) = (z^n - y^n)(x-y) \geq 0,$$

isto é,

$$y^n(y-x)(y-z) + z^n(z-x)(z-y) \geq 0. \tag{1.11}$$

Adicionando (1.10) e (1.11) obtemos

$$x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-x)(y-z) + z^n(z-x)(z-y) \geq 0.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x = y = z$ ou $x = y$ e $z = 0$ (ou permutações).

Exemplo 1.11.1. *Sejam x, y e z números reais positivos. Mostre que*

$$\begin{aligned}
&(a) \quad x^3 + y^3 + z^3 + 3xy \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x),\\
&(b) \quad xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y),\\
&(c) \quad Se\ x+y+z=1,\ 9xyz + 1 \geq 4(xy+yz+zx).
\end{aligned}$$

Demonstração:

$(a)\quad x^3+y^3+z^3+3xy \geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$

$$\begin{aligned}
&x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\geq 0\\
\Leftrightarrow\ &x^3-zx^2-x^2y+xyz+y^3-y^2z-xy^2+xyz+z^3-yz^2-z^2x+xyz\geq 0\\
\Leftrightarrow\ &x^3+y^3+z^3+3xyz\geq x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2\\
\Leftrightarrow\ &x^3+y^3+z^3+3xyz\geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x).
\end{aligned}$$

$(b)\quad xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

De acordo com o item (a), tem-se que:

$$\begin{aligned}
&x^3+y^3+z^3+3xyz\geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\\
\Leftrightarrow\ &xyz\geq x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2-x^3-y^3-z^3-2xyz
\end{aligned}$$

e o segundo membro da desigualdade é equivalente a

$$\begin{aligned}
&x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2-x^3-y^3-z^3-2xyz=\\
&=(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).
\end{aligned}$$

Assim,

$$xyz\geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).$$

$(c)\quad Se\ x+y+z=1,\ 9xyz+1\geq 4(xy+yz+zx)$

Como $x+y+z=1$, então podemos dizer que $x+y=1-z$, $y+z=1-x$ ou $z+x=1-y$. Agora substituirmos em (b)

$$xyx\geq (1-z-z)(1-y-y)(1-x-x)\Leftrightarrow xyx\geq (1-2z)(1-2y)(1-2x).$$

Multiplicando, obtemos

$$xyx\geq 1-2y-2y+4zy-2x+4xy+4zx-8xyz,$$

que é equivalente a

$$\Leftrightarrow xyz\geq 1-2(x+y+z)+4(zy+xy+zx)-8xyz,$$

portanto, $9xyz+1\geq 4(xy+yz+zx)$.

Capítulo 2

Desigualdades geométricas e trigonométricas

Nos capítulos anteriores apresentamos as mais famosas desigualdades algébrica e por vezes sob o viés da Análise. Há outros pontos de vista sobre o assunto, como por exemplo o ponto de vista geométrico. Neste capítulo será justamente isso que apresentaremos. Vamos exibir, demonstrar e dar algumas aplicações sobre algumas famosas desigualdades geométricas, indo da antiga desigualdade triangular que estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência de um triângulo a partir de três segmentos dados, pela famosa desigualdade estabelecido por Euler a respeito dos raios da circunferências inscrita e circunscrita num triângulo e chegando até desigualdades mais modernas, como por exemplo, as estabelecias por Paul Erdös, já no século XX. Há também um outro ponto de vista sobre as desigualdades: o ponto de vista trigonométrico, onde são estabelecidas certas desigualdades dos valores assumidos pelas funções trigonométricas e que em algumas ocasiões podem ser traduzidas do ponto de vista geométrico e até mesmo algébrico como veremos ao longo desse capítulo.

2.1 A desigualdade triangular

Nesta seção apresentaremos a chamada **desigualdade triangular**, que estabelece uma condição necessária e suficiente para que três segmentos de comprimentos fixados a, b e c possam formar um triângulo unindo às suas extremidades.

Antes de mostrarmos a desigualdade triangular, note que a primeira desigualdade natural que ocorre num triângulo ABC é a relação entre os comprimentos dos seus lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$ e as medidas dos seus ângulos internos $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \theta$, conforme ilustra a figura a seguir:

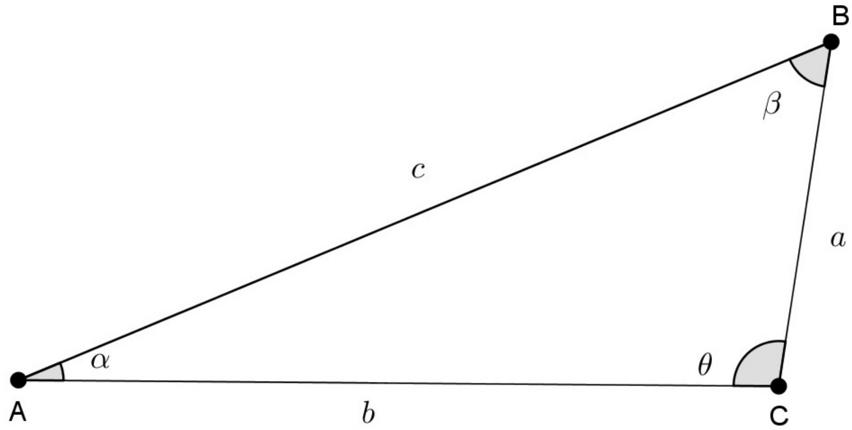


Figura 2.1: Desigualdades básicas num triângulo

$$\alpha \leq \beta \leq \theta \Leftrightarrow a \leq b \leq c.$$

ou seja, num triângulo, o maior lado está oposto ao maior ângulo e o maior ângulo está oposto ao maior lado. Esse fato está demonstrado no seguinte teorema:

Teorema 15. *Se ABC é um triângulo tal que $\angle ABC = \beta, \angle ACB = \theta$. Se $\beta \geq \theta$ então $AC \geq AB$.*

Demonstração: Como $\beta \geq \theta$, podemos traçar a semirreta $\overrightarrow{BX}$, intersectando o interior do triângulo ABC e tal que $med(\angle CBX) = \frac{1}{2}(\beta - \theta)$, conforme ilustra a figura seginte.

Sendo P o ponto de interseção de $\overrightarrow{BX}$ com o lado AC, pelo teorema do ângulo externo de um triângulo, segue que

$$med(\angle APB) = med\angle CBP) + med(\angle BCP) = \frac{1}{2}(\beta - \theta) + \theta = \frac{1}{2}(\beta + \theta).$$

Por outro lado,

$$med(\angle ABP) = \beta - \frac{1}{2}(\beta - \theta) = \frac{1}{2}(\beta + \theta).$$

Segue o triângulo ABP é isósceles de base BP. Assim,

$$AB = AP \leq AC.$$

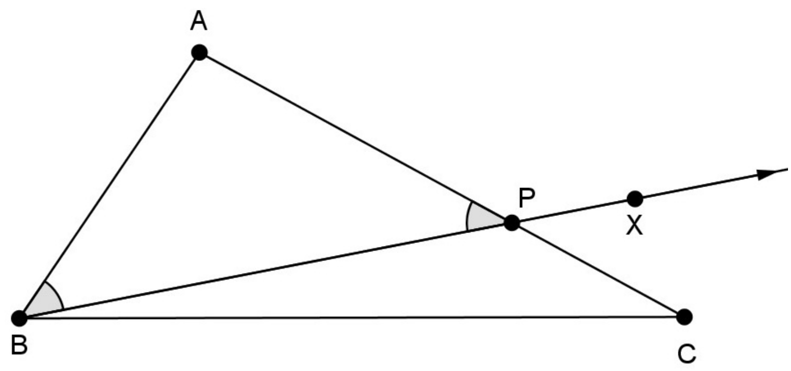


Figura 2.2: Relações entre as medidas dos ângulos e dos lados de um triângulo.

□

Agora vamos à desigualdade básica para um triângulo; que é a chamada **desigualdade triangular**, que estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência de um triângulo ABC, conforme ilustra o teorema a seguir:

Teorema 16 (Desigualdade triangular)**.** *Em todo triângulo, a medida de cada lado é menor que a somas das medidas dos outros dois lados.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo tal que $BC = a, AC = b$ e $AB = c$. Vamos mostrar que $a < b+c$. A demonstração dos outros dois casos é completamente análoga. Marque o ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{CA}$ de modo que $AD = AB$. Perceba que o triângulo ABD é isósceles de base BD, o que revela que $med(\angle ADB) = med(\angle ABD) = \varphi$, conforme ilustra a figura seguinte.
Assim, $CD = CA+AD = CA+AB = b+c$. Além disso, sendo $med(\angle ABC) = \beta$, perceba que:

$$\varphi < \varphi + \beta \Rightarrow \underbrace{med(\angle BDC)}_{=\varphi} < \underbrace{med(\angle CBD)}_{=\varphi+\beta}.$$

Ora, como num triângulo o maior lado está oposto ao maior ângulo, segue que

$$med(\angle BDC) < med(\angle CBD) \Rightarrow a < b + c,$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 2.1.1. *Sejam $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ as medidas dos lados de um triângulo ABC cujo perímetro é igual a 2. Mostre que*

$$1 < ab + bc + ac - abc \leq \frac{28}{27}.$$

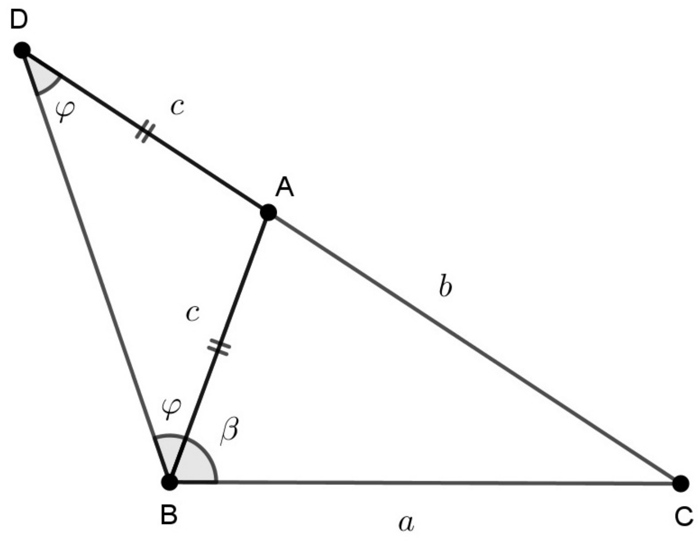


Figura 2.3: A desigualdade triangular.

Demonstração:

Note que a desigualdade $1 < ab + bc + ac - abc \leq \frac{28}{27}$ é equivalente a

$$-1 + 1 < -1 + ab + bc + ac - abc \leq -1 + \frac{28}{27} \Leftrightarrow$$

$$0 < -1 + ab + bc + ac - abc \leq \frac{1}{27} \Leftrightarrow$$

$$0 < -1 + 2 - 2 + ab + bc + ac - abc \leq \frac{1}{27} \Leftrightarrow$$

$$0 < 1 - (a + b + c) + ab + bc + ac - abc \leq \frac{1}{27} \Leftrightarrow$$

$$0 < (1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq \frac{1}{27}.$$

Pela desigualdade triangular temos que

$$\begin{cases} 0 < a < b + c \\ 0 < b < a + c \\ 0 < c < a + b. \end{cases}$$

Portanto,

$$2 = a + b + c > a + a = 2a \Rightarrow 0 < a < 1.$$

Analogamente, $0 < b < 1$ e $0 < c < 1$, o que revela que

$$(1 - a) > 0,\ (1 - b) > 0,\ (1 - c) > 0 \Rightarrow (1 - a)(1 - b)(1 - c) > 0,$$

o que explica o lado esquerdo da desigualdade que queremos demonstrar. Por fim, como $(1-a)>0,\ (1-b)>0$ e $(1-c)>0$, aplicando a **desigualdade MA-MG** para esses três números reais positivos, segue que

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} &\leq \frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}\\ &= \frac{3-(a+b+c)}{3}\\ &= \frac{3-2}{3}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1}{27},$$

o que explica o lado direito da desigualdade que queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 2.1.2. *Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo ABC, tal que para todo inteiro positivo n, os números a^n, b^n e c^n também são os lados de um triângulo. Prove que o triângulo ABC é necessariamente isósceles.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que o triângulo ABC não seja isósceles. Nesse caso, seja a o maior dos três lados do triângulo ABC (no caso em que o triângulo ABC não é isósceles existe um maior lado!). Como estamos supondo que existe o triangulo cujos lados são a^n, b^n e c^n, segue pela desigualdade triangular, que $a^n < b^n + c^n$. Ora, como $a^n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, segue que

$$a^n < b^n + c^n \Rightarrow \frac{a^n}{a^n} < \frac{b^n}{a^n} + \frac{c^n}{a^n} \Rightarrow 1 < \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{c}{a}\right)^n.$$

Mas ocorre que, sendo a a medida do maior lado, temos que $0 < \frac{b}{a} < 1$ e $0 < \frac{c}{a} < 1$. Assim, fazendo $n \to +\infty$, segue que:

$$1 < \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{c}{a}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 1 \leq \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{c}{a}\right)^n\right] = 0 \Rightarrow 1 \leq 0,$$

o que é uma contradição. Portanto a nossa suposição inicial de que o triângulo ABC não é isósceles não pode ser verdadeira, o que revela que o triângulo ABC é necessariamente isósceles. $\square$

Para finalizar essa seção apresentaremos um a interessante desigualdade de deve ser satisfeita pelas medidas das alturas de um triângulo.

Teorema 17 (Desigualdade triangular para as alturas). *Seja ABC um triângulo cujas alturas medem h_a, h_b e h_c. Então,*

$$\frac{|h_b - h_c|}{h_b h_c} < \frac{1}{h_a} < \frac{h_b + h_c}{h_b h_c},$$
$$\frac{|h_a - h_c|}{h_a h_c} < \frac{1}{h_b} < \frac{h_a + h_c}{h_a h_c},$$
$$\frac{|h_a - h_b|}{h_a h_b} < \frac{1}{h_c} < \frac{h_a + h_b}{h_a h_b}.$$

Demonstração: De fato, sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo ABC e h_a, h_b e h_c as respectivas alturas relativas a esses lados. Ora, como o dobro da medida da área do triângulo ABC é o produto da medida de um lado pela medida da sua respectiva altura, segue que:

$$ah_a = bh_b = ch_c = \begin{cases} \frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} \\ \frac{b}{h_c} = \frac{c}{h_b}. \end{cases}$$

Assim,

$$\frac{b}{h_c} = \frac{c}{h_b} \Rightarrow \frac{b}{h_a h_c} = \frac{c}{h_a h_b} \Rightarrow \frac{b}{h_a} = \frac{ch_c}{h_a h_b} \Rightarrow \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{h_c}}.$$

Ora, como

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} \;\; e \;\; \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{h_c}},$$

segue que

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{h_c}}.$$

Dessa proporção concluímos que existe um triângulo cujos lados medem h_b, h_c e $\frac{h_a h_b}{h_c}$ (pois devido a proporcionalidade entre a, b e c e h_b, h_a, e $\frac{h_a h_b}{h_c}$, triângulo cujos lados medem a, b e c é semelhante ao triângulo cujos lados são h_b, h_a e $\frac{h_a h_b}{h_c}$). Aplicando o teorema da desigualdade triangular no triângulo cujos lados medem h_b, h_c e $\frac{h_a h_b}{h_c}$, segue que

$$h_a < h_b + \frac{h_a h_b}{h_c} \Rightarrow \frac{1}{h_c} > \frac{h_a - h_b}{h_a h_b},$$
$$h_b < h_a + \frac{h_a h_b}{h_c} \Rightarrow \frac{1}{h_c} > \frac{h_b - h_a}{h_a h_b},$$

$$\frac{h_a h_b}{h_c} < h_a + h_b \Rightarrow \frac{1}{h_c} < \frac{h_a + h_b}{h_a h_b}.$$

Essas três últimas desigualdades revelam que:

$$\frac{|h_a - h_b|}{h_a h_b} < \frac{1}{h_c} < \frac{h_a + h_b}{h_a h_b}.$$

As duas outras desigualdades podem ser verificadas de maneira completamente análoga. $\square$

2.2 Desigualdade de Euler

Dado um triângulo ABC existem 5 circunferências associadas a esse triângulo, a saber: a **circunferência inscrita** (aquela que tangencia internamente os lados do triângulo); a circunferência circunscrita (aquela que "passa"pelos três vértices do triângulo ABC) e três circunferências que tangenciam os prolongamentos dos lados do triângulo dois a dois, que são as circunferências ex-inscritas, conforme ilustra a figura a seguir:

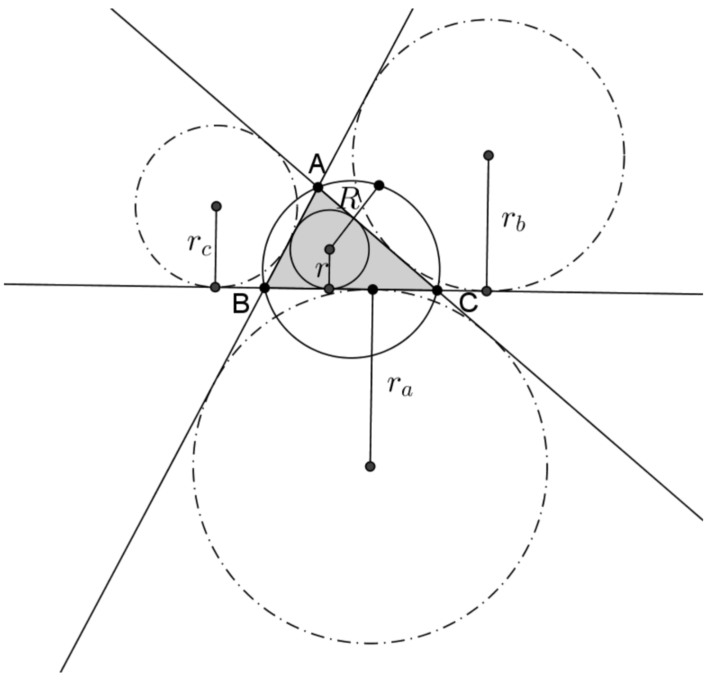


Figura 2.4: Um triângulo e suas circunferências.

Um belo resultado em geometria é que as medidas dos raios dessas 5 circunferências se relacionam na chamada **Relação dos cinco raios**, a saber:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R.$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrado, por exemplo em [11].
O grande matemático suíco Leonard Euler (1720-1783) estabeleceu uma interessantíssima desigualdade entre as medidas dos raios das circunferências inscrita (r) e circunscrita (R), que está apresentada no teorema a seguir:

Teorema 18 (Euler). *Sejam R e r respectivamente, as medidas dos raios das circunferências circunscrita e inscrita a um triângulo ABC. Então,*

$$R \geq 2r.$$

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo ABC é equilátero.

Demonstração:
Denotaremos por (ABC) a medida da área do triângulo de lados a, b e c, sendo p o semi-perímetro desse triângulo. Aplicaremos **A Desigualdade MA-MG** para os números positivos $p - b$ e $p - c$.
Temos que

$$\frac{(p-b)+(p-c)}{2} \geq \sqrt{(p-b)(p-c)} \Rightarrow (p-b)+(p-c) \geq 2\sqrt{(p-b)(p-c)}.$$

Note que

$$(p-b)+(p-c) = \frac{a+b+c}{2} - b + \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+c-b}{2} + \frac{a+b-c}{2} = a.$$

Assim,

$$a \geq 2\sqrt{(p-b)(p-c)}.$$

De maneira análoga, temos

$$b \geq 2\sqrt{(p-a)(p-c)},$$

$$c \geq 2\sqrt{(p-a)(p-b)}.$$

Multiplicando-se ambos os lados das três desigualdades, obteremos

$$abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c).$$

Como a área do triângulo é dada por:

$$(ABC) = \frac{abc}{4R} \quad e \quad (ABC) = pr.$$

Substituindo obtemos

$$abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow 4R(ABC) \geq 8\frac{(ABC)^2}{p} \Rightarrow$$

$$4R(ABC) \geq 8\frac{(ABC)}{p} \cdot (ABC) \Rightarrow 4R(ABC) \geq 8r(ABC) \Rightarrow R \geq 2r.$$

Note que a igualdade ocorre se, e somente se, $p-a = p-b = p-c$, o que ocorre se, e somente se $a = b = c$, ou seja, se e somente se o triângulo ABC for equilátero.

□

Observação 2.2.1. *Na verdade a demonstração de Euler para o teorema acima foi completamente diferente: ele provou que num triângulo qualquer a distância entre o incentro e o circuncentro é dada por* $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$*, onde* R *e* r *são (respectivamente) as medidas dos raios das circunferências circunscrita e inscrita ao triângulo. Ora, como* $d \geq 0$*, devemos ter* $R^2 - 2Rr \geq 0 \Rightarrow R \geq 2r$*. Mais ainda; ocorrendo a igualdade se, e somente se,* $d = 0$*, o que é equivalente a dizer que o triângulo é equilátero.*

2.3 Desigualdade Leibniz

Nesta seção vamos apresentar uma outra bela desigualdade estabelecida pelo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), que também caracteriza o triângulo equilátero no caso em que ocorre a igualdade, como afirma o teorema a seguir:

Teorema 19 (Leibniz)**.** *Seja* ABC *um triângulo com comprimentos dos lados* a, b *e* c*, e raio da circunferência circunscrita igual a* R*. Então temos que*

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

A igualdade ocorre quando o triângulo é equilátero.
Inicialmente vamos provar um lema que nos ajudará a provar a desigualdade de Leibniz.

Lema 4. *Dado um triângulo ABC cujos lados medem a, b e c, e com circuncentro O, baricentro G e raio da circunferência circunscrita medindo R tem-se que:*

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Demonstração: Considere o triângulo ABC, sua circunferência circunscrita, com circuncentro O e baricentro G, conforme ilustra a figura abaixo:

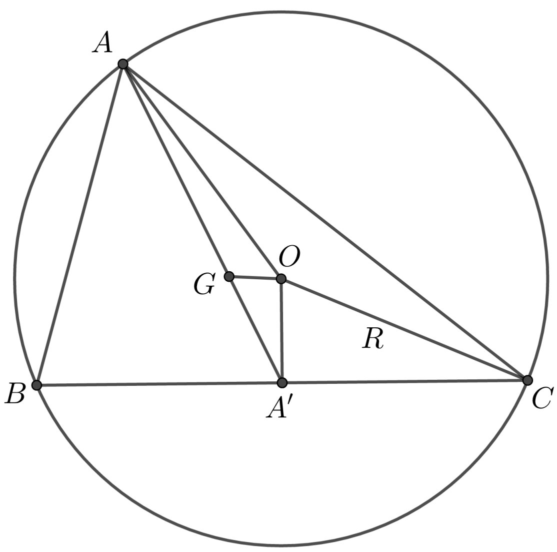


Figura 2.5: Triângulo ABC com sua circunferência circunscrita

Aplicando o Teorema de Stewart (veja [7]) no triângulo OAA' para encontrar o comprimento de OG, onde A' é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, obtemos:

$$AA'.(OG^2 + AG \cdot GA') = A'O^2 \cdot AG + AO^2 \cdot GA'$$

Como $AO = R, AG = \frac{2}{3}AA'$ e $GA' = \frac{1}{3}AA'$, segue que:

$$OG^2 + \frac{2}{9}AA'^2 = A'O^2 \cdot \frac{2}{3} + R^2 \cdot \frac{1}{3}$$

Sendo $d = AA'$ e $n = m = \frac{a}{2}$ obtemos:

$$\frac{b^2a}{2} + \frac{c^2a}{2} = a\left((AA')^2 + \frac{a^2}{4}\right).$$

Assim,

$$(AA')^2 = \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $A'OC$ e fazendo $A'C = \frac{a}{2}$ obtemos $(A'O)^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$. Portanto,

$$\begin{aligned} OG^2 = & \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cdot \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot R^2 - \frac{2}{9}\left(\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}\right) \\ = & R^2 - \tfrac{a^2}{6} - \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{18} \\ = & R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}. \end{aligned}$$

Agora podemos demonstrar o Teorema de Leibniz. □

Demonstração:

Ora, como $OG^2 \geq 0$ e a igualdade ocorre quando o triângulo é equilátero, segue que:

$$R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9} \geq 0 \Rightarrow R^2 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{9} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se $OG = 0$, o que ocorre se, e somente se, o triângulo ABC for equilátero. □

2.4 Desigualdade de Weitzenböck

Uma outra interessantíssima desigualdade, que caracteriza o triângulo equilátero no caso em que ocorre a igualdade é a chamada **desigualdade de Weitzenböck**, demonstrada pelo matemático austríaco Roland Weitzenböck (1885-1955), como mostra o teorema a seguir.

Teorema 20 (Desigualdade de Weitzenböck). *Se ABC é uma triângulo cujos lados medem $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e sua área mede (ABC), então*

$$(ABC) \leq \frac{\sqrt{3}}{12}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo ABC é equilátero.

Demonstração: Sendo a, b e c as medidas dos lados do triângulo ABC, segue que

$$\begin{gathered}
(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \Rightarrow \\
2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac+2bc \Rightarrow \\
2a^2+2b^2+2c^2+a^2+b^2+c^2 \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \Rightarrow \\
3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow \\
3(a^2+b^2+c^2) \geq \sqrt{(a+b+c)^4} = \sqrt{(a+b+c)(a+b+c)^3} \Rightarrow \\
(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{1}{3}\sqrt{(a+b+c)(a+b+c)^3} \Rightarrow \\
(a^2+b^2+c^2) \geq \sqrt{3(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}. \qquad (2.1)
\end{gathered}$$

Por outro lado, usando a **desigualdade MA-MG** para os números reais não negativos $p-a, p-b$ e $p-c$, onde $p=\frac{a+b+c}{2}$, segue que:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} &\leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \\
&= \frac{3p-(a+b+c)}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(3\cdot\frac{a+b+c}{2}-(a+b+c)\right) \\
&= \frac{1}{6}(a+b+c).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{gathered}
\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{1}{6}(a+b+c) \Rightarrow \\
(p-a)(p-b)(p-b) \leq \frac{1}{6^3}(a+b+c)^3 \Rightarrow \\
(p-a)(p-b)(p-b) \leq \frac{1}{2^3.3^3}(a+b+c)^3 \Rightarrow \\
(p-a)(p-b)(p-b) \leq \frac{1}{8}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \Rightarrow \\
\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq 8(p-a)(p-b)(p-c).
\end{gathered}$$

Retornando à desigualdade (2.1), segue que:

$$\begin{aligned}
(a^2+b^2+c^2) &\geq \sqrt{3(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} \\
&\geq \sqrt{3(a+b+c)8(p-a)(p-b)(p-c)} \\
&= \sqrt{3.2p.8(p-a)(p-b)(p-c)} \\
&= 4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\
&= 4\sqrt{3}(ABC).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(ABC) &\leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2).
\end{aligned}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $p-a=p-b=p-c \Leftrightarrow a=b=c$, como queríamos demonstrar. □

Há uma outra demonstração (usando trigonometria) para o Teorema de Weitzenböck em [11] e outras dez demonstrações distintas em [8].

2.5 Algumas desigualdades trigonométricas

Nesta seção final do capítulo 3, mostraremos algumas desigualdades envolvendo os valores de algumas funções trigonométricas. Em muitas ocasiões essas desigualdades trigonométricas tem uma interessante interpretação geométrica, como veremos ao longo dessa seção. A primeira delas é mais uma caracterização do triângulo equilátero (no caso em que ocorre a igualdade). Mostraremos essa desigualdade como uma consequência da desigualdade de Jensen.

Teorema 21. *Sejam α, β e γ as medidas dos ângulos internos de um dado triângulo ABC. Então,*

$$sen\alpha + sen\beta + sen\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo ABC é equilátero.

Demonstração: A função contínua $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = senx$ é uma função côncava, visto que $f''(x) = -senx$. Como $senx > 0, \forall x \in (0, \pi)$, segue que $f''(x) < 0$, o que garante que f é uma função côncava. Pela desigualdade de Jensen, $\forall x_1, x_2, x_3 \in (0, \pi), t_1, t_2, t_3 \in (0, 1)$, segue que

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + t_3 f(x_3) \leq f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3).$$

Em particular, se $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{3}, x_1 = \alpha, x_2 = \beta$ e $x_3 = \gamma$, tem-se que:

$$\frac{1}{3}f(\alpha) + \frac{1}{3}f(\beta) + \frac{1}{3}f(\gamma) \leq f(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma) \Rightarrow$$
$$\frac{1}{3}sen\alpha + \frac{1}{3}sen\beta + \frac{1}{3}sen\gamma \leq sen\left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma\right) \Rightarrow$$
$$sen\alpha + sen\beta + sen\gamma \leq 3sen\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right).$$

Mas ocorre que α, β e γ são as medidas dos ângulos internos de um triângulo, o que revela que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Assim,

$$\begin{aligned} sen\alpha + sen\beta + sen\gamma \leq & \; 3sen\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) \\ = & \; 3sen\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ = & \; \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se $\alpha = \beta = \gamma = 60^o$, ou seja, se e somente se, o triângulo ABC é equilátero. $\square$

A partir do resultado que acabamos de demonstrar, podemos com o auxílio da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, estabelecer outra interessante desigualdade trigonométrica envolvendo as medidas dos ângulos de um triângulo ABC.

Exemplo 2.5.1. *Sejam α, β e γ as medidas dos ângulos um triângulo ABC. Mostre que*

$$sen\alpha \cdot sen\beta \cdot sen\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo é equilátero.

Solução:

Uma vez que $senx > 0$ para todo $x \in (0, \pi)$ podemos aplicar a **desigualdade MA-MG**, e obtermos

$$\sqrt[3]{sen\alpha \cdot sen\beta \cdot sen\gamma} \leq \frac{sen\alpha + sen\beta + sen\gamma}{3}.$$

Assim,

$$sen\alpha \cdot sen\beta \cdot sen\gamma \leq \left(\frac{sen\alpha + sen\beta + sen\gamma}{3}\right)^3 \overset{Teo}{\leq} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $sen\alpha = sen\beta = sen\gamma$, o que ocorre se, e somente se, $\alpha = \beta = \gamma = 60^o$, o que ocorre se, e somente se, o triângulo é equilátero, como queríamos demonstrar.

Agora demonstraremos uma desigualdade trigonométrica, que é uma consequência da famosa a desigualdade de Euler ($R \geq 2r$), entre as medidas dos raios das circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo ABC.

Teorema 22. *Sejam A, B e C as medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC, cujos lados medem $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Tem-se que*

$$\left(sen\frac{A}{2}\right)\left(sen\frac{B}{2}\right)\left(sen\frac{C}{2}\right) \leq \frac{1}{8}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo ABC é equilátero.

Demonstração:

Inicialmente vamos mostrar que: $sen\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, onde $s = \frac{a+b+c}{2}$.

De fato,

$$sen^2\frac{A}{2} = \frac{1 - cosA}{2} = \frac{1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

Como $0 \leq \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$, segue que $sen\frac{A}{2} > 0$. Assim,

$$sen^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc} \Rightarrow sen\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

De modo completamente análogo, podemos mostrar que:

$$sen\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \ \ e \ \ sen\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Por outro lado, pela relação de Euler entre as medidas dos raios das circunferências inscrita e circunscrita ao triângulo ABC, $R \geq 2r$, segue que

$$\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}.$$

Lembrando que a medida da área do triângulo ABC é dada por

$$(ABC) = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

segue que:

$$sen\frac{A}{2}sen\frac{B}{2}sen\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{sr^2}{abc} = \frac{r}{4R} = \frac{1}{4}\cdot\frac{r}{R} \leq \frac{1}{8},$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $R = 2r$, o que ocorre se, e somente se, o triângulo ABC é equilátero, como queríamos demonstrar. □

Agora, utilizaremos a desigualdade de Leibniz para estabelecermos mais uma interessante desigualdade trigonométrica envolvendo as medidas dos ângulos de um triângulo ABC.

Teorema 23. *Sejam A, B e C as medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC. Então*

$$sen^2A + sen^2B + sen^2C \leq \frac{9}{4}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo ABC é equilátero.

Demonstração:

Pela lei dos senos, tem-se que:

$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c} = \frac{1}{2R},$$

onde a, b, e c são as medidas dos lados do triângulo ABC e R é a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Lembrando que $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$

$$\begin{aligned} sen^2A + sen^2B + sen^2C &= \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} \\ &= \frac{1}{4R^2}(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\leq \frac{1}{4R^2}\cdot 9R^2 = \frac{9}{4}, \end{aligned}$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2$, o que pela desigualdade de Leibniz, ocorre se, e somente se, o triângulo ABC é equilátero, como queríamos demonstrar. $\square$

O assunto não tem fim; existem inúmeras outras belas desigualdades envolvendo as medidas dos ângulos internos de um triângulo, os comprimentos dos seus lados e muitos outros elementos do triângulo. No próximo capítulo, continuaremos exibindo mais algumas delas, entre as várias aplicações de desigualdades elementares que vamos apresentar.

Capítulo 3

Algumas aplicações interessantes

Para finalizar o nosso trabalho, neste capítulo 4 vamos apresentar algumas aplicações das mais diversas desigualdades que apresentamos nos capítulos anteriores. De início mostraremos algums problemas de otimização, os conhecidos “problemas de máximo e mínimo”, cuja solução pode ser feita utilizando algumas das desigualdades que apresentamos ao longo do nosso trabalho. Nas demais seções deste capítulo apresentaremos outros problemas interessantes da Matemática Elementar que estão vinculados ao tema desigualdades.

3.1 Problemas de máximos e mínimos

Nesta seção, mostraremos alguns problemas de otimização (máximos e mínimos) cuja solução pode ser dada com o uso de algumas das famosas desigualdades que apresentamos nos capítulos anteriores.

Exemplo 3.1.1. *Se $1200cm^2$ de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa e as dimensões para que isso ocorra.*

Solução:
Seja A a medida da área da superfície e V a medida do volume da caixa. Se h é a altura da caixa, temos

$$A = x^2 + 4xh = 1200 \qquad e \qquad V = x^2h.$$

Aplicando **desigualdade MA-MG**, obtemos:

$$\frac{1200}{3} = \frac{x^2 + 2xh + 2xh}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 2xh 2xh} = \sqrt[3]{4(x^2h)^2} = \sqrt[3]{4V^2}.$$

Logo,

$$4V^2 \leq 400^3 \qquad ou \qquad V \leq 4000.$$

Esse resultado nos diz que o volume é menor ou igual a $4000cm^3$, e o volume será máximo se, e quando, a igualdade ocorrer. A igualdade acontece quando os termos forem iguais, $x^2 = 2xh$. Resolvendo sistema

$$\begin{cases} x^2 = 2xh \\ x^2 + 4xh = 1200. \end{cases}$$

Obtemos $x = 20cm$ e $h = 10cm$ e constata-se que, de fato, ocorre o valor máximo, $V = 4000cm^3$, para esses valores.

Exemplo 3.1.2. *Se uma lata de zinco de volume $16\pi cm^3$ deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a altura e o raio do cilindro para que a quantidade de material usado em sua fabricação seja menor possível.*

Solução:
Seja r a medida do raio da base, h a medida da altura e S a medida da área da superfície total do cilindro. Então, temos $\pi r^2 h = 16\pi$ e $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Usando a **desigualdade MA-MG** obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{S}{3} &= \frac{\pi rh + \pi rh + 2\pi r^2}{3} \\ &\geq \sqrt[3]{\pi rh \pi rh 2\pi r^2} = \sqrt[3]{2\pi^3(r^2h)^2} \\ &= \sqrt[3]{2\pi^3(16)^2} = \sqrt[3]{2^9\pi^3} \\ &= 8\pi. \end{aligned}.$$

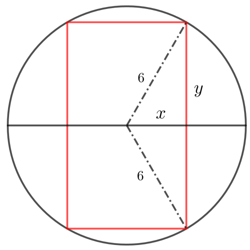
Ou seja, $S \geq 24\pi$ e S será mínima se, e quando, a igualdade ocorrer, isto é, quando $\pi rh = 2\pi r^2$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \pi rh = 2\pi r^2 \\ r^2 h = 16. \end{cases}$$

Obtemos $h = 4cm$ e $r = 2cm$ e constata-se que, de fato, que o mínimo para S, $S = 8\pi cm^2$, ocorre para esses valores.

Exemplo 3.1.3. *Encontre as dimensões do cilindro circular reto de maior área lateral que pode ser inscrito numa esfera de raio* $6m$.

Solução:



A figura ao lado mostra a interseção do sólido com o plano que contém o eixo do cilindro. Se S é a medida da área do lateral do cilindro, temos $S = 2\pi x 2y = 4\pi xy$. Por Pitágoras, $x^2 + y^2 = 36$. Aplicando a **desigualdade MA-MG**, segue que:

$$\frac{36}{2} = \frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2} = xy = \frac{S}{4\pi} \Rightarrow S \leq 72\pi.$$

A área lateral do cilindro é então menor ou igual a $72\pi m^2$ e será máxima se, e somente se a igualdade $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ (pois $x, y \in R_+$) ocorrer. Temos então o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases},$$

cuja solução é $x = y = 3\sqrt{2}m$.

Exemplo 3.1.4. *Sendo* x *e* y *números reais positivos, determinar o valor máximo de*

$$E = xy(1 - x - y).$$

Solução:

Como $x, y \in \mathbb{R}_+$, note que se tivéssemos $1 - x - y < 0$, o valor de E seria negativo. Por outro lado, se $1 - x - y \geq 0$ o valor de E é positivo. Ora, como estamos interessados no valor máximo de E, é suficiente analisar o caso em que $1 - x - y > 0$. Nesse caso, pela **desigualdade MA-MG**, segue que:

$$\sqrt[3]{xy(1-x-y)} \leq \frac{x+y+1-x-y}{3} \Leftrightarrow xy(1-x-y) \leq \frac{1}{27}.$$

Então, o valor máximo de E é $\frac{1}{27}$, que ocorre quando $x = y = 1 - x - y$, ou seja, $x^3 = \frac{1}{27}$ que implica que $x = y = \frac{1}{3}$.

3.2 Usando as desigualdades clássicas

Nesta seção vamos mostrar mais uma gama de problemas interessantes cuja solução pode ser dada pela utilização das desigualdades clássicas que apresentamos ao longo do nosso trabalho; médias, médias-potência, Cauchy-Schwarz, rearranjo, Hölder, Young, Minkowski , Schur, etc.

Exemplo 3.2.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Prove a desigualdade*

$$\frac{abc}{(1+a)(a+b)(b+c)(c+16)} \leq \frac{1}{81}.$$

Solução:
Observe que

$$\begin{aligned}(1+a)(a+b)(b+c)(c+16) &= \\ &= \left(1+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)\left(a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\right)(c+8+8) \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{bc^2}{4}}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{64c}{4}} \geq 81abc.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{abc}{(1+a)(a+b)(b+c)(c+16)} \leq \frac{1}{81}.$$

Exemplo 3.2.2. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Prove que*

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Solução:
Aplicando a **desigualdade MA-MG**, temos que:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n) \geq n\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$$

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}.$$

Multiplicando membro a membro, segue que:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Exemplo 3.2.3. *(Rússia, 1991) Se x, y e z são números reais não negativos. Prove que*

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

Solução:

Usando a **desigualdade MA - MG**, segue que:

$$\frac{xy+yz}{2} \geq \sqrt{xy^2z} \Leftrightarrow xy + yz \geq 2y\sqrt{xz},$$

$$\frac{xy+xz}{2} \geq \sqrt{x^2yz} \Leftrightarrow xy + xz \geq 2x\sqrt{yz},$$

$$\frac{yz+zx}{2} \geq \sqrt{xyz^2} \Leftrightarrow yz + xz \geq 2z\sqrt{xy}.$$

Adicionando membro a membro as três desigualdades acima, segue que:

$$2(xy + yz + xz) \geq 2(x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}). \tag{3.1}$$

Aplicando novamente a **desigualdade MA-MG**, obtemos:

$$\frac{x^2+x^2+y^2+z^2}{4} \geq \sqrt[4]{x^4y^2z^2} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq 4x\sqrt{yz},$$

$$\frac{x^2+y^2+y^2+z^2}{4} \geq \sqrt[4]{x^2y^4z^2} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq 4y\sqrt{xz},$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2+z^2}{4} \geq \sqrt[4]{x^2y^2z^4} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq 4z\sqrt{xy}.$$

Adicionando membro a membro as três desigualdades acima, segue que:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}. \tag{3.2}$$

Adicionando as desigualdades (4.1) e (4.2), obtemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \geq 3x\sqrt{yz} + 3y\sqrt{xz} + 3z\sqrt{xy} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 3.2.4. *(OBM-2001) Prove que* $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$*, para quaisquer números reais positivos* a, b *e* c.

Solução:
Observe que $(a+b)(a+c) = a^2+ac+ab+bc = bc+a(a+b+c)$. Pela **desigualdade MA-MG**, temos:

$$\frac{bc+a(a+b+c)}{2} \geq \sqrt{abc(a+b+c)} \Leftrightarrow bc+a(a+b+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)},$$

ou seja,

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a++b+c)}.$$

Exemplo 3.2.5. *Mostre que* $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)$ *para todo* n *natural.*

Solução: Note que:

$$\begin{aligned} n = & \ \frac{n^2}{n} \\ = & \ \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n} \\ > & \ \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$n > \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \Rightarrow n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$$

Exemplo 3.2.6. *Se* a, b, c *e* d *são números reais positivos tais que* $a+b+c+d=1$. *Prove que*

$$S = \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6.$$

Solução: Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para os números $4a+1$ e 1, segue que

$$\sqrt{(4a+1).1} \leq \frac{(4a+1)+1}{2} = 2a+1 \Rightarrow \sqrt{4a+1} \leq 2a+1.$$

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, $4a+1=1 \Leftrightarrow a=0$. Como $a>0$, segue que $\sqrt{4a+1} < 2a+1$. Analogamente,

$$\sqrt{4b+1} < 2b+1, \ \sqrt{4c+1} < 2c+1 \ \ e \ \ \sqrt{4d+1} < 2d+1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S = &\ \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} \\ \leq &\ (2a+1) + (2b+1) + (2c+1) + (2d+1) \\ = &\ 2(a+b+c+d) + 4 \\ = &\ 2 \cdot 1 + 4 \\ = &\ 6. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.7. *Determine todos pontos $P = (x, y)$ de coordenadas reais satisfazem a igualdade*

$$\log\left(x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}\right) = \log(xy).$$

Solução: Temos que:

$$\log\left(x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}\right) = \log(xy) \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3} = xy.$$

Calculando as médias aritmética e geométrica dos números x^3, $\frac{1}{3}y^3$ e $\frac{1}{3}$, segue que

$$A = \frac{x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}}{3} = \frac{xy}{3},$$

$$G = \sqrt[3]{x^3 \cdot \frac{1}{3}y^3 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{xy}{3}.$$

Assim, as médias aritmética e geométrica são iguais, o que implica que os números x^3, $\frac{1}{3}y^3$ e $\frac{1}{3}$ são iguais. Assim,

$$x^3 = \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}. \end{cases}$$

Exemplo 3.2.8. *Encontre todas as soluções reais positivas do sistema*

$$\begin{cases} a + b + c + d = 12 \\ abcd = 27 + ab + ac + ad + bc + bd + cd. \end{cases}$$

Solução: Como a, b, c e d são números positivos, podemos usar a **desigualdade MA-MG**. Vejamos:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow abcd \leq 81.$$

Por outro lado, aplicando novamente a **desigualdade MA-MG**, segue que:

$$\begin{aligned} abcd =& 27 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \\ &\geq 27 + 6\sqrt[6]{ab.ac.ad.bc.bd.cd} \\ =& 27 + 6\sqrt{abcd}. \end{aligned}$$

Portanto, $abcd \geq 27+6\sqrt{abcd}$. Fazendo a mudança de variáveis $abcd = x^2$, obtemos:

$$abcd \geq 27 + 6\sqrt{abcd} \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 \geq 0.$$

As soluções dessa desigualdade quadrática são $x \leq -3$ ou $x \geq 9$. Ora, como $x = abcd > 0$, segue que

$$x \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{abcd} \geq 9 \Leftrightarrow abcd \geq 81.$$

Por outro lado, já haviamos provado que $abcd \leq 81$, o que revela que $abcd = 81$. Assim,

$$A = \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{12}{4} = 3 \;\; e \;\; G = \sqrt[4]{abcd} = \sqrt[4]{81} = 3,$$

ou seja, $A = G$, o que ocorre se, e somente se, $a = b = c = d$. Ora, como $a + b + c + d = 12$, segue que $a = b = c = d = 3$ é a única solução do sistema.

Exemplo 3.2.9. *Sejam a, b e c inteiros que satisfazem a condição $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$. Prove que abc é um cubo perfeito.*

Solução: Calculando as médias aritmética e geométrica, temos:

$$A = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$G = \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Assim, as médias aritmética e geométrica são iguais, o que revela que os números $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ e $\frac{c}{a}$ são iguais. Assim,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = b = c.$$

Portanto, $a \cdot b \cdot c = a \cdot a \cdot a = a^3$, que é um cubo perfeito.

Exemplo 3.2.10. *Mostre que se $a > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.*

Solução:

Usando a desigualdade $H \leq G \leq A$, para os n números $1, 1, \ldots, 1$ e a, obtemos:

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}+\frac{1}{a}}{n}} \leq \sqrt[n]{1\cdot 1\cdots 1\cdot a} \leq \frac{1+1+\cdots+1+a}{n},$$

ou seja,

$$\frac{n}{n-1+\frac{1}{a}} \leq \sqrt[n]{a} \leq \frac{(n-1)+a}{n} \Rightarrow \frac{a}{a-\frac{a}{n}+\frac{1}{n}} \leq 1-\frac{1}{n}+\frac{a}{n}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{a-\frac{a}{n}+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{a}{n}\right) = 1$, segue, pelo teorema do sanduíche que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Exemplo 3.2.11. *Se $0 < a \leq b$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = b$.*

Solução: De $b^n < a^n + b^n \leq 2b^n$, segue que :

$$\sqrt[n]{b^n} < \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \sqrt[n]{2b^n} \Rightarrow b < \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq b\sqrt[n]{2}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, segue pelo teorema do sanduíche que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = b$.

Exemplo 3.2.12. *Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.*

Solução: Usando a **desigualdade MA-MG**, segue que:

$$1 \leq n^{\frac{1}{n}} = \left(\sqrt{n}.\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1.1.\cdots.\sqrt{n}.\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n} = 1+2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right),$$

ou seja,

$$1 \leq n^{\frac{1}{n}} \leq 1+2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right).$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}\right)\right] = 1$, segue pelo teorema do sanduíche que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 3.2.13. *(Novo México) Encontre o termo mínimo da sequência*

$$\sqrt{\frac{7}{6}}+\sqrt{\frac{96}{7}}, \sqrt{\frac{8}{6}}+\sqrt{\frac{96}{8}}, \sqrt{\frac{9}{6}}+\sqrt{\frac{96}{9}}, \ldots, \sqrt{\frac{95}{6}}+\sqrt{\frac{96}{95}}.$$

Solução:

Aplicando a **desigualdade MA-MG** temos:

$$\frac{\sqrt{\frac{n}{6}}+\sqrt{\frac{96}{n}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{\frac{n}{6}}\sqrt{\frac{96}{n}}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{n}{6}}+\sqrt{\frac{96}{n}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{n}{6}}\sqrt{\frac{96}{n}}} = 4.$$

A igualdade ocorre quando:

$$\sqrt{\frac{n}{6}} = \sqrt{\frac{96}{n}} \Rightarrow n = \sqrt{576} = 24.$$

Portanto, o termo mínimo é:

$$\sqrt{\frac{24}{6}}+\sqrt{\frac{96}{24}} = 4.$$

Exemplo 3.2.14. *(Cone Sul) Se $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$. Prove que*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Solução:

Aplicando a **desigualdade MA-MH**

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}} \Rightarrow$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c} \geq \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{c}{a+c}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+3 \geq \frac{9}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 3.2.15. *(Baltic-way) Prove que se* a, b, c *e* d *são números reais positivos, então temos:*

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4.$$

Solução:

Usando a **desigualdade MA-MH**, segue que:

$$i.\quad \frac{\frac{a+c}{a+b}+\frac{c+a}{c+d}}{2}\geq\frac{2}{\frac{a+b}{a+c}+\frac{c+d}{c+a}}\Leftrightarrow\frac{a+c}{a+b}+\frac{c+a}{c+d}\geq\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}$$

e

$$ii.\quad \frac{\frac{b+d}{b+c}+\frac{d+b}{d+a}}{2}\geq\frac{2}{\frac{b+c}{b+d}+\frac{d+a}{d+b}}\Leftrightarrow\frac{b+d}{b+c}+\frac{d+b}{d+a}\geq\frac{4(b+d)}{a+b+c+d}.$$

Adicionado as duas desigualdades (i) e (ii), obtemos:

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4.$$

Exemplo 3.2.16. *(South Africa, 1995) Sejam* a, b, c *e* d *números reais positivos. Prove que*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Solução:

Considere os 8 números reais positivos $a,\ b,\ \frac{c}{2},\ \frac{c}{2},\ \frac{d}{4},\ \frac{d}{4},\ \frac{d}{4},\ \frac{d}{4}$.

Aplicando a **desigualdade MA-MH**, obtemos:

$$\frac{a+b+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}}{8}\geq\frac{8}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}+\frac{2}{c}+\frac{4}{d}+\frac{4}{d}+\frac{4}{d}+\frac{4}{d}}.$$

Assim,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Exemplo 3.2.17. *Sejam* a, b *e* $c\in\mathbb{R}$ *tal que* $a+b+c=1$. *Prove a desigualdade*

$$\frac{1-2ab}{c}+\frac{1-2bc}{a}+\frac{1-2ca}{b}\geq 7.$$

Solução: Temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1-2ab}{c}+\frac{1-2bc}{a}+\frac{1-2ca}{b}\\
&=\frac{(a+b+c)^2-2ab}{c}+\frac{(a+b+c)^2-2bc}{a}+\frac{(a+b+c)^2-2ca}{b}\\
&=\frac{a^2+b^2+c^2+2bc+2ac}{c}+\frac{a^2+b^2+c^2+2ac+2ab}{a}+\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc}{b}\\
&=(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4(a+b+c)\\
&=(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Aplicando a **desigualdade MQ-MA**, segue que

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Além disso,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}=9.$$

Finalmente, usando as duas últimas desigualdades e (1) obtemos:

$$\frac{1-2ab}{c}+\frac{1-2bc}{a}+\frac{1-2ca}{b}=(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4\geq\frac{9}{3}+4=7.$$

Exemplo 3.2.18. *Sejam x e y números reais positivos. Prove a desigualdade*

$$x^y+y^x\geq 1.$$

Solução:

Vamos mostrar para $a,b\in(0,1)$ que vale a desigualdade

$$a^b\geq\frac{a}{a+b-ab}.$$

Pela **desigualdade de Bernoulli**, temos

$$a^{1-b}=(1+a-1)^{1-b}\leq 1+(a-1)(1-b)=a+b-ab,$$

isto é,

$$a^b\geq\frac{a}{a+b-ab}.$$

Analogamente, temos:

$$b^a \geq \frac{b}{a+b-ab}.$$

No caso que $0 < x, y < 1$, pelas desigualdades anteriores temos:

$$x^y + y^x \geq \frac{x}{x+y-xy} + \frac{y}{x+y-xy} = \frac{x+y}{x+y-xy} > \frac{x+y}{x+y} = 1.$$

No caso $x \geq 1$ ou $y \geq 1$, a desigualdade $x^y + y^x > 1$ é claramente verdadeira. Portanto, para quaisquer x e y números reais positivos, tem-se que:

$$x^y + y^x \geq 1.$$

Como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.2.19. *Para todos os números positivos a, b e c. Prove a desigualdade*

$$\frac{a^3b}{c} + \frac{a^3c}{b} + \frac{b^3a}{c} + \frac{b^3c}{a} + \frac{c^3a}{b} + \frac{c^3b}{a} \geq 6abc.$$

Solução:

Por causa da simetria, podemos supor que $a \geq b \geq c$. Então a **desigualdade do rearranjo** implica que

$$\frac{a^3b}{c} + \frac{b^3c}{a} + \frac{c^3a}{b} = \begin{bmatrix} a^2b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 \\ \frac{a}{bc} & \frac{b}{ca} & \frac{c}{ab} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 \\ \frac{c}{ab} & \frac{a}{bc} & \frac{b}{ca} \end{bmatrix} = 3abc$$

e semelhantemente

$$\frac{a^3c}{b} + \frac{b^3a}{c} + \frac{c^3b}{a} = \begin{bmatrix} a^2b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 \\ \frac{b}{ca} & \frac{c}{ab} & \frac{a}{bc} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 \\ \frac{c}{ab} & \frac{a}{bc} & \frac{b}{ca} \end{bmatrix} = 3abc.$$

Adicionando essas duas desigualdades, produz o resultado desejado, ou seja,

$$\frac{a^3b}{c} + \frac{a^3c}{b} + \frac{b^3a}{c} + \frac{b^3c}{a} + \frac{c^3a}{b} + \frac{c^3b}{a} \geq 6abc.$$

Exemplo 3.2.20. *(Irlanda-99) Sejam a, b, c, e d números reais positivos tais que $a+b+c+d=1$. Prove que*

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2},$$

com igualdade se, e somente se $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Solução:

Defina as seguintes quadruplas de números reais:

$$a_1 = \sqrt{a+b},\ a_2 = \sqrt{b+c},\ a_3 = \sqrt{c+d},\ a_4 = \sqrt{d+a}\ \ e$$

$$b_1 = \frac{a}{\sqrt{a+b}}, b_2 = \frac{b}{\sqrt{b+c}}, b_3 = \frac{c}{\sqrt{c+d}}, b_4 = \frac{d}{\sqrt{d+a}}.$$

Pela **desigualdade de Cauchy-Schwarz**, segue que:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(\underbrace{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}_{S}) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) \Rightarrow$$

$$[(a+b) + (b+c) + (c+d) + (d+a)]S \geq (a+b+c+d)^2 \Rightarrow$$

$$2(a+b+c+d)S \geq (a+b+c+d)^2 \Rightarrow S \geq \frac{(a+b+c+d)}{2} \Rightarrow S \geq \frac{1}{2}.$$

Exemplo 3.2.21. *(Poland, 2006) Sejam a, b e c números reais positivos tais que $ab + bc + ca = abc$. Prove que*

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1.$$

Solução:

Usando a substituição $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, a condição $ab + bc + ca = abc$ torna-se $x + y + z = 1$ e desigualdade é equivalente a:

$$\frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} + \frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3} + \frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3} \geq 1 = x + y + z.$$

Usando a **desigualdade de Chebyshev** para provar que

$$\frac{x^4 + y^4}{2} \geq \left(\frac{x^3 + y^3}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} \geq \frac{x+y}{2},$$

$$\frac{y^4 + z^4}{2} \geq \left(\frac{y^3 + z^3}{2}\right)\left(\frac{y+z}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3} \geq \frac{y+z}{2},$$

$$\frac{z^4 + x^4}{2} \geq \left(\frac{z^3 + x^3}{2}\right)\left(\frac{z+x}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3} \geq \frac{z+x}{2}.$$

Adicionando as desigualdades acima, obtemos:

$$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3}=\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\geq 1.$$

Exemplo 3.2.22. *Seja $p \geq 1$ um número real arbitrário. Prove que, para qualquer inteiro positivo n temos:*

$$1^p+2^p+\cdots+n^p \geq n\left(\frac{n+1}{2}\right)^p.$$

Solução:

Denotando $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_n = n$ e $y_1 = n, y_2 = n-1, \ldots, y_n = 1$. Observe que $x_i + y_i = n+1$.

Aplicando a **desigualdade de Minkowski**

Temos

$$\begin{aligned}((1+n)^p+(1+n)^p+\cdots+(1+n)^p)^{\frac{1}{p}} &= ((x_1+y_1)^p+(x_2+y_2)^p+\cdots+(x_n+y_n)^p)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq (x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}+(y_1^p+y_2^p+\cdots+y_n^p)^{\frac{1}{p}}\\ &= 2(1^p+2^p+\cdots+n^p)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

isto é,

$$n(n+1)^p \leq 2^p(1^p+2^p+\cdots+n^p).$$

Portanto,

$$1^p+2^p+\cdots+n^p \geq n\left(\frac{n+1}{2}\right)^p.$$

Note que igualdade ocorre quando $n = 1$.

Exemplo 3.2.23. *(India, 2003) Sejam a, b e c os comprimentos dos lados do triângulo ABC, cuja medida da área é (ABC). Se construirmos um triângulo $A'B'C'$ cuja medida da área é $(A'B'C')$, com os lados de comprimentos $a+\frac{b}{2}$, $b+\frac{c}{2}$ e $c+\frac{a}{2}$. Prove que*

$$(ABC) \leq \frac{4}{9}(A'B'C').$$

Solução:

Chame $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$. Nesse caso, os comprimentos dos lados do triângulo $A'B'C'$ são:

$$a' = \frac{x + 2y + 3z}{2},\ b' = \frac{3x + y + 2z}{2},\ c' = \frac{2x + 3y + z}{2}.$$

Usando a fórmula de Heron para calcular área de triângulo, obtemos:

$$(A'B'C') = \sqrt{\frac{3(x + y + z)(2x + y)(2y + z)(2z + x)}{16}}.$$

Aplicando a **desigualdade MA-MG** , segue que:

$$2x + y \geq 3\sqrt[3]{x^2y},\ 2y + z \geq 3\sqrt[3]{y^2z},\ 2z + x \geq 3\sqrt[3]{z^2x}.$$

Isso nos ajudará provar a nossa desigualdade, pois

$$(2x + y)(2y + z)(2z + x) \geq 3\sqrt[3]{x^2y}.3\sqrt[3]{y^2z}.3\sqrt[3]{z^2x} = 27xyz.$$

Assim,

$$(A'B'C') = \sqrt{\frac{3(x + y + z)(2x + y)(2y + z)(2z + x)}{16}} \geq \sqrt{\frac{3(x + y + z)27(xyz)}{16}}.$$

Como $(ABC) = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \sqrt{(x + y + z)(xyz)}$, segue que

$$(A'B'C') \geq \sqrt{\frac{3(x + y + z)27(xyz)}{16}} = \frac{9}{4}\sqrt{(x + y + z)(xyz)} = \frac{9}{4}(ABC).$$

Portanto, $(A'B'C') \geq \frac{9}{4}(ABC) \Rightarrow (ABC) \leq \frac{4}{9}(A'B'C')$. Como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.2.24. *No triângulo ABC com lados de comprimento a, b e c cuja medida da área é (ABC). Prove que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq \frac{9abc}{a + b + c}.$$

Solução:

Usando a **desigualdade de Leibniz** e o fato de que $(ABC) = \frac{abc}{4R}$, (ou seja, $R = \frac{abc}{4(ABC)}$) temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}9R^2 \geq a^2+b^2+c^2 &\Leftrightarrow \frac{a^2b^2c^2}{16(ABC)^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{9}\\ &\Leftrightarrow 4(ABC) \leq \frac{3abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.\end{aligned}$$

Agora usando a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**, para as triplas $(1,1,1)$ e (a,b,c), segue que:

$$\begin{aligned}a+b+c \leq \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{a+b+c}\\ &\Leftrightarrow \frac{3abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}abc}{a+b+c}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$4(ABC) \leq \frac{3abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow 4\sqrt{3}(ABC) \leq \frac{9abc}{a+b+c},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 3.2.25. *Sejam a, b, e c os comprimentos dos lados do triângulo e (ABC) a medida da sua área. Prove que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Solução:

Vamos usar o exercício anterior e a **desigualdade MG-MH**.

$$\sqrt[3]{ab.ac.bc} = \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq \frac{3}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}} = \frac{3abc}{a+b+c} \Rightarrow \frac{9abc}{a+b+c} \leq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Utilizando o resultado da questão anterior, temos:

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq \frac{9abc}{a+b+c} \leq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Portanto, $4\sqrt{3}(ABC) \leq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, que é o resultado desejado.

Exemplo 3.2.26. *(APMO, 1996) Sejam a, b e c os comprimentos dos lados do triângulo. Prove que*

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Solução:

Definindo $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, podemos deduzir que $a + b - c = 2z$, $b + c - a = 2x$, $c + a - b = 2y$. Então, a desigualdade original é equivalente a:

$$\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}.$$

Observe que

$$\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} = \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{2y}}{2} + \frac{\sqrt{2y} + \sqrt{2z}}{2} + \frac{\sqrt{2z} + \sqrt{2x}}{2}.$$

Agora aplicaremos a **desigualdade MA-MQ**

$$\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{2y}}{2} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{2x})^2 + (\sqrt{2y})^2}{2}} = \sqrt{x+y},$$

$$\frac{\sqrt{2y} + \sqrt{2z}}{2} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{2y})^2 + (\sqrt{2z})^2}{2}} = \sqrt{y+z},$$

$$\frac{\sqrt{2z} + \sqrt{2x}}{2} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{2z})^2 + (\sqrt{2x})^2}{2}} = \sqrt{z+x}.$$

Adicionando as desigualdades acima, obtemos:

$$\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}.$$

Portanto,

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, $x = y = z$, isto é, se e somente se, $a = b = c$.

Exemplo 3.2.27. *Considere a, b e c os lados do triângulo e p é semiperímetro, ou seja, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Prove as seguintes afirmações:*

1. $3(bc + ca + ab) \leq (a + b + c)^2 < (bc + ca + ab)$,
2. $\frac{2p}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

A igualdade ocorre se, e somente se, no triângulo equilátero.

Solução:

1. Pela **desigualdade MA-MG**, sabemos que:

$$2bc \leq b^2 + c^2,$$
$$2ca \leq c^2 + a^2,$$
$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

Adicionando as desigualdades e adicionando $2ab + 2ac + 2bc$ nos dois membros, obtemos:

$$3(ab + ac + bc) \leq (a + b + c)^2.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$.

Como a, b e c são lados de um triângulo, então

$$|b - c| < a, \quad |c - a| < b, \quad |a - b| < c.$$

Equivalentemente,

$$(b - c)^2 < a^2, \quad (c - a)^2 < b^2, \quad (a - b)^2 < c^2.$$

Adicionando membro a membro essas desigualdades, segue que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + ac + bc).$$

Logo,

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 4(ab + ac + bc).$$

2. Usando a desigualdade $x^2 + y^2 + c^2 \geq xy + xz + yz$. Fazendo $x = bc$, $y = ca$ e $z = ab$, então:

$$(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 \geq (ca)(ab) + (ab)(bc) + (bc)(ca).$$

Dividindo a desigualdade por $\frac{1}{abc}$, segue que:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{2p}{abc}.$$

Portanto,

$$\frac{2p}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

O que mostra que a desigualdade é válida.

Exemplo 3.2.28. *Sejam α, β e γ as medidas do ângulos internos de um dado triângulo. Mostre que são verdadeiras a seguintes desigualdades:*

1. $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma \leq \frac{3}{2}$
2. $cos\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\gamma \leq \frac{1}{8}$
3. $cos\frac{\alpha}{2} + cos\frac{\beta}{2} + cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
4. $cos\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} \cdot cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Solução:

1. Uma vez que $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ segue que

$$cos\gamma = -cos(\alpha + \beta) = -cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 3 - 2(cos\alpha + cos\beta + cos\gamma) &= 3 - 2(cos\alpha + cos\beta - cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta) \\ &= sen^2\alpha + sen^2\beta - 2sen\alpha sen\beta + 1 + cos^2\alpha \\ &\quad + cos^2\beta - 2cos\alpha - 2cos\beta + 2cos\alpha cos\beta \\ &= (sen\alpha - sen\beta)^2 + (1 - cos\alpha - cos\beta)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$cos\alpha + cos\beta + cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

2. Sendo $cos(\alpha + \beta) = -cos\gamma$

Temos

$$\begin{aligned} cos\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\gamma &= \frac{1}{2}(cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta))cos\gamma \\ &= \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) - cos\gamma)cos\gamma = \frac{1}{2}cos(\alpha - \beta)cos\gamma - \frac{cos^2\gamma}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(cos\gamma - \frac{cos(\alpha - \beta)}{2}\right)^2 + \frac{cos^2(\alpha - \beta)}{8} \\ &\leq \frac{cos^2(\alpha - \beta)}{8} \leq \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

3. Desde que $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, segue que $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2 \in (0, \pi/2)$.

   A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = cosx$ é concava no intervalo $(0, \pi/2)$. (pois nesse intervalo, $f''(x) < 0$). Pela **desigualdade Jensen**, temos:

$$\frac{cos\frac{\alpha}{2} + cos\frac{\beta}{2} + cos\frac{\gamma}{2}}{3} \leq cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6} = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

   ou seja,

$$cos\frac{\alpha}{2} + cos\frac{\beta}{2} + cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

4. Desde que $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ segue-se que $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2 \in (0, \pi/2)$, isto é

$$cos\alpha,\ \cos\beta,\ cos\gamma > 0,$$

   Pela **desigualdade MA-MG**, segue que:

$$\sqrt[3]{cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}} \leq \frac{cos\frac{\alpha}{2} + cos\frac{\beta}{2} + cos\frac{\gamma}{2}}{3} \overset{(3)}{\leq} \frac{\sqrt{3}}{2},$$

   Portanto,

$$cos\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} \cdot cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Exemplo 3.2.29. *Sejam a, b e c números reais tal que $abc \geq 1$. Prove a desigualdade*

$$a + b + c \geq \frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a}.$$

Solução:

Temos

$$\begin{aligned}
&a + b + c - \frac{1+a}{1+b} - \frac{1+b}{1+c} - \frac{1+c}{1+a} \\
&= \left(1 + a - \frac{1+a}{1+b}\right) + \left(1 + b - \frac{1+b}{1+c}\right) + \left(1 + c - \frac{1+c}{1+a}\right) - 3 \\
&= (1+a)\left(1 - \frac{1}{1+b}\right) + (1+b)\left(1 - \frac{1}{1+c}\right) + (1+c)\left(1 - \frac{1}{1+a}\right) - 3 \\
&= \frac{(1+a)b}{1+b} + \frac{(1+b)c}{1+c} + \frac{(1+c)a}{1+a} - 3 \\
&\geq 3\sqrt[3]{\frac{(1+a)b}{1+b} \cdot \frac{(1+b)c}{1+c} \cdot \frac{(1+c)a}{1+a}} - 3 \\
&= 3\sqrt[3]{abc} - 3 \geq 0 \quad (abc \geq 1).
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c = 1$.

Exemplo 3.2.30. *Sejam x, y e z números reais e positivos. Mostre que*

$$x^5 + y^5 + z^5 \leq \frac{x^6}{\sqrt{yz}} + \frac{y^6}{\sqrt{xz}} + \frac{z^6}{\sqrt{xy}}.$$

Solução:
Fazendo $a = \sqrt{x}, \quad b = \sqrt{y} \quad$ e $\quad c = \sqrt{y}$, substituindo na desigualdade ficaremos com:

$$(a^{10} + b^{10} + c^{10})abc \leq a^{13} + b^{13} + c^{13}.$$

Mas ocorre que

$$\begin{aligned}
a^{13} + b^{13} + c^{13} = & \\
&= 3\left(\sqrt[13]{\frac{a^{13} + b^{13} + c^{13}}{3}}\right)^{13} \\
&= 3\left(\sqrt[13]{\frac{a^{13} + b^{13} + c^{13}}{3}}\right)^{10}\left(\sqrt[13]{\frac{a^{13} + b^{13} + c^{13}}{3}}\right)^{3} \\
&\geq 3\left(\sqrt[10]{\frac{a^{10} + b^{10} + c^{10}}{3}}\right)^{10}\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^{3} \\
&\geq (a^{10} + b^{10} + c^{10})(\sqrt[3]{abc})^3 \\
&= (a^{10} + b^{10} + c^{10})abc.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$x^5 + y^5 + z^5 \leq \frac{x^6}{\sqrt{yz}} + \frac{y^6}{\sqrt{xz}} + \frac{z^6}{\sqrt{xy}}.$$

3.3 Desigualdades e criatividade

Para finalizar o nosso trabalho, vamos apresentar uma seção final, onde mostraremos alguns problemas envolvendo desigualdades cuja solução não precisa necessariamente utilizar as desigualdades clássicas que apresentamos ao longo do nosso texto. A principal arma atacar os problemas dessa seção é a criatividade.

Exemplo 3.3.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Prove que*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Solução:
Uma vez que $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$, segue que:

$$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca) \quad \Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.$$

Note que a igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c$.

Exemplo 3.3.2. *Sejam $x, y, z > 0$ números reais tal que $x+y+z=1$. Prove que*

$$\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1} \leq 3\sqrt{3}.$$

Solução:
Denotando $\sqrt{6x+1}=a$, $\sqrt{6y+1}=b$, $\sqrt{6z+1}=c$, segue que:

$$a^2+b^2+c^2=6(x+y+z)+3=9.$$

Portanto,

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)=27 \Rightarrow a+b+c \leq 3\sqrt{3}.$$

Exemplo 3.3.3. *(Vasile Cîrtoaje, Micea Lascu) Sejam a, b e c números reais positivos de modo que $abc=1$. Prove que*

$$1+\frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+ac+bc}.$$

Solução:
Faça $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$, e observe que $xyz=1$. A desigualdade é equivalente a

$$1+\frac{3}{xy+yz+zx} \geq \frac{6}{x+y+z}.$$

Por outro lado, $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$. Assim,

$$1+\frac{3}{xy+yz+zx} \geq 1+\frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

Então é suficiente provar que

$$1+\frac{9}{(x+y+z)^2} \geq \frac{6}{x+y+z}.$$

A última desigualdade é equivalente a

$$\left(1 - \frac{3}{x+y+z}\right)^2 \geq 0,$$

o que é evidentemente verdadeiro, pelo fato do quadrado de um número real não ser negativo.

Exemplo 3.3.4. *(Czech and Slovak Republics, 2005) Sejam a, b e c números positivos que satisfaz $abc = 1$. Prove que*

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Solução:
Note que

$$\begin{aligned}\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} &= \\ &= \frac{(a+1)(b+1)(c+1) - 2}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\ &= 1 - \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\ &\geq \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Se, e somente se $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$, e esta última desigualdade segue imediatamente da desigualdade $\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{b+1}{2}\right)\left(\frac{c+1}{2}\right) \geq \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} = 1$.

Exemplo 3.3.5. *Sejam a, b, c e d números reais e positivos tal que $a+b+c+d = 4$. Prove a desigualdade*

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2.$$

Solução:
Temos

$$\frac{1}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}.$$

Da mesma forma temos

$$\frac{1}{b^2+1} \geq 1 - \frac{b}{2}, \quad \frac{1}{c^2+1} \geq 1 - \frac{c}{2} \quad e \quad \frac{1}{d^2+1} \geq \frac{d}{2}.$$

Depois de adicionar essas desigualdades obtemos:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\geq 4-\frac{a+b+c+d}{2}=4-2=2,$$

ou seja,

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\geq 2.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c=1$.

Exemplo 3.3.6. *Sejam a,b e c três números reais positivos distintos. Prove a desigualdade*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2.$$

Solução:
Mostraremos que $\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq\frac{2a}{a+b+c}$, para todo $a,b,c\in\mathbb{R}^+$
Temos:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq\frac{2a}{a+b+c}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}\geq\left(\frac{2a}{a+b+c}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq 4a(b+c)\Leftrightarrow(b+c-a)^2\geq 0,$$

ocorrendo igualdade se, e somente se, $a=b+c$.
Semelhantemente

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}}\geq\frac{2b}{a+b+c}\quad e\quad\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2c}{a+b+c}.$$

Logo,

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

Ocorre a igualdade se, e somente se, $a=b+c, b=a+c, c=a+b$, isto é, $a=b=c$, o que é impossível. Então temos uma desigualdade estrita, isto é,

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2.$$

Como já mencionamos anteriormente, o assunto não tem fim. A variabilidade de ideias é infinita. O nosso propósito aqui foi apenas introdutório com o objetivo principal de introduzir o leitor iniciante no assunto. Esperamos que tenhamos conseguido plantar no leitor o interesse pelo assunto. E se tivermos conseguido atingir esse objetivo convidamos o leitor a prosseguir essa agradável viagem na vasta lista de referências existente em diversas línguas. Há uma lista dessas principais referências na nossa bibliografia que se encontra no final do nosso trabalho.

Considerações Finais

No decorrer desse trabalho apresentamos resultados importantes sobre desigualdades elementares e a sua importância em algumas aplicações. A primeira coisa que fizemos foi apresentar as definições de médias e em seguida provamos as desigualdades entre às médias: aritmética, geométrica, harmônica, quadrática e potência; trazendo uma bela demonstração de George Pólya da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Outras desigualdades como: Cauchy-Schwarz, Bernoulli, lema poderoso, Jensen e muitas outras. Na geometria e trigonometria mostramos a desigualdade de Euler e Leibniz. Além disso, apresentamos diversos problemas que foram resolvidos usando apenas a com as ferramentas desenvolvidas ao longo do texto. Por fim mostramos alguns problemas envolvendo desigualdades cujo principal ingrediente para a solução é criatividade.
Esse trabalho foi fruto da pesquisa de vários livros e artigos científicos dedicados a esse tema, para que, dessa forma, possamos contribuir para os diversos níveis de ensino, agregando-se à pouca bibliografia em Língua Portuguesa existente na área do nosso país.

Referências Bibliográficas

[1] ANDREESCU, T., ANDRICA, D., **360 Problems for Mathematical Contests**, GIL Publishing House, Zalău, 2003.

[2] ANDREESCU T., CIRTOJAN,E V., Dospinescu G., Lascu M., **Old and New Inequalities**, GIL Publishing House, 2004.

[3] ANDREESCU, Titu; GELCA, Razvan. - **Mathematical Olympiad Challenges.** New York, Birkh¨auser, 2000.

[4] CAN, V.Q.B,Pohoat$\breve{a}$, C., **Old and New inequalities, Volume 2,** GIL Publishing House, 2008.

[5] CVETKOVSKI, Zdravko; **Inequalities - Theorems, Techniques and Selected Problems.** editora Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ano 2012.

[6] BARTLE, Robert G.; **Introduction to Real Analysis.** editora Willey, ano 2011.

[7] DOLCE, Osvaldo, POMPEO, J. Nocolau **Fundamentos de Matemática Elementar - vol 09**, Atual Editora, 1992.

[8] ENGEL, Arthur. **Problem-Solving Strategies** New York, Springer, 1998.

[9] GOMES, C. A. GOMES, J. M. **Tópicos de Matemática Elementar: Produtos Notáveis, Fatorações e Desigualdades, v.01.** Fortaleza: VestSeller, 2010.

[10] GOMES, C. A. GOMES, J. M. **Tópicos de Matemática Elementar: Indução e Teoria Elementar dos Números, v.02.** Fortaleza: VestSeller, 2012.

[11] GOMES, C. A. **Tópicos de Matemática Elementar : Geometria Plana, , v.03.** Fortaleza: VestSeller, 2015.

[12] DINIZ, I.C., CRUZ, J.R.**Probabilidade : exercícios comentados Vol I.** Livraria da Física USP, 2017.

[13] LIMA, E.L., CARVALHO, P.C.P.,WAGNER, E., MORGADO, A. C., **A Matemática do Ensino Médio-Volume 2**, SBM, 1998.

[14] MANFRINO, R.B.,ORTEGA, J.A.G., DELGADO, R.V. **Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach**

[15] MORGADO, A.C., CARVALHO, P.C.P. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[16] OLIVEIRA, M.R., **Técnicas em Olimpíadas de Matemática-Álgebra**

[17] KROVKIN, P.P., **Lecionnes populares de Matemáticas - Desigualdades. Editorial Mir - Moscú.**

[18] ROUSSEAU, C.,Lozansky,**E.Winning Solutions. Springer-velag,**1996.

[19] RPM: Revista do Professor de Matemática, n. 05, 15, 17, 18, 20, 27, 28, 29, 31. Rio de Janeiro, SBM.

[20] SHKLARSKY, D.O., CHENTZOV, N.N., YAGLOM, I.M.: **The USSR Olympiad Problem Book.** Dover,New York (1994)