UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Alisson Rogério Relly

UM ROTEIRO PARA CRIAÇÃO DE CONTEÚDO DIGITAL BASEADO NA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Santa Maria RS
2019

Alisson Rogério Relly

UM ROTEIRO PARA CRIAÇÃO DE CONTEÚDO DIGITAL BASEADO NA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM – RS) como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Martinuzzi Buriol

Santa Maria, RS
2019

Alisson Rogério Relly

UM ROTEIRO PARA CRIAÇÃO DE CONTEÚDO DIGITAL BASEADO NA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM – RS) como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 20 março de 2019:

Tiago Buriol

Tiago Martinuzzi Buriol Dr. (UFSM)
Presidente/Orientador

Carmen Vieira Mathias Dra. (UFSM)

Cydara Cavedon Ripoll

Cydara Cavedon Ripoll Dra. (UFRGS)

Santa Maria RS
2019

AGRADECIMENTOS

Ao término deste trabalho, agradeço:

- primeiramente a Deus, por ter me abençoado e direcionado em todo o decorrer deste curso, por ter me dado força e ânimo para vencer cada etapa;

- ao meu orientador, Prof. Dr. Tiago Martinuzzi Buriol, pelo apoio e orientação durante a realização deste trabalho;

- ao Instituto Federal Farroupilha pelo seu apoio em meu aperfeiçoamento profissional através da concessão de afastamento para capacitação e demais auxílios recebidos. Este apoio possibilitou a dedicação necessária aos estudos no momento em que mais precisei;

- a minha noiva Odete pelo seu apoio, cuidado e carinho em todos os momentos que precisei;

- a meus pais Valdir Relly e Noimi Marlene Streb por sempre acreditarem em mim e me apoiarem, espero que estejam orgulhosos de mim;

- a todos os professores do PROFMAT pela sua dedicação ao ensino.

- ao colega Arlindo pela sua amizade, companhia nos vários quilômetros de viagem e colaboração na realização de trabalhos. Também aos colegas Alan, Juliano e Gilmar pelos momentos de estudo e a todos os demais colegas da turma PROFMAT 2016 pelo companheirismo e apoio.

- aos amigos e demais familiares pelo apoio prestado e pela compreensão de minha ausência em tantos momentos.

- e finalmente a todos que, mesmo não citados aqui, contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste sonho.

RESUMO

UM ROTEIRO PARA CRIAÇÃO DE CONTEÚDO DIGITAL BASEADO NA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

AUTOR: Alisson Rogério Relly
ORIENTADOR: Prof. Dr. Tiago Martinuzzi Buriol

O processo de ensino e aprendizagem de matemática é cercado de diversas dificuldades que, se não superadas, acabam por acumular lacunas no conhecimento. Essas lacunas por sua vez amplificam as dificuldades e acabam por prejudicar o aprendizado de novos conceitos. O uso de tecnologia no ensino é uma forma de combater estas dificuldades, mas para isto são recomendáveis softwares e aplicativos dotados de conteúdo específicos e de qualidades que explorem os recursos tecnológicos disponíveis, em especial os recursos presentes em equipamentos móveis como os smartphones, que têm se tornado cada vez mais populares. Embora existam diversos softwares para o ensino de matemática, a tecnologia está em constante evolução e é necessário que os recursos tecnológicos voltados a educação também evoluam gerando a necessidade de criação de novos softwares. Para a produção destes softwares e aplicativos existem diversos recursos e roteiros oriundos da engenharia de softwares, ou mesmo recursos intuitivos que não necessitam o conhecimento de linguagem de programação, já para produção de conteúdo não foram identificados roteiros e metodologias que possam guiar esta etapa. Assim, este trabalho, além de apresentar uma breve pesquisa a respeito do uso da tecnologia na educação, propõe um roteiro para criação de conteúdos para softwares e aplicativos baseados em perguntas e respostas. Para viabilizar a elaboração do roteiro, foi tomado como referência, as características do aplicativo SUAV, em desenvolvimento na UFSM. No entanto, o roteiro pode ser aplicado ao desenvolvimento de qualquer aplicativo ou software que possua características semelhantes. Por se tratar de um aplicativo de perguntas e respostas, foi utilizada a metodologia de resolução de problemas para embasar o roteiro. Ao final do trabalho, são apresentados alguns exemplos de conteúdo voltados para o Ensino Médio, criados a partir do roteiro elaborado.

Palavras-chave: resolução de problemas; tecnologia na educação; sistemas de equações lineares; funções quadráticas; volume do cilindro

ABSTRACT

A ROADMAP FOR CREATING DIGITAL CONTENT BASED ON PROBLEM SOLVING METHODOLOGY.

AUTOR: Alisson Rogério Relly
ORIENTADOR: Prof. Dr. Tiago Martinuzzi Buriol

The process of teaching and learning mathematics is surrounded by several difficulties that, if not overcome, end up accumulating knowledge gaps. These gaps in turn amplify the difficulties and end up harming the learning of new knowledge. The use of technology in teaching is a way to combat these difficulties, but for this are recommended software and applications with specific content and qualities that exploit the technological resources available, especially the resources present in mobile equipment such as smartphones, which has become increasingly popular. Although there are several software for teaching mathematics, technology is constantly evolving and it is necessary that technological resources for education also evolve generating the need to create new software. For the production of these softwares and applications there are several resources and scripts from software engineering, or even intuitive resources that do not require programming language knowledge, but for the production of content, no scripts and methodologies have been identified that can guide this step. Thus, this work, besides presenting a brief research on the use of technology in education, propose a roadmap for creating content for software and applications based on questions and answers. To make feasible the elaboration of the script, the characteristics of the SUAV application, under development at UFSM, were taken as reference. However, the roadmap can be applied to the development of any application or software that has similar characteristics. Because it is a question and answer application, the problem-solving methodology was used to base the script. At the end of the paper, some examples of content related to high school, created from the elaborated script, are presented.

Keywords: problem solving; technology in education; systems of linear equations; quadratic functions; cylinder volume

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Grande parte dos estudantes brasileiros apresentam dificuldades em relação ao estudo da matemática. De fato, pesquisas oficiais demonstram que o sistema de ensino brasileiro é deficiente. De acordo com os relatórios publicados pelo Todos pela Educação (TPE)[1], com base nos resultados da Saeb, percebe-se que no período de 1995 à 2015, o percentual de alunos do quinto ano que possuem o conhecimento matemático esperado para o período escolar aumentou de 19% (1995) para 42,9% (2015), valor que se aproxima da meta estabelecida de 49,5%. Já o percentual referente a alunos do nono ano do ensino fundamental se manteve praticamente estável neste período variando de 16,8% (1995) a 18,2% (2015), sendo que a meta estabelecida para 2015 era de 45,4%. O percentual referente aos alunos do terceiro ano do ensino médio é o que teve pior resultado, apenas 7,3% possuem conhecimento esperado para o período escolar em 2015, sendo este valor muito inferior à meta de 40,6% estipulada para o período.

Paralelamente, podem ser observados altos índices de reprovações e desistências nos primeiros anos dos cursos de engenharias e ciências exatas, em especial em matérias como cálculo as quais necessitam domínio dos conteúdos matemáticos do ensino médio. Malon (2013) apresenta uma pesquisa demonstrando estes números.

Analisando esses fatos percebe-se que no decorrer dos períodos escolares vão se formando lacunas na aprendizagem dos alunos e, com isso, as dificuldades vão aumentando. Vale salientar aqui, que o processo de aprendizagem matemática ocorre invariavelmente de forma gradativa e incremental, de modo que cada conceito, resultado ou método, será necessário para avançar para o passo seguinte. Assim, falhas ou lacunas geram um efeito cascata impedindo a assimilação de outros conteúdos e, dessa forma, geram múltiplas novas lacunas.

Em uma constante busca por novas abordagens e a fim de combater estas dificuldades a comunidade acadêmica vem pesquisando metodologias e materiais de apoio, dentre os quais queremos destacar o uso de tecnologias digitais e dispositivos eletrônicos, em especial aparelhos móveis como smartphones e tablets. Com a evolução da tecnologia, estes dispositivos adquiriram uma grande capacidade de processamento computacional aliados a um custo moderado, o que tornou tais aparelhos populares nos últimos anos. Estes equipamentos contam com recursos como acesso a redes móveis, GPS, e são munidos de diversos sensores capazes

[1] Fundado em 2006, o Todos Pela Educação é um movimento da sociedade brasileira, cuja a missão é contribuir para que, até 2030, o País assegure Educação Básica Pública de qualidade a todas as crianças e jovens. Fonte: <https://www.todospelaeducacao.org.br/quem-somos/o-todos/>.

de descrever características e contexto de seus usuários possibilitando os mais diversos usos em todo lugar, a qualquer tempo e de maneira personalizada.

Apesar das mudanças e efeitos que o fácil acesso aos dispositivos móveis podem causar nos modelos e processos de ensino e aprendizagem e, principalmente nos resultados, ainda assim, "A despeito de 15 anos de pesquisa, a aprendizagem móvel ainda não conseguiu causar um impacto significativo e de longa duração na educação [...]" (UNESCO, 2014, p. 13). Seu uso na educação ainda é um tanto tímido, sendo restrito muitas vezes a apenas um complemento de uma aula tradicional, sem explorar todo o potencial interativo que esses equipamentos possuem, o qual permite ir muito além da sala de aula e alcançar pontos que o professor possui dificuldade de atingir no atendimento coletivo da turma, tais como, as lacunas no aprendizado que antes mencionamos.

Para que essa tecnologia alcance todo seu potencial no ensino da matemática, é preciso ir além do fácil acesso aos dispositivos e à internet. Também se faz necessário a criação e a ampla distribuição de aplicativos e softwares inteligentes e munidos de conteúdo específico e de alta qualidade projetados e produzidos por professores e especialistas, de forma a estarem adequadamente integrados ao sistema de software, atendendo aos requisitos de iteração do usuário com o sistema. No entanto, a produção de conteúdo acaba sendo uma dificuldade para muitos professores e especialistas em educação, dado o pouco domínio de ferramentas de edição e conhecimento a respeito de programação e desenvolvimento de softwares.

Durante as pesquisas sobre o tema foram encontrados alguns trabalhos que tratam da produção de aplicativos para o ensino da matemática, como por exemplo Oliveira (2016), Barbosa (2016). Observou-se que em muitos deles, os autores utilizaram abordagens de engenharia de software ou ferramentas de desenvolvimento mais intuitivas como MIT App Inventor[2], que não requer conhecimento de linguagem de programação. Porém, estes recursos auxiliam apenas para a elaboração do aplicativo em si, para o desenvolvimento do conteúdo matemático, esquemas de interação e apresentação do conteúdo, não foram encontradas metodologias que pudessem direcionar esta etapa.

Se houvesse um trabalho disponível envolvendo uma pesquisa aprofundada que servisse como base para orientar professores na criação de conteúdos digitais interativos com qualidade e características que permitam explorar o potencial das tecnologias existentes, teríamos um ganho significativo na produção de softwares e no ensino da matemática. Através destes estudos seria possível que diversos pesquisadores desenvolvessem conteúdos de maneira padronizada

[2] O MIT App Inventor é um ambiente de programação visual e intuitivo que permite criar aplicativos totalmente funcionais para smartphones e tablets. Disponível em http://appinventor.mit.edu

capazes de serem compilados em um único banco de dados e utilizados em um determinado aplicativo, o que, somado à capacidade de interpretação de contexto e à utilização de técnicas de inteligência artificial, pode dar a um aplicativo a capacidade de simular a orientação de um professor criando um ambiente de aprendizagem personalizado que poderia identificar e sanar lacunas no aprendizado dos alunos. Este tipo de característica é a tendência para a aprendizagem no futuro, para a Unesco (2014, p. 23),

> Em vez de investir na mesma série de livros didáticos ou solução de software para sala de aula, escola, município ou país, os educadores podem, por exemplo, escolher entre vários aplicativos customizados para atender às necessidades de cada aluno, empoderando assim a aprendizagem personalizada, que deverá caracterizar a educação formal no futuro.

Assim, este trabalho propõem a elaboração de um roteiro para criação e organização de conteúdos matemáticos para softwares e aplicativos de ensino e aprendizagem, baseados em problemas matemáticos. A opção por este tipo de software se dá pela necessidade de delimitar as características da aplicação que receberão os conteúdos, dentre as quais a possibilidade de interpretação de contexto do usuário por meio de análise do desempenho. Outro fator que contribui para a escolha deste tipo de software é o fato de existir uma pesquisa no departamento de matemática da UFSM (Universidade Federal de Santa Maria) cujo objetivo é o desenvolvimento de um aplicativo com essas características.

Afim de contextualizar o uso da tecnologia na educação, será apresentada nos primeiros capítulos uma pesquisa sobre os recursos tecnológicos, suas tendências para o ensino e seu uso atual. Também apresentaremos de forma sucinta alguns pontos sobre a criação de softwares que serão úteis na elaboração de nosso roteiro. Como os conteúdos são destinados à softwares de perguntas e respostas, será feita uma breve revisão sobre metodologia de resolução de problemas, em especial sobre a heurística de Polya (1995) que nos auxiliaram a elaborar elementos que contribuem para conduzir o usuário na resolução de problemas.

Por fim espera-se, ao final deste trabalho, fornecer um roteiro para a produção de conteúdos matemáticos, destinados a softwares e aplicativos que trabalhem por meio de perguntas e respostas e que possa ser utilizado no aplicativo SUAV (Sistema Ubíquo de Aprendizagem Vertical) em desenvolvimento como parte de um projeto na UFSM apresentado em Lorenci (2018). Este roteiro também poderá ser utilizado para auxiliar no desenvolvimento de conteúdo para qualquer outro aplicativo que guarde semelhanças com esse. Além disso pretende-se produzir alguns exemplos de conteúdos matemáticos, voltados para o Ensino Médio, como exemplo de aplicação do roteiro proposto.

2 ALGUNS ASPECTOS SOBRE TECNOLOGIA E SEU USO NA EDUCAÇÃO

A evolução da tecnologia vem mudando a forma como as pessoas vivem. Cada vez mais dispositivos eletrônicos como computadores, tablets e smartphones fazem parte de nosso dia a dia auxiliando em diversas atividades. Também, “À medida que os dispositivos se tornam mais potentes, funcionais e baratos, aumenta [...] o seu potencial de apoiar o aprendizado de modos inusitados.” (UNESCO, 2014, p. 17).

Assim, este capítulo aborda alguns aspectos sobre tecnologia com o objetivo de fornecer um contexto a sobre de seus avanços e usos na educação. Para isso, será feita uma discussão a respeito da popularização do acesso aos recursos tecnológicos, em especial àqueles disponíveis por meio de smartphones. Também serão discutidas algumas consequências desta popularização e serão identificados quais recursos tecnológicos constituem tendências para a educação. Por último, será verificado como tem-se dado, atualmente, o uso da tecnologia nos processos de ensino e aprendizagem.

2.1 A INVASÃO DOS SMARTPHONES

Dispositivos eletrônicos vêm ganhando maior capacidade de processamento computacional e armazenamento de dados, gerando inúmeras aplicações a cada instante. Nesse cenário destacam-se as tecnologias voltadas à informação e comunicação, em especial os smartphones. O computador foi uma das ferramentas que revolucionou o modo como vivemos, mas, embora tenha tido um papel importante na popularização e acesso à tecnologia, já não é mais o preferido dos brasileiros. Segundo Gomes (2016), o “número de casas brasileiras com computadores caiu de 32,5 milhões para 31,4 milhões (48,5% do total para 46,2%) entre 2014 e 2015”; queda esta que pode ter ocorrido devido ao acesso a outros dispositivos.

Características como mobilidade tem se mostrado importante nos dias atuais, fazendo com que aparelhos eletrônicos portáteis se tornem cada vez mais populares. Segundo Lima, M. (2018), tinha-se expectativa de que até maio de 2018 o Brasil alcançasse a marca de 306 milhões de aparelhos portáteis em uso (entre notebooks celulares e tablets). Ainda, conforme o jornal, ao final de 2017 o Brasil possuía 220 milhões de aparelhos smartphones em uso, enquanto sua população, na mesma data, era de 210 milhões de habitantes, superando assim a marca de um aparelho por habitante. De acordo com Campos (2016) em 2015, 78,3% da população brasileira com dez anos ou mais possuía telefone celular de uso pessoal.

Sobre o acesso à internet, Gomes (2018) afirma que, ao final de 2016 mais de 63% da população brasileira tinha acesso à internet, este percentual cresce para 85% se considerarmos a faixa etária de 18 a 24 anos. Ainda, de acordo com o autor, do total de internautas brasileiros, 94,6% utilizam o celular para navegar na internet, computadores são utilizados por 63,7% dos internautas, 16,4% utilizam tablets e 11,3% televisores.

A partir destes dados pode-se perceber que o smartphone tornou-se muito popular entre os brasileiros, sendo o principal e, em alguns casos, o único meio de acesso à internet. A capacidade de processamento destes equipamentos também colabora para a preferência do público, uma vez que atividades que antes eram realizadas exclusivamente em computadores, agora podem ser executadas nestes dispositivos contando ainda com a praticidade de poder fazê-las em lugares não convencionais.

Esse cenário tem feito surgirem cada vez mais aplicativos para as mais diversas utilidades: operações bancárias, transporte, mapas, compras e vendas, entretenimento, etc. Com esse grande número de aplicações seu uso tem se tornado mais intenso nos últimos anos. Segundo Agrela (2017), em 2016 o brasileiro utilizou o smartphone, em média, quatro horas e quarenta e oito minutos por dia. Esta é a média mais alta do mundo, seguido por China e Estados Unidos com médias de três horas e três minutos e duas horas e trinta e sete minutos respectivamente.

A maior parte deste tempo gasto pelos brasileiros é em lazer e entretenimento. Segundo Dub Soluções (2017) o brasileiro utiliza, com maior frequência, aplicativos da categoria social, alcançando 20,4% do tempo de uso dos dispositivos, em jogos esse número é de 11,9%, em aplicativos para leitura de notícias e livros é de apenas 6%. De fato, o uso de dispositivos móveis para fins educacionais, em especial dentro da sala de aula, ainda é cercado por um certo preconceito, segundo a Unesco (2014, p. 14):

> Apesar do considerável, e em muitos casos bem estabelecido, potencial de aumentar a aprendizagem, os dispositivos móveis costumam ser banidos de escolas e outras instituições de ensino. Proibições como essa projetam a ideia de que os dispositivos móveis são antitéticos à aprendizagem, o que, apesar de ser fatualmente válida, afeta a maneira como as pessoas interagem com a tecnologia.

Sobre livros, as estatísticas apontam que a versão impressa ainda é preferência entre os leitores (LEONARDI, 2016), porém, os meios digitais começam a dividir este espaço. Marmor (2016) afirma que:

> A mudança que está acontecendo é o fato que o livro físico deixou de ser o "centro", o *embaixador* único da literatura, agora ele divide espaço com outros canais como o vídeo, o áudio ou os livros digitais. Esta mudança é fruto dos novos meios de comunicação que surgiram nos últimos anos e que entraram de modo tão invasivo nas novas vidas. Óbvio que o texto escrito permanece um canal essencial para a aquisição do conhecimento, mas esta leitura está acontecendo muito mais através das telas, em lugares menos convencionais. (MARMOR, 2016, p. 1)

Esses novos meios de comunicação têm um alcance significativamente maior do que os tradicionais, uma vez que através da internet podem ser acessados de qualquer lugar do mundo instantaneamente. Além disso, trazem elementos que os permitem deixar de "ser meras reproduções digitais do conteúdo impresso para se tornar interfaces de grande interesse visual, que podem incluir elementos multimídia, interativos e de colaboração" (Unesco, 2014, p.22)

Um fato importante sobre a produção de conteúdos digitais, sejam livros, notícias ou mesmo aplicativos, é que, estes meios têm certa facilidade de publicação, permitindo que o próprio autor publique seus conteúdos sem o auxílio de uma editora. Isto gera uma preocupação quanto à qualidade e correção do conteúdo, até porque, mesmo em livros de matemática do PNLD (Programa Nacional do Livro do Didático), que passam por avaliação, é possível encontrar erros matemáticos, ainda que em menor escala. Sobre o assunto Marmor afirma que:

> Se o editor não tomar em mãos a sua missão, que é aquela de selecionar bons conteúdos, outros irão fazer e teremos resultados nem sempre bons: conteúdos de baixa qualidade ou banalizados em formas nem sempre aptas a trazer conhecimento. Um perigo que vejo nisto é o fato que estamos criando uma cultura apenas de diversão e não de conhecimento. (MARMOR, 2016, p. 1)

Esta preocupação não se aplica apenas a livros, podendo-se estender a produção de aplicativos e conteúdos digitais de maneira geral. Segundo Passos e Camará (2016 p. 5) "o desenvolvimento tecnológico vivido hoje, deixa indivíduos carentes de modelos a serem seguidos". Embora já tenham se tornado populares, ainda há dificuldades em usar a grande quantidade de recursos tecnológicos disponíveis a favor da educação. Para tanto, torna-se importante a criação de modelos e diretrizes que auxiliem na produção de conteúdo e que venham a ser relevantes ao processo de ensino e aprendizagem, em especial para plataformas populares como o smartphone.

2.2 TENDÊNCIAS TECNOLÓGICAS PARA O ENSINO

A fim de realizarmos o estudo acerca da elaboração de conteúdos didáticos para meios digitais, é necessário mapearmos quais recursos e tendências tecnológicas seriam as mais relevantes ao processo de ensino e aprendizagem.

Uma das principais tendências do uso de tecnologias na educação gira em torno do conceito de *m-learning* (*mobile learning*), ou aprendizagem móvel, que consiste na aprendizagem com o uso de dispositivos móveis. Para Sonego e Behar (2015, p. 522), o *m-learning* tende a superar os limites do *e-learning* (*eletronic learning*), no qual o processo de ensino e aprendizado fazia uso de dispositivos fixos como computadores de mesa. Para a Unesco (2014, p. 28) dispositivos móveis se tornarão tão comuns na educação quanto os computadores. Ainda, estima-se que nos próximos 15 anos,

> [...] os dispositivos móveis devem compartilhar as características centrais dos seus pares atuais, ou seja: serão digitais; facilmente portáveis; normalmente pertencerão e serão controlados por um indivíduo, não por uma instituição; poderão se conectar à internet e outras redes; terão capacidade multimídia; e poderão facilitar um grande número de tarefas, particularmente aquelas relacionadas com a comunicação. [...] os dispositivos móveis incluem qualquer tecnologia portátil e conectada, como telefones celulares básicos, leitores eletrônicos, smartphones e tablets, além de tecnologias incorporadas como leitores de smartcard. (UNESCO 2014, p. 17)

Outra tendência apontada pela Unesco (2014, p. 26) é a capacidade de “coletar, sintetizar e analisar enormes quantidades de dados”. Esta característica, juntamente com a mobilidade e conectividade já citadas, nos traz um novo conceito, a aprendizagem ubíqua (*u-learning* ou *Ubiquitous Learning*).

Para Parise et al (2014, p. 2), a aprendizagem ubíqua “trata da integração de metodologias de ensino com tecnologias provenientes da computação ubíqua.” A computação ubíqua, também chamada terceira onda da computação, segundo Loureiro et al (2009, p. 100), caracteriza-se pela presença de dispositivos portáteis com recursos de comunicação sem fio e armazenamento de dados, tendo como principal linha de pesquisa a computação ciente de contexto. Ainda para Parise et al,

> Aprendizagem ubíqua pode ser definida como a utilização de dispositivos e tecnologias móveis, sensores e mecanismos de localização, os quais levam em consideração características particulares dos estudantes, objetivando auxiliar no processo educacional. O aprendizado ubíquo surge como alternativa às dificuldades encontradas no *m-learning* (*Mobile Learning*), que apesar de prover acesso móvel ao estudante, não fornece informações sensíveis ao contexto para os usuários. (JÁCOME et al, 2012 apud PRAISE et al, 2014, p. 2)

Para Loureiro (2009 p. 100) informações de contexto são “entradas capazes de refletir as condições atuais do usuário, do ambiente no qual o mesmo se encontra e do próprio dispositivo computacional utilizado”. Na educação esses dados podem ser “perfis de trabalhos de alunos, resultados de avaliações, registros de frequência escolar, coordenadas de GPS, tempo gasto em tarefas ou deveres específicos e informações produzidas ou utilizadas por alunos, incluindo textos, imagens, vídeos ou música.” (UNESCO 2014, p. 26)

A partir da percepção de contexto e somado ao uso de inteligência artificial os dispositivos passarão a conhecer seus usuários de maneira íntima, sendo possível proporcionar uma aprendizagem personalizada aos usuários, permitindo que alunos com diferentes habilidades e dificuldades avancem em seu próprio ritmo (Unesco, 2014). Além do mais, sistemas de aprendizagem ubíqua “permitem [ao aluno] aprender corretamente, no lugar e tempo correto, assim como na direção certa” (NUNES, 2014, p. 27), isto porque a computação ubíqua permite aos educandos “obterem a informação exata que eles estão necessitando ou procurando em um momento adequado” (NUNES, 2014, p. 27).

As características do u-learning, sem dúvida, trazem um grande potencial para a educação, contudo, apenas empregar os recursos tecnológicos não é suficiente para garantir resultados satisfatórios na educação. É necessário que existam conteúdos adequados para estes meios.

2.3 A RESPEITO DO USO ATUAL DA TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO

Embora a tecnologia atual esteja se encaminhando para um modelo mais ubíquo, seu uso na educação, em especial na matemática, ainda não ingressou plenamente neste ambiente. Em sala de aula o smartphone ainda não é bem aceito, muitas vezes é até mesmo proibido e com isso a maioria das intervenções tecnológicas ocorrem por meio do computador. Embora haja o entendimento de que os recursos tecnológicos trazem benefícios ao processo de ensino e aprendizagem, sua utilização costuma ser um desafio aos professores que muitas vezes resumem a utilização destes recursos a aulas tradicionais mescladas com um pequeno suporte tecnológico, ou ainda, seu uso é encarado como uma aula diferenciada. Essa abordagem acaba sendo insuficiente para explorar o potencial disponível nas tecnologias atuais.

Veremos adiante alguns trabalhos que têm sido desenvolvidos com o intuito de melhorar este cenário, enquanto alguns se dedicam a elaborar sequências didáticas utilizando aplicativos ou softwares como recurso didático, outros autores criam seus próprios aplicativos. Há ainda um terceiro cenário, o uso fora das salas de aula, ou autônomo, por parte dos estudantes.

No caso da elaboração de sequências didáticas, um software bastante popular no ensino da matemática é o GeoGebra[3], que consiste em um software dinâmico que reúne conceitos de geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo. Ele é multiplataforma, estando disponível tanto para computadores quanto para dispositivos móveis em diferentes sistemas operacionais.[4]

Sua utilização como recurso pedagógico é amplamente aceito e defendido por diversos pesquisadores. As aplicações didáticas são tantas quanto a criatividade de seus usuários permitirem. A combinação da grande quantidade de conceitos matemáticos, interface de fácil compreensão e ferramentas de criação permitem elaborar diversos materiais de aprendizado interativos.

Apesar de o GeoGebra proporcionar um ambiente dotado de ferramentas e conceitos matemáticos a serem explorados, a interação do usuário com o software se dá por meio da alteração de propriedades iniciais de objetos já construídos. Com isso sua utilização se torna bastante dependente do professor. Em geral, trabalhos que elaboram sequências didáticas utilizando este tipo de softwares, têm apresentado resultados significativos, no entanto são significativamente dependentes do professor, que geralmente não dispõem de um roteiro ou de diretrizes para a elaboração de seus materiais.

Alguns dos autores que utilizam o GeoGebra são Jesus (2018), Lopes (2013), Souza (2018), Lima e Mathias (2017), Bertolussi (2016) e Dantas e Mathias (2017). A maioria deles apresentam uma problemática no ensino de determinado conteúdo, a partir desta dificuldade os autores criam atividades utilizando o software. Outros autores fazem abordagens semelhantes, porém, utilizando outros softwares. Torma (2018) que utiliza o software Graphmatic[5] com o objetivo de aplicar o conceito das funções trigonométricas no cotidiano dos alunos de ensino médio. Neto (2017), com o auxílio do KmPlot[6] propõem uma sequência didática para o estudo dos gráficos das funções afim e quadrática na forma canônica, em especial, destaca o comportamento dos gráficos quando das variações dos coeficientes.

Embora, em sala de aula, o professor é responsável por direcionar o aprendizado do aluno, as tecnologias atuais são inteligentes o suficiente para proporcionar um aprendizado personalizado e mais autônomo, o que pode ocorrer dentro e fora da sala de aula proporcionando resultados ainda melhores dos que os que já se têm obtido. Aplicativos renomados como o

---

[3] Disponível em https://www.geogebra.org
[4] Fonte: https://www.geogebra.org/about
[5] Disponível em http://graphmatica.com
[6] Disponível em https://edu.kde.org/kmplot

GeoGebra já começam a receber novas funcionalidades disponibilizadas pela computação ubíqua, como o armazenamento de trabalhos na nuvem e o compartilhamento[7] de materiais entre usuários.

É claro que não se almeja substituir as atribuições dos professores, mas permitir aos usuários uma forma de estudar com o uso de tecnologias de maneira mais independente e com qualidade. Acreditamos que a chave para alcançar este patamar está em dois pontos: a criação de aplicativos com as capacidades descritas anteriormente (sensibilidade ao contexto/ubiquidade) e a elaboração de conteúdos capazes de proporcionar uma aprendizagem significativa aos usuários.

Quanto ao primeiro ponto, identificamos alguns trabalhos que se propuseram a elaborar aplicativos para o estudo da matemática, onde os autores além de elaborar uma sequência didática para a realização de determinada atividade também criam um aplicativo para ser utilizado como recurso. Nestes casos costuma-se usar plataformas intuitivas de programação como o MIT App Inventor e o RPG Maker[8]. Este tipo de plataforma realiza a programação utilizando-se de recursos visuais, não sendo necessário ao desenvolvedor um conhecimento aprofundado em linguagem de programação.

Um dos trabalhos com essa abordagem que podemos citar é Oliveira (2016) no qual sob o argumento do uso inapropriado do smartphone pelo aluno em sala de aula, propõem a criação e uso de um aplicativo para o estudo de tópicos preliminares de Geometria Analítica, de modo a utilizar esse recurso para fins educacionais.

Em seu trabalho ele apresenta: o referencial teórico no qual defende a importância do uso de tecnologia na educação; alguns tópicos sobre o MIT App Inventor, que foi utilizado para desenvolver o aplicativo; descreve a aplicação das atividades com seus alunos e avalia seus resultados por meio da aplicação de pré-teste, pôs-teste e questionários de motivação. Quanto ao assunto matemático abordado no aplicativo, o autor justifica sua escolha devido ao mesmo estar no planejamento de trabalho da turma no período que se pretendia aplicar as atividades desenvolvidas.

Nesta forma de abordagem, percebemos que o problema de efetuar a programação de aplicativos e softwares educacionais pode ser sanado pelo uso de recursos intuitivos como os apresentados, ou ainda, por meio de recursos da área de engenharia de software, para os que detém esse conhecimento. Resta-nos ainda o problema de elaborar conteúdos voltados para aplicativos digitais.

[7] Alguns materiais didáticos podem ser acessados no site https://www.geogebra.org/
[8] Disponível em https://www.rpgmakerweb.com/br

Ainda dentro do contexto atual do uso das tecnologias, não podemos deixar de falar do uso individual pelos estudantes. Como exemplo temos o Photomath[9], que está disponível nas plataformas IOS e Android. Consiste em uma calculadora inteligente, capaz de resolver expressões algébricas, equações, sistemas de equações e cálculo diferencial e integral. Utilizando a câmera do dispositivo, ele interpreta as operações matemáticas e as resolve mostrando o passo-a-passo da resolução, além disto, apresenta o gráfico de funções elementares.

Segundo Pires e Eschers (2016), a opinião dos professores sobre este tipo de aplicativo diverge, enquanto alguns acreditam na sua grande utilidade para efetuar verificações dos procedimentos matemáticos, outros acreditam que o aplicativo pode ser utilizado como um tipo de cola.

Este aplicativo não proporciona diretamente o exercício do pensamento matemático, por ser extremamente procedimental. No entanto, os recursos disponíveis nele, tais como a capacidade de interpretar escritas através da câmera do celular, além de chamar a atenção permite ao usuário atingir seu objetivo com agilidade e facilidade, fatores que com certeza contribuem para o grande número de usuários. Além do Photomath temos também os aplicativos Wolfram|Alpha App[10] e MalMath[11] que se assemelham a este.

[9] Disponível em https://photomath.net/pt/
[10] Disponível em https://www.wolframalpha.com/
[11] Disponível em https://www.malmath.com/

3 SOBRE DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARES EDUCACIONAIS

A Engenharia de Software é a área de estudo que trata sobre desenvolvimento de softwares. Nela é possível encontrar procedimentos, diretrizes e orientações para tal. No entanto, a elaboração de softwares educacionais é considerada um segmento específico pelo fato de que seu objetivo é o processo de ensino e aprendizado, não sendo suficiente apenas os conceitos habituais da Engenharia de Software. Benitti, Seara e Schlindwein (2005), defendem que o processo de desenvolvimento de software deve compreender tanto aspectos técnicos como pedagógicos. Da mesma maneira Santos entende que:

> Em se tratando de softwares educativos, este processo de desenvolvimento tem que abraçar tanto o funcionamento do sistema propriamente dito quanto os mecanismos pedagógicos e didáticos que constituem a base de todo instrumento de ensino e de aprendizagem. (SANTOS, 2009 p.18)

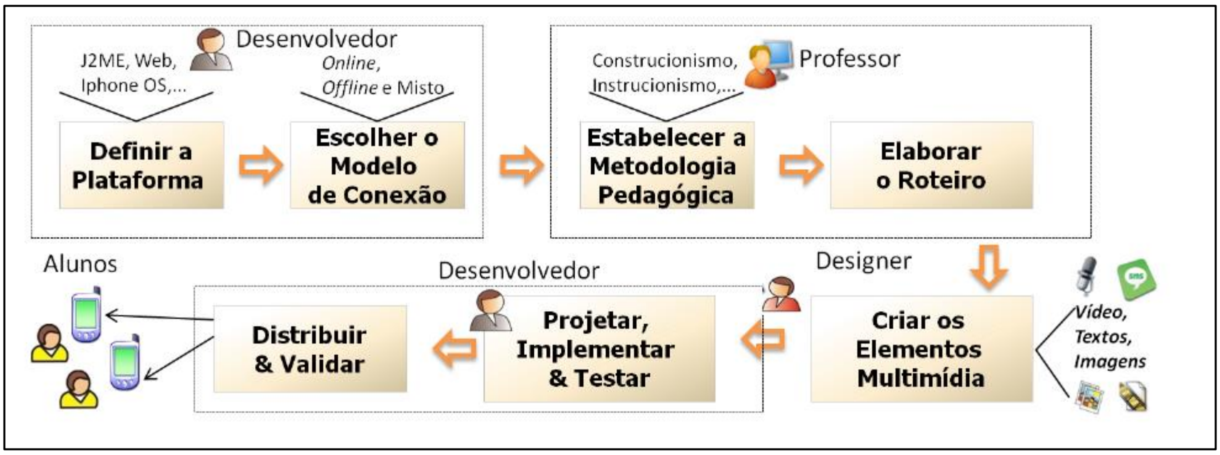
Para Benitti, Seara e Schlindwein (2005, p.2), muitos dos softwares existentes “possuem problemas que dificultam a sua utilização, dentre eles a falta de uma base pedagógica que fundamente sua construção.”. Ainda, os mesmos autores, reconhecem a necessidade de uma equipe multidisciplinar para a produção de um software educacional.

Marçal (2010) também estuda o processo de criação de softwares educacionais e propõe bases para a criação de um guia prático de desenvolvimento de aplicações de m-learning destinadas ao ensino da matemática. Para isso faz a elicitação de requisitos básicos necessários ao software. Os requisitos levantados pelo autor são agrupados em econômicos, socioculturais, pedagógicos, relacionados a matemática e técnicos.

Segundo o autor durante o processo de desenvolvimento são tomadas decisões que limitam os requisitos a serem observados. Para guiar a tomada de decisões o autor desenvolveu um conjunto de etapas que descreve o fluxo do processo de desenvolvimento (Figura 1). Esse conjunto de etapas é muito útil para nos situarmos dentro desse processo. Em nossa proposta pretendemos elaborar um roteiro, não para a produção do software, mas para criação de conteúdo, de tal forma que este trabalho sistematizará as atribuições do professor.

Segundo Marçal (2010, p. 5) para que o professor estabeleça as metodologias e elabore os roteiros de aula ele necessita ser informado das características de usabilidade, tipo de tecnologia e recursos multimídias. Assim para que possamos elaborar nossa proposta deveremos no mínimo idealizar um software, ou aplicativo, determinando suas características e funcionalidades. A tentativa de dar sequência a esse trabalho sem determinar estas características levaria a um roteiro mais genérico sem a praticidade desejada.

Figura 1 – Fluxograma de desenvolvimento de software educacional



Fonte: (MARÇAL, 2010, p. 4)

Dentre diversos tipos de aplicativos e softwares matemáticos optou-se por aplicativos baseados em questões matemáticas de múltipla escolha. Este tipo de aplicação pode conter conteúdos de diversos níveis e acompanhar o desempenho do aluno, ou seja, analisando seu contexto, pode proporcionar uma aprendizagem mais personalizada identificando dificuldades e direcionando conteúdos.

Lorenci, Mathias e Buriol (2017) apresentam o relato de sua pesquisa realizada na UFSM na qual desenvolve o SUAV que é um aplicativo para dispositivos móveis baseado em questões matemáticas. Segundo os autores:

> A ideia central é que a partir de questões propostas, o aplicativo identifique as dificuldades do aluno, fornecendo dicas e materiais instrutivos relativos à essas deficiências; além disso, com uma análise nas respostas fornecidas pelo usuário juntamente com a frequência do uso de dicas, o sistema é capaz de reconhecer quais temas já estão dominados e também aqueles que ainda possuem lacunas, permitindo a criação de um mecanismo de identificação de pontos falhos e entrega de materiais específicos de forma clara, objetiva e orientada a cada usuário. (LORENCI, MATHIAS e BURIOL, 2017, p.1)

Os materiais que compõem o aplicativo são questões de matemática, dicas para a resolução das questões e materiais instrutivos a respeito dos conteúdos envolvidos nas questões. Este aplicativo está alinhado com as tendências descritas nos capítulos anteriores, uma vez que a partir da percepção do contexto do aluno pretende avaliar seus conhecimentos e proporcionar conteúdos de maneira mais personalizada. Também, por ser um projeto desenvolvido na UFSM, existe a possibilidade de haver contribuições entre estes trabalhos, assim, tomaremos como base para a elaboração de nosso roteiro as caraterísticas do aplicativo SUAV.

As principais características que consideraremos para a elaboração de nosso roteiro são que o aplicativo é baseado em problemas matemáticos, que fornece dicas de resolução aos usuários e que disponibiliza materiais de apoio capazes de esclarecer dúvidas a respeito de determinado conteúdo.

Através deste capítulo pode se perceber que, para a elaboração de um software educacional, em especial dos conteúdos presentes neste, é necessário eleger uma metodologia ou mesmo uma abordagem pedagógica para tal. Como o roteiro destina-se a aplicativos e softwares de perguntas e respostas o próximo capítulo trará uma breve revisão sobre resolução de problemas.

4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA BREVE REVISÃO

Uma forma de combater as dificuldades no aprendizado da matemática é trazer atividades que despertem o interesse dos alunos. Muitas vezes a matemática é vista pelos estudantes como uma disciplina desinteressante, e diante disso, almejam concluí-la o mais rápido possível. Sem se preocupar com o efetivo aprendizado dos conteúdos, "decoram" alguns resultados e, logo após vencida a etapa, acabam por esquecê-los, gerando uma deficiência na aprendizagem.

Polya viu na resolução de problemas uma forma de combater esse desinteresse por parte do aprendiz. Segundo ele, por meio da apresentação de problemas curiosos, interessantes e, compatíveis com seus conhecimentos é possível gerar o gosto pelo estudo da matemática e uma vez "Tendo experimentado o prazer no estudo da matemática, ele não esquecerá facilmente (...)" (POLYA, 1995, p. V).

O uso de situações problemas no ensino da matemática tem diversos objetivos, como: Fazer o aluno pensar produtivamente; desenvolver o raciocínio; ensinar a enfrentar situações novas; oportunizar a aplicação de conteúdos matemáticos e tornar o estudo interessante e desafiador (DANTE, 1991). Para que se atinja esses objetivos, é necessário fazer uma escolha adequada de problemas. Pensando nisso Dante (1991) elaborou uma lista de características de um bom problema, as quais discutiremos agora.

A primeira característica desejada é que o problema seja *desafiador para o aluno*. Para que haja engajamento é necessário que o problema desperte a curiosidade de modo que esse se sinta motivado a resolver. O problema precisa também *ser real para o aluno*, ter dados concisos. Precisa também ser *interessante para o aluno*. Este ponto pode ser um pouco complexo, uma vez que, o assunto de interesse de uma pessoa pode diferir de outra, no entanto deve-se estar atento a faixa à etária e possíveis áreas de interesse, pois ocorre uma motivação "interior e natural quando os dados e as perguntas do problema fazem parte do dia a dia do aluno" (DANTE, 1991, p. 46).

Seguindo a lista, outra característica é *ser o elemento desconhecido de um problema realmente desconhecido*. Propor um problema no qual deve se obter um dado que é oculto somente ao problema é desestimulante, pois resolver o problema não traz ganho nenhum. Dante (1991) cita como exemplo problemas que questionam a idade de determinado personagem, sendo esta uma informação não oculta, bastando para isso apenas questionar.

O problema também *não deve consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas*. Afinal, problemas do tipo "calcule" e "resolva", que propõem apenas resolução de expressões matemáticas já fornecidas, não exercitam o pensamento do aluno, apenas treina o uso de uma propriedade memorizada. Os problemas também devem ter o *nível adequado de dificuldade,* “um nível de dificuldade muito além do razoável (...) pode levar aos alunos a frustração e desânimos irreversíveis, traumatizando-os não só em relação a resolução de problemas, mas à Matemática como um todo” (DANTE, 1991, p. 47).

4.1 FORMAS DE ABORDAGEM DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

A resolução de problemas passou a ser aceita como metodologia de ensino no ano de 1980, quando o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publicou, nos Estados Unidos, diretrizes para o ensino de matemática no qual se recomendava o seu uso. Quando tratamos de metodologia de resolução de problemas, existem pelo menos três formas de abordar o assunto, as quais são:

> [...] (1) ensinar sobre resolução de problemas; (2) ensinar matemática para resolver problemas; e (3) ensinar matemática através da resolução de problemas. Ocorre que, a partir das recomendações do NCTM, seguidores de Polya, com algumas variações, acreditavam em teorizar sobre esse tema, ou seja, que era necessário ensinar estratégias e métodos para resolver problemas. Outros a interpretavam no sentido de que o professor deveria apresentar a matemática formal para, depois, oferecer aos alunos o problema como aplicação dessa matemática construída, acreditando que deveriam ensinar matemática para resolver problemas. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p.79)

Na primeira abordagem, ensinar sobre resolução de problemas. Nada mais é do que ensinar ao estudante os procedimentos para se resolver um problema, como por exemplo os procedimentos idealizados por Polya (1995). Nesta concepção, a resolução de problemas é tratada como uma disciplina ou conteúdo (SANTOS, 2018). Os materiais que serão originados a partir do roteiro que propomos não terão por objetivo ensinar sobre a resolução de problemas, no entanto, como a aplicação que idealizamos é baseada em problemas matemáticos e como a resolução desses se dá através dos passos apresentados por Polya (1995), os materiais que forem criados a partir do roteiro irão contribuir para o desenvolvimento da habilidade em resolver problemas por parte dos usuários.

Na segunda abordagem, ensinar matemática para resolver problemas, o foco é desenvolver habilidades de utilizar a matemática para resolver um problema. Geralmente um determinado conteúdo é formalizado e posteriormente propõem-se problemas que podem ser resolvidos com a aplicação deste conteúdo. Veja o que diz Oliveira e Passos.

> O professor inserido nessa perspectiva procura “ensinar para resolver problemas” (SCHROEDER; LESTER, 1989), ou seja, ensina um conteúdo e posteriormente a aplicação da matemática na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros. É uma prática tradicional trabalhar nessa perspectiva, pois os conteúdos são explicados pelo professor e, posteriormente, ocorre a aplicação de exercícios e de problemas que exigem apenas o reconhecimento ou a identificação de conceitos, definições, fatos, propriedades ou habilidade para os alunos efetuarem os cálculos propostos. Na prática tradicional, o professor ensina a resolver problemas e os estudantes praticam, utilizando os conhecimentos adquiridos previamente, aplicando as regras e os algoritmos nos exercícios feitos em sala de aula e treinados em casa, usando as novas habilidades ou ideias requeridas. (OLIVEIRA; PASSOS, 2013, p. 888 apud SANTOS 2018, p. 37)

Santos (2018) aponta que muitos pesquisadores se opõem a esta abordagem de ensino, pelo fato que pode gerar no aluno a dependência da apresentação de conteúdos e exemplos previamente à proposição do problema. No entanto, Santos ainda considera uma forma atrativa de ensinar matemática. No contexto desse trabalho, considerando a aplicação idealizada no capitulo 3, esta abordagem ocorre nas situações em que a questão apresentada fizer uso de um conhecimento que o usuário já possui.

Na terceira abordagem, ensinar matemática através da resolução de problemas, consiste em apresentar um problema, chamado *problema gerador*, sobre um conteúdo ainda não conhecido, e, por meio deste, formalizar o novo conhecimento.

> Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p. 80).

Nesta abordagem, um problema envolvendo um conteúdo ainda não conhecido para os alunos é apresentado de modo a associar conhecimentos prévios ao novo conteúdo culminando na formalização do mesmo. Sob esse foco, Onuchic e Alevato defendem que:

> (...) o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problema e que num outro momento o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tornam sentido num capo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem. (ONUCHIC e ALEVATTO 1999, p. 215)

Esta terceira abordagem, no contexto da aplicação pretendida, ocorre sempre que o aluno se deparar com uma questão que trate de um conteúdo ainda não conhecido. Assim, o problema será o ponto de partida para tal conteúdo, que será formalizado por meio de tópicos.

4.2 A HEURÍSTICA DE GEORGE POLYA

Polya (1995) desenvolve um processo heurístico para a resolução de problemas, o qual ele divide em quatro etapas: compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução do plano; e retrospecto. Para a execução destas fases, o autor idealiza alguns diálogos entre o professor e o aluno que visam proporcionar a este meios para descobrir a solução do problema. Neste trabalho, estas quatro fases serão muito úteis, uma vez que serão trabalhados problemas matemáticos e dicas para a resolução destes. Assim, o processo descrito por Polya (1995) servirá como base para organizar e produzir os elementos que auxiliarão o usuário no desenvolvimento das questões.

A heurística tem por objetivo o estudo dos métodos e das regras de descoberta da invenção. Por meio da heurística, Polya (1995) procura compreender o processo de solucionar problemas, particularmente compreender as operações mentais envolvidas neste processo.

A resolução de um problema é dividida em quatro fases, nas quais Polya atribui ao professor o papel de interventor sob o qual deve realizar perguntas e indicações ao aluno que resolve o problema com o objetivo de proporcionar operações mentais típicas e úteis na resolução. Ainda segundo Polya (1995) uma vez que se tenha assimilado a lista de indagações, ela pode ser utilizada por qualquer um que tenha interesse em resolver um problema.

Algo importante sobre as indagações e sugestões é que elas devem auxiliar a resolver o problema, mas não o resolvê-lo por completo, deixando uma boa parcela de trabalho ao aluno ou ao menos a ilusão de um trabalho independente (POLYA, 1995).

A primeira fase descrita por Polya é a compreensão do problema, pois para ele “é uma tolice responder uma pergunta que não tenha sido compreendida” (POLYA, 1995, p. 4). Para essa fase o autor recomenda as seguintes questões:

> Qual a Incógnita? Quais são os dados? Qual a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou não é suficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las? (POLYA,1995, p.XVII)

Nota-se que esta etapa concentra esforços em identificar as partes principais do problema: a incógnita, os dados e a condicionante. Para fazer isto é útil traçar figuras e adotar uma notação adequada que venha auxiliar a compreensão do problema. A condicionante requer uma atenção especial, pois costuma relacionar os dados existentes e as incógnitas de maneira a possibilitar a resolução. Considerando que o problema esteja bem montado, se concluirmos que as condicionantes são insuficientes ou contraditórias, possivelmente ainda não compreendemos bem o problema, ou necessitamos de algum conhecimento que ainda não dispomos.

Compreendido o problema, iniciamos a fase seguinte, a elaboração de um plano. Esta fase tem por objetivo encontrar a conexão entre os dados e a incógnita e, encontrar problemas correlatos ou propriedades matemáticas úteis que possibilitem resolver o problema. Para Polya "temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou desenhos que precisamos encontrar para obter a incógnita. [...] realmente o principal feito na resolução de um problema é a concepção de um plano" (POLYA, 1995, p.5).

Para Dante (1991) "[...] elaboramos um plano para resolvermos um problema, fazendo a conexão entre os dados do problema e o que ele pede" (p. 24). O resultado desta conexão costuma ser sentenças matemáticas, equações ou simplesmente uma linguagem matemática criada a partir da linguagem usual (DANTE, 1991).

Algumas das perguntas sugeridas por Polya são:

> Já o viu antes? Ou já viu o problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?
> Conhece um problema correlato? Conhece um problema que pode ser útil?
> Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.
> Eis um problema correlato e já resolvido antes. E possível utilizá-lo? É possível utilizar seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível sua utilização?
> É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. (POLYA, 1995, p. XVII)

Observe que essas perguntas e indicações buscam resgatar a memória de algum conteúdo ou um problema semelhante já estudado que possa contribuir para elaborar um plano de resolução. Para Polya "As boas ideias são baseadas em experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa ideia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma ideia boa sem relembrar alguns fatos pertinentes" (POLYA, 1995 p. 6).

Encontrar um problema semelhante pode ser bem difícil. O próprio Polya (1995) o considera um golpe de sorte e, por isso pode ser interessante reformulá-lo de uma maneira a torná-lo um problema conhecido. Como exemplo o autor utiliza um problema em que se deseja encontrar a medida da diagonal de um paralelepípedo sendo conhecida as dimensões de altura, largura e profundidade, para isso são realizadas indagações e indicações, tais como: "é possível inserir um elemento auxiliar [...] há algum triângulo na figura?” (POLYA, 1995, p. 7). O objetivo é possibilitar ao aluno enxergar um triângulo retângulo dentro deste paralelepípedo, o que transforma o problema inicial no problema de encontrar a hipotenusa do triângulo retângulo sendo conhecidos os seus lados, recaindo na aplicação do teorema de Pitágoras e possibilitando ao aluno perceber que a situação tridimensional não é tão diferente da bidimensional. Com isto está traçado o plano para a resolução.

A próxima fase é a execução do plano, que em geral, é mais fácil que a anterior. Consiste basicamente em executar os passos determinados no plano de maneira correta. Como indicações e indagações Polya (1995) sugere: “Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?” (POLYA, 1995, p. XVII).

Embora possa ser menos complexa, esta etapa costuma ser trabalhosa, pois nela estão todos os cálculos que precisam ser feitos e o menor erro frustrará a resolução. O principal requisito desta etapa é a paciência e cuidado para se verificar com atenção.

Ao concluir a terceira etapa a resposta correta já deve ter sido encontrada. No entanto o trabalho ainda não está concluído, restando ainda a etapa de retrospecto, na qual deve-se examinar cada etapa da resolução. Através desse exame detalhado, o resolvedor tem a oportunidade de consolidar seu conhecimento. Examinando o processo realizado, é possível aprimorá-lo ou ainda descobrir um novo meio de resolver o mesmo problema.

Nesta última etapa é conveniente também verificar se o problema foi totalmente esgotado e se a solução encontrada, de fato, atende as condições do problema. Vejamos as indagações e sugestões propostas por Polya (1995) nesta fase.

> É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?
> É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?
> É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? (POLYA, 1995, p. XVII)

O estudo destas fases e das indicações propostas são essenciais à nossa proposta, uma vez que a aplicação idealizada trabalha por meio da resolução de problemas. As indicações e indagações, assim como as fases da resolução servirão para guiar a construção das dicas de resolução dos problemas.

4.3 O ROTEIRO DE ONUCHIC E ALLEVATO

Onuchic e Allevato (1999) elaboram um roteiro para implementação de uma aula considerando a abordagem 'ensinar matemática através da resolução de problemas', o qual posteriormente, foi aprimorado (Onuchic e Allevato 2011). O segundo roteiro é composto pelos seguintes passos: Preparação do problema; Leitura individual; Leitura em conjunto; Resolução do problema; Observar e incentivar; Registros das resoluções na lousa; plenária; Busca do consenso; Formalização do conteúdo; (Onuchic e Allevato 2011).

O roteiro proposto visa uma atividade em grupo cujo primeiro passo é *preparação do problema*. Esta etapa ocorre antes de se começar o trabalho em sala de aula e é de fundamental importância para o cumprimento do objetivo de formalizar de um novo conceito. Segundo Onuchic e Allevato o professor deve:

> Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula. (ONUCHIC e ALlEVATO, 2011, p.83).

Iniciando a atividade em sala de aula são realizados os passos de *leitura individual* e *leitura em conjunto.* Esta etapa visa a compreensão do problema (primeira faze proposta na Heurística de George Polya). Nesta fase devem ficar esclarecidas todas as dúvidas quanto ao enunciado do problema, eventualmente podem ser consultados dicionários para compreender o significado de palavras desconhecidas.

Após entendido o problema inicia-se a resolução do mesmo, o que sugere-se realizar em grupos. Espera-se que o problema gerador conduza os alunos, ao longo da resolução, à construção do conteúdo planejado pelo professor (ONUCHI e ALLEVATO, 2011).

Na fase descrita como *incentivar e observar* o professor presta auxílio aos estudantes de modo a incentivá-los a utilizarem seus conhecimentos prévios na resolução do problema. Nas palavras de Onuchic e Allevato:

> O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como **interventor e questionador**. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho. (ONUCHIC e ALLEVATO 2011 p. 84, grifo nosso).

O papel do professor descrito por Onuchic e Allevato nessa fase se assemelha muito aos diálogos idealizados por Polya (1995) e se enquadra nas fases de *elaboração de um plano* e *execução do plano*.

Feita esta etapa os alunos são convidados a fazer o *registro na lousa* de suas resoluções, independentemente de estarem certas ou erradas. O objetivo é a partir desta realizar a discussão com o grande grupo, o que é feito na fase seguinte denominada a *plenária.* Esta fase é muito rica em aprendizado pois os alunos refletem sobre as diferentes formas de abordar o problema, aproveitando também para tirar dúvidas a respeito das resoluções apresentadas. Discutidas todas as soluções começa a *busca do consenso,* na qual professores e alunos tentam chegar em um resultado correto. Estas três fases descritas por Onuchic e Allevato podem ser associadas à fase de retrospecto da solução disposta no roteiro de Polya.

A *formalização do conteúdo* é a última etapa do roteiro proposto. Ela ocorre após estar resolvido o problema, segundo Onuchic e Allevato (2011, p. 84):

> Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Observamos que as diversas etapas descritas por Onuchic e Allevato (2011) podem ser relacionadas com as etapas propostas por Polya (1995) com exceção da primeira e última etapa. Isso ocorre por se tratarem de eventos antes e depois da resolução do problema propriamente dita e, também, por ocorrerem apenas em ambientes de ensino formal, o qual é o foco de sua abordagem.

Considerando o que foi exposto, é possível observar que a proposta deste trabalho (para guiar a produção de conteúdo digital e instrucional para o aplicativo cujas características já foram descritas) está alinhada com as teorias existentes e contempla, de forma adaptada, as etapas descritas nas diferentes abordagens que tratam da resolução de problemas como método de ensino.

5 PROPOSTA DE ROTEIRO PARA PRODUÇÃO DE CONTEÚDO

A proposta desse trabalho consiste, em parte, na criação de um roteiro para produção de conteúdos didáticos e instrucionais para um aplicativo a ensino e aprendizagem de matemática, baseado em perguntas e respostas conforme já mencionado no capítulo 3. Este roteiro será feito com base no referencial teórico levantado no capítulo anterior. Adicionalmente, embora o trabalho tenha se baseado no projeto de um aplicativo em específico, cuja forma de uso e de interação estão definidos, os resultados e conclusões poderão ser expandidos para outros sistemas e aplicativos que tenham características semelhantes.

No software idealizado há dois tipos de conteúdo: os problemas (questões de múltipla escolha), com suas respectivas dicas, e os tópicos matemáticos. Como a aplicação não é destinada ao estudo de um assunto exclusivo, mas sim ao estudo dos diversos conteúdos matemáticos, é importante organizar os materiais produzidos na forma de uma lista composta de seções e subseções de modo que os esses materiais possam ser vinculados a essa lista. Isso será útil para se ter um controle sobre os materiais que são produzidos e se estes abordam todos os assuntos desejados ou se restará lacunas que necessitem atenção. Através dessa lista é possível classificar as questões vinculando-as a um ou mais conteúdo, o que será decisivo para avaliar o desempenho e progresso do usuário identificando, por exemplo, quais conteúdos apresentam maior dificuldade, por parte do aluno, e quais já são conhecidos e dominados. Assim, antes de se apresentar a proposta para a elaboração dos materiais, será elaborada uma estrutura básica de conteúdo.

Por fim, este capítulo será apresentado em 3 seções, as quais trataram a respeito da elaboração da lista de conteúdo; elaboração das questões, dicas e alternativas; e elaboração dos tópicos.

5.1 ELABORAÇÃO DA LISTA DE CONTEÚDOS

Para delimitarmos esta etapa é apresentada uma lista dos conteúdos de matemática trabalhados no Ensino Médio. Para isso, foram consultados alguns documentos oficiais como Brasil (2000), Brasil (2002) e Brasil (2017).

Considerando ainda que Brasil (2017) ainda não teve sua versão final aprovada, não foi possível usá-la como base para a lista de conteúdo a ser adotada aqui. Brasil (2000) também não traz uma relação de conteúdos recomendados para tal período escolar, mas sim competências e habilidades.

Brasil (2002) estrutura os conteúdos matemáticos em três eixos ou temas estruturantes: álgebra: números e funções; geometria e medidas; e análise de dados. Cada eixo, por sua vez, é dividido em algumas unidades temáticas, as quais possuem conteúdos específicos.

A lista proposta foi elaborada tomado como base a estrutura proposta em Brasil (2002), no entanto, foram feitas algumas alterações e acrescentadas algumas unidades temáticas consideradas interessantes e que, costumeiramente, são trabalhadas no Ensino Médio, mas não estavam presentes no documento. A lista proposta possui três níveis sendo eles: eixo temático, tema estruturante e conteúdo e está apresentada a seguir.

1. Álgebra: Numero e Funções
   - 1.1. Conjuntos
     - 1.1.1. Noções de conjuntos
     - 1.1.2. Operação entre conjuntos
     - 1.1.3. Conjuntos numéricos
   - 1.2. Variação de grandezas:
     - 1.2.1. Noção de função;
     - 1.2.2. Função afim
     - 1.2.3. Função quadrática
     - 1.2.4. Representação e análise gráfica;
     - 1.2.5. Sequências numéricas: progressões e noção de infinito;
     - 1.2.6. Funções exponenciais ou logarítmicas;
     - 1.2.7. Funções trigonométricas;
     - 1.2.8. Taxa de variação de grandezas.
   - 1.3. Trigonometria:
     - 1.3.1. do triângulo retângulo;
     - 1.3.2. do triângulo qualquer;
     - 1.3.3. Ciclo trigonométrico.
   - 1.4. Matrizes e determinantes
     - 1.4.1. Definições e propriedades
     - 1.4.2. Matrizes especiais
     - 1.4.3. Operações com matrizes
     - 1.4.4. Determinante de uma matriz
   - 1.5. Equações
     - 1.5.1. Sistemas de equações lineares
     - 1.5.2. Equações polinomiais

2. Geometria e medidas
    2.1. Geometria plana,
        2.1.1. Semelhança e congruência;
        2.1.2. Representações de figuras.
        2.1.3. Área.
    2.2. Geometria espacial,
        2.2.1. Geometria de posição
        2.2.2. Volume
        2.2.3. Poliedros
        2.2.4. Sólidos redondos;
        2.2.5. Inscrição e circunscrição de sólidos.
    2.3. Geometria métrica
        2.3.1. Estimativa, valor exato e aproximado.
        2.3.2. Grandezas e medidas
    2.4. Geometria analítica.
        2.4.1. Representações no plano cartesiano e equações;
        2.4.2. Intersecção e posições relativas de figuras.
3. Análise de dados/ probabilidade e estatística/tratamento da informação
    3.1. Estatística
        3.1.1. Descrição de dados;
        3.1.2. Representações gráficas;
        3.1.3. Análise de dados: médias, moda e mediana, variância e desvio padrão.
    3.2. Contagem
        3.2.1. Princípio multiplicativo;
        3.2.2. Problemas de contagem.
    3.3. Probabilidade.
        3.3.1. Possibilidades;
        3.3.2. Cálculo de probabilidades.

Cada conteúdo proposto nesta lista pode ser ainda mais detalhado, elencando cada propriedade, teorema e definição que sejam necessários para a resolução das questões e compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. O objetivo desta lista é possibilitar uma forma de organizar os materiais produzidos, assim, é desejável que a lista contenha os conteúdos da maneira mais detalhada possível. No entanto, para obter tal grau de detalhamento seriam necessárias várias páginas deste trabalho e ainda correríamos o risco de omitirmos algum conceito. Assim, no momento da produção dos materiais, podem ser feitas alterações e ampliações.

Como exemplo, foram selecionados três itens para apresentar um possível detalhamento de conteúdos relacionados. Esses tópicos de conteúdo serão usados nos exemplos de problemas a serem produzidos para o aplicativo, apresentados no capítulo seguinte.

Exemplo 1: A partir do item “1.5.1 Sistemas Lineares” tem-se um possível desdobramento como segue abaixo:

- Definição de Sistemas de equações lineares;
- Solução de um sistema linear;
- Interpretação geométrica;
- Conjunto solução de um sistema linear;
- Classificação de sistemas lineares;
    - Sistema Impossível;
    - Sistema Possível Determinado;
    - Sistema Possível Indeterminado;
- Sistemas equivalentes;
- Representação matricial de um sistema linear;
- Matriz ampliada de um sistema;
- Operações elementares sobre uma matriz;
- Resolução de sistemas;
    - Resolução por escalonamento ou eliminação de Gaus;
    - Resolução por determinantes ou método de Cramer;
    - Resolução por substituição;
    - Resolução por matriz inversa.

Exemplo 2: Outro exemplo, a partir do item 1.2.3 “função quadrática” tem-se um possível desdobramento como segue abaixo:

- Definição de função quadrática;
- Valor ou imagem de uma função em um ponto;
- Gráfico da Função Quadrática;
- Concavidade da parábola;
- Discriminante de uma função quadrática;
- Forma canônica da função quadrática;
- Zeros de uma função quadrática;

- Interseção do gráfico da função quadrática com o eixo Y;
- Vértice da função quadrática;
- Máximo e mínimo da função quadrática;
- Sinal de uma função quadrática;

Exemplo 3: Um terceiro e último exemplo é o desdobramento do item “2.2.4 Sólidos redondos” como segue abaixo:

- Definição de sólidos redondos
- Cilindro;
  - Seções de um cilindro;
  - Área da superfície de um cilindro reto:
    - Área lateral;
    - Área total;
  - Volume do cilindro;
- Cone;
  - Seções do cone;
  - Área da superfície de um cone:
    - Área lateral;
    - Área total;
  - Volume do cone;
  - Tronco de cone;
  - Área da superfície do tronco de cone:
    - Área lateral;
    - Área total;
  - Volume do tronco de cone;
- Esfera;
  - Área da superfície esférica;
  - Volume da esfera.

5.2 ELABORAÇÃO DOS PROBLEMAS

Esta seção trata da principal contribuição deste trabalho. Nela será apresentado um roteiro para selecionar, ou criar, questões para a aplicação idealizada, as dicas para conduzir sua resolução e as alternativas. Para isso irá se levar em conta alguns dos conceitos da metodologia de resolução de problemas, adaptando-as ao ambiente digital para que se possa proporcionar ao aluno uma forma de estudo que dependa menos do professor.

O roteiro para a criação das questões está disposto em oito etapas, sendo que as cinco primeiras etapas objetivam uma preparação do problema. As demais etapas, em especial a etapa de elaboração das dicas, visam proporcionar orientação ao usuário na resolução do problema, sendo visível, nestas últimas, as fases de resolução previstas por Polya (1995).

a. Selecionar ou criar o problema

O primeiro passo é selecionar a questão, ou criá-la, em ambos os casos devem ser seguidas as orientações de Dante (1991), em síntese, deve-se buscar questões que sejam:

- Desafiadoras, interessantes e reais para o aluno;
- O elemento desconhecido do problema deve ser “realmente desconhecido”, ou seja, a resposta não deve ser facilmente obtida de outra forma;
- Não deve consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas;
- Deve ter o nível adequado de dificuldade.

b. Resolver o problema

Embora não se tenha o objetivo de disponibilizar a resolução do problema para o usuário, e sim fornecer apenas dicas e tópicos, é necessário resolver o problema escolhido para que se possa conhecê-lo melhor, identificando os conteúdos envolvidos, nível de dificuldade e a resposta correta

c. Identificar os conteúdos abordados

Nesta etapa deve-se identificar os conteúdos envolvidos no problema, os quais podem ser separados em dois tipos, o primeiro deles chamaremos de principal. Este refere-se ao assunto que está sendo abordado e é o foco de estudo do problema. Identificá-lo é importante para a posterior elaboração das dicas de resolução, uma vez que, para um mesmo problema podem ser determinadas diferentes estratégias. Assim, com esta ação, é possível concentrar a elaboração das dicas de modo a direcionar uma solução que se utilize de tal conteúdo.

O segundo tipo de conteúdo refere-se aos pré-requisitos para a resolução do problema, isto é, conteúdos distintos do principal, mas que são necessários à resolução do problema. Nem sempre ser possível ou relevante identificá-los, no entanto em alguns problemas pode ser fundamental, pois, caso o usuário tenha domínio sobre o pré-requisito pode não conseguir resolver a questão da maneira desejada.

d. Definição de metadados

Os metadados das questões são informações vinculadas às questões que serão utilizadas pelo algoritmo do sistema para fazer o gerenciamento do conteúdo, isto é, direcionar questões e tópicos, e também para contribuir com a avaliação de desempenho dos usuários. Estas informações são de uso exclusivo do algoritmo do sistema, portanto, a definição de quais metadados deverão ser identificados depende exclusivamente do sistema para o qual se destina o material produzido.

Algumas informações contidas nos metadados podem incluir o nível de dificuldade apresentado pelo usuário, os temas tratados pelo problema (por exemplo, economia, viagens, carros etc.), os próprios conteúdos identificados no item anterior, etc. Por exemplo, para saber os assuntos já dominados pelo usuário, o sistema deve obter informações sobre os conteúdos das questões que o usuário respondeu corretamente e sem consultar as dicas. Esses conteúdos podem ser excluídos na escolha da questão seguinte a ser proposta.

e. Elaboração das dicas

As dicas para resolução dos problemas têm por objetivo conduzir o usuário durante a resolução de modo que ele possa construir o raciocínio necessário para desenvolvimento do problema sem fornecer, no entanto, a resolução propriamente dita. Assim, a elaboração das dicas consiste em uma adaptação de parte da metodologia proposta por Polya (1995) à conteúdos digitais onde a orientação do professor, realizada por meio de indagações e indicações será simulada através de um *software*.

Deve-se considerar aqui que Polya (1995) idealiza uma relação entre professor e aluno, na qual, o professor pode realizar tantas indicações e indagações quanto julgar necessário para auxiliar o aluno. De fato, a lista de indicações proposta por Polya é bem extensa. Nesse trabalho, por se tratar de um ambiente digital, fornecer um grande número de dicas para o usuário não é conveniente e nem desejado, pois tornará o uso das dicas cansativo e desinteressante o que poderá fazer com que o usuário considere mais cômodo tentar a sorte e escolher uma alternativa aleatoriamente. Deste modo, para produzir as dicas devemos levar em consideração o objetivo das fases propostas por Polya e não apenas replicar as indicações de sua lista.

Para cada problema serão elaboradas até três dicas, as quais irão conter indicações das duas primeiras fases, auxiliando na compreensão e na elaboração de um plano. As dicas deverão ter níveis crescentes de detalhamento das informações fornecidas, sendo que uma única dica poderá corresponder a mais de uma das fases de resolução.

Outro ponto a se considerar é que, como as dicas serão dadas pelo sistema, fazer indagações aos alunos pode nem sempre ser conveniente, pois, um questionamento pode não dar o esclarecimento que o usuário espera e com isso, desestimulá-lo. Assim, por vezes, será conveniente que as dicas contenham indicações ao invés de indagações. Afinal "A indagação e a sugestão visam ao mesmo objetivo: ambas tendem a provocar a mesma operação mental." (POLYA, 1995, p.1).

A primeira fase da resolução de problemas proposta por Polya (1995) é a compreensão do problema, logo, é o que primeiramente as dicas devem proporcionar. A primeira dica deve necessariamente levar o usuário a identificar as partes principais do problema como seus dados, incógnitas ou até mesmo sugerir traçar figuras que possibilitem a compreensão. De modo geral, as primeiras dicas deverão induzir o usuário a:

- Identificar o que o problema pede e quais são as incógnitas no problema atribuindo-lhes uma notação adequada para representá-las;
- Identificar as condições impostas pelo problema;
- Identificar e tomar nota dos dados fornecidos no problema;
- Fazer um esboço representando a situação geometricamente, se for conveniente.

A segunda fase da resolução de problemas proposta em Polya (1995) trata da elaboração de um plano para resolução. Essa fase pode ser pensada como a modelagem matemática ou equacionamento do problema e a identificação dos recursos matemáticos (fórmulas, métodos, resultados, etc) que podem ser usados. Em outras palavras, nesta fase as dicas devem levar o aluno a relacionar os dados, incógnitas e condicionantes do problema de modo que este consiga expressar o problema em linguagem matemática e possa identificar as propriedades matemáticas úteis para a resolução.

É claro que para se resolver um problema podem-se elaborar diversos planos de ação. No entanto, por se tratar de um *software*, é difícil colocar dicas que conduzam a mais de um plano. Sendo assim, deve-se escolher previamente o plano que desejamos indicar ao usuário. Isto deve ser feito usando como critério o conteúdo principal identificado nas etapas anteriores.

Esta etapa é possivelmente a mais complexa, consequentemente poderá estar envolvida em um maior número de dicas e apresentada diferentes níveis de detalhamento. De fato, na lista proposta em Polya (1995) o número de indicações e indagações desta etapa é bem mais extenso. As dicas contendo elementos desta etapa devem ser dadas gradativamente de modo que o usuário possa conceber um plano e ao menos tenha a ilusão de tê-lo feito, no entanto devem ser estruturadas considerando a possibilidade de o aluno precisar esgotá-las para ter êxito.

Um artifício sugerido por Polya (1995) para se estabelecer um plano é considerar problemas auxiliares, ou problemas semelhantes, que geralmente são mais simples e resolvidos por meio da aplicação direta de uma propriedade matemática. Assim as dicas devem levar o usuário a identificar quais são esses problemas auxiliares ou semelhantes.

Por fim, esta fase da resolução de problemas visa proporcionar a escrita do problema em linguagem matemática e indicar os problemas conhecidos que podem ser utilizados, isto é, propriedades matemáticas que possam ser úteis na resolução. De modo geral as dicas correspondentes à segunda fase da resolução de problemas deverão induzir o usuário a:

- Relacionar os dados e a(s) incógnita(s) do problema escrevendo sentenças matemáticas que as relacionem, utilizando para isso as condicionantes do problema;
- Identificar características das propriedades e conteúdos matemáticos presentes no problema e que serão úteis para a resolução. Neste momento, a propriedade matemática chave ainda não deve ser revelada dando a oportunidade de o aluno descobrí-la;
- Por último, identificar a propriedade que pode ser utilizada para resolver o problema.

f. Elaboração de alternativas

Como trata-se de questões de múltipla escolha, foi proposta uma maneira de criar as alternativas, sendo que a correta é obtida imediatamente da resolução, realizada em um passo anterior. Para as alternativas erradas, consideremos o que diz o INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira)(2010, p. 11),

> [...]essas respostas devem ser plausíveis, isto é, devem parecer corretas para aqueles [...] que não desenvolveram a habilidade em questão. Isso significa que o distrator plausível deve retratar hipóteses de raciocínio utilizadas na busca da solução da situação-problema apresentada.

Embora o autor ainda recomende utilizar erros comuns observados no processo de ensino-aprendizagem para aumentar a plausibilidade do distrator, nos exemplos que serão apresentados no Capítulo 6, consideremos apenas hipóteses de raciocínios equivocados.

Na produção das alternativas erradas buscou-se contemplar a terceira fase proposta por Polya (1995) que trata da execução do plano. Para ele, nesta fase deve-se verificar cada passo para evitar erros na execução do plano e, para isso, o professor se coloca como questionador levando o aluno a refletir sobre sua resolução.

No nosso caso, como o aplicativo não conseguirá acompanhar a resolução do aluno, uma possível solução para contemplar esta etapa é prever, para cada distrator, um aviso indicando o possível raciocínio equivocado.

A quarta e última fase proposta por Polya (1995) é o retrospecto. Seu objetivo é verificar se a resposta está correta, também reavaliar todo o processo de resolução a fim de consolidar o aprendizado buscando identificar outros métodos de resolução ou aplicar o método utilizado em outros problemas.

A verificação do resultado será obtida de maneira imediata quando o aluno indicar sua resposta dentro das alternativas. Já o reexame do percurso de resolução pode ser feito visualizando todas as dicas do problema que, caso não tenham sido visualizadas, podem ser disponibilizadas para o usuário.

g. Identificação dos tópicos

Os tópicos são textos matemáticos que podem ser disponibilizados para o usuário com o objetivo de esclarecer dúvidas sobre os conteúdos e assuntos abordados pelo problema ou mesmo necessários à sua resolução. Uma possível forma de acesso a estes tópicos é por meio de links vinculados a alguma palavra presente na questão ou em suas dicas. Por exemplo, caso uma questão recomende o cálculo da área de um círculo, o texto “área de um círculo” pode ser um link que leve ao respectivo tópico.

Neste momento deve-se identificar quais são os tópicos úteis ao problema em questão.

5.3 DA ELABORAÇÃO DOS TÓPICOS

Os tópicos são materiais de apoio em forma de texto que apresentam propriedades matemáticas, teoremas, fórmulas e definições que podem ser úteis na resolução de determinado problema. Estes tópicos devem ficar disponíveis para acesso por parte do usuário, durante a resolução da questão como auxílio. Uma forma de viabilizar o acesso a esses tópicos é inserir links em palavras chaves que levem a esses materiais.

Um mesmo tópico pode ser utilizado em mais de um problema, por isso é interessante realizar sua organização por meio da lista proposta na seção 5.1 para que possa ser reaproveitado. Na prática, a produção dos tópicos irá complementar e ampliar a referida lista.

Como os tópicos são textos matemáticos que objetivam um auxílio imediato eles devem:

- ser produzidos de maneira simples, porém sem abrir mão da precisão matemática e notações necessárias à matemática;
- devem também se restringir a um único conceito matemático, fazendo referência a outros tópicos caso necessário;
- devem ser nomeados de acordo com o conceito matemático abordado;
- devem conter definições, propriedades e eventualmente algum exemplo;

Produzir os tópicos segundo estas características, ajuda a torná-los sucintos, possibilitando que o aprendizado ocorra de maneira ubíqua, uma vez que pelo acesso ao tópico o usuário aprende o conteúdo, no momento e lugar em que necessita.

Apresentaremos agora alguns exemplos de tópicos criados com o objetivo de serem utilizados nos exemplos apresentados no próximo capítulo. No texto, sempre que uma palavra ou frase de um tópico possibilitar o acesso a outro, aparecerá <u>sublinhada</u>. Como um primeiro exemplo, apresentaremos alguns tópicos referentes a sistemas de equações. Para a produção destes foram utilizados como referências Boldrini (1980), Dante (2014) e Hefez e Fernandes (2016).

Exemplo 1: Tópicos relativos a sistemas lineares:

Tópico 1: Sistemas de equações lineares

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{cases}$$

Com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le m$. Esse mesmo sistema pode ser expresso em notação matricial.

Tópico 2: Solução de um sistema linear

Uma solução de um sistema linear é uma sequência $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de números reais que satisfaz simultaneamente todas as equações que compõem o sistema.

Por exemplo, (1,3,-2) é solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$$

pois $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 1$, $4 \cdot 1 - 3 - (-2) = 3$ e $1 + 3 - (-2) = 6$.

Tópico 3: Conjunto solução de um sistema linear

O conjunto solução de um sistema linear é o conjunto de todas as soluções de um sistema linear. Um sistema pode admitir uma única solução, nenhuma solução ou infinitas soluções.

Tópico 4: Classificação de sistemas lineares

Um sistema é classificado com base no número de soluções existentes e pode ser classificado quanto à existência ou não de solução em impossível e possível e, quanto ao número de soluções em possível e determinado ou possível e indeterminado.

Tópico 5: Sistema Impossível

Chamamos sistema impossível o sistema linear que não admite solução.

Tópico 6: Sistema Possível Determinado

Chamamos sistema possível e determinado o sistema linear que admite apenas uma solução.

Tópico 7: Sistema Possível Indeterminado

Chamamos sistema possível e indeterminado o sistema linear que possuir infinitas soluções.

Tópico 8: Sistemas equivalentes

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se, possuem exatamente o mesmo conjunto solução.

Tópico 9: Representação matricial do sistema linear

Todo sistema de equações lineares pode ser escrito numa forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ou $A \cdot X = B$ onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é chamada matriz dos coeficientes

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é chamada matriz das incógnitas, e

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é chamada matriz dos termos independentes

Tópico 10: Matriz ampliada do sistema

Matriz ampliada do sistema é a matriz dos coeficiente acrescentada de uma coluna que é a matriz coluna dos termos independentes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Por exemplo matriz *A* abaixo é a matriz ampliada do sistema *S*:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y - 4z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Tópico 11: Operações elementares

Uma operação elementar sobre um sistema de equações lineares é uma das seguintes operações:

(a) Trocar a posição relativa de duas equações de um sistema;

(b) Trocar uma equação dada por um de seus múltiplos não nulos (isto é, a equação obtida multiplicando por um número real não nulo).

(c) Trocar uma equação pela soma membro a membro da própria equação com um múltiplo de outra;

Ao aplicar essas operações elementares em um sistema o transformamos em um sistema equivalente.

Como somente os coeficientes e termos independentes do sistema são alterados pelas operações elementares podemos aplicá-las as linhas da matriz ampliada do sistema. As operações elementares sobre as linhas de uma matriz são:

(a) Trocar a posição relativa de duas linhas de uma matriz;

(b) Multiplicar uma linha por um número real não nulo.

(c) Trocar uma linha pela soma a própria linha com um múltiplo de outra;

A matriz obtida pela aplicação sucessiva de um número finito de transformações elementares é chamada matriz equivalente por linhas.

> "A noção de equivalência de matrizes por linha corresponde à noção de equivalência de sistemas lineares quando se efetuam as respectivas transformações sobre as equações. De fato, a sistemas equivalentes, correspondem matrizes associadas equivalentes, e vice-versa." (HEFEZ e FERNANDEZ, 2016, p.27)

Tópico 12: Transformação de um sistema linear em um sistema equivalente por meio das transformações elementares (demonstração)

No tópico operações elementares afirmamos que as transformações elementares transformam um sistema linear em um sistema equivalente. Esta afirmação consiste em um teorema, o qual apresentaremos e demonstraremos a seguir:

Teorema: Dado um sistema linear S de m equações e n incógnitas, se S_1 é o sistema obtido de S por efetuar alguma operação elementare, então S_1 é equivalente a S.

Demonstração: Mostraremos para cada uma das operações elementares que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S se, e somente se, for solução de S_1.

Operação elementar "a": seja S um sistema linear de m equações por n incógnitas, e seja S_1 o sistema obtido de S por aplicar a operação elementar "a".

$(\Rightarrow)$ Seja a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ uma solução qualquer de *S*, $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ satisfaz todas as suas equações. Como S_1 possui exatamente as mesmas equações de *S,* a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ satisfaz todas as equações de S_1 e, portanto, é também solução de S_1.

$(\Leftarrow)$ Seja a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ uma solução qualquer de S_1, $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ satisfaz todas as suas equações. Como *S* possui exatamente as mesmas equações de S_1, a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ satisfaz todas as equações de *S* e, portanto, é também solução de *S*.

Operação elementar "b": seja *S* um <u>sistema linear</u> de *m* equações por *n* incógnitas, e seja S_1 o sistema obtido de *S* por multiplicar uma das equações de *S* por um número real $\lambda \neq 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que seja a primeira equação.

$(\Rightarrow)$ Seja a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ uma solução qualquer de *S*, temos que $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1$. Multiplicando esta equação por $\lambda \neq 0$ obtemos $\lambda a_{11}\alpha_1 + \lambda a_{12}\alpha_2 + \ldots + \lambda a_{1n}\alpha_n = \lambda b_1$ que é exatamente a primeira equação de S_1. Logo a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ também é solução de S_1

$(\Leftarrow)$ Suponhamos agora que a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ seja uma solução qualquer de S_1, temos que $\lambda a_{11}\alpha_1 + \lambda a_{12}\alpha_2 + \ldots + \lambda a_{1n}\alpha_n = \lambda b_1$. Multiplicando esta equação por $\frac{1}{\lambda}$, lembrando que $\lambda \neq 0$, obtemos a equação $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1$ que é exatamente a primeira equação de S. Logo a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ também é solução de *S*.

Operação elementar "c": considere o sistema:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \ldots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}x_1 & + & a_{j2}x_2 & + & \ldots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & {}_{amn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Substituindo a i-ésima equação de *S* pela soma, membro a membro, dela com j-ésima equação de *S* multiplicada por um número real $\lambda \neq 0$, obtemos o sistema a seguir:

$$S_1:\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \left(a_{i1}+\lambda a_{j1}\right)x_1 & + & \left(a_{i2}+\lambda a_{j2}\right)x_2 & + & \dots & + & \left(a_{in}+\lambda a_{jn}\right)x_n & = & b_i+\lambda b_j \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}x_1 & + & a_{j2}x_2 & + & \dots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & amn\,x_n & = & b_n \end{cases}$$

Observe que os dois sistemas diferem apenas pela i-ésima equação, portanto analisaremos apenas essas equações. Mostraremos que (α_1, α_2,..., α_n) é solução de *S* se, e somente se, for solução de S_1.

$(\Rightarrow)$ Suponha que $(\alpha_1,\alpha_2 \dots \alpha_n)$ seja solução de *S*. Por hipótese a equação seguinte é satisfeita:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i \tag{1}$$

Multiplicando a j-ésima equação por $\lambda \neq 0$ obtemos:

$$\lambda a_{j1}\alpha_1 + \lambda a_{j2}\alpha_2 + \dots + \lambda a_{jn}\alpha_n = \lambda b_j \tag{2}$$

Somando membro a membro (1) e (2) obtemos:

$$(a_{i1}+\lambda a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2}+\lambda a_{j2})\alpha_2 + \dots + (a_{in}+\lambda a_{jn})\alpha_n = b_i + \lambda b_j$$

Logo, (α_1, α_2,..., α_n) é solução de S_1, já que as demais equações de S_1 são as mesmas de S.

$(\Leftarrow)$ Agora suponhamos que $(\alpha_1,\alpha_2 \dots \alpha_n)$ seja solução de S_1. Por hipótese as equações seguintes de S_1 são satisfeitas:

$$(a_{i1}+\lambda a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2}+\lambda a_{j2})\alpha_2 + \dots + (a_{in}+\lambda a_{jn})\alpha_n = b_i + \lambda b_j \tag{3}$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \tag{4}$$

Multiplicando (4) por $\lambda \neq 0$ obtemos:

$$\lambda a_{j1}\alpha_1 + \lambda a_{j2}\alpha_2 + \dots + \lambda a_{jn}\alpha_n = \lambda b_j \tag{5}$$

Subtraindo (5) de (3) obtemos:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

Mostrando que (α_1, α_2,..., α_n) é solução da i-ésima equação de S, logo é também solução de S já que as demais equações de S são as mesmas de S_1.

Tópico 13: Resolução de um sistema de equações lineares

Resolver um sistema de equações lineares é encontrar o conjunto solução deste sistema. Para isto dispomos de diferentes métodos:

- Resolução por escalonamento ou eliminação de Gauss;
- Resolução por determinantes ou método de Cramer;
- Resolução por matriz inversa;
- Resolução por substituição.

Tópico 14: Resolução por escalonamento ou eliminação de Gauss

O escalonamento é um método de resolução de sistemas de equações lineares no qual efetuamos operações elementares na matriz ampliada desse um sistema (ou no próprio sistema) até obtermos uma matriz na forma escalonada (ou um sistema na forma escalonada), que, por sua vez, está associada a um sistema que é equivalente ao original.

Após encontrarmos a forma escalonada do sistema basta resolvê-lo de baixo para cima efetuando a substituição das equações resolvidas na equação imediatamente superior. Vejamos um exemplo.

$$S = \begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+y-4z=2 \\ 2x+3y+2z=1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Subtraindo duas vezes a primeira linha da segunda linha e subtraindo duas vezes a primeira linha da terceira linha da matriz A obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Somando a segunda linha à terceira obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & -5 \end{bmatrix}$$

Assim, S' é o sistema escalonado de S,

$$S' = \begin{cases} x+y+2z=2 \\ 0x+-y-8z=-2 \\ 0x+0y-10z=-5 \end{cases}$$

Resolvendo a terceira equação obtemos:

$$-10z=-5$$

$$\Rightarrow z = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$$

Substituindo o valor de z na segunda equação obtemos:

$$-y-8\cdot\frac{1}{2}=-2$$
$$\Rightarrow -y-4=-2$$
$$\Rightarrow -y=-2+4$$
$$\Rightarrow y=-2$$

Substituindo o valor de y e z na primeira equação obtemos:

$$x-2+2\cdot\frac{1}{2}=2$$
$$\Rightarrow x-2+1=2$$
$$\Rightarrow x=2+2-1$$
$$\Rightarrow x=3$$

A solução do sistema é $(x,y,z)=\left(3,-2,\frac{1}{2}\right)$.

Tópico 15: Matriz na forma escalonada

Dizemos que uma matriz está na forma escalonada quando em cada uma das linhas o primeiro elemento não nulo (chamado pivô) está situado à esquerda do primeiro elemento não nulo da linha seguinte. Além disso, linhas com todos os elementos nulos estão abaixo das outras.

Dizemos que um sistema linear está na forma escalonada quando a matriz ampliada do sistema está na forma escalonada.

Tópico 16: Resolução por determinantes ou método de Cramer

O método de Cramer pode ser aplicado somente a sistemas em que o número de equações e o número de incógnitas é o mesmo e o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Suponhamos um sistema de *n* equações e *n* incógnitas como abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\dots & +a_{nn}x_n & =b_n \end{cases}$$

Este sistema pode ser representado na sua forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou $A \cdot X = B$ onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

O método de Cramer nos dá que: $x_i = \dfrac{D_{x_i}}{D_A}$, onde x_i é a incógnita da linha *i* da matriz das incógnitas, D_A é o determinante da matriz dos coeficientes e D_{x_i} é o determinante da matriz

$$A_{x_i} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

isto é, a matriz obtida da matriz dos coeficientes substituindo a coluna *i* pela matriz dos termos independentes.

Vejamos um exemplo: Dado o sistema *S*

$$S = \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y - 4z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Podemos representá-lo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo-o pelo método de Cramer

$$x = \frac{D_x}{D_A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{30}{10} = 3,\ y = \frac{D_y}{D_A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{20}{10} = 2 \text{ e}$$

$$z = \frac{Dz}{D_A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Assim o conjunto solução é $(x, y, z) = \left(3, -2, \frac{1}{2}\right)$.

Tópico 17: Resolução por matriz inversa

A resolução por matriz inversa pode ser aplicada somente a sistemas em que o número de equações e incógnitas é o mesmo e o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Suponhamos um sistema de *n* equações e *n* incógnitas como abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Este sistema pode ser representado na sua forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou $A \cdot X = B$ onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

Seja A^{-1} a matriz inversa de A, tal que o produto das matrizes A e A^{-1} resulta em

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

onde I é a matriz identidade. Disto temos que

$$\begin{aligned} & A \cdot X = B \\ \Leftrightarrow\ & A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \\ \Leftrightarrow\ & (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B \\ \Leftrightarrow\ & I \cdot X = A^{-1} \cdot B \\ \Leftrightarrow\ & X = A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Em outras palavras, podemos obter os valores da matriz das incógnitas multiplicando a matriz inversa da matriz dos coeficientes pela matriz dos termos independentes.

Vejamos um exemplo: Dado o sistema S

$$S = \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y - 4z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Podemos representá-lo na forma matricial:

$$A \cdot X = B \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Temos que a matriz inversa de A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,4 & 0,4 & -0,6 \\ -1,2 & -0,2 & 0,8 \\ 0,4 & -0,1 & -0,1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o método de resolução por matriz inversa temos:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1,4 & 0,4 & -0,6 \\ -1,2 & -0,2 & 0,8 \\ 0,4 & -0,1 & -0,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1,4 \cdot 2 + 0,4 \cdot 2 - 0,6 \cdot 1 \\ -1,2 \cdot 2 - 0,2 \cdot 2 + 0,8 \cdot 1 \\ 0,4 \cdot 2 - 0,1 \cdot 2 - 0,1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Assim o conjunto solução é $(x, y, z) = \left(3, -2, \frac{1}{2}\right)$.

Tópico 18: Resolução por substituição

A resolução por substituição é comumente utilizada em sistemas com duas ou três equações, pois, em sistemas maiores torna-se muito trabalhoso. Consiste em calcular o valor algébrico de uma das incógnitas e substituí-lo nas demais equações viabilizando encontrar os valores numéricos das incógnitas.

Vejamos um exemplo: Dado o sistema S

$$S = \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y - 4z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Calculando o valor algébrico da incógnita x na primeira equação temos:

$$x = 2 - 2z - y$$

Substituindo o valor encontrado na equação anterior na segunda equação e calculando o valor algébrico da incógnita y temos:

$$2(2 - 2z - y) + y - 4z = 2$$
$$4 - 4z - 2y + y - 4z = 2$$
$$-y = -2 + 8z$$
$$y = 2 - 8z$$

Substituindo o valor encontrado para x e y na terceira equação temos:

$$2\left[2 - 2z - (2 - 8z)\right] + 3(2 - 8z) + 2z = 1$$
$$4 - 4z - 4 + 16z + 6 - 24z + 2z = 1$$
$$6 - 10z = 1$$
$$-10z = 1 - 6$$
$$z = \frac{-5}{-10}$$
$$z = \frac{1}{2}$$

Substituindo o valor encontrado de z na equação $y = 2 - 8z$, obtemos $y = -2$. Substituindo o valor de y e z na equação $x = 2 - 2z - y$, obtemos $x = 3$. Assim o conjunto solução é $(x, y, z) = \left(3, -2, \frac{1}{2}\right)$.

Tópico 19: Matriz inversa

Se uma matriz A pode ser reduzida até a matriz identidade, por uma sequência de operações elementares, então *A* é inversível e a matriz inversa de *A* é obtida a partir da matriz identidade *I*, aplicando-se a mesma sequência de operações elementares.

Na pratica operamos simultaneamente com matrizes *A* e *I*, através das operações elementares, até obtermos a matriz *I* na posição em que inicialmente estava *A*. A matriz obtida onde originalmente estava a matriz *I* é a matriz inversa de *A*.

$$(A \vdots I) \rightarrow (I \vdots A^{-1})$$

Exemplo 2: Tópicos relativos a Funções Quadráticas

Vejamos agora alguns exemplos de tópicos para função quadrática. Para a elaboração destes tópicos foram utilizados como referência Iezzi, (1977), Lima, E., (2013) e Dante, (2014).

Tópico 1: Definição de função quadrática

Uma função $f : \mathrm{A} \rightarrow B$ chama-se quadrática se pode ser escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo *a, b* e *c* reais e $a \neq 0$.

Tópico 2: Valor ou imagem da função em um ponto

O valor ou imagem de uma função $f : \mathrm{A} \rightarrow B$ em $x \in \mathbb{R}$ é o valor de $f(x)$. Por exemplo a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$, em $x = 2$, assume o valor $f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$.

Tópico 3: Gráfico de uma Função Quadrática

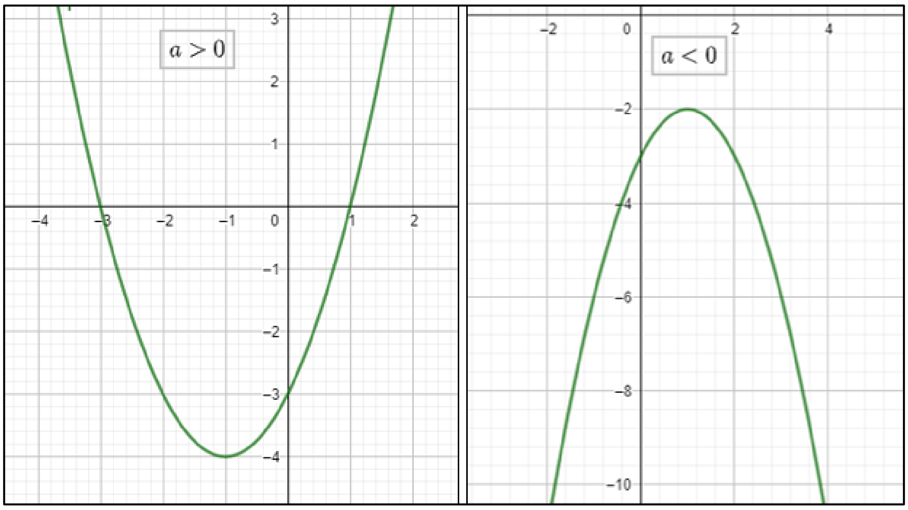
O gráfico de uma função $f : \mathrm{A} \rightarrow B$ é a representação no plano cartesiano do conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ onde $x \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ é a imagem da função no ponto *x*.

O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada parábola. Para traçá-la é importante identificar, além de sua concavidade, alguns pontos específicos como os zeros da função, o ponto de intercecção com o eixo Y e o vértice da parábola.

Tópico 4: Concavidade de uma parábola

A concavidade de uma parábola que é gráfico de uma função quadrática que pode ser escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ está ligada ao coeficiente *a* da expressão da função. Quando $a > 0$ a concavidade da parábola é voltada para cima e quando $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo. Observe a figura 2 abaixo

Figura 2 – Concavidade da parábola



Fonte: O autor

Tópico 5: Discriminante da função Δ

Dada uma função quadrática expressa por $f(x) = ax^2 + bx + c$, chamamos de discriminante da função a expressão $b^2 - 4ac$ que é representado pela letra grega Δ**.** Analisar o discriminante da função é muito útil para determinar o número de zeros da função quadrática.

Tópico 6: Forma canônica da função quadrática

A forma canônica da função quadrática é uma maneira de escrever esta função que pode ser obtida através de algumas operações algébricas.

Assim, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right]$, somando e subtraindo $\frac{b^2}{4a^2}$ temos:

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ, também chamado discriminante do trinômio do segundo grau, temos a forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Esta forma permite um estudo analítico mais detalhado sobre a função. Uma de suas consequências imediatas é a formula para encontrar os **zeros da função** quadrática. Como podemos ver no exemplo a seguir:

Para encontrarmos os zeros da função quadrática precisamos resolver a equação:

$$0 = ax^2 + bx + c$$

Utilizando a forma canônica temos:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Através da forma canônica também podemos encontrar os <u>máximos e mínimos</u> da função.

Tópico 7: Zeros de uma função quadrática

Os zeros de uma função quadrática são os valores de x para os quais a função se anula, isto é, os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Ainda, estes valores representam o valor abcissa do(s) ponto(s) de intersecção do <u>gráfico da função</u> com o eixo X. Para encontrar estes valores de x basta resolvermos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, o que pode ser feito utilizando a fórmula (conhecida como fórmula de báskara) obtida diretamente da <u>forma canônica da função quadrática</u>: $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta \geq 0$ os zeros da função serão: $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Para o caso $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, e portanto a função não admite raízes reais e não intercepta o eixo X. Para o caso $\Delta = 0$, $+\sqrt{\Delta} = -\sqrt{\Delta}$, com isso a função terá uma única raiz e interceptará o eixo X em um único ponto, isto é, será tangente ao eixo X.

Como exemplo a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ se anula para os valores de x tais que $x^2 - 5x + 6 = 0$. Resolvendo a equação temos:

$$x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{5^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3 \text{ e } x'' = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2$$

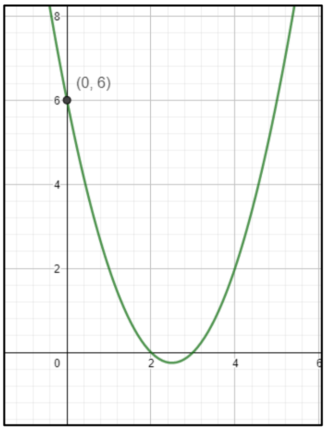
Tópico 8: Interseção com o eixo Y

O ponto de intercessão do gráfico da função quadrática com o eixo y tem coordenadas $(0, f(0))$. Observe que para qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ temos:

$$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c$$

Logo o gráfico de uma função quadrática intercepta o eixo Y exatamente no ponto $(0, c)$. Veja por exemplo a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$, seu gráfico intercepta o eixo Y no ponto (0,6) (Figura 3).

Figura 3 – Interseção da parábola com o eixo Y.



Fonte: O autor

Tópico 9: Vértice da parábola

O vértice da parábola é o ponto do gráfico onde a função inverte seu crescimento, isto é, passa de crescente para decrescente (caso em que é côncava para baixo) ou de decrescente para crescente (caso em que é côncava para cima). Consequentemente no primeiro caso o vértice da parábola será o ponto de máximo da função, no segundo caso será o pondo de mínimo.

Tópico 10: Máximo e mínimo de uma função quadrática

Dizemos que um número y_M é o valor máximo de uma função quadrática se, e somente se, para qualquer valor y pertencente a imagem da função $y_M > y$. O valor x_M pertencente ao domínio da função tal que $y_M = f(x_M)$ é chamado ponto de máximo da função.

De maneira semelhante dizemos que um número y_m é o valor mínimo de uma função se, e somente se, para qualquer valor *y* pertencente a imagem da função $y_m < y$. O valor x_m pertencente ao domínio da função tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado ponto de mínimo da função.

A função quadrática assumirá valor máximo ou mínimo dependendo de sua concavidade, consequentemente, dependendo do sinal do coeficiente *a*. Se $a > 0$ a função assumirá valor mínimo e se, $a < 0$, a função assumirá valor máximo. Em ambos os casos, o valor máximo ou mínimo será dado por $y = \frac{-\Delta}{4a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, e o ponto de máximo ou mínimo será $x = -\frac{b}{2a}$,

Para verificar a informação acima basta observarmos a função na forma canônica

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, $f(x)$ assumirá o valor máximo (mínimo) quando $a < 0$ ($a > 0$) e a diferença $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ for a menor possível, o que ocorrerá quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$ isto é, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Calculando o valor numérico da função para o *x* encontrado obtemos o valor máximo $f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$

Tópico 11: Sinal de uma função quadrática

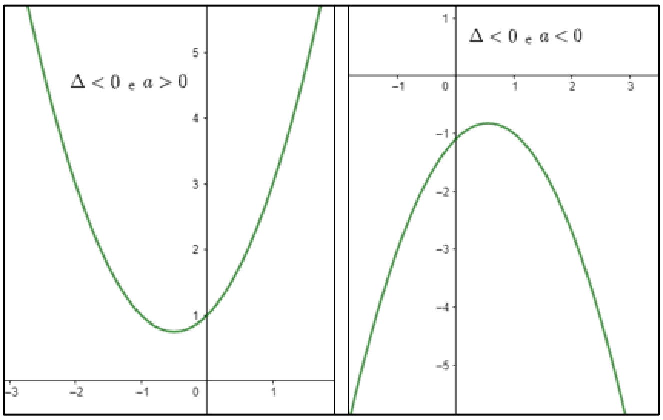
Determinar o sinal de uma função quadrática *f* dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é determinar para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ uma dada função $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume valores positivos, negativos, ou ainda se anula. Esse estudo também é útil para identificarmos a posição do gráfico da função quadrática em relação ao eixo *X*. Isso pode ser feito observando o discriminante da função e o coeficiente *a*.

Assim:

se $\Delta < 0$ e $a > 0$, então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; (figura 4)

se $\Delta < 0$ e $a < 0$, então $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; (figura 4)

Figura 4 – Sinal da função quadrática para $\Delta < 0$

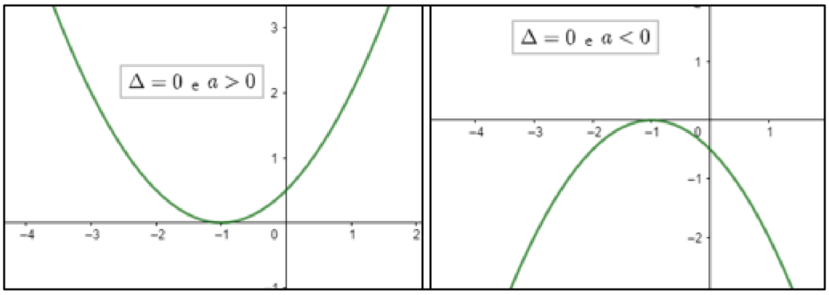


Fonte: O autor

se $\Delta = 0$ e $a > 0$, então $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; (figura 5)

se $\Delta = 0$ e $a < 0$, então $f(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; (figura 5)

Figura 5 – Sinal da função quadrática para $\Delta = 0$

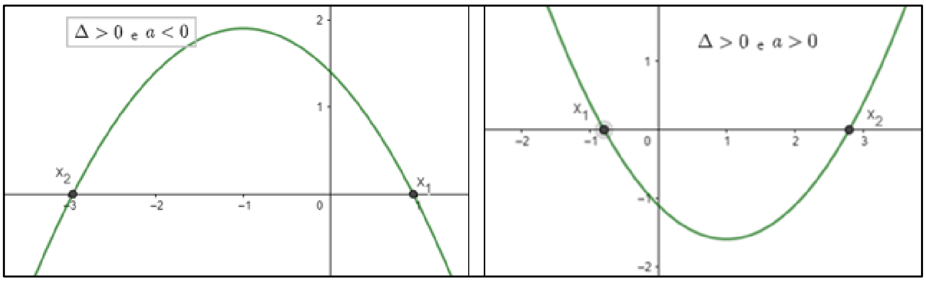


Fonte: O autor

se $\Delta > 0$, $a > 0$, sendo x_1 e x_2 os zeros da função tais que $x_1 < x_2$, então $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$ e, para todo $x \in (x_1, x_2)$ temos que $f(x) \leq 0$; (figura 6)

se $\Delta > 0$ e $a < 0$, sendo x_1 e x_2 os zeros da função tais que $x_1 < x_2$, então $f(x) \leq 0$ para todo $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$ e, para $x \in (x_1, x_2)$, temos que $f(x) \geq 0$. (figura 6)

Figura 6 – Sinal da função quadrática para $\Delta > 0$



Fonte: O autor

Exemplo 3: Tópicos para a Geometria

Desenvolveremos ainda alguns tópicos a respeito de geometria, para os quais foram consultados Dante (2014) e Muniz Neto (2013).

Tópico1: Comprimento de uma circunferência

O comprimento de uma circunferência C é calculado com base no seu raio pela fórmula $C = 2\pi r$. Onde π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. É possível provar que esse quociente é uma constante e seu valor aproximado é 3,1415

Tópico 2: Área do círculo

A área do círculo pode ser calculada através da formula $A = \pi r^2$.

Tópico 3: Volume do cilindro

O volume do cilindro é obtido pela multiplicação da área do círculo que forma a base pela altura do cilindro. Assim, o volume V é dado por $v = \pi r^2 h$.

6 EXEMPLO DE QUESTÕES USANDO A METODOLOGIA PROPOSTA

Neste capítulo são apresentados três exemplos utilizando o roteiro proposto para a criação de questões e dicas. O primeiro exemplo consiste de uma questão que aborda a resolução de sistemas de equações lineares. O segundo aborda máximos e mínimos de uma função quadrática. O terceiro exemplo aborda o volume do cilindro. As duas primeiras questões tiveram como fonte Dante (2014) e a terceira foi extraída de INEP (2006).

A etapa referente à definição de metadados não será aplicada, pois depende exclusivamente do sistema que se destina as questões. A etapa de identificação dos tópicos será feita sublinhando palavras no texto dos problemas e das dicas.

Os exemplos de questões e dicas produzidas, juntamente com os tópicos relacionados a cada questão foram organizados em formato *html* de modo a ser possível visualizar a interação entre os elementos produzidos neste trabalho. Os arquivos podem ser baixados no link https://drive.google.com/file/d/1qeh4kXSLU2Y09Zv6d6h340J1bJV00Yi9/view?usp=sharing. Para executá-los basta descompactar a pasta e executar o arquivo iniciar em um navegador de internet.

6.1 PROBLEMA 1

6.1.1 Selecionar ou criar o problema

A primeira etapa do roteiro proposto é selecionar o problema, para tal, como mencionado no capítulo anterior, seguimos as orientações de Dante (1991) para um bom problema buscando atender suas orientações. A questão que segue trata de resolução de sistemas lineares e foi extraída de Dante (2014). Segue a questão:

As Livrarias A, B, C e D de uma cidade vendem livros de Matemática do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, de uma mesma coleção, com preço comum estabelecido pela editora. Os dados das vendas diárias estão contidos na Tabela 1:

Tabela 1 – Dados do problema

Livraria	Número de livros vendidos				Valor total
	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	recebido
A	2	2	3	2	R$ 563,10
B	2	1	2	4	R$ 566,10
C	0	5	0	0	R$ 304,50
D	3	2	5	1	R$ 687,90

Fonte: (DANTE, 2014, p. 120)

Qual é o preço de venda de cada um dos livros da coleção?

6.1.2 Resolver o problema

A segunda etapa de nosso roteiro e resolver o problema, o que fizemos por meio de escalonamento do sistema. Lembramos mais uma vez, que, a resolução não será fornecida ao usuário, servindo apenas para que possamos conhecer melhor o problema. Segue a resolução:

Representando os preços dos livros de 6º, 7º, 8º e 9º ano por x, y, z e w, respectivamente, podemos representar a situação através do sistema do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z + 2w = 563,10 \\ 2x + y + 2z + 4w = 566,10 \\ 5y = 304,50 \\ 3x + 2y + 5z + w = 687,90 \end{cases}$$

Observe que a terceira equação nos dá que:

$$5y = 304,50$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{304,50}{5}$$
$$\Leftrightarrow y = 60,90$$

Substituindo o valor de y nas outras três equações temos o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3z + 2w = 441,30 \\ 2x + 2z + 4w = 505,20 \\ 3x + 5z + w = 566,10 \end{cases}$$

Para realizar o escalonamento podemos dividir a segunda equação por 2 e inverter sua posição com a primeira.

$$\begin{cases} 1x + 1z + 2w = 252,60 \\ 2x + 3z + 2w = 441,30 \\ 3x + 5z + w = 566,10 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação de duas vezes da primeira equação e subtraindo a terceira equação de três vezes a primeira equação obtemos:

$$\begin{cases} 1x + 1z + 2w = 252,60 \\ z - 2w = -63,90 \\ 2z - 5w = -191,70 \end{cases} \tag{6}$$

Subtraindo a terceira equação de duas vezes a segunda equação temos:

$$\begin{cases} 1x + 1z + 2w = 252,60 \\ z - 2w = -63,90 \\ -w = -63,90 \end{cases}$$

Com isso temos $w = 63,90$. Substituindo este valor na segunda equação obtemos:

$$z - 2 \cdot 63,90 = -63,90$$
$$\Rightarrow z = 63,90$$

Substituindo os valores de z e w na primeira equação temos

$$1x + 63,90 + 2 \cdot 63,90 = 252,60$$
$$\Rightarrow x = 60,90$$

Assim a alternativa correta será: o preço de venda dos livros de 6º ano é R$ 60,90; dos de 7º ano é R$ 60,90; dos de 8º ano é R$63,90; e dos de 9º ano é R$63,90.

6.1.3 Identificar os conteúdos abordados

O conteúdo objeto de estudo deste problema é a **resolução de sistemas de equações lineares**. Alguns conteúdos pré-requisitos são conhecimento em **matrizes e equações**.

6.1.4 Elaboração de dicas

Para este problema prevemos três dicas:

- Identifique as incógnitas e dados do problema e escreva equações para representar a situação de venda de cada uma das livrarias.
- Observe que o preço dos livros é estabelecido pela editora, sendo o preço de cada livro uma incógnita, necessitamos encontrar um conjunto solução que satisfaça todas as equações simultaneamente. Conhece algum problema semelhante?

- Observe que as equações são lineares, assim, encontrar um conjunto solução que satisfaça todas as equações ao mesmo tempo pode ser feito resolvendo o sistema linear formado pelas equações que representam a venda em cada uma das livrarias.

6.1.5 Elaboração de alternativas

A alternativa correta é obtida da resolução do problema é: o preço de venda dos livros de 6º ano é R$ 60,90; dos de 7º ano é R$ 60,90; dos de 8º ano é R$63,90; e dos de 9º ano é R$63,90.

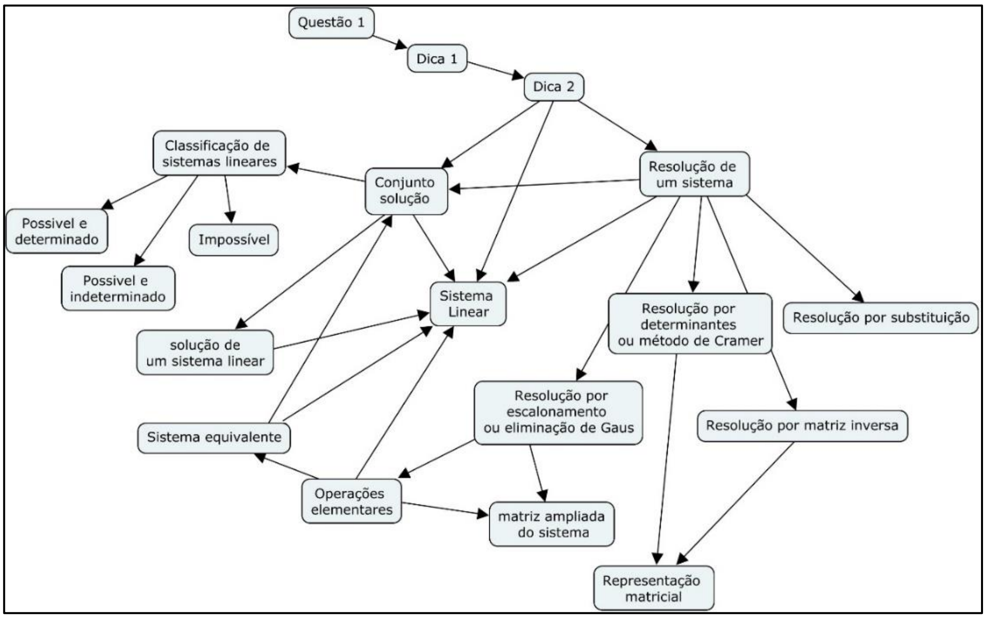
Para elaborar as alternativas incorretas consideraremos três possíveis raciocínios equivocados na resolução. O primeiro seria confundir as incógnitas associando-as ao livro errado, o que poderia gerar a resposta: o preço de venda dos livros de 6º ano é R$ 60,90; dos de 7º ano é R$ 63,90; dos de 8º ano é R$63,90; e dos de 9º ano é R$60,90. Para essa alternativa pode se disponibilizar o seguinte aviso: Alternativa errada, certifique-se se as incógnitas estão coerentes em toda a sua resolução.

É muito comum ocorrerem erros no momento de realizar as operações elementares entre as equações. Introduziremos um erro de sinal em (6), na terceira equação, ficando a equação -$2z-5w=-191,70$ o que levará a resposta final: o preço de venda dos livros de 6º ano é R$ 174,50; dos de 7º ano é R$ 60,90; dos de 8º ano é R$7,10; e dos de 9º ano é R$35,50. Para essa alternativa pode-se disponibilizar o seguinte aviso: Alternativa errada. É possível que tenha cometido um erro de sinal durante a resolução.

Outro raciocínio equivocado que poderia ocorrer é o aluno não compreender bem o problema e considerar que todos os livros tinham o mesmo preço. Neste caso, a resolução do problema recairia sobre a terceira equação que possuía apenas uma incógnita, o que geraria a resposta: o preço de venda dos livros de 6º ano é R$ 60,90; os de 7º ano é R$ 60,90; os de 8º ano é R$60,90; e os de 9º ano é R$60,90. Para essa alternativa poderia ser disponibilizado o seguinte aviso: Alternativa errada, é possível satisfazer todas as situações de vendas com os valores encontrados? É possível que os livros tenham preços diferentes?

Por fim, para ilustrar a forma de interação e acesso aos diversos materiais possíveis através desta questão, apresentamos a seguir um mapa conceitual (Figura 7).

Figura 7 – Mapa conceitual de interação da questão 1



Fonte: O autor

6.2 PROBLEMA 2

6.2.1 Selecionar ou criar o problema

Para o problema dois, iniciamos, novamente, pela primeira etapa do roteiro que é selecionar o problema, para tal, seguimos as orientações de Dante (1991) para um bom problema abordada nos capítulos anteriores. A questão que segue trata aborda máximo e mínimo da função quadrática. Segue a questão:

"Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R$20,00 mais R$2,00 por lugar vago. Qual o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima?" (DANTE, 2014, p. 125).

6.2.2 Resolver o problema

A segunda etapa de nosso roteiro e resolver o problema. Lembramos mais uma vez, que, a resolução não será fornecida ao usuário servindo apenas para que possamos conhecer melhor o problema. Segue a resolução:

A composição do preço do frete pode ser expressa pela função

$$f(x) = x\left[20 + 2(40 - x)\right] = -2x^2 + 100x$$

O ponto de máximo da função ocorre em $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{-4} = 25$. Logo, para que a empresa tenha maior rendimento deverá levar 25 passageiros. A alternativa correta será 25 passageiros.

6.2.3 Identificar os conteúdos abordados

O conteúdo objeto de estudo deste problema é **máximo da função de segundo grau**. Alguns conteúdos pré-requisitos são **conceito de função** e **definição de função de segundo grau**.

6.2.4 Elaboração de dicas

Para este problema, prevemos três dicas:

- Qual é a variável que determina o valor do frete? Como podemos representar o número de acentos vazios? Qual o valor cobrado para cada passageiro?
- Desejamos encontrar para qual número de passageiros a empresa terá o lucro máximo. Conhece algum problema semelhante?
- O preço do frete pode varia de acordo com a função quadrática $f(x) = x\left[20 + 2(40 - \mathrm{x})\right]$. Para encontrar o número de passageiros reescreva a função eliminando os parênteses e colchetes e calcule o ponto de máximo da função.

6.2.5 Elaboração de alternativas

A alternativa correta foi retirada da resolução do problema e é: 25 passageiros.

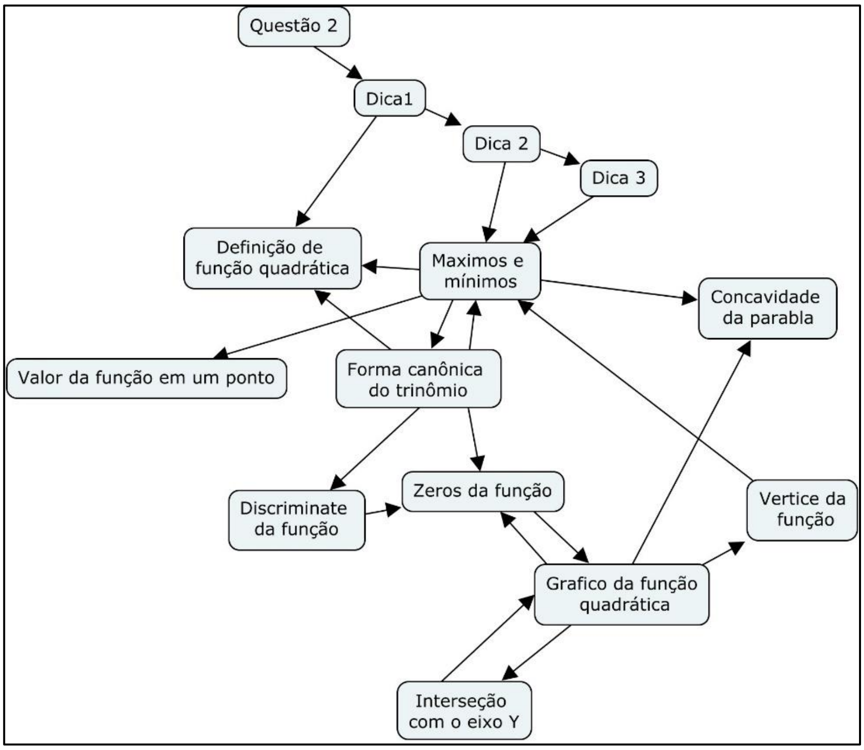
Para elaborar as alternativas incorretas consideraremos três possíveis raciocínios equivocados na resolução. Um possível erro seria, no momento da escrita da função, escolher como variável o número de acentos vazios. Com isso a função atingiria o máximo em x=15, seria ainda necessário calcular a diferença entre o total de lugares no ônibus e o número de acentos vazios para se obter o número de passageiros. Considerando que se tenha feito esta última etapa, uma alternativa errada poderia ser 15 passageiros. Ao selecionar essa alternativa poderia ser disponibilizado o aviso: Alternativa errada, verifique a escolha de sua incógnita.

Outro erro poderia ser calcular a rentabilidade máxima da empresa ao invés de calcular para qual número de passageiros isso ocorre. Este erro nos dá a alternativa com o valor 1250. Para essa alternativa poderia ser disponibilizado o aviso Alternativa errada, releia a pergunta do problema e verifique se é esta mesmo a resposta.

O terceiro erro vamos considerar que o usuário não tenha compreendido o problema e não tenha percebido que a partir de certo número de passageiros a rentabilidade passa a diminuir, com isso consideraria que a maior rentabilidade da empresa ocorreria se o ônibus tivesse totalmente lotado. Essa alternativa seria 40 passageiros. Para essa alternativa poderia ser disponibilizado o aviso: Alternativa errada, observe que o valor a ser cobrado de cada passageiro aumenta R$ 2,00 para cada lugar vazio. Experimente verificar a arrecadação da empresa para 20 passageiros, e para 40 passageiros.

Por fim, para ilustrar a forma de interação e acesso aos diversos materiais possíveis através desta questão, apresentamos a seguir um mapa conceitual (Figura 8)

Figura 8 – Mapa conceitual de interação da questão 2



Fonte: O autor

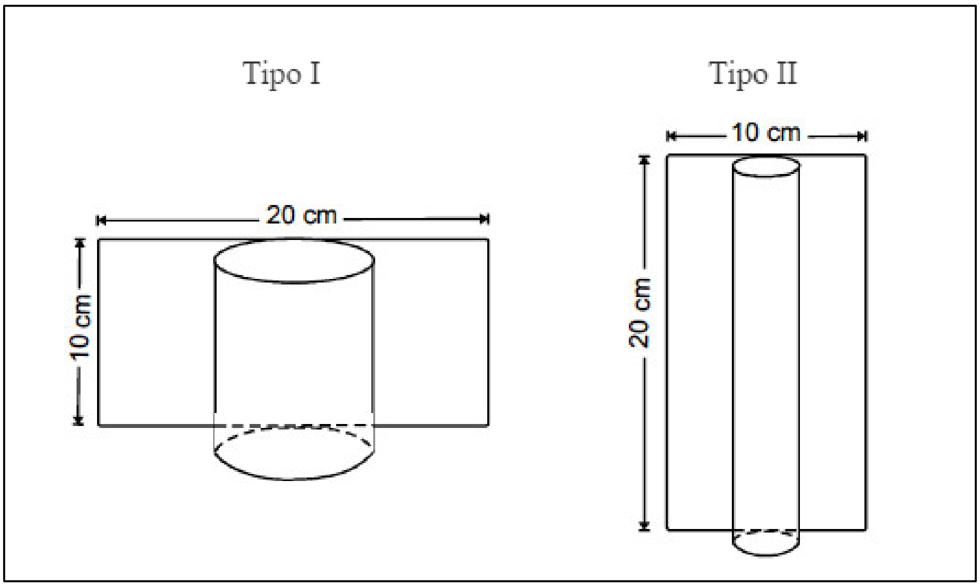
6.3 PROBLEMA 3

6.3.1 Selecionar ou criar o problema

Para a terceira questão, novamente, seguindo o proposto em nosso roteiro, selecionamos a questão seguindo as orientações de Dante (1991). A questão foi extraída de INEP (2006). Segue a questão:

Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm x 10 cm, conforme ilustra a figura 9. Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.

Figura 9 – Dimensões dos moldes das velas



Fonte: (INEP, 2006, p. 17)

Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será:

6.3.2 Resolver o problema

Sejam V_1 e V_2 os volumes de parafina empregados nos moldes 1 e 2, respectivamente. Como o custo das velas é proporcional ao volume de parafina empregado na sua produção, temos que a relação entre o custo da vela I e II pode ser dada por

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 h_1}{\pi r_2^2 h_2} \tag{7}$$

onde r_1 e r_2 são os raios da base do cilindro correspondente as velas I e II, respectivamente e h_1 e h_2 são as alturas dos cilindros correspondente as velas I e II respectivamente.

As alturas são obtidas imediatamente das alturas dos moldes, sendo $h_1 = 10$ e $h_2 = 20$. A partir da outra medida do molde podemos obter os valores dos raios, assim $r_1 = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$ e $r_2 = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$. Substituindo esses valores em (7) temos:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi\left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 10}{\pi\left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \cdot 20} = \frac{\frac{100}{\pi}\cdot 10}{\frac{25}{\pi}\cdot 20} = \frac{\frac{1000}{\pi}}{\frac{500}{\pi}} = 2$$

Assim o custo da vela I será o dobro da vela II.

6.3.3 Identificar os conteúdos abordados

O conteúdo objeto de estudo deste problema é **volume do cilindro**. Alguns conteúdos pré-requisitos são **área do círculo** e **comprimento da circunferência**.

6.3.4 Elaboração de dicas

Para este problema prevemos três dicas:

- Como o custo das velas é proporcional ao volume da parafina, o problema recai em calcular a proporção entre os volumes dos moldes.
- Os moldes, quando fechados, formam um cilindro. Quais elementos são necessários para calcular o <u>volume de um cilindro</u>? Eles podem ser encontrados a partir das dimensões do cartão?

- Observe que a largura e altura dos cartões correspondem, respectivamente, às medidas de comprimento da circunferência da base e altura dos cilindros que representam os moldes.

6.3.5 Elaboração de alternativas

A alternativa correta foi retirada da resolução do problema, a qual é: o custo da vela I será o dobro da vela II.

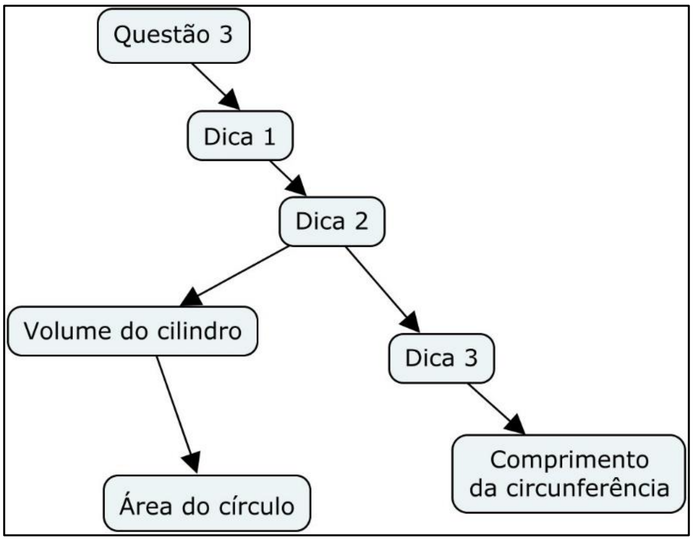
Para elaborar as alternativas incorretas consideraremos três possíveis raciocínios equivocados na resolução. Um possível erro seria considerar que, como os cartões tem a mesma medida, as velas teriam o mesmo volume. Assim, teremos a resposta: o custo da vela I será igual ao da vela II. Para essa alternativa poderia ser disponibilizado o aviso: Alternativa errada, observe que: apesar de o molde de papel ser o mesmo, quando dobrado de formas diferentes produz volumes diferentes.

Outro erro poderia ser calcular a proporção considerando apenas a área da base dos cilindros que representam as velas, sem considerar seus volumes, isto nos daria a resposta que o custo da vela I será o quatro vezes o da vela II. Para essa alternativa poderia ser disponibilizado o aviso: Alternativa errada, não esqueça que a altura interfere no volume do cilindro.

Para o terceiro e último erro vamos considerar que o usuário tenha calculado de maneira invertida a proporção, isto é, o custo da vela II em relação a vela I. Isto geraria a resposta: o custo da vela I será a metade da vela II. Para essa alternativa poderia ser disponibilizado o aviso: Alternativa errada, qual das velas recebeu maior quantidade de parafina?

Por fim, para ilustrar a forma de interação e acesso aos diversos materiais possíveis através desta questão, apresentamos a seguir um mapa conceitual (Figura 10)

Figura 10 – Mapa conceitual de interação da questão 3



Fonte: O autor

A partir destes três exemplos podemos ver que através do roteiro podemos produzir materiais que permitem ao usuário tem acesso a diversos tópicos de acordo com sua necessidade. Assim, o aprendizado ocorre de maneira ubíqua, uma vez que o usuário tem acesso aos conteúdos que necessita, no momento que necessita.

7 CONCLUSÃO

Por meio da pesquisa e estudos realizados durante esse trabalho, foi possível observar que, apesar de existirem diversos recursos tecnológicos e trabalhos envolvendo o uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem da matemática, ainda é possível avançar mais nesta área, em especial ao que se refere à aprendizagem personalizada e sensível ao contexto.

Uma das formas de possibilitar esse avanço é por meio da produção de conteúdo de qualidade e devidamente adaptado às plataformas a que se destinam, o que pode ser feito utilizando-se de metodologias de ensino já existentes.

Ao estudar sobre resolução de problemas, pode-se identificar neste assunto, bases para a criação de um roteiro que possibilita a produção de conteúdo de uma maneira razoavelmente padronizada e que atendem a necessidade de conteúdos de softwares que trabalhem por meio de perguntas e respostas. Embora existam diversos materiais sobre o assunto, pelo fato de idealizarem a relação professor-aluno, realizar a adaptação a um ambiente digital, embora tenha sido uma tarefa difícil, foi possível obter êxito no objetivo principal que era a produção do roteiro para a criação dos materiais.

A resolução de problemas como metodologia de ensino possui três formas diferentes de abordagem (ensinar sobre resolução de problemas; ensinar matemática para resolver problemas; e ensinar matemática através da resolução de problema). Embora no início julgou-se necessário observar qual destas abordagens seria considerada para a produção dos materiais, pode se perceber que ao menos duas destas podem ocorrer em um mesmo problema. A segunda abordagem ocorre sempre que o usuário já tem conhecimento sobre o conteúdo abordado pelo problema. A terceira ocorre sempre que o usuário não conhece o conteúdo abordado pelo problema, sendo que a formalização do conteúdo ocorre por meio do acesso aos tópicos. A primeira abordagem, aprender sobre resolução de problemas, também pode eventualmente ocorrer através da prática do usuário.

Pode-se perceber também, em especial no capítulo 3, que para se estabelecer um roteiro para a produção de conteúdo, ou mesmo produzí-los, é necessário delimitar características de *software*, o que foi feito ao tomar como base as características do aplicativo SUAV, que ainda está em desenvolvimento.

A elaboração do presente roteiro permitiu aprofundar os conhecimentos a respeito do uso de tecnologias na educação e de resoluções de problemas. Também desenvolver uma forma de ensinar matemática integrando estas duas metodologias de ensino, associando os conceitos de Polya (1995) aos recursos modernos.

Os exemplos apresentados no corpo deste trabalho serviram para exemplificar a aplicação do roteiro. No entanto, para trabalhos futuros, pode-se produzir mais conteúdos inserindo-os no aplicativo SUAV, ou mesmo produzindo um aplicativo de funcionamento semelhante realizando, para posteriormente, realizar a experimentação com o público usuário e avaliação do impacto causado pelo roteiro.

8 REFERÊNCIAS

AGRELA, L. Brasileiros estão cada vez mais viciados no celular. **Exame.com**. [S,l] 30 de mai. de 2017. Disponível em: <https://saude.abril.com.br/mente-saudavel/brasileiros-estao-cada-vez-mais-viciados-no-celular/>. Acesso em: 31 de jul. de 2018.

BERTOLUSSI, H. J. O uso do software gratuito GeoGebra no ensino e na aprendizagem de estatística e probabilidade. **Vidya.** Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 429-440, jul./dez. de 2016. Disponível em: < https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1804/1749> Acesso em: 15 de abr. de 2019

BOLDRINI, J. L.; et al. **Álgebra linear.** 3ª ed. São Pulo: Harper & Row do Brasil, 1980, 411 p.

BENITTI, F. B. V., SEARA, E. F. R., SCHLINDWEIN, L. M. Processo de Desenvolvimento de Software Educacional: Proposta e Experimentação. **Revista Novas Tecnologias na Educação – CINTED UFRGS** v. 3, n. 1, Maio, 2005.

BRASIL. **Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (PCN + ensino médio)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação, Brasília, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso EM: 10 de jan. 2019

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio (PCNEM)**. Ministério da Educação, Brasília, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso EM: 10 de jan. 2019

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Segunda versão. Brasília: MEC. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 15 out. 2017.

CAMPOS, A. C. Número de pessoas que têm celular aumenta 147% em dez anos, diz IBGE. **EBC,** Rio de Janeiro, 22 de dez.de 2016. Disponível em: < http://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2016-12/numero-de-pessoas-que-tem-celular-aumenta-147-em-dez-anos-diz-ibge>. Acesso em: 20 de jul. de 2018.

DANTAS, S. C.; MATHIAS, C.V. Formas de revolução e cálculo de volume. **Ciência e Natura.** [S.l.], v.39, n.1, p. 142 – 155, jan./abr., 2017. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=467549116016 > Acesso em: 15 de abril de 2019

DANTE, L. R. **Matemática:** Contexto e aplicação. 2 ed. São Paulo: Atica, 2013. 3v.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas**. 2 ed. São Pulo. 1991. 176 p.

DUB SOLUÇÕES. **Estatísticas de uso de aplicativos no Brasil.** [S.l] 15 de mai. de 2017, Disponível em: <https://www.dubsolucoes.com/single-post/estatisticas-de-uso-de-aplicativos-no-Brasil>. Acesso em: 16 de jul. de 2019.

GOMES, H. S. Brasil tem 116 milhões de pessoas conectadas à internet, diz IBGE. **G1.** [S.l] 21 de fev.de 2018. Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/tecnologia/noticia/brasil-tem-116-milhoes-de-pessoas-conectadas-a-internet-diz-ibge.ghtml>. Acesso em 20 de jul. de 2018.

GOMES, H. S. Nº de casas com computador cai pela 1ª vez no Brasil, diz IBGE. **G1,** São Paulo, 25 de nov. de 2016. Disponível em: <http://g1.globo.com/tecnologia/noticia/2016/11/n-de-casas-com-computador-cai-pela-1-vez-no-brasil-diz-ibge.html> Acesso em 20 de jul. de 2018.

HEFEZ, A.; FERNANDES, C. de S. **Introdução à álgebra linear.** 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016, 271 p.

IEZZI, G.; et al. **Fundamentos da matemática elementar 1:**Conjuntos e funções. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1977, 316p.

INEP - INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (Ministério da Educação). **Exame Nacional do Ensino Médio**: Prova 1 amarela. 2006, Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2006/2006_amarela.pdf>. Acessado em 24 dez. 2018.

INEP - INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (Ministério da Educação). **Guia de elaboração e revisão de itens.** Brasilia-DF, 2010.

JESUS, V. R. **A utilização do software GeoGebra no estudo dos pontos notáveis do triângulo.** 2018. 92 p. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal da Bahia, UFBA, 2018.

LEONARDI, A. C. Os Livros de Resistem – e ainda são lidos duas vezes mais que e-books. **Super Interessante.** [S.l] 06 de set. de 2016. Disponível em: < https://super.abril.com.br/comportamento/os-livros-de-papel-resistem-e-ainda-sao-duas-vezes-mais-lidos-que-e-books/>. Acesso em 15 de abr. de 2019.

LIMA, E. **Números e funções reais.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013, 297 p.

LIMA, M. Brasil já tem mais de um smartphone ativo por habitante, diz estudo da FGV. **O Estado de S. Paulo.** São Paulo 19 de abr. de 2018. Disponível em: < https://link.estadao.com.br/noticias/geral,brasil-ja-tem-mais-de-um-smartphone-ativo-por-habitante-diz-estudo-da-fgv,70002275238>. Acesso em 20 de jul. de 2018.

LIMA, M. R.; MATHIAS, C. V. Atividades utilizando o software Geogebra: uma alternativa para o ensino da unidade radiano. **Cient. Schola.** Santa Maria – RS, v. 1 n. 1. P. 30-51. Disponível em: < http://www.cmsm.eb.mil.br/images/CMSM/revista_schola_2017/artigos/5.%20Atividades%20utilizando%20o%20software%20Geogebra%20uma%20alternativa%20para%20o%20ensino%20da%20unidade%20radiano.pdf> Acesso em: 15 de abr. de 2019.

LOPES, M. M. **Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra**. Boletim de Educação Matemática vol. 27, núm. 46, agosto, 2013, pp. 631-644. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil. Disponível em: Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291229373019 Acesso em 30 de ago. de 2018.

LORENCI, F. F.; **SUAV (Sistema Ubíquo De Aprendizagem Vertical):** Um Aplicativo para o Ensino Personalizado de Matemática. 2018, 44 p. Trabalho de conclusão de Curso (Graduação em Matemática Licenciatura) – Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), RS, 2018.

LORENCI, F. F.; MATHIAS, C. V.; BURIOL, T. M. SUAV – Sistema Ubíquo de Aprendizagem Vertical. **Revista Novas Tecnologias na Educação – CINTED UFRGS** v. 15, n.2, dezembro, 2017. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/79275>. Acesso em: 12 de out. de 2018.

LOUREIRO, A. A. F.; et al. Computação Ubíqua Ciente de Contexto: Desafios e Tendências. 27O SIMPÓSIO BRASILEIRO DE REDES DE COMPUTADORES E SISTEMAS DISTRIBUÍDOS - Livro Texto dos Minicursos. p.99 149, 2009.

MALON, J. **Cálculo no Ensino Médio**: Uma Abordagem Possível e Necessária com o Auxílio do Software GeoGebra. 2013. 195 p. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013.

MARÇAL, E.; et al., "Da elicitação de requisitos ao desenvolvimento de aplicações de mobile learning em matemática", **Anais**... XXI Simpósio Brasileiro de Informática na Educação – SBIE, João Pessoa, 2010.

MARMOR, B. "O livro físico deixou de ser o único embaixador da literatura" José Fernando Tavares discute o e-book em palestra na UFSM. **Arco Jornalismo Cientifico e Cultural**, Santa Maria 27 de out. de 2016. Disponível em: <http://coral.ufsm.br/arco/Digital/Noticia.php?Id_Noticia=383>. Acesso em: 31 de jul. de 2018.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 1º ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013, 471 p.

NETO, G. dos S. **Proposta de Ensino para o estudo de Gráficos de Funções através do software KmPlot.** 2017. 75 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Amapá. Macapá – AP. 2017.

NUNES, F. B.; **UVLEQoC: A Ubiquitous Virtual Learning Environment with Quality of Context**. 2014. 173 p. Dissertação (mestrado – Pós-Graduação em informática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria 2014.

OLIVEIRA, J. M. V. **Criação de aplicativo para dispositivos móveis e sua utilização como recurso didático em aulas de geometria analítica**. 2016. 108 p. Dissertação (Mestrado Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, RJ. 2016

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO. N. S. G., **Pesquisa em Resolução de Problemas:** caminhos, avanços e novas perspectivas. Boletim de Educação Matemática, [S.l] vol. 25, núm. 41, pp. 73-98, dez 2011. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223514005> Acesso em: 07/10/2018

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218.

PARISE, D.; et al. U-Learing – O futuro do EAD? In: 3º SEMINÁ-RIO NACIONAL DE INCLUSÃO DIGITAL, 3., 2014, Passo Fundo, **Anais**... Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2014. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/261871769_U-Learning_-_O_futuro_do_EAD>. Acesso em 15 de nov. 2018.

PASSOS, M. C. de A.; CAMARÁ, W.. U-learning: integração de técnicas de ensino-aprendizagem para o alcance da aprendizagem significativa. **SIED:EnPED:2016:** Formação, Tecnologias e Cultura Digital. São Carlos – SP, 2016. Disponível em: <http://www.sied-enped2016.ead.ufscar.br/ojs/index.php/2016/article/view/1050>. Acesso em 24 de jan. 2019.

PIRES, L. F. R.; ESCHER, Marco Antônio. Listas de cálculo: alterações provocadas pelos dispositivos móveis. [S.l]. **Revista de Educação, Ciências e Matemática** v.6 n.2 mai/ago 2016. Disponível em: <http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/4043> Acesso em: 10 de set de 2018.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do modelo matemático. 2. Ed. Rio de Janeiro: Interciência. 1995. 196 p.

SANTOS, G. L. Alguns princípios para situações de engenharia de softwares educativos. **Inter-ação**, Goiás, v. 34, n. 1, 2009. Disponível em: http://www.revistas.ufg.br/index.php/interacao/article/view/6540/4801. Acesso em: 06 set. 2010.

SANTOS, R. A. **A Heurística de George Polya e a Resolução de Problemas:** Uma Aplicação em Sala de Aula. 2018. 146p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Faculdade de Ciência Exatas e Tecnológicas, Campus de Sinop, Universidade do Estado do Mato Grosso. Mato Grosso, 2018

SONEGO, A. H. S; BEHAR, P. A. M-Learning: Reflexões e Perspectivas com o uso de aplicativos educacionais. **XX Congresso Internacional de Informática Educativa (TISE)**, Santiago, 2015. v.11. p.521-526. Disponível em: <http://www.tise.cl/volumen11/TISE2015/521-526.pdf>. Acesso em: 24 de jan. 2019.

SOUSA, V. M. de. **Cálculo de áreas:** uma abordagem através do GeoGebra no ensino médio. 2018. 68 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, MA, 2018.

TODOS PELA EDUCAÇÃO. **Indicadores da Educação**. Disponível em: < http://www.todospelaeducacao.org.br/indicadores-da-educacao/5-metas?task=indicador_educacao&id_indicador=15#filtros>. Acessado em 27 de jun. de 2018.

TORMA, L. da S.. **Funções trigonométricas no ensino médio:** construindo uma paisagem utilizando o software Graphmatica**.** 2018. 133 p. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-graduação em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG. Rio Grande/RS, 2018.

UNESCO, **O futuro da aprendizagem móvel**: implicações para planejadores e gestores de políticas. 64 p. Brasília: UNESCO, 2014. Disponível em: <unesdoc.unesco.org/images/0022/002280/228074POR.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2016.