



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Numericamente Igual a π

Túlio Guimarães Marques

Goiânia

2013

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

| | | | | | |
|--|---|--------|------------------------------|-------|--------------------|
| Autor (a): | TÚLIO GUIMARÃES MARQUES | | | | |
| E-mail: | tuliogm@gmail.com | | | | |
| Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? | <input checked="" type="checkbox"/> Sim | | <input type="checkbox"/> Não | | |
| Vínculo empregatício do autor | SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO DF | | | | |
| Agência de fomento: | | Sigla: | SEDF | | |
| País: | BRASIL | UF: | DF | CNPJ: | 00.394.676/0001-07 |
| Título: | NUMERICAMENTE IGUAL A π | | | | |
| Palavras-chave: | Número pi, Racionalidade ou Irracionalidade do Número pi, Quadratura do Círculo | | | | |
| Título em outra língua: | Numerically equal to π | | | | |
| Palavras-chave em outra língua: | The number pi, The quadrature of the circle, The rationality or the irrationality of the number pi. | | | | |
| Área de concentração: | MATEMÁTICA | | | | |
| Data defesa: | 01/03/2013 | | | | |
| Programa de Pós-Graduação: | | | | | |
| Orientador (a): | Durval José Tonon | | | | |
| E-mail: | djtonon@mat.ufg.br | | | | |
| Co-orientador(a):* | | | | | |
| E-mail: | | | | | |

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Data: 01 / 05 / 2013

Assinatura do (a) autor (a)

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Túlio Guimarães Marques

Numericamente Igual a π

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Durval José Tonon - IME/UFG

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

M357n Marques, Túlio Guimarães.
Numericamente igual a π [manuscrito] / Túlio
Guimarães Marques. - 2013.
77 f. : il.

Orientador: Prof. Durval José Tonon.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal
de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Número pi. 2. Quadratura do círculo. I. Título.

CDU: 514.112.6

Túlio Guimarães Marques

Numericamente igual a Pi

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 01 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Durval José Tonnon
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Profa. Dra. Maria Socorro Duarte da Silva Couto
IFG/Inhumas



Prof. Dr. Luis Rodrigo Fernandes Baumann
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

“Dedico este trabalho à minha esposa, aos meus pais, aos meus filhos e a todos que contribuem para uma educação de qualidade”.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os meus professores que auxiliaram na minha formação e me ensinaram o valor do conhecimento. Ao professor Durval que me orientou com sabedoria e critério. À todos os meus colegas de curso, em especial às minhas amigas Viviane e Amanda, pelos mais de *35.000 km (quase uma volta na Terra)* de companheirismo e incentivo. No trabalho tem o Marques, Ismael, George e a Neyse que compreenderam algumas ausências. Aos meus amigos Lopes, Borges e Felipe7cordas que ainda não cortaram a minha carteirinha da tradição. Obrigado aos professores Medeiros, Betão e Sharlene pela paciência, colaboração e disponibilidade. À minha cunhada Juliana que me acolheu em Goiânia como a um irmão. À CAPES pelo suporte financeiro. Aos meus pais, Sr. Eurípedes e Dona Vera, origem de tudo, pela educação e oportunidades que me deram, acho que vocês realizaram um dos seus sonhos, acredito ser um homem de bem. Aos meus filhos Samuel e Helena razão maior da minha vida. Agradeço à Cris, minha esposa, pela confiança, certeza, apoio e orações. Cris, eu te amo. Por fim, agradeço a Deus que tornou real todas as nossas preces.

RESUMO

O trabalho a seguir apresenta a ciência por trás do número mais intrigante da história, o número π . Ele tem desafiado gerações de pesquisadores a determinar o seu valor e articular as várias áreas da matemática, como a Geometria, a Álgebra e a Análise. O quociente da razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro define π . Algumas referências históricas, entre eles, Arquimedes, Euler, Leibniz e Lindemann, contribuíram significativamente nos métodos para precisar π . A primeira abordagem realmente acadêmica dessa razão foi estudada pelo maior matemático da antiguidade, Arquimedes, quando ele criou um processo instrutivo no estudo dos limites. Com o insolúvel problema da quadratura do círculo, surgem construções geométricas engenhosas na tentativa de desenhar, com régua e compasso, um quadrado de mesma área de um círculo dado. A evolução das formas utilizadas para o cálculo do π tornou-se mais evidente com a introdução da Análise aplicada nos fundamentos do Cálculo. Neste momento, surgem as Séries, ferramentas indispensáveis para estudar o comportamento de suas casas decimais. Com os avanços obtidos por estas, as investigações voltaram-se para classificação quanto a racionalidade ou irracionalidade do número π . Inicialmente a irracionalidade foi provada e mais tarde sua transcendência. Por fim, são apresentadas algumas contextualizações e propostas de exercícios com a tentativa de estimular a busca por conhecimento.

Palavras-chave

Número π , Racionalidade ou Irracionalidade do Número π , Quadratura do Círculo, Histórico do número π .

ABSTRACT

This paper aims at introducing the science which is behind the most intriguing number known to history, the number π . It has challenged generations of researchers who have tried to determine its value and articulate several areas of Mathematics such as Geometry, Algebra and Analysis. The quotient of ratio between the measure of the length of a circumference and the measure of its diameter are what define π . Some historical references such as Archimedes, Euler, Leibniz and Lindemann have significantly contributed with the methods to precise π . The first real academic approach to this ratio was studied by the greatest mathematician of antiquity, Archimedes, when he created an instructive process for the study of the limits. With the unsolvable problem of the quadrature of the circle, ingenious geometrical constructions are born, in order to allow the drawing, with a ruler and compass, of a square having the same area as a previous given circle. The evolution of the forms employed in order to calculate π have become more evident with the introduction of Analysis applied under the foundations of Calculus. At that time, the Series come to life, indispensable tools allowing the study of the behaviour of its decimal places. Along with the advances brought by them, the investigations turned towards the classification concerning the rationality or the irrationality of the π number. In the end, we will present some contextualization and propose exercises with the aim of stimulating the search for knowledge.

Keywords

The number π , The quadrature of the circle, The rationality or the irrationality of the π number, history of the number π .

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 15 |
| 2 | Histórico | 17 |
| 3 | Aproximar π por Construção Geométrica | 28 |
| 3.1 | Primeiro Cálculo de π | 28 |
| 3.2 | Retificação de uma Circunferência | 31 |
| 3.2.1 | Processo de Specht | 31 |
| 3.2.2 | Processo de Kochausky | 32 |
| 3.3 | As Construções de Ramanujan | 34 |
| 3.3.1 | Construção 1 | 34 |
| 3.3.2 | Construção 2 | 36 |
| 4 | Séries | 39 |
| 4.1 | Série Numérica | 39 |
| 4.1.1 | Definição de uma Série Numérica | 39 |
| 4.1.2 | Propriedades das Séries | 40 |
| 4.1.3 | O Problema da Basiléia | 47 |
| 4.2 | Critério de Convergência para Série Alternada | 49 |
| 4.2.1 | Critério de convergência para série alternada | 49 |
| 4.2.2 | Uma Condição Necessária para que uma Série Seja Convergente. | 52 |
| 4.2.3 | Critério do Termo Geral para Divergência | 52 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.3 | Critérios de Convergência e Divergência para Séries de Termos Positivos | 53 |
| 4.3.1 | Critério da Integral | 53 |
| 4.3.2 | Critério de Comparação | 53 |
| 4.3.3 | Critério do Limite | 54 |
| 4.3.4 | Critério de Comparação de Razões | 54 |
| 4.3.5 | Critérios da Razão | 54 |
| 4.3.6 | Critérios da Raiz | 55 |
| 5 | Irracionalidade de π | 58 |
| 5.1 | Demonstração da Irracionalidade de π | 58 |
| 6 | Aplicações do Número π | 63 |
| 6.1 | Área do Paralelogramo | 63 |
| 6.2 | A Agulha de Buffon | 64 |
| 6.3 | Séries - Apresentar Convergência de Séries na Planilha do Excel | 67 |
| 6.4 | Crop Circle (Cultura de Círculos) | 69 |
| 7 | Sugestão de Aula | 72 |
| 8 | Conclusão | 74 |
| | Bibliografia | 76 |

Lista de Figuras

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Arquimedes ilustrado na pintura de Domenico Fetti (1620) | 20 |
| 2 | Recordes de Aproximações para o Número π | 27 |
| 3 | Círculo inscrito no hexágono regular | 29 |
| 4 | Lados dos polígonos regulares de n e $2n$ lados inscritos numa mesma circunferência | 30 |
| 5 | Processo de Specht | 32 |
| 6 | Processo de Kochausky | 33 |
| 7 | \overline{BX} é o lado de um quadrado que tem área próxima do círculo de centro O | 35 |
| 8 | Construção dos segmentos OS e OB | 37 |
| 9 | XY é igual a média geométrica entre os segmentos OS e OB | 37 |
| 10 | $\alpha > 1$ temos $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ é convergente | 42 |
| 11 | $\alpha \leq 1$ temos $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$ | 43 |
| 12 | Recorte do paralelogramo para determinar sua área | 63 |
| 13 | Área do Paralelogramo equivalente a do círculo | 64 |
| 14 | Agulhas interceptando ou não retas paralelas | 65 |
| 15 | Ângulo θ entre a agulha e as retas paralelas | 65 |
| 16 | $x \leq \frac{L}{2} \text{sen}\theta$ | 66 |
| 17 | Aproximações para π pelo método experimental | 67 |
| 18 | Planilha 1 - Convergência por Arquimedes | 68 |
| 19 | Planilha 2 - Convergência por Euler | 69 |
| 20 | Barbury Castle Crop Circle | 70 |

21 As dez primeiras casas decimais do π 71

1 Introdução

A história do pensamento nos revela a existência de várias questões fundamentais que determinaram o caminho da humanidade. Algumas surgiram do pensamento especulativo e mantiveram sua identidade ao longo dos séculos. O tempo e o estudo são os fatores determinantes e capazes de aumentar a precisão e a verdade. A impossibilidade de um problema está longe de ser uma mera negação, de modo que os verdadeiros motivos da impossibilidade estabelecem um caráter definitivo e pleno, o que é raro na história da ciência. Assim nasce e cresce o número π .

A razão definida como o número de vezes em que a parte completa o todo é o pilar para a criação do número π , assim se define π , como a razão entre o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro. Aproximações foram criadas, três inteiros e mais um pouco. A partir deste momento, deu-se início à busca pelo pouco. Tendo em vista o sentido platônico de racionalidade - a ideia fundamentada, pesquisar o “pouco” é construção de conhecimento.

Um paralelo entre a imprecisão do número π e a história da matemática apresenta uma proporcionalidade direta entre as casas decimais do π e o progresso da matemática. Nomes como Arquimedes, Newton e Euler tiveram papel fundamental para que o número π fosse tão significativo.

O trabalho que se segue vai relatar os caminhos traçados para determinação do número π . Para isso, essa busca foi dividida em duas áreas da matemática, a geométrica e a analítica.

O valor de π como a razão entre duas medidas lineares foi sustentado pela geometria durante séculos. A imagem está incluída, dentre outros, em conteúdos fundamentais como trigonometria e o cálculo de áreas e volumes. Na história, foi Arquimedes quem determinou um primeiro intervalo confiável para π , relacionando a medida dos lados de um polígono regular de n lados e outro, também

regular, de $2n$ lados, ambos inscritos numa mesma circunferência.

A quadratura do círculo, esquecida nos livros de ensino médio e fundamental, tem papel essencial na investigação da racionalidade do número π . A descrição de algumas dessas engenhosas construções e suas relações algébricas estão presentes na pesquisa.

Foi no século *XVII* que as formas geométricas mais antigas de investigação deram lugar a um processo analítico, em que a relação funcional, aplicada às funções trigonométricas, tornou-se proeminente. Os novos métodos de representação sistemática deram origem a fórmulas capazes de obter aproximações numéricas para π com um maior número de casas decimais. Esses processos analíticos incluem a convergência de séries e de frações contínuas. Posteriormente, os estudos se voltaram a natureza do número π . A irracionalidade foi demonstrada seguida pela prova de sua transcendência, ou seja, π pertence a um conjunto de números aos quais não são raízes de nenhuma equação polinomial de coeficientes racionais.

Com o suporte da atual tecnologia e das ferramentas criadas por aqueles que nos antecederam, podemos associar a precisão do passado com a velocidade do presente. Por fim, mostraremos algumas aplicações do número π e apresentaremos a convergência de séries numéricas, por meio de ferramentas computacionais, com o objetivo de determinar uma fração significativa do π .

Uma aula que apresente o número π deve conter algumas precauções para que ele não se torne uma simples aproximação. Nesta estão incluídos: o cuidado na definição de razão, o histórico por trás de uma constante, as associações geométricas e analíticas, o uso de ferramentas computacionais para ilustrar os princípios do cálculo, a convergência de séries e a sua presença no conjunto dos números irracionais.

2 Histórico

Muito antes da invenção da roda, o homem aprendeu a identificar a forma peculiar e regular do círculo. Ele observou o formato de alguns elementos da natureza como o Sol e a Lua, em algumas flores, no movimento da água, nas formas do corpo, nas secções de árvores e a forma simétrica e infinita em um simples desenho circular na areia. Associado à forma os homens começaram a entender o conceito de grandeza, havia grandes círculos e círculos pequenos, árvores altas e árvores baixas, pedras pesadas e pedras leves.

Para Posamentier [18], a transição de tais declarações qualitativas para medição quantitativa foi o berço da matemática. O próximo passo era descobrir as relações entre grandezas diferentes. Pedras maiores são mais pesadas, árvores mais altas são mais antigas, correr mais rápido percorre distâncias maiores (em um intervalo de tempo definido), campos maiores geram colheitas maiores. E mais uma vez, esta linha de raciocínio qualitativo deve ter sido seguida por considerações quantitativas. Se o volume de uma pedra é dobrado; o peso é dobrado, se você correr duas vezes mais rápido, você percorre o dobro da distância, se você triplicar a área de plantio, triplicará a colheita; se você dobrar o diâmetro de um círculo, obterá o dobro da sua circunferência. Esta relação linear nem sempre vai funcionar, ou seja, uma pessoa que possui o dobro da idade de outra não possui necessariamente o dobro se sua altura, ao dobrar o diâmetro de um círculo não obteremos um novo círculo com dobro de sua área. É certo que os homens aprenderam a reconhecer, consciente ou inconscientemente - pela experiência, instinto, raciocínio - o conceito de proporcionalidade.

A proporcionalidade se apresenta de forma simples, por exemplo, para dizer que um campo irá alimentar metade da tribo, dois campos terão capacidade de alimentar toda a tribo e três campos

irão alimentar uma tribo e meia. Mas em algum lugar ao longo da linha, alguns indivíduos curiosos e inteligentes devem ter visto algo em comum no comportamento dessas grandezas e concluíram: não importa como as duas quantidades variam, sua razão permanece constante.

Esta razão constante, não foi obtida por divisão numérica (e certamente não através da utilização de algarismos decimais), mais provavelmente, a relação foi expressa geometricamente. Para a geometria foi o primeiro progresso substancial. A partir daqui, deu-se início a busca pelo quociente da razão comprimento da circunferência pelo seu diâmetro, gerando o número π .

De acordo com Posamentier [18], cerca de 2000 anos a.C. notou-se que o número de vezes em que o diâmetro está contido na circunferência é sempre o mesmo, independente do tamanho da circunferência. Os Babilônios observaram que o valor de π se situa entre $\frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7}$, em decimais, equivale a $3,125 < \pi < 3,142$.

Segundo Lima [13], consta em um trecho Antigo Testamento (Primeiro Livro dos Reis, VII:23):

“Fez mais o mar de fundição, de dez côvados de uma borda até à outra borda, perfeitamente redondo, e de cinco côvados de alto; e um cordão de trinta côvados o cingia em redor”.

Neste trecho o Antigo Testamento, que foi escrito cerca de 500 a.C., (embora baseado em tradições judaicas bem mais antigas) propõe um valor para π igual a 3.

Por séculos aconteceram debates sobre esse versículo. Segundo Tsaban [20], a maioria dos matemáticos e cientistas negligenciaram uma aproximação muito mais precisa para π que se encontra no fundo da interpretação matemática da língua hebraica. Em hebraico, cada letra corresponde a um determinado número, e o valor numérico associado a uma palavra é igual à soma de suas letras. Curiosamente, no primeiro livro do Reis VII:23, a palavra “linha” está escrito Kuf Vov Heh, mas o

Heh não precisa estar lá, e não é pronunciado. Considerando Heh, a palavra tem um valor de 111, mas sem ele, o valor é 106. (Kuf = 100, Vov = 6, Heh = 5). Considerando essa tradução obtemos a fração $\frac{111}{106}$ ou seja, $\frac{\pi}{3} = \frac{111}{106}$ o que implica em $\pi = 3,14150943\dots$. Este número é muito mais preciso do que qualquer outro valor que havia sido calculado até esse ponto, e que detém o recorde para o maior número de dígitos corretos por várias centenas de anos. Infelizmente, esta preciosidade matemática é pouco conhecida.

O período em que a geometria foi a principal ferramenta matemática para o cálculo do número π , vai desde as primeiras estimativas da razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, até o surgimento do Cálculo, em meados do século XVII. O objetivo era encontrar uma expressão racional, através do princípio de exaustão e a determinação de perímetros e áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência.

Em [4], Boyer escreve sobre o famoso Papiro Rhind, escrito por Ahmes, um escriba egípcio, há cerca de 1650 a.C., *“se construir um quadrado com um lado cujo comprimento é de oito nonos do diâmetro do círculo, então a área do quadrado será igual à do círculo”*.

$$\pi.R^2 = \left(\frac{8}{9}.2R\right)^2 \text{ o que implica em } \pi \cong 3,160493827\dots$$

Neste ponto, podemos observar que a razão entre circunferência e diâmetros não era o objetivo principal e sim a de construir um quadrado com a mesma área que a de um círculo dado, utilizando as ferramentas clássicas: régua e compasso. Isto tornou-se um dos problemas mais clássicos da história da matemática, embora hoje sabemos da impossibilidade desta construção, no entanto, este problema fascinou matemáticos por séculos.

No livro [2], Beckmann reescreve Newton, quando este disse: *“Se vi mais longe do que outros, é*

porque eu estava sobre os ombros de gigante”, um dos gigantes que ele deve ter tido em mente era Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C.), um dos matemáticos mais brilhante, além disso físico e engenheiro (vide figura 1, imagem retirada de [6]). Bongiovanni [3] descreve que foi dele o primeiro resultado científico e notável para a estimativa de π usando o método de exaustão, descrito no livro X de Euclides: *“Dadas duas grandezas distintas, se da maior subtrairmos uma grandeza, maior do que sua metade e do que restar, uma grandeza maior do que sua metade, e se este processo for repellido continuamente, restará alguma grandeza menor do que a menor das duas grandezas iniciais”*.

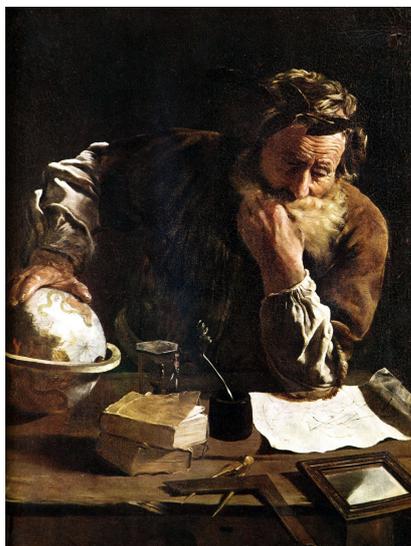


Figura 1: Arquimedes ilustrado na pintura de Domenico Fetti (1620)

Segundo Bongiovanni [3], baseado no princípio da exaustão, os gregos conseguiram resolver diversos problemas envolvendo o que hoje chamamos de *limite*. Arquimedes toma por base o fato de que o perímetro de um polígono regular de n lados inscrito num círculo é menor do que a circunferência do círculo, enquanto que o perímetro de um polígono semelhante circunscrito no círculo é maior do que sua circunferência. Fazendo n suficientemente grande, os dois perímetros se aproximam da circunferência,

um com o valor maior e outro com o valor menor que o comprimento da circunferência. Arquimedes começou com um hexágono, e progressivamente foi dobrando o número de lados, chegou a um polígono de 96 lados, o que rendeu o intervalo $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ ou em notação decimal, $3,14084 < \pi < 3,142858$.

A busca pelos preciosos dígitos de π continuou por séculos, citaremos algumas referências que contribuíram de forma significativa para a precisão do número π . Bongiovanni [3] e Hobson [11] subdivide a história desta busca em etapas

▷ Ainda na Grécia, Ptolomeu (87 - 165 a.C.) calculou as cordas de todos os ângulos de meio em meio grau, entre 0 e 180 graus, construindo assim a trigonometria. Ele obteve uma aproximação para π , o valor aproximado de 3,14166, que não foi superada por 1000 anos, esta mais exata do que a de Arquimedes.

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} \text{ ou } 3\frac{17}{120} \cong 3,141666\dots$$

▷ Na Índia, Aryabhata (500 d.C.) encontrou $\pi = \frac{62832}{20000} = 3,1416$ e, posteriormente, Bhaskara (1140 d.C.) calculando os perímetros de polígonos de 12, 24, 48, 96 e 384 lados pela fórmula $a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$ encontrou o valor de π igual a $\frac{3927}{1250} = 3,1416$. Para Brahmagupta (598 d. C), $\pi = \sqrt{10}$.

▷ Na China, no século XII a.C, o valor de π era 3 e, no início da era cristã, $\sqrt{10}$. Tsu Ch'ung-chih (430-501) obteve para π o valor $\frac{355}{113} \cong 3,1415929$, valor este redescoberto na Europa 1000 anos depois.

▷ No início do século IX, um dos primeiros matemáticos árabes Muhammad ibn Musa Alehwarizmi, deu o valor grego $\sqrt{10}$. Ele introduziu o sistema indiano de algarismos que se espalhou na Europa no início do século XIII por Leonardo Pisano, chamado de Fibonacci.

Nos séculos *XV* e *XVI*, com o desenvolvimento da trigonometria e uma notação melhor para números, a determinação dos comprimentos de cordas tornou-se mais precisa e mais rápida. Matemáticos desta época, ainda usando o método de Arquimedes, calcularam π com até 35 casas decimais.

▷ Uma ideia nova foi usada por Descartes. Ao invés de considerar, numa mesma circunferência, polígonos inscritos e circunscritos com um número cada vez maior de lados, Descartes fixou o perímetro dos polígonos e calculou os raios das circunferências inscrita e circunscrita. Começando com um quadrado de perímetro 2, dobrando sucessivamente o número de lados dos polígonos e mantendo fixo o perímetro, é fácil mostrar que a sequência dos raios das circunferências inscritas (e também a dos raios das circunferências circunscritas) tende a $\frac{1}{\pi}$. O método usado por Descartes é conhecido como o método dos isoperímetros.

▷ Uma grande mudança no cálculo do π veio em 1579, quando o Matemático francês François Viète (1540-1603), utilizando o método desenvolvido pelos gregos, a partir um polígono regular de $6 \cdot 2^{16} = 393.216$ lados, determinou π com precisas nove casas decimais. Descobriu também a primeira utilização de um produto infinito, para determinar o valor de π .

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Viète calculou o seguinte intervalo para π : $3,1415926535 < \pi < 3,1415926537$. Mais uma vez, um novo marco na longa história do π .

As fundações da nova análise foram estabelecidas na segunda metade do século XVII, quando Newton (1642 - 1727) e Leibnitz (1646 - 1716) fundaram o Cálculo Diferencial e Integral, o terreno foi preparado pelo trabalho de Huyghens, Fermat, Wallis, e outros. Por esta grande invenção de Newton e Leibnitz, e com a ajuda dos irmãos James Bernouilli (1654 - 1705) e João Bernouilli (1667 -

1748), as ideias e métodos de Matemáticos passaram por uma transformação radical que naturalmente teve um efeito profundo nos princípios da matemática. Os métodos para o cálculo do π passaram por uma transformação, substituindo a forma geométrica para uma forma analítica, com leis definidas, e que poderiam ser utilizados para o cálculo do π em qualquer grau de aproximação.

▷ O primeiro resultado deste tipo foi devido a John Wallis (1616 - 1703), professor de geometria em Oxford. Wallis estava procurando a área de um quadrante de uma circunferência. Ele olhou para a área sob um arco AB circular cuja equação foi conhecido a partir de geometria de coordenadas de Descartes. Na moderna era dos símbolos, ele começou a partir da equação $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$. No entanto, ele ainda não tem um método para avaliar a integral, pois nem Newton, nem Leibniz ainda não haviam desenvolvidos as regras do cálculo de integral. Ele não foi capaz de expandir a integral pelo teorema binomial e integrar termo a termo. Após uma longa e complicada série de interpolações, ele foi capaz, em seu *Arithmetica infinitorum* (1655), de obter a famosa fórmula que leva seu nome.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \dots$$

▷ Os resultados de Wallis foram então transformados em frações contínuas por William Brouncker (1620 - 1684). Brouncker obteve o seguinte resultado:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \dots}}}}}$$

As frações contínuas de Brouncker seguem a seguinte convergência:

$$\frac{\pi}{4} = 1; \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}; \frac{\pi}{4} = \frac{15}{13}; \frac{\pi}{4} = \frac{105}{76}; \frac{\pi}{4} = \frac{945}{789}; \dots$$

Em cada um desses casos temos $\pi = 4$; $\pi = 2,666\dots$; $\pi = 3,4666\dots$; $\pi = 2,8952380\dots$; $\pi = 3,3396\dots$, respectivamente. Estamos aproximando (embora muito lentamente) para o verdadeiro valor de π , no qual a cada passo determina-se um valor mais próximo de $3,14159265358979\dots$. Isto foi mais uma etapa para os métodos modernos no cálculo de π .

▷ Neste período, apoiado sobre os fundamentos do Cálculo, o matemático escocês James Gregory publicou em 1670 a série mais usada no cálculo de π , a série de Gregory:

$$\text{arc tg}(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Para $x = 1$, obtém-se $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$, este resultado também foi obtido independentemente por Leibniz e publicado em 1674. Esta série, por convergir muito lentamente, não é adequada para o cálculo de π , mas, sob o ponto de vista estético, atende bem ao sonho daqueles que buscavam uma representação decimal para π .

▷ Machin, em 1706, usando a mesma série e a identidade $\frac{\pi}{4} = 4\text{arctg}\frac{1}{5} - \text{arctg}\frac{1}{239}$ conseguiu calcular π com 100 casas decimais.

▷ Em [2], Beckmann completa, a verdadeira popularidade do símbolo π para representar a razão circunferência por diâmetro veio em 1748, quando um dos maiores matemáticos de todos os tempos, o suíço Leonhard Euler (1707-1783), usou o símbolo π em seu livro *Introduction in Analysin Infinitorum* para representar π . Um matemático brilhante com uma memória incrível e capacidade de fazer cálculos complexos, Euler desenvolveu vários métodos para calcular π , alguns dos quais aproximou o real valor de π mais rapidamente (isto é, em menos passos) que os procedimentos desenvolvidos por seus antecessores, calculando π com 126 casas de precisão. Uma fórmula que ele usou para calcular π foi o primeiro de um conjunto de séries de potência dando sucessivas casas de π . A série abaixo

é particularmente interessante, uma vez que é criada tomando quadrados dos termos de uma série harmônica.

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

▷ Matemáticos do mundo foram consumidos pela questão: “ π pertence a qual conjunto numérico?”

A cada tentativa de obter mais casas decimais para π , havia sempre a esperança de que um padrão iria surgir e que haveria um período de dígitos que se repetem. Isto é, seria então π um número racional?

Em 1794 o Matemático francês Adrien Marie Legendre (1752 - 1833) escreveu um livro intitulado *Elements de Géométrie* em que ele provou que π^2 é irracional. Em 1806, ele também provou que π é irracional. Sabemos que Aristóteles (384 - 322 a.C) suspeitava π era um número irracional. Mas sua especulação durou mais de dois milênios até ser provada.

▷ Zacharias Dahse (1824 - 1861), um calculador prodígio, em 1844, calculou π com 200 casas decimais em menos de 2 meses. (Por recomendação de Gauss, Dahse foi contratado pela Academia de Ciências de Hamburgo para determinar todos os fatores dos números inteiros entre 7 e 10 milhões).

▷ A busca de um valor preciso para π continuou. Em 1847 Thomas Clausen (1801 - 1855), um matemático alemão, calculou π com corretas 248 casas decimais. Em seguida, em 1853, William Rutherford, um inglês, estendeu o cálculo para 440 casas decimais.

▷ Um dos alunos de Rutherford, William Shanks (1812 - 1882), em 1874, estendeu o valor de π para 707 casas decimais, um trabalho que exigiu 15 anos de cálculo. No entanto, em 1946, com o auxílio de um computador eletrônico, processando durante 70 horas, um erro foi identificado na 528ª posição.

▷ Como os avanços de π , devemos ressaltar o trabalho do matemático alemão Carl Louis Ferdinand

Lindemann (1852-1939), que em 1882 provou não somente a irracionalidade, mas a transcendência. Lindemann pôem fim de que antigo problema de encontrar a quadratura de um círculo, provando assim que é impossível construir com régua e compasso um quadrado de mesma área que um círculo.

▷ A história praticamente chegaria ao fim se não fosse a introdução do computador para realizar as operações mais eficientes para determinar a maior quantidade de casas decimais possível. A era do computador no século XX lembra que os caçadores de dígitos nos séculos XVIII e XIX. A principal diferença é que, quando os caçadores de dígitos dos séculos XVIII e XIX superaram os registros de dezenas e centenas de casas decimais, os computadores e os respectivos programadores superaram por milhares, e em seguida por milhões de dígitos. E, naturalmente, onde os caçadores dígitos trabalhavam por meses e anos para encontrar centenas de casas decimais, o computador determina meio milhão de dígitos em apenas algumas horas.

A grande diferença entre os novos caçadores de casas decimais para o π , são os processadores e a série de convergência para determinar o maior número de casas decimais com o menor número de iterações. É no segundo critério que se destaca alguns matemáticos por determinarem séries que geram até 50 casas decimais em uma única iteração.

▷ Segundo Posamentier [18], em 1914, um indiano, gênio em matemático, Srinivasa Ramanujan (1882 - 1920), de 38 anos estabeleceu muitas fórmulas para o cálculo do valor de π . Alguns foram muito complexas e tiveram que esperar o advento do computador para que fossem apropriadamente utilizadas. Uma delas é $\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9,801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1,103 + 26,390n)}{(n!)396^{4n}}$. No entanto, uma fórmula mais simples que Ramanujan produziu para calcular o valor de π foi $\sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}}$.

▷ No site Wikipedia [?], consta que entre as notícias mais recentes, em outubro de 2011, o enge-

nheiro de informática japonês Shigeru Kondo, 54 anos, superou os 10 trilhões de casas decimais da constante matemática, o que relegaria a segundo plano o desempenho do francês Fabrice Bellard, que calculou o π com 2,7 trilhões de dígitos.

A Figura 2, retirada de [15], mostra o gráfico que registra a evolução das aproximações numéricas para π medida em casas decimais (representados em uma escala logarítmica e comprimido antes do ano 1400 d.C.), durante a história da humanidade.

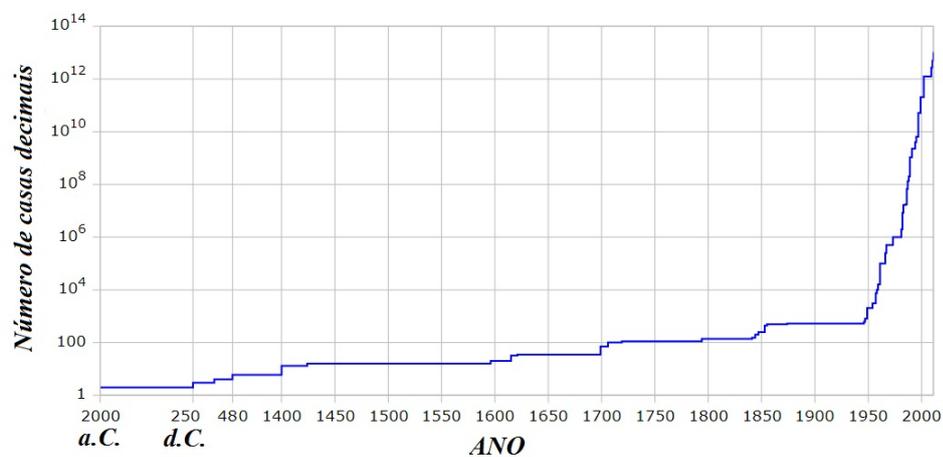


Figura 2: Recordes de Aproximações para o Número π

3 Aproximar π por Construção Geométrica

No histórico da determinação do valor de π fica claro os dois momentos distintos dessa busca, determinar o valor a partir de princípios geométricos ou de maneira analítica. Apresentamos cinco construções geométricas que buscam uma aproximação para π .

3.1 Primeiro Cálculo de π

Como já citado na parte histórica, Arquimedes define a medida do comprimento de uma circunferência da seguinte maneira:

Hobson, em [11], descreve que Arquimedes toma uma sequência de polígonos regulares circunscritos numa circunferência para que o número de lados seja aumentado indefinidamente e de tal modo que o comprimento do lado do polígono com o maior número de lados diminui indefinidamente, em seguida, se os números que representam os perímetros dos polígonos sucessivos formam uma sequência convergente, do qual o limite é um e o mesmo número de todas as sequências de polígonos que satisfazem as condições prescritas, o círculo tem um comprimento representado por este valor. Para ilustrar esta situação Arquimedes faz as seguintes considerações:

- Seja uma circunferência de centro O inscrita em um polígono regular de 6 lados com um de seus lados igual a CC' .

- Seja A o ponto de tangência do lado CC' com a circunferência de centro O .

- Temos que $\widehat{AOC} = 30^\circ$ e $\frac{AO}{AC} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$.

- Traçamos a bissetriz do ângulo \widehat{AOC} e determinado AD , tal que AD é a metade do lado de um polígono regular de 12 lados, então $\frac{OD}{DA} = \frac{591\frac{1}{8}}{153}$.

- Traçando a bissetriz do ângulo $A\hat{O}D$, determinamos o ponto E , tal que AE é a metade do lado de um polígono regular de 24 lados, então $\frac{OE}{AE} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$.
- Traçando a bissetriz do ângulo $A\hat{O}E$, determinamos o ponto F , tal que AF é a metade do lado de um polígono regular de 48 lados, então $\frac{OF}{FA} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}$.
- Traçando a bissetriz do ângulo $A\hat{O}F$, determinamos o ponto G , tal que AG é a metade do lado de um polígono regular de 96 lados, então $\frac{OA}{GA} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$.

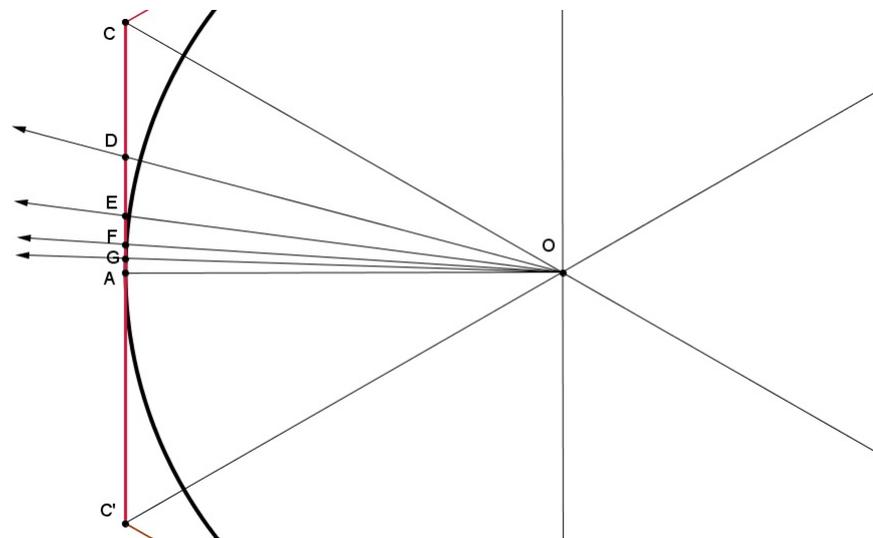


Figura 3: Círculo inscrito no hexágono regular

O comprimento da circunferência é menor do que o perímetro do polígono, admitindo raio AO igual a 1, temos que:

$$\frac{OA}{GA} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}, \text{ o que implica em } GA < 0,032773777\dots$$

Como GA é metade do lado do polígono regular de 96 lados, concluímos que o lado mede $0,06547555\dots$

No cálculo do perímetro temos $96 \times 0,06547555\dots < 6,285652\dots$, como o valor de π é dado pela razão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro temos $\pi < 3,142826\dots$. A segunda parte

do teorema é obtida de uma maneira semelhante por determinação do lado de um polígono regular de 96 lados inscrito no círculo, gerando o seguinte intervalo $3,14084... < \pi < 3,142858... .$

Vale lembrar que as dificuldades no cálculo do π sempre foram de natureza computacional, não conceitual. Usando tão-somente o teorema de Pitágoras, é possível obter (teoricamente) aproximações tão precisas de quanto forem desejáveis. Basta relacionar o lado de um polígono de $2n$ lados com um de n lados, ambos inseridos na mesma circunferência, para poder calcular os perímetros de polígonos com um número muito grande de lados.

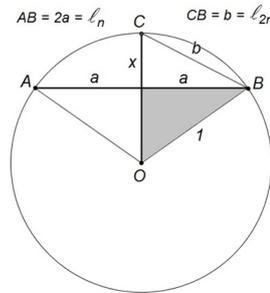


Figura 4: Lados dos polígonos regulares de n e $2n$ lados inscritos numa mesma circunferência

Sejam os polígonos regulares, um de n lados e outro de $2n$ lados, inscritos em uma circunferência de centro O e raio 1 , vide figura 4. Admita também que o lado do polígono de n lados tenha $\overline{AB} = 2a$ e o de $2n$ lados tenha lado $\overline{CB} = b$, assim:

$$\begin{cases} (1 - x^2) + a^2 = 1^2 \\ x^2 + a^2 = b^2 \end{cases} \quad \text{o que nos dá } x = \frac{b^2}{2} \text{ e } b = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - a^2}}$$

Como $\overline{AB} = 2a$, temos a seguinte relação:

$$\overline{CB} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}}, \text{ o que implica em } \overline{CB} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \overline{AB}^2}},$$

então

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$$

Esta é a relação entre os lados dos polígonos de n lados e $2n$ lados inscritos numa mesma circunferência. Na subsecção 6.3 mostraremos a convergência de uma série baseada nesta relação.

3.2 Retificação de uma Circunferência

3.2.1 Processo de Specht

Retificar uma circunferência é obter um segmento de reta cuja medida é igual ao comprimento da circunferência.

Um dos processos que se aproximam da retificação da circunferência é o de Specht. Construído passo a passo por Hobson, em [11], que permite uma boa aproximação com o erro relativo menor do que $3 \cdot 10^{-7}$. Vejamos o processo de Specht:

- Traçar a semirreta \overrightarrow{PQ} , passando pelo centro O da circunferência, tal que P e Q sejam pontos desta circunferência (\overline{PQ} será o diâmetro).
- Pela extremidade P , traçar uma semirreta \overrightarrow{PT} , perpendicular a \overline{PQ} .
- Dividir o raio \overline{PO} em 5 partes congruentes.
- Determinar os pontos A , B e C na semirreta \overrightarrow{PT} , tais que $\overline{PA} = \overline{PQ}$; $AB = \frac{\overline{PO}}{5}$ e $\overline{BC} = \frac{2\overline{PO}}{5}$.
- Traçar o segmento \overline{OB} .
- Determinar D na semirreta \overrightarrow{PQ} , tal que $\overline{PD} = \overline{OB}$.
- Traçar o segmento \overline{OC} .
- Traçar o segmento \overline{DE} paralelo a \overline{OC} , tal que E pertença à semirreta \overrightarrow{PT} .
- \overline{PE} será equivalente à circunferência retificada com erro relativo menor que $3 \cdot 10^{-7}$.

A descrição analítica desta retificação segundo Kumayama [12], é dada por:

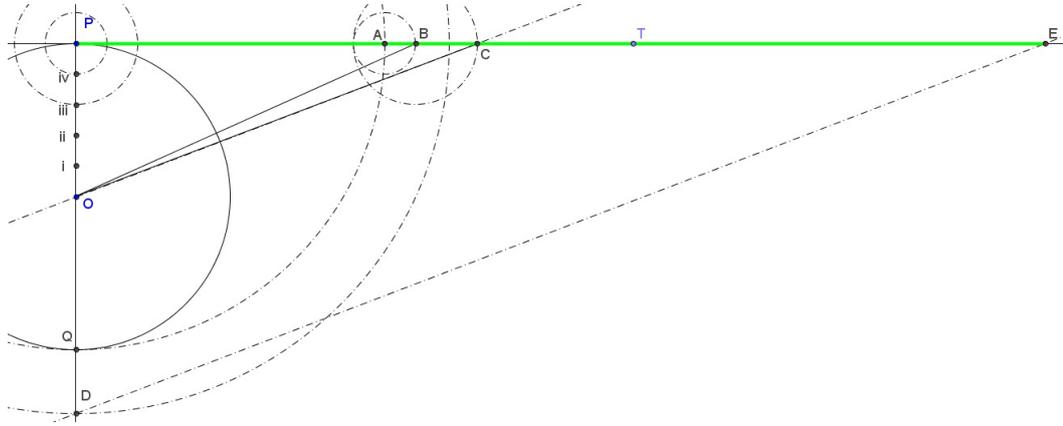


Figura 5: Processo de Specht

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{PD}} \text{ onde } \overline{PQ} = r, \overline{PC} = 2r + \frac{3r}{5} = \frac{13r}{5} \text{ e } \overline{PD} = \overline{OB} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{11r}{5}\right)^2} = \frac{r\sqrt{146}}{5}$$

Substituindo na igualdade acima obtemos

$$\frac{\frac{13r}{5}}{\frac{r\sqrt{146}}{5}} = \frac{r}{\frac{r\sqrt{146}}{5}} \text{ o que implica em } \overline{PE} = \frac{13\sqrt{146}}{50}$$

Se fizermos $d = 1$ (d é o diâmetro da circunferência), teremos $\overline{PE} = 3,1415920\dots$ e como $\pi \cong 3,1415926\dots$, temos $\overline{PE} = \pi$, com erro relativo menor do que $3 \cdot 10^{-7}$.

3.2.2 Processo de Kochausky

Hobson, em [11], descreve outro processo que permite obter a retificação da circunferência, com erro relativo menor do que $2 \cdot 10^{-5}$, é o processo de Kochausky. Apresentaremos aqui um processo adaptado para facilitar a construção. Vejamos:

- Traçar os diâmetros PQ e RS , perpendiculares entre si.
- Traçar a semirreta PT , tal que $\angle TPQ = 30^\circ$ e $T \in RS$.
- Prolongar QP e determinar U , tal que $PU = OP$.

- Prolongar RS e determinar V tal que $TV = 3 \cdot OP$.
- Traçar o segmento UV . Este segmento será equivalente à metade da circunferência retificada.

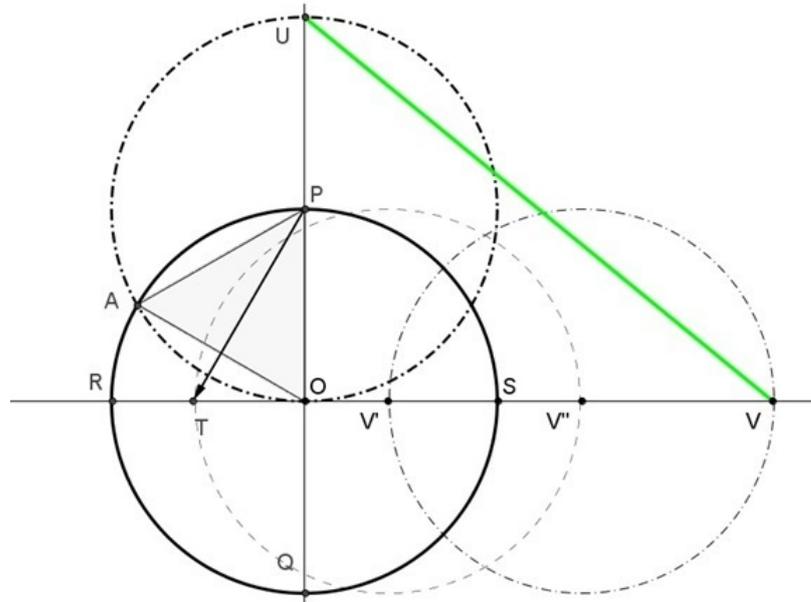


Figura 6: Processo de Kochausky

A descrição analítica desta retificação segundo Kumayama [12], é dada por:

$$\overline{TO} = r \cdot \text{tg}30^\circ, \overline{OV} = 3r - r \cdot \text{tg}30^\circ \cdot 3 \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \overline{OU} = 2r.$$

$$\overline{UV}^2 = \overline{OV}^2 + \overline{OU}^2 \text{ logo } \overline{UV}^2 = \left[r \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right]^2 + 2r$$

$$\overline{UV} = \frac{r}{3} \sqrt{120 - 18\sqrt{3}} \text{ o que nos dá}$$

$$\overline{UV} \cong 3,1415333r$$

Se fizermos $r = 1$, obteremos o valor de π com erro relativo menor do que $2 \cdot 10^{-5}$. Apesar de o processo de Specht ser numericamente mais preciso, o processo de Kochansky permite obter a retificação da circunferência com um número bem menor de traçados.

3.3 As Construções de Ramanujan

Neste contexto é interessante mostrar duas construções do matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920). Posamentier [18], apresenta essas construções.

3.3.1 Construção 1

- Seja AB o diâmetro de um círculo cujo centro é o ponto O .
- M o ponto médio de AO e T divide OB tal que $\frac{\overline{BT}}{\overline{BO}} = \frac{1}{3}$.
- Trace o segmento TP perpendicular a AB determinando o ponto P na circunferência.
- Trace o segmento BQ congruente ao segmento PT , tal que Q pertença a circunferência.
- Trace o segmento AQ .
- Determine os pontos R e S sobre o segmento AQ , tal que $BQ \parallel TR \parallel OS$.
- Desenhe uma corda AD congruente a AS e um segmento tangente à circunferência no ponto A e congruente a RS .
- Trace os segmentos BC , BD e CD .
- Determine sobre BD o segmento BE , tal que BE é congruente a BM .
- Trace uma paralela a CD passando por E determinando o ponto X sobre o segmento BC .
- O quadrado de lado BX tem área muito próxima da área do círculo de centro O .

Analiticamente obtemos:

Seja uma circunferência de raio r , a partir das informações contidas acima, temos:

$$\overline{AO} = \overline{BO} = r, \overline{AM} = \frac{r}{2}, \overline{BT} = \frac{r}{3}, \overline{AT} = \frac{5r}{3}, \overline{BM} = \overline{BE} = \frac{3r}{2} \text{ e } \overline{OT} = \frac{2r}{3}.$$

O triângulo $\triangle ABP$ é retângulo em P , logo PT é altura relativa à hipotenusa AB , assim $\overline{PT}^2 =$

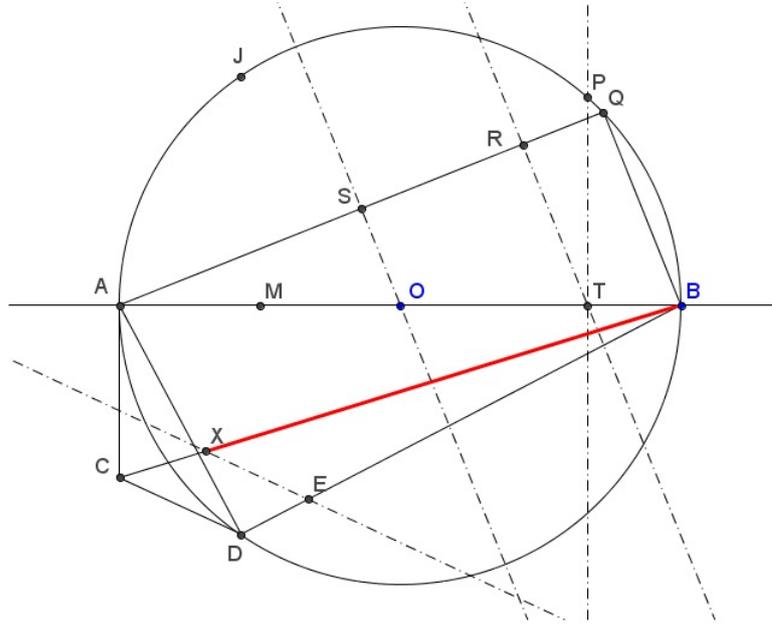


Figura 7: \overline{BX} é o lado de um quadrado que tem área próxima do círculo de centro O

$\overline{AT} \cdot \overline{BT}$ o que nos dá $\overline{PT} = \frac{r\sqrt{5}}{3}$. Pelo cabeçalho $\overline{PT} = \overline{BQ}$, então $\overline{BQ} = \frac{r\sqrt{5}}{3}$. O triângulo $\triangle ABQ$ é retângulo em Q , logo, pelo teorema de Pitágoras $\overline{AB}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{AQ}^2$ assim $\overline{AQ} = \frac{r\sqrt{31}}{3}$.

Utilizando o Teorema de Tales, temos $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OT}}$ pois $BQ \parallel RT \parallel OS$, isso nos dá $\overline{RS} = \frac{r\sqrt{31}}{9}$, pelo cabeçalho $\overline{RS} = \overline{AC}$, então $\overline{AC} = \frac{r\sqrt{31}}{9}$. Também por Tales $\frac{\overline{AS}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}$, logo $\overline{AS} = \frac{r\sqrt{31}}{6}$, pelo cabeçalho $\overline{AS} = \overline{AD}$, então $\overline{AD} = \frac{r\sqrt{31}}{6}$.

Pelo teorema de Pitágoras temos que $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ e $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$, assim $\overline{BC} = \frac{r\sqrt{355}}{9}$ e $\overline{BD} = \frac{r\sqrt{113}}{6}$.

Como $CD \parallel EX$, novamente por Tales $\frac{\overline{BX}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$, nessas condições obtemos $\overline{BX} = \frac{r\sqrt{355}}{\sqrt{113}}$.

Se BX é o lado do quadrado cuja área se aproxima da área do círculo, temos que:

$$\overline{BX}^2 = \pi \cdot r^2 \text{ por consequência } \left(\frac{r\sqrt{355}}{\sqrt{113}} \right)^2 = \pi \cdot r^2$$

Então,

$$\pi = \frac{355}{113} = 3,14159292\dots$$

3.3.2 Construção 2

- Seja uma circunferência de diâmetro AB e centro O .
- Marque um ponto C sobre a circunferência tal que AC tenha a mesma medida de BC .
- Marque o ponto T , tal que $\frac{AT}{AO} = \frac{1}{3}$.
- Trace BC e marque sobre BC os pontos M e N , tal que $\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{AT}$.
- Trace AM e AN e determine sobre AN o ponto P tal que $\overline{AP} = \overline{AM}$.
- Por P trace uma paralela a MN , determinando sobre AM o ponto Q .
- Trace OQ e determine o ponto R sobre o segmento AM , tal que $OQ \parallel TR$.
- Desenhe um segmento AS perpendicular ao diâmetro AB , tal que $\overline{AS} = \overline{AR}$.
- Trace o segmento OS e evidencie o raio OB .
- Construir um triângulo retângulo de hipotenusa igual a $\overline{OS} + \overline{OB}$. A altura relativa à hipotenusa SB é igual a média geométrica dos segmentos OS e OB .
- O segmento XY é igual a média geométrica entre os segmentos OS e OB .

O segmento XY é uma excelente aproximação da sexta parte do comprimento da circunferência.

Concluimos que $\pi \cong \frac{3 \cdot XY}{r}$.

Analicamnete obtemos:

Seja uma circunferência de raio r , então:

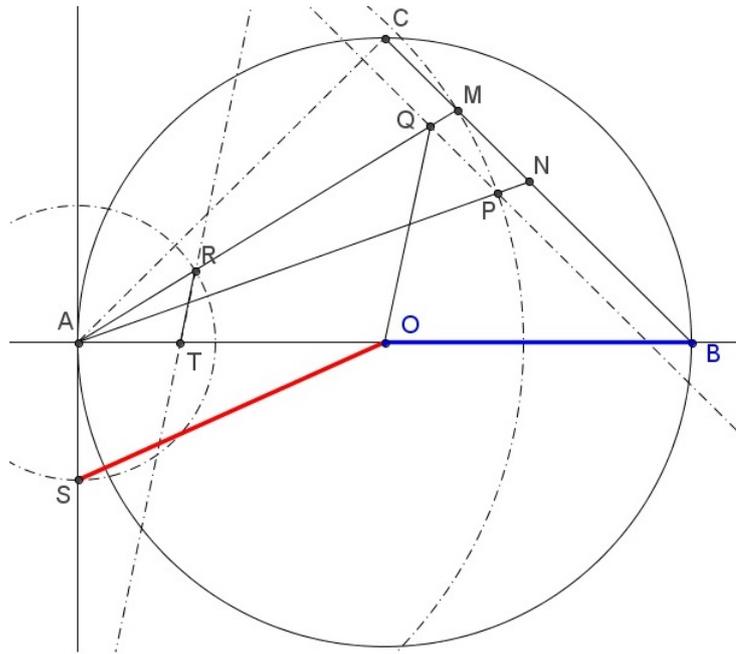


Figura 8: Construção dos segmentos OS e OB

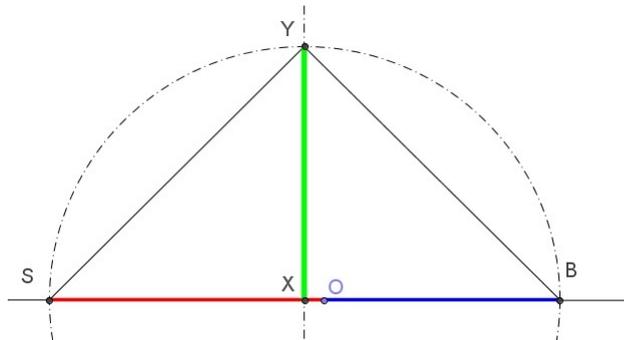


Figura 9: XY é igual a média geométrica entre os segmentos OS e OB

$$\overline{AO} = \overline{OB} = r, \overline{AT} = \overline{CM} = \overline{MN} = \frac{r}{3}$$

O ângulo $CBO = 45^\circ$ pois o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo isósceles, o que implica em $\overline{CB} = r\sqrt{2}$.

Então $\overline{BN} = r\sqrt{2} - \frac{2r}{3}$ e $\overline{BM} = r\sqrt{2} - \frac{r}{3}$. Pela lei do cosseno temos $\overline{AN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BN}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{BN}\cdot\cos 40^\circ$ e $\overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BM}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{BM}\cdot\cos 40^\circ$.

Assim obtemos $\overline{AN} = \frac{r\sqrt{22}}{3}$ e $\overline{AM} = \frac{r\sqrt{19}}{3}$. Pelo cabeçalho $\overline{AM} = \overline{AP} = \frac{\sqrt{19}r}{3}$.

Aplicando o teorema de Tales $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AN}}$, então $\overline{AQ} = \frac{19r}{3\sqrt{22}}$.

Novamente pelo teorema de Tales $\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}}$, como $\overline{AT} = \frac{\overline{AO}}{3}$ o que implica em $\overline{AR} = \frac{\overline{AQ}}{3}$,
então $\overline{AR} = \frac{19r}{9\sqrt{22}}$.

Pelo teorema de Pitágoras temos: $\overline{OS}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{AO}^2$, então $\overline{OS} = r\sqrt{9^2 + \frac{19^2}{22}} = r\sqrt{\frac{2143}{1782}}$.

O segmento \overline{XY} é dado pela média geométrica dos segmentos \overline{OS} e \overline{OB} , então $\overline{XY} = \sqrt{\overline{OS} \cdot \overline{OB}}$,

consequentemente:

$$\overline{XY} = r\sqrt{\sqrt{9^2 + \frac{19^2}{22}}}, \text{ assim } \overline{XY} = r\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Como

$$\pi \cong \frac{3 \cdot \overline{XY}}{r}, \text{ temos } \pi \cong \frac{3}{r} \cdot r\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}},$$

então:

$$\pi \cong 3,1415926525\dots$$

4 Séries

Segundo Hobson [11], as fundações da nova análise foram estabelecidas no segundo semestre do século *XVII*, quando Newton e Leibniz fundaram o Cálculo Diferencial e Integral. O terreno foi preparado pelo trabalho de Huyghens, Fermat, Wallis, e outros. Por esta grande invenção, as ideias e métodos matemáticos passaram por uma transformação radical que naturalmente teve um efeito profundo sobre o nosso problema. O primeiro efeito da Análise era substituir os antigos meios geométricos para o cálculo do π para os novos métodos fundamentados pelo cálculo de convergência de séries. No capítulo que se segue será apresentado uma fundamentação teórica Séries e suas convergências, baseada em Guidorizzi [8], com a intenção de apresentar a *Série de Gregory*, o *Problema da Basileia* e a *Fórmula de Machin*, todas elas de grande importância na determinação do número π .

4.1 Série Numérica

4.1.1 Definição de uma Série Numérica

Seja a_n , $n \geq q$, para n e q naturais fixos, uma sequência numérica; a sequência de termo geral

$$S_n = \sum_{k=q}^n a_k, \quad (1)$$

denomina-se série numérica associada à sequência a_n . Os números a_n , $n \geq q$ são denominados termos da série; a_n é o termo geral da série. Referir-nos-emos a (1) como soma parcial de ordem n da série.

O limite da série, quando existe (finito ou infinito), denomina-se soma da série e é indicada por

$$\sum_{k=q}^{\infty} a_k. \text{ Assim}$$

$$\sum_{k=q}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=q}^n a_k.$$

Se a soma for finita, diremos que a série é convergente. Se a soma for infinita ($+\infty$ ou $-\infty$) ou se o limite não existir, diremos que a série é divergente.

O símbolo $\sum_{k=q}^{+\infty} a_k$ foi usado para indicar a soma da série. Por um abuso de notação, tal símbolo será utilizado ainda para representar a própria série. Falaremos, então, da série $\sum_{k=q}^{+\infty} a_k$, entendendo-se que se trata da série cuja soma parcial de ordem n é $S_n = \sum_{k=q}^n a_k, n \geq q$. Escreveremos com frequência

$$\sum_{k=q}^{+\infty} a_k = a_q + a_{q+1} + a_{q+2} + \dots$$

Observação:

Trabalhar com a série $\sum_{k=q}^{+\infty} a_k$ é o mesmo que trabalhar com a série $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$, onde $b_k = a_{k+q}, k \geq 0$.

Por este motivo, de agora em diante, todos os resultados serão estabelecidos para séries $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

4.1.2 Propriedades das Séries

A seguir vamos destacar algumas propriedades imediatas das séries.

a) Seja α um número real dado. Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ for convergente, então $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha \cdot a_k$ será convergente e

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

b) Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ forem convergentes, então $\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k)$ será convergente e

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

c) $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ será convergente se e somente se, para todo natural p , $\sum_{k=p}^{+\infty} a_k$ for convergente. Além

disso, se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ for convergente, teremos, $p \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{p-1} a_k + \sum_{k=p}^{+\infty} a_k.$$

Exemplo 1 Mostre que, para $0 < |r| < 1$, $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$.

Solução:

$$S_n = \sum_{k=0}^n r^k = 1 + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Como $|r| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = 0$. Daí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n r^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$$

Logo, a série dada é convergente e tem por soma $\frac{1}{1-r}$.

A série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, onde α é um número real dado, denomina-se série harmônica de ordem α . O

próximo exemplo mostra a série harmônica de ordem α é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para

$\alpha \leq 1$.

Exemplo 2 Considere a série harmônica $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Prove

a) $\alpha > 1 \implies \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ é convergente.

b) $\alpha \leq 1 \implies \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$

Solução:

a) A sequência de termo geral $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ é crescente. Com base na figura 10, vamos mostrar

que é limitada superiormente.

$$S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

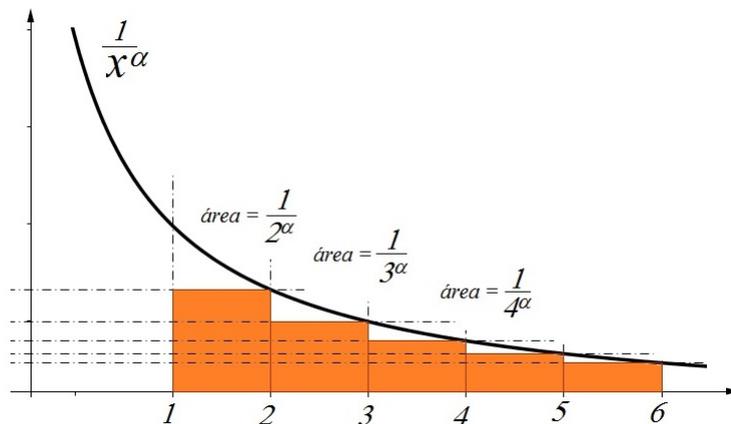


Figura 10: $\alpha > 1$ temos $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ é convergente

A sequência $n \mapsto \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx$ é crescente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1}$. Assim, para todo $n \geq 1$, $\int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{\alpha - 1}$. Segue que, para todo $n \geq 1$, $S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$. Portanto, $S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ é limitada superiormente. Como é crescente, resulta que tal sequência é convergente, isto é, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ com $\alpha > 1$, tem soma finita e

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

b) Se $\alpha = 1$, $\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln(n)$ e baseado na figura 11, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = +\infty$$

Se $\alpha < 1$, $\int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^n = \frac{n^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}$. Como estamos supondo $\alpha < 1$,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\alpha+1} = +\infty$. Assim, para $\alpha < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty.$$

Portanto, para $\alpha \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty$.

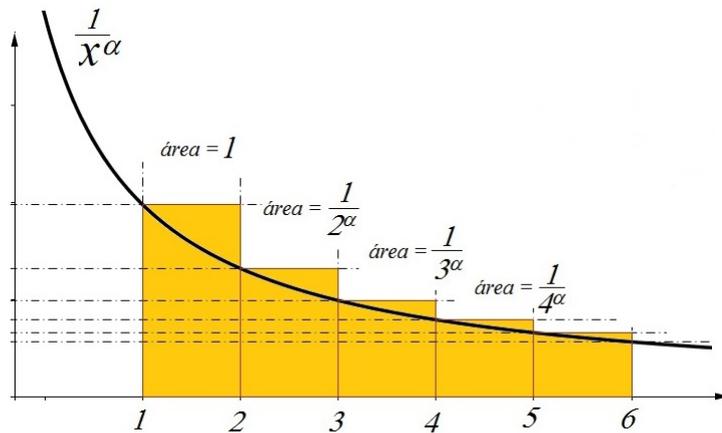


Figura 11: $\alpha \leq 1$ temos $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \geq \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Como estamos supondo $\alpha \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty$. Segue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Portanto, para $\alpha \leq 1$, a série é divergente e $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$.

Ainda em Guidorizzi [8], temos:

Exemplo 3 Supondo $0 < \alpha \leq 1$, mostre que

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1} = \operatorname{arctg}(\alpha) \\ \text{b) } & \left| \operatorname{arctg}(\alpha) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{\alpha^{2n+3}}{2n+3} \end{aligned}$$

Solução: Por progressão geométrica temos:

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \text{ então } \frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1 - r}$$

fazendo $r = -x^2$, temos

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2}$$

Como $\operatorname{arctg}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{1}{1 + x^2} dx$, resulta

$$\operatorname{arctg}(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^\alpha \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} dx.$$

Agora é só mostrar que, para $0 < \alpha \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} dx = 0$. Seja então $0 < \alpha \leq 1$, temos

$$0 \leq \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} \leq x^{2n+2} \text{ para } x \in [0, \alpha] \text{ e } 0 \leq \int_0^\alpha \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} dx \leq \int_0^\alpha x^{2n+2} dx,$$

portanto

$$0 \leq \int_0^\alpha \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} dx \leq \frac{\alpha^{2n+3}}{2n+3}.$$

De $0 < \alpha \leq 1$, segue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{2n+3}}{2n+3} = 0$, e portanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} dx = 0$.

Fica provado assim que, para $0 < \alpha \leq 1$,

$$\operatorname{arctg}(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}.$$

Esta série é conhecida como “Série de Gregory”, James Gregory (1638 - 1675). □

b) De $\arctg(\alpha)$ temos o seguinte resultado

$$|\arctg(\alpha) - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}| = |(-1)^{n+1} \int_0^\alpha \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx|$$

portanto, tendo em vista $0 \leq \int_0^\alpha \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \frac{\alpha^{2n+3}}{2n+3}$,

$$|\arctg(\alpha) - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}| \leq \frac{\alpha^{2k+3}}{2k+3}$$

Exemplo 4 Verifique que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$,

e avalie o módulo do erro que se comete na aproximação

$$\frac{\pi}{4} \cong 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

Solução: Pelo exemplo anterior, $\frac{\pi}{4} = \arctg(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$.

Ainda pelo exemplo anterior, $|\arctg(1) - \sum_{n=0}^n (-1)^k \frac{1}{2k+1}| \leq \frac{1}{2n+3}$.

Assim, na aproximação de $\frac{\pi}{4}$, temos

$$\frac{\pi}{4} \cong 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

O módulo do erro é inferior a $\frac{1}{2n+3}$.

A aproximação acima será por falta se n for ímpar e por excesso se n for par.

Exemplo 5 Verifique que $\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239}$. (*Fórmula de Machin*)

Solução: Vamos utilizar a fórmula

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y},$$

Primeiro vamos determinar B tal que

$$\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{5} + \arctg B.$$

Pela formula acima

$$1 = \frac{\frac{1}{5} + B}{1 - \frac{1}{5}}, \text{ o que implica em } B = \frac{2}{3}.$$

Assim

$$\frac{\pi}{4} = \text{arctg} \frac{1}{5} + \text{arctg} \frac{2}{3}.$$

Vamos determinar C tal que

$$\text{arctg} \frac{2}{3} = \text{arctg} \frac{1}{5} + \text{arctg} C.$$

Aplicando novamente a fórmula anterior, temos $\frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{5} + C}{1 - \frac{1}{5}}$, o que nos dá $C = \frac{7}{17}$.

Então

$$\frac{\pi}{4} = 2.\text{arctg} \frac{1}{5} + \text{arctg} \frac{7}{17}$$

Determinamos D tal que $\text{arctg} \frac{7}{17} = \text{arctg} \frac{1}{5} + \text{arctg} D$, no qual $D = \frac{9}{46}$, daí

$$\frac{\pi}{4} = 3.\text{arctg} \frac{1}{5} + \text{arctg} \frac{9}{46}.$$

Analogamente determinamos $E = \frac{1}{239}$. Temos então a bela fórmula de Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 4.\text{arctg} \frac{1}{5} - \text{arctg} \frac{1}{239}$$

Como já citado anteriormente, utilizando a fórmula de Machin calculamos π com 100 casas decimais.

4.1.3 O Problema da Basileia

Exemplo 6 Mostrar a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Segundo Ávila [1], foi no século XVII que as séries infinitas chamaram a atenção de muitos matemáticos. Encontrar a soma exata de uma série infinita era um desafio. Um deles, proposto pela primeira vez por Pietro Mengoli, o de encontrar o valor de

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Este desafiou os mais brilhantes matemáticos por quase cem anos, e que tem sua importância por estar ligado à função zeta de Riemann, foi solucionado por Leonhard Euler (1707-1783) em 1734. Esse problema ficou conhecido como o *Problema da Basileia*. Nosso objetivo é apresentar a maneira engenhosa, e de certa forma ingênua, utilizada por Euler para obter a soma da série. Foi a partir deste resultado que Euler conquistou sua fama e popularidade diante de toda a comunidade científica de seu tempo.

A prova de Euler

Demonstração. Segundo Euler, em [5], a série de Taylor para a função seno, apresenta

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Dividindo ambos os termos da igualdade por x

$$\frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Para um polinômio geral de grau n , $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, tome $a_0 = 1$ e x_1, x_2, \dots, x_n as n raízes de $p(x)$, vale a fatoração:

$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right).$$

Visto que as raízes de $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ ocorrem exatamente quando $x = n\pi$ em que $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,

Euler assumiu que pode-se expressar a série infinita em questão como o produto das diversas raízes, tal como um polinômio finito, isto é:

$$p(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \cdots$$

$$p(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots$$

Desenvolvendo-se o produto, obtemos

$$p(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots\right) x^2 + \dots,$$

comparando-se esta igualdade com a expressão $\frac{\text{sen}(x)}{x}$, temos

$$p(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots\right) x^2 + \dots$$

$$p(x) = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots\right) x^2 + \dots = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots\right)$$

Colocando em evidência $\frac{1}{\pi^2}$, segue que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

□

Atualmente a sua demonstração não é considerada válida já que nem sempre as séries de potências compartilham das mesmas propriedades que os polinômios. Contudo, há provas rigorosas que confirmam a mesma soma para a série.

4.2 Critério de Convergência para Série Alternada

Por uma série alternada entenderemos uma série do tipo $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$, onde $a_k > 0$ para todo natural k . As séries abaixo são exemplos de séries alternadas:

$$\text{a) } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

$$\text{b) } 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}$$

$$\text{c) } 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} k$$

Observe que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

4.2.1 Critério de convergência para série alternada

Seja a série alternada $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$. Se a sequência a_k for decrescente e se $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, então a série alternada $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ será convergente.

Demonstração. A demonstração será baseada na propriedade dos intervalos encaixantes. Inicialmente, observamos que a sequência das somas parciais de ordem par é decrescente. De fato,

$$S_{2n} = S_{2n-2} - (a_{2n-1} - a_{2n}) \text{ tal que } (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq 0$$

e, portanto

$$S_{2n} \leq S_{2n-2}.$$

Isto decorre do fato de a sequência a_n ser, por hipótese, decrescente e, portanto, $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$

Assim:

$$S_0 = a_0$$

$$S_2 = a_0 - a_1 + a_2 = S_0 - (a_1 - a_2)$$

$$S_4 = S_2 - a_3 + a_4 = S_2 - (a_3 - a_4)$$

\vdots

$$S_{2n} = S_{2n-2} - (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Por outro lado, a sequência das somas parciais de ordem ímpar é crescente:

$$S_1 = a_0 - a_1$$

$$S_3 = S_1 + a_2 - a_3 = S_1 + (a_2 - a_3)$$

\vdots

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + (a_{2n} - a_{2n+1}).$$

Temos, ainda, para todo natural n ,

$$S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}.$$

Logo, para todo natural n , $S_{2n} > S_{2n+1}$. Temos, então a sequência de intervalos encaixantes

$$[S_1, S_0] \supset [S_3, S_2] \supset \dots \supset [S_{2n+1}, S_{2n}] \supset \dots$$

Da hipótese $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, resulta que a amplitude a_{2n+1} do intervalo $[S_{2n+1}, S_{2n}]$ tende a zero quando n tende a $+\infty$. Pela propriedade dos intervalos encaixantes existe um único S tal que, para todo natural n .

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}.$$

Daí, para todo natural n , S está entre S_n e S_{2n+1} e portanto,

$$|S - S_n| \leq |S_n - S_{n+1}| = a_{n+1}.$$

De $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = 0$ resulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0.$$

(A desigualdade acima estabelece uma avaliação para o módulo do erro que se comete ao aproximar

a soma S pela soma parcial S_n : $|S - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k| \leq a_{n+1}$.)

Pela demonstração acima, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = S$. Como $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^n (a_{2k} - a_{2k+1})$, resulta $S = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_{2k} - a_{2k+1})$.

Se as séries $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}$ forem convergentes, teremos

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} - \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}.$$

□

Ou seja, S será a diferença entre a soma dos termos de ordem para e a soma dos termos de ordem ímpar.

Exemplo 1 A série $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln(k)}$ é alternada. Como a sequência $a_k = \frac{1}{\ln(k)}$, $k \geq 2$, é decrescente e $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(k)} = 0$, segue, pelo teorema acima, que a série dada é convergente.

4.2.2 Uma Condição Necessária para que uma Série Seja Convergente.

O próximo teorema conta-nos que uma condição necessária (mas não suficiente) para que a série

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ seja convergente é que $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$.

Teorema. Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ for convergente, então $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$.

Demonstração. Seja $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Sendo a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ convergente, existe um número real S , tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S.$$

Teremos, também $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S$. Como $a_n = S_n - S_{n-1}$, resulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [S_n - S_{n-1}] = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge} \implies \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

□

Segue do teorema acima o seguinte critério para testar a divergência de uma série.

4.2.3 Critério do Termo Geral para Divergência

Seja a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k \neq 0$ ou se $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k$ não existir, então a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ será divergente.

Exemplo 2 Verifique se as séries são convergentes ou divergentes.

- a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.
b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

Solução

a) Como $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ tem chance de ser convergente. Sabemos entretanto, que tal

série é divergente, pois trata-se de uma série harmônica de ordem 1, já demonstrada anteriormente.

b) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^3} = 0$; segue que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ tem chance de ser convergente. A série é convergente,

pois trata-se de uma série harmônica de ordem $\alpha = 3$.

4.3 Critérios de Convergência e Divergência para Séries de Termos Positivos

4.3.1 Critério da Integral

Consideremos a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e suponhamos que exista um natural p e uma função $f : [p, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

contínua, decrescente e positiva tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq p$. Nestas condições, tem-se

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_p^{+\infty} f(x) dx \text{ convergente} &\implies \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ convergente.} \\ \text{b) } \int_p^{+\infty} f(x) dx \text{ divergente} &\implies \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ divergente.} \end{aligned}$$

4.3.2 Critério de Comparação

Sejam as séries $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$. Suponhamos que exista um natural p tal que, para todo $k \geq p$,

$0 \leq a_k \leq b_k$. Nestas condições, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{(i) } \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ convergente} &\implies \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ convergente.} \\ \text{(ii) } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ divergente} &\implies \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ divergente.} \end{aligned}$$

4.3.3 Critério do Limite

Sejam $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ duas séries, com $a_k > 0$ e $c_k > 0$, para todo $k \geq q$, onde q é um natural fixo.

Suponhamos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{c_k} = L.$$

Então

a) Se $L > 0$, L real, ou ambas são convergentes ou ambas são divergentes.

b) Se $L = +\infty$ e se $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ for divergente, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ também será divergente.

c) Se $L = 0$ e se $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ for convergente, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ também será convergente.

4.3.4 Critério de Comparação de Razões

Sejam $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ duas séries de termos positivos. Suponhamos que exista um natural p tal que,

para $k \geq p$,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}.$$

Nestas condições, tem-se

a) $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ convergente $\implies \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ convergente.

b) $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ divergente $\implies \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ divergente.

4.3.5 Critérios da Razão

Seja a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, com $a_k > 0$ para todo $k \geq q$, onde q é um natural fixo. Suponhamos que

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ exista, finito ou infinito. Seja

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Então

- a) $L < 1 \implies \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ é convergente.
 b) $L > 1$ ou $L = +\infty \implies \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ é divergente.
 c) $L = 1$, o critério nada revela.

4.3.6 Critérios da Raiz

Seja a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, com $a_k > 0$ para todo $k \geq q$, onde q é um natural fixo. Suponhamos que

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k}$ exista, finito ou infinito. Seja

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k}$$

Então

- a) $L < 1 \implies \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ é convergente.
 b) $L > 1$ ou $L = +\infty \implies \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ é divergente.
 c) $L = 1$, o critério nada revela.

Exemplo 1 A série $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot \ln(k)}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução Vamos aplicar o critério da integral utilizando a função $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$, $x \geq 2$. Tal função

é positiva, contínua e decrescente em $[2, +\infty[$ como se verifica facilmente. Temos

$$\int_2^\alpha \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx = [\ln(\ln x)] = \ln(\ln \alpha) - \ln(\ln 2)$$

Como $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln(\ln \alpha) = +\infty$, resulta $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx = +\infty$. Pelo critério da integral, a série é divergente.

Exemplo 2 A série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k^2 + 2k + 1}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução $\frac{k}{k^2 + 2k + 1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}}$ para todo $k \geq 1$, então $1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} \leq 4$.

Segue que, para todo $k \geq 1$, $\frac{k}{k^2 + 2k + 1} \geq \frac{1}{4k}$.

Por comparação temos que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k} = +\infty$ (série harmônica) o que resulta

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k^2 + 2k + 1} = +\infty$ e, portanto, a série é divergente.

Exemplo 3 A série $\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot e^{-k}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução A série $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k}{2}}$ é convergente, pois trata-se de uma série geométrica de razão $q = e^{-\frac{1}{2}} < 1$.

Façamos $a_k = k \cdot e^{-k}$ e $c_k = e^{-\frac{k}{2}}$.

Temos $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{c_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{e^{\frac{k}{2}}} = 0$.

Pelo critério do limite, conclui-se que a série dada é convergente. Poderíamos, também, ter utilizado

a série harmônica $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ como série de comparação. Neste caso teríamos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{c_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k \cdot e^{-k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k^3}{e^k} = 0.$$

Pelos critérios do limite e da comparação, conclui-se que a série dada é convergente.

Exemplo 4 A série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução Seja $a_k = \frac{2^k}{k!}$, temos $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{2}{k+1}$

segue que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{k+1} = 0$.

Pelo critério da razão, a série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$ é convergente.

Exemplo 5 A série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução Vamos aplicar o critério da raiz. Temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k^3} = \frac{1}{3}$$

pois $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k^3} = 1$. Logo, a série é convergente.

5 Irracionalidade de π

O número π é definido como sendo a área limitada por um círculo de raio 1. Ele é certamente o irracional transcendente mais conhecido. A expressão *transcendente* significa, neste contexto, um número irracional que não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros.

Para Figueiredo, em [7], temos $\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{3}$ como exemplo para os irracionais, estes não são transcendentos, pois são raízes das equações polinomiais $x^2 = 2$, $x^2 - 2x - 2 = 0$, respectivamente. Neste último caso, dizemos que os números são algébricos. A irracionalidade de π foi, possivelmente, demonstrada pela primeira vez pelo matemático francês J. H. Lambert, em 1761, usando frações contínuas, porém não apresentou o rigor necessário. Finalmente foi (re)demonstrada, com todo rigor, pelo famoso matemático A. M. Legendre e publicada em 1855. A prova de que π é transcendente é muito mais complexa e só foi obtida em 1882 por F. Lindemann. A demonstração da transcendência de π pode ser encontrada em [14]. A demonstração da irracionalidade de π , que daremos a seguir, é devida a I. Niven, em artigo publicado em [17], no qual usou um método desenvolvido por Hermite para provar a transcendência do número e .

5.1 Demonstração da Irracionalidade de π .

A demonstração abaixo foi retirada de Figueiredo [8].

Proposição. *O número π é irracional.*

Demonstração: Considere a função

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \quad (2)$$

onde n é um número inteiro positivo. Agora afirmamos.

Lema 5.1 *Sejam f dadas em (2) e $D^k f(x)$ suas derivadas. Temos que $D^k f(0)$ é um número inteiro para qualquer $k = 1, 2, 3, \dots$, onde $D^k f$ representa a k -ésima derivada de f , e $D^0 f = f$.*

Demonstração. Vamos utilizar a chamada fórmula de Leibnitz para as derivadas de um produto de duas funções, g e h

$$D^k(gh) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^j g \cdot D^{k-j} h \quad (3)$$

O leitor que não estiver familiarizado com a expressão (3), poderá demonstrá-la por indução. Observe que $\binom{k}{j}$ são os coeficientes do Binômio de Newton, $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$. Aplicando (3) à função f definida em (2) temos

$$D^k f = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^j x^n D^{k-j} (1-x)^n \quad (4)$$

Agora observe que

$$D^j f(0)|_{x=0} = \begin{cases} 0 & \text{se } j < n \\ n! & \text{se } j = n \\ 0 & \text{se } j > n \end{cases} \quad (5)$$

onde a barra com o $x = 0$ que dizer que a derivada é calculada no ponto $x = 0$. Logo, de (4) e (5) concluimos

$$D^k f(0) = 0 \quad \text{se } k < n \quad (6)$$

e

$$D^k f(0) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n} n! D^{k-n} (1-x)^n |_{x=0}, \quad \text{se } k \geq n. \quad (7)$$

Como os coeficientes binomiais são inteiros, segue-se que a expressão no segundo membro de (7) é um inteiro. De (6) e (7) segue a demonstração.

Lema 5.2 *Sejam f dadas em (2) e $D^k f(x)$ suas derivadas. Temos que $D^k f(1)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.*

Demonstração. Segue-se diretamente do lema anterior e da observação de que $f(1-x) = f(x)$,

□

Observação 1. *Objetivo a partir deste ponto: supor que $\pi^2 = p/q$, onde p/q é uma fração irredutível, e chega a um absurdo, mostrando assim que π^2 não é racional. E, conseqüentemente, π também não pode ser racional, pois o quadrado de um racional é também um racional.*

Defina a função

$$F(x) = q^n \{ \pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} D^2 f(x) + \dots + (-1)^n D^{2n} f(x) \} \quad (8)$$

Como consequência dos Lemas 5.1 e 5.2, e da hipótese $\pi^2 = p/q$, temos que

$$F(0) \text{ e } F(1) \quad (9)$$

são números inteiros.

A seguir observe que

$$\{F'(x)\text{sen}\pi x - \pi F(x)\text{cos}\pi x\}' = F''(x)\text{sen}\pi x + \pi^2 F(x)\text{sen}\pi x, \quad (10)$$

onde a' representa a derivada.

Um cálculo imediato da derivada segunda, F'' , de F nos dá

$$\{F'(x)\text{sen}\pi x - \pi F(x)\text{cos}\pi x\}' = p^n \pi^2 f(x)\text{sen}\pi x. \quad (11)$$

Agora, aplicamos o teorema fundamental do cálculo integral que diz: "Se $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente derivável em $[0, 1]$, então $\int_0^1 g'(x)dx = g(1) - g(0)$ ". Use esse teorema para a função $g(x) = F'(x)\text{sen}\pi x - \pi F(x)\text{cos}\pi x$. Obtemos, então, em virtude de (11), que

$$p^n \pi^2 \int_0^1 f(x)\text{sen}\pi x dx = \pi F(1) + \pi F(0),$$

ou seja

$$\pi p^n \int_0^1 f(x)\text{sen}\pi x dx = F(1) + F(0), \quad (12)$$

A ideia para finalizar a demonstração é a seguinte: o lado direito de (12) é inteiro em virtude (9); portanto, se mostrarmos que para um $n \in \mathbb{N}$ conveniente, o lado esquerdo de (12) é um número positivo estritamente menor que 1, teremos o absurdo procurado!

Ora, é claro que para $0 < x < 1$, temos

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!} \quad (13)$$

Usando a desigualdade (13) em (12) temos

$$0 < \pi p^n \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} \pi x dx < \pi \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \operatorname{sen} \pi x dx = \frac{2p^n}{n!} \quad (14)$$

onde a última igualdade foi obtida fazendo-se a integração indicada. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p^n}{n!} = 0$, vê-se que podemos tomar um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2p^n}{n!} < 1$, e nosso objetivo está atingido. \square

6 Aplicações do Número π

Nesta capítulo vamos ilustrar algumas maneiras de se apresentar e determinar o número π dentro de um contexto.

6.1 Área do Paralelogramo

Como calcular a área de um círculo quase cinco milênios antes do cálculo integral ser inventado?

Segundo Beckmann [2], eles provavelmente utilizaram um método de decomposição de figuras. Eles calcularam a área de um retângulo como largura vezes o comprimento. A área de um paralelogramo é equivalente a de um retângulo, pois decompondo o paralelogramo em triângulos retângulo é possível reorganizar as peças de modo a obter o retângulo (Figura 12), logo a área de um paralelogramo é dado pela base vezes a altura.

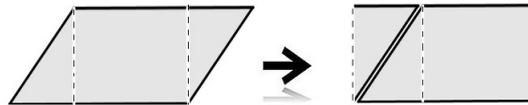


Figura 12: Recorte do paralelogramo para determinar sua área

Vamos tentar usar essa ideia geral de rearranjo como na figura acima para converter um círculo para um paralelogramo de mesma área.

Recortamos um círculo de raio r . Desenhamos nele inúmeros setores circulares todos com o mesmo ângulo central. Recortamos cada um dos setores circulares e rearranjamos de forma a obter o “paralelogramo” da Figura 13.

Imaginamos que esta figura se aproxima mais de um paralelogramo cada vez que aumentamos o número de setores. Como a área do paralelogramo é base vezes altura, a área deste paralelogramo

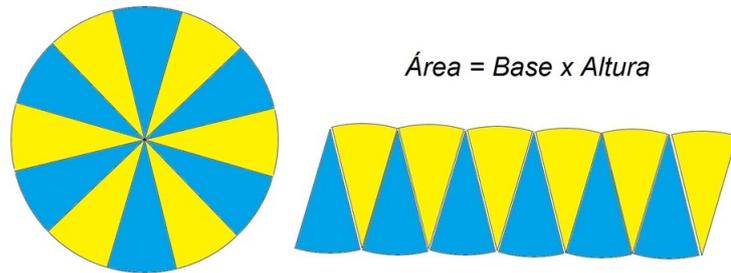


Figura 13: Área do Paralelogramo equivalente a do círculo

construído pelos setores circulares do círculo é igual a metade do comprimento da circunferência (base) vezes o seu raio (altura), assim

$$\text{Área do círculo} = \frac{2\pi \cdot r}{2} \cdot r = \pi \cdot r^2$$

6.2 A Agulha de Buffon

O número π aparece na teoria de probabilidade frequentemente, assim como faz em todos os ramos da matemática superior, mas em nenhum lugar sua aparição é mais fascinante do que em um problema proposto e resolvido por George Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788). Georges Louis Leclerc, foi um dos maiores naturalistas franceses de todos os tempos. Além dos trabalhos voltados ao naturalismo ele também desenvolveu seus conhecimentos de silvicultura, mineralogia e metalurgia, dedicando-se, nos intervalos de suas atividades, ao estudo da matemática e ao trabalho de tradução.

A agulha de Buffon é um problema de probabilidade proposto pelo cientista, no início do século XVIII, utilizando o método de simulação de Monte Carlo. Através dele deseja-se chegar a um valor aproximado para π .

De acordo com Nelson, em [16], Buffon propôs:

Considere uma família de retas paralelas em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde duas retas paralelas adjacentes arbitrarias

distam de d . Tendo-se lançado, ao acaso, sobre o plano, uma agulha de comprimento L , tal que $L \leq d$, determinar a probabilidade P de que a agulha intercepte uma das retas. Na Figura 14 temos inúmeras tentativas de lançamento da agulha.

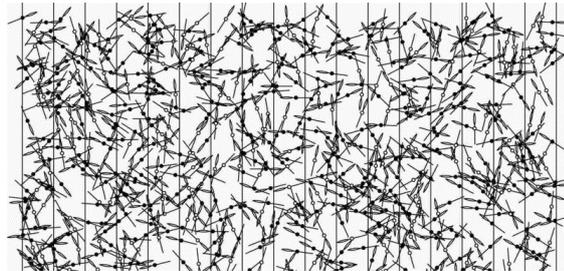


Figura 14: Agulhas interceptando ou não retas paralelas

Assumimos que, ao acaso, significa que qualquer posição e qualquer orientação da agulha são igualmente prováveis e que estas duas variáveis aleatórias são independentes. Admita a distância do ponto médio da agulha a partir da linha mais próxima é x , e que a menor inclinação formada entre a reta e a agulha seja θ (Figura 15). Como x é medido a partir da linha mais próxima, consideramos uma única linha, porque os outros envolvem a repetição apenas da mesma solução.

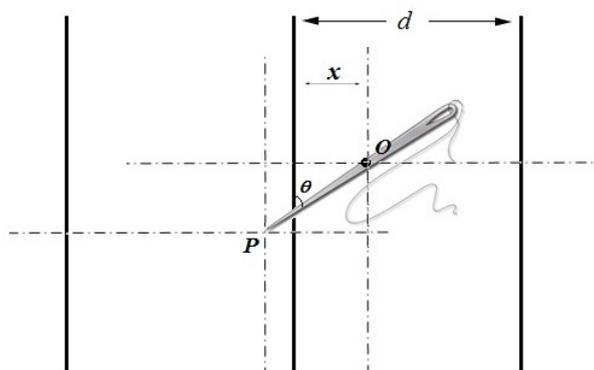


Figura 15: Ângulo θ entre a agulha e as retas paralelas

A posição da agulha, em relação à reta mais próxima, é individualizada pelos valores de $x \in \left[0, \frac{d}{2}\right]$

e $\theta \in [0, \pi]$. Ainda na figura 15, deduz-se que a agulha interceptará a reta mais próxima se $x \leq \frac{L}{2} \cdot \text{sen}\theta$, ou seja, se o ponto (θ, x) , que individualiza a reta mais próxima, pertencer a qualquer ponto da região hachurada A da Figura 17.

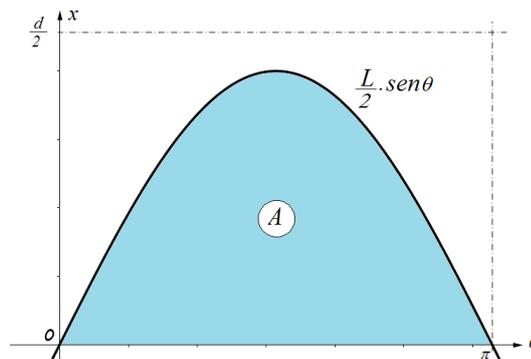


Figura 16: $x \leq \frac{L}{2} \text{sen}\theta$

Observe que a região retangular é dada por todos os pontos do produto cartesiano $[0, \pi] \times \left[0, \frac{d}{2}\right]$. A probabilidade de um evento é dada pela razão dos casos favoráveis pelo espaço amostral. Os casos favoráveis são representados pela área da região A e o espaço amostral é a área da região determinada pelo produto cartesiano $[0, \pi] \times \left[0, \frac{d}{2}\right]$.

Sendo P a probabilidade da agulha tocar uma das linhas paralelas, temos

$$P = \frac{\int_0^{\pi} \frac{L}{2} \text{sen}\theta d\theta}{\pi \cdot \frac{d}{2}} = \frac{2L}{\pi \cdot d}$$

Em se tratando de uma probabilidade experimental, a probabilidade da agulha tocar uma das linhas do plano deve ser determinada pela razão $\frac{k}{n}$, sendo k o número de vezes em que a agulha intercepta uma reta e n o número de lançamentos. Esta razão deve se aproximar cada vez mais de $\frac{2L}{\pi \cdot d}$, quanto maior for o número de lançamentos de n , isto é, para n muito grande, $\pi \cong \frac{2nL}{k \cdot d}$.

Assim podemos calcular o valor de π por um método experimental. A tabela a seguir foi extraída

de Gridgeman [9] e contém alguns dados sobre experiências realizadas com agulha, para determinação de π .

| Autor/ano | Razão L/d | n | k | Aproximação para π |
|------------------|-----------|------|------|------------------------|
| Wolf (1850) | 0,8 | 5000 | 2532 | 3,1596 |
| Smith (1855) | 0,6 | 3204 | 1219 | 3,1553 |
| De Morgan (1860) | 1,0 | 600 | 383 | 3,137 |
| Fox (1864) | 0,75 | 1030 | 489 | 3,1595 |
| Lazzerini (1901) | 0,83 | 3408 | 1808 | 3,1415929 |
| Reina (1925) | 0,5419 | 2520 | 859 | 3,17195 |

Figura 17: Aproximações para π pelo método experimental

6.3 Séries - Apresentar Convergência de Séries na Planilha do Excel

Em um último período vários matemáticos buscaram através de séries um número cada vez maior de casas decimais do número π . Para avaliar se uma dessas séries é mais ou menos eficiente que outra, apresentaremos, através da planilha do Excel, algumas recorrências que mostram as várias iterações que geram as casas decimais do π .

Com base na análise de Arquimedes, temos que o perímetro de um polígono regular inscrito se aproxima do comprimento da circunferência quanto maior for o número de lados. Também demonstramos que:

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$$

Partindo deste princípio temos:

Para l_4 temos o polígono regular de 4 lados, quadrado, inscrito num círculo de raio 1. Por Pitágoras $l_4 = \sqrt{2}$. Então:

Perímetro = $4 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} = 5,656854\dots$, gerando um $\pi = 2,828427\dots$

Utilizaremos um processo iterativo para determinar com mais precisão o valor de π .

Para cada $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ temos $n = 2^k$, então para $k = 1 \implies n = 2$, para $k = 2 \implies n = 4$ e assim sucessivamente.

Obteremos a seguinte sequência para $k = 1, 2, 3, \dots$:

Para $k = 1$ temos $n = 2$ assim $l_4 = \sqrt{2}$, ou seja um quadrado inscrito em uma circunferência de raio igual a 1 possui o seu lado igual a $\sqrt{2}$.

Para $k = 2$ temos $n = 8$ assim $l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_4^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, ou seja um octógono regular inscrito em uma circunferência de raio igual a um possui o seu lado igual a $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Este processo pode se repetir infinitas vezes, gerando uma série que converge para 2π .

Vamos verificar isto através de uma planilha construída pelo Excel.

$$l_4 = \sqrt{2}, \quad l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad l_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad l_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \dots$$

| n | $2n$ | l_{2n} | Perímetro | Valor de π |
|-------|-------|--------------|--------------|---------------------|
| | 4 | 1,4142135623 | 5,6568542494 | 2,8284271247 |
| 4 | 8 | 0,7653668647 | 6,1229349178 | 3,0614674589 |
| 8 | 16 | 0,3901806440 | 6,2428903045 | 3,1214451522 |
| 16 | 32 | 0,1960342806 | 6,2730969810 | 3,1365484905 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 2048 | 4096 | 0,0015339806 | 6,2831846912 | 3,1415923456 |
| 4096 | 8192 | 0,0007669903 | 6,2831851530 | 3,1415925765 |
| 8192 | 16384 | 0,0003834951 | 6,2831852669 | 3,1415926334 |
| 16384 | 32768 | 0,0001917475 | 6,2831853096 | 3,1415926548 |
| | | | | 3,1415926535 |

Figura 18: Planilha 1 - Convergência por Arquimedes

Podemos observar que na décima quarta iteração obtemos um valor para π com oito casas decimais corretas.

Segundo Guzzo, em [10], em um outro momento Euler usou a série a seguir e calculou em uma

hora, 20 casas decimais para π .

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n (n!)^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!(1+x^2)^{n+1}},$$

Usando $x = 1$, obtemos a fórmula

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)^2},$$

Vamos verificar as iterações na planilha apresentada a seguir.

| n | 2^{n+1} | $(2n+1)!$ | $(n!)^2$ | $\frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$ | $\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$ |
|-----|-------------|-------------|-------------|----------------------------------|---|
| 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2,0000000000000000 |
| 1 | 4 | 6 | 1 | 0,666666667 | 2,666666666666667 |
| 2 | 8 | 120 | 4 | 0,266666667 | 2,933333333333333 |
| 3 | 16 | 5040 | 36 | 0,114285714 | 3,04761904761905 |
| 4 | 32 | 362880 | 576 | 0,050793651 | 3,09841269841270 |
| 5 | 64 | 39916800 | 14400 | 0,023088023 | 3,12150072150072 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 43 | 1,75922E+13 | 2,1078E+132 | 3,65E+105 | 3,04644E-14 | 3,14159265358976 |
| 44 | 3,51844E+13 | 1,6508E+136 | 7,0664E+108 | 1,5061E-14 | 3,14159265358978 |
| 45 | 7,03687E+13 | 1,352E+140 | 1,4309E+112 | 7,44777E-15 | 3,14159265358979 |
| | | | | | 3,14159265358979 |

Figura 19: Planilha 2 - Convergência por Euler

Observe que na quadragésima quinta iteração podemos calcular com precisão quatorze casas decimais do π .

6.4 Crop Circle (Cultura de Círculos)

Na descrição do site [19], um dos fenômenos sem explicações demonstráveis que mais atrai nossa atenção é, sem dúvida, o dos círculos nos campos de trigo. Chamados de círculos ingleses ou crop

circles (cultura dos círculos), em sua maioria, aparecem com maior incidência, na Inglaterra. Esses surpreendentes e magníficos desenhos foram mundialmente percebidos nos anos 80, despertando a curiosidade de muita gente. É de conhecimento que a grande maioria deles são feitos por hábeis mãos humanas neste peculiar hobby.

Em 1991, um desses círculos deixou entusiastas e especialistas perplexos. Esculpida em um campo de cevada (figura 20, de [19]), este padrão de 50 metros de diâmetro, é dito ser uma representação pictórica dos 10 primeiros dígitos do número π , um dos símbolos mais fundamentais na matemática.



Figura 20: Barbury Castle Crop Circle

Os crentes em extraterrestres poderiam argumentar que os círculos foram feitos por alienígenas matematicamente entusiasmados durante uma visita a Terra. Os céticos vão pensar que é o trabalho de seres humanos com uma predileção por números e uma propensão para quebra cabeça. Mas todos são capazes de afirmar que é a cultura de círculos mais complexa já vista na Grã-Bretanha.

“O fato de que o número irracional π está criteriosamente apresentado com corretas dez casas decimais”, observou o astrofísico Michael Reed. Lucy Pringle, que passou décadas pesquisando círculos, disse que embora ela pensou que alguns eram feitas pelo homem, ela achou difícil acreditar que um círculo tão complexo poderia ter sido criado por seres humanos. Ela acrescentou: “Você pode fazer

isso em um computador, mas tente colocar isso em um campo no meio da noite e conseguir esse grau de precisão matemática”.

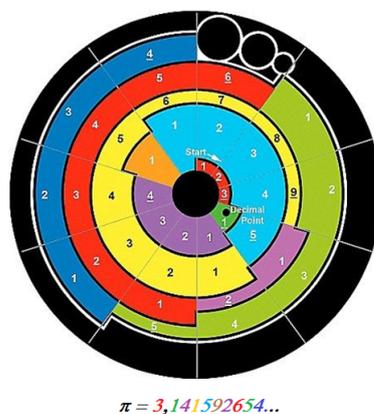


Figura 21: As dez primeiras casas decimais do π

Embora pareça complicado à primeira vista, o enigma faz sentido, observe a figura 21, retirada de [19]. São dez círculos concêntricos, onde a variação dos raios determinam dez setores circulares cada um com 36° . A imagem codificada retrata 3,141592654, os primeiros 10 dígitos do π , sendo que o décimo dígito está arredondado.

7 Sugestão de Aula

Uma aula que sobre o número π tem como objetivo apresentar sua definição, histórico, as formas de calcular seu valor e suas aplicações. A partir destes objetivos, espera-se conseguir uma valorização das referências históricas para fundamentação de ideias, mesmo que elas se prolonguem por séculos. Adicionar ferramentas do ensino da geometria reconhecendo o desenho geométrico como princípio e não somente ilustração. Inclusão da tecnologia na educação associado as noções básicas de limite e convergência. Para realização deste trabalho serão necessários: régua, compasso, um par de esquadros e um computador que contenha os programas Excel e GeoGebra, ou similares. Esta aula deve seguir os seguintes procedimentos.

(i) Apresentação da definição e histórico do número π evidenciando:

- O senso comum (razão entre o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro)
- Trecho da Bíblia segundo Salomão.
- O intervalo em que o número π está contido, segundo Arquimedes.
- A série de Gregory - Leibniz ($\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$).
- Evolução no cálculo das casas decimais do π com o uso do computador.

(ii) A quadratura do círculo: construir com régua e compasso um quadrado de mesma área que um círculo dado, ou seja, .

- Apresentar o problema analiticamente.
- Apresentar o número π como um número irracional.

- Sugerir uma das construções que se aproximam da quadratura (com régua e compasso ou com o GeoGebra).

- Definir um número transcendente para mostrar a impossibilidade da quadratura do círculo.

(iii) Convergência de Séries

- Construir a relação de Arquimedes $l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$ utilizando o teorema de Pitágoras.

- Construir a série que gera os perímetros de alguns polígonos regulares inscritos, para mostrar a aproximação do seu perímetro com o comprimento da circunferência.

- Determinar a convergência da série acima, utilizando a planilha do Excel.

(iv) Aplicações do π .

- Propor exercícios dentro de contextos como área de figuras planas, trigonometria e volume de sólidos (esfera, cone e cilindro).

- Sugerir uma série para que os alunos determinem a maior quantidade de casas decimais do π utilizando a planilha do Excel.

8 Conclusão

O trabalho relata a riqueza matemática em que o número π está inserido. Temos π aproximado para a fração $\frac{22}{7}$, o decimal $3,14$ ou a quase precisão de $3,141592653589793238462643383279\dots$. Os vários métodos para alcançar tais aproximações podem ser explorados em todas as etapas da aprendizagem, seja o ensino básico, médio ou superior. Em todas elas é relevante observar a importância do desenho geométrico, da subdivisão dos conjuntos numéricos e mais que nunca, das ferramentas computacionais. É válido destacar a genialidade e originalidade de Arquimedes (287-212 a. C), Gottfried Leibniz (1646-1716) e Leonhard Euler (1707-1783 d. C).

O desenho geométrico é fundamental para o ensino da matemática. Apresentar o desenho como uma construção, desprendido de valores numéricos, ajuda na organização de ideias, coordenação motora, criatividade e compreensão de operações básicas como multiplicar por dois, dividir por três, ângulos retos, etc. No atual currículo, o número π está restrito à sua definição e a alguns exemplos de comprimento da circunferência, área e volume de figuras e sólidos circulares. O problema da quadratura do círculo está extinto dos livros didáticos, com ele é possível concretizar a retificação da circunferência, a fim de determinar aproximações razoáveis para π .

As séries estudadas no ensino médio são as progressões aritméticas, as geométricas e excepcionalmente a de Fibonacci. A sequência gerada por Arquimedes, relacionando as medidas dos lados de um polígono regular de n lados e outro de $2n$ lados, ambos inscritos numa mesma circunferência, pode ser abordada, com o objetivo de trabalhar as noções elementares de limite em paralelo com a soma dos infinitos termos das progressões geométricas, com o benefício de apresentar convergência de séries associada à geometria.

O conjunto dos números irracionais tem o número π como seu maior representante, ainda assim sua irracionalidade não é acessível a todos. Determinar π com suas incontáveis casas decimais requer paciência e uma boa calculadora. Utilizando a ideia proposta por Arquimedes, o recorde de casas decimais alcançou a precisão de 35 casas no século XV e foi lentamente superada, com auxílio de Euler, para 126 casas, somente no século XVIII, ou seja, uma média de três casas por década. Os computadores acrescentaram agilidade e critério na sua determinação. A planilha do Excel ou a do linux (entre as planilhas mais populares) são capazes de gerar com precisão até quinze casas precisas do número π . Para isto é necessário um raso conhecimento de recorrência e algumas séries que geram π , como o Problema da Basiléia ou a série de Gregory-Leibniz.

O registro do esforço humano persistiu por séculos, em que o objetivo a ser alcançado era incerto. Quando olhamos para trás, a paciência da mente humana foi capaz de apreciar e superar as dificuldades da limitação de cada etapa da história. Observamos quando novas ferramentas se tornam disponíveis, uma nova geração de pensadores vira-se para a análise de novas perspectivas. A aleatoriedade da história traz, como as leis da mecânica, e em última análise, de toda a natureza, fragmentos de evidências. O número π é apenas um elemento do conjunto Matemática, que por sua vez, um subconjunto da História da Humanidade.

Referências

- [1] ÁVILA, G.. *Euler e o problema da Basileia*. Matemática Universitária n.42, p.9-12, Jun 2007.
- [2] BECKMANN, Petr. *A History of π* . St. Martin's Press, New York, 1971.
- [3] BONGIOVANNI, Vincenzo e Watanabe, Renate. *π acaba?*. RPM 19, Rio de Janeiro, 1991.
- [4] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Editora Edgard Blucher, São Paulo, 1974.
- [5] EULER, Leonhard, trad. John D. Blanton. *Leonhard Euler - Introduction To Analysis Of The Infinite - Book I*. Springer - Verlag, New York, 1988.
- [6] FETTI, Domenico. *Archimedes*. Em http://en.wikipedia.org/wiki/File:Domenico_Fetti_Archimedes1620.jpg, 2013, óleo sobre tela. Acesso: em 03 mar. 2013.
- [7] FIGUEIREDO, Djairo G. *Números Irracionais e Transcendentes*. SBM, Rio de Janeiro, 1980.
- [8] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo - Volume 4*. LTC, São Paulo, 1999.
- [9] GRIDGEMAN, N. T. *Geometric Probability and the number π* . Scripta Mathematica 25 (1960), pp. 183-195.
- [10] GUZZO, Sandro Marcos. *O número π* . Revista Eletronica de Matemática no. 2. UFG, Jataí, 2010.

- [11] HOBSON, E. W. *"Squaring the Circle" A History of the Problem*. Cambridge: at the University Press, Cambridge, 1913.
- [12] KUMAYAMA, Hideo. *Retificação de Uma Circunferência e a Determinação Geométrica de π* . RPM 20, São Bernardo do Campo - SP, 1992.
- [13] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. SBM, Rio de Janeiro, 1991.
- [14] MORITZ, R. . *Annals of Mathematics*, vol. 2 p. 57. 1901.
- [15] NAGEH. Em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Record_pi_approximations.svg, maio de 2012. Acesso: em 10 de jan. 2013.
- [16] NELSON, Tunala. *Determinação de Probabilidade por Métodos Geométricos*. RPM 20, Rio de Janeiro, 1992.
- [17] NIVEN I. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 53 p. 509. 1947.
- [18] POSAMENTIER, Alfred s. e Lehmann, Ingmar. *π : A biography of the world's most mysterious number*. Prometheus Books, New York, 2004.
- [19] REED, Michael. Em <http://lightworkers.org/blog/34229/2008-barbury-castle-pattern-pi-314159265358>, junho de 2008. Acesso: em 09 de fev. 2013.
- [20] TSABAN, Boaz e David Garber. *On the Rabbinical Approximation of π* , Article no. HM972185. Historia Mathematica 25, Ramat-Gan, Israel, 1998.