COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Fabio de Almeida Benzaquem

ATIVIDADES ATRATIVAS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Rio de Janeiro
2019

Fabio de Almeida Benzaquem

ATIVIDADES ATRATIVAS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof(a). Dra. Patrícia Erthal

Rio de Janeiro

2019

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

B479 Benzaquem, Fabio de Almeida

Atividades atrativas para o ensino de probabilidade / Fabio de Almeida Benzaquem. – Rio de Janeiro, 2019.

76 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Patrícia Erthal de Moraes.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Probabiblidade. 3. Jogos. I. Moraes, Patrícia Erthal de. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Fabio de Almeida Benzaquem

ATIVIDADES ATRATIVAS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr^a Patrícia Erthal de Moraes(Orientador)

Colégio Pedro II

____

Prof. Dr Diego de Souza Nicodemos

Colégio Pedro II

____

Prof. Dr^a Christine Sertã Costa

PUC-RJ

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço a minha família, que acreditou em mim e me apoiou, em especial aos meus pais Clea e Rodolpho, a minha segunda mãe Luciene, pois sempre estiveram me dando força, nos momentos de maior dificuldade.

A minha esposa, Rachel, por sempre me incentivar e não deixar que eu desistisse do meu intento.

Aos meus amigos Ronald Simões, Carlos Roberto e Anderson, que juntos deram-me forças nessa caminhada.

Aos professores do PEDRO II que dedicaram empenho para a realização desse programa, em especial a professora Patrícia Erthal, que aceitou a árdua tarefa de me orientar nesse trabalho.

Aos funcionários do Ensino que participaram dessa caminhada junto com a gente.

A SBM e a CAPES pela iniciativa, por acreditar nesse projeto e principalmente, por acreditar em nós.

Aos meus alunos que fazem parte da minha história.

RESUMO

BENZAQUEM, Fabio de Almeida. **Atividades atrativas para o ensino de probabilidade.** 2019. 76 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

A inserção de Probabilidade nos Currículos Escolares tem sido notada desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, dada a sua importância no entendimento de diversas situações do dia-a-dia, como a sua utilidade para tomadas de decisões. Associado a esses fatores, se trata de um conteúdo que não requer muitos pré-requisitos para o seu entendimento inicial. Pensando na sua importância, percebemos a necessidade de se estudar Probabilidade de uma maneira mais lúdica e contextualizada em sala de aula, a partir de propostas que tratam o aluno como centro do processo ensino aprendizagem. Para isso, nesse Trabalho, são apresentadas uma coletânea de atividades que envolvem o pensamento probabilístico associado a jogos, a problemas instigantes, que despertam a curiosidade dos alunos; a problemas de tomada de decisões, entre outros.
Todas as atividades são de fácil aplicabilidade, e podem ser adaptadas a diversos contextos escolares. Deseja-se que essas atividades possam servir de recursos para uma prática que torne o ensino da matemática mais atraente e significativo.

Palavras chaves: Probabilidade; Educação; Jogos.

ABSTRACT

BENZAQUEM, Fabio de Almeida. **Atividades atrativas para o ensino de probabilidade.** 2019. 76 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

The insertion of Probability in School Curricula has been noticed since the initial series of Elementary School, given its importance since the need to understand different situations of daily life, as its usefulness for decision making. Associated with these factors, it is a content that does not require many prerequisites for your initial understanding. Thinking about its importance, we realized the need to study Probability in a more playful and contextualized way in the classroom, based on proposals that treat the student as the center of the learning teaching process. For this, in this Work, a collection of activities that involve probabilistic thinking associated to games, to intriguing problems, that awaken students curiosity are presented; to problems of decision making, among others. All activities are easy to apply and can be adapted to various school contexts. It is hoped that these activities could serve as resources for a practice that makes mathematics teaching more attractive and meaningful.

Keywords: Probability; Education; Games.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O surgimento dos primeiros conceitos de Probabilidade estão intimamente ligados aos jogos de azar. É desejável que a introdução do conceito de probabilidade, faça menção a temática desses jogos. Tal abordagem tem uma dupla vantagem: foge de problemas artificiais, como bolinhas em uma urna, e estimula uma reflexão a respeito dos jogos de azar, loterias no Brasil e no mundo. Além do mais, estimula o interesse do aluno na disciplina.

O estudo da teoria de Probabilidade, no entanto, não ficou restrito somente aos jogos de azar, sua eficácia é demonstrada em outras áreas de conhecimento como na Biomédica, Economia, Seguros, Política, etc.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997;2000) enfatizam que o ensino de Matemática, especificamente, deve procurar contemplar, dentre seus objetivos para a melhoria desta disciplina, o desenvolvimento de capacidades de ordem cognitiva, física, afetiva, de relação interpessoal e inserção social, ética e estética, de forma ampla, de seus aprendizes. O aluno, através de suas necessidades cotidianas, deve reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, ser capaz de desenvolver capacidade para lidar com a atividade matemática. A aprendizagem será possível na medida em que o professor proporcionar um ambiente de trabalho que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar ideias, considerando o aluno como sujeito da construção do seu conhecimento. Ainda, conforme a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática, este ensino deve abordar questões e metodologias que desafiem o aluno e favoreçam a sua criatividade na busca de estratégias para solucionar situações-problema.

O objetivo principal desse trabalho é fornecer uma proposta didática-pedagógica onde serão apresentadas uma coletânea de atividades que buscará de forma lúdica e experimental construir paulatinamente os conceitos de Probabilidade. Batanero (2005) defende que o processo de ensino-aprendizagem dos alunos deva ser feita de forma gradual, baseado em seus erros e acertos e que o professor tem papel importante no ensino de Probabilidade, pois este deve estar ciente que, ao longo deste processo, o estudante terá as mesmas dificuldades e paradoxos da época que surgiu o desenvolvimento histórico no cálculo de probabilidades.

Esse Trabalho está dividido em três partes. No Capítulo II, Um Pouco de História, iremos tratar da História da Probabilidade desde o século XV até o século XX, onde apresentamos os matemáticos que contribuíram imensamente para o desenvolvimento desse campo de estudo, bem como os problemas relacionados à Probabilidade por eles estudados.

No Capítulo III, serão definidos alguns conceitos básicos de Probabilidade, como experimento determinístico, experimento aleatório, espaço amostral, evento, entre outros, que serão importantes para um melhor entendimento das atividades. Abordaremos também alguns resultados da Teoria de Probabilidades, apresentando alguns exemplos.

A contribuição principal desse Trabalho se encontra no Capítulo IV, onde serão apresentadas diversas atividades envolvendo Jogos ou Problemas relacionados à Probabilidade. Os Jogos têm as características de serem experimentais e exploratórios, no sentido que, a partir de seus desenvolvimentos e resultados podem-se construir ou constatar propriedades da teoria em questão. Os Problemas foram selecionados de acordo com a importância do assunto tratado, bem como pela curiosidade que poderiam suscitar nos alunos.

Este trabalho é voltado para o professor de matemática da escola básica, alunos da licenciatura em matemática e, de modo geral, para qualquer pessoa interessada em questões ligadas à Probabilidade.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

2.1 Pré-História

Não se sabe ao certo quando o homem começou a utilizar os conceitos de Probabilidade, mas,

> Como o jogo de azar é uma das mais antigas atividades de lazer, é provável que desde os tempos mais primordiais as pessoas tenham considerado as ideias básicas de probabilidade, pelo menos uma base empírica, e, em particular, tinham pelo menos uma vaga concepção de como calcular as probabilidades de ocorrência de qualquer evento num jogo de apostas. Encontraram-se dados provenientes de várias culturas antigas. (KATZ, 2010, p.565).

Segundo Viali (2008) um dos primeiros jogos a se ter uma manifestação probabilística foi o Tali (jogo de ossos) praticado com astrágalos, uma espécie de osso animal (carneiro) e semelhante a um tetraedro irregular onde suas faces não eram idênticas e não tinham a mesma frequência de ocorrência conforme Tabela 1. “As faces maiores eram numeradas com 3 e 4 e as duas menores por 1 e 6”. (VIALI, 2008, p.144).

Babilônios, Egípcios, Gregos e Romanos usavam esse jogo para previsões sobre o futuro e divisão de heranças(CALABRIA,2013).

Figura 1 – Jogo do osso

Fonte: Revista Bras. História da Matemática, v.8, nº16, 2008

Tabela 1- Frequências de cada face no jogo

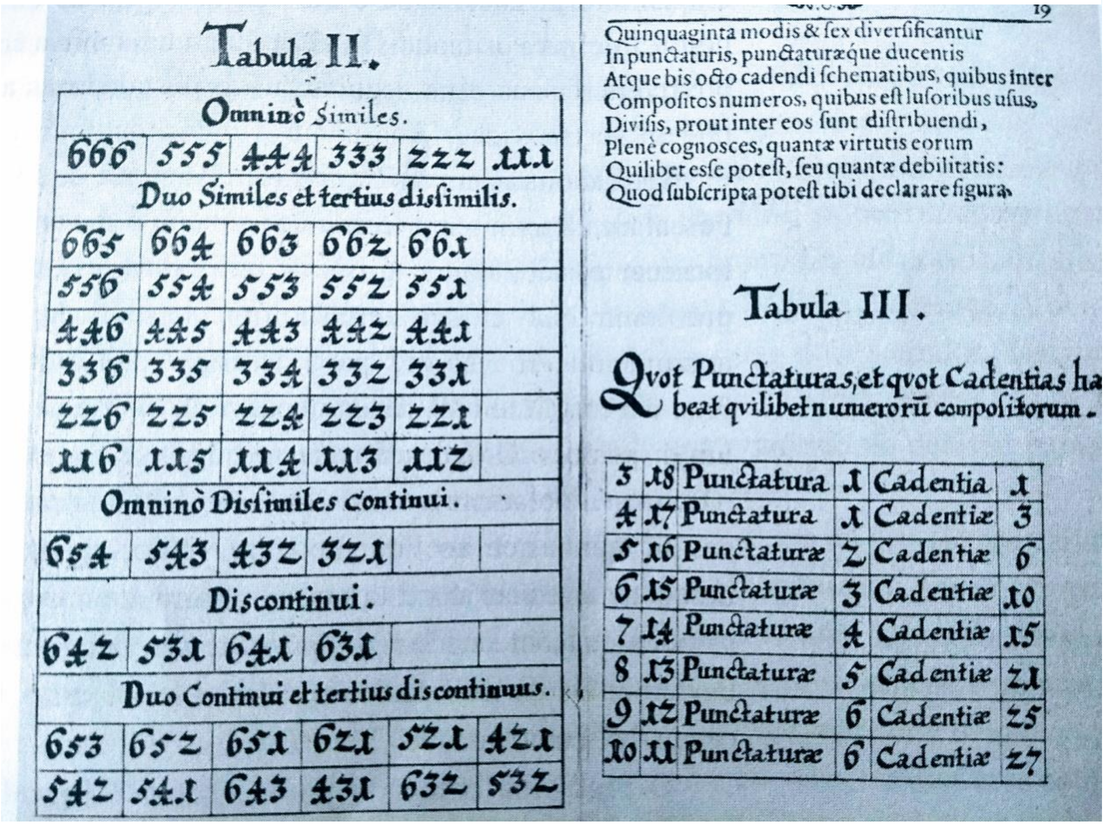
FACES	1	3	4	6
FREQUÊNCIAS	0,12	0,37	0,39	0,12

Fonte: Revista Bras. História da Matemática, v.8, nº16, 2008

“Um tratamento mais formal dos jogos de azar consistiu inicialmente na **enumeração** das possibilidades de o jogo fornecer um determinado resultado”.(VIALI, 2008, p.144). Um dos primeiros registros foi o do bispo belga Wilbold de Cambrai, que ainda na Idade Média em torno de 960 desenvolveu um jogo relacionados as virtudes. Ele foi um dos primeiros a conjecturar os números de casos no lançamento de dois dados, no caso (6.5)/2+6 = 21 maneiras, pois não considerava a ordem na qual aconteciam e (6.5.4)/6 + (6.5/2).2+6 = 56 (três distintos, 2 iguais e um diferente, 3 iguais) formas no caso do lançamento de três dados.

Katz (2010) afirma que o primeiro relato da qual as 56 formas como os três dados caem não eram equiprováveis (igualmente prováveis) ocorre num poema em latim de um anônimo, De Vetula, escrito entre 1200 e 1400: “Se os três [dados] são iguais há apenas uma forma para cada número; se dois são iguais e um diferente há três formas; e se todos são diferentes há seis formas". (KATZ, 2009, p.568). Em tal situação, de acordo com a regra estabelecida acima mostra-se que o número total de casos para três dados é de 216.

Figura 2 - Páginas de De Vetula mostrando as 56 possibilidades para três dados



Tabula II.

Omninò Similes.					
666	555	444	333	222	111

Duo Similes et tertius dissimilis.				
665	664	663	662	661
556	554	553	552	551
446	445	443	442	441
336	335	334	332	331
226	225	224	223	221
116	115	114	113	112

Omninò Dissimiles continui.			
654	543	432	321

Discontinui.			
642	531	641	631

Duo Continui et tertius discontinuus.					
653	652	651	621	521	421
542	541	643	431	632	532

19

Quinquaginta modis & sex diversificantur
In punctaturis, puncturæque ducentis
Atque bis octo cadendi schematibus, quibus inter
Compositos numeros, quibus est lusoribus usus,
Divisis, prout inter eos sunt distribuendi,
Plenè cognosces, quantæ virtutis eorum
Quilibet esse potest, seu quantæ debilitatis:
Quod subscripta potest tibi declarare figura.

Tabula III.

Qvot Punctaturas, et qvot Cadentias habeat qvilibet numerorū compositorum.

3	18	Punctatura	1	Cadentia	1
4	17	Punctatura	1	Cadentiæ	3
5	16	Punctaturæ	2	Cadentiæ	6
6	15	Punctaturæ	3	Cadentiæ	10
7	14	Punctaturæ	4	Cadentiæ	15
8	13	Punctaturæ	5	Cadentiæ	21
9	12	Punctaturæ	6	Cadentiæ	25
10	11	Punctaturæ	6	Cadentiæ	27

Fonte: História da Matemática Victor J. Katz

2.2 Luca Pacioli, Tartaglia, Cardano, Galileo e o Problema envolvendo 3 dados

Os italianos entre os séculos XV e XVI foram os precursores nos cálculos probabilísticos, porém Viali (2008) aponta que estes não formularam conceitos e teoremas, limitaram-se apenas a resolver problemas práticos.

Frei Luca Pacioli ou Paciolo (1445-1517) mais conhecido como Luca di Bargo destacou-se por sua importante obra denominada *Summa*, em Veneza (1494), que o colocou na história do desenvolvimento da Probabilidade e também foi o primeiro autor conhecido que estudou os jogos de azar (VIALI, 2008). Em sua obra Pacioli dedica-se ao Problema dos Pontos que consistia num jogo equitativo entre dois jogadores que terminaria quando um deles vencesse seis partidas. Supondo-se um motivo qualquer o jogo fosse interrompido quando o primeiro jogador já tivesse ganho cinco partidas e o segundo apenas três. Como se daria tal divisão de apostas? “A resposta de Pacioli para a divisão das apostas era que elas deviam ser repartidas na proporção de 5 para 3”. (KATZ, 2010, p.568).

Figura 3- Pacioli

Fonte: Fonte: Revista Bras. História da Matemática, v.8, nº16, 2008

Nicolo Fontana (1499-1557), mais conhecido como *Tartaglia,* cerca de 60 anos mais tarde em sua obra *Generale Trattato* (Tratado Geral) dedicou algumas páginas ao Problema dos Pontos. Neste problema, verificou que tal argumento proposto por Pacioli estava incorreto. Tartaglia notou que tal raciocínio implicava que se o primeiro jogador tivesse vencido uma partida e o segundo nenhuma quando o jogo foi interrompido, o primeiro jogador recolheria todas as apostas o que é, evidentemente, injusto pois o segundo jogador ainda teria chance de vencer. Tartaglia argumentou que uma vez que a diferença entre os dois resultados era de dois jogos, um terço do número necessário para vencer, o primeiro jogador devia ficar com um terço da parte do segundo da aposta, e logo a aposta total devia ser repartida numa proporção 2 para1.

Tartaglia também não ficou convicto de sua reposta num trecho de sua obra conclui que “a resolução de uma tal questão é judicial mais do que matemática, porque qualquer que seja a forma de fazer a divisão haverá motivo para litigação”.(KATZ,2010,p.568).

Figura 4- Tartaglia

Fonte: Revista Bras. História da Matemática, v.8, nº16, 2008

Girolamo Cardano (1501-1576), segundo Viali (2008) foi o pioneiro no cálculo de probabilidades, seu livro Liber de Ludo Aleae (Livro sobre jogos de azar) publicado em 1663 tratava-se de um manual sobre jogos de azar, na qual era aficionado. Cardano foi “o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento e também a considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis”. (VIALI, 2008, p.146)

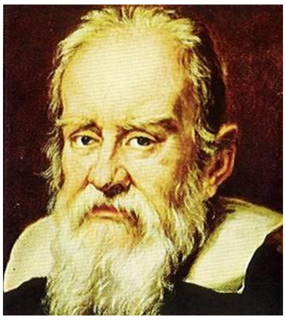
Mazur (2016) afirma que atualmente o *Liber de Ludo Aleae*, representa um marco na teoria das probabilidades, do valor esperado, médias aritméticas, tabelas de frequências, propriedades aditivas da probabilidade, cálculo das combinações do modo de ter *K* sucessos em *N* tentativas.

Figura 5 - Cardano

Fonte: Revista Bras. História da Matemática

Cardano dedicou boa parte de seus estudos aos jogos de dados. Em sua época não se tinha uma teoria matemática a respeito dos jogos de azar e não havia uma noção bem estudada de explicações simples a respeito de “possibilidades”. Até mesmo os gregos, que se destacavam em outras áreas da Matemática, não tinham uma teoria acerca do assunto. Os matemáticos de outrora não pensavam nos motivos pelos quais determinados números apareciam com mais frequência do que outros.

Figura 6- Galileo



Fonte: Revista Bras. História da Matemática, v.8, nº16, 2008

Galileo Galilei (1564-1642), quase meio século depois da morte de Cardano, em seu manual sobre jogos, o *Sopra le scoperta dei dadi* (Sobre Jogos de dados), foi o primeiro a resolver quantitativamente um problema concreto de probabilidades. No que se refere ao lançamento de três dados, Galileo observou que considerando as parcelas, por exemplo, para obter soma 9 temos: 6,2,1; 5,3,1; 5,2,2; 4,4,1; 4,3,2; 3,3,3 e para 10 : 6,3,1; 6,2,2; 5,4,1; 5,3,2; 4,4,2; 4,3,3. A partir disso, considerando as permutações envolvidas, Galileo descobriu que a probabilidade de obter soma 9 é menor do que a de obter 10. Por exemplo, considerando as parcelas como 6, 2 ou 1, obtém-se, permutando esses números, as possibilidades 621, 612, 216, 261, 126 e 162. Pode-se constatar, de fato, que fazendo todos os cálculos teremos 25 casos dentre os 216 possíveis para se obter soma 9 e 27 casos possíveis na obtenção da soma 10, conforme Tabelas 2 e 3.

Tabela 2 - Número de possibilidades de se obter soma 9 jogando-se três dados

9 PONTOS	POSSIBILIDADES
1 2 6	6
1 3 5	6
1 4 4	3
2 2 5	3
2 3 4	6
3 3 3	1
TOTAL	25

Fonte : O autor, 2019.

Tabela 3 - Número de possibilidades de se obter soma 10 jogando-se três dados

10 PONTOS	POSSIBILIDADES
1 3 6	6
1 4 5	6
2 4 4	3
2 2 6	3
2 3 5	6
3 3 4	3
TOTAL	27

Fonte: O autor, 2019.

2.3 Blaise Pascal, Fermat, Problema dos Pontos (divisão da aposta), Duplos Seis, Nascimento da Probabilidade

No início do século dezessete deu-se um verdadeiro avanço no desenvolvimento de várias áreas da matemática, como Geometria e Álgebra. Foi neste momento que surgiram os primeiros estudos envolvendo probabilidades, tendo como motivação a análise dos jogos de azar, disseminados na Idade Média.

Segundo Katz (2010) as ideias de Cardano e Tartaglia não foram levadas a frente por outros estudiosos em sua época e foram esquecidas. Foi apenas por volta de 1660 que a Probabilidade tomou grande importância, com as célebres correspondências entre os estudiosos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665).

Segundo Coutinho (2007) o Problema dos Pontos é considerado como o problema fundador do Cálculo de Probabilidades. Tal problema fora proposto por Antoine de Gombauld (1610-1685), que ganhava a vida jogando e se autodenominava cavaleiro de Meré[1]. Ainda segundo a autora, Pascal propõe o mesmo problema para Fermat, que o resolve utilizando técnicas diferentes das propostas por Pascal. Fermat emprega métodos

[1]Pseudônimo de Antoine Gombaud, viveu na França no século XVII. Matemático amador e viciado em jogos de azar, foi um dos causadores da descoberta do triângulo de Pascal pelo matemático Blaise Pascal.

combinatórios, fazendo combinações de todas as alternativas de ganho ou perda que podem de forma fictícia acontecer ao longo das jogadas seguintes.

Segundo Calabria (2013) as correspondências trocadas por Pascal e Fermat eram compostas por 7 cartas :

- 1ª carta, de Pascal para Fermat, que já não existe;
- 2ª carta, de Fermat para Pascal, da qual se desconhece a data que foi escrita;
- 3ª carta, de Pascal para Fermat, escrita a 29 de julho de 1654;
- 4ª carta, de Pascal para Fermat, de 24 de agosto de 1654;
- 5ª carta, de Fermat para Pascal, de 29 de agosto de 1654;
- 6ª carta, de Fermat para Pascal, de 25 de setembro de 1654;
- 7ª carta, de Pascal para Fermat, de 27 de outubro de 1654.

Nestas cartas Pascal descreve sua solução para o problema dos pontos apresentando dois princípios básicos a serem aplicados. No primeiro leva-se em conta a posição de um jogador tal que uma soma lhe pertença caso vença ou perca. Ele recebe essa soma mesmo o jogo sendo interrompido; o segundo princípio é que se a posição dos dois jogadores é tal que se um vencer, uma determinada soma lhe pertence e se perder, pertence ao outro, e se ambos os jogadores têm possibilidades iguais de vencer, então deva-se dividir a soma igualmente se não podem jogar (KATZ, 2010, p.569).

Ainda segundo o autor "[...] o que determina a divisão das apostas é o número de jogos remanescentes e o número total que as regras dizem que cada jogador tem que vencer para obter a aposta total". (KATZ, 2010, p.569).

Na segunda carta eles discutem um problema similar ao proposto por Pacioli e Tartaglia, no qual dois jogadores disputam um jogo de 3 pontos onde cada um aposta 32 *pistoles*[2]. Supondo que o jogo seja interrompido ou que ambos decidam interrompê-lo antes do final, de que forma se daria tal divisão de apostas?

Segundo Viali (2008) a solução proposta por Pascal foi analisar todas as possibilidades futuras no desenvolvimento do jogo. Ele estudou os seguintes casos:

Caso 1: O Primeiro jogador tem dois pontos e o segundo apenas um.

Na partida seguinte o primeiro jogador pode vir a vencer, ganhando todas as 64 moedas, ou perder, ficando ambos com dois pontos, ou seja empatados. Nesse caso cada

---

[2] moeda de ouro usada na europa no século XIX

um receberia 32 moedas. Portanto, considerando as duas possibilidades o primeiro jogador já tem assegurado 32 moedas. Como ainda sobram 32 moedas e como as chances seriam iguais para ambos, dividir-se-iam essas 32 moedas igualmente, cabendo 48=32+16 moedas ao primeiro jogador e 16 para o segundo.

Caso 2: O Primeiro jogador tem dois pontos e o segundo nenhum.

Na hipótese do primeiro jogador ganhar a partida seguinte, o jogo é encerrado e ele ficaria com as 64 moedas. Na hipótese de perder, o primeiro jogador teria 2 pontos e o segundo 1 ponto. Remetendo-se ao caso anterior, cabendo 48 moedas ao primeiro e 16 moedas ao segundo.

Portanto, ganhando ou perdendo, o primeiro jogador já tem garantido 48 moedas. Como ainda sobram $16 = 64 - 48$ moedas e como as chances seriam iguais para ambos, dividir-se-iam essas 16 moedas igualmente, cabendo $56 = 48 + 8$ moedas ao primeiro jogador e 8 para o segundo.

Caso 3: O Primeiro jogador tem um ponto e o terceiro nenhum.

Na hipótese do primeiro jogador ganhar teríamos a mesma situação descrita no caso 2, 56 para o primeiro e 8 para o segundo; e na hipótese do segundo ganhar, ambos teriam um ponto cada um cabendo a cada um 32 moedas. Nesse caso, o primeiro jogador já teria 32 moedas asseguradas e dividiriam as $56 - 32 = 24$ ao meio ficando assim o primeiro jogador com $32 + 12 = 44$ moedas e o segundo com 20 moedas.

Fermat pensou em resolver o problema procedendo de outra maneira. Numa das cartas a Pascal insere seu método baseado em considerações sobre análise combinatória. No caso (1), em que o primeiro jogador tem dois pontos e o segundo apenas um,o número máximo de jogos para o encerramento das partidas seria dois. Exemplificando, tomando-se todas as possibilidades considerando duas partidas: (J1,J1), (J1, J2), (J2, J1), (J2, J2), onde J1 denota o jogador 1 e J2 o jogador 2. Nas 3 primeiras alternativas ganha-se o jogador 1, logo o número de chances para o primeiro jogador seria de 3 em 4 possíveis, enquanto que o segundo jogador teria apenas uma chance em 4. Logo neste primeiro caso tem-se a seguinte divisão das apostas, apresentado na Tabela 4.

Tabela 4 - Resultados de Pascal para o caso 1

1º jogador	2º jogador
$\frac{3}{4} de\ 64 = \frac{3}{4} \times 64 = 48$	$\frac{1}{4} de\ 64 = \frac{1}{4} \times 64 = 16$

Fonte: O autor, 2019.

Na situação em que o primeiro jogador tenha ganho duas partidas e o segundo nenhuma, caso 2, o número máximo de jogos para o encerramento destas partidas seria de três e como na primeira situação ainda que o primeiro jogador ganhe já na primeira partida os dois devem efetuar o número máximo de jogadas e aí tem-se as seguintes situações: (J1,J1,J1),(J1,J1,J2),(J1,J2,J1),(J1,J2,J2),(J2,J1,J2), (J2,J2,J1),(J2,J1,J1),(J2,J2,J2), onde nas 7 primeiras, ganha-se o jogador 1.

O número de chances do primeiro jogador seria de 7 em 8 possíveis, enquanto que o segundo jogador teria apenas uma chance em 8 possíveis.

Logo no segundo caso teríamos o seguinte resultado:

Tabela 5 - Resultados de Pascal para o caso 2

1º jogador	2º jogador
$\frac{7}{8} de\ 64 = \frac{7}{8} \times 64 = 56$	$\frac{1}{8} de\ 64 = \frac{1}{8} \times 64 = 8$

Fonte: O autor, 2019.

Numa última situação, caso 3, teríamos em que o primeiro jogador tem um ponto e o segundo nenhum. Assim após quatro partidas o jogo com certeza estará encerrado, pois um dos oponentes terá os três pontos necessários para ganhar o jogo. Neste caso, as possíveis situações são:

(J1,J1,J1,J1),(J1,J1,J1,J2),(J1,J1,J2,J1),(J1,J1,J2,J2),(J1,J2,J1,J1),(J1,J2,J1,J2),
(J1,J2,J2,J1),(J1,J2,J2,J2),(J2,J1,J1,J1),(J2,J1,J1,J2),(J2,J1,J2,J1),(J2,J1,J2,J2),
(J2,J2,J1,J1),(J2,J2,J1,J2), (J2,J2,J2,J1),(J2,J2,J2,J2).

Portanto, tem-se 11 chances para o primeiro jogador em 16 possíveis enquanto que o segundo jogador teria 5 em 16 possíveis. Logo, a divisão da aposta seria dada por:

Tabela 6 - Resultados de Pascal para o caso 3

1º jogador	2º jogador
$\frac{11}{16} de\ 64 = \frac{11}{16} \times 64 = 44$	$\frac{5}{16} de\ 64 = \frac{5}{16} \times 64 = 20$

Fonte: O autor, 2019.

Observa-se que em ambas as soluções, propostas por Pascal e Fermat obtém-se os mesmos resultados para a divisão da aposta.

Segundo Viali (2008) Pascal utilizou o triângulo que nos dias atuais leva o seu nome para resolver o problema da divisão de apostas com o seguinte resultado:

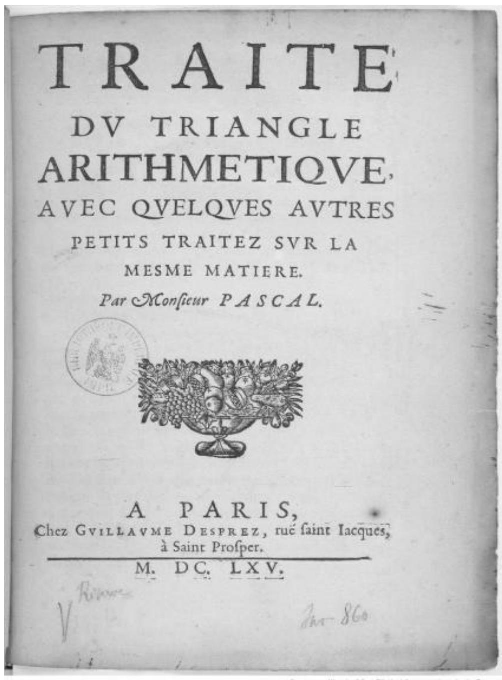
Se um jogo é interrompido quando o primeiro jogador precisa de "r" jogos para vencer enquanto que o segundo necessita de "s" jogos para, onde $r + s \geq 1$. Então o primeiro jogador deve receber :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} / 2^n$$, onde $n = r + s - 1$ **(1)** (número máximo de jogadas restantes).

Por exemplo, suponhamos que r = 1 e s = 3, como no exemplo proposto por Tartaglia. A divisão se dará de forma que o primeiro jogador deverá receber :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} / 2^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{3}{k} / 2^3 = \frac{7}{8}$$ **(2)** e não 5 : 3 como foi proposto por Tartaglia.

Figura 7- Traite du triangle arithmétique



Fonte : www.alamy.com/stock-photo-title-page-traite-du- triangle-arithmetique-treatise-on-arithmetical-83359804.html

Segundo Viali (2008), o Problema dos Pontos não fora o único sugerido a Pascal por Gombauld. Em 1654, por correspondência, um segundo problema abordava o menor número de vezes que uma pessoa deve jogar um par de dados equilibrados a fim de se obter um duplo seis com probabilidade superior a 50%. Gombauld, um jogador inveterado, queria uma explicação do porquê da solução imaginada por ele estar lhe causando prejuízos.

A solução erroneamente proposta por Gombauld era que a probabilidade para se obter um seis ao lançar-se um dado era de 1/6 e jogando-se o mesmo três vezes a probabilidade seria de 3.(1/6) = 1/2 = 50%. Assim se o mesmo dado fosse jogado quatro vezes, seria de 4.(1/6) = 2/3 ≅ 67%. Partindo do mesmo raciocínio para o lançamento de dois dados observou que teria 36 resultados possíveis, seis vezes a mais que no lançamento de somente um dado. Meré concluiu que para ganhar com um dado seriam necessários no mínimo 4 lançamentos então, com um par de dados, seriam necessários 24 lançamentos. Notou que estava tendo enormes prejuízos e encaminhou o problema a Pascal que juntamente com Fermat em correspondências trocadas por ambos resolveu o problema.

Segundo Viali (2008), Pascal não concordou com a solução proposta por Meré e juntamente com Fermat concluiu que as chances de se obter um duplo 6 em 24 arremessos são um pouco menores do que 50% e um pouco maiores do que 50% em 25 arremessos.

Na realidade no caso do lançamento de um dado a probabilidade de ocorrer pelo menos um seis em 4 lançamentos seria:

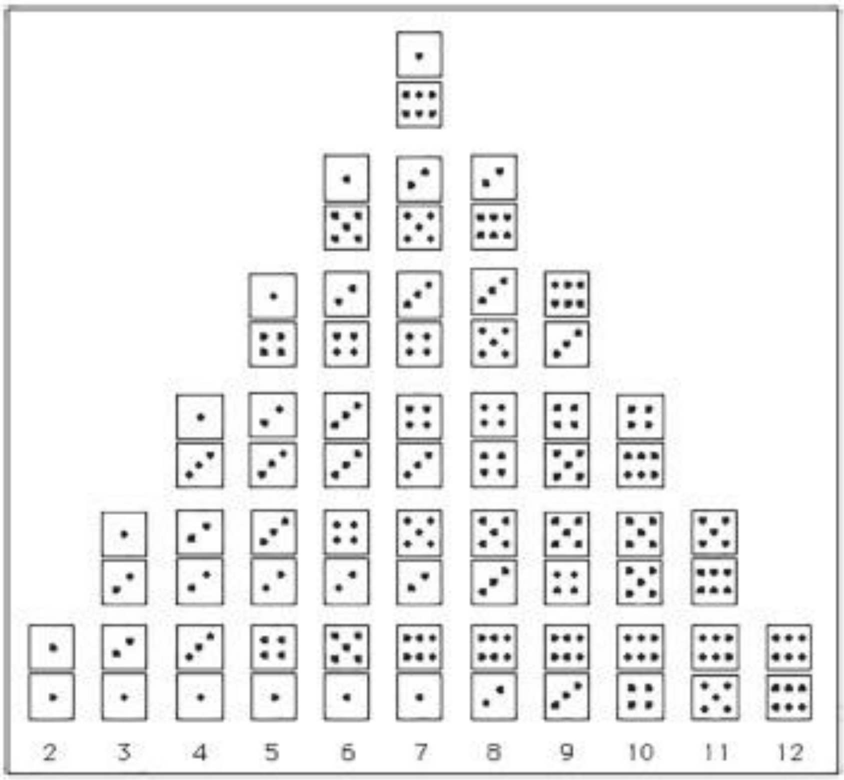
$1- (1-1/6)^4 = 1 - (5/6)^4 = 1 - 0,483 = 0,517 = 51,7\%$ **(3)** o que no caso por sorte favorecia a Meré.

No caso do lançamento de dois dados, Pascal sabia que o duplo 1 e o duplo 6 raramente ocorriam conforme Figura 8, pois a probabilidade de ambos era de 1/36. Notou que seria mais fácil calcular a probabilidade de não se tirar um duplo seis, ou seja 1 – 1/36 = 35/36. Portanto a probabilidade de se obter um duplo seis em 24 jogadas é de:

$1- (35/36)^{24} = 1 - 0,509 = 0,491 = 49,1\%$ **(4)** . Logo, portanto uma probabilidade um pouco menor que 50%. Ao longo de vários jogos, essa diferença iria causar prejuízos a Meré. Concluiu que seriam necessários no mínimo 25 arremessos para se obter uma probabilidade superior a 50%. De fato, como $(35/36)^{25} = 0,494$, tem-se que $1- (35/36)^{25} = 1 - 0,494 = 0,506 = 50,6\%$.

A Figura 8 demonstra a quantidade de resultados que podem ocorrer no lançamento de dois dados e o duplo seis é verificado em apenas um desses resultados.

Figura 8 - O número de pares em cada coluna representa a quantidade de maneiras que cada número pode ocorrer



Fonte: Acaso :Como a Matemática explica as coincidências da Vida

Viali (2008) afirma que o Problema dos Pontos e o dos dados Duplo Seis desencadearam um forte interesse pelo assunto levando ao surgimento de mais uma disciplina matemática, a Probabilidade.

2.4 Huygens, Valor esperado, Jacques Bernoulli, Lei dos Grandes Números

Huygens (1629-1695) foi um matemático, físico e astrônomo nascido na Holanda na cidade de Haia. Tornou-se um cientista de grande prestígio internacional, um dos mais célebres de sua época. Em sua infância teve contato com ilustres intelectuais, como René Descartes e recebeu educação em Matemática e Física na Universidade de Leiden, onde estudou com Frans Van Schooten, um ex-aluno de Descartes.

Entre seus vários estudos e descobertas a que teve grande relevância foi a complementação dos resultados de Pascal e Fermat sobre a Teoria das Probabilidades em 1657. Segundo Katz (2010) em uma de suas visitas a Paris em 1655, já aos 25 anos, Huygens deu uma maior ênfase ao estudo de Probabilidades e publicou um livro sobre o tema em 1657, *o De Ratiocinis in Aleae Ludo* (Sobre os Cálculos em Jogos de Azar). Ainda, segundo o autor, foi o primeiro a tratar de forma sistemática os problemas já mencionados entre Pascal e Fermat. Sua obra continha algo sobre o Problema dos Pontos de Méré, quatorze proposições e cinco exercícios. Foi o primeiro a introduzir a ideia de valor esperado (Esperança Matemática). “[...] Embora num jogo puro de sorte os resultados sejam incertos, a hipótese de um jogador tem de ganhar ou perder depende de um determinado valor”. (KATZ, 2010, p.576) O “valor” de Hyugens é semelhante à noção de Pascal na sua aposta.

> [...] Em termos modernos, o “valor” de uma hipótese é o **valor esperado,** a quantidade média que uma pessoa ganharia se jogasse o jogo muitas vezes. É esta quantidade que o jogador presuvilmente pagaria para ter o privilégio de jogar um jogo equitativo”. (KATZ, 2010, p.576).

Segundo Coutinho (2007), Huygens contribui de forma importante para o desenvolvimento da noção de probabilidade formalizando a noção do *direito de esperar*, podendo ser expressada sob a nomenclatura de *valor da chance*.

Dentre as proposições expostas em sua obra, o *De Ratiocinis in Aleae Ludo*, e relatadas temos :

“(...) Para ter hipóteses iguais de vencer a ou b, vale (a + b)/2 para mim.” (KATZ, 2010, p.576).

Ele considerou que dois jogadores apostavam com as mesmas chances de ganhar, sendo o primeiro com valor esperado **a** de vencer e o seu opositor com valor esperado **b** de vencer. Uma vez que a probabilidade de ganhar de cada um é 1/2, tem-se que a expectativa de ganhar de cada jogador é (1/2)a + (1/2)b = (a+b)/2. Sendo esta proposição, a mesma que Pascal afirmou no seu Problema dos Pontos.

Mazur (2016) afirma em sua obra que Huygens na sua publicação o *De Ratiocinis in Aleae Ludo* está o primeiro reconhecimento impresso da diferença entre quantidade de sucessos e a chance de quantidade de sucessos.

> Embora os resultados dos jogos governados meramente pela sorte sejam incertos o grau pelo qual uma pessoa está mais perto de ganhar do que de perder sempre tem uma determinação. Portanto se uma pessoa tentar tirar um seis ao jogar um dado pela primeira vez, é, de fato incerto se ela terá êxito, mas o quão mais provável ela vai fracassar do que ter sucesso é exato e pode ser calculado. (MAZUR, 2016, p.71).

Mazur (2016) dá uma explicação bem significativa a respeito do Valor Esperado. Para isso, ele toma como exemplo o problema relatado por Huygens em que, num jogo de azar, uma pessoa tem de pagar para apostar.. O exemplo consiste em uma pessoa esconder três moedas numa mão e sete na outra e oferecer as moedas da mão que o outro jogador escolher. E deixa a pergunta: Quanto o jogador deve pagar para jogar? O autor afirma que a resposta está na primeira proposição de Huygens. “ Se eu puder esperar a ou b, e se um outro cair e de modo fácil em meu destino, então devo dizer que a minha expectativa vale (a + b)/2”. (MAZUR, 2016, p.71) Sendo assim a resposta será 5, ou seja, o valor esperado é 5 (o valor que o jogador deve obter em troca: a média aritmética entre 3 e 7). Mazur (2016) afirma ainda que não se sabe ao certo se Huygens deu-se conta da importância que sua notável noção de valor esperado teria no futuro da análise de riscos, nos jogos de azar e na própria ciência.

> Teria sido prematuro para um matemático de meados do século XVII conhecer a verdade real, qual seja, que tudo do desempenho aleatório da natureza, incluindo os comportamentos das rendas vitalícias,dos seguros, da medicina e também dos jogos de azar, pode ser mais ou menos previsto pelos cálculos dos valores esperados. (MAZUR, 2016, p.72).

Porém, de fato Huygens entendeu que o centro da teoria das probabilidades é simplesmente o valor esperado.

“Ter p hipóteses de ganhar a e q hipóteses de ganhar b, sendo as hipóteses equivalentes, vale (pa + qb)/(p + q) para mim.” (KATZ,2010,p.576). Segundo Katz (2010) se p + q = r, se a probabilidade de ganhar a é p/r, e se a probabilidade de ganhar b é q/r, então a expectativa é dada por (p/r)a + (q/r)b.

Segundo Mazur (2016), em geral, calcula-se o valor esperado multiplicando-se a probabilidade pelo desembolso e que na maioria dos casos, é a média ponderada de todos os valores possíveis que podem ocorrer, dado que a ponderação é a probabilidade, ou seja, é a soma de todos os valores possíveis após cada valor ser multiplicado pela sua respectiva probabilidade.

Segundo Laplace (1825), em edição final de sua obra *Ensaio filosófico sobre as probabilidades* , define-se *esperança* como:

> A vantagem daquele que espera um bem qualquer, tendo em conta suposições que são apenas prováveis. Na teoria dos acasos, essa vantagem corresponde ao produto da soma esperada pela probabilidade de obtê-la, isto é, a soma parcial que deve ser restituída, quando não se quer mais correr riscos do evento, supondo que a repartição se faça proporcionalmente às probabilidades. A repartição assim feita é a única equitativa, desde que se faça todas abstrações de todas as circunstâncias estranhas; pois, com igual probabilidade, tem-se um direito igual sobre a soma esperada. Designaremos essa vantagem pelo termo esperança matemática. (LAPLACE, 1825, p.58).

Agora vejamos um exemplo em que os eventos não são equiprováveis:

Suponhamos que num jogo de cara ou coroa uma pessoa receba dois reais caso obtenha cara no primeiro lançamento e cinco reais caso ele obtenha cara apenas no segundo lançamento. Multiplicando-se dois reais pela probabilidade 1/2 do primeiro caso e cinco reais pela probabilidade 1/4 do segundo caso, a soma dos produtos será igual a R$ 2,25, que será vantagem dessa pessoa. Esta será a soma que esta pessoa deverá adiantar àquele que lhe concede a vantagem, pois para a igualdade do jogo, a aposta deverá ser igual a vantagem nele envolvida.

Katz (2010) afirma que na conclusão de sua obra, Huygens apresenta problemas de extração de bolas de cores diferentes de uma urna, que são bem recorrentes em vários exercícios sobre probabilidades nos livros didáticos atualmente. Ainda, segundo o autor, tais problemas foram discutidos em décadas seguintes, isto porque, até os primeiros anos do século dezoito, as proposições de Huygens eram a única introdução à teoria das probabilidades. O suíço Jacques Bernoulli (1654-1705) incorporou as ideias de Huygens em sua obra sobre probabilidade o Ars Conjectandi de 1713.

Mazur (2016) afirma que em 1705, ano da morte de Bernoulli, este havia deixado vários manunscritos incompletos e inéditos para seu sobrinho Nicholas Bernoulli. Após oito anos de seu falecimento, em 1713, foi publicado uma das mais importantes obras sobre teoria matemáticas das probabilidades, o Ars Conjectandi, por trazer noções iniciais importantes sobre o tema . Em seu livro o autor cita o exemplo dado por Bernoulli de [...] “uma urna cheia de fichas brancas e pretas e nos revelando como descobrir a razão entre fichas brancas e pretas, mesmo quando não sabemos que a urna contém três mil fichas brancas e duas mil pretas.”(MAZUR,2016, p.67)

De início Mazur (2016) afirma que há uma probabilidade matemática dada como a relação entre as fichas brancas e o número de todas as fichas, porém não se sabe com exatidão quais são esses números. Então como proceder para saber essa probabilidade matemática? O plano de Bernoulli era escolher uma ficha, registrar sua cor e colocá-la de volta a urna. Repetir esse processo por inúmeras vezes que se chegará o mais perto possível da probabilidade matemática. Supondo-se por exemplo que após uma coleta com 120 fichas brancas e 80 pretas. A razão entre o número de fichas brancas e o de pretas será na razão de 3 para 2. Sendo assim pode-se assumir que a probabilidade de coletar uma ficha branca é de 120/200, ou 3/5. Bernoulli denominou como a Lei dos Grandes Números.

Pareceu óbvio a Bernoulli que “[...] quanto maior o número de observações feitas em uma dada situação, melhor seria a previsão de ocorrências futuras.” (KATZ, 2010, p.764).

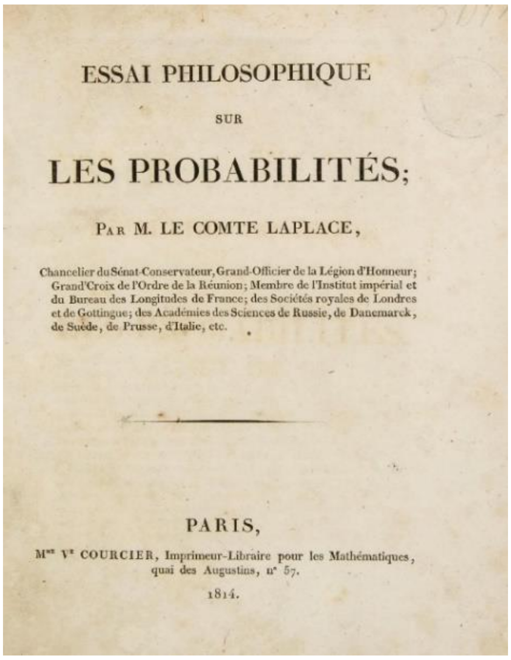
2.5 Pierre Simon Laplace e a definição de probabilidade

Dando-se um avanço no tempo mais precisamente no século XIX, o notável matemático, físico e astrônomo francês Pierre Simon Laplace (1749-1827) através de suas importantes obras *Théorie Analytique des Probabilités(Teoria Analítica das Probabilidades)* de 1812 e *Essai Philosopique sur les Probabilités* (*Ensaio filosófico sobre as probabilidades)* de 1814 foi o responsável por toda a estruturação de toda a Teoria das Probabilidades. O avanço desta teoria foi possível devido a elaboração de regras mais consistentes sobre as combinações das chances. Laplace mostrou em suas obras como saber com exatidão as chances de se ganhar em um jogo de apostas, estimar-se tamanho de populações, mortalidade, decisões judiciais entre outras aplicações. Laplace (1814) enunciou e definiu o que era probabilidade em sua obra , o *Essai Philosopique sur les Probabilités*, Figura 9, na qual cita :

> A teoria dos acasos consiste em reduzir todos os eventos de mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, de forma tal que estejamos igualmente indecisos sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveisao evento cuja probabilidade é desejada.
> A relação entre esse número e aquele de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, que corresponde assim a uma fração cujo númerador é o número de casos favoráveis e o denominador é o número de todos os casos possíveis. (LAPLACE, 1814, p.46).

Essa definição de probabilidade de Laplace como sendo a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis é adotada até os dias de hoje, essa quantificação em um número entre zero e um foi fundamental para colocar ordem nas medidas e chances.

Figura 9 - Essai Philosopique sur les Probabilités



ESSAI PHILOSOPHIQUE

SUR

LES PROBABILITÉS;

PAR M. LE COMTE LAPLACE,

Chancelier du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion d'Honneur; Grand'Croix de l'Ordre de la Réunion; Membre de l'Institut impérial et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, d'Italie, etc.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1814.

Fonte : www.alamy.com/stock-photo-title-page-traite-du- triangle-arithmetique-treatise-on-arithmetical-83359804.html

Segundo Viali (2008) foi a partir da obra de Laplace que ilustres matemáticos como Johann Carl Friedrich Gauss(1777-1885), Andrei Andreyevich Markov (1856-1922), Siméon Denis Poisson(1781-1840), Jules Henri Poincaré (1854-1912), entre outros, deram atenção ao estudo da probabilidade e obtendo-se assim um grande crescimento na área.

Ainda, segundo Viali (2008) o principal entrave da Teoria das Probabilidades era a dificuldade de se obter uma definição mais precisa afim de que esta fosse a mais abrangente possível e que a procura por tal definição demorou três séculos, sendo finalmente resolvida no século vinte pela Teoria Axiomática da Probabilidade.

Em 1933 pode-se dizer que iniciou-se a etapa moderna da teoria com a publicação da monografia do russo Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), Figura 10, intitulada como *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechung*, que em inglês ficou conhecido como Foundations of Probability Theory (Fundamentos da Teoria da Probabilidade) na qual ele lança as bases de axiomatização da teoria das probabilidades e esboça o que seria a teoria da medida.

Figura 10 - Kolmogorov

Fonte: Revista Bras. História da Matemática

3 NOÇÕES DE PROBABILIDADE

Nesse capítulo serão definidos alguns conceitos básicos da Teoria de Probabilidade, como experimento determinístico, experimento aleatório, espaço amostral, evento, entre outros, bem como, alguns resultados que serão importantes para um melhor entendimento das atividades que serão apresentadas no Capítulo 4.

3.1 Conceitos Básicos de Probabilidade

Um **experimento** é um processo de observação. Pode ser classificado em determinístico ou aleatório.

Experimento Determinístico: É um processo em que é possível prever o resultado antes da sua realização.

Exemplo 1: O tempo de queda de um objeto que é lançado, conhecendo-se a altura e a aceleração da gravidade, desprezando a resistência do ar.

Experimento Aleatório: É um processo de coleta de dados em que os resultados possíveis são conhecidos, não sabendo qual deles ocorrerá.

Exemplo 2 : O lançamento de uma moeda, ou de um dado; ou até mesmo a verificação o resultado de um exame de sangue, entre outros.

Espaço Amostral : O conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório é chamado de espaço amostral. Representaremos por **Ω**. Podemos exemplificar pelo lançamento de uma moeda, onde só pode haver dois resultados, cara e coroa. Assim **Ω** = {cara, coroa}. Estamos acostumados a trabalhar com espaços amostrais finitos, como o exemplo citado acima, mas isso não significa que o espaço amostral seja um conjunto finito, podendo ser infinito também.

Evento: Qualquer subconjunto do espaço amostral Ω é chamado de evento. Normalmente são representados por letras maiúsculas A, B,.. . Dentre os eventos podemos considerar o evento união de A e B, denotado por $A \cup B$, que, equivale à ocorrência de A, ou de B, ou de ambos. A ocorrência simultânea dos eventos A e B, denotada por $A \cap B$ é chamada de evento interseção. Dois eventos A e B dizem-se mutuamente exclusivos ou disjuntos, quando a ocorrência de um deles impossibilita a ocorrência do outro. Nesse caso, $A \cap B = \emptyset$ conjunto vazio).

3.2 Probabilidade

Atualmente, existem cinco abordagens ou definições de Probabilidade: Clássica, Axiomática, Frequentista, Geométrica e Subjetiva.

3.2.1 Definição Clássica de Probabilidade

A primeira definição de probabilidade, chamada definição Clássica de Probabilidade, foi enunciada pelo matemático francês Pierre Simon Laplace e publicada num tratado, em 1812, designado por "*Théorie analytique desprobabilités*"(Teoria Analítica das Probabilidades).

Em experiências aleatórias com um espaço de resultados (ou espaço amostral) finito de dimensão N, em que todos os acontecimentos elementares são equiprováveis e incompatíveis e, se alguns desses acontecimentos elementares são favoráveis à ocorrência de uma dado acontecimento A, então a probabilidade de realização desse acontecimento A é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis à ocorrência do acontecimento A e o número de casos possíveis dessa experiência aleatória. Simbolicamente temos:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{número de casos favoráveis ao evento A}}{\text{número de casos possíveis}} \qquad \textbf{(5)}$$

Esta definição Clássica de Probabilidade possui fragilidades pelo fato de se aplicar em situações em que os resultados são equiprováveis, porém apresenta suas vantagens, pois as probabilidades são estabelecidas, a priori, a partir da suposição dessa equiprobabilidade dos resultados, portanto, sem ser necessário recorrer à experimentação prolongada.

Exemplo 3: Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Sorteando-se uma bolinha, qual a probabilidade de que o número observado seja múltiplo de 8?

Solução. O espaço amostral (Ω) possui 50 elementos.

O número de múltiplos de 8 são eles : 8, 16, 24, 32, 40 e 48. Totalizando 6 números, logo, $P(A) = \frac{6}{50} = 0{,}12 = 12\%$.

Por mais que se aborde em sala de aula apenas a interpretação clássica, a maior parte dos problemas que envolvem modelagem de fenômenos aleatórios não se encaixa nessa interpretação.

3.2.2 Definição Axiomática de Probabilidade

Se o espaço amostral S é um conjunto contínuo, não podemos aplicar a definição de Laplace. Nesse caso, é necessário considerar uma perspectiva axiomática da Probabilidade. Esta se deve ao russo Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), que propôs a primeira apresentação axiomática do cálculo de probabilidade, publicada na Alemanha, em 1933.

Seja E um experimento aleatório com um espaço amostral associado Ω.

Uma probabilidade em Ω é uma função P do conjunto das partes de Ω em $\mathbb{R}$ que a cada evento de Ω associa um número real que satisfaz aos seguintes axiomas:

(A.1) Para todo evento $A, 0 \leq P(A) \leq 1$;

(A.2) $P(\Omega) = 1$

(A.3) Se $A \cap B = \emptyset$; então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Sob essa perspectiva, fica claro que a definição de probabilidade clássica é um caso particular da probabilidade axiomática e que a equiprobabilidade torna-se desnecessária.

Propriedades 3.1: Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω, P uma probabilidade em Ω. Então:

$i)$ $P(\emptyset) = 0$

$ii)P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$iii)P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

iv) Se $A \cap B = \emptyset$; então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, caso $A \cap B \neq \emptyset$; temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demonstração:

i) Se A $\subseteq$ Ω, então tem-se A $\cap\ \emptyset = \emptyset$, isto é, A e $\emptyset$ são mutuamente excludentes.

Então:

$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$, por (A.3).

Cancelando P(A) em ambos os lados da igualdade segue que $P(\emptyset) = 0$.

ii) Tem-se que $A \cap \bar{A} = \emptyset$ e $\bar{A} \cup A = \Omega$, Então:

$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ por (A.3).

iii) $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ e $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

Logo, $P(A) = P\big((A - B) \cup (A \cap B)\big) = P(A - B) + P(A \cap B)$.

Assim, $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iv) $A \cup B = (A - B) \cup B$ e $(A - B) \cap B = \emptyset$. Tem-se então:

$P(A \cup B) = P\big((A - B) \cup B\big) = P(A - B) + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ pela propriedade iii.

3.2.3 Definição Frequentista de Probabilidade

Segundo Coutinho(1994) a visão frequentista de Probabilidadee iniciou-se com Jacques Bernoulli em sua obra “Ars Conjectandi”(1713), que torna próximo a probabilidade de um evento pela sua frequência observada quando este é repetido um grande número de vezes.

Chamaremos Probabilidade de um evento o número ao redor do qual oscila a frequência relativa do evento considerado. Para tal, faz-se necessário realizar o experimento estudado diversas vezes, ciente que, quanto mais vezes o experimento for realizado, mais próximo a frequência relativa se aproxima da probabilidade do evento acontecer. Consideramos então a probabilidade como um valor independente do observador, que indique aproximadamente com qual frequência o evento considerado se produzirá ao longo de uma série de repetições do experimento.

Observamos que desta forma não são necessárias as hipóteses de equiprobabilidade dos eventos elementares nem de finitude do espaço dos resultados, superando-se portanto as duas restrições da definição clássica.

Consideremos o experimento de John Kerrich — um matemático sul-africano que, prisioneiro de guerra na Dinamarca durante a Segunda Guerra Mundial, na década de 1940, lançou uma moeda 10000 vezes:

Tabela 7 - Resultados do experimento de John Kerrich

Lançamentos	10	40	100	200	400	800	2000	8000	10000
Cara	4	21	44	98	199	413	1013	4034	5067
Frequência Relativa	0,4	0,525	0,44	0,49	0,497	0,516	0,5065	0,5043	0,5067

Fonte: Introdução à Teoria da Probabilidade Ralph Costa Teixeira e Augusto César Morgado

Pela Tabela 7, notamos que a diferença entre caras e coroas diminui em termos relativos (ao número total de lançamentos), ou seja, a proporção de caras se aproxima de 0.5 ou 50%

3.2.4 Definição Subjetiva

Segundo Coutinho (2007) o enfoque da Probabilidade Subjetiva foi iniciado por Thomas Bayes em que foi introduzido: "a noção **de probabilidade a priori, tendo observado uma conseqüência a posteriori**."

É a atribuição de probabilidades baseadas em experiências passadas, opiniões, enfim, no poder de análise pessoal de uma situação específica. Por exemplo:

a) Qual a probabilidade de você fechar sua nota na próxima avaliação presencial?

b) Qual a probabilidade de chover no final de semana?

c) Qual a probabilidade do enfermo se recuperar completamente?

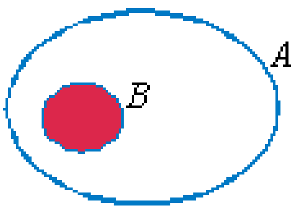
3.2.5 Definição Geométrica

O conceito de Probabilidade Geométrica é muito pouco trabalhado no ensino médio, quase não sendo abordado em livros didáticos. É consenso que a noção de Probabilidade Geométrica foi introduzida por Georges Louis Leclerc, o conde de Buffon, em 1777.

Partindo de situações que partem da visualização, em que possíveis acontecimentos podem ser representados por pontos de um segmento de reta, por figuras planas ou ainda por sólidos, essa abordagem vem a colaborar com a apreensão do conceito de probabilidade, bem como facilitar o desenvolvimento do raciocínio lógico pelos alunos.

Na probabilidade geométrica, se tivermos uma região B do plano contida em uma região A, admitimos que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional à área de B e não depende da posição que B ocupa em A. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença a B será:

$$p = \frac{\acute{A}rea\ de\ B}{\acute{A}rea\ de\ A}$$



Exemplo 4: Um atirador, com os olhos vendados, procura atingir um alvo circular com 50 cm de raio tendo no centro um disco de 10 cm de raio. Se em certo momento temos a informação de que o atirador acertou o alvo, perguntamos qual deve ser a probabilidade de que tenha atingido o disco central (WAGNER, Revista do Professor de Matemática,34, p.28).

Solução: Neste exemplo não se pode contar casos favoráveis e possíveis e como para o atirador cego não há pontos privilegiados do alvo, a probabilidade de acertar o disco central deve ser a razão entre as áreas do disco e do alvo. Um cálculo elementar leva à resposta correta:

$$P = \frac{\text{Área do disco central}}{\text{Área do alvo}} = \frac{\pi 10^2}{\pi 50^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04 = 4\% \quad \textbf{(7)}$$

A seguir serão apresentados alguns resultados teóricos sobre Probabilidade.

3.3 Probabilidade Condicional

Existem situações em que a chance de um particular evento acontecer, depende do resultado de outro evento. Por exemplo:

Considere o seguinte experimento aleatório: selecionar um habitante do Brasil.

Agora, considere os seguintes eventos:

A. O habitante é morador do Estado do Rio de Janeiro.

B. O habitante é torcedor do Botafogo.

As probabilidades dos eventos A e B são pequenas, a maior parte da população brasileira não mora no Estado do Rio de Janeiro e o Botafogo é apenas a quarta maior torcida do Rio de Janeiro e ocupa a 13ª posição em número de torcedores no país.(IBOPE,2013)

Agora podemos estar interessados na probabilidade de uma pessoa torcer pelo Botafogo, sabendo que mora no estado do Rio de Janeiro, ou seja, a probabilidade de B acontecer sendo que A já aconteceu. Isso é o que chamamos de Probabilidade Condicional.

Em geral, dados dois eventos A e B, a probabilidade de B dado A é o número $P(A \cap B)/P(A)$, que será representado pelo símbolo $P(B/A)$. Temos então,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, sendo\ P(A) > 0$$

Exemplo 5: As máquinas A e B produzem o mesmo tipo de parafuso. A porcentagem de parafusos defeituosos produzidos, respectivamente, pelas máquinas A e B é de 15% e de 5%. Foram misturados, numa caixa 100 parafusos produzidos por A e

100 produzidos por B. Se tirarmos um parafuso ao acaso e ele for defeituoso, qual a probabilidade de que tenha sido produzido pela máquina A?

Solução: Sejam A = {parafuso produzido pela máquina A} e D = {parafuso defeituoso}. Queremos $P(A/D)$. Note que essa é uma probabilidade do passado na certeza de acontecer no futuro.Usaremos a fórmula da definição de probabilidade condicional.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

De acordo com o enunciado, num total de 200 peças, temos 20 peças defeituosas, sendo 15 da máquina A e 5 da máquina B, logo:

$$P(A \cap D) = \frac{15}{200}$$

$$P(D) = \frac{20}{200}$$

Assim,

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{15}{200}}{\frac{20}{200}} = \frac{15}{200} \cdot \frac{200}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 75\%$$

3.4 Teorema do produto

A partir do conceito de probabilidade condicional, podemos concluir que:

[Teorema do Produto] Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ eventos de Ω, a probabilidade de $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ocorrerem simultaneamente é dada por :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}))$$

Demonstração:

Por indução, verifica-se que a afirmação é válida para $n = 2$, ou seja, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1). P(A_2|A_1)$, que é a definição de probabilidade condicional.

Suponha que seja válida para n = k. Assim $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_K) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_1 \cap A_2)) \cdot \cdots \cdot P(A_K|(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{K-1}))$.

Então basta verificar se a afirmação é válida para n = k +1, ou seja, se $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_K \cap A_{K+1}) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P\big(A_3\big|(A_1 \cap A_2)\big) \cdot \cdots \cdot P\big(A_{K+1}\big|(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_K)\big)$.

Da probabilidade condicional: $P\big((A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_K) \cap A_{K+1}\big) = P(A_{K+1}|(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_K)) \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_K)$

Da hipótese de indução tem-se que: Assim $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_K) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_1 \cap A_2)) \cdot \cdots \cdot P(A_K|(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{K-1}))$.

Logo: $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_K \cap A_{K+1}) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P\big(A_3\big|(A_1 \cap A_2)\big) \cdot \cdots \cdot P\big(A_{K+1}\big|(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_K)\big)$.

Portanto, a afirmação é válida para todo n natural, n > 1.

A seguir Morgado et all (2016) descreve uma sequência de exemplos bastante didáticos que motivaram os exemplos deste trabalho. Para maiores detalhes o leitor é convidado a consultar o livro Análise Combinatória e Probabilidade da coleção SBM.

Exemplo 6: Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores do Flamengo. A probabilidade de um pênalti ser convertido é 40% se o cobrador for do Flamengo. Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador do Flamengo e ser convertido?

Solução: Sejam os eventos F ={cobrador do flamengo} e C = {pênalti convertido}.

Temos, pelo conceito de Probabilidade Condicional, que:

a) O resultado de $P(F \cap C)$ que é igual a :

$$P(F \cap C) = P(F) \cdot P(C|F)$$
$$= 0{,}8 \cdot 0{,}4$$
$$= 0{,}32.$$

3.5 Teorema da probabilidade total

Suponha que os eventos $\mathrm{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n}$ formam uma partição do espaço amostral. Os eventos não têm interseções entre si e a união destes é igual ao espaço amostral.

Teorema: Seja B um evento qualquer desse espaço, então a probabilidade de ocorrência desse evento será dada por:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

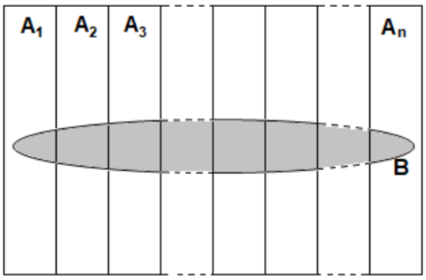
E usando a definição de probabilidade condicional,

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n).$$

Demonstração:

Para $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, o diagrama seguinte ilustra a situação proposta no teorema

Figura 11 - Teorema da Probabilidade Total



Fonte : Livro Análise Combinatória e Probabilidade

Pode-se verificar que $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$. Então: $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$.

Exemplo 7: Um piloto de fórmula Um tem 50% de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 25%. Se o serviço de Meteorologia estimar em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida?

Solução: Definindo os eventos G:{ganhar a corrida}; C:{chover}; NC:{não chover}. Temos que :

P(G|C) = 0,50 P(G|NC) = 0,25

P(C) = 0,30 P(NC) = 0,70

Queremos calcular a probabilidade do piloto ganhar (com ou sem chuva). Logo :

$P(G) = P(G \cap C) + P(G \cap NC) = P(G|C).P(C) + P(G|NC).P(NC)$. Daí, temos que :

$$P(G) = 0{,}50.0{,}30 + 0{,}25.0{,}70 = 0{,}325 \text{ } ou \text{ } 32{,}5\%.$$

3.6 Teorema de Bayes

Considere $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$ eventos que formam uma partição no espaço amostral Ω, cujas probabilidades são conhecidas.

Teorema: Considere que para um evento B se conheçam as probabilidades condicionais $A_1, A_2 \cdots A_n$, desta forma:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração:

Da probabilidade condicional temos :

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_I) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}.$$

Mas do Teorema da Probabilidade Total,

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n).$$

Assim :

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Exemplo 8: Num exame há 3 respostas para cada pergunta e apenas uma delas é certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade de 1/3 de escolher a resposta certa se ele está adivinhando e 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30 % das respostas do exame. Se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou?

Solução: Sejam os eventos A= adivinhar e R = resposta correta,assim:

(11)

$$P(A|R) = \frac{P(A) \cdot P(R|A)}{P(A) \cdot P(R|A) + P(\bar{A}) \cdot P(R|\bar{A})}$$

$$P(A|R) = \frac{0{,}70 \cdot \frac{1}{3}}{0{,}70 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}30 \cdot 1} = \frac{7}{16} \cdot$$

4 ATIVIDADES ATRATIVAS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Nesse Capítulo são apresentadas diversas atividades, possíveis de serem aplicadas em sala de aula, que envolvem o pensamento probabilístico. Algumas serão apresentadas em forma de jogos, outras como problemas.

O objetivo dessas atividades é fazer com que o aluno seja capaz de construir o conceito de Probabilidade, seja ele Clássico, Frequentista ou Geométrico, no ambiente escolar através da Resolução de Problemas com diferentes níveis de abordagens, desde os mais simples até os mais elaborados. A definição Clássica é a mais difundida em Sala de Aula o que se traduz em muitas das vezes em atividades com mera aplicações de fórmulas ou em atividades sem sentido, impossibilitando que o estudante, através de suas experiências, intuições e previsões, solidifique os conceitos de Probabilidade.

A escolha dos temas tratados teve como parâmetro despertar a curiosidade e o interesse do aluno, bem como solidificar alguns conceitos de Probabilidade. Para isso foi feita uma pesquisa de problemas, para nós, interessantes existentes na literatura e de experiências que resultariam em um engrandecimento do conhecimento por parte do aluno, onde a construção do pensamento matemático se faria de maneira exploratória. Coutinho (2001) defende a importância de trabalhar o estudo de Probabilidade segundo as visões “combinatório x frequentista”, em situações que envolvam problemas que devam ser resolvidos experimentalmente (simulação) e validados pelo cálculo *a priori* de uma probabilidade, pela definição clássica.

Para cada atividade estão relacionados os pré-requisitos teóricos necessários para sua compreensão e solução. Os níveis de dificuldades não são os mesmos para as atividades. Algumas utilizam resultados mais “avançados” da Teoria de Probabilidade, outras podem ser feitas usando-se somente a definição Clássica, outras, ainda, como os Jogos, não requerem nenhum conhecimento específico. Pelo contrário, o objetivo com eles é o da construção do conhecimento. Dessa forma, podem ser aplicados a alunos de Ensino Fundamental, como uma introdução à Teoria de Probabilidades. Corbalan (2002) considera que os alunos de Ensino Médio apresentam enormes dificuldades no estudo de Probabilidade pelo motivo de não estudarem-na anteriormente e que tal tema deveria ser abordado de forma mais lúdica nas séries iniciais.

Atividades:

4.1 Jogo Experimental Cara x Coroa

Pré-requisito: não é necessário nenhum conhecimento prévio de Probabilidade, pelo contrário, esse jogo é indicado para uma introdução ao assunto.

"A frequência relativa de resultados (de experimentos) pode ser usada como uma estimativa da probabilidade de um evento. Quanto maior o número de tentativas, melhor será a estimativa"(PEQUENO, 2018, não paginado). Com essa ideia, apresentamos ao aluno o Jogo Experimental Cara x Coroa (CHUBB, 2018), cujo objetivo é mostrá-lo, experimentalmente, que quanto maior for o número de lançamento de duas moedas, mais provável será ocorrer cara em uma moeda e coroa em outra.

Trata-se de um jogo para 3 jogadores em que um par de moedas será lançado 100 vezes. O resultado de cada lançamento será anotado em cada um dos cinco tabuleiros, descritos na Figura 12.

Material necessário: duas moedas; lápis de cor (3 cores); cinco tabuleiros para cada jogador.

Regras para o jogo:

- 2 moedas são lançadas a cada rodada;
- Em cada rodada, o jogador 1 ganha, se o resultado for duas caras; o jogador 2 ganha se o resultado for 2 coroas e o jogador 3 ganha se for uma cara e uma coroa;
- O resultado da rodada é anotado em cada tabuleiro da seguinte maneira: 1 para duas caras, 2 para duas coroas e 3 para ambos;
- Ao final dos 100 lançamentos, o vencedor de cada partida em cada tabuleiro é determinado pelo jogador com mais vitórias nessa partida;
- Quando o jogo termina, o resultado de cada partida em cada tabuleiro é colorido em uma única cor: vermelho se o vencedor for o jogador 1; azul se o vencedor for o jogador 2 e verde se for o 3. Se existir um empate, as duas cores relativas serão usadas igualmente. Um exemplo de um tabuleiro "colorido" pode ser visto no Apêndice A.

O tabuleiro do jogo

Para esse jogo são necessários cinco tipos de tabuleiros, onde em cada um deles serão anotados simultaneamente os resultados dos 100 lançamentos. São eles:

Tabuleiro 1 – uma partida de 100 tentativas;

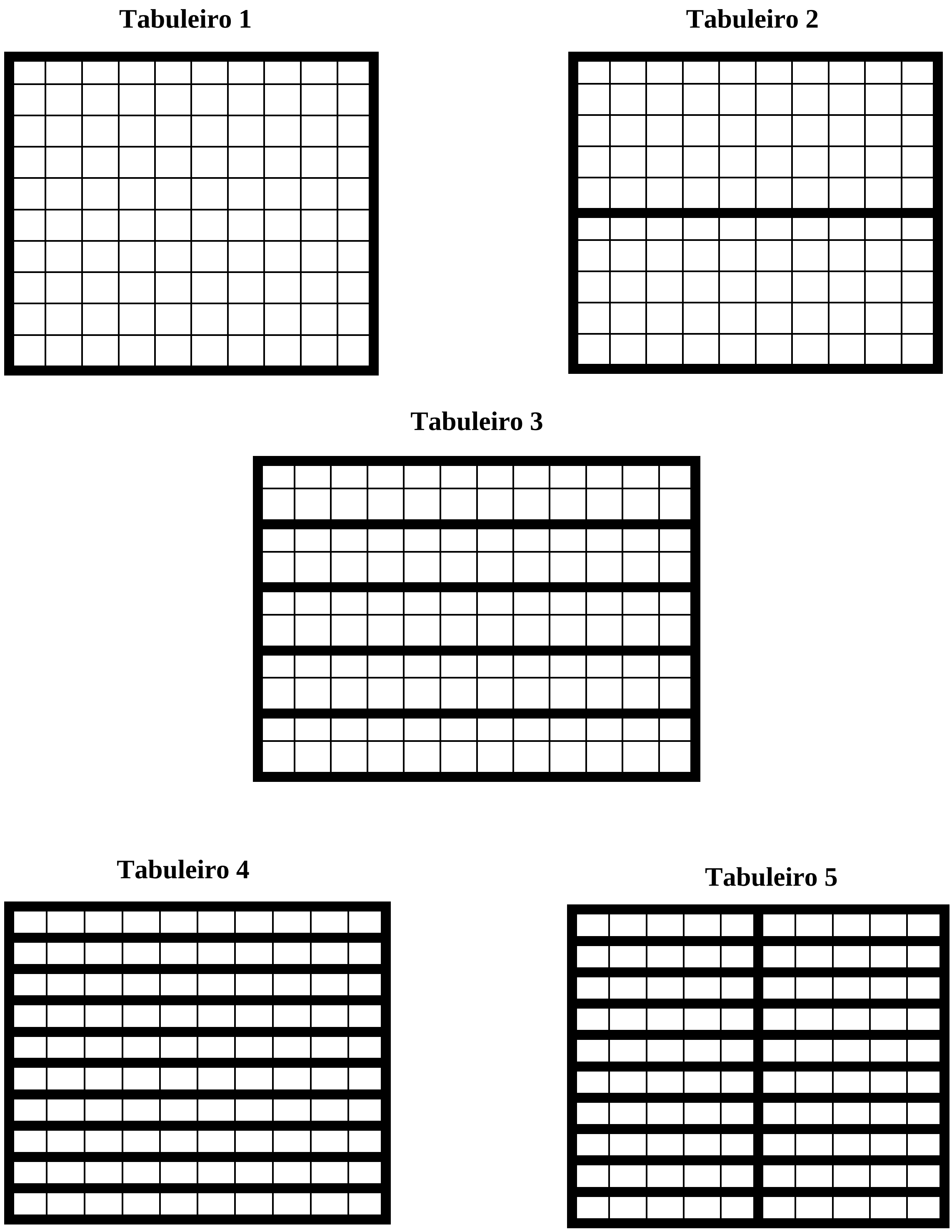
Tabuleiro 2 – duas partidas de 50 tentativas cada;

Tabuleiro 3 – cinco partidas de 20 tentativas cada;

Tabuleiro 4 – dez partidas de 10 tentativas cada;

Tabuleiro 5 – vinte partidas de 5 tentativas cada.

Figura 12 – Tabuleiros do jogo



Fonte: O autor, 2019.

O objetivo de se colorir o tabuleiro com as cores associadas a do jogador vencedor da partida é ficar evidenciado para o aluno a frequência dos resultados esperados. No caso, espera-se que a cor verde prevaleça nas partidas com maiores números da lançamento.

Como uma reflexão do resultado do Jogo, após o seu término, algumas perguntas podem ser feitas aos alunos. Por exemplo:

a) Por que o jogador que escolheu ambas as cores ganhou mais que os outros dois?

b) Por que um tabuleiro de jogos com mais tentativas é mais provável que o verde vença?

Respostas:

a) Nota-se que o jogador 3 tem o dobro de chances que seus oponentes, tendo em vista que, o espaço amostral Ω de cada jogada é: {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)}. Desse modo o jogador que escolheu uma cara e uma coroa tem mais chances de ganhar.

b) Nesse caso a probabilidade experimental aproxima-se mais da probabilidade teórica.

Pode-se observar juntamente com os alunos que em tabuleiros com um número menor de tentativas (jogo de 5 ou 10) pode-se ter mais cores azuis ou vermelhas do que em outros tabuleiros, mas no conjunto de todas as partidas de tais tabuleiros ainda predomina a cor verde.

4.2 JOGO: A Travessia do Rio

Pré-requisito: A princípio não é necessário nenhum conhecimento prévio de Probabilidade.

Esse jogo foi adaptado de um artigo da professora Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos (Probabilidade e Tarefas Exploratório - Investigativas: mobilização e produção de saberes nas aulas de matemática) e tem o objetivo de levar o aluno a perceber que, no lançamento de dois dados, a soma dos pontos das faces igual a sete tem maior chance de ocorrer, seguidas das somas seis e oito.

Material necessário: (2 jogadores)

- 2 dados cúbicos, com faces numeradas de 1 a 6
- 2 conjuntos de 12 peças iguais conforme Figura 14, cada um deles de cor ou forma diferente
- Um tabuleiro

Figura 13 - jogo "A Travessia do Rio"

MARGEM

RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

MARGEM

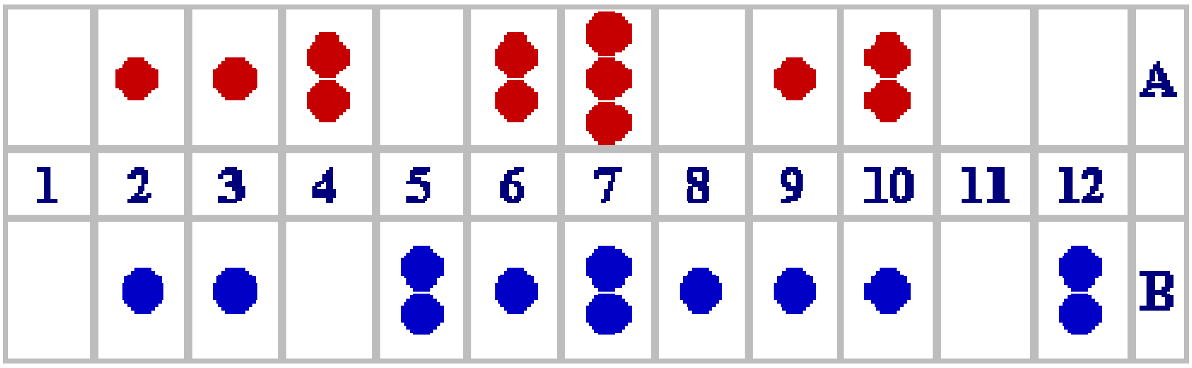
Fonte: Probabilidade e Tarefas Exploratório-Investigativas: mobilização e produção de saberes nas aulas de matemática."Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos

Regras para o jogo:

- Cada jogador coloca todas as suas peças, numa das margens do rio, pondo no máximo 3 peças em uma mesma casa, podendo deixar algumas casas vazias.
- Alternadamente, os jogadores lançam dados e calculam a soma obtida.
- Se a soma corresponder a uma casa onde estejam peças suas, na margem respectiva, passa uma delas para o outro lado do rio.
- Ganha quem conseguir passar primeiro todas as peças para o outro lado.

Suponha que a Figura 14 represente a disposição inicial escolhida pelos jogadores A e B. Se o jogador A obtiver um total de soma 6 então, na sua vez. ele passa uma das peças vermelhas que tem na casa "6" para o outro lado.

Figura 14 - Jogo "A Travessia do Rio"



Fonte**:** Probabilidade e Tarefas Exploratório-Investigativas: mobilização e produção de saberes nas aulas de matemática. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos

Após o término do jogo, as seguintes perguntas são pertinentes

a) Todas as somas têm a mesma probabilidade de sair? Para responder, analise o número de casos possíveis, para obter cada uma das somas.
b) Qual deve ser a disposição ideal das peças, para que haja maior probabilidade de vencer?

Resposta:

a) Não. Fazendo-se uma análise detalhada teremos :

Soma 2 : (1,1);

Soma 3 : (1,2), (2,1);

Soma 4 : (1,3), (3,1), (2,2);

Soma 5 : (1,4), (4,1), (2,3), (3,2);

Soma 6 : (1,5), (5,1), (2,4). (4,2), (3,3);

Soma 7: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3);

Soma 8: (2,6), (6,2), (3,5),(5,3),(4,4);

Soma 9: (3,6), (6,3), (4,5), (5,4);

Soma 10 : (4,6), (6,4), (5,5);

Soma 11: (5,6), (6,5);

Soma 12 : (6,6).

b) Dispondo as peças nas casas onde tem-se as maiores chances de se obter a vitória, por exemplo, três peças na casa 7, três peças nas casas 6 e 8 , três peças nas casas 5 ou 9; pois nestas casas as probabilidades de vencer são maiores.

4.3 O Par ou Ímpar é Justo?

Pré- Requisito: noção de Probabilidade Clássica.

O jogo Par ou Ímpar é um jogo que ocorre entre duas pessoas sendo um de seus objetivos resolver de maneira aleatória um impasse. Há duas opções para cada jogador (par ou ímpar), porém, as opções dos oponentes devem ser distintas. Logo em seguida, mostram as mãos com alguns dedos levantados ou não, contam-se os dedos levantados e vence quem tiver acertado a paridade do número total de dedos levantado por ambos. O jogo Par ou Ímpar pode ser jogado com uma ou duas mãos, sendo que o resultado do jogo depende de como ele é jogado.

Jogando com uma mão, considerando a possibilidade de se jogar o zero, o Jogo é justo, ou seja, independente do que escolher, cada jogador possui 50% de chance de vencer. De fato, cada jogador, A ou B, pode escolher qualquer número entre zero e 5, sendo assim, temos as 36 seguintes possibilidades elencadas na tabela .

Tabela 8 - Possibilidades do jogo de Par ou Ímpar com uma mão

A \ B	0	1	2	3	4	5
0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)
1	(1,0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)
2	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)
3	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3,3)	(3, 4)	(3, 5)
4	(4, 0)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4,5)
5	(5, 0)	(5,1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)

Fonte : O autor,2019

Tabela 9 - Resultados das Somas do Jogo de Par ou ìmpar com uma mão

B A	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	7
3	3	4	5	6	7	8
4	4	5	6	7	8	9
5	5	6	7	8	9	10

Fonte: O autor,2019

Somando os resultados, verificamos 18 possibilidades em que o resultado é par e 18 possibilidades em que o resultado é ímpar, como mostra a Tabela 9. Logo, cada jogador tem 50% de chance de vencer.

Se o “par ou ímpar” for jogado com as duas mãos, temos um total de possibilidades igual a 11.11=121. Como se trata de uma quantidade ímpar, já sabemos de antemão que o jogo não é justo. Resta saber quem leva vantagem: quem escolheu par ou quem escolheu ímpar.

Tabela 10 - Resultados das Somas do Jogo Par ou Ímpar com duas mãos

B A	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Fonte: O autor, 2019

Portanto verifica-se que a vantagem será de quem escolher par pois teremos 61 caso favoráveis sendo sua probabilidade igual a $\frac{61}{121} \cong 0{,}504$ enquanto que no caso de quem escolher ímpar a probabilidade será de $\frac{60}{121} \cong 0{,}496$.

4.4 Problema do bode (The Monty Hall Problem)

Pré-requisito: É desejável que o aluno tenha noção de Probabilidade Clássica.

O Problema de Monty Hall ou Problema do Bode Atrás da Porta é um problema clássico de Probabilidade que surgiu a partir do "Let's Make a Deal", programa de auditório exibido na televisão americana entre as décadas de 60 e 70, apresentado por Monty Halperin.

O objetivo de apresentá-lo ao aluno é mostrar que o cálculo da probabilidade de um evento, considerando estratégias distintas, pode ser importante para se vencer um jogo.

Vamos considerar o Problema adaptado a uma sala de aula. Suponha que um professor apresente para a turma um "cartaz" com a figura de três portas fechadas, uma das quais esconde um automóvel e as outras duas, dois bodes, Figura 15. O professor chama um aluno e pede que ele escolha uma das portas para abrir. Ele ganhará se abrir a porta que esconde o automóvel.

Dessa forma o aluno escolhe a porta, mas não a abre. O professor, que sabe previamente o que as portas escondem, escolhe uma outra porta que tem um bode e a abre. Em seguida pergunta ao aluno se ele deseja trocar de porta.

O problema é: será vantajoso para o aluno trocar de porta? Se o fizer, qual é a probabilidade de abrir a porta do automóvel?

Figura 15 - Problema do Bode

1 **2** **3**

Fonte: O autor,2019

Suponha que o automóvel esteja atrás da porta 1:

Caso 1: O aluno escolhe a porta 1

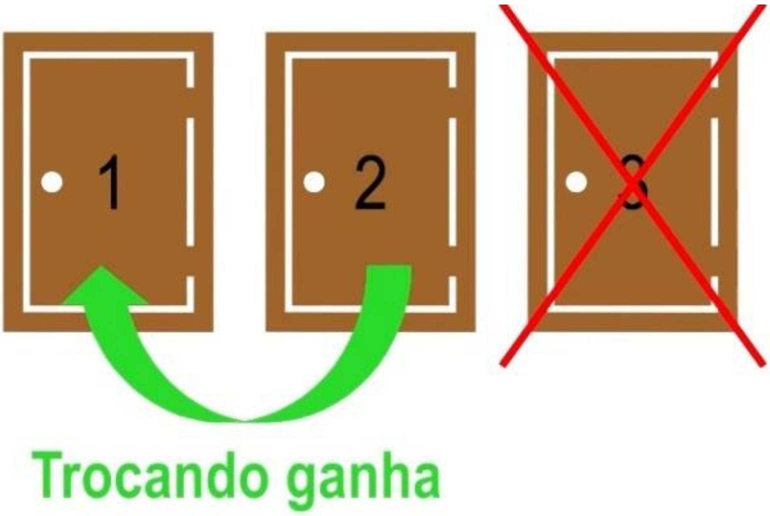
Nesse caso o professor tem duas possibilidades de escolha para abrir a porta. Se o professor abre a porta 2, o aluno troca para a porta 3 e perde. Abrindo a porta 3, o aluno troca para a porta 2 e também perde.

Nesse caso o aluno perde.

Caso 2: O aluno escolhe a porta 2

Nesse caso, o professor é obrigado a abrir a porta 3 (pois o automóvel está atrás da porta 1). Assim, o aluno troca para a porta 1 e ganha.

Figura 16 - Problema do Bode (caso 2)



Fonte : Curiosidades Matemáticas-Problema de Monty Hall

Caso 3: O aluno escolhe a porta 3

Nesse caso, o professor é obrigado a abrir a porta 2 (pois o automóvel está atrás da porta 1). Assim, o aluno troca para a porta 1 e ganha

Figura 17 - Problema do Bode (caso 3)

Fonte : Curiosidades Matemáticas-Problema de Monty Hall

Das 3 possibilidades, o aluno ganha trocando de porta em duas delas e só perde em uma, ou seja, trocando de porta suas chances dobram. A probabilidade de acertar a porta premiada passa para 2/3 contra 1/3 se permanecer com a escolha inicial.

4.5 O Caixa eletrônico é seguro?

Pré-requisitos: conceito de Probabilidade Clássica; Princípio Multiplicativo.

“Uma pessoa desatenta em uma fila de um caixa eletrônico não reparou que havia outra atrás vendo a senha que foi colocada na tela. Para completar a distração, ainda esqueceu o cartão do banco no próprio caixa. A pessoa atrás memorizou a ordem que as as teclas foram digitadas, e os números associados a elas. O modelo do display do caixa eletrônico é o apresentado na Figura 18.

Figura 18 - Display do caixa eletrônico

Fonte: Googlehttps://www.itau.com.br/conveniencia/

Sabendo que a senha é composta por seis dígitos, qual é a probabilidade da pessoa desonesta acertar a combinação da senha na primeira tentativa, sabendo que o display mudou e passou a ser o exibido abaixo, Figura 19?”

Figura 19 - Display do caixa eletrônico

Fonte: Googlehttps://www.itau.com.br/conveniencia/

Repare que os seis pares de números que apareciam no primeiro display foram todos substituídos por novos seis pares no display seguinte. Assim, o indivíduo que está atrás espionando o usuário da frente fica na dúvida entre duas teclas para cada dígito. Desta forma, como a senha possui 6 dígitos, existem um total de $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ possibilidades. Portanto, mesmo tendo espionado o usuário desatento e com posse do cartão, a probabilidade dele acertar ainda é pequena. Mas especificamente, 1/64=1,5615%. Tudo isso com duas falhas de segurança. Assim, podemos no máximo suspeitar que o mecanismo é seguro.

4.6 A Mega Sena

Pré- requisitos: Conceito de Probabilidade Clássica; Análise Combinatória.

A Mega-Sena foi criada em 1996 e ganhá-la pode ser caracterizada como um grande sonho de muitos brasileiros. Trata-se de uma modalidade de apostas (Lotérica) do Brasil, dentre as outras nove disponíveis em 2019 pela Loteria da Caixa (administrada pela Caixa Econômica Federal), que são: Lotofácil, Dupla Sena, Loteria Federal, Loteria Instantânea, Lotomania, Loteca, Lotogol, Timenania e a Quina. Os sorteios acontecem duas vezes por semana e no final do ano acontece a Mega-Sena da Virada, lançada no ano de 2008, sendo que em 2018 foi pago mais de 200 milhões de reais em prêmios.

O apostador pode marcar de 6 a 15 números do volante e deve acertar a *sena*, que consiste em acertar os seis números sorteados. Com o total de 60 dezenas, o apostador pode selecionar qualquer número em qualquer ordem, e tem também a chance de ganhar uma parte do prêmio, que é a Quina (apenas cinco números) ou a Quadra (quatro números).

A aposta mínima, de 6 números, custa R$ 3,50. Quanto mais números marcar, maior o preço da aposta e maiores as chances de faturar o prêmio mais cobiçado do país, como mostra a Tabela 11.

Tabela 11 - Probabilidade de acertos na Mega-Sena

Quantidade de nº jogados	Valor de aposta	Probabilidade de acerto (1 em)		
		Sena	Quina	Quadra
6	3,50	50.063.860	154.518	2.332
7	24,50	7.151.980	44.981	1.038
8	98,00	1.787.995	17.192	539
9	294,00	595.998	7.791	312
10	735,00	238.399	3.973	195
11	1.617,00	108.363	2.211	129
12	3.234,00	54.182	1.317	90
13	6.006,00	29.175	828	65
14	10.510,50	16.671	544	48
15	17.517,50	10.003	370	37

Fonte : Caixa Econômica Federal

Pode-se observar que a aposta simples (6 números) custa R$3,50 porém, cada vez que se aumenta um número, o valor da aposta aumenta consideravelmente. Isso se dá porque com 7 números se tem $C_7^6 = \frac{7!}{1!6!} = 7$, ou seja, ao acrescentar um número, estariam sendo feitos 7 jogos diferentes. Portanto, o preço da aposta é $7 \cdot 3{,}50 = 24{,}50$ reais.

Com base no texto, apresentando os devidos cálculos, responda:

a) Qual é a probabilidade de ganhar na mega-sena com apenas 6 números?

b) Qual a probabilidade de com apenas 6 números ganhar na quina? E na quadra?

Solução:

a) Temos como espaço amostral a combinação simples $C_{60}^{6} = \frac{60!}{54!.6!} = 50.063.860$. Como o jogador só apostou 6 números o que corresponde a uma jogada no meio desse espaço amostral, temos que:

$$P = \frac{1}{50.063.860} = 0,0000002\%$$

b) Para ganhar na quina, temos um espaço amostral de $C_{60}^{5} = \frac{60!}{55!5!} = 927.108$ .Com seis números o jogador tem : $C_{6}^{5} = \frac{6!}{1!5!} = 6$ possibilidades de jogo.

Logo:

$$\mathrm{P} = \frac{6}{927.108} = \frac{1}{154.518} = 0,00000647$$

Já com relação a quadra, tem-se $C_{60}^{4} = \frac{60!}{56!4!} = 34.980$ possibilidades.Com seis números o jogador tem $C_{6}^{4} = \frac{6!}{2!4!} = 15$ jogos distintos.

Logo:

$$P = \frac{15}{34.980} = \frac{1}{2.332} = 0,000428$$

4.7 Como fazer o rateio de um jogo interrompido?

Pré-requisito: Noção de probabilidade Clássica

Nessa atividade tratamos o problema da divisão dos pontos, abordado na seção 2.4 desse Trabalho. A questão que se coloca é: como fazer o rateio do prêmio, quando um jogo é interrompido antes do final das partidas.

“Vamos supor que dois jogadores, A e B, apostaram 50 reais cada um num jogo de cara ou coroa. Nesse jogo, um dos jogadores escolhe cara e o outro coroa, jogam a moeda e verificam o resultado; se sair cara, por exemplo, quem a escolheu, ganha a partida. Combinaram que o primeiro a vencer 10 partidas seria o vencedor e ganharia os

100 reais da aposta. No entanto, por algum motivo o jogo precisou ser interrompido quando o jogador A havia vencido 9 partidas e o jogador B havia vencido 7 partidas. Assim, o prêmio de 100 reais precisaria ser dividido entre eles. Nesse caso, quanto cada um dos jogadores A e B devem receber, de modo que a divisão do prêmio seja justa?”

Para a divisão do prêmio ser justa, esta deverá ser diretamente proporcional a probabilidade de cada um ganhar o jogo no momento em que houve a interrupção.

O jogador A já havia vencido 9 partidas, bastaria ganhar apenas mais uma partida para vencer o jogo.

O jogador B já havia vencido 7 partidas, sendo necessário, para ser o vencedor, ganhar 3 partidas consecutivas. Portanto, considerando as possíveis 3 partidas, o total de resultados seria 8 ($2 \times 2 \times 2$). Em apenas um deles o candidato B venceria. Logo a probabilidade do jogador B vencer o jogo no momento da interrupção é de 1/8, ou mais precisamente 12,5%, o que significa que a probabilidade de A ganhar é de 100% – 12,5% = 87,5%.

Como prêmio é de R$ 100,00, o jogador A levaria R$87,50 e o jogador B, R$12,50.

4.8 A Lotto Texas

Pré-requisito: Noção de Valor Esperado de um resultado.

O objetivo desta atividade é a de trabalhar o conceito de valor esperado de um resultado.

> O valor esperado de um resultado aleatório numérico é definido como sendo a média ponderada de seus possíveis valores em que os pesos são as respectivas probabilidades. Isto é, se os possíveis valores para o resultado são $x_1,x_2,...,x_n$, com probabilidades $p_1,p_2,...,p_n$, seu valor esperado é $p_1x_1 + p_2x_2 +.... + p_nx_n$ (Note que a soma de todos os pesos é igual a 1).(MORGADO,2015, p.141).

A Lotto Texas é um jogo de loteria dos EUA, em que o apostador compra um bilhete único ao preço de um dólar e marca seis números de 1 a 54.

Na Tabela 12 exporemos uma situação hipotética descrita por MAZUR (2016, p.71) na qual ele mostra os resultados para os acertos de 3, 4, 5 e 6 números.

Tabela 12 - Loto Texas

Acerto	valor do prêmio[3]	Probabilidade
6 números	2 milhões de dólares	0,000000038
5 números	2 mil dólares	0,00001115
4 números	50 dólares	0,000654878
3 números	3 dólares	0,013157894

Fonte : Livro :Como a a Matemática explica as coincidências da Vida (MAZUR)

De acodo com a tabela 12 exposta acima, responda :

a) Qual o valor esperado (a expectativa de se ganhar)de se obter o grande prêmio de 2 milhões de dólares, de um apostador, jogando-se um bilhete único? Com o valor esperado calculado, o que pode-se concluir sobre isto?

b) Qual o valor esperado, de um apostador, de se ganhar ganhar qualquer prêmio, jogando-se um bilhte único? Com o valor esperado calculado, o que pode-se concluir sobre isto?

Solução :

Na letra a calcula-se o valor esperado multiplicando-se o valor do prêmio pela probabilidade e teremos 0,000000038 x 200000=0,076≅ 0,08. Com isto podemos concluir que a cada um dólar jogado a expectativa de se ganhar é de meros 8 centavos de dólar, ou seja, para cada dólar apostado o apostador joga fora 92 centavos.

Na letra b o cálculo valor esperado se dará por $(0{,}000000038\times2000000) + (0{,}0000115\times2000) + (0{,}00065478\times50) +(0{,}013157894\times3) = 0{,}170517582\cong0{,}17$. Com isto podemos concluir que a cada dólar apostado a expectativa de ganhar qualquer prêmio é de 17 centavos de dólar, ou seja, para cada dólar apostado, o apostador joga fora 83 centavos de dólar.

4.9 Um Sorteio Diferente

Pré-requisitos: Probabilidade Clássica e Multiplicação de Probabilidades.

Essa atividade aponta para o fato de que nem sempre os resultados de problemas associados à Probabilidade correspondem à nossa intuição. Se aplicada em sala de aula, com certeza, despertaria a curiosidade e o interesse do aluno.

[3] Depende da quantidade de bilhetes vendidos e de quantas semanas se passaram sem ganhadores do grande prêmio.

“Um professor resolveu sortear um aluno, dentre os 30 em classe, para ser o representante da turma. Ele utilizou o seguinte critério: cada aluno escreverá o seu número da chamada (que vai de 1 até 30) em um pequeno papel dobrado e o colocará em uma urna. O professor pedirá para cada aluno, **na ordem da chamada**, tirar um papel que **não será reposto na urna**. O aluno que retirar o seu número da chamada no papel será o representante.

A pergunta que se coloca é: esse tipo de sorteio idealizado pelo professor é justo? Ou será que os últimos alunos da chamada teriam chances menores?

Note que a chance do primeiro aluno da chamada vencer o sorteio é de 1/30. Para o segundo aluno da chamada ser o vencedor é necessário que o primeiro não ganhe o sorteio, cuja probabilidade é de 29/30, e que ele retire o seu próprio número da chamada , cuja probabilidade é de 1/29. Assim a probabilidade do segundo ser o vitorioso é de (29/30).(1/29)=1/30.

De forma geral, para que o n-ésimo aluno vença o sorteio, onde $1 \leq n \leq 30$, é necessário que os n-1 alunos anteriores percam o sorteio e ele vença o sorteio. A probabilidade dos n-1 alunos perderem e o n-ésimo ser o vitorioso é de:

$$\frac{29}{30} \cdot \frac{28}{29} \cdot \frac{27}{28} \cdot \frac{26}{27} \cdot \ldots \cdot \frac{30-(n-1)}{30-(n-2)} \cdot \frac{1}{30-(n-1)} = \frac{1}{30}$$

Portanto, a chance de ganhar é a mesma para todos os alunos da classe. Nem sempre os problemas de probabilidade correspondem à nossa intuição. Nesse caso, por exemplo, seria razoável pensar que os primeiros alunos teriam maiores chances de ganhar pois teriam a oportunidade de tirar o papel com seu número antes dos outros.

4.10 O clássico problema do aniversário

Pré-requisitos : Probabilidade do Evento Complementar e Clássica.

“Considerando k pessoas numa sala. Qual a probabilidade de que no mínimo duas pessoas façam aniversário no mesmo dia e mês? A partir de qual valor de k você "arriscaria" dizer que essa probabilidade é maior do que 1/2 ou 50 %?

Segundo Mazur (2016), o Problema do Aniversário foi apresentado pela primeira vez pelo matemático austríaco Richard Von Mises (1883- 1953). Trata-se de um problema interessante, que nos dá uma percepção de como as leis da probabilidade podem atuar contra a nossa intuição.

Inicialmente resolveremos o problema para um grupo de 8 pessoas, na qual mostraremos a probabilidade de que duas dessas pessoas, pelo menos, aniversariem no mesmo dia?

Determinaremos, primeiramente, a probabilidade de que as oito pessoas façam aniversários em datas diferentes, em seguida calcularemos o que se pede pelo evento complementar.

O espaço amostral Ω consiste no conjunto formado por todas as datas possíveis para o aniversário de oito pessoas. Usando o princípio Multiplicativo, temos :

n(Ω)= 365.365.365.365.365.365.365.365 = 365^8.

Seja E o evento formado pela totalidade de oito datas não coincidentes. Calculando o número de casos favoráveis para esse evento, temos, $n(E) =$ 365.364.363.362.361.360.359.358.

Logo a probabilidade será de :

(15)

$$P = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361.360.359.358}{365^8}$$

Assim temos 92,57% de probabilidade que as 8 pessoas façam aniversários em datas distintas e aplicando-se a propriedade do evento complementar temos :

100% - 92,57% = 7,43% , é a probabilidade de que, ao menos duas das oito pessoas aniversariem na mesma data.

Generalizando o problema proposto acima para um grupo de k pessoas, a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia é de :

(16)

$$P = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (366 - k)}{365^k}$$

Se aplicarmos a fórmula acima para um grupo k = 50 pessoas, teremos que a possibilidade de duas pessoas aniversariem no mesmo dia seja de 97% praticamente um evento certo de ocorrer. Abaixo temos uma tabela com a probabilidade desse fato ocorrer para alguns valores de k:

Tabela 13 - Resultados de alguns valores de k com a probabilidade de haver coincidência de aniversários

K pessoas	Probabilidade
5	0,03 = 3 %
10	0,12 = 12%
15	0,25 = 25%
20	0,41 = 41 %
23	0,51 = 51%
25	0,57 = 57%
30	0,71 = 71%
40	0,89 = 89 %
45	0,94 = 94%
50	0,97 = 97%

Fonte : Livro Matemática Discreta (Coleção Profmat)

4.11 O Problema do Macarrão

Pré-requisitos: Probabilidade Geométrica.

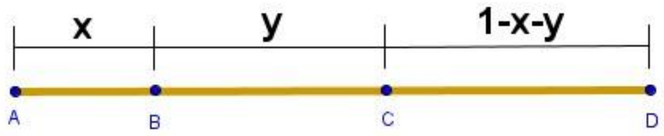
“Ao dividir um macarrão espaguete em três pedaços aleatoriamente. Qual a probabilidade de esses três pedaços formarem um triângulo?”(WAGNER,1994)

Este problema foi sugerido pelo professor Eduardo Wagner, durante um curso de aperfeiçoamento de professores secundários promovido pelo IMPA. Em uma aula distribuiu um espaguete a cada um deles e sem que eles soubessem o que iria ocorrer, pediu a cada um que partisse o espaguete, ao acaso, em três pedaços. Em seguida, pediu que cada um verificasse se conseguiam formar um triângulo com os seus três pedaços.(WAGNER,1994).

Solução:

Sem perda de generalidade, suponhamos que o comprimento do macarrão seja igual a 1. Sejam $AB = x, BC = y, CD = 1 - x - y$ com $x > 0, y > 0$ e $1 - x - y > 0$ as medidas de comprimento das partes em que o macarrão foi dividido,como na Figura 20.

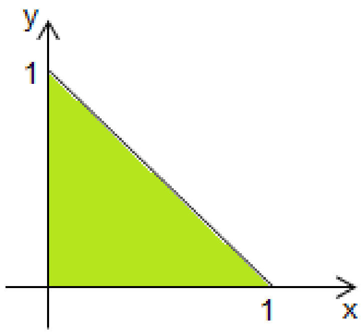
Figura 20 - Divisão em 3 partes



Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-probabilidade-com-macarrao

Isso significa que o par ordenado (x,y) que contém as variáveis iniciais de nosso problema pertence no plano cartesiano à região triangular em verde, conforme Figura 21.

Figura 21- Região triangular em verde



Fonte: O autor, 2019

Portanto, cada forma de dividir um segmento em três partes está agora representada por um ponto interior ao triângulo da figura.

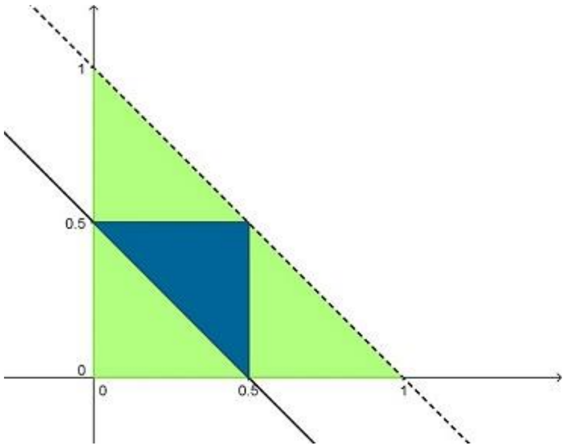
Entretanto, não são todas as divisões que formam triângulos. Pela desigualdade triangular, temos que um triângulo existe se, e somente se, a medida de cada lado for menor que a soma das dos outros dois. Isso é equivalente a dizer que, em um triângulo, a medida de cada lado é menor que o seu semiperímetro, que no nosso caso é igual a $\frac{1}{2}$.

Temos, portanto, $x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}, 1 - x - y < \frac{1}{2}$, Sendo a última equivalente a $x + y > \frac{1}{2}$.

Reunindo essas três afirmações temos que o par ordenado (x,y) que contém as variáveis satisfazendo nossas condições de interesse é o interior do triângulo formado pelos pontos médios dos lados do triângulo em azul conforme Figura 22 [4] .

[4] Figura 22 encontra-se no site http://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-probabilidade-com-macarrao.

Figura 22 – Região triangular em azul



Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-probabilidade-com-macarrao

O triângulo formado em azul pelos pontos médios tem área igual a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo verde, o que nos leva a concluir que a probabilidade de que os três segmentos formem um triângulo é :

$$P(Azul) = \frac{Área\ (Azul)}{Área\ (\ verde)} = \frac{1}{4}$$

4.12 Interferindo na Probabilidade

Pré-requisitos: Probabilidade Clássica; Probabilidade da união de dois eventos; multiplicação de Probabilidades.

Nessa atividade é apresentado ao aluno um problema que mostra como é possível, mediante algumas ações, para o mesmo evento, aumentar, ou diminuir, as chances de se obter um determinado resultado[5].

“Um professor mostra aos alunos duas sacolas, quatro bolas vermelhas e quatro bolas brancas. Ele diz que vai distribuir as bolas entre as duas sacolas, podendo, eventualmente, que uma das sacolas fique vazia e, pedirá a um aluno para escolher uma das sacolas e dela retirar, aleatoriamente, uma bola. O professor pergunta:

a) Como devo distribuir as bolas entre as duas sacolas de modo a tornar a probabilidade do aluno retirar uma bola vermelha a menor possível? Qual será a probabilidade nesse caso?

---

[5] Tal atividade baseia-se no problema “Fixing The Odds”, encontrado no site https://nrich.maths.org/580.

b) Se agora a minha intenção é que a probabilidade dele escolher uma bola vermelha ser a maior possível, como devo distribuir as bolas entre as sacolas? Qual será a probabilidade, nesse caso?”

Solução:

a) Temos duas sacolas que chamaremos de sacola 1 e de sacola 2. Seja $p_1(V)$ a probabilidade de se retirar da sacola 1 uma bola vermelha e, analogamente, $p_2(V)$ a de se retirar de 2 uma bola vermelha. Sendo $p(V)$ a probabilidade de se retirar uma bola vermelha, temos $p(V) = p(V \cap S_1) + p(V \cap S_2)$, onde $p(V \cap S_i)$ é a probabilidade de escolher a sacola i e dela se retirar uma bola vermelha, $i = 1{,}2$. Como $p(S_1) = p(S_2) = \frac{1}{2}$, temos $p(V) = p(V \cap S_1) + p(V \cap S_2) = \frac{1}{2}p_1(V) + \frac{1}{2}p_2(V)$.

Sejam n e m o número de bolas vermelhas e brancas na sacola 1, respectivamente

Desse modo, tem -se $(4-n)$bolas vermelhas e $(4-m)$bolas brancas em 2.

Temos que $\min\{p(V)\} = \min\left\{\frac{1}{2}p_1(V) + \frac{1}{2}p_2(V)\right\} = \frac{1}{2}\min\{p_1(V)\} + \frac{1}{2}\min\{p_2(V)\}$. Usaremos tal fato para minimizar $p(V)$.

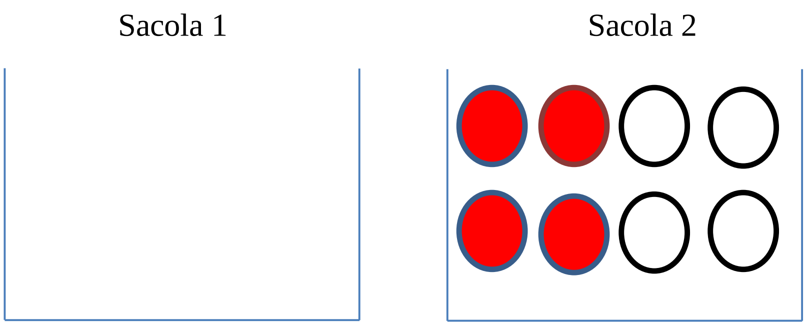
Para que tenhamos $\min\{p_1(V)\}$ é necessário $n = 0$, uma vez que nesse caso, $p_1(V) = 0$. Isso implica que $p_2(V) = \frac{4}{8-m}$, que é mínimo quando $m = 0$.

Assim, $p(V)$ será mínima quando $n = 0$ e $m = 0$.

Desse modo, respondendo à pergunta inicial, devo colocar todas as bolas em uma sacola, conforme Figura 23. Assim,

$$p(V) = \frac{1}{2}.0 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Figura 23 – Sacolas 1 e 2



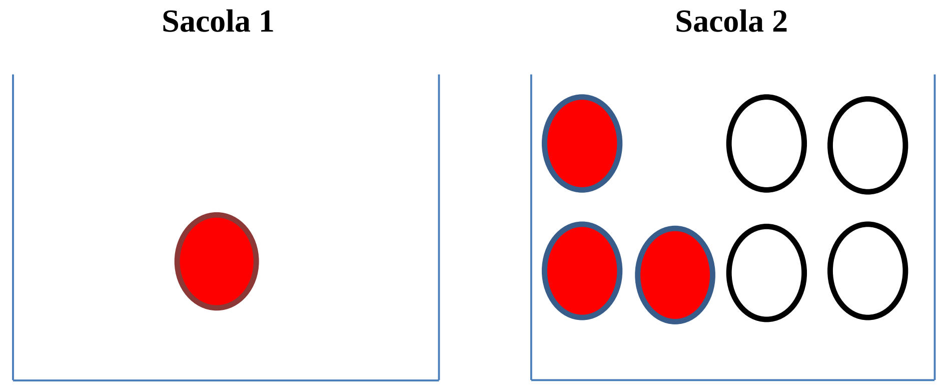
Fonte: O autor, 2019

b) Usando a mesma notação e argumentos análogos aos adotados no item a), temos $\max\left\{\frac{1}{2}p_1(V)+\frac{1}{2}p_2(V)\right\}=\frac{1}{2}\max\{p_1(V)\}+\frac{1}{2}\max\{p_2(V)\}$. A solução aqui é maximizar $p_1(V)$ e $p_2(V)$. O valor máximo para $p_1(V)$ é 1, o que é obtido quando $m=0$ e $n\geq 1$, ou seja, quando na sacola 1 não colocarmos bolas brancas e colocamos pelo menos uma vermelha . Para $m=0$, temos $p_2(V)=\frac{4-n}{8-n}$, que é máximo quando $n=1$.

Assim, a solução para o item b) seria colocar exatamente uma bola vermelha em 1 e as outras sete bolas na sacola 2, conforme Figura 24. Desse modo,

$$p(V)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{3}{7}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}.$$

Figura 24 – Sacolas 1 e 2



Fonte: O autor, 2019

4.13 A princesa ou os leões

Pré-requisitos: probabilidade clássica; probabilidade da união de dois eventos.

O problema, a seguir, nos apresenta uma situação que ilustra como o uso da Teoria de Probabilidade pode alterar o resultado de um determinado acontecimento, mediante a adoção de estratégias distintas[6].

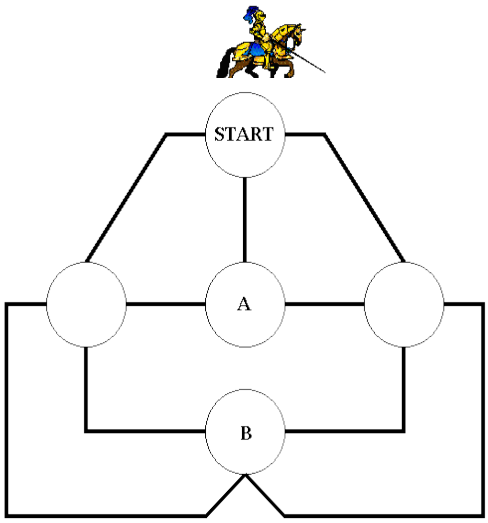
“O Rei de um reino distante organizou o casamento de sua única filha com um príncipe de um reino próximo. No entanto, a princesa já havia se apaixonado por um camponês bonito e inteligente mas, infelizmente, pobre. O Rei, ao saber da relação da princesa com o camponês, ordenou que o pretendente fosse jogado na cova dos leões. Sua filha implorou ao rei por misericórdia, o Rei, então, propôs o seguinte acordo: seu amante

[6] Tal atividade baseia-se no problema “Fixing The Odds”, encontrado no site https://nrich.maths.org/591

seria levado a um labirinto, onde cada caminho conduziria a um de dois quartos. Em um estaria a princesa, mas no outro haveria muitos leões famintos. Se o camponês entrasse no cômodo onde a princesa estivesse então eles poderiam se casar, caso contrário...

O Rei mostrou à princesa um mapa do labirinto, Figura 25, e a princesa foi autorizada a decidir em qual quarto ela iria esperar, A ou B. Ela não tinha como enviar uma cópia do labirinto para seu amante, então ele teria que adivinhar, por si só, qual caminho iria seguir.

Figura 25- Labirinto



Fonte: n-rich-org/591

Qual dos quartos ela deveria escolher para ficar de modo que seu amante tivesse maior chance de encontrá-la? Qual é a probabilidade de que essa história termine feliz para sempre?

O mapa do labirinto é reproduzido abaixo, onde as linhas representam corredores do labirinto e, os círculos, cômodos com portas a prova de som. O camponês não conhecerá seu destino até que ele abra a porta e caia nos braços de sua princesa ou nas garras dos leões.

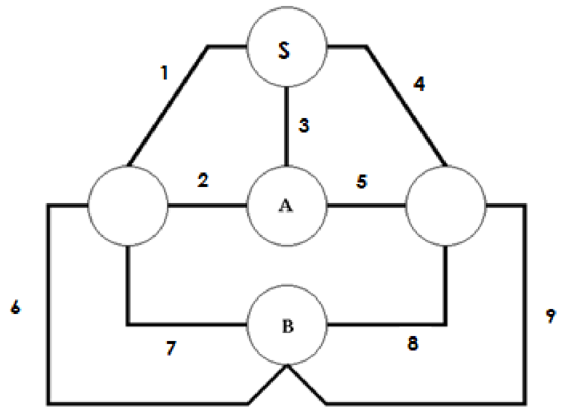
Solução:

Vamos calcular, separadamente, a probabilidade do camponês chegar em A, $p(A)$, e a de chegar em B, $p(B)$.

A Figura 26 exibe o labirinto com os corredores numerados. Identificaremos cada corredor com a sua respectiva numeração. Assim, dizemos, por exemplo, que o caminho

S-1-2-A é o caminho que sai de S, passa pelo corredor 1, em seguida, pelo corredor 2 e chega em A.

Figura 26- Resolução(Labirinto)



Fonte: n-rich-org/591

Para chegar em A, o camponês teria 3 opções de caminhos: S-1-2-A; S-3-A; S-4-5-A.

A probabilidade dele escolher o caminho S-1-2-A é $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, de escolher o caminho S-3-A é $\frac{1}{3}$ e, finalmente, a de escolher S-4-5-A é $\frac{1}{9}$, pois é análoga a do caminho S-1-2-A. Portanto, $p(A)=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$.

Já para chegar em B existem 4 possibilidades de caminhos: S-1-6-B; S-1-7-B; S-4-9-B; S-4-8-B, cujas probabilidades de escolha são todas iguais a $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, uma vez que a cada opção, existem 3 caminhos para seguir. Logo $p(B)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$.

Assim, a princesa, usando de seus conhecimentos probabilísticos, escolhe ficar no cômodo A, uma vez que a probabilidade do seu amante chegar em A é maior que a de chegar em B.

5 CONCLUSÃO

Com a implementação destas atividades, o intuito é de que o aluno de Ensino Médio seja capaz de construir paulatinamente o entendimento de probabilidade no ambiente escolar através da resolução de problemas com diferentes níveis de dificuldades. Isso não deve ocorrer somente com a mera aplicação de fórmulas ou de atividades sem sentido, mas de maneira que o estudante seja o ponto central e que, através de suas experiências, intuições e previsões, vão se consolidando os conceitos da disciplina.

Este trabalho, também, tem a finalidade de através da resolução de problemas apresentar um conteúdo que é por vezes ignorado em sala de aula que é a Probabilidade, embora recomendações dos PCNs. Em relação ao trabalho com Resolução de Problemas, os Parâmetros Curriculares Nacionais (2000) recomendam que o professor incentive não apenas a busca pela resposta correta, mas a construção dos conceitos matemáticos envolvidos no problema.

Segundo (VAN DE WALLE, 2009), o ensino-aprendizagem de matemática por meio da metodologia da resolução de problemas e da utilização de jogos possibilita aos estudantes a criação de estratégias para resolução das situações-problema, a apropriação de conceitos matemáticos e novas compreensões da matemática embutida na tarefa.

De acordo com experiências adquiridas em sala de aula nota-se que os alunos dão significado a determinadas atividades, quando expostos a situações-problema contextualizadas, que permitem o estabelecimento de referências e relações entre os valores empregados, exploração das regularidades do sistema numérico, que envolvam comparações, estimativas, investigação, comunicação e outras habilidades necessárias ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

Ao reconhecer diferentes situações às quais um conceito se aplica, o aluno mostra que se apropriou daquele conceito ou procedimento, de sua extensão, limites e possibilidades de aplicação. Além de reconhecer o campo de aplicação de um conceito ou procedimento, deve saber como ele funciona e por que leva à solução do problema.

A atividade Jogo Experimental Cara x Coroa foi o ponto de partida para a construção de conhecimentos de Probabilidade. Um bom problema não só exige a aplicação de conhecimentos aprendidos, mas a elaboração de novos conhecimentos. Como professor da Rede Pública do Município do Rio de Janeiro pude aplicá-lo em minha Sala de Aula. De início houve uma certa resistência por parte dos alunos, mas o resultado final foi altamente satisfatório. Com o passar do tempo desta atividade, eles foram observando que havia um certo padrão nos resultados dos lançamentos das duas moedas e começaram a perceber uma maior incidência da cor verde nos resultados dos tabuleiros e o mais importante, o porquê disso estar acontecendo. Mesmo sem um conhecimento prévio de Probabilidade eles foram capazes de assimilar que a Probabilidade Experimental se aproxima da Probabilidade Teórica realizando experimentos, fazendo previsões. Acreditamos que como acontece com qualquer conteúdo abordado em Matemática, nossos alunos precisam de um certo tempo para entenderem determinado assunto, cabe ao professor, apresentar as experiências certas para dar sentido ao conteúdo apresentado.

O ensino de Probabilidade, embora tão importante, é pouco explorado no Ensino Básico. Assim, acreditamos ser relevante este trabalho, uma vez que ele oferece opções de atividades interessantes relacionadas à Probabilidade que podem ser aplicadas ou adaptadas à Sala de Aula, motivando alunos e professores a ampliarem o conceito em questão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAMI, Anna. **Mega-Sena.** 2019 . Disponível em: <https://www.infoescola.com/curiosidades/mega-sena/>. Acesso em 20 abr. 2019.

ANDRADE, Rafael Thé Bonifácio de. **A Probabilidade aplicada aos jogos de azar**. 2017. 70 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, PROFMAT, João Pessoa, 2017.

AVELAR, Afonso Reis de. **Reflexões sobre o ensino de probabilidade em nível básico e a resolução de alguns de seus problemas clássicos**. 2018. 71f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Brasília, PROFMAT, Brasília, 2018.

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latino americana de Investigacion en Matematica Educativa**, México, v. 8, n. 3, p.247-263, nov. 2005.

BERTOLO, Luiz Antônio. **Probabilidade e Estatística**.2012.Disponível em: <http://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/SlidesProbabilidadesBertolo.pdf>. Acesso em 20 abr. 2019.

Brasil**.** Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares nacionais (PCNs). Matemática. Ensino Médio**: Brasilia: MEC/SEF, 1998.

CALABRIA, Angelica Raiz; CAVALARI, Mariana Feiteiro. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. **X Seminário Nacional de História da Matemática Sociedade Brasileira de História da Matemática.** Campinas, 2013.

CARDEÑOSO, J. Maria; AZCÁRATE, Pilar. Tratamiento del conocimiento probabilístico em los proyectos y materiales curriculares. **Revista sobre La Enseñanza y Aprendizaje de Las Matematicas (Revista SUMA)**. Zaragoza ,v. 20, p.41-51, nov, 1995.

CARNEIRO, C. A. Garófalo; LEMOS, H. C. Fernandes. **Probabilidades no futebol.** 2017. 32 f. Dissertação (Mestrado)-Universidade Federal de São João Del-Rei, PROFMAT, São João Del-Rei, 2017.

CARVALHO, D. L.; OLIVEIRA, P. C. Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na licenciatura em matemática:clássica, frequentista, subjetiva e formal. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25., 2002, Caxambu. **Anais [...**] Caxambu: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2002. 1 CD.

CARVALHO, Paulo. **Metodos de contagem e probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

CARVALHO, P. C. Pinto. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 10 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

CARVALHO, P. C. Pinto; MORGADO, A. C. de Oliveira. **Matemática discreta**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

CORBALÁN, F. **Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato**. Madrid: Editorial Síntesis, 2002.

COUTINHO, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?. In: **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 2. n. 3, p.50-67, 2007.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista**.1994.151 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

COUTINHO, C. Q. S. **Introduction aux situations aléatoires dès le collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre**. 2001. 330 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Université Joseph Fourier, Grenoble I, França. 2001.

DASSIE, Bruno Alves; JULIANELLI, José Roberto. **Curso de Análise Combinatoria e Probabilidade – Aprendendo com a Resolução de Problemas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

FERNANDES, José António. et al. Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística, In: Actas do Encontro Nacional de Probabilidades e Estatística na Escola,2004, Braga. **Anais[...]**Braga: CIEd ,2004, p.165-193.

FILHO, Haroldo Costa Silva. **Probabilidade e valor esperado discussão de problemas para o ensino médio**. 2016. 73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

KATZ, Victor J. **História da matemática**. 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. 2010.

LAPLACE, Pierre-Simon. **Ensaio Filosófico sobre as probabilidades.** Trad: SANTANA, Pedro Leite de. Porto Alegre: PUC-RS, 2010.

LOPES, C. A. Espasandin; MORAN, R. C. C. Pinto. A estatística e a probabilidade através das atividades propostas em alguns livros didáticos brasileiros recomendados para o ensino fundamental. In: Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística–Desafios para o século XXI,1999,Florianópolis. **Anais[...]**Florianópolis: Universidade Estadual de Santa Catarina, p.67-174, set. 1999.

LOPES, C. A. Espasandin. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cad. CEDES**, Campinas, v. 28, n.74, p. 57-73. 2008.

LOPES, J. Marcos; FILHO, I. F. Baliero; SALVADOR, J. Antônio. O conceito de probabilidade geométrica por meio do uso de fractais. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional,34,2012, Águas de Lindoia. **Anais[...]**Águas de Lindoia: SBMAC, 2012.

LOPES, J. Marcos; TEODORO, J. Vitor; Rezende, J. de Carvalho. Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio. **Zetetiké**, Campinas, v. 19, n. 36, p. 75 – 93, jul./dez. 2011.

MAZUR, Joseph. **Acaso : como a matemática explica as coincidências da vida.** Trad: SZLAK, Carlos, Rio de Janeiro, Casa da palavra, 2016.

MORAIS, Daiane Aparecida Miliossi. O papel dos professores da educação básica e do ensino médio como mediador na utilização de tecnologias midiáticas e dispositivos moveis na sala de aula. In **-** Eixo 7: Processos metodológicos que fundamentam a prática docente,14,2017, Curitiba. **Anais[...]**Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, set. 2017.

PEREIRA, Polion Barboza de Souza e Silva. et al. Definição clássica e definição frequentista de probabilidade: uma abordagem em sala de aula. In: Encontro Nacional de Educação Matemática,12,2016, São Paulo. **Anais[...]**São Paulo: SBEM, 2016.

REDAÇÃO Mundo Estranho. **Como funcionam os caixas eletrônicos?** 2011. Disponível em:<https://super.abril.com.br/mundoestranho/como funcionam os caixas eletronicos/>. Acesso em 20 abr.2019.

ROSADAS, Vitor Dutra Soares, **Triângulo de Pascal: curiosidades e aplicações na escola básica.** 2016. 70 f.. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

SANTANA, Michaelle Renata Moraes de. Discussões sobre o uso do livro didático no ensino da probabilidade nos anos iniciais. In : **–** Encontro brasileiro de estudantes de pós-graduação em educação matemática,20,2016, Curitiba. **Anais[...]**Curitiba:EBRAPEM, nov. 2016.

SANTOS, Jaqueline A. F. Lixandrão. Probabilidade e tarefas exploratório-investigativas: mobilização e produção de saberes nas aulas de matemática. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática,2,2008,Rio Claro.**Anais[...]**Rio Claro: EBRAPEM,2008.

SOLDATELLI, Ângela. O Paradoxo da Porta dos Desesperados. **Scientia Cum Industria**, Caxias do Sul, v.4, n.4, p. 228–231, 2016. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/revistas/index.php/scientiacumindustria/article/download/4909/pdf>. Acesso em: 19 abr 2019.

TEIXEIRA, R. Costa; MORGADO, A. Cesar. Introdução a Teoria da Probabilidade. In Colóquio de Matemática do Centro Oeste,2,2011, Campo Grande. **Anais[...]**Campo Grande: Universidade Federal do Mato Grosso, nov. 2011

VAN DE WALLE, John. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

CHUBB, Mark. **From experimental to theoretical probability**. 2018. Disponível em: <https://buildingmathematicians.wordpress.com/tag/experimental-probability/>. Acesso em: 10 abr. 2019.

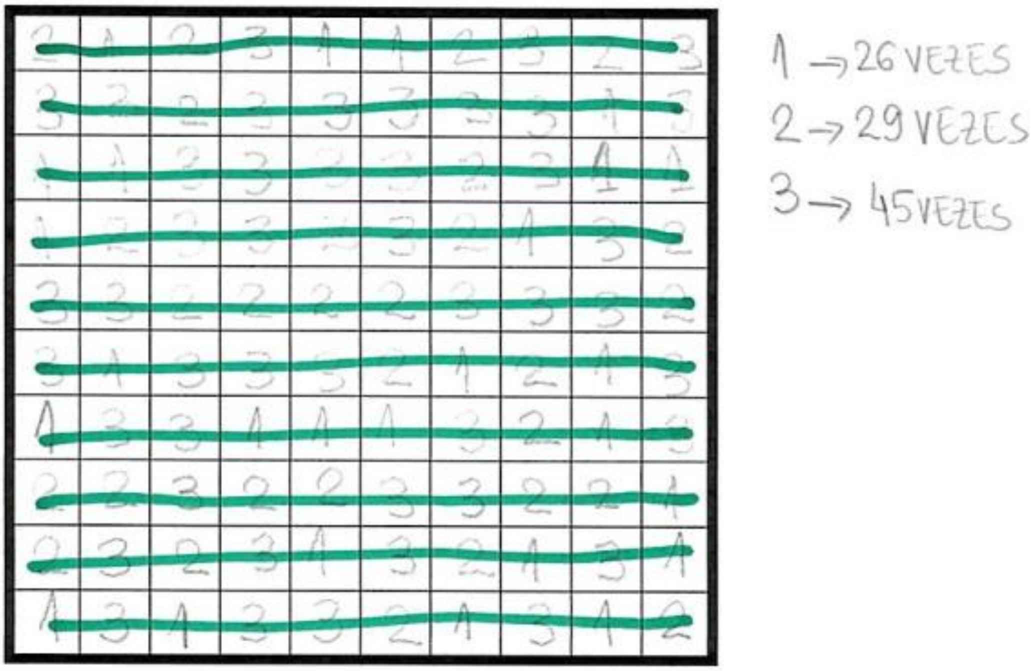
VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da Teoria das Probabilidades. **Revista Brasileira de História da Matemática.** Porto Alegre**,** v. 8, n. 16, p. 143-153, Out. 2008.

WAGNER, Eduardo.O problema do macarrão e um paradoxo famoso. **Revista Professor deMatemática**,RiodeJaneiro,n.34,p.30,1994.Disponívelem:<http://www.rpm.org.br/cdrpm/34/6.htm>. Acesso em 20 abr. 2019.

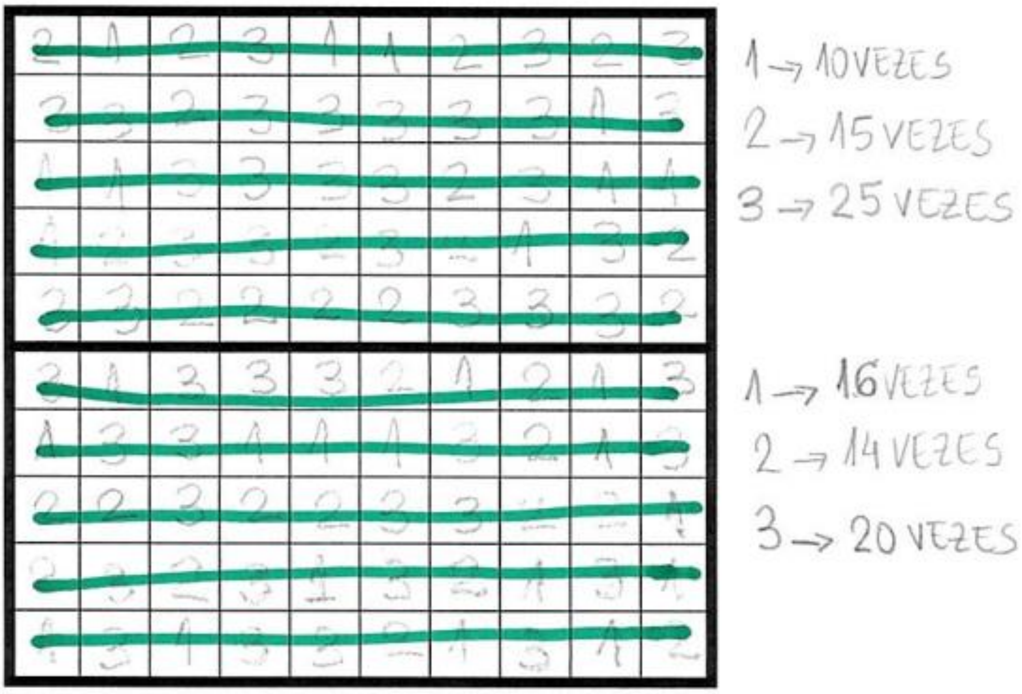
APÊNDICE A – O RESULTADO DO JOGO EXPERMIMENTAL CARA X COROA

Este jogo foi realizado com três alunos da turma 1704 da E.M. General João Mendonça de Lima. Depois de jogar várias partidas usando cada tabuleiro, eles encontraram os seguintes resultados :

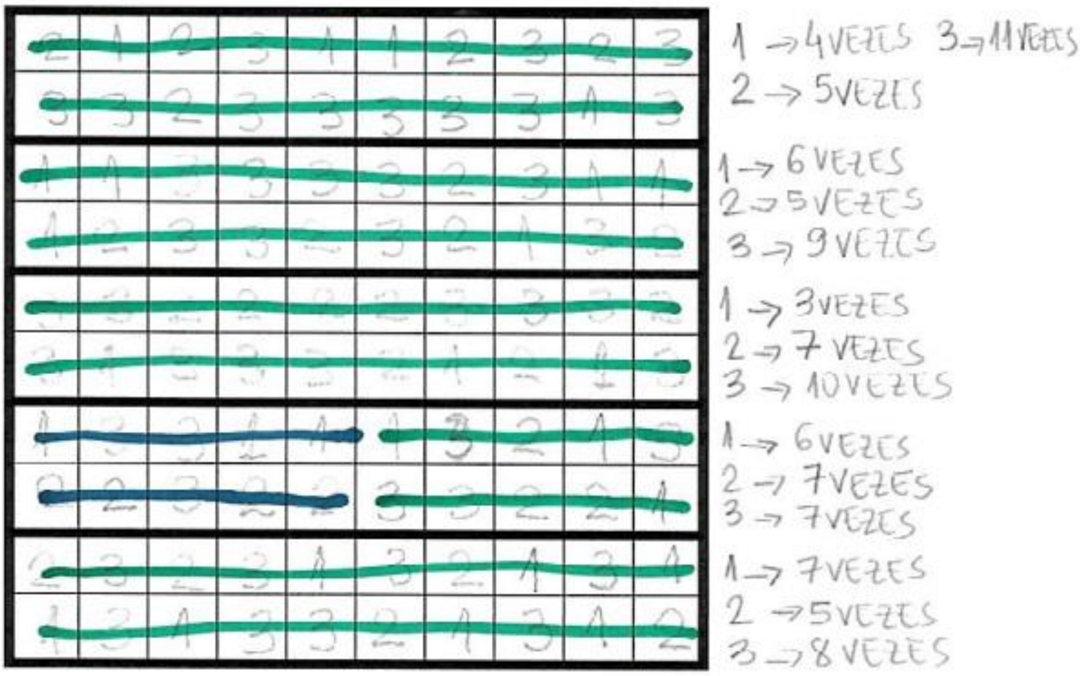
Tabuleiro 1



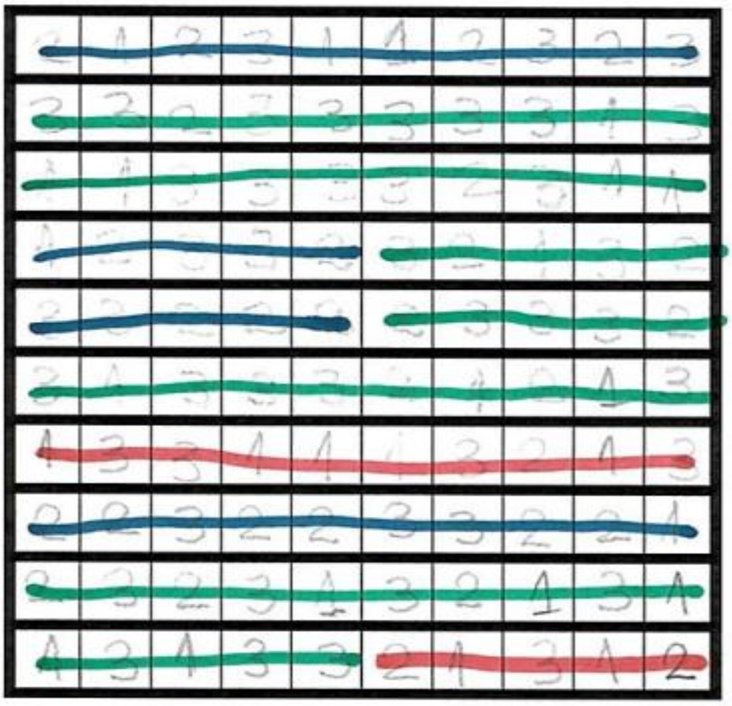
Tabuleiro 2



Tabuleiro 3

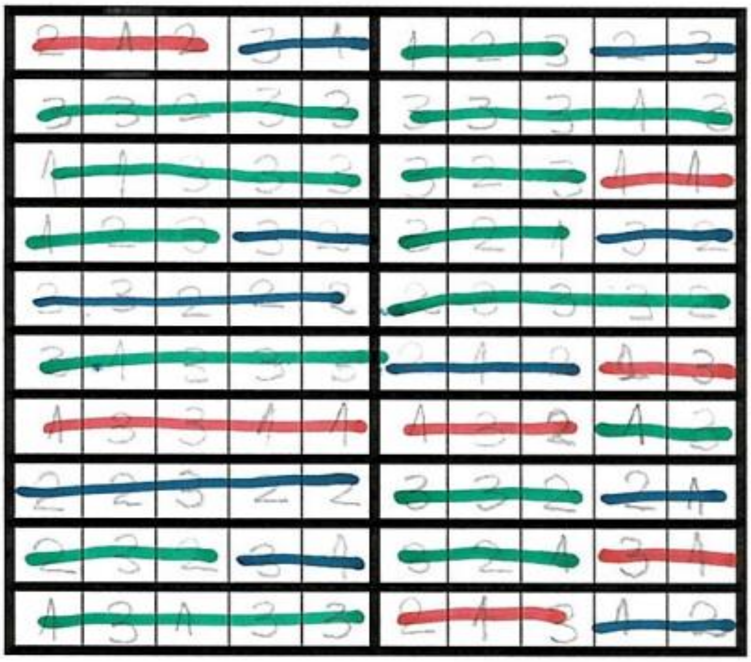


Tabuleiro 4



1→3VEZES 3→3VEZES
2→4VEZES
3→8VEZES
3→5VEZES

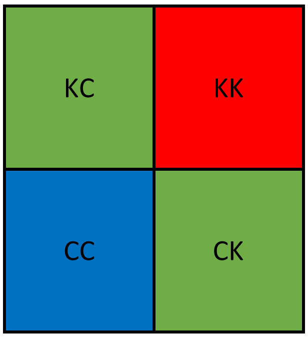
Tabuleiro 5



Alunos notaram:

- O jogador que foi escolhido número 3 ganhou muito mais que os outros dois;
- Tabuleiros de jogo com mais tentativas (jogo de 100 ou 50 ou 20) foram coloridos todos, principalmente verdes;
- Quadros de jogos com menos tentativas (jogo de 10 ou 5) tinham mais secções vermelhas e azuis do que outras placas, mas ainda majioritariamente verdes.

No final, os alunos chegaram à conclusão de que obter um cara e uma coroa deve ser mais provável. Aqui está o que eles inventaram:



K → Cara

C → Coroa