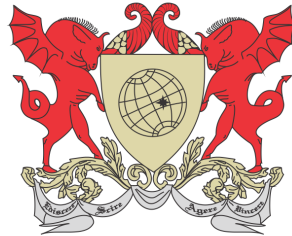


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



ISABELA SOUZA CASTRO

O ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT NOS
ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2019

ISABELA SOUZA CASTRO

**O ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT NOS ENSINOS
FUNDAMENTAL E MÉDIO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2019

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T

C355u Castro, Isabela Souza, 1980-
2019 O último teorema de Fermat nos ensinamentos fundamental e médio / Isabela Souza Castro. – Florestal, MG, 2019. x, 66f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.66.

1. Último teorema de Fermat. 2. Teoria dos Números. 3. Ternas Pitagóricas. 4. Matemática. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado em Matemática - Profissional. II. Título.


512.74

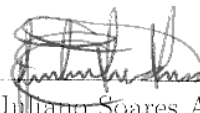
ISABELA SOUZA CASTRO

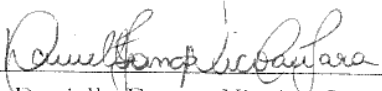
O ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT NOS ENSINOS
FUNDAMENTAL E MÉDIO

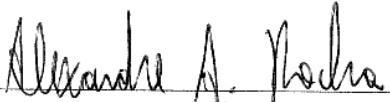
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 05 de abril de 2019.


Justino Muniz Júnior


Juliano Soares Amaral Dias


Danielle Franco Nicolau Lara
(Coorientadora)


Alexandre Alvarenga Rocha
(Orientador)

Dedicatória

Dedico esse trabalho, especialmente, ao meu filho Miguel, meu grande amor, minha inspiração; ao meu marido Bruno, meu companheiro; à minha mãe Pureza, meu grande orgulho; ao meu pai Antônio, meu exemplo de garra e às minhas irmãs Tatiane, Olivia e Milene, minha base.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus, que sempre esteve ao meu lado me dando forças para superar todas as dificuldades e nunca desistir. E também a todos que, de alguma forma, contribuíram para que esse trabalho se concretizasse. Em especial, gostaria de destacar:

- minha mãe Pureza, que sempre esteve ao meu lado orando muito por mim, que não mediu esforços para ficar com meu filho quando eu precisava estudar. Gratidão eterna!
- meu pai Antônio, que mesmo distante se fez presente.
- meu esposo Bruno, pelo apoio, pela paciência e principalmente por superar minha ausência em muitos dias de estudo.
- meu amado filho Miguel, que me motiva cada dia em ser uma pessoa melhor e capaz. Que deixa meus dias mais alegres. Que me faz exercer meu melhor papel, que é ser mãe.
- minhas adoradas irmãs Tatiane, Olívia e Milene, pela amizade.
- minha família, pela união.
- meus amigos, pela fidelidade.
- meus vizinhos Eustáquio e Patrícia, pelo carinho.
- meus colegas de trabalho, pela compreensão.
- meus sogros Bianor e Sônia, pela minha acolhida.
- minha querida turma de mestrado que, simplesmente, foi maravilhosa.
- meu professor e orientador Alexandre, por todos os ensinamentos.
- minha coorientadora Danielle, pela boa vontade.
- meus professores do mestrado que nos acolheram com muita dedicação.
- a professora Sílvia, pela correção ortográfica do meu trabalho.

Biografia

Isabela Souza Castro, nasceu no dia 20 de outubro de 1980, em Montes Claros-MG. Casada com Bruno Resende de Castro Ferreira e mãe de Miguel Celestino Souza Castro. Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual de Montes Claros (2005), pós graduação em Matemática e Estatística pela Faculdade Federal de Lavras (2008) e é mestranda em Matemática pela Faculdade Federal de Viçosa, campus Florestal. Atualmente é professora efetiva da Escola Estadual Governador Israel Pinheiro, onde ministra aulas de Matemática nos ensino fundamental e médio. Já lecionou na Unimontes, onde ministrava no curso de Matemática a disciplina de Cálculo Numérico, lecionou na Faculdade Funorte, onde ministrava nos cursos de Administração, Engenharia de Alimentos e Engenharia Biomédica as disciplinas de Matemática Financeira, Matemática 1, Matemática 2, Fundamentos de Cálculo e Cálculo Numérico, lecionou na Faculdades Integradas Santo Agostinho, onde ministrava nos cursos de Engenharia Elétrica, Engenharia de Produção e Engenharia Civil a disciplina de Cálculo Numérico, lecionou na Faculdade Integradas Pitágoras onde ministrava no curso de Engenharia Mecânica a disciplina de Cálculo IV, lecionou na faculdade Kennedy, onde ministrava no curso de Engenharia de Produção e Engenharia de Minas a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra, Cálculo 1 e Cálculo 2, lecionou na Faculdade Promove, onde ministrava nos cursos de Gestão Financeira, Recursos Humanos e Logística a disciplina de Matemática, lecionou no Colégio Marista São José, Colégio Unimax e na Escola Estadual Francisco Sá. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Álgebra, Cálculo, Estatística e Matemática Financeira. Isabela, posteriormente, pretende fazer um curso de gastronomia para aprimorar sua aptidão pela culinária.

Lista de Figuras

2.1	Fermat	2
3.1	Pitágoras	7
3.2	Pentagrama	9
3.3	Números, respectivamente, triangulares, quadrados e pentagonais	10
3.4	Descobrimo o triângulo retângulo	11
3.5	Construção triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5	12
3.6	Triângulos acutângulo e obtusângulo	12
3.7	Triângulo Retângulo	13
3.8	Teorema de Pitágoras por áreas	13
3.9	Comparação de áreas	15
3.10	Relações métricas	16
3.11	Teorema de Pitágoras por Bháskara	17
3.12	Triângulo acutângulo	18
3.13	Triângulo obtusângulo	19
4.1	Cubo para $n=3$	26
4.2	Euler	26
5.1	Andrew Wiles	39
6.1	Questão da OBMEP	42
6.2	Questão 1	43
6.3	Questão 2	44
6.4	Questões 3, 4 e 6	44
6.5	Questão 5	44
6.6	Questão 7	45
6.7	Questão 8	45
6.8	Questão 9	45
6.9	Questão 10	46
6.10	Questão 11	46
6.11	Questão 12	46
6.12	Resultado da atividade diagnóstica	47
6.13	Dobradura	48

6.14 Alunos fazendo a demonstração	49
6.15 Demonstração	49
6.16 Equivalência de áreas	50
6.17 Dominó Pitagórico	52
6.18 Trilha Pitagórica	52
6.19 Trilha Pitagórica	54
6.20 Quebra cabeça	54

Resumo

CASTRO, Isabela Souza, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, abril de 2019. **O Último teorema de Fermat nos Ensinos Fundamental e Médio.** Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha. Coorientadora: Danielle Franco Nicolau Lara.

Caro leitor, nesse trabalho apresentaremos as demonstrações do Último Teorema de Fermat nos casos $n = 3$ e $n = 4$. Inicialmente, demonstraremos o Teorema de Pitágoras e sua recíproca. Utilizando a Teoria dos Números, mostraremos as ternas pitagóricas. Abordaremos também, fatos históricos sobre o teorema e narraremos a história de alguns matemáticos. Concluiremos o trabalho com aplicações em sala de aula, nos ensinos fundamental e médio, através de atividades lúdicas e jogos. Este teorema diz que se $n \geq 3$, a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções inteiras, a menos das soluções triviais com uma das variáveis igual a zero. Este resultado foi anunciado, sem demonstração, no século XVII por Pierre de Fermat, na margem do seu exemplar do livro Aritmética, de Diofanto, onde escreveu “Dividir um cubo em dois cubos, uma quarta potência ou, em geral uma potência qualquer em duas potências da mesma denominação acima da segunda é impossível, e eu seguramente encontrei uma prova admirável desse fato, mas a margem é estreita demais para contê-la”. Contudo, Fermat não escreveu a prova que achava ter obtido deste teorema. Muitos matemáticos tentaram demonstrar, porém foi preciso mais de 350 anos para ser conhecida uma prova definitiva deste resultado, conhecido como o Monte Everest da Teoria dos Números, apresentada por Andrew Wiles, em 1995. O próprio Fermat fez a prova para $n = 4$, usando o descenso ao infinito, método demonstrado utilizando as ternas pitagóricas e Leonard Euler fez a prova para $n = 3$, depois melhorada por outros matemáticos, utilizando a ideia do Fermat.

Abstract

CASTRO, Isabela Souza, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, April, 2019. **Fermat's Last Theorem in Elementary and Middle School**. Adviser: Alexandre Alvarenga Rocha. Co-adviser: Danielle Franco Nicolau Lara.

Dear reader, in this paper we will present the proofs of the Last Theorem of Fermat in cases $n = 3$ and $n = 4$. Initially, we will demonstrate the Pythagoras' theorem and its reciprocal one. Using the theory of numbers, we will show the Pythagorean triples. We will also address historical facts about the theorem and narrate the history of some mathematicians. We will conclude the work with applications in the classroom, in elementary and middle schools, through play activities and games. This theorem says that if $n \geq 3$, the equation $x^n + y^n = z^n$ does not have integer solutions, except for trivial solutions with a of variables equal to zero. This result was announced, without demonstration, in the seventeenth century by Pierre de Fermat, on the margin of his copy of the book Arithmetic, by Diophantus, where he wrote " Divide a cube into two cubes, a fourth power or, two powers of the same denomination above the second is impossible, and I have surely found admirable proof of this fact, but the margin is too narrow to contain it. " However, Fermat did not write the proof he thought he had obtained from this theorem. Many mathematicians tried to demonstrate, but it took more than 350 years to be known a definitive proof of this result, known as Mount Everest of Number Theory, presented by Andrew Wiles in 1995. Fermat himself tested for $n = 4$, using the descent to infinity, a method demonstrated using the Pythagorean triples, and Leonard Euler tested for $n = 3$, then improved by other mathematicians using the Fermat idea.

Sumário

1	Introdução	1
2	Pierre de Fermat e suas contribuições	2
2.1	Geometria	3
2.2	Probabilidade	3
2.3	Teoria dos Números	4
2.3.1	O Último Teorema de Fermat e sua história	4
3	Teorema de Pitágoras e as ternas pitagóricas	7
3.1	Pitágoras	7
3.2	A Escola Pitagórica	8
3.2.1	Números Figurados	9
3.2.2	Números Perfeitos	10
3.2.3	O Teorema de Pitágoras	11
3.2.4	Demonstração do Teorema de Pitágoras por comparação de áreas	15
3.2.5	Demonstração do Teorema de Pitágoras em torno de 540 a.C	16
3.2.6	Demonstração do Teorema de Pitágoras por meio das relações métricas	16
3.2.7	Demonstração do Teorema de Pitágoras por Bháskara	17
3.2.8	A recíproca do Teorema de Pitágoras	17
3.3	As Ternas Pitagóricas	19
3.3.1	Demonstração da Tripla Pitagórica	23
4	Demonstração do Teorema para $n = 3$ e $n = 4$	24
4.1	Descenso Infinito de Fermat	24
4.2	O Último Teorema de Fermat para $n=4$	24
4.3	O Último Teorema de Fermat para $n=3$	25
4.3.1	Leonard Euler	26
4.3.2	A demonstração	28
5	Solução do Teorema	39
6	Atividades Lúdicas	42
6.1	Dobraduras e o teorema de Pitágoras	48
6.2	Demonstração do Teorema de Pitágoras	49

6.3	Música de Pitágoras	50
6.4	Jogo dominó pitagórico	51
6.5	Jogo trilha pitagórica	52
6.6	Figura geométrica no quadriculado	54
6.7	Ternas Fermatianas	55
7	Considerações Finais	56
A	Atividade Diagnóstica	58
B	Atividade de construção do Teorema de Pitágoras	63

Introdução

Será esboçado aqui, o que será trabalhado em cada capítulo.

No segundo capítulo, narraremos a história do principal protagonista do nosso trabalho, Fermat, que enunciou um dos problemas mais difíceis da matemática: o Último Teorema de Fermat. Após isso, sua história será apresentada.

No terceiro capítulo, discorreremos sobre a história do Pitágoras e demonstraremos o teorema que leva seu nome. Apresentaremos o conceito de solução primitiva para a equação pitagórica e encontraremos a forma geral das ternas pitagóricas.

No quarto capítulo, apresentaremos a prova do Último Teorema de Fermat, nos casos especiais feito por ele e Euler.

No quinto capítulo, apontaremos a história do matemático Andrew Wiles.

No sexto capítulo, serão propostas algumas atividades lúdicas que podem ser desenvolvidas em sala de aula com o objetivo de facilitar a compreensão do Teorema de Pitágoras e do Último Teorema de Fermat, para alunos dos ensinos fundamental e médio.

Finalmente, no sétimo capítulo, apresentaremos as considerações finais do trabalho.

2

Pierre de Fermat e suas contribuições

Neste capítulo, narraremos à história do Pierre de Fermat e do seu teorema, que é o tema desenvolvido neste trabalho, baseado nos livros do Boyer [1] e do Simon Singh [11].



Figura 2.1: Imagem do Pierre de Fermat.

Fermat nasceu em 17 de agosto de 1601, casou-se com Loise de Long, em 1631, com a qual teve 3 filhos e 2 filhas. Filho de Dominique de Fermat, um homem rico que trabalhava no mercado de peles. O poder aquisitivo do pai facilitou para que ele tivesse uma educação privilegiada.

Estudou direito em Toulouse, onde serviu o parlamento local como advogado e conselheiro. Foi considerado o “Príncipe dos Amadores”, já que ele não era um matemático profissional e dedicava a literatura clássica, inclusive ciência e matemática,

por prazer.

Ele entrou no serviço público em 1631. Em 1652, foi promovido a Juiz Supremo, na Corte Criminal Soberana do Parlamento de Toulouse. Neste mesmo ano, Fermat adoeceu e chegaram a afirmar que ele tinha morrido, porém, sua morte se deu em 12 de janeiro de 1665.

O interesse de Fermat pela Matemática ocorreu, possivelmente, com a leitura do livro *Aritmética*, de Diofanto. Sua influência na matemática foi limitada pela falta de interesse em publicar suas descobertas, conhecidas pelas cartas a amigos e anotações no seu livro de *Aritmética*. Suas cartas revelam ser um homem acanhado, gentil e reservado. Elas passaram a ser publicadas a partir de 1636, por intermédio do padre Marin Mersenne, em Paris, que procurou Fermat após ouvir falar dele. Nessas cartas, Fermat descrevia suas ideias e descobertas, que eram transmitidas pelo seu amigo Mersenne a outros matemáticos da Europa.

Fermat gostava de trocar e resolver desafios, contribuiu nas mais diversas áreas da matemática, sendo as principais: o cálculo geométrico e infinitesimal, a teoria da probabilidade e a teoria dos números. A seguir iremos constar suas principais contribuições.

2.1 Geometria

Fermat criou a Geometria Analítica em 1629 e descreveu as suas ideias num trabalho não publicado, chamado *Introdução aos lugares*, que circulou apenas na forma de manuscrito. No princípio de sua *Introdução*, enuncia: “Sempre que, em uma equação final, duas quantidades desconhecidas são encontradas, temos um lugar geométrico e a extremidade de uma delas descreve uma linha, reta ou curva”.

Neste trabalho, Fermat introduziu a ideia de eixos perpendiculares e descobriu as equações gerais da reta, circunferência e equações mais simples para parábolas, elipses e hipérbolas, e depois demonstrou que toda equação de 1º e 2º grau pode ser reduzida a um desses tipos. Por mérito, as coordenadas cartesianas deviam ser chamadas coordenadas fermatianas. É uma pena que Fermat não tenha publicado quase nada em toda sua vida, pois sua exposição era muito mais sistemática e didática que a de Descartes.

As suas contribuições para o cálculo geométrico e infinitesimal foram preciosas, obtendo com estas, a área de parábolas e hipérbolas, e também determinou o centro de massa de vários corpos, entre outras coisas. Para encontrar a área, ele usou fórmulas para somas das potências dos inteiros. Fermat não tinha o conceito de limite, porém seu método para máximos e mínimos se assemelha ao usado hoje no Cálculo. Portanto, é aceitável acompanhar Laplace ao parabenizar Fermat como descobridor do cálculo diferencial.

2.2 Probabilidade

Outra contribuição importante de Fermat está inserida na Teoria da Probabilidade. Seus avanços nesta área foram por volta de 1654, quando passou a trocar cartas com Pascal. Na probabilidade, um assunto desconhecido por Fermat até então, o seu objetivo era descobrir as regras matemáticas que descrevessem com maior precisão

as leis do acaso, posteriormente, ambos determinaram as regras essenciais dessa temática. A maneira em que Fermat resolvia os problemas propostos por Pascal mostra o modo descompromissado com que ele tratava a probabilidade, resolvendo apenas os problemas que foram postulados por Pascal em suas correspondências.

2.3 Teoria dos Números

Dedicou-se mais à Teoria dos Números, com poucas aplicações práticas claras e vários tipos de jogos com números, os quais ele mesmo criava e desafiava os outros matemáticos a resolverem. É neste ramo que se engloba o seu famoso teorema, conhecido como o Último Teorema de Fermat.

2.3.1 O Último Teorema de Fermat e sua história

O Último Teorema de Fermat é um famoso teorema matemático conjecturado pelo matemático francês Pierre de Fermat em 1637. Trata-se de uma generalização do Teorema de Pitágoras, que diz “a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”: $x^2 + y^2 = z^2$. Ao propor seu teorema, Fermat substituiu o expoente 2 na fórmula de Pitágoras por um número natural n qualquer. Este teorema tem um enunciado muito simples: “Não existe nenhum conjunto de inteiros positivos x , y , z e n , com n maior que 2, que satisfaz a equação: $x^n + y^n = z^n$ ”.

No século XVII, por volta de 1650, Fermat leu o livro intitulado *Arithmetica*, escrito pelo grego Diofante de Alexandria, pois ele gostava muito de estudar as propriedades dos números. Este livro era cheio de curiosidades numéricas, relacionado a uma área da matemática denominada Teoria dos Números.

Essa obra, talvez, fosse pouco prática para os praticantes da matemática e muito algorítmica para outros, porém atraiu fortemente Fermat. Muitos aspectos do assunto mexeram com sua imaginação, inclusive os números perfeitos e amigáveis, números figurados, quadrados mágicos, ternas de Pitágoras, divisibilidade, e acima de tudo, números primos.

Na medida que Fermat lia, ele ia formando as suas próprias ideias. Uma das páginas do livro pedia para os leitores encontrarem a solução do teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = z^2$, ou seja, encontrar a tripla de números inteiros positivos, x , y e z que satisfazia a equação. Ao ler o teorema, ele logo percebeu que era possível encontrar tal solução e que tinha infinitas soluções.

Como as triplas pitagóricas já tinham sido estudadas por vários matemáticos, despertou-lhe a curiosidade, o fazendo pensar um pouco diferente, $x^3 + y^3 = z^3$, ou seja, com expoente 3, mas surpreendentemente, Fermat tentou encontrar pelo menos uma solução, mas não conseguiu. Logo, disse que não existia uma tripla de números inteiros que satisfazia a equação, chegando à conclusão que as equações com expoentes 4, 5, 6, etc., também não teriam solução.

A partir daí, ele escreveu a teoria que ficou conhecida como “Último Teorema de Fermat”. Esse teorema foi escrito nas margens do seu livro, seguido de uma frase: “É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como a soma de duas quartas potências ou, em geral, para qualquer número que é uma potência maior do que a segunda, ser escrito como

a soma de duas potências com o mesmo expoente. Descobri uma demonstração maravilhosa desta proposição que, no entanto, esta margem é demasiado estreita para a conter”.

Na matemática, toda afirmação precisa ser provada ou demonstrada. Porém, em 1665, Fermat só conseguiu provar que o teorema não tinha solução para $n = 4$, utilizando o método de “descenso infinito”. Ele acreditava que era capaz de provar esse teorema, mas nunca escreveu tal demonstração.

Após sua morte, seu filho viu esse livro com as anotações e mostrou ao público. No livro, além desse teorema, existiam outras afirmações matemáticas escritas por ele. Todas elas foram provadas pelos matemáticos que viram o livro, exceto o teorema. Por isso, ele ficou conhecido como o Último Teorema de Fermat.

Ao longo dos três séculos seguintes, vários matemáticos tentaram descobrir provas para o teorema de Fermat, alguns conseguiram demonstrar para determinados expoentes. Em 1753, Leonhard Euler conseguiu provar para $n = 3$. Em 1825, Adrien-Marie Legendre, demonstrou o caso para $n = 5$. Em 1832, Dirichlet, provou para $n = 14$. Em 1839, Gabriel Lamé tentou para $n = 7$, mas não conseguiu. Lamé teve a ideia de usar fatoração de produtos notáveis, $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, conseguindo generalizar a maneira de procurar soluções. Na verdade, ele estava um pouco errado, mas Ernst Kummer, em 1843, conseguiu corrigir a ideia de Lamé e conseguiu provar todos os casos até $n = 100$, exceto para $n = 37$, $n = 59$ e $n = 67$.

O matemático amador e médico Paul Friedrich Wolfskehl, por causa de uma depressão, em um dado dia, decidiu que suicidaria a meia noite. Pouco antes do seu suicídio planejado, ele visitou uma biblioteca e começou a ler sobre este teorema. De repente, achou que fosse capaz de solucionar o problema e começou a explorar uma estratégia que havia criado. Depois de horas tentando, ele concluiu que seu método não levaria a uma solução. Apesar de não ter conseguido provar o teorema, a hora do seu suicídio havia passado e, por ter se reaproximado belezas da matemática, desistiu então desse propósito. Em gratidão ao problema que salvou a sua vida, decidiu doar 2 milhões de dólares àquele que resolvesse tal problema.

Anos depois, em 1906, quando morreu, esse prêmio foi anunciado e isso gerou enorme interesse do público. Matemáticos haviam perdido a esperança, mas voltaram a trabalhar no problema. Em menos de 1 ano, 621 provas foram publicadas, mas todas estavam erradas.

Em 1963, um menino de 10 anos chamado Andrew Wiles estava na biblioteca da sua escola e viu um livro chamado “O Último Problema”. Esse livro contava a história do “Último Teorema de Fermat”. Mediante isso, passou a ter como sonho de vida a capacidade de resolver tal teorema.

Uma contribuição relevante para o problema aconteceu, em 1957, dada pelos matemáticos Yutaka Taniyama e Goro Shimura que embora não tivessem a intenção de solucionar o teorema, acabaram contribuindo significativamente para tal solução. A conjectura construída pelos dois matemáticos diz que, para cada equação elíptica, há uma forma modular correspondente.

Em 1980, já sabiam que não existiam soluções inteiras para o expoente até o 125.000. Anos depois, em 1985, outro matemático, o professor Gerhard Frey, fez uma

ligação entre essa conjectura e o teorema de Fermat e pensou o seguinte: se existir um n tal que $x^n + y^n = z^n$ então terá que existir uma curva que é elíptica, mas não é modular. Ele demonstrou que se alguém provasse essa conjectura, o Último Teorema de Fermat estaria automaticamente provado, pois, se a conjectura dos japoneses fosse verdade, então seria impossível existir um n que satisfizesse a equação.

No ano de 1988, o japonês Yoichi Miyaoka apresentou uma solução para o problema, mas com alguns erros. Nessa época, o menino de 10 anos já havia crescido e se tornado um professor universitário. Ele enxergou nesses avanços matemáticos uma perfeita oportunidade para provar o Último Teorema de Fermat, a partir de então, começou a realizar pesquisas sobre esses avanços em segredo, já que não queria ser pressionado pelas pessoas, nem tampouco ter seus estudos copiados por alguém.

Durante sete anos, apenas sua esposa sabia que Andrew Wiles estava trabalhando para provar o teorema. No decorrer de todo processo, ele nunca teve a certeza de que conseguiria resolver o problema, sabia que mesmo com as novas técnicas, talvez não fossem o suficiente e que poderia estar no caminho certo, mas no século errado.

Em 1993, com a computação bem avançada os matemáticos estavam cientes que o teorema não tinha solução até o $n = 4.000.000$. Foi um progresso muito grande, mas não o suficiente, já que o rigor de todas as provas matemáticas exigem que o teorema seja provado para todos os valores de n , de 3 ao infinito. Os computadores eram capazes de realizar cálculos complicados, porém não de lidar com números infinitos de equações, o que dificultava a prova deste teorema.

Finalmente, nesse mesmo ano, Wiles sentiu que a prova da conjectura dos japoneses estava ficando completa, então decidiu mostrá-la numa conferência na Inglaterra, a prova aparentava estar correta. A mídia e matemáticos do mundo inteiro ficaram surpresos. Ele se tornou uma das pessoas mais famosas do mundo. Porém, quando enviou a prova de mais de 200 páginas para um grupo de matemáticos, foi encontrado um grande erro que ameaçava a demonstração inteira.

Nos meses seguintes, começou a corrigir esse erro, mas não obteve êxito e, depois de muitas tentativas frustradas, recorreu a seu ex-aluno Richard Taylor. Em 19 de setembro de 1994, os dois estavam quase desistindo, prontos para publicar a prova para que outras pessoas pudessem analisá-la. Todavia, persistiram e, com calma, foram capazes de corrigir o erro. Wiles voltou a usar uma estratégia que havia descartado anos atrás e que acabou sendo a chave para a resolução do problema. Ele chamou essa descoberta de indescritivelmente bonita, simples e elegante, conseguindo então, provar o Último Teorema de Fermat e publicá-lo em 1995. A partir daí, o teorema foi exibido e citado em documentários, filmes e livros.

Matemáticos do mundo inteiro questionam se a prova que Fermat havia imaginado realmente existe, pois Wiles provou o teorema usando técnicas matemáticas recentes, descobertas no século XX, que não estavam disponíveis para Fermat. Embora a resolução desse problema não tenha trazido muitas aplicações práticas, ela estimulou o desenvolvimento da Teoria dos Números, que está relacionado aos números inteiros e suas propriedades.

Teorema de Pitágoras e as ternas pitagóricas

Neste capítulo, descreveremos a história de Pitágoras conforme os livros História da Matemática [1] e Tópicos de História da Matemática [9], além disso, será demonstrado o teorema que originou o Último Teorema de Fermat: o Teorema de Pitágoras e finalizaremos através da prova das ternas pitagóricas.

3.1 Pitágoras

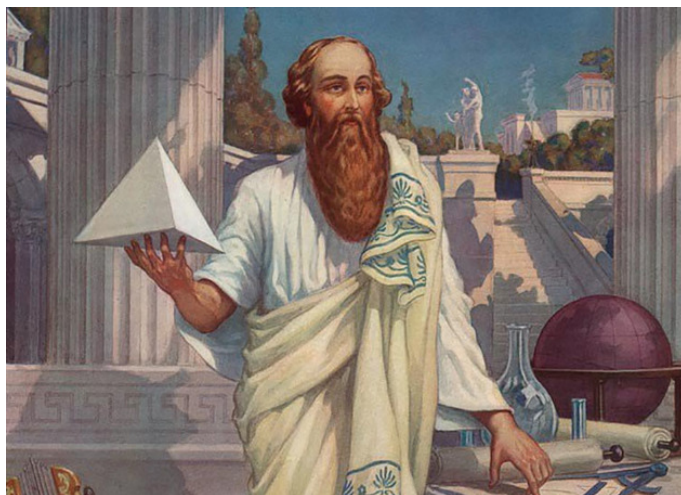


Figura 3.1: Imagem de Pitágoras rodeado de objetos que representam a matemática, a música e astronomia.

Pitágoras (c. 570 – c. 495 a.C.), filósofo, matemático, astrônomo, santo, profeta, milagreiro, mágico, charlatão, nascido na ilha grega de Samos, filho de Mnesarchus, mercador na cidade de Tiro, e Pythais. Passou a infância em Samos, realizou diversas viagens com seu pai. Percorreu por 30 anos: Egito, Babilônia, Síria, Fenícia, dentre outros países. Onde acumulou em suas peregrinações conhecimentos na astronomia, matemática, ciência, filosofia, misticismo e religião.

Foi treinado pelos melhores professores, alguns deles filósofos. As palavras

filosofia (amor à sabedoria) e Matemática (o que é aprendido) surgiram com Pitágoras, que foi o primeiro a entender, baseado em provas dedutivas.

Entretanto, é difícil separar o histórico do lendário, uma vez que, deve ser considerado uma figura indefinida historicamente, já que foi completamente envolto em lenda e apoteose e tudo o que dele sabemos é de uma forma oral, visto que nada deixou escrito. Os primeiros trabalhos sobre o mesmo deve-se a Filolau, pitagórico, o qual escreveu que Pitágoras era “grande, todo-poderoso, gerador de tudo, o começo e o guia da vida divina e terrestre”.

Ele foi contemporâneo a Buda, Confúcio e Lao-Tsé. Alguns relatos afirmam que Pitágoras foi discípulo de Tales de Mileto, o que é improvável dada a diferença de meio século entre suas idades.

Quando retornou à Grécia, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona na costa sudeste, que atualmente é a Itália. Fundou uma sociedade secreta chamada Escola Pitagórica que se assemelhava a um culto órfico, exceto por suas bases matemáticas e filosóficas. Essa escola concedeu a glória de ser a “Primeira Universidade do Mundo”.

Se Pitágoras é considerado uma figura obscura deve-se, em parte, a perda de documentos daquela época. Várias biografias dele foram escritas na antiguidade, mas se perderam. É incontestável que ele foi uma das figuras mais influentes da história, pois seus seguidores sejam iludidos ou inspirados, espalharam suas crenças por quase todo mundo grego.

3.2 A Escola Pitagórica

A Escola Pitagórica foi uma entidade comunitária com centenas de alunos que compunham uma irmandade religiosa e intelectual. Conhecimento e propriedade eram comuns, por isso a atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola. Entre os conceitos que defendiam, destacam-se:

- prática de rituais de purificação e crença na doutrina da reencarnação;
- lealdade entre os membros e distribuição comunitária dos bens materiais;
- obediência à hierarquia da Escola;
- proibição de beber vinho e comer carne;
- purificação da mente pelo estudo de Geometria, Aritmética, Música e Astronomia;
- classificação aritmética dos números em pares, ímpares, primos e fatoráveis;
- criação do modelo de definições, axiomas, teoremas e provas;
- grande tumulto ocorreu entre os discípulos de Pitágoras a respeito da irracionalidade da $\sqrt{2}$. Utilizando notação algébrica, os pitagóricos não aceitavam qualquer solução numérica para $x^2 = 2$, pois só admitiam números racionais;

- na Astronomia, ideias inovadoras, embora nem sempre verdadeiras: a Terra é esférica, os planetas movem-se em diferentes velocidades nas várias órbitas ao redor da Terra. Pela cuidadosa observação dos astros, cristalizou-se a ideia de que há uma ordem que domina o Universo;
- aos pitagóricos deve-se provavelmente as construções do cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e a bem conhecida “seção áurea”;
- na Música, uma descoberta notável: os intervalos musicais se colocam de modo que admitem expressões através de proporções aritméticas. Pitágoras também descreveu o poder do som e seus efeitos sobre a psique humana.

A Escola Pitagórica era, politicamente, conservadora e tinha um código de conduta rígido. Talvez a mais notável característica da ordem pitagórica fosse a confiança que mantinha no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta.

Os pitagóricos interessavam pelo estudo das propriedades dos números. Para eles, todas as coisas são números e a purificação da alma era resultante de um esforço basicamente intelectual, que descobre a estrutura numérica das coisas e torna, assim, a alma como uma unidade harmônica. Os números não seriam, neste caso, os símbolos, mas os valores das grandezas. Eles não distinguem forma, lei, e substância, considerando o número a ligação entre estes elementos.

Para essa escola existiam quatro elementos: terra, água, ar e fogo. É evidente que os pitagóricos desempenharam um papel importante, talvez, o crucial na história da matemática. O símbolo utilizado pela escola era o pentagrama, obtido traçando as diagonais de um pentágono regular e pelas intersecções dos segmentos desta diagonal, resultando em um novo pentágono regular, que é proporcional ao original exatamente pela razão áurea.

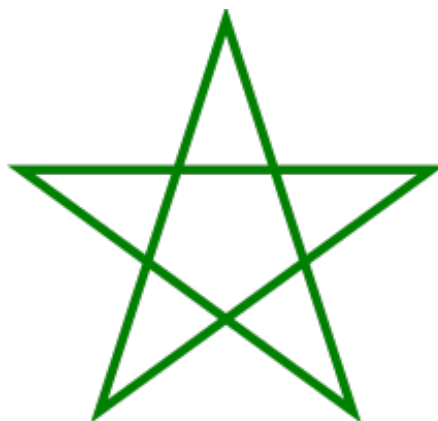


Figura 3.2: O Pentagrama.

Iremos constatar, a seguir, alguns dos números trabalhados na Escola Pitagórica.

3.2.1 Números Figurados

A teoria dos números de Pitágoras é concreta, baseada em manipulações de números figurados, que são números que podem ser representados por um conjunto

de pontos equidistantes, formando uma figura geométrica.

Quando essa figura forma um polígono regular, temos um número poligonal, como por exemplo os números triangulares, quadrados e pentagonais, números dados, respectivamente, pelas fórmulas: $N = 1 + 2 + 3 + \dots + n = n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)$, $N = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$ e $N = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = n \cdot \left(\frac{3n-1}{2}\right)$.

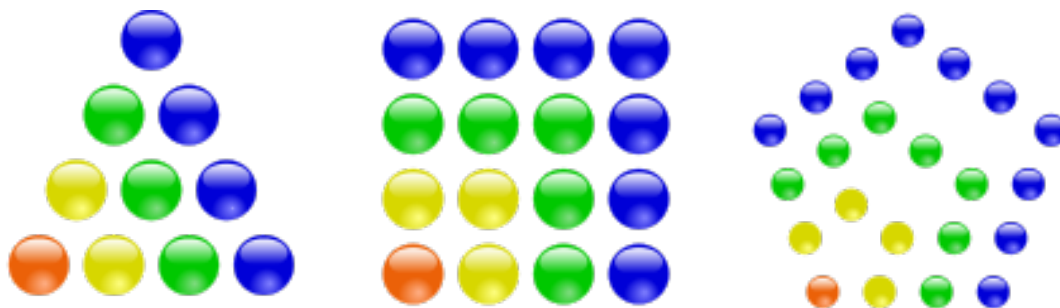


Figura 3.3: Números, respectivamente, triangulares, quadrados e pentagonais.

A aritmética de Pitágoras era indutiva e não continha provas. Era possível obter, graficamente, generalizações sobre sequências de números, mas as regras para obtenção de tais sequências eram desenvolvidas para uso prático.

Os pitagóricos cultivavam os números não apenas para fins práticos. Eles estudavam e demonstravam várias propriedades desses números. Entre estes, o mais importante dos figurados era o número triangular 10 que era visto como místico, uma vez que continha os quatro elementos fogo, água, ar e terra: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, e servia de representação para a completude do todo.

Destas configurações numéricas, os pitagóricos tiravam, de forma visual, diversas conclusões aritméticas como:

- todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos.
- é possível passar de um número quadrado ao quadrado imediatamente maior adicionando-se a sequência dos números ímpares.

Em nossa linguagem Matemática atual, podemos exprimir esses enunciados como:

- $n^2 = n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right) + (n - 1) \cdot \frac{n}{2}$
- $(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$.

3.2.2 Números Perfeitos

Números perfeitos são números naturais em que a soma de todos os seus divisores naturais próprios(excluindo ele mesmo) é igual ao próprio número. Por exemplo, o número 28 é um número perfeito, pois: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Um fato curioso é que todos os números perfeitos são pares. Não se sabe nada sobre a existência

ou não de números perfeitos ímpares. Os quatro primeiros números perfeitos são: $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, $496 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 31$ e $8128 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 127$.

Todos números perfeitos pares são números triangulares, pois eles podem ser obtidos pela soma dos termos da progressão aritmética de números naturais com razão 1 e primeiro termo 1.

3.2.3 O Teorema de Pitágoras

Conforme o livro [6] “Matemática para todos”, em nossas casas ou apartamentos quase todos os cômodos têm forma retangular. Isso significa que as paredes devem formar ângulos retos. Esta posição estava prevista na planta, antes das paredes serem elevadas. De acordo com o livro “Descobrimo o teorema de Pitágoras” veremos como os pedreiros obtêm paredes formando ângulos retos, ou seja, ângulos que medem 90 graus:

“O desenho de um ângulo reto no papel pode ser feito com esquadro e, às vezes, “a olho”. No chão de terra, porém, é mais difícil marcar com precisão cantos retos cujos lados devem ter vários metros de comprimento. O que fazem então esses construtores?”

Inicialmente, eles esticam um fio entre duas estacas A e B, cravadas no chão. Depois, esticam um fio da estaca A até a estaca C, que não é cravada no chão. Um ajudante fica segurando-a até o mestre de obras dizer onde deve ser cravada. O mestre escolhe esse local “a olho”, baseado em sua sensibilidade e experiência, de acordo com a Figura 3.4.

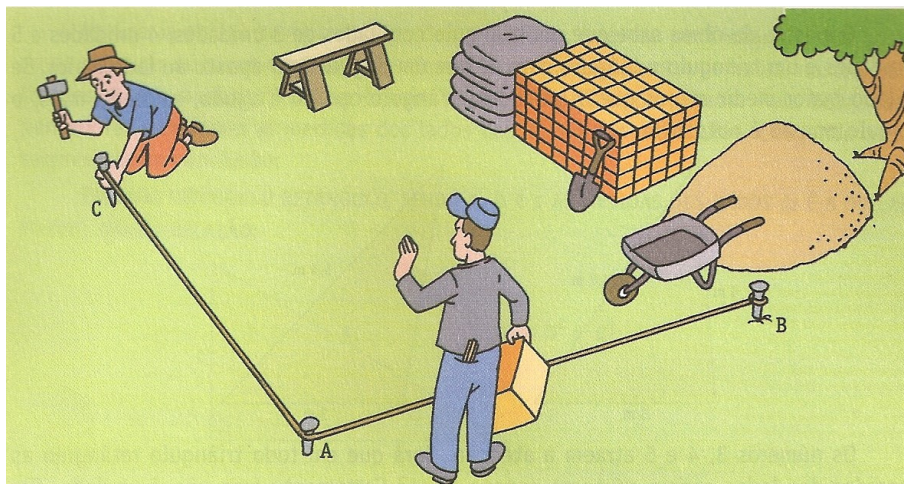


Figura 3.4: O mestre de obra orienta o pedreiro na construção do triângulo retângulo.

A posição do fio AC precisa ser conferida, pois o mestre não pode confiar apenas em seu “olhômetro”. Ele não pode correr o risco de levantar paredes “fora do esquadro”, quer dizer, formando ângulos agudos ou obtusos. (...)

Para ter certeza de que os fios AB e AC formam um ângulo reto, o mestre e o ajudante fazem, por exemplo, o seguinte:

- sobre o fio AB, marcam P a 3 m de A;
- sobre o fio AC marcam Q a 4 m de A;
- finalmente, medem a distância PQ.

Para o ângulo ser reto a distância PQ deve medir exatamente 5 m. Essa situação está ilustrada na Figura 3.5.

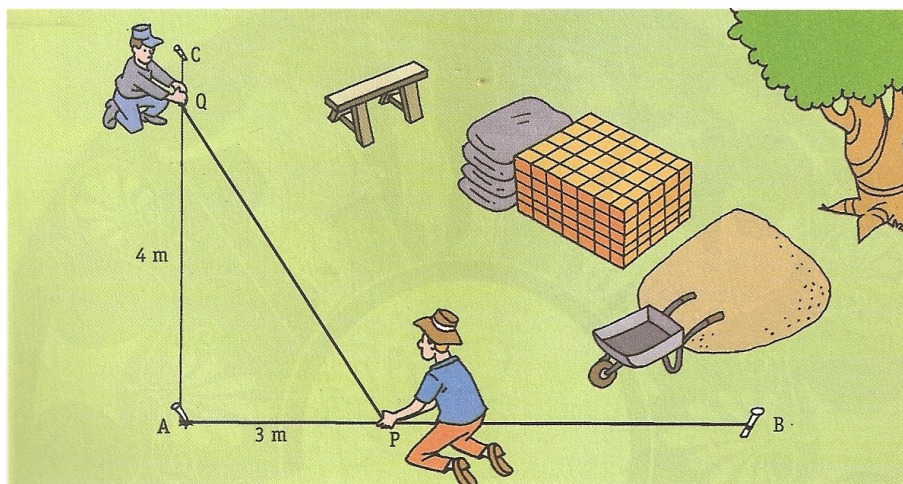


Figura 3.5: O mestre de obra confere para ver se o ângulo formado é reto.

O mestre de obras sabe que o triângulo com lados de 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades é um triângulo retângulo, isto é, tem ângulo reto oposto ao lado maior. Se o lado maior medir menos que 5 unidades, o ângulo oposto é agudo, ou seja, mede menos que 90° ; se medir mais, o ângulo oposto é obtuso, ou seja, mede mais que 90° . Esses casos estão ilustrados na Figura 3.6.

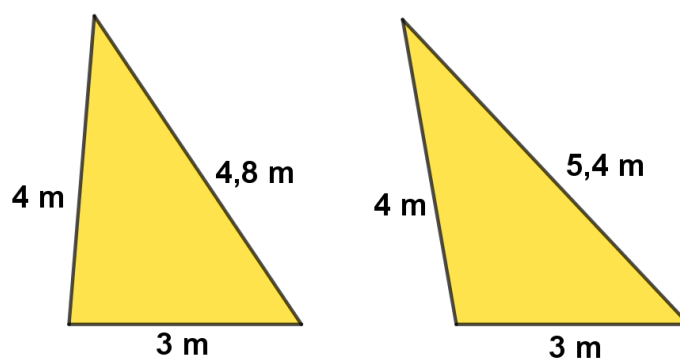


Figura 3.6: Com hipotenusa diferente de 5, os triângulos formados são, respectivamente, acutângulo e obtusângulo.

Os números consecutivos 3, 4 e 5 atraem a atenção. Será que em todo triângulo retângulo as medidas dos lados seriam números consecutivos? Certamente, isso não é verdade, já que o triângulo de lados 6, 7 e 8 unidades não é retângulo. Então, fica a pergunta: nos triângulos retângulos, existem alguma relação entre as medidas dos seus lados?

Como os pitagóricos gostavam de estudar os números, esses pensadores, analisaram as medidas dos lados nos triângulos retângulos chegando a esta conclusão: em todo triângulo retângulo, sendo a , b e c as medidas dos seus lados (c é o lado maior), vale a relação: $c^2 = a^2 + b^2$.

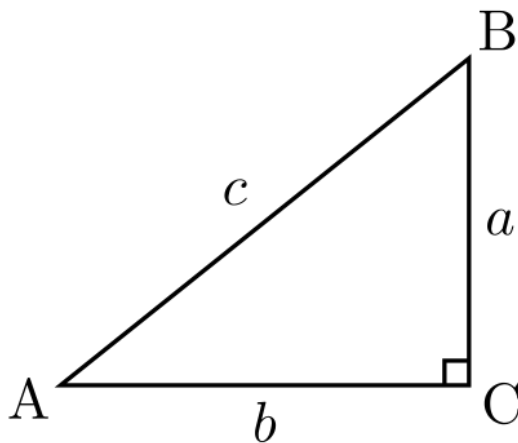


Figura 3.7: O teorema de Pitágoras relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

Essa descoberta é considerada uma das mais importantes da história da matemática e é conhecida como o Teorema de Pitágoras. Na geometria euclidiana, o teorema afirma que: em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa (maior lado) é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Outra forma de enunciar o teorema é a seguinte: a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos equivale à área do quadrado construído sobre a hipotenusa, de acordo com a Figura 3.8.

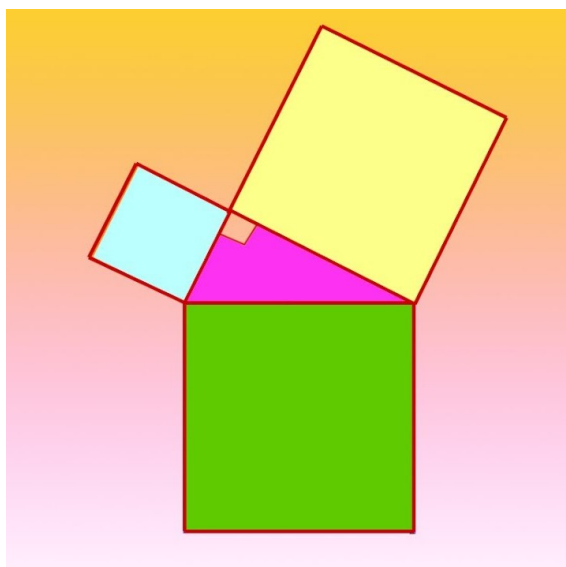


Figura 3.8: O teorema de Pitágoras utilizando áreas de quadrados.

A relação $c^2 = a^2 + b^2$ se verifica para o triângulo de lados 3, 4 e 5, já que $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Na época de Pitágoras, as relações entre os lados de um triângulo retângulo eram um problema não solucionado e foi ele quem conseguiu relacionar. Por isso, o teorema leva seu nome, que tradicionalmente é dado pela sua descoberta, embora há indícios que o conhecimento do teorema seja anterior a ele.

Há evidências de que matemáticos babilônios, em 1600 a.C., conheciam algoritmos para calcular os lados em casos específicos, mas não se sabe se conheciam um algoritmo tão geral quanto o Teorema de Pitágoras. É razoável supor que membros mais antigos da escola pitagórica tinham familiaridade com propriedades geométricas conhecidas pelos babilônios. Porém, não se conhece nenhuma prova do teorema dito de “Pitágoras” que tenha sido fornecida por algum pitagórico e a possibilidade de que ela exista é pouco provável.

Muitos tabletas de barro datados entre o período de 1800 a 1600 a.C. foram encontrados, decifrados e, hoje, se encontram em diversos museus. Um deles, chamado Plimpton 322 está na Universidade de Columbia e o fragmento que foi preservado mostra uma tabela de 15 linhas e 3 colunas de números. Os pesquisadores descobriram que esta tabela continha ternos pitagóricos, ou seja, lados de um triângulo retângulo. Como o que restou é apenas um pedaço de um tablete, que deveria fazer parte de um conjunto de tabletas, não se sabe como esses números foram encontrados.

Uma pista, que os babilônios conheciam alguma forma de encontrar esses números, está em um tablete guardado no Museu Britânico. Nesse tablete está escrito o seguinte:

- 4 é o comprimento

- 5 é a diagonal

Qual é a altura?

- 4 vezes 4 dá 16

- 5 vezes 5 dá 25

Tirando 16 de 25, o resto é 9

Quanto vezes quanto devo tomar para ter 9?

- 3 vezes 3 dá 9

- 3 é a altura.

Isso mostra, sem dúvida, que eles tinham conhecimento da relação entre os lados de um triângulo retângulo. Não existia nenhuma demonstração, pois isto ainda estava longe de ser uma preocupação dos matemáticos da época. Eles conheciam receitas que davam certo e, com elas, resolviam inúmeros problemas.

A raiz quadrada do número 2 surgiu, exatamente, da aplicação do Teorema de Pitágoras em um triângulo de catetos com medidas iguais a 1. Na época, os gregos não usavam um símbolo da raiz quadrada e diziam simplesmente: “o número que multiplicado por si mesmo é 2”. A partir daí, o primeiro número irracional foi descoberto.

Acredita-se que foi Hípaso de Metaponto, pitagórico, quem provou primeiramente a existência dos números irracionais, em um momento que os pitagóricos pensavam que os números racionais podiam descrever toda a geometria do mundo. Ele quebrou a regra de silêncio dos pitagóricos, revelando ao mundo a existência destes novos números.

O Teorema de Pitágoras é considerado uma das mais importantes relações da Matemática. Ele é utilizado como ferramenta no cálculo de perímetros, áreas e volumes de objetos relacionados ao estudo da Geometria. Na Trigonometria, é utilizado no cálculo de distâncias entre pontos no espaço, possuindo também grande aplicabilidade para a construção de expressões matemáticas na Geometria Analítica. Enfim, ele ocupa uma posição especial na história da humanidade.

Em matemática, as propriedades importantes que demonstramos são chamadas de teoremas. Todo teorema precisa ser provado para que possamos aceitá-lo. Vamos usar nossos conhecimentos de álgebra e geometria e mostrar que o Teorema de Pitágoras é sempre verdadeiro. A seguir, iremos constar algumas das suas demonstrações.

3.2.4 Demonstração do Teorema de Pitágoras por comparação de áreas

Acompanhe uma demonstração desse teorema envolvendo áreas de quadrados, com base no livro de Iracema e Dulce [8].

Primeiramente, no desenho 1 da Figura 3.9, colocamos as medidas dos lados do triângulo retângulo, sendo a e b catetos e c hipotenusa. Construímos, os desenhos 2 e 3, quadrados com lados de medidas $a + b$, compostos por quadrados, retângulos e triângulos.

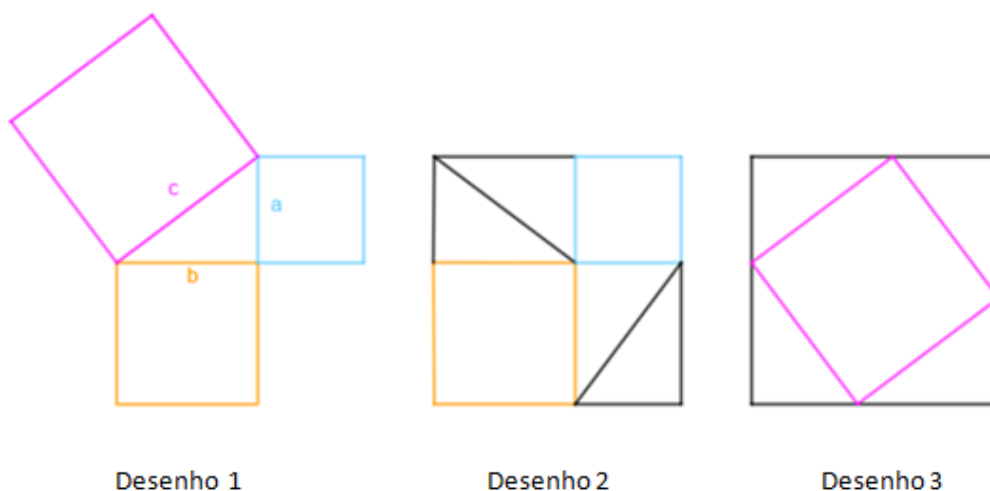


Figura 3.9: Desenhos feitos no Geogebra [5] para demonstrar o Teorema de Pitágoras utilizando áreas.

O quadrado do desenho 3 é formado por quatro triângulos retângulos, congruentes ao triângulo do desenho 1, e pelo quadrado rosa, de lados com medida c . Assim, a área total do desenho 3 é igual a soma da área do quadrado com a área dos quatro triângulos retângulos. Segue que: $(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = c^2 + 2ab$.

O quadrado do desenho 2 é formado por quatro triângulos retângulos, congruentes ao triângulo do desenho 1, pelo quadrado azul e pelo quadrado laranja. Assim, a área total do desenho 2 é igual a soma das áreas dos quatro triângulos com as áreas dos quadrados azul e laranja. Segue que: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = a^2 + b^2 + 2ab$.

Como os quadrados dos desenhos 2 e 3 têm lados congruentes então possuem áreas iguais, isto é: $c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$.

Logo, $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, a área do quadrado rosa é a soma da área do quadrado azul com a área do quadrado laranja.

3.2.5 Demonstração do Teorema de Pitágoras em torno de 540 a.C

Construímos um quadrado, conforme o desenho 3 da Figura 3.9, de lado $a + b$, e ao dividirmos os lados em segmentos de comprimento a e b , traçamos um novo quadrado de lado c com vértice na interseção destes segmentos sobre o lado do quadrado original. Segue que:

$$(a + b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}a \cdot b\right) + c^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

3.2.6 Demonstração do Teorema de Pitágoras por meio das relações métricas

Seguindo a mesma ideia do livro Matemática: “Ideias e desafios” [8], acompanhe uma demonstração do Teorema de Pitágoras por meio das relações métricas. Esta demonstração se baseia na proporcionalidade dos lados de dois triângulos semelhantes, isto é, que a razão entre quaisquer dois lados correspondentes de triângulos semelhantes é a mesma, independentemente do tamanho dos triângulos.

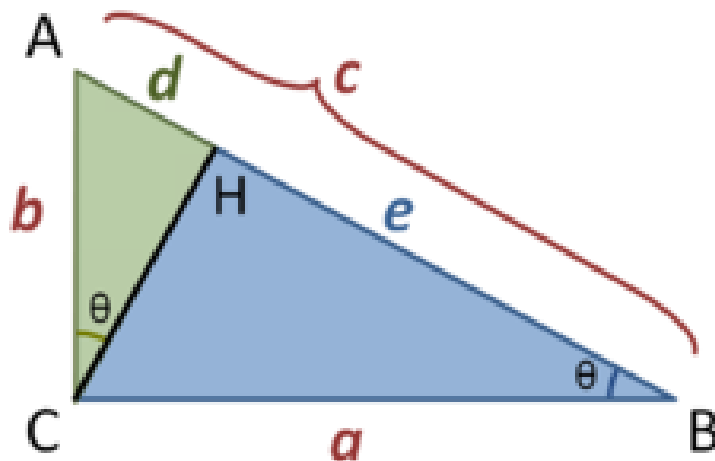


Figura 3.10: Relação métrica no triângulo retângulo.

Dado um triângulo retângulo ABC, com o ângulo reto localizado em C, traça-se a altura relativa à hipotenusa com origem no ponto C, e chama-se H sua interseção com o lado AB. Essa altura divide a hipotenusa nas partes d e e , denominadas projeções dos catetos.

O novo triângulo, ACH, é semelhante ao triângulo ABC, pois ambos tem um ângulo reto, e eles compartilham o ângulo em A, significando que o terceiro ângulo é o mesmo em ambos os triângulos, marcado como θ na figura. Seguindo-se um raciocínio análogo, percebe-se que o triângulo CBH também é semelhante à ABC. A semelhança dos triângulos leva à igualdade das razões dos lados correspondentes.

Como $ABC \sim ACH$ então $\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = c \cdot a$.

Como $ABC \sim CBH$ então $\frac{a}{e} = \frac{c}{a} \Rightarrow a^2 = c \cdot e$.

Adicionando membro a membro das duas igualdades, temos:

$$a^2 + b^2 = ce + cd \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot (e + d) \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot c \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

3.2.7 Demonstração do Teorema de Pitágoras por Bháskara

Na demonstração feita pelo matemático hindu Bháskara, conforme o livro Tudo é Matemática [2], ele desenhou a figura e disse: “Aqui está”. Trace 4 triângulos retângulos com hipotenusa medindo c e catetos medindo a e b formando um quadrado. Repare que há um quadradinho no centro do quadrado maior, na Figura 3.11.

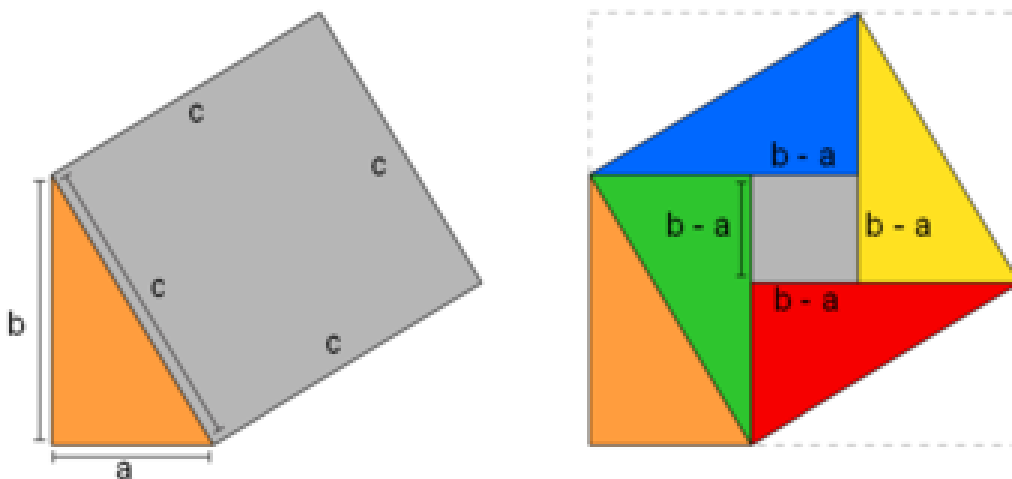


Figura 3.11: Bháskara utilizou essa figura para provar o Teorema de Pitágoras.

Assim,

- Área do quadrado maior é igual a c^2 .

- Área dos 4 triângulos retângulos é igual a $4 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{2}\right)$.

- Área do quadrado menor é igual a $(b - a)^2$.

$$\text{Dessa forma, } c^2 = 4 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{2}\right) + (b - a)^2 \Rightarrow c^2 = 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 2 \cdot a \cdot b + a^2.$$

$$\text{Logo, } c^2 = a^2 + b^2.$$

3.2.8 A recíproca do Teorema de Pitágoras

Já vimos que os pedreiros usavam a recíproca do Teorema de Pitágoras para encontrar um triângulo retângulo. A seguir, demonstraremos como isso acontece nos casos em que o ângulo C não é reto, isto é, C é agudo ou C é obtuso.

Imagine um triângulo com lados medindo a , b e c , tais que $c^2 = a^2 + b^2$. Em princípio, não podemos ter certeza de que o triângulo é retângulo.

1º caso: $C < 90^\circ$

Considere um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$, $a = m + n$ e $CA = b$.

Seja $b \leq a$. Assim, o ponto D, projeção de A sobre BC, cai no interior do lado BC. Sejam $CD = n$, $BD = m$, $a = m + n$ e $AD = h$.

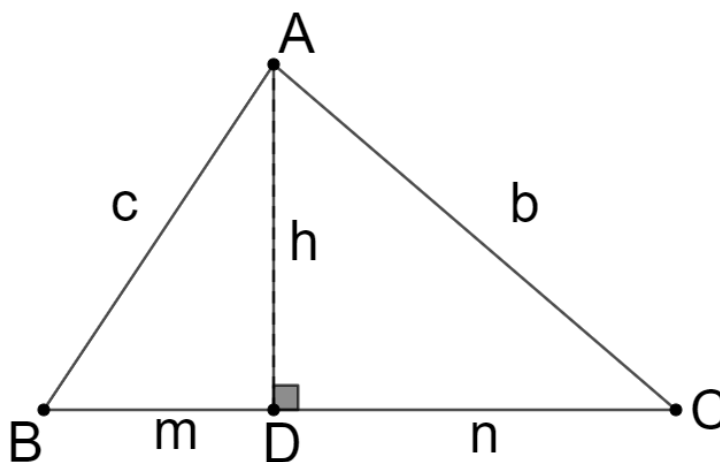


Figura 3.12: O triângulo ABC é um acutângulo.

Como o triângulo ADC é retângulo então $b^2 = h^2 + n^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - n^2$. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo BDA, temos:

$$c^2 = h^2 + m^2$$

$$c^2 = h^2 + (a - n)^2$$

$$c^2 = h^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot n + n^2$$

$$c^2 = b^2 - n^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot n + n^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot n,$$

ou seja, $c^2 < a^2 + b^2$.

2º caso: $C > 90^\circ$

Considere um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$.

Agora, o ponto D cai fora do lado BC. Como h é altura então ADC é um ângulo reto em D.

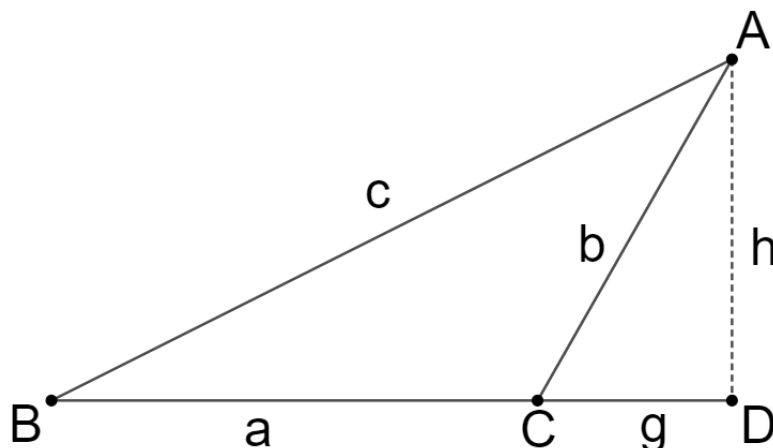


Figura 3.13: O triângulo ABC é obtusângulo.

Dessa forma, $b^2 = h^2 + g^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - g^2$. Como o triângulo BAD também é retângulo, conclui-se que:

$$c^2 = h^2 + (a + g)^2$$

$$c^2 = h^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot g + g^2$$

$$c^2 = b^2 - g^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot g + g^2$$

$$c^2 = b^2 + 2 \cdot a \cdot g + a^2,$$

ou seja, $c^2 > a^2 + b^2$.

Fica demonstrado que em um triângulo ABC , de lados a , b e c , se $C < 90^\circ$ temos: $c^2 < a^2 + b^2$ e se $C > 90^\circ$ temos: $c^2 > a^2 + b^2$. Segue que, a condição $c^2 = a^2 + b^2$ implica necessariamente em $C = 90^\circ$. Logo, vale a recíproca do Teorema de Pitágoras: “Todo triângulo com lados medindo a , b e c , tais que, $c^2 = a^2 + b^2$, é retângulo”.

3.3 As Ternas Pitagóricas

Inicialmente, iremos enunciar algumas definições, explicitar e demonstrar alguns teoremas utilizados para encontrar as ternas pitagóricas que foram transcritos dos livros [7] e [4].

Definição 3.1: Dados dois números inteiros a e b , dizemos que a divide b ou a é um divisor de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a e escrevemos $a|b$ quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$.

Definição 3.2: Dizemos que um número inteiro $d \geq 0$ é um *máximo divisor comum* (*mdc*) de a e b se possuir as seguintes propriedades:

- $d|a$ e $d|b$.
- se existe c tal que $c|a$ e $c|b$ então $c|d$.

Denotamos o máximo divisor comum de a e b por $\text{mdc}(a,b)$ ou (a,b) . Por exemplo, o $\text{mdc}(8,12) = 4$, pois $4|8$, $4|12$ e existe 2 tal que $2|8$, $2|12$ e $2|\text{mdc}(8,12) = 4$.

Definição 3.3: Dois números inteiros a e b serão ditos *primos entre si*, ou *coprimos*, ou *relativamente primos*, se $\text{mdc}(a,b) = 1$; ou seja, se o único divisor comum positivo de ambos é 1.

Proposição 3.1: Dados a , b e c inteiros, tais que $a|b$ e $a|c$, então $a|(mb + nc)$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$

Demonstração. Sejam a , b e c inteiros tais que $a|b$ e $a|c$, então existem inteiros k_1 e k_2 tais que $b = ak_1$ e $c = ak_2$. Multiplicando ambas as equações respectivamente por m e n obtemos: $mb = mak_1$ e $nc = nak_2$. Somando as últimas equações lado a lado, temos que: $mb + nc = mak_1 + nak_2 = a(mk_1 + nk_2)$. Portanto, $a|(mb + nc)$. \square

Lema 3.1: Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $\text{mdc}(a, b - na)$, então $\text{mdc}(a, b)$ existe e $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, b - na)$.

Demonstração. Seja $d = \text{mdc}(a, b - na)$. Como $d|a$ e $d|(b - na)$, segue que $d|(b - na) + na = b$. Logo, d é um divisor comum de a e b . Seja c um divisor comum de a e b . Dessa forma, $c|a$ e $c|b$. Então, $c|a$ e $c|(b - na)$, conseqüentemente, $c|\text{mdc}(a, b - na) = d$. Logo, $d = \text{mdc}(a, b)$. \square

No próximo teorema, iremos demonstrar a existência do $\text{mdc}(a, b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.1: (Identidade de Bezout) Dados inteiros a e b , não ambos nulos, existem inteiros m e n tais que $am + bn = \text{mdc}(a, b)$.

Demonstração. Dados a, b inteiros, com $b \neq 0$. Considere o conjunto $I(a, b) = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Dessa forma, existe um inteiro positivo em $I(a, b)$. De fato, $|b| \in I(a, b)$. Seja $d = ax_0 + by_0$ o menor inteiro positivo em $I(a, b)$.

Afirmção. d divide todo inteiro $n \in I(a, b)$.

Dado $n = ax_1 + by_1 \in I(a, b)$, sejam $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $n = qd + r$, com $0 \leq r < d$. Temos que $r = n - qd = ax_1 + by_1 - q(ax_0 + by_0) = a(x_1 - qx_0) + b(y_1 - qy_0) \in I(a, b)$, de modo que, como d é o menor inteiro positivo em $I(a, b)$, obrigatoriamente $r = 0$. Agora, como $a, b \in I(a, b)$ (basta escolher $(x, y) = (1, 0)$ e $(x, y) = (0, 1)$, respectivamente), temos que d divide a e b . Logo, $d \leq \text{mdc}(a, b)$. Por outro lado, $\text{mdc}(a, b)$ divide a e b , de modo que $\text{mdc}(a, b)$ divide d . Logo, $\text{mdc}(a, b) \leq d$. Portanto, $\text{mdc}(a, b) = d$. \square

Proposição 3.2: (Lema de Gauss) Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$ e $a|bc$ então $a|c$.

Demonstração. Se $a|bc$, então existe $r \in \mathbb{Z}$, tal que $ar = bc$. Além disso, como $\text{mdc}(a, b) = 1$, existem m e n inteiros, tais que $ax + by = 1$, pela Identidade de Bezout 3.1. Multiplicando a última equação por c , temos: $c = c(ax + by) \Rightarrow c = cax + cby$. Assim, $c = cax + ary$, ou seja, $c = a(cx + ry)$, com $cx + ry \in \mathbb{Z}$. Logo, $a|c$. \square

Proposição 3.3: (Lema de Euclides) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com p primo. Se $p|ab$ então $p|a$ ou $p|b$.

Demonstração. Suponhamos que p não divide a . Assim, $\text{mdc}(p, a) = 1$. Como $p|ab$ e $\text{mdc}(a, p) = 1$ então, pelo Lema de Gauss 3.2, temos que $p|b$. Analogamente, para quando p não divide b . Logo, $p|a$ ou $p|b$. \square

Corolário 3.1: Se p é primo e $p|a_1 a_2 \dots a_n$ então $p|a_i$, para algum $1 \leq i \leq n$.

Demonstração. Iremos provar por indução em n . Para $n = 1$, temos que $p|a_1$. Para $n = 2$, segue do Lema de Euclides que $p|a_1$ ou $p|a_2$, já que p é primo. Suponhamos que a sentença é válida para n e devemos mostrar que é válida para $n + 1$. Suponhamos que $p|(a_1 a_2 \dots a_n) \cdot a_{n+1}$. Por 3.3, temos que $p|a_1 a_2 \dots a_n$ ou $p|a_{n+1}$. Se $p|a_{n+1}$ então a sentença é verdadeira. Caso contrário, $p|a_1 a_2 \dots a_n$ e pela hipótese de indução temos que $p|a_i$, para algum $1 \leq i \leq n$. Logo, $p|a_i$, para algum $1 \leq i \leq n + 1$. \square

Teorema 3.2 (Teorema Fundamental da Aritmética): Seja $n > 1$ um inteiro positivo. Então, n é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Demonstração da Existência. Usaremos a indução completa para demonstrar a existência. Para $n = 2$, existe uma decomposição trivial em números primos, já que 2 é, ele próprio, um número primo. Suponhamos o resultado válido para todo número inteiro positivo a , $2 \leq a < n$. Mostraremos que também vale para n .

Se n é primo, admite a decomposição trivial e nada temos a demonstrar. Caso contrário, n é composto. Logo, existem números inteiros positivos a e b tais que $n = ab$, com $1 < a < n$ e $1 < b < n$. Pela hipótese de indução, temos a e b podem ser escritos como produtos de primos, na forma

$$a = p_1 p_2 \dots p_r \quad \text{e} \quad b = q_1 q_2 \dots q_s$$

Substituindo, temos:

$$n = p_1 p_2 \dots p_r q_1 q_2 \dots q_s$$

e o resultado também vale para n . \square

Demonstração da Unicidade. Vamos agora provar a unicidade do teorema. Dado um inteiro n e suponhamos que ele seja o menor natural que pode ser escrito como diferentes produtos de primos. Dessa forma, ele admitiria, em princípio, mais de uma decomposição em produto de fatores primos, ou seja,

$$n = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$$

onde os p_i e q_j são primos. Como p_1 divide $q_1 q_2 \dots q_s$ então, pelo corolário 3.1, temos que $p_1|q_j$, para algum j . Assim, $p_1 = q_j$ e após reordenamento de $q_1 q_2 \dots q_s$,

podemos supor que seja q_1 . Portanto, obtemos:

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s$$

Como os dois membros da última igualdade são menores que n então, pela sua minimalidade, é o mesmo produto de primos, que é uma contradição. \square

Assim, para todo $n > 1$ existem $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ primos e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, que chamamos de fatoração canônica de n em primos.

A seguir, iremos enunciar a definição e algumas propriedades de congruência para utilizarmos na demonstração da tripla pitagórica.

Definição 3.4: Seja m um número natural. Dizemos que dois números inteiros a e b são *congruentes módulo m* , se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais, isto é, $m|a - b$. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m , escreve-se:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Propriedades básicas de congruência

- $a \equiv a \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a - c \equiv b - d \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$

A partir da noção de congruência módulo um certo inteiro m , pode-se definir uma relação sobre o conjunto dos números inteiros da seguinte forma:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{m}$$

A relação assim definida satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria, transitividade. Sendo, por isso, considerada uma relação de equivalência:

- $\forall x, x \equiv x \pmod{m}$
- $x \equiv y \pmod{m} \Rightarrow y \equiv x \pmod{m}$
- $x \equiv y \pmod{m}$ e $y \equiv z \pmod{m} \Rightarrow x \equiv z \pmod{m}$

Dado um conjunto A , com uma relação de equivalência \sim , a classe de equivalência de um elemento $a \in A$ é o subconjunto de todos os elementos de A que são equivalentes a a .

$$[a] = \{x \in A | a \sim x\}$$

3.3.1 Demonstração da Tripla Pitagórica

As triplas de números inteiros positivos (a, b, c) que satisfazem a equação $a^2 + b^2 = c^2$ são denominadas *triplas ou ternas pitagóricas*, já que, pelo Teorema de Pitágoras, correspondem aos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo de lados inteiros.

Iremos encontrar todas as ternas pitagóricas que satisfazem essa equação.

Suponhamos que a e b são primos entre si, pois se existir um p primo tal que $p|a$ e $p|b$ então $p|a^2$ e $p|b^2$. Daí, $p|a^2 + b^2 = c^2$. Consequentemente, $p|c$, já que p é primo. Logo, $\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}, \frac{c}{p}\right)$ também é uma terna pitagórica. Para os casos em que $\text{mdc}(a, c) = 1$ e $\text{mdc}(b, c) = 1$ ocorre de forma análoga. Uma tripla pitagórica cujos termos são primos entre si dois a dois é chamada *tripla pitagórica primitiva*.

Dessa maneira, a e b não podem ser ambos pares. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a é ímpar. Sabemos que todo número n pode ser escrito como $2k$ ou $2k + 1$, com k inteiro. Assim, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \equiv 0 \pmod{4}$ ou $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 0 + 0 + 1 \equiv 1 \pmod{4}$. Dessa forma, b não pode ser ímpar, pois, caso contrário, teremos $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$. Absurdo, já que todos os quadrados perfeitos são congruentes a 0 ou a 1 módulo 4! Logo, b é par. Portanto, a é ímpar, b é par e, consequentemente, c é ímpar.

Por outro lado, $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$. Sabemos que $\text{mdc}(c + a, c - a) = \text{mdc}(c + a, c + a - (c - a)) = \text{mdc}(c + a, 2a) = 2$, já que a é ímpar e $c + a$ é par. Assim, $\text{mdc}\left(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1$, ou seja, são coprimos.

Temos que $\frac{b^2}{4} = \frac{c^2 - a^2}{4} = \left(\frac{c+a}{2}\right) \cdot \left(\frac{c-a}{2}\right)$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética 3.2, cada um desses fatores deve ser o quadrado de um número natural. De fato, se $\frac{b}{2} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$, onde p_i são primos, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, então $\frac{b^2}{4} = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2 \cdots p_n^2$. Daí, $\left(\frac{c+a}{2}\right) \left(\frac{c-a}{2}\right) = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2 \cdots p_n^2$. Logo, $\frac{c+a}{2}$ e $\frac{c-a}{2}$ são quadrados perfeitos.

Dessa forma, existem m e n tais que $\frac{c+a}{2} = m^2$ e $\frac{c-a}{2} = n^2$. Assim,

$$\frac{b^2}{4} = m^2 n^2 \Rightarrow b^2 = 4m^2 n^2 \Rightarrow b = 2mn,$$

com $\text{mdc}(m, n) = 1$.

Escrevendo a e c em termos de m e n , temos:

$$c = \left(\frac{c+a}{2}\right) + \left(\frac{c-a}{2}\right) = m^2 + n^2 \Rightarrow c = m^2 + n^2$$

$$a = \left(\frac{c+a}{2}\right) - \left(\frac{c-a}{2}\right) = m^2 - n^2 \Rightarrow a = m^2 - n^2$$

Portanto, $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$.

Demonstração do Teorema para $n = 3$ e $n = 4$

4.1 Descenso Infinito de Fermat

O método do descenso infinito foi introduzido pelo matemático Pierre de Fermat, no século XVII. O método baseia-se, por sua vez, no axioma de que o conjunto de números naturais é um conjunto bem ordenado. Isso implica que: se existe um n tal que $P(n)$ é verdadeiro então existe um elemento mínimo x dentro de \mathbb{N} tal que $P(x)$ é verdadeiro.

Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ uma equação. Esse método (quando aplicável) permite mostrar que essa equação não possui soluções inteiras positivas ou encontrar todas as soluções sob certas condições.

Se $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\}$ é o conjunto de soluções de f e $A \neq \emptyset$, então A possui uma solução “mínima”. Por exemplo, (a, b, c) é uma solução “mínima” de $x^4 + y^4 = z^2$, caso consideremos o c mínimo, menor valor da terceira coordenada. Isto é possível, uma vez que as coordenadas da solução são números inteiros positivos, isto é, maiores que zero. O descenso consiste em obter, a partir dessa solução “mínima”, uma ainda menor, o que é um absurdo. Isto prova que A é vazio, ou seja, que não possui solução.

4.2 O Último Teorema de Fermat para $n=4$

A seguir, veremos um exemplo do Último Teorema de Fermat, transcrito de um livro de Teoria dos Números [7], com expoentes 4, 4 e 2. O próprio Fermat demonstrou este caso e afirmou que a equação não teria soluções inteiras para qualquer permutação desses números.

Exemplo 4.2.1 (Fermat): A equação $x^4 + y^4 = z^2$ não possui soluções inteiras positivas.

Demonstração. Suponha que $x^4 + y^4 = z^2$ possui solução inteira com $x, y, z > 0$. Dessa forma, existe uma solução (a, b, c) na qual c é mínimo. Sabemos que a e b

são primos entre si, ou seja, $\text{mdc}(a,b) = 1$. De fato, se $d = \text{mdc}(a,b) > 1$ então $d|a$ e $d|b$. Consequentemente, $d^4|a^4$ e $d^4|b^4$. Logo, $d^4|a^4 + b^4 = c^2 \Rightarrow d^2|c$. Assim, $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d^2})$ seria uma solução para a equação com c menor que o mínimo, já que $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$ e $\frac{c}{d^2}$ são inteiros.

Como (a,b,c) é uma solução de $x^4 + y^4 = z^2$ então $a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$. Daí, (a^2, b^2, c) é uma tripla pitagórica primitiva. Assim, existem inteiros positivos m e n coprimos tais que a^2 e b^2 tem paridades distintas e c é ímpar, de acordo com 3.3.1. Logo, $a^2 = m^2 - n^2$, $b^2 = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$.

Como $a^2 = m^2 - n^2$ é o mesmo que $a^2 + n^2 = m^2$ então (a,n,m) é uma tripla pitagórica primitiva. Logo, m é ímpar e n é par.

Como $b^2 = 2mn$ então b^2 é par. De fato, se b é ímpar então $b = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Assim, $b^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Absurdo! Observe que b^2 é um quadrado perfeito e $\text{mdc}(2n,m) = 1$, já que n é par e m é ímpar. Por 3.2, conclui-se que $2n$ e m são quadrados perfeitos. Dessa forma, podemos encontrar inteiros positivos u e v tais que $2n = 4u^2$ e $m = v^2$.

Por outro lado, dado que $a^2 + n^2 = m^2$ então, por 3.3.1, existem i e j inteiros positivos, primos entre si, tais que $a = i^2 - j^2$, $n = 2ij$ e $m = i^2 + j^2$. Logo, $u^2 = \frac{n}{2} = ij$. Conclui-se que i e j são quadrados perfeitos. Dessa forma, existem r e s tais que $i = r^2$ e $j = s^2$.

Como $m = i^2 + j^2$, $i = r^2$, $j = s^2$ e $m = v^2$ então $v^2 = m = i^2 + j^2 = (r^2)^2 + (s^2)^2 = r^4 + s^4$. Portanto, (r,s,v) é outra solução de $x^4 + y^4 = z^2$. Porém, $v \leq v^2 = m \leq m^2 < m^2 + n^2 = c$, com $v \neq 0$, já que $m \neq 0$. Absurdo, já que c é mínimo!

Logo, $x^4 + y^4 = z^2$ não tem solução inteira positiva. □

Como $x^4 + y^4 = z^2$ não possui solução inteira positiva então $x^4 + y^4 = (z^2)^2 = z^4$ também não. De fato, pois se (a,b,c) fosse solução de $x^4 + y^4 = z^4$ então $a^4 + b^4 = c^4 \Rightarrow a^4 + b^4 = (c^2)^2 \Rightarrow (a,b,c^2)$ seria solução da equação $x^4 + y^4 = z^2$, que é um absurdo. Portanto, para $n = 4$ o Último Teorema de Fermat fica provado.

4.3 O Último Teorema de Fermat para $n=3$

Gerações de matemáticos tentaram encontrar números, não nulos, que satisfizessem a equação Fermatiana para $n = 3$. A lógica estava em re-arrumar 2 cubos, feitos de tijolinhos sem furos, para formar um terceiro cubo, maior.

O mais próximo de que alguém já chegou de um arranjo perfeito foi para $x = 6$, $y = 8$ e $z = 9$, que numericamente calculando, temos:

$$6^3 + 8^3 = 216 + 512 = 728 = 9^3 - 1,$$

em que faltará um tijolo para tornar verdadeira a igualdade de Fermat, conforme a Figura 4.1. E, se a potência for mudada de terceira (cubo), para qualquer número natural maior que 2, não iremos encontrar números que satisfaçam o Último Teorema de Fermat.

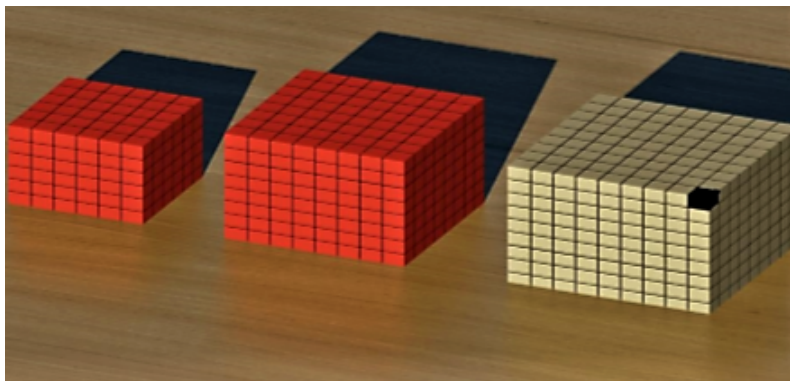


Figura 4.1: Podemos re-arrumar 2 cubos, feitos de tijolinhos sem furos, para formar um cubo maior.

4.3.1 Leonard Euler

Discorreremos, agora, sobre a história de Euler baseada no livro [1].

Leonhard Paul Euler (1707-1783), matemático e físico, suíço, passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha.



Figura 4.2: Imagem de Leonhard Euler.

Seu pai era ministro religioso e esperava que o filho seguisse o mesmo caminho. Porém, o jovem estudou com Jean Bernoulli, o matemático mais importante da Europa, e se associou com seus filhos, Nicolaus e Daniel, e através deles descobriu sua vocação. Jean foi a influência mais relevante da vida de Euler, mas foi seu pai que lhe ensinou a matemática.

Em 1720, aos treze anos, Euler ingressou na pequena Universidade de Basileia que

possuía um famoso departamento de estudos da matemática liderada por Bernoulli. Jean recusou-se a dar aulas particulares a Euler, e direcionou a estudar por conta própria. Nesta etapa, Bernoulli descobriu o talento de Euler pela matemática, porém ele estudava medicina, teologia, grego e hebraico, para satisfazer ao seu pai. Mas, Bernoulli resolveu intervir e convenceu Paul Euler que ele estava destinado a ser um grande matemático.

Em 1726, Nicolaus morreu e seu irmão Daniel assumiu o seu cargo na divisão de matemática e física da universidade, e o mesmo indicou a vaga de medicina e fisiologia que ele tinha desocupado para ser preenchida por seu amigo Euler que aceitou. Em 1727, Euler chegou a Petersburgo e foi promovido a assistente do departamento médico da academia. Em 1730, Euler veio ocupar a cadeira de filosofia natural em vez de medicina.

Em 1733, Daniel Bernoulli partiu para Basileia, pois foi perseguido com a censura e pela hostilidade que enfrentou em St. Petersburgo. Assim, Euler, aos 26 anos, o substituiu e tornou-se o principal matemático da Academia. Casou-se e trabalhou sério na pesquisa matemática e na fundação de uma família que veio a incluir treze filhos. Em 1735, perdeu a visão do olho direito por excesso de trabalho. Publicou mais de 500 artigos durante sua vida. Conquistou reputação internacional.

Em 1741, Euler foi convidado por Frederico, o Grande, para fazer parte da academia de Berlim e o convite foi aceito. Ele passou vinte e cinco anos na corte de Frederico, porém sua estadia não foi inteiramente feliz, uma vez que o Grande preferia um sábio que brilhasse como Voltaire. Em 1766, Euler aceita um convite para voltar a Academia de St. Petersburgo, porém suas condições foram bastante exorbitantes.

Ele viveu o resto de sua vida na Rússia. Contudo, sua segunda estadia no país foi marcada por uma tragédia: um incêndio em Santo Petersburgo, em 1771, destruiu a sua casa, e quase o matou.

Em 1773, faleceu a sua esposa Katharina após 40 anos de casamento. Três anos depois da morte de sua esposa, Euler casou com sua meia-irmã, Salome Abigail Gsell. Este casamento durou até o fim de sua vida. Em 1782, foi eleito membro honorário estrangeiro da Academia de Artes e Ciências dos Estados Unidos.

Em São Petersburgo, no dia 18 de setembro de 1783, depois de um almoço com sua família, Leonhard estava discutindo sobre a descoberta de um novo planeta da época, chamado Urano e sua órbita, quando, subitamente, morreu enquanto tomava um chá com um de seus netos.

Euler trabalhou em quase todas as áreas da matemática: geometria, cálculo infinitesimal, lógica matemática, trigonometria, álgebra e teoria dos números, bem como deu continuidade na física newtoniana, teoria lunar e outras áreas da física como mecânica, dinâmica de fluidos, óptica, astronomia e teoria da música. É uma figura inaugural na história da matemática e suas obras, muitas das quais são de interesse fundamental e ocupam entre 60 e 80 volumes.

O nome de Euler está associado a um grande número de temas. É o único matemático que tem dois números em sua homenagem: o número e , aproximadamente igual a 2,71828, e a constante de Euler-Mascheroni γ (gama) por vezes referida apenas

como “constante de Euler”, aproximadamente igual a 0,57721. Não se sabe se γ é racional ou irracional. É considerado um dos maiores matemáticos do século XVIII e também de todos os tempos, assim como Isaac Newton, Arquimedes e Gauss.

Dentre as áreas trabalhadas por ele, o interesse na Teoria dos Números pode ser atribuído à influência de Christian Goldbach, seu amigo na Academia de São Petersburgo. Muitos dos trabalhos de Euler, nessa temática, foram baseados nas obras de Pierre de Fermat. Desenvolveu algumas das ideias de Fermat, e negou algumas das suas conjecturas.

Conseguiu provar que a soma dos recíprocos dos primos divergem, provou Identidades de Newton, Pequeno Teorema de Fermat, Teorema de Fermat em somas de dois quadrados, e fez contribuições distintas ao Teorema de Fermat-Lagrange. Inventou também a função $\phi(n)$. Usando as propriedades desta função, generalizou o Teorema de Fermat ao que é hoje conhecido como o Teorema de Euler. Contribuiu de forma significativa para a teoria dos números perfeitos, que havia fascinado os matemáticos desde Euclides. Euler também conjecturou a Lei da Reciprocidade Quadrática.

Euler e Fermat

Tanto Fermat como Euler foram bastante interessados pela Teoria dos Números. Embora não haja qualquer livro sobre este assunto, Euler escreveu cartas e artigos sobre vários aspectos desta teoria. Entre elas, encontram-se as conjecturas apresentadas por Fermat, que foram aprimoradas por Euler, duas delas foram:

- Os números da forma $2^{2^n} + 1$ são sempre primos;
- Se p é primo e a um inteiro, então $a^p - a$ é divisível por p .

Em 1747, definiu mais 27 números amigáveis, que se juntaram aos três já conhecidos por Fermat. Mais tarde aumentou o número para 60. Euler também provou que todos os números perfeitos pares são da forma dada por Euclides, $2^{n-1}(2^n - 1)$, onde $2^n - 1$ é primo. Se existe ou não um número ímpar perfeito foi uma questão levantada por Euler e Goldbach, através de correspondência, ainda hoje sem resposta. Realizou a demonstração de uma conjectura bastante conhecida, denominada como Pequeno Teorema de Fermat, que veio a chamar-se Função de Euler.

Mas, contrariando o que seria esperado, ele não foi capaz de demonstrar o Último Teorema de Fermat, embora provasse a impossibilidade de soluções inteiras de $x^n + y^n = z^n$ para $n = 3$, que é o assunto deste trabalho.

4.3.2 A demonstração

Inicialmente, iremos enunciar alguns teoremas, lemas, exemplos e definições para demonstrarmos o Último Teorema de Fermat para $n = 3$, baseada na prova do Leonhard Euler, transcritos do livro de [7] Teoria dos Números.

Lema 4.1: Se $\text{mdc}(a,b) = 1$ então $\text{mdc}(ac,b) = \text{mdc}(c,b)$.

Demonstração. • Seja $d = \text{mdc}(c,b)$. Assim, $d|c$ e $d|b$. Consequentemente, $d|ac$. Portanto, $d|\text{mdc}(ac,b)$.

- Seja e um divisor comum de ac e b . Assim, $e|ac$ e $e|b$. Como $\text{mdc}(e,a)|a$, $\text{mdc}(e,a)|e$ e $e|b$ então, por transitividade, $\text{mdc}(e,a)|b$. Logo, $\text{mdc}(e,a)|\text{mdc}(a,b)$. Sabemos que $\text{mdc}(a,b) = 1$ então $\text{mdc}(e,a)|1$. Dessa forma, $\text{mdc}(e,a) = 1$. Como $e|ac$ e $\text{mdc}(e,a) = 1$ então, pelo lema de Gauss, 3.2 temos que $e|c$. Daí, $e|\text{mdc}(c,b) = d$, já que $e|c$ e $e|b$. Se $e = \text{mdc}(ac,b)$ teremos $\text{mdc}(ac,b)|d$. Portanto, $\text{mdc}(ac,b) = \text{mdc}(c,b)$. \square

Congruência de grau 2

Seja $p > 2$ um número primo e $a, b, c \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ e a não divisível por p . Resolver a equação quadrática $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}$ é o mesmo que, resolver a equação $(2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod{p}$, já que são equivalentes. De fato, como $a \neq 0$ então

$$\begin{aligned} (2ax + b)^2 &\equiv b^2 - 4ac \pmod{p} \Rightarrow \\ 4a^2x^2 + 4axb + b^2 &\equiv b^2 - 4ac \pmod{p} \Rightarrow \\ 4a(ax^2 + bx) + b^2 &\equiv b^2 - 4ac \pmod{p} \Rightarrow \\ 4a(ax^2 + bx) &\equiv -4ac \pmod{p} \Rightarrow \\ \frac{4a(ax^2 + bx)}{4a} &\equiv \frac{-4ac}{4a} \pmod{p} \Rightarrow \\ ax^2 + bx &\equiv -c \pmod{p} \Rightarrow \\ ax^2 + bx + c &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Logo, devemos resolver $X^2 \equiv d \pmod{p}$, com $X = 2ax + b$ e $d = b^2 - 4ac$. Quando a congruência $X^2 \equiv d \pmod{p}$ possui alguma solução, dizemos que d é *resíduo quadrático módulo p* .

Se x_0 é solução de $X^2 \equiv d \pmod{p}$ então $\text{mdc}(x_0,p) = 1$ e $p - x_0$ também é solução, e essas são as únicas soluções. De fato, se $x_0^2 \equiv d \pmod{p}$ então $\text{mdc}(x_0,p) = \text{mdc}(x_0^2,p) = \text{mdc}(d,p) = 1$, já que x_0^2 e d possuem os mesmos restos em relação a p e $0 \leq d < p$. Por outro lado, $(p - x_0)^2 \equiv p^2 - 2px_0 + x_0^2 \equiv x_0^2 \equiv d \pmod{p}$. Seja $x_1 \in \mathbb{R}^*$ tal que $x_1^2 \equiv d \pmod{p}$. Assim, $x_0^2 \equiv x_1^2 \pmod{p}$. Dessa forma, $p|x_1^2 - x_0^2 = (x_1 + x_0)(x_1 - x_0)$, que implica $p|x_1 + x_0$ ou $p|x_1 - x_0$, de acordo com o Lema de Euclides 3.3. Isso, por sua vez, implica que $x_1 = x_0$ ou $x_1 = p - x_0$, dado que $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^*$. Finalmente, mostremos que x_0 e x_1 são soluções distintas módulo p . Se $x_0 \equiv x_1 \equiv p - x_0 \pmod{p}$ teríamos $2x_0 \equiv p \equiv 0 \pmod{p}$ e como p é primo maior que 2, teríamos $p|x_0$, o que é absurdo, pois $\text{mdc}(x_0,p) = 1$.

Definição 4.1: Seja $p > 2$ um número primo e a um número inteiro qualquer, não divisível por p . Definiremos o chamado símbolo de Legendre

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \text{ é um resíduo quadrático módulo } p, \\ -1, & \text{se } a \text{ não é um resíduo quadrático módulo } p. \end{cases}$$

Se p divide a então definiremos

$$\binom{a}{p} = 0.$$

A seguir, iremos enunciar e demonstrar o Pequeno Teorema de Fermat e o corolário que será utilizado na demonstração do Critério de Euler.

Teorema 4.1: (Pequeno Teorema de Fermat)

Dado um número primo p , tem-se que p divide o número $a^p - a$, $\forall a$ inteiro.

Demonstração. Se $p = 2$ então $a^2 - a = a(a - 1)$ é par. logo, 2 divide $a^2 - a$. Suponhamos p ímpar e provaremos por indução sobre a . Para $a = 0$, temos que $p|0$. Supondo o resultado verdadeiro para a , iremos provar para $a + 1$. Por binômio de Newton, temos: $(a + 1)^p - (a + 1) = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1}a + 1 - a - 1 = a^p - a + \binom{p}{1}a^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1}a$.

Pela hipótese de indução e sabendo que $\binom{p}{1}a^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1}a$ é múltiplo de p temos que $(a + 1)^p - (a + 1)$ é múltiplo de p . Portanto, $p|a^p - a$. \square

Corolário 4.1: Se p é um número primo e a é um número natural não divisível por p então p divide $a^{p-1} - 1$.

Demonstração. Como pelo pequeno teorema de Fermat 4.1 temos que $p|a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$ e $\text{mdc}(a, p) = 1$ então, pelo lema de Gauss 3.2, temos que $p|(a^{p-1} - 1)$. \square

A seguir, iremos definir Anel, de acordo com Adilson Gonçalves [3], e citar alguns exemplos.

Definição 4.2: Seja A um conjunto, não vazio no qual estejam definidas duas operações, as quais serão denominadas soma e produto em A , denotadas como $+: (a, b) \rightarrow a + b$ e $\cdot: (a, b) \rightarrow a \cdot b$ em \mathbb{Z} . Chamar-se-á A , $+$, \cdot um anel se as seguintes 6 propriedades são verificadas quaisquer que sejam $a, b, c \in A$:

- Associatividade da soma: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Existência do elemento neutro para a soma: $\exists 0 \in A : a + 0 = 0 + a = a$
- Existência do inverso aditivo: $\forall a \in A$, existe um único $b \in A$, denotado por $b = -a$ tal que $a + b = b + a = 0$
- Comutativa da soma: $a + b = b + a$
- Associatividade do produto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Distributividade à esquerda e à direita: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Se um anel $A, +, \cdot$ satisfaz a propriedade: $\exists 1 \in A, 0 \neq 1$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in A$, diz-se que $A, +, \cdot$ é um anel com unidade 1.

Se um anel $A, +, \cdot$ satisfaz a propriedade: $\forall a, b \in A, a \cdot b = b \cdot a$, diz-se que $A, +, \cdot$ é um anel sem divisores de zero.

Se $A, +, \cdot$ é um anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero, diz-se que $A, +, \cdot$ é um domínio de Integridade.

E, finalmente, se um domínio de Integridade $A, +, \cdot$ satisfaz a propriedade: $\forall a \in A, a \neq 0, \exists b \in A$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$, diz-se que $A, +, \cdot$ é um corpo.

Exemplos

- Anéis Comutativos: $\mathbb{Z}, n \cdot \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}[\sqrt{p}] = \{a + b \cdot \sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Z}, p \text{ primo}\}$ e $\mathbb{Q}[\sqrt{p}], p$ primo.
- Anéis Comutativos que não possuem unidade são os $n \cdot \mathbb{Z}$, em que $n \geq 2$.
- Anéis Comutativos que possuem divisores de zero da lista acima são os anéis $A = \mathbb{Z}_n$, nos quais $n \geq 2$ não é um número primo.
- Domínios de Integridade que não são corpos: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\sqrt{p}], p$ é primo e $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}\}$
- Corpos: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}[\sqrt{p}], \mathbb{Q}[i]$ e \mathbb{Z}_p, p primo.
- Anel comutativo com unidade e com divisores de zero: $F(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um com relação às seguintes operações: $+$: $A \times A \rightarrow A$ em que $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ e \cdot : $A \times A \rightarrow A$ em que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
- Anéis não comutativos com unidade e com divisores de zero: $Mat_2(\mathbb{R}) = A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.
- Anéis não comutativos com unidade e sem divisores de zero: $Quat : \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ em que $i^2 = j^2 = k^2 = -1, i \cdot j = k, j \cdot i = -k, j \cdot k = i, k \cdot j = -i, k \cdot i = j, i \cdot k = -j$

O anel das classes de equivalências

Sempre que se tem uma relação de equivalência \sim sobre um conjunto A é possível definir uma partição P de tal conjunto. Uma coleção P de subconjuntos de A é chamada de partição de A se todo elemento de A pertence a exatamente um elemento de P . Os elementos de P são disjuntos dois a dois, e sua união é o próprio conjunto A .

Para definir uma partição de \mathbb{Z} , usando a congruência módulo m , primeiramente define-se para cada inteiro a , a classe de equivalência de a , de acordo com a relação de equivalência \sim , como:

$$[a]_m = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a \pmod{m}\}$$

Quando o inteiro m estiver subentendido, será utilizado apenas $[a]$ para denotar $[a]_m$.

Nesses termos, o quociente de \mathbb{Z} pela relação de congruência modulo m é a partição dada por:

$$\mathbb{Z}/\equiv (\text{mod } m) = \{[a]_m | a \in \mathbb{Z}\}$$

Denota-se $\mathbb{Z}/\equiv (\text{mod } m)$ simplesmente como \mathbb{Z}_m .

É possível definir em cada \mathbb{Z}_m novas operações de adição e multiplicação. O procedimento é o seguinte:

Fixado um inteiro m , e dadas as classes $[a]$, $[b]$, define-se:

$$[a] + [b] = [a + b]$$

$$[a] \times [b] = [a \times b]$$

Exemplo

As próximas tabelas são as tabuadas das operações de adição e multiplicação no anel \mathbb{Z}_4 .

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Tabela 4.1: Tabuadas, respectivamente, da adição e multiplicação.

Proposição 4.1: O anel \mathbb{Z}_m é um corpo se, e só se, m é primo.

Demonstração. Sabemos que \mathbb{Z}_m é um corpo se, e só se, todo elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ é invertível, ou seja, $\text{mdc}(a,m) = 1$, para todo a com $0 < a < m$. Logo m é primo. De fato, se m for composto e $a|m$ então $\text{mdc}(a,m) = a \neq 1$. □

Proposição 4.2: (Critério de Euler)

Se p é um número primo ímpar e $a \in \mathbb{Z}$ então $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Demonstração. Se $p|a$ então $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p}$, com $a = 0$. Suponhamos que p não divide a . Pelo Corolário do Pequeno Teorema de Fermat 4.1, temos:

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow$$

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow$$

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1 &\equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow \\ \left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) &\equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow \\ p \mid a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \text{ ou } p \mid a^{\frac{p-1}{2}} + 1 &\Leftrightarrow \\ a^{\frac{p-1}{2}} &\equiv \pm 1 \pmod{p} \end{aligned}$$

Assim, devemos mostrar que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ se e só se, a é um resíduo quadrático módulo p .

Se a é um resíduo quadrático então $i^2 \equiv a \pmod{p} \Leftrightarrow a \equiv i^2 \pmod{p}$. Assim,

$$a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \equiv i^{2\left(\frac{p-1}{2}\right)} \equiv i^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Seja p um primo ímpar. Dentre os números $1, 2, \dots, p-1$, exatamente, $\frac{p-1}{2}$ são resíduos quadráticos e $\frac{p-1}{2}$ não são resíduos quadráticos. Por outro lado, os resíduos quadráticos $1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ são raízes do polinômio $f(x) = x^{\frac{p-1}{2}} - \bar{1}$ no anel de inteiros módulo p , $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$. A definição de \bar{a} como um subconjunto de \mathbb{Z} é uma maneira de formalizar o fato de estarmos identificando todos os inteiros que deixam o mesmo resto na divisão por p .

Pela proposição 4.1, sabemos que \mathbb{Z}_p é um corpo e o grau de f é $\frac{p-1}{2}$ então $f(x)$ pode ter no máximo $\frac{p-1}{2}$ raízes em \mathbb{Z}_p . Logo, as raízes de $f(x)$ são exatamente os resíduos quadráticos não congruentes a zero módulo p e que portanto, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, se e só se, a é um resíduo quadrático módulo p . \square

Lema 4.2: (Lema de Thue) Se $m > 1$ é um número natural e a é um número inteiro primo relativo com m então existem números naturais x e y , não nulos, menores do que ou iguais a \sqrt{m} tais que alguns dos números $ax \pm y$ é divisível por m .

Demonstração. Seja $q = \sqrt{m}$ então $q^2 = m$ e portanto $q^2 + 1 > m$, com $m > 1$.

Consideremos todos $q^2 + 1$ números da forma $ax - y$ onde x e y tomam os valores $0, 1, 2, \dots, q$. Como só existem m restos ao dividir um número por m então, pelo Princípio das Casas dos Pombos, que é a afirmação de que se n pombos devem ser postos em m casas, e se $n > m$, pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo, ou seja, dois números $ax_1 - y_1$ e $ax_2 - y_2$ que são congruentes módulo m , pois possuem os mesmos restos. Logo, $a(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)$ é divisível por m .

Temos:

$$0 \leq x_i, y_i \leq \sqrt{m} \Rightarrow |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \leq \sqrt{m}$$

Se $x_1 - x_2 = 0$ então $y_1 - y_2$ é divisível por m , o que implica $y_1 = y_2$. Absurdo, pois (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são diferentes. De igual forma, se $y_1 - y_2 = 0$ então $a(x_1 - x_2)$ é divisível por m . Como a e m são primos relativos então $m \mid (x_1 - x_2)$, o que implica $x_1 = x_2$. Absurdo!

Portanto, $x = |x_1 - x_2|$ e $y = |y_1 - y_2|$ satisfazem as condições do enunciado. Para $ax_1 + y_1$ e $ax_2 + y_2$ é análogo. \square

Exemplo 4.3.1: Sejam $d \in \{1,2,3\}$ e p primo ímpar tal que $\left(\frac{-d}{p}\right) = 1$ então existem $x, y \in \mathbb{N}$ tais que $p = y^2 + dx^2$.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $a^2 \equiv -d \pmod{p}$. Como $\text{mdc}(a,p) = 1$, pelo lema de Thue 4.2, existem inteiros x, y tais que

$$(ax + y)(ax - y) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a^2x^2 - y^2 \equiv -dx^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Assim, $p|y^2 + dx^2$ e $0 < y^2 + dx^2 < (d+1)p$, pois x e y são menores que \sqrt{p} . Dessa forma, $y^2 + dx^2 = kp$, com $k \in \{1,2, \dots, d\}$.

Se $k = d$ então $y^2 + dx^2 = dp$. Daí, $y^2 = d(p - x^2)$. Logo, $d|y^2$, consequentemente $d|y$. Fazendo, $y = dz$, para $z \in \mathbb{Z}$, temos:

$$d^2z^2 + dx^2 = dp \Rightarrow dz^2 + x^2 = p$$

Se $d = 1$ então $y^2 + x^2 = p$, pois $d \neq 0$.

Se $d = 2$ então $y^2 + 2x^2 = p$ ou $y^2 + 2x^2 = 2p$. No caso $y^2 + 2x^2 = 2p$, temos que $k = d = 2$. Assim, $2z^2 + x^2 = p$. Portanto, $y^2 + 2x^2 = p$.

Se $d = 3$ então $y^2 + 3x^2 = p$ ou $y^2 + 3x^2 = 2p$ ou $y^2 + 3x^2 = 3p$. No caso $y^2 + 3x^2 = 2p$, temos que x e y têm a mesma paridade. Assim, se x e y são pares então $4|y^2 + 3x^2 = 2p$, que é um absurdo. Se x e y são ímpares, temos que $y^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$. Se k é par ou ímpar então $y^2 \equiv x^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Daí, $2p = y^2 + 3x^2 \equiv 4 \pmod{8}$, que é absurdo. No caso, $y^2 + 3x^2 = 3p$, temos que $k = d = 3$. Assim, $3z^2 + x^2 = p$. Portanto, $y^2 + 3x^2 = p$. \square

Lema 4.3: Todas as soluções de $z^3 = y^2 + 3x^2$ em inteiros positivos tais que $\text{mdc}(x,y) = 1$ e z é ímpar são dadas por

$$z = m^2 + 3n^2, y = m^3 - 9mn^2, x = 3m^2n - 3n^3$$

com $m + n$ ímpar e $\text{mdc}(m,3n) = 1$.

Demonstração. (\Leftarrow)

Substituindo z, x e y na equação $z^3 = y^2 + 3x^2$, temos que

$$(m^2 + 3n^2)^3 = (m^3 - 9mn^2)^2 + 3(3m^2n - 3n^3)^2 \Rightarrow$$

$$(m^6 + 9m^4n^2 + 9m^2n^4 + 27n^6) = (m^6 - 38m^4n^2 + 81n^2n^4) + (27m^4n^2 - 54m^2n^4 + 27n^6).$$

Assim, podemos afirmar que tais números é solução da equação.

Como $m + n$ é ímpar então m é par e n é ímpar ou m é ímpar e n é par. Dessa forma, $z = m^2 + 3n^2$ é ímpar.

Alem disso,

$$\text{mdc}(x,y) = \text{mdc}(m^3 - 9mn^2, 3m^2n - 3n^3) = \text{mdc}(m(m^2 - 9n^2), 3n(m^2 - n^2)).$$

Devemos encontrar o $\text{mdc}(m(m^2 - 9n^2), 3n(m^2 - n^2))$ para isso, iremos usar o

lema 3.1 e o exemplo 4.1. Como $\text{mdc}(m, 3n) = 1$ então

$$\begin{aligned} \text{mdc}(m(m^2 - 9n^2), 3n) &= \text{mdc}(m^2 - 9n^2, 3n) = \text{mdc}(m^2 - 9n^2 + 3n \cdot 3n, 3n) = \\ &= \text{mdc}(m^2, 3n) = \text{mdc}(m \cdot m, 3n) = \text{mdc}(m, 3n) = 1. \end{aligned}$$

Como $\text{mdc}(m(m^2 - 9n^2), 3n) = 1$ então

$$\text{mdc}(m, (m^2 - 9n^2), 3n(m^2 - n^2)) = \text{mdc}(m(m^2 - 9n^2), m^2 - n^2).$$

Sabemos que

$$\text{mdc}(m, m^2 - n^2) = \text{mdc}(m, m^2 - n^2 - m \cdot m) = \text{mdc}(m, -n^2) = \text{mdc}(m, n^2) = 1,$$

pois $\text{mdc}(m, 3n) = 1$. De fato, m e $3n$ não possuem fatores primos comuns. Daí, m e n também não. Consequentemente, n^2 e m são coprimos. Como $\text{mdc}(m, m^2 - n^2) = 1$ então $\text{mdc}(m(m^2 - 9n^2), m^2 - n^2) = \text{mdc}(m^2 - 9n^2, m^2 - n^2)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{mdc}(m(m^2 - 9n^2), 3n(m^2 - n^2)) &= \text{mdc}(m(m^2 - 9n^2), m^2 - n^2) = \\ \text{mdc}(m^2 - 9n^2, m^2 - n^2) &= \text{mdc}(m^2 - 9n^2 - m^2 + n^2, m^2 - n^2) = \text{mdc}(-8n^2, m^2 - n^2) = \\ \text{mdc}(8n^2, m^2 - n^2) &= \text{mdc}(8n^2 + 8m^2 - 8n^2, m^2 - n^2) = \text{mdc}(8m^2, m^2 - n^2) = 1. \end{aligned}$$

De fato, $m^2 - n^2$ e m não possuem fatores primos comuns. Daí, $m^2 - n^2$ e m^2 também não. Consequentemente, $m^2 - n^2$ e $8m^2$ não possuem fatores comuns. Logo, $\text{mdc}(x, y) = 1$.

(\implies) Suponha que (y, x, z) é solução da equação. Seja p primo tal que $p|z$. Como $\text{mdc}(x, y) = 1$ e z é ímpar então $p > 3$. De fato, se $p = 2$ então p não divide z , já que z é ímpar. Note que se $p|x$ e $p|z$ então $p|y$. Absurdo, pois $\text{mdc}(x, y) = 1$. Analogamente, se $p|y$ e $p|z$ então $p|x$, que também é absurdo pelo mesmo motivo. Logo, p não divide x , p não divide y e $p > 3$.

Como $p|z$ então $p|z^2$. Consequentemente, $p|y^2 + 3x^2 \Leftrightarrow y^2 \equiv -3x^2 \pmod{p}$. Como p não divide x então $\text{mdc}(p, x) = 1$. Logo, x é invertível módulo p . Dessa forma, temos que $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ e daí pela lei da reciprocidade quadrática, página 90 do livro [7], temos que $\left(\frac{p}{3}\right) = 1$. Pelo exemplo, 4.3.1 sabemos que existem inteiros m_1 e n_1 tais que $p = m_1^2 + 3n_1^2$ e que, pela volta deste lema, $p^3 = d^2 + 3c^2$ onde $d = m_1^3 - 9m_1n_1^2$ e $c = 3m_1^2n_1 - 3n_1^3$. Temos que $\text{mdc}(p, c) = \text{mdc}(p, d) = 1$, como na demonstração anterior em que $\text{mdc}(x, y) = 1$. Logo, $\text{mdc}(p, m_1) = \text{mdc}(p, n_1) = 1$ e $p > 3$.

Iremos provar por indução sobre número de divisores primos de z . Se $z = 1$ o resultado é imediato, pois a única solução é $x = 0$, $y = 1$ e $z = 1$. Suponha que o resultado valha para todo z que tenha k fatores primos (não necessariamente distintos). Se z tem $k + 1$ fatores primos, digamos $z = p \cdot t$ com p primo ($p > 3$)

observemos que:

$$\begin{aligned} t^3 p^6 &= t^3 p^3 p^3 = z^3 p^3 = (y^2 + 3x^2)(d^2 + 3c^2) = y^2 d^2 + 3x^2 d^2 + 3y^2 c^2 + 9x^2 c^2 = \\ &= (y^2 d^2 \pm 6yxdc + 9x^2 c^2) + 3(y^2 c^2 \mp 2ycxd + x^2 d^2) = (yd \pm 3xc)^2 + 3(yc \mp xd)^2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (yc + xd)(yc - xd) &= (yc)^2 - (xd)^2 = c^2(y^2 + 3x^2) - x^2(d^2 + 3c^2) = \\ &= c^2 z^3 - x^2 p^3 = c^2 p^3 t^3 - x^2 p^3 = p^3(c^2 t^3 - x^2). \end{aligned}$$

Dessa forma, $p^3 \mid (yc + xd)(yc - xd)$. Se p^3 divide os dois fatores então p também os dividem. Assim, $p \mid yc + xd$ e $p \mid yc - xd \Rightarrow p \mid yc + xd + yc - xd \Rightarrow p \mid 2yc \Rightarrow p \mid yc$. Consequentemente, $p \mid xd$. Como $\text{mdc}(p, c) = \text{mdc}(p, d) = 1$ então $p \mid x$ e $p \mid y$. Absurdo, pois $\text{mdc}(x, y) = 1$. Logo, p^3 divide exatamente um dos fatores. Análogo para $(yd + 3xc)(yd - 3xc)$.

Tomando adequadamente os sinais, existem u e $v \in \mathbb{Z}$ tais que

$$p^3 u = yd \pm 3xc \Rightarrow u = \frac{yd \pm 3xc}{p^3}, p^3 v = yc \mp xd \Rightarrow v = \frac{yc \mp xd}{p^3},$$

sendo que $t^3 = u^2 + 3v^2$. De fato,

$$\frac{(yd \pm 3xc)^2}{p^6} + 3 \cdot \frac{(yc \mp xd)^2}{p^6} = \frac{(yd \pm 3xc)^2 + 3(yc \mp xd)^2}{p^6} = \frac{t^3 p^6}{p^6} = t^3$$

Como t tem k fatores primos, segue por hipótese de indução, que existem m_2 e n_2 inteiros tais que $t = m_2^2 + 3n_2^2$, $u = m_2^3 - 9m_2 n_2^2$ e $v = 3m_2^2 n_2 - 3n_2^3$.

Agora, dado que $y = ud + 3vc$ e $x = -(uc - vd)$, substituindo u , v , d e c em termos de m_i e n_i ($i = 1, 2$) em z , y e x e fazendo $m = m_1 m_2 + 3n_1 n_2$ e $n = m_1 n_2 - m_2 n_1$, obtemos:

$$\begin{aligned} y &= ud + 3vc = \\ &= (m_2^3 - 9m_2 n_2^2)(m_1^3 - 9m_1 n_1^2) + 3(3m_2^2 n_2 - 3n_2^3)(3m_1^2 n_1 - 3n_1^3) = \\ &= m_1^3 m_2^3 - 9m_1 n_1^2 m_2^3 - 9m_1^3 m_2 n_2^2 + 81m_1 n_1^2 m_2 n_2^2 + 27m_1^2 n_1 m_2^2 n_2 \\ &\quad - 27n_1^3 m_2^2 n_2 - 27m_1^2 n_1 n_2^3 + 27n_1^3 n_2^3 = m_1^3 m_2^3 + 9m_1^2 m_2^2 n_1 n_2 \\ &\quad + 27m_1 m_2 n_1^2 n_2^2 + 27n_1^3 n_2^3 - 9m_1^3 m_2 n_2^2 + 18m_1^2 n_2 n_1 m_2^2 - 9m_1 n_1^2 m_2^3 \\ &\quad - 27n_1 m_1^2 n_2^3 + 54m_1 n_1^2 m_2 n_2^2 - 27n_1^3 m_2^2 n_2 = (m_1 m_2 + 3n_1 n_2)^3 \\ &\quad - 9(m_1 m_2 + 3n_1 n_2)(m_1^2 n_2^2 - 2m_1 n_1 m_2 n_2 + n_1^2 m_2^2) = m^3 - 9mn^2, \\ x &= -(uc - vd) = \\ &= -(m_2^3 - 9m_2 n_2^2)(3m_1^2 n_1 - 3n_1^3) + (3m_2^2 n_2 - 3n_2^3)(m_1^3 - 9m_1 n_1^2) = \\ &= -3m_1^2 n_1 m_2^3 + 3n_1^3 m_2^3 - 27m_1^2 n_1 m_2 n_2^2 - 27m_2 n_2^2 n_1^3 + 3m_1^3 m_2^2 n_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -27m_1n_1^2m_2^2n_2 - 3m_1^3n_2^3 + 27m_1n_1^2n_2^3 = 3m_1^3m_2^2n_2 + 18m_1^2m_2n_1n_2^2 \\
 & +27m_1n_1^2n_2^3 - 3m_1^2n_1m_2^3 - 18m_1n_1^2m_2^2n_2 - 27n_1^3m_2n_2^2 - 3m_1^3n_2^3 + 9m_1^2n_2^2n_1m_2 \\
 & -9m_1n_2n_1^2m_2^2 + 3n_1^3m_2^3 = 3(m_1^2m_2^2 + 6m_1m_2n_1n_2 + 9n_1^2n_2^2)(m_1n_2 - n_1m_2) \\
 & -3(m_1^3n_2^3 - 3m_1^2n_2^2n_1m_2 + 3m_1n_2n_1^2m_2^2 - n_1^3m_2^3) = 3m^2n - 3n^3
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 y^2 + 3x^2 &= (m^3 - 9mn^2)^2 + 3(3m^2n - 3n^3)^2 = m^6 - 18m^4n^2 + 81m^2n^4 \\
 &+ 27m^4n^2 - 54m^2n^4 + 27n^6 = m^6 + 9m^4n^2 + 27m^2n^4 + 27n^6 = \\
 &(m^2 + 3n^2)^3 = z^3
 \end{aligned}$$

Logo, a única solução de z^3 é $x = 3m^2n - 3n^3$, $y = m^3 - 9mn^2$ e $z = m^2 + 3n^2$. \square

O método utilizado por Euler para demonstrar o caso para $n = 3$ é basicamente o método do descenso infinito.

Proposição 4.3: A equação diofantina $x^3 + y^3 = z^3$ não possui soluções inteiras com $xyz \neq 0$

Demonstração. Suponhamos que a equação $x^3 + y^3 = z^3$ possui solução com $x, y, z > 0$ e escolhemos essa solução de tal forma que xyz seja mínimo. Como qualquer fator comum de dois desses números é também do terceiro então podemos afirmar que x , y e z são primos relativos dois a dois, pois senão teria outra solução $(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{k})$ menor que (x, y, z) . Em particular, um de tais números será par, pois “par + ímpar = ímpar”, “ímpar + ímpar = par” e “ímpar + par = ímpar”.

Se $x = y$ então $x^3 + x^3 = 2x^3 = z^3$, impossível, pois o expoente da maior potência de 2 do lado direito seria múltiplo de 3, enquanto que do lado esquerdo não e também por x e y serem coprimos. Assim, sem perda de generalidade, podemos considerar $x > y$. Para $x < y$ será análogo.

Suponha que x e y são ímpares e z é par. Podemos escrever $x = p + q$ e $y = p - q$ com $p > 0$ e $q > 0$ coprimos, pois x e y são coprimos e de paridades iguais. Assim,

$$\begin{aligned}
 z^3 &= x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = \\
 &(p + q + p - q)[(p + q)^2 - (p + q)(p - q) + (p - q)^2] = \\
 &2p[p^2 + 2pq + q^2 - p^2 + q^2 + p^2 - 2pq + q^2] = 2p[p^2 + 3q^2].
 \end{aligned}$$

Dessa forma, $2p[p^2 + 3q^2]$ é um cubo perfeito.

De igual forma, no caso em que z é ímpar e x ou y é par. Podemos supor que y é ímpar, com $z > y$, substituindo $z = q + p$ e $y = q - p$, temos:

$$x^3 = z^3 - y^3 = (q + p)^3 - (q - p)^3 =$$

$$q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3 - q^3 + 3q^2p - 3qp^2 + p^3 = 6q^2p + 2p^3 = 2p(p^2 + 3q^2).$$

Se $z = q + p$ é ímpar então p ou q é ímpar e o outro par. Dessa forma, $p^2 + 3q^2$ é ímpar e $2p(p^2 + 3q^2)$ é um cubo perfeito.

Sabemos que

$$\begin{aligned} \text{mdc}(p, p^2 + 3q^2) &= \text{mdc}(p, p^2 + 3q^2 - p \cdot p) = \text{mdc}(p, p^2 - 3q^2 - p^2) = \\ \text{mdc}(p, -3q^2) &= \text{mdc}(p, 3q^2) = \text{mdc}(p, 3q \cdot q) = \text{mdc}(p, 3q) = \text{mdc}(p, 3), \end{aligned}$$

já que $\text{mdc}(p, q) = 1$, pois tem paridades diferentes. Logo, há dois casos: $\text{mdc}(p, 3) = 1$ e $\text{mdc}(p, 3) = 3$.

Se $\text{mdc}(p, 3) = 1$ então, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, existem a e b naturais tais que $a^3 = 2p$ e $b^3 = p^2 + 3q^2$. Neste caso, pelo lema anterior 4.3, existem m e n de paridades diferentes e coprimos tais que $b = m^2 + 3n^2$, $p = m^3 - 9mn^2$ e $q = 3m^2n - 3n^3$. Logo, $a^3 = 2p = 2(m^3 - 9mn^2) = 2m(m^2 - 9n^2) = 2m(m + 3n)(m - 3n)$. Observe que $2m$, $m - 3n$ e $m + 3n$ são coprimos. Assim, existem e , f e g tais que $2m = e^3$, $m + 3n = f^3$ e $m - 3n = g^3$. Em particular, temos: $(m - 3n) + (m + 3n) = 2m$. Portanto, $f^3 + g^3 = e^3$. Como $efg < e^3 f^3 g^3 = a^3 = 2p \leq x + y < xy < xyz$ teremos uma solução menor, o que contradiz a escolha de x, y, z .

No caso, em que $\text{mdc}(p, 3) = 3$ temos que $3|p$. Assim, existe r inteiro tal que $p = 3r$, com $\text{mdc}(r, p) = 1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} z^3 &= 2p(p^2 + 3q^2) = 2 \cdot 3r [(3r)^2 + 3q^2] = 6r [9r^2 + 3q^2] = 54r^3 + 18rq^2 = \\ &18r(3r^2 + q^2) \end{aligned}$$

Logo, existem inteiros i e j tais que $18r = i^3$ e $3r^2 + q^2 = j^3$. Daí, existem inteiros u e v tais que $j = u^2 + 3v^2$, $q = u^3 - 9uv^2$ e $r = 3u^2v - 3v^3$. Segue que $i^3 = 18r = 18(3u^2v - 3v^3) = 27v(2u^2 - 2v^2) = 27(2v)(u^2 - v^2) = 27(2v)(u + v)(u - v)$. De igual forma, teremos que os números $2v$, $u + v$ e $u - v$ são coprimos. Assim, existem inteiros positivos k , l e p tais que $2v = k^3$, $u + v = l^3$ e $u - v = p^3$. Segue que $k^3 + l^3 = p^3$. Portanto, (k, l, p) também é solução da equação e como já vimos contradiz a minimalidade da solução (x, y, z) .

Logo, a equação diofantina $x^3 + y^3 = z^3$ não possui soluções inteiras positivas. \square

Solução do Teorema

Explanaremos, em seguida, sobre a história do solucionador do problema cobijado por muitos matemáticos baseado no livro O Último Teorema de Fermat, [11].



Figura 5.1: Fotografia de Andrew Wiles.

Andrew Wiles nasceu no dia 11 de abril de 1953, em Cambridge, Inglaterra. Tornou-se PhD em matemática pela Universidade de Cambridge (1975-1979) sob a orientação do australiano John Coates, e foi professor em Princeton.

E depois, consagrou-se como matemático por sua demonstração (1995), com ajuda de Richard Lawrence Taylor, do mais famoso desafio matemático de todos os tempos, O Último Teorema de Fermat (UTF). Anteriormente, Andrew Wiles já havia realizado importantes trabalhos na Teoria dos Números, obtendo os primeiros resultados da famosa conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer além de importantes

contribuições para a “conjectura principal” da Teoria de Iwasawa.

Iniciou o contato com o teorema em 1963, quando ainda estava com dez anos de idade, ficou fascinado com o fato de um problema, aparentemente simples, não ter tido solução em trezentos anos, e desde então prometeu a si mesmo demonstrá-lo, leu a proposição no livro “O Último Problema”, de Eric Temple Bell.

O entusiasmo de Wiles começou em 1986, quando Ken Ribet, inspirado por uma ideia de Gerhard Frey, mostrou que o teorema resultaria como uma consequência da conjectura de Taniyama-Shimura como já citado neste trabalho. O teorema de Shimura-Taniyama-Weil ou teorema da modularidade, anteriormente conhecido como conjectura de Shimura-Taniyama, é um teorema matemático que estabelece uma importante relação entre as formas modulares, certas funções holomórficas estudadas pela teoria dos números e as curvas elípticas, que são objetos da geometria algébrica.

Wiles se dedicou a encontrar uma solução para o problema por quase 10 anos. No resto do tempo, ele dava aulas de matemática na Universidade de Princeton.

Foi bastante dramático na apresentação da prova, em junho de 1993, após 7 anos de trabalho. O matemático Andrew sem anunciar os tópicos com antecedência, agendou três palestras no Newton Institute, em Cambridge e disse ter encontrado uma demonstração para a conjectura. A imprensa e o mundo estavam curiosos para conhecer o seu conteúdo. No segundo dia, seus colegas matemáticos chegaram à conclusão de que ele estava se preparando para demonstrar o Teorema de Fermat.

Sua demonstração envolvia uma variedade tão grande de técnicas matemáticas, antigas e modernas, que Mazur tomou a decisão fora do comum de nomear não apenas dois ou três examinadores, como é normal, mas seis. Para simplificar a tarefa, as duzentas páginas da demonstração foram divididas em seis seções e cada um dos juízes assumiu a responsabilidade por um desses capítulos. E um desses examinadores encontrou um erro.

Wiles afastou-se das suas funções, durante um ano e meio, para solução do seu problema. A primeira versão da prova dependia da construção de um sistema de Euler e este aspecto mostrou ser bastante complicado. Esta dificuldade foi superada com a colaboração de Taylor, matemático britânico, especialista em teoria dos números, doutor sob orientação de Andrew Wiles.

Finalmente, no final de 1994, depois de alguns meses de apreciação das 200 páginas surge com a demonstração diferente da original, ele levou uma hora para escrever sua comprovação no quadro-negro: “Toda curva elíptica e semi-estável é modular. Acho que, por enquanto, isto basta!”, disse ele, finalizando sua apresentação. Levaram-se alguns meses para a análise definitiva, e finalmente aceitarem a solução. Então, com suas contas conferidas e aceitas, ganhou o título de “Cavaleiro do Império Britânico”, prêmios matemáticos e outras honrarias mundo afora.

A demonstração perfeitamente técnica, infelizmente, era compreendida por poucos no mundo, porém fez com que Andrew entrasse para a história, sendo conhecido como o matemático que demonstrou o teorema mais desafiador da história da matemática, além de receber o Prêmio Wolfskehl, dotado com a quantia de 100.000 Goldmark.

A mais importante das honrarias talvez seja o rebatismo do Teorema com seu sobrenome, que passou a ser chamado de também de Teorema de Fermat-Wiles. Além

disso, a descoberta é digna de outros prêmios, por ter acabado de completar 40 anos quando da descoberta da solução, Wiles tornou-se inelegível para receber a Medalha Fields (a mais cobiçada láurea da matemática), que só é concedida a pesquisadores com menos de 40 anos. Em 2016, 21 anos após a publicação da solução, Andrew Wiles foi agraciado com o Prêmio Abel, que é a segunda mais cobiçada láurea da matemática.

Não se sabe no que Wiles está trabalhando agora, mas especulam que ele esteja trabalhando em um dos seis problemas do milênio restantes, que pagam 1 milhão de dólares por cada problema resolvido.

Atividades Lúdicas

Enquanto professora, é muito bom saber que todos os alunos de uma turma aprenderam determinado conteúdo no término da aplicação de suas atividades. Mas é comum encontrar alunos que ainda apresentam algum tipo de dificuldade.

A escolha do tema foi motivada por uma situação ocorrida dentro da sala de aula da autora deste trabalho, durante a aplicação de uma das provas das olimpíadas (OBMEP,2017). Essa prova foi aplicada para os primeiros anos do ensino médio, uma série em que os alunos já estudaram os assuntos necessários para resolver problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras. Contudo, após a correção, foi detectado que apenas 7 dos 40 alunos acertaram a questão 10, da Figura 6.1.

10. No interior do quadrado $ABCD$ de lado 9 cm, foram traçadas as semicircunferências de centros E , F e G , tangentes como indicado na figura. Qual é a medida de AG ?

- A) $\frac{11}{5}$ cm
- B) $\frac{18}{5}$ cm
- C) $\frac{19}{5}$ cm
- D) $\frac{11}{4}$ cm
- E) $\frac{27}{8}$ cm

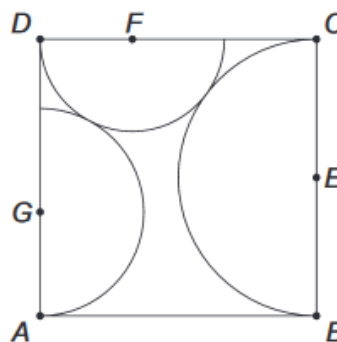


Figura 6.1: Questão da prova do OBMEP de 2017.

Analisando a matriz da Prova da OBMEP é possível notar uma proximidade muito grande com o percentual de acertos de um exemplo de questão que trata os descritores 10 e 11, os quais se referem à habilidade de utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos e reconhecer círculo e circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

O baixo número de acertos nos leva a pensar nas possíveis falhas no processo de ensino aprendizagem destes alunos. É notável que com a ajuda da professora, durante o levantamento das dúvidas na correção da questão com os alunos, a maioria disse que apenas haviam se esquecido do conteúdo. “Conheciam o teorema”, porém, não entendiam sua aplicabilidade, conforme observação feita pela professora.

Em face dessa situação, há de se pensar em novos métodos para se corrigir tal problema. Como a raiz desse conteúdo se encontra no nono ano do Ensino Fundamental, pretendemos usar atividades mais motivadoras para deixá-las marcantes na vida escolar do aluno, afim de, evitar que ocorram os mesmos problemas que seus colegas do Ensino Médio tiveram.

Considerando o fracasso obtido pelos alunos do 1o ano do Ensino Médio, o público escolhido para melhorar esta realidade foi o 9o ano, em razão de que este conteúdo faz parte dos temas a serem avaliados nesta etapa de escolaridade e são as turmas em que a autora desse trabalho leciona. Serão aplicados jogos, exercícios contextualizados e atividades lúdicas.

Entendemos que o jogo na aprendizagem matemática é válido, pois introduz uma linguagem que aos poucos será incorporada aos conceitos matemáticos formais. Desta forma, a matemática busca de forma lúdica as soluções construídas das situações-problema do dia-a-dia. Porém, este método não pode ser visto apenas como diversão, mas, como um viés facilitador do entendimento do conteúdo em questão.

A pesquisa foi realizada em duas turmas de uma Escola Estadual, em Minas Gerais. As turmas 9001 e 9002 possuem, respectivamente, 28 e 29 alunos matriculados. Apesar das atividades terem sido aplicadas para todos os alunos das turmas, nem todos alunos participaram de todos os encontros. Assim, os dados colhidos se referem apenas aos participantes de todas as etapas da pesquisa, ou seja, 24 alunos da turma 9001 e 27 alunos da turma 9002, totalizando 51 sujeitos da pesquisa. Essa atitude foi tomada com o objetivo de dar qualidade aos dados apurados com a atividade diagnóstica.

Neste trabalho, cada sujeito da pesquisa foi identificado por números, em ordem alfabética, de acordo com sua turma:

Turma 9001 : de A1 a A24.

Turma 9002 : de B1 a B27.

O início da intervenção pedagógica se deu por meio da aplicação de uma atividade diagnóstica (APÊNDICE), no qual se pretendia verificar o nível de conhecimento dos alunos em relação aos triângulos retângulos e ao Teorema de Pitágoras. Ressaltando que as duas turmas já tinham conhecimento prévio do assunto, pois o conteúdo já havia sido ministrado, no segundo bimestre, pela professora. As questões 1 e 2, elaboradas pela autora, são consideradas simples e básicas para o tema em estudo.

O objetivo da questão 1 é identificar o triângulo retângulo.

TURMA	ACERTOS	ERROS	APROVEITAMENTO
9001	10	14	42%
9002	8	19	30%

Figura 6.2: Resultado da questão 1 da atividade diagnóstica.

Dos 51 alunos, em ambas as turmas, 18 acertaram assinalando corretamente D como triângulo retângulo e 33 assinalaram a letra B, que sugere que existe uma dificuldade em localizar o ângulo reto em triângulo rotacionado e identificar que no triângulo retângulo precisa ter a indicação de um ângulo reto.

O objetivo da questão 2 é identificar a hipotenusa no triângulo retângulo.

TURMA	ACERTOS	ERROS	APROVEITAMENTO
9001	18	6	75%
9002	13	14	48%

Figura 6.3: Resultado da questão 2 da atividade diagnóstica.

Dos 51 alunos, em ambas as turmas, 33 acertaram assinalando corretamente C como hipotenusa e 12 assinalaram dentre as outras respostas, que sugere que existe uma dificuldade em identificar a hipotenusa.

As questões de 3 a 10 tratam da aplicação do Teorema de Pitágoras e as questões 5, 9, 10, 11 e 12 foram retiradas de provas externas.

Os objetivos das questão 3, 4 e 6 são utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos e resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

TURMA	ACERTOS	ERROS	APROVEITAMENTO	TURMA	ACERTOS	ERROS	APROVEITAMENTO	TURMA	ACERTOS	ERROS	APROVEITAMENTO
9001	16	8	67%	9001	16	8	67%	9001	15	9	63%
9002	12	15	44%	9002	15	12	56%	9002	14	13	52%

Figura 6.4: Resultado das questões, respectivamente, 3, 4 e 6 da atividade diagnóstica.

Essas foram as questões que, no geral, houve melhor aproveitamento. Os alunos que não acertaram as questões não fizeram as contas das mesmas, que sugere que marcaram, aleatoriamente, alguma letra.

Parte dos alunos dessa escola não têm hábito de estudo e não apresentam interesse em desenvolver as atividades propostas pelos professores.

Os objetivos da questão 5 são utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos, resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) e efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.

TURMA	ACERTOS	ERROS	APROVEITAMENTO
9001	9	15	38%
9002	8	19	30%

Figura 6.5: Resultado da questão 5 da atividade diagnóstica.

Dos 51 alunos, em ambas as turmas, 17 acertaram assinalando corretamente C como resposta e 34 assinalaram dentre as outras respostas, que sugere que existe uma dificuldade em operar cálculo simples com valores aproximados de radicais. Alguns alunos chegaram no resultado correto, mas marcaram a resposta errada, já que não conseguiram extrair raiz quadrada inexata.

Os objetivos da questão 7 são utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos, resolver problema com números racionais e irracionais que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) e resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

TURMA	ACERTOS	ERROS	APROVEITAMENTO
9001	5	19	21%
9002	2	25	7%

Figura 6.6: Resultado da questão 7 da atividade diagnóstica.

Dos 51 alunos, em ambas as turmas, 7 acertaram assinalando corretamente C como resposta, 16 assinalaram a letra A e o restante dentre as outras respostas, que sugere que existe uma dificuldade em calcular a área de figuras planas e diferenciar área de perímetro. Alguns alunos conseguiram resolver a parte do Teorema de Pitágoras e tiveram dificuldade na parte de áreas de figuras e ponto médio de um segmento.

Os objetivos da questão 8 são utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos, resolver problema com números inteiros que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) e resolver problemas envolvendo relações entre diferentes unidades de medidas.

TURMA	ACERTOS	ERROS	APROVEITAMENTO
9001	7	17	29%
9002	13	14	48%

Figura 6.7: Resultado da questão 8 da atividade diagnóstica.

Dos 51 alunos, em ambas as turmas, 20 acertaram assinalando corretamente D como resposta, 31 dentre as outras respostas, que sugere que existe uma dificuldade em transformar medidas. Da mesma maneira, alguns alunos conseguiram resolver a parte do Teorema de Pitágoras e tiveram dificuldade na parte de transformação de medidas.

Os objetivos da questão 9 são utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos, resolver problema com números inteiros que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) e identificar relações entre quadriláteros por meio de suas propriedades.

TURMA	ACERTOS	ERROS	APROVEITAMENTO
9001	6	18	25%
9002	3	24	11%

Figura 6.8: Resultado da questão 9 da atividade diagnóstica.

Dos 51 alunos, em ambas as turmas, 9 acertaram assinalando corretamente D como resposta, 42 dentre as outras respostas, que sugere uma dificuldade nas propriedades dos quadriláteros. Nesta questão, ao contrário das outras, os alunos não conseguiram resolver o problema envolvendo o Teorema de Pitágoras, uma vez que tiveram dificuldade em interpretar a questão.

Os objetivos da questão 10 são utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos, resolver problema com números inteiros que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) e reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.

TURMA	ACERTOS	ERROS	APROVEITAMENTO
9001	3	21	13%
9002	1	26	4%

Figura 6.9: Resultado da questão 10 da atividade diagnóstica.

Dos 51 alunos, em ambas as turmas, 4 acertaram assinalando corretamente D como resposta, 47 dentre as outras respostas, que sugere que os alunos não conseguiram trabalhar com a malha quadriculada. Como nenhum aluno realizou cálculo nos passa a ideia de que ou o aluno fez as contas mentalmente ou acertou a questão no chute.

Os objetivos da questão 11 são utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos, resolver problema com números inteiros que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação), identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões) e efetuar cálculos e simplificar expressões que envolvam produtos notáveis e fatoração.

TURMA	ACERTOS	ERROS	APROVEITAMENTO
9001	4	20	17%
9002	6	21	22%

Figura 6.10: Resultado da questão 11 da atividade diagnóstica.

Dos 51 alunos, em ambas as turmas, 10 acertaram assinalando corretamente D como resposta, 41 dentre as outras respostas, que sugere que os alunos não conseguiram trabalhar com números inteiros consecutivos. A maioria dos que acertaram a questão não apresentou cálculo, isso nos passa a ideia de que o aluno acertou a questão no chute, uma vez que é uma questão com maior nível de conhecimento e não dá pra fazer cálculos mentalmente.

Os objetivos da questão 12 são utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos, resolver problema com números inteiros que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) e resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

TURMA	ACERTOS	ERROS	APROVEITAMENTO
9001	7	20	29%
9002	6	21	22%

Figura 6.11: Resultado da questão 12 da atividade diagnóstica.

Dos 51 alunos, em ambas as turmas, 13 acertaram assinalando corretamente D como resposta, 38 dentre as outras respostas, que sugere que alguns alunos estavam já

cansados de realizar cálculos, pois alunos que acertaram as outras questões envolvendo o Teorema de Pitágoras não fizeram essa questão. Todos que acertaram esta questão fizeram cálculos e não tiveram dificuldade na parte de utilizar perímetro.

O gráfico na Figura 6.12 é referente ao resultado da atividade das duas turmas. De modo geral, a turma 9001 obteve mais sucesso. Somente nas questões 8 e 11, a 9002 sobressai.

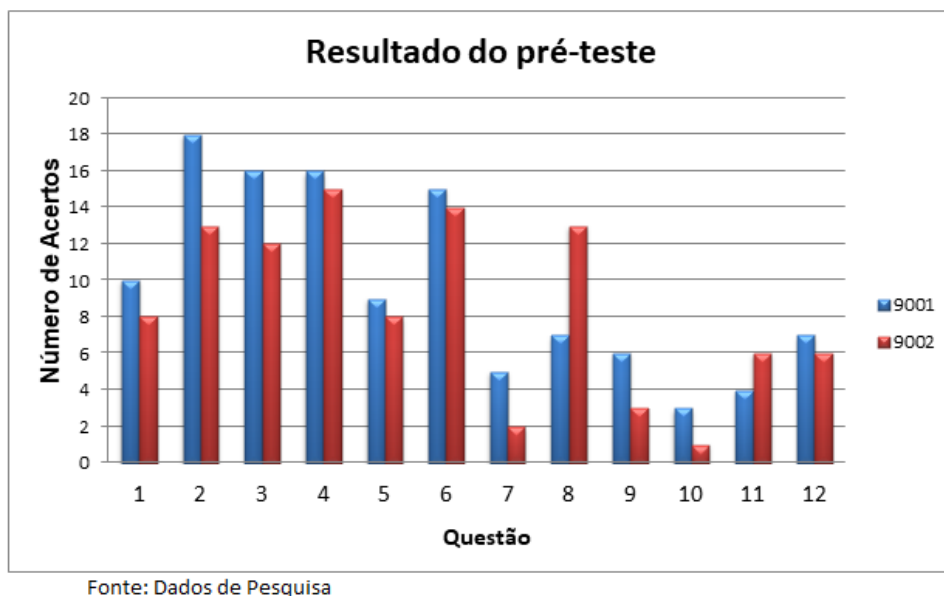


Figura 6.12: Resultado da atividade diagnóstica nas duas turmas.

Além da atividade diagnóstica já citada, propõe-se uma intervenção pedagógica por meio da aplicação de algumas atividades lúdicas e jogos envolvendo o Teorema de Pitágoras como forma de melhor absorver o conteúdo. Algumas delas foram transcritas do trabalho de [10]. O objetivo principal dessa parte da intervenção pedagógica é favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades, promovendo o avanço na aprendizagem dos conceitos sobre o Teorema de Pitágoras.

A pesquisa foi realizada em oito momentos, no período de novembro e dezembro de 2018, nos quais cada aula correspondia a 50 minutos.

- Aula 1 - Aplicação da atividade diagnóstica;
- Aula 2 - Utilizando dobraduras para encontrar um triângulo retângulo;
- Aula 3 - Demonstrando o teorema utilizando áreas;
- Aula 4 - Fixando a demonstração com atividade escrita.
- Aula 5 - Fixando os conceitos do teorema com a música “Teorema de Pitágoras” e com paródias;
- Aula 6 - Jogo dominó pitagórico;

- Aula 7 - Desenvolvimento do jogo trilha pitagórica;
- Aula 8 - Figura geométrica no quadriculado.

6.1 Dobraduras e o teorema de Pitágoras

Utilizamos uma dinâmica em sala de aula, através de dobradura de papel, a fim de demonstrar o Teorema de Pitágoras. Primeiramente, a professora entregou uma folha colorida, quadrada, para os alunos. Em seguida, ela pediu para que os mesmos a dobrassem e desdobrassem nas suas diagonais (segmento de reta que une dois vértices não consecutivos) e mediatrizes (reta perpendicular a um segmento de reta e que passa pelo ponto médio deste segmento), de forma a obter 4 quadrados menores. Depois, dobrassem dois triângulos para trás.

Foi perguntado aos alunos que tipo de triângulos foram formados. Os alunos disseram que os triângulos eram retângulos. Após as dobras foram construídos dois quadrados sobre os catetos a e b de um desses triângulos. Antes de dobrar os outros cantos para trás, ressaltou que cada quadrado pode ser decomposto em dois triângulos exatamente congruentes aos anteriores.

A professora mostrou para os alunos que se recortassem e transportassem esses quatro triângulos para a hipotenusa c do triângulo em questão, formariam um quadrado com lados de medidas iguais a ela. Como no caso do origami evitamos recorte então pediu que dobrassem os dois últimos cantos para trás, produzindo um quadrado, conforme a Figura 6.13.

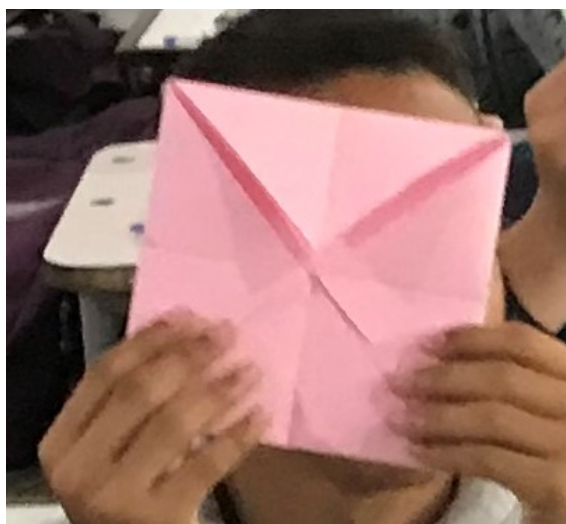


Figura 6.13: Demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando dobradura.

Foi questionado aos alunos sobre qual relação encontraram entre as áreas dos quatro triângulos dobrados e a área do quadrado de lado c , de acordo com a Figura 6.14. Os alunos afirmaram que: $\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} = a^2 + b^2 = c^2$. Portanto, os alunos conseguiram encontrar a relação do Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$ e concluíram que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, com $a = b$.

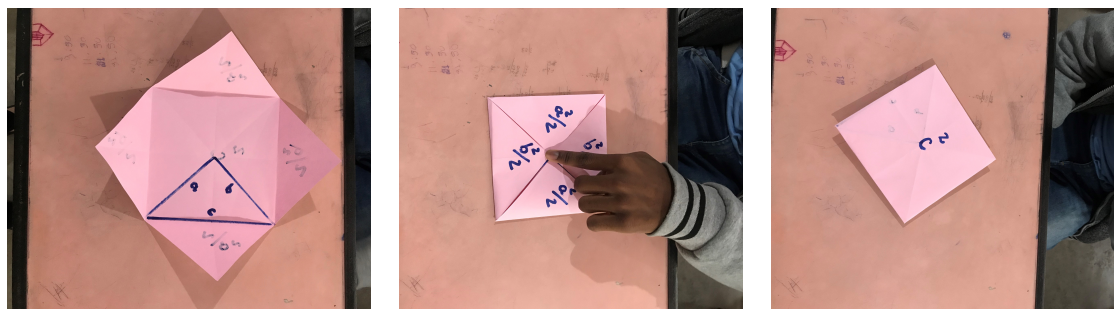


Figura 6.14: Fotos dos alunos demonstrando o Teorema de Pitágoras utilizando dobraduras.

6.2 Demonstração do Teorema de Pitágoras

Este encontro foi dividido em duas etapas de 50 minutos cada, e teve além do objetivo de avançar mais com os alunos nas demonstrações formais do Teorema de Pitágoras, também aprofundar conhecimentos necessários para a aplicação desse teorema.

Inicialmente, foi retratado, com base as discussões do encontro anterior, a importância de uma demonstração formal em matemática. Em seguida, a professora apresentou a figura seguinte, que foi formada por três quadrados, utilizando folha de EVA e um triângulo retângulo de medidas, 3, 4 e 5, utilizando uma cartolina branca. Os quadrados foram sobrepostos a cada lado do triângulo. Ela fez algumas perguntas para os alunos e os mesmos através de equivalência de áreas chegaram a conclusão que “ $5^2 = 3^2 + 4^2$ ”.

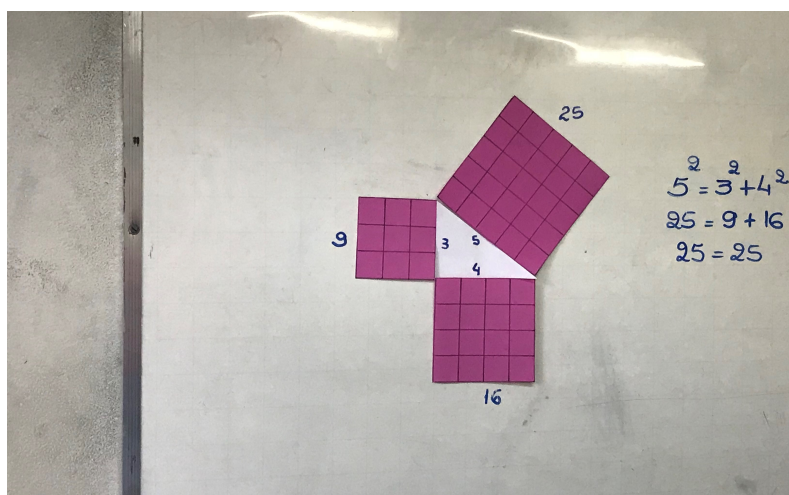


Figura 6.15: Equivalência de áreas sobre os lados dos triângulos.

Foi curioso vermos um aluno, desinteressado na maioria das aulas, dizer que dessa forma ficou mais fácil aprender.

Depois da conclusão, foi colocado os quadrados da Figura 6.16 no quadro, com a finalidade dos alunos demonstrarem o Teorema de Pitágoras. Essas figuras são compostas por quadrados de lados $a + b$ e 4 triângulos retângulos de lados a , b e c , confeccionados por papel laminado de cores diferentes. Após algumas perguntas, os

alunos verificaram que a área não colorida da primeira figura seria a mesma da não colorida da segunda figura. A partir daí, demonstraram o Teorema.

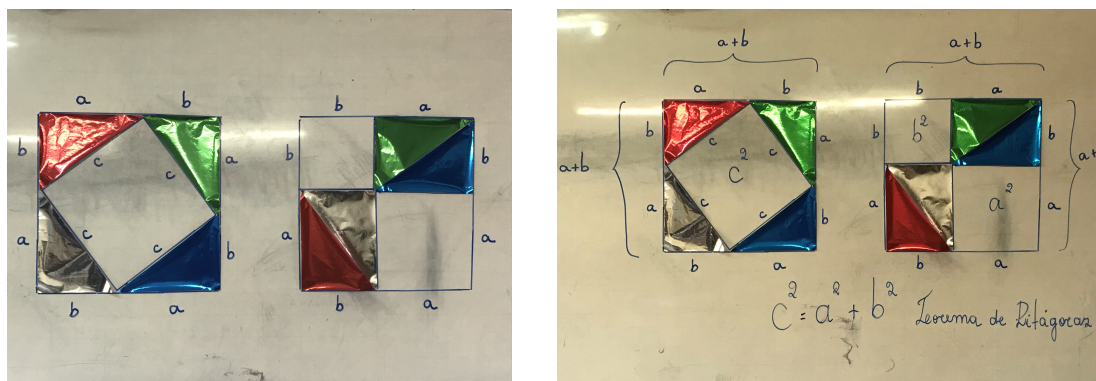


Figura 6.16: Equivalência de áreas.

Após o término desta demonstração, foi proposto que os alunos desenvolvessem uma atividade escrita, de construção do Teorema de Pitágoras, que consta no APÊNDICE. Essa atividade tinha o objetivo de fixar a ideia da demonstração.

Todos os alunos responderam as perguntas e a grande maioria não apresentou dificuldade na atividade proposta, depois de terem feito a demonstração.

6.3 Música de Pitágoras

O objetivo desta atividade é favorecer a assimilação, ou simplesmente memorização do Teorema de Pitágoras de uma outra maneira, que pudessem atingir ao máximo de alunos possíveis. Para isso, utilizamos a música “Teorema de Pitágoras”.

Inicialmente, distribuímos uma cópia da letra para cada aluno e o equipamento de multimídia foi utilizado para esta atividade, pois, a mesma se encontra na página <https://www.youtube.com/watch?v=qjvy2jcbv8w>, publicada em 8 de fevereiro de 2008 por Junior Stella. Sua melodia, em forma de reggae, contagiou a turma. Além de sua letra favorecer a aprendizagem, o vídeo completa de forma incrível a atividade. Posteriormente, apresentaremos a sua letra.

Teorema de Pitágoras - Música de Matemática

Um teorema importante
 Eu quero te ensinar
 Teorema de Pitágoras
 Poderemos decifrar

Pra usar este teorema
 Não é pra qualquer triângulo
 Eu só aplico o Pitágoras em triângulo retângulo
 Um lado é sempre o maior
 Vai hipotenusa chamar
 Os dois que sobram

Catetos poderei assim tratar

Entre de cabeça nessa
Temos que perder o medo
O quadrado da hipotenusa é igual
A soma dos quadrados dos catetos

Vou utilizar um exemplo
Pra você não pagar mico
É o famoso triângulo
De lados 3,4 e 5
Se o lado maior é 5
Elevo ao quadrado 5
E o quadrado da hipotenusa
Será então 25

Um cateto vale 4
Seu quadrado é 16
Vale 9 o quadrado
Do cateto que é 3
E p/ você confirmar
Verificar que eu não minto
9 e 16 somados é igual a 25!!!

Um teorema importante
Eu quero te ensinar
Teorema de Pitágoras
Poderemos decifrar
Poderemos decifrar
Poderemos decifrrrr
Ioioioio!!!

Após os alunos escutarem e acompanharem a letra da música em sala de aula, tiveram que separar em equipes de, no máximo, 5 alunos a fim de construírem paródia usando o Teorema de Pitágoras. As paródias foram apresentadas em sala de aula para todos os alunos. O resultado desta atividade chamou tanta atenção, que os alunos foram convidados a apresentarem as paródias na feira de cultura da escola.

6.4 Jogo dominó pitagórico

Dando continuidade às atividades anteriores, agora de forma lúdica, pretende-se consolidar o assunto com a aplicação de jogo denominado “Dominó Pitagórico”.

Esse jogo tinha 28 peças e foi jogado por quatro jogadores. Em sala de aula, as peças foram embaralhadas e viradas para baixo formando um monte e cada jogador comprava sete peças do monte, não mostrando para seus oponentes. O jogador que iniciou foi aquele que obteve a peça com o resultado de maior valor, fixada pela

professora, a partir daí, o jogo prosseguiu no sentido anti-horário.

As peças foram divididas ao meio, sendo uma parte o resultado e a outra um triângulo retângulo, porém faltava a medida da hipotenusa ou um dos catetos. Desta forma, o aluno tinha que utilizar o Teorema de Pitágoras para obter a medida do lado que faltava. Após encontrar o valor, o jogador encaixava a peça na outra que se encontrava na mesa, se o valor fosse correspondente, caso não, passava a vez e o jogo continuava com o próximo.

O vencedor foi quem acabou o dominó primeiro e premiado com um chocolate pela professora. Esse prêmio fez com que os alunos sentissem motivados e entusiasmados.

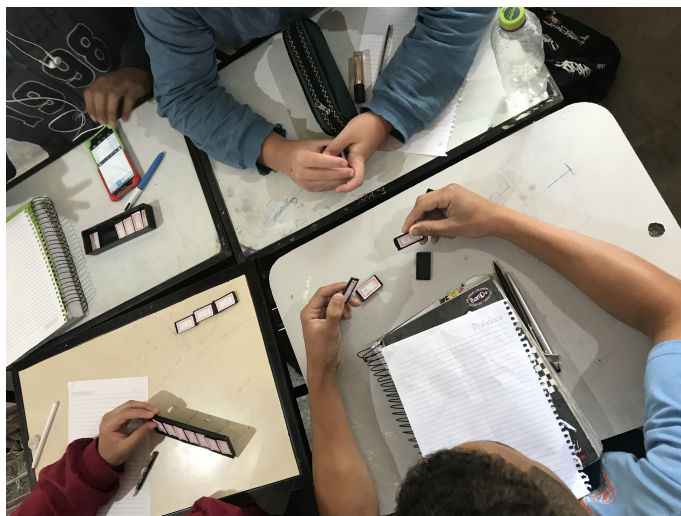


Figura 6.17: Dominó Pitagórico.

6.5 Jogo trilha pitagórica

Esse jogo consiste em uma trilha que o jogador terá que percorrer num determinado sentido indicado e vence aquele que completá-la primeiro. A distância a ser percorrida na trilha, a cada rodada, é o resultado da hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos dependem do lançamento de um dado lançado duas vezes. Cálculos envolvendo o Teorema de Pitágoras deverão ser feitos por todos os jogadores a cada rodada.

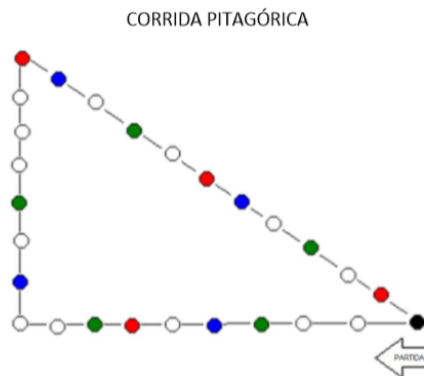


Figura 6.18: Trilha Pitagórica.

Material

- Tabuleiro,
- Marcador para os jogadores,
- 2 dados,
- 40 cartas com problemas matemáticos envolvendo o teorema de Pitágoras.

A trilha foi confeccionada em cartolina branca. Já os dados são os mesmos utilizados em jogos e as instruções de jogo, foram passadas no quadro. Para representar os jogadores foram utilizados botões coloridos. Cada jogador representava uma cor.

Regras

- Máximo cinco jogadores por tabuleiro.
- Para dar início, cada jogador deve lançar um dado, o jogador que obtiver o maior número começa o jogo.
- Todos os marcadores devem estar na casa preta, sendo que cada marcador representa um jogador.
- O jogador por sua vez deve lançar os dois dados, os valores obtidos serão respectivamente dois catetos de um triângulo retângulo.
- O jogador deverá calcular o valor da hipotenusa deste triângulo, aplicando o teorema de Pitágoras.
- O número de casa a serem avançadas será o valor inteiro correspondente à hipotenusa. (Exemplo: Sejam os catetos 5 e 2, a hipotenusa vale 5,385165, logo o jogador andará 5 casas).
- Se o jogador cair em uma casa:
 - Azul: volta duas casas.
 - Verde: avança duas casas.
 - Vermelha: fica uma rodada sem jogar.
 - Branca: o jogador tira uma carta da mesa e responde a questão descrita na carta, se ele errar volta para a casa onde estava antes.
- Observação: Se o jogador cair em uma casa azul deverá voltar duas casas, isto é, cairá em uma casa de cor diferente, encerrando assim sua vez. (Exemplo: se ele sair de uma casa azul voltar as duas casas e cair em uma branca, ele não responderá a pergunta, apenas ficará sem jogar).

Desenvolvimento da Atividade

Após a divisão dos grupos, cada um recebeu o material e foi orientado que cada aluno estivesse com seu caderno, lápis e borracha à disposição para que pudessem efetuar os possíveis cálculos. Todas as orientações foram dadas e algumas simulações foram feitas para que a maioria das dúvidas fossem sanadas.

Para estimular a disputa, foi oferecido um ponto extra na disciplina de matemática para o vencedor e pirulitos para todos envolvidos. Dessa forma, para fiscalizar os cálculos dos colegas e evitar possíveis erros, todos tinham que calcular as respostas dos problemas.



Figura 6.19: Trilha pitagórica.

6.6 Figura geométrica no quadriculado

A professora entregou uma folha, com a Figura 6.20, para cada aluno e pediu para que os mesmos falassem quais figuras geométricas formava cada triângulo grande.

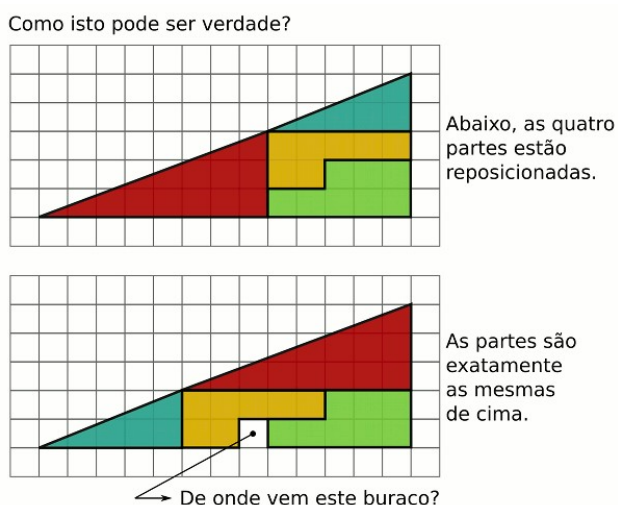


Figura 6.20: Problema de Lógica: Figuras geométricas no quadriculado.

Ela perguntou também, qual relação havia entre as áreas das figuras. Os alunos disseram que as áreas seriam as mesmas, pois possuíam as mesmas figuras geométricas. Porém, isso não é verdade, já que sobrou um quadradinho na segunda figura.

Foi questionado qual explicação para isto. Somente dois alunos conseguiram visualizar que as diagonais das figuras não eram iguais.

A professora disse que a imagem apresentava uma ilusão de ótica, pois os triângulos azul e vermelho não possuem as, respectivas, hipotenusas com o mesmo ângulo de inclinação. Dessa forma, a hipotenusa do triângulo grande, formado pelas quatro figuras, não é exatamente uma reta. No primeiro triângulo há uma pequena concavidade na hipotenusa e no segundo há uma pequena convexidade. Essa ilusão de ótica parece existir uma reta em ambas as partes.

Logo, essa diferença proporciona uma adaptação na área total equivalente ao pequeno quadradinho vazio que aparece.

6.7 Ternas Fermatianas

Depois das atividades desenvolvidas em sala de aula, a professora, autora deste trabalho, pediu para que os alunos encontrassem três números inteiros positivos que satisfizessem a equação: $a^3 + b^3 = c^3$.

Após muitas tentativas, os alunos disseram que não conseguiram achar tais números. Em seguida, ela pediu para calcular o volume de um cubo de aresta 2 e outro de aresta 1 e verificar se a soma dos cubos seria um cubo. Da mesma maneira, fizessem com dois cubos de arestas 3. Perguntou aos alunos quantas unidades faltava em cada caso para que a soma fosse um cubo.

Ela disse que se fosse possível encontrar uma terna de números satisfazendo a equação, esta terna seria chamada de fermatiana cúbica e foi inspirada na situação anterior, que é a terna pitagórica onde vale a equação. Para concluir, ela comentou sobre o Último Teorema de Fermat, dizendo que não existe solução para tal equação e para qualquer outra com expoente, inteiro maior que 2.

Considerações Finais

Neste trabalho, verificamos que não existe nenhum conjunto de inteiros positivos x, y, z , com $n = 3$ e $n = 4$, que satisfaça $x^n + y^n = z^n$.

Inicialmente, apresentamos alguns estudos sobre o teorema de Pitágoras e suas demonstrações, a fim de encontrarmos o modelo das ternas pitagóricas. Em seguida, enunciamos algumas definições, proposições, teoremas, exemplos e propriedades aritméticas relativas aos números inteiros, sendo: paridade, divisibilidade, números primos, máximo divisor comum, congruência e resíduo quadrático com a intenção de garantir caminhos para a demonstração do Último Teorema de Fermat para $n = 3$ e $n = 4$.

Apesar da demonstração do teorema ter sido descoberta, até hoje é um mistério para muitos matemáticos de como foi feita a demonstração original que Fermat obteve. Pois, muitos conhecimentos matemáticos utilizados para a demonstração moderna não existiam naquela época, despertando-nos dúvidas se Fermat realmente conseguiu solucionar o problema.

Não conhecemos nenhuma aplicação deste teorema. Porém, ele tem um valor importante, no entanto, devido às ideias e às ferramentas matemáticas que foram inventadas e desenvolvidas para prová-lo.

Em relação as atividades desenvolvidas, podemos afirmar que o objetivo do trabalho foi atingido, pois houve um crescimento em relação ao conteúdo estudado. Os alunos mostraram boa vontade em aprender, mesmo aqueles que, normalmente, não possuem interesse durante as aulas. Eles afirmaram que fica mais fácil aprender “fugindo”, somente, das aulas expositivas.

Atividades como estas acabam sendo evitadas pelos professores de Matemática por serem trabalhosas, além de serem demoradas, uma vez que os mesmos precisam cumprir a ementa anual. Porém, quando feitas, existe uma melhora tanto no empenho quanto no rendimento dos alunos. Por isso, o professor não pode cair no comodismo.


Os alunos dessa escola, de modo geral, possuem muitas dificuldades de aprendizagem, por motivos variados, tais como: interesse próprio, falta de recursos didáticos, falta de incentivo familiar, falta de base, entre outros. Além disso, não possuem hábito de estudo constante, na maioria das vezes, não lembram de conteúdos passados.

Ao concluir esse trabalho, esperamos ter contribuído para que os alunos do nono

ano do Ensino Fundamental, o Ensino Médio e possíveis leitores interessados neste conteúdo, possam valer-se das experiências deste para entender situações do dia-a-dia e que se relacionam com o Teorema de Pitágoras.

Atividade Diagnóstica

Este apêndice é o pré-teste criado pela autora deste trabalho que serviu de atividade diagnóstica para os alunos do 9º ano na escola que a mesma leciona.

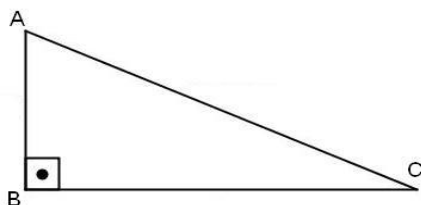
 EE Governador Israel Pinheiro Rua Campos Sales, 39 - Duval de Barros, Contagem/MG CEP.: 32241-420 Tel.: (31) 3385-4374	ENSINO FUNDAMENTAL II	Turno: Matutino	Turma:
	Disciplina: Matemática	Professor: Isabela Souza Castro	
	Data: ____/____/2018		Valor:
	ATIVIDADE DIAGNÓSTICA		
	ALUNO: Nº:		

QUESTÃO 1- Qual das alternativas é um triângulo retângulo?



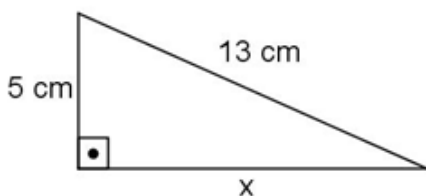
- (A) (B) (C) (D)

QUESTÃO 2- Identifique o segmento que representa a hipotenusa no triângulo a seguir:



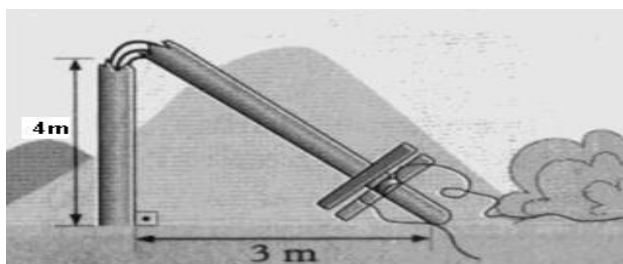
- (A) \overline{AB} (B) \overline{BC} (C) \overline{AC} (D) N.D.A.

QUESTÃO 3- Determine o valor de x.



- (A) 5 (B) 8 (C) 12 (D) 13

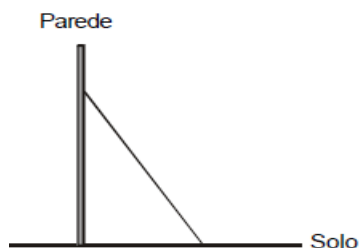
QUESTÃO 4- Em um recente vendaval, um poste de luz quebrou-se à 4m a distância do solo. A parte do poste acima da fratura inclinou-se e sua extremidade superior encostou no solo a uma distância de 3m da base do mesmo.



Logo, a parte que inclinou solo é:

- (A) 4m. (B) 5m. (C) 7m. (D) 8m.

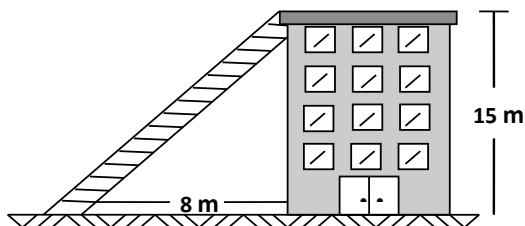
QUESTÃO 5- (SEDUC-GO 2011) Observe a figura abaixo que representa uma escada apoiada em uma parede que forma um ângulo reto com o solo. O topo da escada está a 7 m de altura, e seu pé está afastado da parede 2 m.



A escada mede, aproximadamente,

- (A) 5 m (B) 6,7 m. (C) 7,3 m. (D) 9 m.

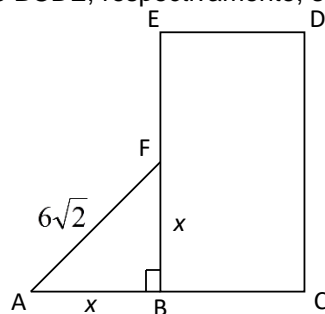
QUESTÃO 6- A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. O comprimento dessa escada é de:



- (A) 12 m. (B) 30 m. (C) 15 m. (D) 17 m.

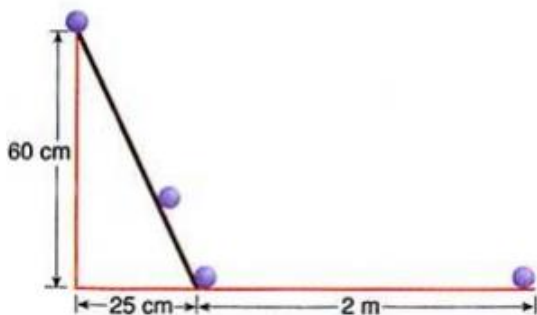
QUESTÃO 7- Na figura tem-se que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e **F** é ponto médio do lado \overline{BE} do retângulo BCDE.

Os valores de x em metros e da área do retângulo BCDE, respectivamente, são:



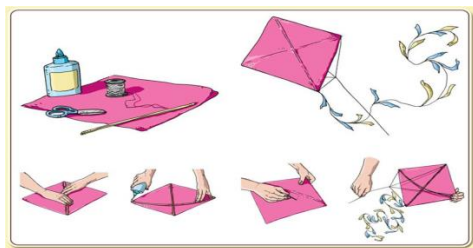
- a) 6m, 36m² (B) 6√2m, 72m² (C) 6m, 72m² (D) 6√2m, 36m²

QUESTÃO 8- Qual a distância percorrida pela bolinha?



- (A) 1,55 m (B) 2,00 m (C) 2,55 m (D) 2,65 m

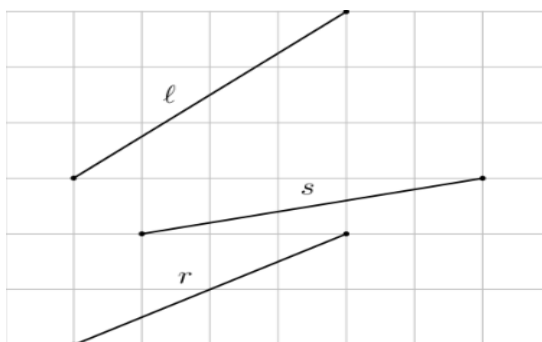
QUESTÃO 9- Pedro reuniu todos os materiais necessários para a confecção de uma bela pipa. Cortou o papel no formato de um paralelogramo com todos os lados iguais. Em seguida, colou as varetas de sustentação de tamanhos diferentes, com medidas 12 cm e 16 cm, nas diagonais e ficaram perpendiculares.



Com base no enunciado, o lado da pipa mede:

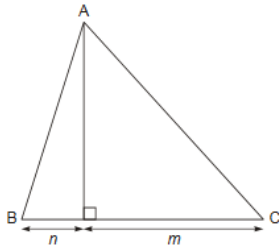
- (A) 28 cm (B) 24 cm (C) 14 cm (D) 10 cm

QUESTÃO 10- (PROFMAT-ENA 2015) Na figura abaixo temos três segmentos dispostos em uma malha formada por quadrados congruentes. Sobre os comprimentos l , r , e s dos três segmentos, é correto afirmar que:



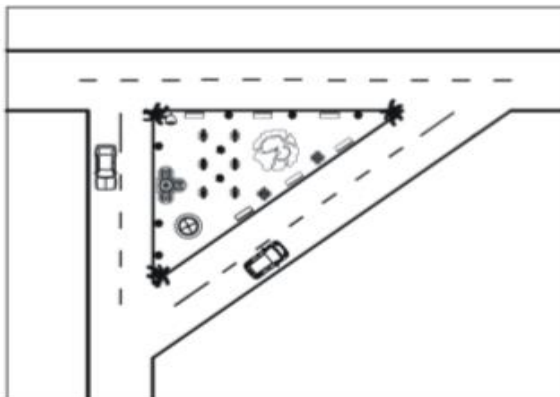
- (A) $s < l < r$ (B) $s = r < l$ (C) $r = l < s$ (D) $r < l < s$ (E) $r < l = s$

QUESTÃO 11- (OBMEP 2006) No triângulo ABC, o comprimento dos lados AB, BC e CA, nessa ordem, são números inteiros e consecutivos. A altura relativa a BC divide este lado em dois segmentos de comprimentos m e n, como indicado. Quanto vale $m-n$?



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

QUESTÃO 12- (Prova Diagnóstica SIMAVE 2017) Guilherme adora andar de bicicleta na pracinha do condomínio onde mora. A pracinha fica em um cruzamento na estrada do condomínio e possui formato triangular, de modo que as duas ruas principais são perpendiculares, conforme a figura a seguir. Os lados da pracinha que correspondem a essas ruas perpendiculares medem 9m e 12m.




Ao dar uma volta completa de bicicleta em torno da pracinha, Guilherme percorrerá uma distância igual a

- (A) 12 m. (B) 21 m. (C) 24 m. (D) 36 m.

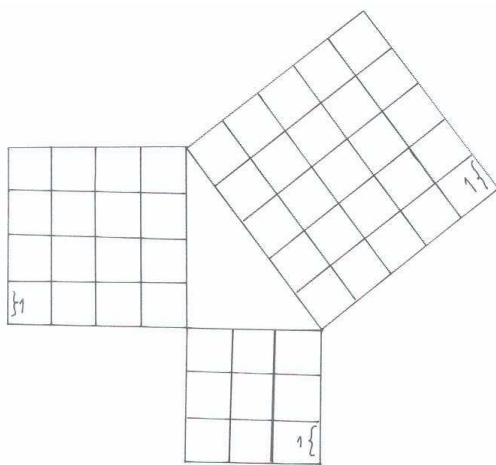
B

Atividade de construção do Teorema de Pitágoras

Este apêndice é uma atividade de construção de conhecimento para compreender a demonstração do Teorema de Pitágoras.

 EE Governador Israel Pinheiro Rua Campos Sales, 39 - Duval de Barros, Contagem/MG CEP.: 32241-420 Tel.: (31) 3385-4374	ENSINO FUNDAMENTAL II	Turno: Matutino	Turma:
	Disciplina: Matemática	Professor: Isabela Castro	Souza
	Data: _____ / _____ /2018		Valor:
	ATIVIDADE CONSTRUTIVA		
	ALUNO:		
	Nº:		

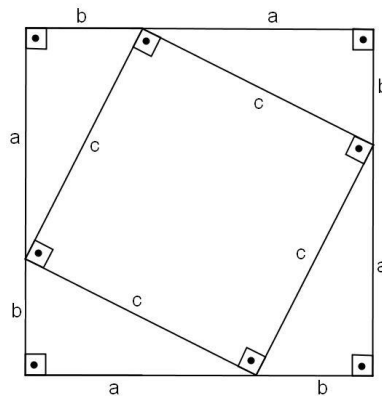
1- Observe a figura e faça o que é pedido nos itens abaixo:



- Calcule a área dos dois quadrados menores.
- Some a área desses dois quadrados.
- Calcule a área do quadrado maior.

Compare a área do quadrado maior com a soma realizada no item b. O que você conseguiu observar através dessa comparação?

2- Na figura todos os ângulos são retos e os segmentos indicados medem a , b e c .



- Calcule a área do quadrado menor de lado c e a área de cada triângulo de lados a , b e c .
- Calcule a área do quadrado maior de lado $(a+b)$.
(Use o produto notável)
- Escreva o que podemos afirmar sobre as áreas dos quatro triângulos somadas a área do quadrado menor em relação a área do quadrado maior.
- Escreva uma expressão matemática que representa o item acima e simplifique-a.
- O que a expressão encontrada representa na matemática?

Bibliografia

- [1] Boyer, C. *Historia da matematica*. Blucher, 2012. URL: <https://books.google.com.br/books?id=KO-LtwAACAAJ>.
- [2] Dante, L. R. *Tudo é Matemática - 3.ed - São Paulo: Ática*. 2009.
- [3] Gonçalves, A. *Introdução à álgebra*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. URL: <https://books.google.com.br/books?id=LP1UAAAAYAAJ>.
- [4] Hefez, A. *Aritmética*. 2ª Ed. Coleção Profmat. SBM, 2016, p. 330.
- [5] Hohenwarter, M. et al. *GeoGebra*. 2017. URL: <http://www.geogebra.org> (acesso em 8 de abr. de 2018).
- [6] Lellis, M., Imenes, L. e Milani, E. *Matematica Para Todos 1o Serie*. SCIPIONE. URL: <https://books.google.com.br/books?id=Dch6PgAACAAJ>.
- [7] Martinez, F. et al. *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Projeto Euclides. IMPA, 2010. URL: <https://books.google.com.br/books?id=q5z3kQEACAAJ>.
- [8] ONAGA, D. e MORI, I. *MATEMATICA IDEIAS E DESAFIOS - 9o ANO*. SARAIVA - DIDÁTICOS. URL: <https://books.google.com.br/books?id=8LmxpwAACAAJ>.
- [9] Roque, T. e Carvalho, J. B. P. de. *Tópicos de História da Matemática*. 1ª Ed. Coleção Profmat. SBM, 2012, p. 467.
- [10] Silva, L. O. da. “Atividades Lúdicas no Ensino do Teorema de Pitágoras”. Diss. de mestr. UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO, abr. de 2016.
- [11] Singh, S. *O último teorema de Fermat: A história do enigma que confundiu as mais brilhantes mentes do mundo durante 358 anos*. Edições Best Bolso, 2014. URL: <https://books.google.com.br/books?id=OzxPBAAAQBAJ>.