UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Angela Maria Moraes

MODELAGEM MATEMÁTICA:
UM ESTUDO QUALI-QUANTITATIVO COM ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

CATALÃO-GO

2019

sibi
sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Angela Maria Moraes

Título do trabalho: Modelagem Matemática: Um estudo quali-quantitativo com alunos do 2^0 ano do ensino médio.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 04 / 07 / 2019

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

ANGELA MARIA MORAES

MODELAGEM MATEMÁTICA:
UM ESTUDO QUALI-QUANTITATIVO COM ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientadora: Dra. Élida Alves da Silva

CATALÃO-GO

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Moraes, Angela Maria
Modelagem Matemática [manuscrito] : Um Estudo Quali quantitativo com alunos do 2ª ano do Ensino Médio / Angela Maria Moraes. - 2019.
ciii, 103 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Élida Alves da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RC), Catalão, 2019.
Bibliografia. Anexos. Apêndice.
Inclui abreviaturas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Modelagem matemática. 2. Ensino Médio. 3. Ensino Aprendizagem. 4. Matrizes. I. Alves da Silva, Élida, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás - UFG
Regional Catalão
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia
Mestrado Profissional em Matemática

UFG

PROFMAT

Defesa N° 28

Ata de Defesa - avaliação da Dissertação

Em 06 de maio de 2019, às 14 h 18 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) Dra. Élida Alves da Silva (orientadora), Dra. Marta Borges, Dr. Deive Barbosa Alves para, em sessão pública realizada por Webconferência no Bloco J - sala 03, da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem a avaliação da Dissertação intitulado(a) "MODELAGEM MATEMÁTICA: UM ESTUDO QUALI-QUANTITATIVO COM ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO", de autoria de Ângela Maria Moraes, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo(a) presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao(à) discente que, em 32 min procedeu a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o(a) examinando(a). Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerado(a): **(X) Aprovado(a) ou ( ) Reprovado(a)**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 15 h 47 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Élida Alves da Silva, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo(a) discente.

Dra. Élida Alves da Silva
UFG/UAE de Matemática e Tecnologia – Catalão
Presidente da Banca

Dra. Marta Borges
UFG/UAE de Matemática e Tecnologia – Catalão

Dr. Deive Barbosa Alves
UFT/Matemática – Araguaína

Ângela Maria Moraes
Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/RC/UFG

Dedico este trabalho aos meus pais, meu esposo e meu filho.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

À minha família e aos meus familiares, especialmente meu filho Vinícius e meu marido Vaston.

À direção da Escola Estadual Professor José Ignácio de Sousa, que permitiu a realização da pesquisa dando todo o apoio necessário, bem como a cada aluno participante da pesquisa, que demonstrou grande comprometimento e boa vontade.

Aos professores da Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, pelos ensinamentos, orientação e dedicação em especial minha orientadora Élida Alves da Silva.

Aos professores Deive Barbosa Alves e Marta Borges pelas contribuições.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa.

Aos amigos Cassiano, Cristiano, Geovani e Inês, que participaram a todo momento, passo a passo, compartilhando o riso e as tristezas, as lutas e as vitórias.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração e conclusão deste trabalho.

"Os modelos matemáticos ajudam a entender o mundo. Os modelos de vida proporcionam os meios para admirá-lo."

Rodney Carlos Bassanezi.

RESUMO

MORAES, A. M.. *Modelagem Matemática: Um estudo quali-quantitativo com alunos do 2^0 ano do ensino médio*. 2019. 103 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás, Catalão-GO.

Conceitos matemáticos carregam o estigma de serem de difícil assimilação por parte dos alunos, o que leva à desmotivação em se querer aprender. Há, entretanto, abordagens de ensino que podem ser aplicadas para conquistar o interesse do aluno pela matemática. Destacadamente, o uso de modelagem se apresenta como uma alternativa ao ensino de conceitos matemáticos. Todavia, resta saber se é possível adequar uma abordagem de ensino de conceitos matemáticos às várias realidades que compõem as salas de aula das escolas pelo mundo, por mais que sejam divulgados resultados animadores sobre a questão. Neste sentido, que se propõe o presente trabalho. Aplicar modelagem matemática em sala de aula para apoiar o processo de ensino-aprendizagem de alunos do ensino médio de uma escola da rede pública estadual de Minas Gerais-Brasil. Para tal, foi feita uma intervenção em turmas do segundo ano do ensino médio desta escola abordando o conceito de matrizes, por meio de sequências didáticas. Foi adotada uma análise quantitativa para medir, em comparação com um grupo de controle, se houve ganho ou prejuízo em alguns quesitos analisados, bem como uma análise qualitativa a partir de questionários e observações. Foi diagnosticado quantitativamente, para o desenho de amostra considerado e para a disponibilidade de tempo e espaço, que o uso de modelagem em sala de aula não gera ganho nem prejuízos consideráveis. Entretanto, a abordagem se mostrou satisfatória, por permitir maior retenção da atenção do aluno e, também promissora, se puder contar com espaço físico adequado e tempo maior para conduzir as atividades.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ensino Médio. Ensino-Aprendizagem. Matrizes.

ABSTRACT

MORAES, A. M.. *Mathematical Modeling: A qualitative-quantitative study with second year high school students*. 2019. 103 f. Master Thesis in Mathematic – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás, Catalão-GO.

Mathematical concepts carry the stigma of being difficult for students to assimilate. Which leads to demotivation in wishing to learn. There are, however, teaching approaches that can be applied to winning student interest in mathematics. Notably, the use of modeling presents itself as an alternative to the teaching of mathematical concepts. However, it remains to know whether it is possible to adapt an approach to teaching mathematical concepts to the various realities that compose school classrooms around the world, even though there are encouraging results on the subject. In this sense, we propose the present work. To apply mathematical modeling in the classroom to support the teaching-learning process for students of a public high school in the state of Minas Gerais-Brazil. For this, an intervention was made in classes of this school addressing the concept of matrices in the second year of high school, using didactical sequences. A quantitative analysis was used to measure, in comparison with a control group, whether there was gain or loss in some analyzed items. As well as a qualitative analysis from questionnaires and observations. It was quantitatively diagnosed, for the design considered and for the availability of time and space, that the use of modeling in classaroom does not generate neither gain or damages, that should be considered. However, the approach proved to be satisfactory because it allows greater retention of the student's attention and also promising, if one can count on adequate physical space and greater time to conduct the activities.

Keywords: Mathematical Modelling. High School. Teaching and Learning. Matrices.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Base Nacional Comum Curricular — BNCC

Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino — CREEM

Comitê de Ética em Pesquisa — CEP

Conselho Nacional de Educação — CNE

Exame Nacional do Ensino Médio — ENEM

Inter. Conf. on the Teaching and Learning of Math. Modelling and Applications — ICTMA

International Commission on Mathematical Instruction — ICMI

International Congress on Mathematical Education — ICME

Lei de Diretrizes e Bases — LDB

Ministério da Educação — MEC

National Council of Teachers fo Mathematics — NCTM

Tecnologias de Informação e Comunicação — TIC

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

Conceitos matemáticos carregam o estigma de serem difíceis de assimilar por parte dos alunos, apesar de muitos destes conceitos serem de suma importância para sua progressão ao trabalho, para lhes preparar para concursos (vestibular, carreira) ou para poderem empregar na administração de suas finanças pessoais. De fato, existe um grande problema de assimilação dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos (FONSECA, 2014). As explicações para tal problema são, dentre outras, a letargia presente na atualização de métodos de ensino de matemática e a falha na formação matemática que os alunos carregam das séries anteriores (ROBERT, 2000).

Contudo, há alternativas para, pelo menos, aumentar o interesse do aluno pelo estudo em matemática. Alternativas estas presentes nas mais variadas tendências em educação matemática, a saber: Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), Etnomatemática, Resolução de Problemas e Modelagem Matemática, dentre outras. Essas tendências podem ser associadas para se desenvolver conteúdos e atividades instigantes para o aluno.

Desde 1916 se encontram referências de autores que questionam a forma de se ministrar as disciplinas nas escolas, por exemplo Kühnel que afirmou.

> Para minha grande vergonha, tenho que admitir que em toda a minha vida, além da escola, nunca precisei aplicar um cálculo de distribuição, muito menos uma aligação alternada! Eu nunca tive que misturar café, álcool ou ouro, nem mesmo calcular essa mistura, e centenas de outros professores que entrevistei admitiram o mesmo.(KÜHNEL; KOLLER, 1954 apud GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016, p.3. Tradução nossa)

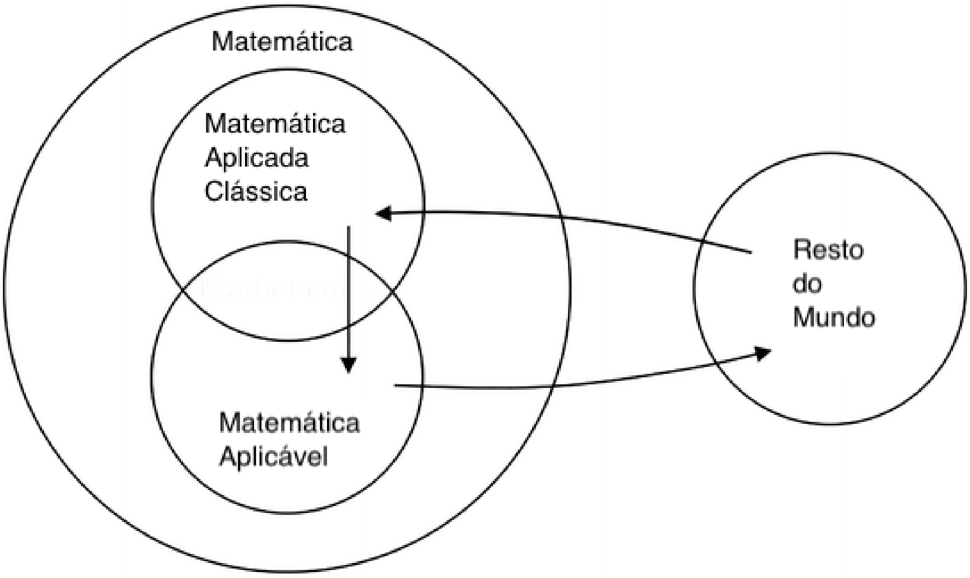
Acima de tudo, ele criticou problemas que envolvem um contexto irrelevante e exigiu problemas que eram realmente interessantes para os alunos.

Em 1976, Pollak proferiu uma palestra no *International Congress on Mathematical Education* (ICME) 3 em Karlsruhe, onde contribuiu para definir o termo modelagem. Ele apontou que, naquela época, era menos conhecido como as aplicações eram usadas no ensino de matemática. Para esclarecer o termo, ele distinguiu quatro definições de matemática aplicada (POLLAK, 1977):

- Matemática clássica aplicada: vista como ramos clássicos de análise e/ou partes da análise que se aplicam à física;
- Matemática com aplicações práticas significativas: empregada em estatística, álgebra linear, ciência da computação e análise;
- Modelagem única: em que o ciclo de modelagem é passado apenas uma vez;
- Modelagem: em que o ciclo de modelagem é repetido várias vezes.

Existem distinção entre essas quatro definições de matemática aplicada. As duas primeiras definições referem-se ao conteúdo (matemática clássica ou matemática aplicável), enquanto as outras duas se referem ao procedimento de processamento. Portanto, o termo modelagem se concentra no procedimento de processamento. Todas as quatro definições são ilustradas em uma figura por Pollak (Figura 1). A modelagem, então, foi considerada um ciclo entre realidade e matemática, que é repetido várias vezes.

Figura 1 – Modelos de Pollak.



Fonte: Adaptado de (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016).

O uso de modelagem no processo de ensino-aprendizagem de matemática está presente no currículo de muitos países e vem sendo discutido fortemente no Brasil (BASSANEZI, 2015). Há uma grande quantidade de estudos sobre o tema, de longa data, mostrando que o emprego de modelagem no ensino de matemática pode refletir em ganho de aprendizado para os alunos (BIEMBENGUT; HEIN, 2018; YENMEZ *et al.*, 2017). Existem relatos de inserção de modelagem matemática nos currículos das escolas de regiões pelo globo a saber Ontário-Canadá (SUURTAMM; ROULET, 2007), Austrália (STILLMAN, 2007) e África do Sul (JULIE;

MUDALY, 2007). Sendo o caso de aplicação da Alemanha o que merece maior atenção. Pois, a modelagem matemática já faz parte do currículo obrigatório alemão desde 2003 com estudos e pesquisas que remontam pelo menos desde a 1917 (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016).

A integração entre modelos matemáticos e o ensino de matemática tem chamado a atenção dos educadores por permitir relacionar conceitos matemáticos com situações deparadas cotidianamente pelos alunos (YENMEZ *et al.*, 2017).

Em suma, modelagem matemática inclui buscar um problema da vida real, abstrair e resolver o problema matemático correspondente e verificar (checar) as soluções. Como suporte à atividade de modelar são empregados gráficos de fluxo, diagramas, equações, fórmulas químicas e simulações computacionais, dentre outras. Todas estas ferramentas suportes à modelagem podem empregar sistemas computacionais (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2017).

Evidente que as pesquisas realizadas nas mais diversas localidades devem ser consideradas para se argumentar sobre a eficiência de uma abordagem de ensino em outro local. Mas, também é necessário considerar aspectos de cada região para se determinar em que ponto a abordagem de ensino pode surtir melhor efeito.

No Brasil existem diretrizes estipuladas pelo Ministério da Educação (MEC) que demandam grande consulta à comunidade e passam pelo crivo do Conselho Nacional de Educação (CNE). A Lei de Diretrizes e Bases (LDB) da Educação de 1996 (BRASIL, 1996) e, mais recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018 (BRASIL, 2018). Sendo que a segunda substituirá a primeira. Na apresentação da área de Matemática e suas tecnologias na BNCC do Ensino Médio consta que:

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua **aplicação à realidade**. [grifo meu](BRASIL, 2018, p. 54)

Na parte das competências específicas, ainda na BNCC, consta que:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir **modelos** e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. [grifo meu](BRASIL, 2018, p. 257)

Além das diretrizes, desde de 1998 foi instituído o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) o qual, além de servir de diagnóstico do ensino médio brasileiro, habilita o jovem brasileiro a ingressar em cursos de nível superior. De forma que os conteúdos abordados no ENEM seguem aqueles elencados na matriz de referência do MEC (BRASIL, 2008).

Não obstante às normativas do MEC, a atuação no ensino médio cabe aos estados da federação (BRASIL, 1998, art. 211), conferindo certa autonomia, por exemplo, na forma de disposição dos horários das disciplinas por semestre, na quantidade de aulas semanais por professor associada à sua disponibilidade (se 20 horas ou 40 horas), no modelo de instalações físicas, dentro outros.

Portanto, quando se pensa em aplicar uma nova abordagem de ensino em sala de aula, devem ser levados em consideração, para além das experiências conhecidas, também as especificidades do público atendido (ZABALA, 1998). E, devido a grandeza continental do Brasil, as especificidades são muitas, podendo variar dentro de um mesmo estado da federação. Desse ponto de vista, é importante avaliar como se aplicar uma nova dinâmica de ensino nas mais variadas configurações de tempo e espaço existentes.

Há exemplos, que podem ser replicados em sala de aula, de abordagens empregando modelagem para o ensino de conceitos matemáticos (AYMERICH; GORGORIÓ; ALBARRACÍN, 2017; BUCHHOLTZ, 2017; QUIROZ; ORREGO; LÓPEZ, 2015). Existem inclusive livros com vários exemplos de modelos que podem ser empregados em sala de aula (BIEMBENGUT; HEIN, 2018). Todavia, os artigos acima, apesar de apresentarem em suas análises que as abordagens surtem efeito positivo, as adotam para turmas com poucos alunos extra-classe e o livro, que pormenoriza a aplicação do modelo, não emite análise se a abordagem reflete em ganho de aprendizagem. A pesquisa de Yoshimura (2015) apresenta uma abordagem empregando modelagem matemática que não produziu resultados esperados e, para tal, empregou uma análise quantitativa aos dados coletados.

Este trabalho apresenta uma intervenção via Modelagem Matemática no ensino do conceito de matrizes previsto no currículo escolar do Ensino Médio em uma escola da rede pública de ensino do estado de Minas Gerais, usando o tempo e espaço disponíveis, para tal. Neste contexto, foi adotada a seguinte questão norteadora: O uso de Modelagem Matemática, como metodologia de ensino, nas aulas de Matemática pode contribuir para a melhoria do desempenho dos alunos na disciplina de matemática?

Uma vez que o escopo da pergunta norteadora se apresenta demasiado complexo, especificamente, se pretende responder às seguintes perguntas, que relacionam uma rubrica envolvendo quatro habilidades que se deseja avaliar do comportamento do aluno:

1. Modelagem: O uso de modelagem nas aulas de matemática melhora a modelagem de processos e fenômenos de realidade?

2. Raciocínio: O uso de modelagem nas aulas de matemática melhora o raciocínio?

3. Resolução de problemas: O uso de modelagem nas aulas de matemática melhora a formulação de problemas e a resolução de problemas?

4. Exercício: O uso de modelagem nas aulas de matemática melhora a comparação e execução de procedimentos e algoritmos?

Esta rubrica foi escolhida, baseada no proposto por Calao *et al.* (2015), por atender três quesitos esperados que os alunos brasileiros devem dominar para obter bons resultados nos exames nacionais de admissão ao nível superior (seja ENEM ou outro vestibular). Enquanto que o quarto quesito avalia a metodologia de ensino abordada na intervenção.

Um grupo de controle foi utilizado para confrontar os resultados do grupo experimental e tanto uma análise quantitativa quanto qualitativa é empregada para analisar os resultados.

Quantitativamente, pelo desenho da amostra considerada, pôde se constatar que o emprego de modelagem no processo ensino-aprendizagem de matrizes às turmas do segundo ano do ensino médio da escola campo adotada não se mostrou substancialmente melhor que a abordagem convencional, isto é, por meio de aulas expositivas utilizando o livro didático e resolução de exercícios.

Por outro lado, uma vez que os exames seletivos no Brasil focam muito em Exercício e Resolução de problemas, também foi constatado que a abordagem via modelagem não prejudicou os alunos nestes quesitos.

Do ponto de vista qualitativo, deve ser elencado o maior interesse dos alunos do grupo experimental em participar ativamente das atividades abordadas em sala de aula, tornando as aulas mais dinâmicas e prazeirosas, tanto para a maioria dos alunos quanto para a professora. Em suma, a abordagem pode ser considerada proveitosa e válida de aplicação.

Para melhor compreensão da pesquisa, o texto se encontra dividido da seguinte forma: no capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica envolvendo, basicamente, Modelagem Matemática; no capítulo 3 é apresentada uma revisão da literatura com foco nos trabalhos que abordam o emprego de modelagem matemática no ensino médio; no capítulo 4 é apresentada em detalhes a metodologia de pesquisa, quali-quanti experimental, adotada no trabalho; no capítulo 5 é apresentada a intervenção em sala de aula, mostrando a sequência didática adotada por meio de modelos; no capítulo 6 são apresentadas as ferramentas empregadas em sala e que geraram os dados (questionários e testes); no capítulo 7 é apresentada a análise dos dados obtidos; por fim, no capítulo 8 são apresentadas as considerações finais e os trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Empregar modelagem matemática em educação matemática tem como intuito modelar tarefas/problemas do cotidiano de forma a provocar o aluno e conquistar seu interesse pelo tema abordado. Visando que, no processo, este aluno, além de adquirir conhecimentos matemáticos, desenvolva suas habilidades de raciocínio, comunicação e de solucionar problemas (ZEYTUN; ÇETINKAYA; ERBAS, 2017).

Detalhadamente, modelagem matemática pode ser definida com um processo complexo para resolver problemas reais se valendo de aplicações matemáticas (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2017).

Ferri (2006) ressalta que apesar de existirem diferentes formas de se entender modelagem, dependendo do propósito da pesquisa, há um consenso de que o processo de modelagem é cíclico, e envolve algumas etapas, ditas básicas, a saber: compreensão, estruturação e simplificação da situação problema, matematização, trabalho matemático, interpretação do resultado matemático, validação e refinamento dos resultados (ZEYTUN; ÇETINKAYA; ERBAS, 2017).

Apesar de várias pesquisas apontarem para a necessidade de incluir modelagem nos currículos de escolas e universidades (BASSANEZI, 2015; YENMEZ *et al.*, 2017), há notadamente uma falha de conhecimento e de experiência em modelagem matemática e dos ganhos pedagógicos inerentes quando o processo de modelagem é integrado em sala de aula (ZEYTUN; ÇETINKAYA; ERBAS, 2017). Neste sentido, uma vez que a difusão no emprego de modelagem em sala de aula no Brasil é muito incipiente (BIEMBENGUT; HEIN, 2018), as atividades desenvolvidas e divulgadas devem ser acompanhadas de informações que subsidiem os professores a aplicarem tais atividades em sala de aula.

O termo modelagem descreve o processo de desenvolvimento de um modelo baseado em um problema de aplicação e usá-lo para resolver o problema (BIEMBENGUT; HEIN, 2018). Portanto, a modelagem matemática sempre se origina de um problema da vida real, que é então descrito por um modelo matemático e resolvido usando esse modelo. Todo o processo é então chamado de modelagem.

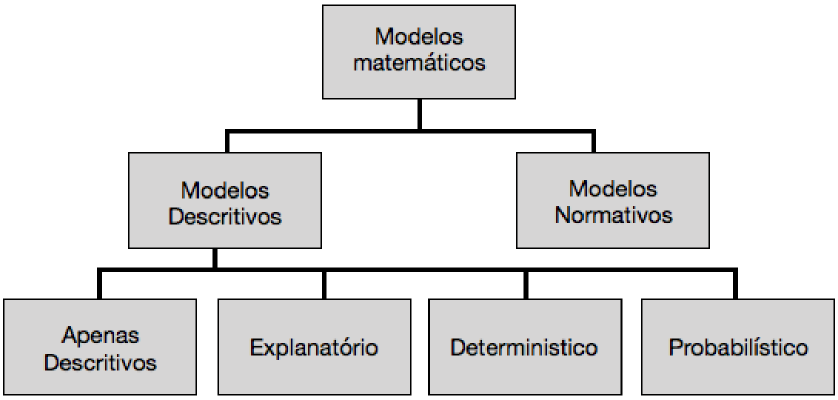
Um ponto de partida para a definição do termo Modelo Matemático pode ser encontrado nas publicações de Heinrich Hertz. Na introdução de seu livro sobre os princípios da mecânica, ele descreveu suas considerações sobre modelos matemáticos do ponto de vista físico. No entanto, Hertz (1894) chama modelos matemáticos de "imagens virtuais de objetos físicos". Ele menciona três critérios que devem ser usados para selecionar o modelo matemático apropriado:

> Diferentes imagens virtuais são possíveis e podem até diferenciar de várias direções. Imagens não compatíveis com nossas regras de pensamento comumente aceitas não devem ser aceitas. Portanto, todas as imagens virtuais devem ser logicamente compatíveis ou pelo menos aceitáveis no curto prazo. Imagens virtuais são falsas se suas interdependências internas são contrárias às interdependências dos objetos externos: elas devem ser verdadeiras. No entanto, até duas imagens verdadeiras e aceitáveis poderiam diferenciar em termos de conveniência. Normalmente, seria preferível uma imagem que refletisse mais interdependências do que outra, ou seja, que fosse mais concreta. Se ambas as imagens forem igualmente compatíveis e concretas, a imagem escolhida seria a menos complexa. (HERTZ, 1894 apud GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016, p. 8 Tradução nossa)

Assim, um modelo matemático é uma representação do mundo real que, embora simplificado, corresponde ao original e permite a aplicação da matemática. No entanto, o processamento de um problema real com métodos matemáticos é limitado, pois a complexidade da realidade não pode ser transferida completamente para um modelo matemático. Isso geralmente nem é desejado. Outro motivo para gerar modelos é a possibilidade de processar dados reais de maneira gerenciável. Assim, apenas uma parte selecionada da realidade será transferida para a matemática por meio de modelagem (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016).

Existem diferentes tipos de modelos (veja a Figura 2), o que torna ainda mais difícil descrever o processo de modelagem com precisão. Modelos prescritivos são chamados de modelos normativos. Além disso, os modelos podem ser usados como pós-imagens. Estes são chamados modelos descritivos. Características de modelos descritivos são previsões e descrições. (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016)

Figura 2 – Modelos Descritivo e Normativo.



Fonte: Adaptado de (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016)

Modelos descritivos visam simular e representar a vida real. Isso pode acontecer de forma descritiva ou até explicativa. Portanto, um tipo de modelo descritivo não pretende apenas descrever uma parte selecionada da realidade, mas ajudar a entender a coerência interna. Além disso, é possível distinguir entre modelos que visam a compreensão e modelos que prevêem um desenvolvimento futuro. Essas previsões podem ser completamente determinadas e, até certo ponto, prováveis.

Existem modelos descritivos que são apenas de caráter descritivo, outros que têm explicações adicionais para algo (modelos explicativos descritivos) e, finalmente, aqueles que até predizem um desenvolvimento (modelos determinísticos e probabilísticos).

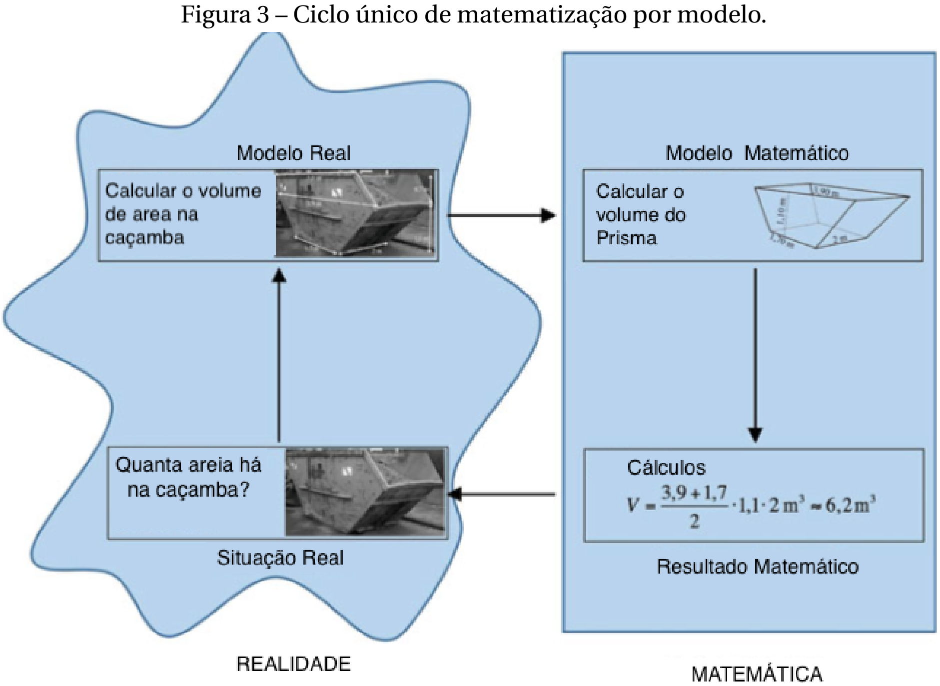
Tarefas em modelos matemáticos descritivos e normativos podem ser bem diferentes. Enquanto os modelos descritivos são utilizados para descrever e resolver problemas da vida real, os modelos normativos visam criar regras matemáticas como auxiliares na tomada de decisões em determinadas situações. Por exemplo, para distribuir o custo do aquecimento em uma edificação com vários apartamentos, é necessário um modelo normativo. Na verdade, esse é um problema real que os alunos do nível secundário conseguem entender e resolver (MAASS, 2006).

Uma vez que a modelagem é caracterizada como um procedimento para processar um problema, ela pode ser vista como uma diferença entre um processo consciente e um inconsciente. A reflexão do procedimento que não considera a implementação de modelagem matemática como um critério é chamada de percepção geral. De acordo com essa percepção geral, um processo de modelagem ocorre mesmo que ocorra inconscientemente (FISCHER; MALLE, 1985 apud GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016). No contexto dessa percepção da modelagem, os alunos que trabalham em problemas da vida real sem simplificar conscientemente a situação em um nível matemático mais elevado estão realizando a modelagem.

Para Bassanezi (2014) Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Todo o processo de modelagem é frequentemente representado como um ciclo. Greefrath e Vorhölter (2016) apresentam um exemplo para calcular o volume de areia de uma caçamba, o problema deve primeiro ser simplificado, por exemplo, supondo-se que a areia seja distribuída uniformemente pela caçamba, com o nível de enchimento correspondendo aproximadamente ao peitoril de carga. A espessura do material do recipiente também não precisa de ser incluída, permitindo assim que as dimensões exterior e interior do recipiente sejam iguais. Também é razoável supor que a caçamba não apresenta saliências ou outras irregularidades. Para transferir a parte preenchida do recipiente para a matemática, ela pode ser identificada com um prisma trapezoidal. Usando este modelo, os respectivos cálculos fornecerão uma solução matemática. Esta solução pode ser interpretada como o volume da areia (ver Figura. 3).

Figura 3 – Ciclo único de matematização por modelo.



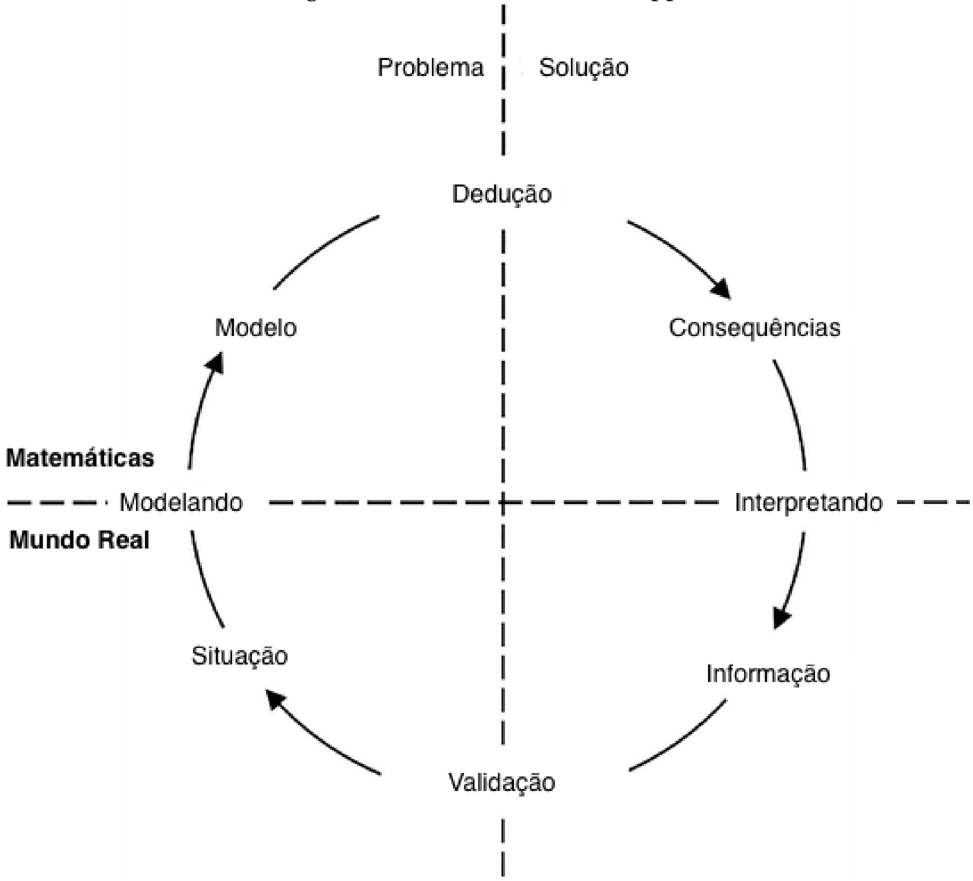
Fonte: Adaptado de (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016).

O problema que envolve o volume da areia na caçamba é um problema do mundo real. As primeiras simplificações em um nível factual levam ao que é chamado de modelo do mundo real. Posteriormente, isso é transferido para um modelo matemático, que é usado para calcular uma solução matemática. O resultado é então aplicado ao problema da vida real. Se apenas uma etapa é usada para transferir um problema da vida real para um modelo, esse modelo de um ciclo de modelagem é chamado de matematização única.

Também é possível idealizar o processo de solução de outras maneiras. Por exemplo, coletar os dados poderia ser mostrado separadamente ou etapas no desenvolvimento do modelo matemático poderiam ser omitidas. Assim, diferentes representações do ciclo de modelagem podem ser encontradas na literatura. Seguem diferentes descrições de processos de modelagem ordenados pela complexidade das etapas no desenvolvimento de um modelo matemático.

Em particular, a representação do modelo geralmente aceito por Schupp é tão clara quanto concreta (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016). Em uma dimensão, divide a matemática e a realidade, que é comum para modelos de modelagem matemática, enquanto na outra dimensão, o problema e a solução são igualmente distinguidos (ver Figura 4).

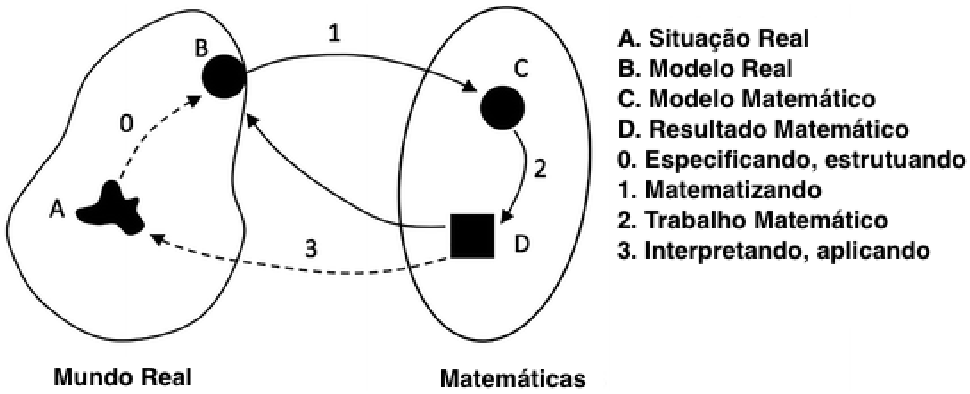
Figura 4 – Modelo cíclico de Schupp.



Fonte: Adaptado de (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016)

Os trabalhos de Blum sobre instrução de matemática orientada para aplicação foram muito importantes na discussão de modelagem. Em uma de suas obras estão incluídas uma série de exemplos de aplicação com uma variedade de tópicos. Além disso, também mostrou que o debate sobre aplicações e modelagem ganhou cada vez mais importância. Uma ilustração bastante conhecida de um ciclo de modelagem (Figura 5) também pode ser encontrada nesta contribuição.

Figura 5 – Modelo ciclico de Blum.

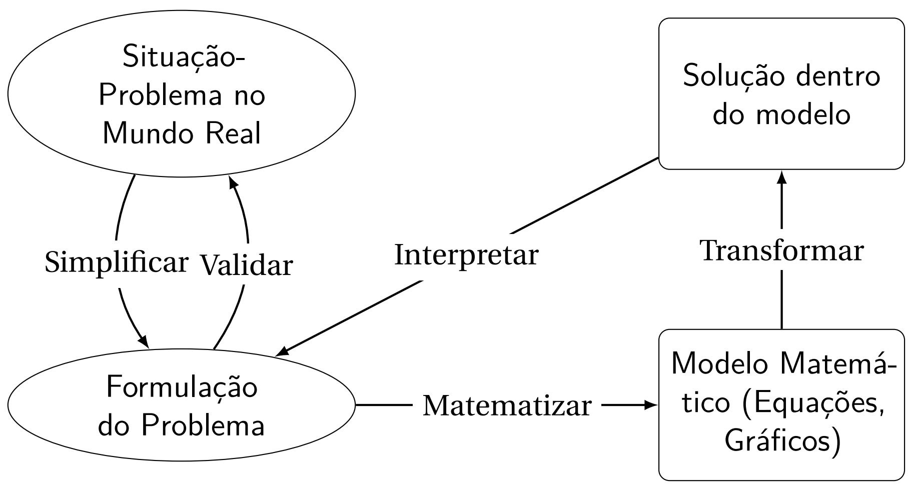


Fonte: Adaptado de (BLUM; KIRSCH, 1989).

Pela primeira vez, a visualização mostrada na Figura 5 é chamada de processo de modelagem, que é baseado no conceito comum na época de modelos para aplicação matemática (BLUM; KIRSCH, 1989).

A representação gráfica mais difundida para se explicar o processo de modelar matematicamente segue o proposto por Mathematics (1989), conforme Figura 6. Esta representação é adotada pelo *National Council of Teachers of Mathematics* e será a adotada no presente trabalho por sua fácil compreensão e por atender perfeitamente a condução da intervenção aplicada. Por este motivo será dada uma explicação mais detalhada das etapas envolvidas no processo de modelagem de acordo com a representação. [1]

Figura 6 – Processo de Modelagem Matemática do NCTM



Fonte: A autora com base em (MATHEMATICS, 1989).

O processo, conforme Figura 6, começa com a especificação do problema por meio da construção de uma versão simplificada deste problema, identificando-se os componentes críticos do modelo e fazendo-se suposições.

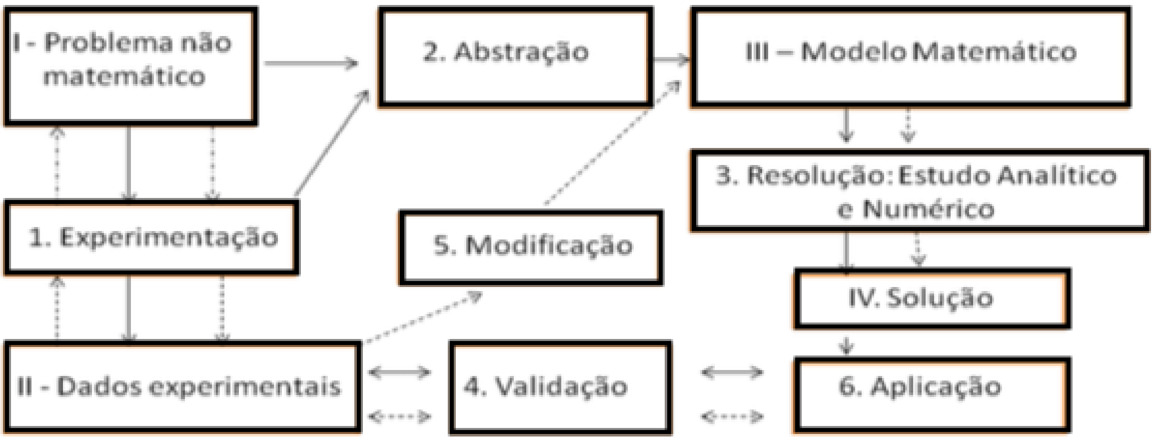
[1] Por não ser o foco do presente trabalho, não serão feitas análises mais aprofundadas das demais representações, contudo, são colocadas todas as referencias para que os leitores interessados possam se aprofundar.

Em seguida, o problema é traduzido em um modelo matemático com variáveis e expressões matemáticas que descrevem a relação entre as variáveis. Após isto, o problema é analisado e resolvido, o que produz resultados matemáticos. Os resultados são interpretados em termos do mundo simplificado.

Finalmente, a solução gerada na versão simplificada do problema é verificada no situação original visando responder as questões postas inicialmente. Se a solução encontrada se mostrar insatisfatória, ou se ainda não respondeu a pergunta inicial do problema original, o processo é refeito desde o início.

Para Bassanezi (2015) o processo de criação de modelos é esquematizado da forma mostrada na Figura 7, neste esquema as setas contínuas indicam a primeira aproximação. Segundo ele a busca de um modelo matemático que melhor descreve o problema estudado deve ser um processo dinâmico, o que é indicado no esquema pelas setas pontilhadas.

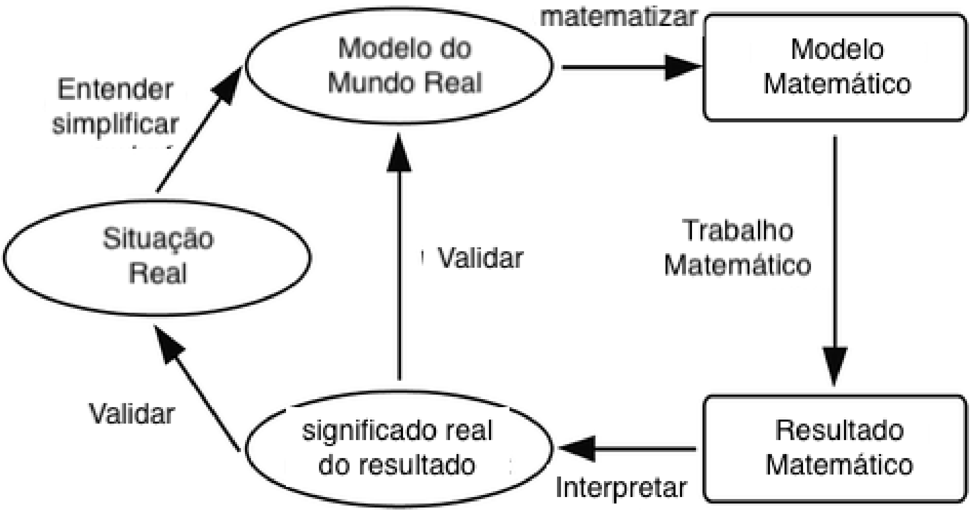
Figura 7 – Esquema de modelagem de Bassanezi



Fonte: Adaptado de (BASSANEZI, 2015)

Por sua vez Kaiser e Stender (2013) apresentam uma representação com mais etapas quando comparada à representação da Figura 6 por acrescentar a solução interpretada como um passo entre solução matemática e a realidade.

Figura 8 – Esquema de modelagem de Kaiser e Stender



Fonte: Adaptado de (KAISER; STENDER, 2013)

Apesar de parecerem distintos as representações das Figuras de 3 a 8 guardam o cerne do processo de modelagem envolvendo matemática, conforme afirmam Madruga, Biembengut e Lima (2015):

> De acordo com (BASSANEZI, 2014), (BLUM *et al.*, 2007) e (BIEMBENGUT; HEIN, 2002), para utilização do modelo é preciso verificar em que nível este se aproxima da situação-problema apresentada. Assim, a interpretação do modelo pode ser por meio da análise das implicações da solução, derivada do modelo que esta sendo investigado, para então, verificar sua adequabilidade, retornando à situação-problema estudada, avaliando o quão significativa é a solução. Se o modelo não atender às necessidades que o gerou, retorna-se ao processo, mudam-se hipóteses, dentre outras. A análise crítica das soluções abre espaço para as discussões, debates acerca dos resultados, e a reconstrução de processos. Para Blum *et al.* (2007), durante o processo de modelagem, podem ser produzidos um ou mais modelos, que são partes integrantes do todo.(MADRUGA; BIEMBENGUT; LIMA, 2015, p. 36)

2.1 O Papel do estudante

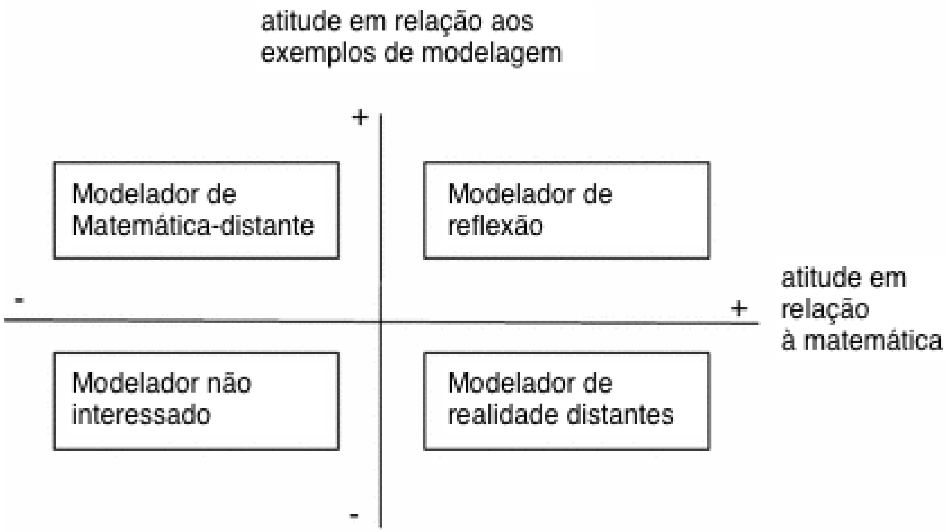
Ao trabalhar com problemas de modelagem, os alunos normalmente não seguem os passos de um ciclo de modelagem na ordem dada. Em vez disso, passam algumas fases repetidamente e omitem outras. Muitas vezes eles "saltam"entre fases simples. (BARBOSA, 2003)

Segundo Maaß (2006, p.139) "as competências de modelagem incluem mais competências do que apenas percorrer as etapas de um processo de modelagem". Assim, um dos aspectos importantes é a conexão entre as competências de modelagem pura, por um lado, e os diferentes tipos de competências, por outro. Trabalhar com sucesso e ser orientado para objetivos em problemas de modelagem requer várias competências, como competências matemáticas, competências de leitura e competências metacognitivas.

Além de resultados sobre competências, as características dos alunos são identificadas como fatores que influenciam no desempenho dos alunos, enquanto trabalhavam em problemas de modelagem.

Em um estudo de caso com 35 alunos, Maaß (2006) reconstruiu quatro tipos de modeladores com base em sua atitude em relação ao contexto e à matemática: (1) modelador de realidade distante, (2) modelador de matemática-distante, (3) modelador de reflexão, e (4) modelador não interessado (ver Figura 9).

Figura 9 – Tipos de Modeladores.



Fonte: Adaptado de (MAASS, 2006, p. 138)

Embora os modeladores distantes da realidade sejam descritos como extremamente positivos em relação à matemática sem referência ao contexto, os modeladores distantes da matemática caracterizam-se por preferirem o contexto e por se oporem à matemática. De acordo com essa classificação, os modeladores de realidade distante têm fraquezas nos estágios que exigem consulta à realidade. Por outro lado, os modeladores distantes da matemática têm déficits em trabalhar matematicamente. Combinações destes dois tipos são o modelador de reflexão e o modelador não interessado. Enquanto o modelador não interessado não está interessado nem no contexto nem na matemática, o modelador reflexivo tem uma atitude positiva tanto no contexto quanto na matemática. Assim, o modelador refletivo mostra um desempenho apropriado enquanto trabalha no problema, enquanto que o modelador desinteressado mostra déficits em todas as etapas do processo de modelagem (MAASS, 2006)

Em um estudo de caso com 35 alunos, Ferri (2010) identificou o estilo de pensamento matemático como outro fator que influencia o desempenho dos alunos, enquanto trabalhava em problemas de modelagem. Alunos com um estilo de pensamento analítico tendem a mudar muito rapidamente da situação real para a matemática e se concentrar nessas fases matemáticas. Os alunos com um estilo de pensamento visual, pelo contrário, apenas começam a trabalhar em um problema verbalizando seu modelo mental e construindo um modelo real. Para os alunos com um estilo de pensamento integrado, nenhum procedimento típico poderia ser reconstruído (FERRI, 2010).

Todos esses estudos mostram que as competências e características dos alunos têm uma grande influência no trabalho dos alunos em problemas de modelagem. Alguns dos fatores são necessários para resolver com sucesso as tarefas de modelagem e influenciar a abordagem individual, enquanto alguns são obstrutivos.

Resumindo, os alunos não são "páginas em branco" quando começam a trabalhar em um problema de modelagem. Pelo contrário, diferentes competências, características e crenças influenciam enormemente o processo de modelagem. No entanto, essas considerações não devem prejudicar os professores na implementação de modelagem em suas aulas de matemática, porque muitos estudos nas últimas décadas indicaram que trabalhar em problemas de modelagem leva a um aumento nas competências de modelagem (BARBOSA, 2003; FONSECA, 2014).

2.2 O papel do professor

A implementação de modelagem em matemática envolve professores como um dos pontos focais. Eles não precisam apenas ser convencidos da utilidade da modelagem matemática; em vez disso, eles precisam superar os obstáculos que venham a surgir. Além disso, sua atitude pode influenciar sua maneira de apoiar os alunos e sua decisão sobre qual detalhe do processo de modelagem eles selecionam como assunto de discussão. Também é necessário que eles saibam como apoiar melhor o processo de trabalho dos alunos. Para isso, são necessárias competências especiais (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016).

Contudo, um grande problema enfrentado para a utilização da modelagem como estratégia de ensino é a formação do professor de Matemática. A principal causa deste problema é a separação da matemática pura e matemática aplicada, relata Bassanezi (2014). Para ele a matemática pura está preocupada apenas com a formação teórica, enquanto a aplicada se dedica a aplicação da teoria. Assim, como grande parte dos professores tem sua formação em um curso onde se prioriza a matemática pura, o processo de Modelagem Matemática se torna trabalhoso, já que ele não foi qualificado adequadamente para esta metodologia. Apesar dos problemas, de acordo com Bassanezi (2014), com a evolução da Educação Matemática estão sendo inseridas no processo de ensino-aprendizagem outras tendências como maior utilização de aplicações matemáticas, resolução de problemas e Modelagem Matemática.

Em 2008, Schmidt (2011) realizou um estudo empírico com 101 professores do ensino fundamental e médio para descobrir/identificar os obstáculos que dificultavam os professores implementar modelagem em sala de aula. Os professores apontaram três obstáculos principais: falta de tempo, complexidade de avaliação de desempenho e falta de material.

O primeiro obstáculo, a falta de tempo, poderia ser diferenciado em falta de tempo necessário para trabalhar em problemas de modelagem na sala de aula e falta de tempo para a preparação de aulas de modelagem. Os professores muitas vezes expressaram o desejo de não perderem tempo trabalhando em problemas de modelagem em vez disso preferiam cumprir com o previsto em currículo da forma habitual. Em relação ao último obstáculo, a falta de material, os problemas de modelagem para os alunos das séries 8 a 13[2], especialmente, foram mencionados. Enquanto no estudo acima esse obstáculo poderia ser superado apresentando problemas de modelagem aos professores, os outros dois obstáculos pareciam ser mais resistentes. A formação de professores que ocorreu no âmbito do estudo não mudou as atitudes dos professores em relação aos outros dois obstáculos: mesmo após a formação de professores, os professores ainda achavam difícil avaliar problemas de modelação.

Como dito acima, as crenças e estilos de pensamento dos alunos podem influenciar seu processo de modelagem. Descobertas semelhantes sobre crenças e estilos de pensamento dos professores foram identificadas: Os professores enfatizaram diferentes características do processo de modelagem em referência ao seu estilo de pensamento matemático ou maneira preferida de representação. É importante notar que os professores muitas vezes não estão conscientes de seu próprio comportamento em relação a esse aspecto. No entanto, eles certamente influenciaram o tratamento dos problemas de modelagem por parte dos alunos (FERRI; BLUM, 2013).

2.3 Desenho do modelo

Segundo Biembengut e Hein (2002), uma condição primordial para a utilização da modelagem no ensino básico está ligada ao desejo de modificar as suas práticas de ensino e busca de um bom embasamento teórico sobre o tema. Além disso, o momento em que o aluno expõe suas ideias e investigar as oportunidades de outras áreas, como podem ser esclarecidas pelo meio da matemática. É um processo dinâmico de aprendizagem.

Para Barbosa (2001), há várias formas de desenvolvimento de processo de modelagem:

1. Professor propõe uma situação-problema, traz todas as informações necessárias para a resolução, ficando a cargo do aluno a responsabilidade de construir o modelo, encontrar a solução do problema e validá-la.
2. O professor apresenta o problema ficando o aluno responsável pela busca de dados, resolução e validação.

[2] O estudo foi realizado na Alemanha, séries de 8 a 13 seria o equivalente no Brasil ao final do ensino fundamental juntamente com o nível médio.

3. A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.

Apoiar os processos de modelagem dos alunos com mais eficiência pode ser um grande desafio para os professores. Para ter tempo suficiente para apoiar os alunos individualmente, as medidas de apoio que podem ser preparadas de antemão são de grande interesse.

No presente trabalho, optou-se pelos dois primeiros processos de modelagem. Inicialmente, para se conquistar a confiança dos alunos a professora trouxe todas as informações necessárias para a solução de um problema. Mais à frente da abordagem a professora foi se distanciando da busca de dados deixando a cargo dos alunos esta tarefa.

Capítulo 3

Revisão de literatura

Neste capítulo é apresentada uma revisão da literatura empregada na pesquisa com foco no problema abordado. Foi realizada uma revisão sistemática de estudos que envolvem modelagem no ensino de conceitos matemáticos, com foco no ensino de matrizes para alunos do ensino médio.

As informações contidas neste capítulo diferem das apresentadas no capítulo 2 na cronologia e, como já dito, no foco. Enquanto no capítulo 2 apresentou-se a evolução da própria definição do que vem a ser modelagem, neste capítulo serão apresentadas as pesquisas mais atuais envolvendo modelagem no ensino médio procurando destacar o ensino de matrizes.

O capítulo está dividido em seções. As duas primeiras tratando da revisão sistemática a partir de resultados encontrados nas bases indexadas mais comuns de pesquisa do Brasil. A terceira seção apresenta uma revisão de textos que não estão nas bases indexadas.

3.1 Pesquisa Sistemática adotada - Bases indexadas

Para verificar as principais abordagens existentes hoje na academia em relação ao emprego de modelagem no ensino de conceitos matemáticos, foi feita uma revisão do tema deste trabalho nas bases indexadas na forma de um mapeamento sistemático (do inglês, *Mapping Study*).

Com a aplicação do Mapeamento Sistemático na elaboração da revisão bibliográfica é possível a identificação das principais lacunas para o desenvolvimento de novas pesquisas. De posse das informações encontradas pelos autores da área em suas principais publicações ligadas ao estudo, são traçadas as linhas de raciocínio para este trabalho.

Este tipo de revisão compõe a bibliografia da pesquisa a partir de base de dados online montando o estado da arte do tema pesquisado. As principais bases buscadas nesta revisão foram: CAPES (2018); *Scopus* (2018) e *Science Direct* (2018), além de outras bases com resultados muito similares que não precisaram ser descritos para relacionar a abrangência dos termos pesquisados.

A metodologia desta pesquisa baseia-se no trabalho de Petersen *et al.* (2008)[1] buscando os assuntos relacionados à pesquisa com expressões-chaves e por meio de operadores lógicos, a fim de se encontrar a seleção dos artigos que montem o viés da pesquisa iniciada.

Para se definir as palavras-chave da pesquisa divide-se a busca em duas vertentes, focadas no ensino médio (*secoundary school* ou *middle school*). Em primeiro lugar, encontrar o emprego de modelagem no ensino de matemática. A expressão adotada foi "Teaching Math *and* Models", de forma que ao associar os três conceitos é possível avaliar, nos dados retornados pela base de dados, qual a relação entre os conceitos e como sua relação se comportou ao longo dos anos em que ocorreram estudos com pesquisas voltadas ao ensino de matemática usando modelos.

Em um segundo momento o foco da pesquisa busca encontrar os trabalhos relacionados com o conteúdo matemático abordado neste trabalho, como forma de validar as informações presentes no ensino de matemática por modelagem. Usou-se a expressão chave "matrices *and* secondary education", para identificar os trabalhos que já foram submetidos a esta ferramenta e verificar as possibilidades de se adequar a metodologia prevista na pesquisa. É importante ressaltar que foram testadas outras expressões-chave nesta pesquisa, e que os resultados apresentados foram variados tanto com a sigla apresentada quanto com a escrita sem abreviação. Contudo, foram considerados apenas estes dois segmentos que se mostraram minimamente correspondentes ao ambiente de pesquisa desejado para este trabalho, como será visto nos resultados desta revisão.

3.2 Discussões e Resultados da Pesquisa Sistemática

Grande parte das bases de pesquisas de periódicos online são indexadas, inclusive as utilizadas nesta pesquisa. Logo, muitas repetições precisaram ser descartadas ao fim da pesquisa.Vários estudos foram encontrados e estão localizados principalmente nos Estados Unidos da América, na Austrália, no Reino Unido, na Alemanha e na Holanda. Destacam-se as pesquisas os grupos da *University of Groningen*, *University of Missouri-Columbia*, *University of Queensland* e *University of Aucklandque.*

As revistas internacionais com artigos desta área que mais possuem publicações são *International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology*, *Education And Information Technologies* e *Zdm International Journal On Mathematics Education.*

A Modelagem Matemática é um campo de pesquisa em educação matemática fortemente difundido mundialmente. Esta afirmação se baseia no evento denominado *Internatio-*

[1] Há referencias mais abrangentes como, por exemplo, *Systematic Reviews in the Social Sciences: A Practical Guide* de Mark Petticrew Helen Roberts. Contudo, as informações no artigo consultado se mostraram suficientes para conduzir a presente dissertação.

nal Conference on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA) que, a cada dois anos, possibilita a divulgação dos andamentos das pesquisas envolvendo modelagem matemática. Resultados apresentados neste evento são publicados na série da editora Springer intitulada *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Ademais, pode-se citar a publicação voltada especificamente para Modelagem Matemática do *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI).

O ICTMA-17 aconteceu na cidade de Nottingham-UK de 19 a 24 de julho de 2015, e contou com a apresentação de trabalhos de pesquisadores brasileiros de diferentes instituições de ensino superior do Brasil (ICTMA-17. . . , 2015). Destes trabalhos alguns foram publicados na série *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* intitulada *Mathematical Modelling in Education Research and Practice*, tais como os trabalhos de D'Ambrosio (2015), Almeida e Silva (2015), Palharini e Almeida (2015), ARAÚJO e Campos (2015), Barboza *et al.* (2015), Rosa e Orey (2015), Scheller, Civiero e Oliveira (2015), Júnior *et al.* (2015), dentre outros.

A profusão de submissão de trabalhos de grupos de pesquisa brasileiros para a série supracitada mostra que há um bom interesse da comunidade acadêmica nacional no emprego de modelagem no ensino de matemática.

Dos artigos da edição de 2015, alguns se aproximam mais do escopo no presente trabalho. Em Villa-Ochoa e Berrío (2015), por exemplo, são apresentados resultados parciais de um estudo de caso qualitativo envolvendo cinco estudantes de uma instituição de ensino rural. Os alunos, motivados por entender a matemática além da sala de aula, escolheram tópicos para a modelagem matemática da cafeicultura. Eles detectaram algumas variáveis encontradas na prática cultural da cafeicultura e então limitaram o problema de modelagem, de modo que algumas de suas crenças começaram a emergir. Os resultados mostram que as crenças de alguns alunos sobre cultura ou conhecimento contextual não permaneceram estáticas durante todo o estudo.

Já Yoshimura (2015) emprega modelagem para alunos do nono ano, com foco no problema de déficit financeiro de companhias elétricas. Nesta pesquisa qualitativa, foi confirmado que, em geral, os estudantes japoneses não são capazes de fazer suposições apropriadamente a partir de problemas complicados da vida real e que as habilidades de modelagem dos alunos no tratamento de valores e condições numéricas incertas, foram adquiridas através da discussão sobre as respostas corretas.

Quiroz, Orrego e López (2015) tinham por objetivo analisar as diferentes maneiras como os estudantes constroem modelos e aplicam elementos matemáticos que surgem em contexto autêntico. Na pesquisa foi adotada uma análise de estudo de caso qualitativo com foco em dois pares de alunos do décimo ano da Colombia, que realizaram medição de áreas e volumes no contexto da inundação da escola que frequentam.

Já na edição de 2017 do livro, da mesma série do anterior, pode-se citar o trabalho de Buchholtz (2017) o qual explora formas de se abordar modelagem extraclasse através de passeios pela cidade.

Em Aymerich, Gorgorió e Albarracín (2017) são relatadas as soluções de 22 grupos de estudantes do 10^0 ano (15-16 anos) para uma atividade de levantamento de modelos envolvendo interpretação de dados da listas de salários de cinco empresas. Os alunos foram convidados a ver o que poderia ser determinado sobre a estrutura da empresa com base em sua análise matemática ou estatística dos dados. Os alunos não tinham experiência anterior em modelagem, mas alguma compreensão de estatística. Os resultados mostram que uma ampla gama de conceitos e procedimentos matemáticos foram utilizados. A atividade promoveu modelagem matemática e poderia ser a primeira de uma sequência didática voltada para o trabalho de distribuição e dispersão de dados.

No que tange o emprego de metodologia quantitativa para avaliar os resultados de intervenções, pode se citar o trabalho de Calao *et al.* (2015) que apresenta uma pesquisa projetada para testar se o uso de programação nas aulas de Matemática poderia ter um impacto positivo nos resultados de aprendizagem dos alunos em suas habilidades matemáticas. Este trabalho emprega análise quantitativa para mostrar que há um aumento estatisticamente significativo na compreensão dos processos matemáticos no grupo experimental, que recebeu treinamento em Scratch [2]. Contudo, a pesquisa não é voltada para analisar uma intervenção que emprega modelagem matemática.

Cabe ressaltar alguns dos capítulos publicados em Blum *et al.* (2007), uma vez que o presente livro foi um compendio do *14th ICMI Study* voltado para o ensino de matemática via modelagem. O livro explora vários conteúdos, divididos em seções, tais como epistemologia e Modelagem, Competências em Modelagem, Aplicações e Modelagem para Matemática, dentre outras.

Na seção Casos em Aplicações e Modelagem, da referida obra, destaca-se os trabalhos de Suurtamm e Roulet (2007), Stillman (2007) e de Julie e Mudaly (2007). Nestes são apresentadas as experiências de implementação de modelagem matemática no currículo de ensino médio de Ontário-Canadá, na Austrália e na África do Sul, respectivamente, evidenciando que a implementação de modelagem de forma estrutural no currículo escolar demanda muito trabalho, principalmente de formação profissional.

Em Greefrath e Vorhölter (2016), contudo, apresenta a experiência bem sucedida dos países de língua alemã na inclusão de modelagem matemática nos seus currículos, apresentando que a evolução desde a década de 1980 até chegar a ser disciplina obrigatória em 2003, se tornando uma das seis competências matemáticas gerais nestes países. Ainda de acordo com Greefrath e Vorhölter (2016), houve muito esforço para implementar a modelagem

[2] O Scratch é um projecto do Lifelong Kindergarten Group do MIT Media Lab voltado para codificação e destinado, inicialmente, para jovens de 08 a 16 anos.<https://scratch.mit.edu/educators>

matemática nas escolas da Alemanha e as atividades de modelagem no ensino de matemática mudaram nos últimos anos devido a existência de ferramentas digitais.

Muitas pesquisas qualitativas e quantitativas recentes sobre modelagem na escola de língua alemã enfocam os alunos; no entanto, os professores também desempenham um papel importante para o êxito da implementação da modelagem matemática e no incentivo ao desenvolvimento de competências dos alunos.

Na Alemanha, há agora estudos empíricos sobre as competências dos professores em modelagem e outros tópicos importantes. Além disso, as configurações da sala de aula desempenham um papel importante. Assim, além do comportamento direto do professor, tem havido um foco na pesquisa sobre o design de aulas de modelagem simples, bem como todo o ambiente de aprendizagem de modelagem (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016).

3.3 Textos encontrados fora das bases indexadas

> [...] desse crescente interesse pela modelagem, há poucas evidências e certo 'sintoma' ou 'percepção' sobre mudanças na educação frente ao número de adeptos e interessados. Não se dispõe de mapeamento de todas as ações e de como é entendida e adotada pelos professores que tomaram ciência da modelagem matemática na educação brasileira. Nas dimensões continentais do Brasil, dificilmente teremos conhecimento pleno de como e quanto idéias e propostas sobre modelagem matemática são utilizadas, bem como de milhares ações educacionais submissas às salas de aula de incansáveis professores sonhadores que crêem na possibilidade de fazer o ensino melhor. O que tem sido possível identificar é a produção acadêmica que está em bibliotecas ou acervos passíveis de localização e, salvo alguns encontros ocasionais, relatos de bastidores. (BIEMBENGUT, 2009, p. 28)

A maioria dos textos que serão elencados nesta seção surgiram durante o processo de pesquisa por indicação de membros das bancas de avaliação[3]. Outros textos foram referenciados nos textos encontrados nas bases indexadas. Por fim, há os textos de conhecimento de vida da autora do presente trabalho. Razão pela qual não foi dedicada uma seção para se explicar a forma sistemática de se encontrar tais textos.

Como aponta Biembengut (2009) as informações sobre pesquisas em modelagem matemática no Brasil não estão bem mapeadas. Ainda em Biembengut (2009) é apresentada uma ferramenta para agregar as produções brasileiras envolvendo modelagem matemática por meio de uma página na Internet do Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino - CREMM (<www.furb.br/cremm>). Apesar de ter sido criado em 2003 e divulgado no trabalho de Biembengut, não se encontram na página *web* publicações de artigos de revistas e as publicações em anais de eventos remontam de 2008 a antes.

[3] Banca de avaliação de projeto e banca de avaliação de trabalho submetido no V SPPGI.

O trabalho de Biemgengut faz um resgate da produção científica envolvendo modelagem matemática em comemoração aos 30 anos de modelagem matemática no Brasil. Interessante seria que neste ano algum pesquisador da área propusesse um trabalho semelhante em comemoração aos 40 anos de modelagem matemática no Brasil.

O ensino de matrizes é bastante explorado nos livros didáticos utilizados nas escolas brasileiras e consta na matriz de referência do ensino médio proposto pelo Ministério da Educação (BRASIL, 2008). Contudo, a abordagem dos livros didáticos, com poucas alterações, segue o formato convencional de ensino. Isto é, o mesmo formato empregado por anos no ensino do conceito.

Por exemplo, no livro adotado na escola campo da pesquisa é dedicado um capítulo para se abordar os conceitos de matrizes e determinantes. A primeira seção, de duas páginas, apresenta o histórico do surgimento de matrizes e a décima segunda seção (última do capítulo) apresenta as aplicações que, na verdade, são exercícios contextualizados. As demais 10 seções são dedicadas, cada uma, a abordar um conceito específico de matrizes como, por exemplo, definição de matrizes, nomenclatura das matrizes, soma e subtração, multiplicação, dentro outros (DANTE, 2016).

Burrill *et al.* (1998) apresenta uma abordagem por modelagem para o ensino de matrizes. Contudo, tal livro foca em aplicações voltadas para o nível superior, sobretudo na utilização de matrizes para lidar com regressão. Apesar disto, a parte introdutória do livro forneceu subsídios para a construção de problemas modelos que foram empregados na intervenção na escola campo (cf. 5.1).

Por conta da especificidade da área de educação no Brasil, não se pode deixar de considerar no levantamento bibliográfico as publicações de livros. Notadamente, livros publicados por editoras que tem como público pesquisadores em educação (sejam autores ou leitores).

Por exemplo, Meyer, Caldeira e Malheiros (2017) apresentam um texto que subsidia discussões a respeito de modelagem matemática e suas relações, possibilidades e perspectivas em sala de aula. É uma obra em que se apresenta um estudo sobre as bases teóricas e práticas da Matemática. Portanto, é recomendado como livro básico de leitura para aqueles que pretendem conhecer as bases da modelagem matemática.

Já Biembengut e Hein (2018) apresentam um texto com uma breve revisão bibliográfica sobre modelagem, na primeira parte, e com vários exemplos de modelos matemáticos para o ensino de matemática, tais como, produção de embalagens, construção de casas e cubagem de troncos de madeira. A obra pode ser empregada para subsidiar preparações de aulas envolvendo conceitos geométricos. Não é apresentada nenhuma prática voltada para o ensino de matrizes. Uma vez que no livro não é apresentada nenhuma informação de como e nem em que momento o professor da disciplina pode aplicar as práticas propostas, caberá ao professor, interessado em aplicar o conceito, testar as possibilidades.

Rodney Carlos Bassanezi apresenta duas obras, (BASSANEZI, 2014) e (BASSANEZI, 2015), com enfoque em subsidiar professores na aplicação de modelos no ensino de matemática. Por empregar conceitos de nível superior como, por exemplo, noções de cálculo diferencial e álgebra linear, tais obras devem ser voltadas para alunos de ensino superior em iniciação cientifica ou para projetos extra-curriculares do ensino médio.

3.4 Considerações a partir do referencial

A partir da busca realizada, é possível constatar que o trabalho proposto possui carácter relevante. Pois, nos trabalhos encontrados em nenhum deles se propõe o ensino de matrizes para alunos em nível secundário em sala de aula.

Nesses estudos, tão pouco foram encontrados, na área de educação matemática, trabalhos brasileiros voltados para o ensino de matrizes no ensino secundário que tenham sido avaliados empregando metodologia quantitativa.

Capítulo 4

Metodologia

A pesquisa é quantitativa, pois, consiste em aplicar abordagens diferenciadas em dois grupos distintos de alunos, um grupo experimental e outro de controle, para que depois seja realizada a análise estatística nos dados coletados visando inferir se a abordagem produziu resultados satisfatórios. A pesquisa também é qualitativa, na medida que analisa as interpretações, as reações e as conseqüências advindas da aplicação da abordagem no grupo experimental. A abordagem adotada na pesquisa se baseou no que foi proposto por Calao *et al.* (2015).

Esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) sob número CAAE: 88741518.2.0000.8058, conforme anexo A.

A divisão do capítulo segue a mesma divisão do formulário *web* da Plataforma Brasil, discriminando o desenho, a população, a forma como se coletou os dados, a área de intervenção e, por fim, a forma como os dados foram analisados.

4.1 Desenho

Foram escolhidas duas das quatro turmas de uma escola pública da cidade de Uberlândia-MG para comporem o grupo experimental e as outras duas turmas para comporem o grupo de controle.

4.2 População

A população é composta de aproximadamente 160 alunos do segundo ano do ensino médio de uma escola localizada na cidade de Uberlândia-MG. Esta escola pertence a rede estadual de ensino e atende alunos tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio. A amostra é intencional e não probabilística, composta de 40 alunos da turma A e 40 alunos da turma C, que compõem o grupo experimental, e de 40 alunos da turma B e 40 alunos da turma D, que compõem o grupo de controle. [1]

As turmas que compõem cada grupo foram escolhidas de forma a facilitar a preparação e condução das atividades. De modo que, durante a preparação ou aplicação das aulas, fosse evitada a intervenção na condução da abordagem empregada no grupo de controle com a condução da abordagem a ser empregada no grupo experimental, e vice-versa.

4.3 Coleta de Dados

A coleta de dados foi baseada em materiais produzidos pelos alunos, questionários, observações, diário de campo e, também, em teste baseado em uma rubrica para avaliar o desempenho e as habilidades dos alunos nos processos matemáticos envolvidos na investigação, a saber: modelagem, formulação e solução de problemas, raciocínio e exercícios.

Esta rubrica foi pensada levando em conta as abordagens propostas nos exames nacionais brasileiros, utilizados para medir a capacidade dos egressos do ensino médio e para garantir o acesso à maioria das universidades brasileiras (notadamente as públicas) e nos parâmetros curriculares nacionais.

À rubrica é associada um conjunto de critérios que avalia o aluno em cada uma das quatro habilidades estudadas nesta pesquisa. Os alunos recebem uma avaliação que pode ser excelente, boa, satisfatória e deficiente, de acordo com os seguintes critérios:

1. Proposto um problema relacionado ao processo de **modelagem**, no qual é necessária a detecção de variáveis e relações que estabelecem um modelo matemático, bem como a percepção de padrões que se repetem em situações cotidianas, científicas e matemáticas, além da capacidade de reconstrução mental do referido problema é atribuída a avaliação:

   Excelente: se o aluno resolve adequadamente o problema que envolve o processo de modelagem;

   Boa: se o aluno resolve adequadamente 75% do problema;

   Satisfatória: se o aluno resolve de maneira apropriada 50% do problema;

   Deficiente: se o aluno tem desempenho inferior.

2. O aluno usa corretamente o processo de **raciocínio** para resolver o problema de situação que enfrenta, sentindo regularidades e relacionamentos, fazendo previsões e suposições, ou justificando argumentos e raciocínios:

   Excelente: se o aluno usa corretamente o processo de raciocínio;

   Boa: se o aluno usa adequadamente 75% o processo de raciocínio do problema;

[1] Devido a evasão escolar, houve variações na quantidade de alunos por grupo.

Satisfatória: se o aluno resolve de maneira apropriada 50% do problema;

Deficiente: se o aluno tem desempenho inferior.

3. O aluno **resolve o problema** em situações que requerem estratégias de implantação para interpretar as declarações dadas, para encontrar resultados e para verificar esses resultados:

   Excelente: se o aluno resolve corretamente o problema;

   Boa: se o aluno resolve adequadamente 75% do problema;

   Satisfatória: se o aluno resolve de maneira apropriada 50% do problema;

   Deficiente: se o aluno tem desempenho inferior.

4. O aluno executa facilmente **procedimentos algorítmicos**, percebendo os conceitos sobre os quais eles se baseiam e reconhecendo quando você pode aplicar uma dada operação técnica ou matemática:

   Excelente: se o aluno executa rapidamente;

   Boa: se o aluno executa com rapidez 75% do problema;

   Satisfatória: se o aluno executa rapidamente 50% do problema;

   Deficiente: se o aluno tem desempenho inferior.

Para inferir sobre a rubrica, foram aplicados os mesmos questionários, tanto do grupo de controle quanto no grupo experimental.

4.4 Área de Intervenção

Para o grupo experimental foram construídas e aplicadas em salas de aula abordagens com base no emprego de Modelagem Matemática para ensinar um conceito matemático, enquanto que, para o grupo de controle foi empregada a abordagem convencional de ensino do mesmo conceito matemático, tomando como referência a abordagem do livro texto adotado pela escola.

Cabe ressaltar que as turmas escolhidas são compostas por alunos que, na sua maioria, tiveram aulas na primeira série do ensino médio com a professora que conduziu a pesquisa. Como a condução das aulas no ano anterior se deu de forma convencional, o grupo de controle não notou a diferença de abordagem, enquanto que o grupo experimental, sim, como será relatado no capítulo 7. A intervenção se deu por um período de dois meses em 4 horas/aula por semana em cada turma, a partir de agosto de 2018.

4.5 Análise dos dados

4.5.1 Análise quantitativa

Como dito anteriormente, foram aplicados os mesmos testes a ambos os grupos. Estes testes foram elaborados antes da intervenção e foram baseados em questões contidas tantos em exames nacionais de avaliação quanto em questões presentes em livros didáticos adotados pela escola.

A cada um desses testes, foi empregada a rubrica preparada a partir da definição conceitual de cada um dos processos matemáticos que os alunos devem desenvolver para se preparar para as avaliações nacionais prevista para o ensino médio. Considerando, para tal, as quatro habilidades em estudo na rubrica (modelagem, raciocínio, resolução de problemas, exercício).

Além da média geral dos processos avaliados, os resultados dos testes ofereceram informações sobre os quatro processos matemáticos avaliados nesta pesquisa.

Empregou-se análise estatística dos dados. Calculando-se a média e o desvio-padrão dos resultados de desempenho obtidos por cada grupo nos questionários aplicados.

Também foram aplicados dois questionários, um inicial, para todos as turmas, para diagnosticar o perfil da turma. E outro final, aplicado apenas aos alunos do grupo experimental, com intuito de colher impressões dos alunos após a intervenção.

4.5.2 Análise Qualitativa

A análise qualitativa se deu em dois momentos. Um contínuo que durou toda a intervenção e um pontual no final da intervenção.

O primeiro momento consistiu na observação e coleta de informações durante as aulas e avaliações e o segundo consistiu da análise de um questionário preenchido pelos alunos que participaram do experimento.

Neste capítulo foi apresentada a metodologia empregada na pesquisa. Como a metodologia escolhida foi implementada será descrito nos próximos capítulos.

Capítulo 5

Abordagem empregada para o grupo Experimental

Como descrito na metodologia, uma abordagem via modelagem matemática foi utilizada para apresentar os conceitos relacionados ao conteúdo de matrizes, desde a definição de matrizes até a apresentação das operações elementares, para o segundo ano do ensino médio. Esta escolha se deu por conta do calendário previsto em projeto, o qual teve que levar em consideração a aprovação no comitê de ética em pesquisa com vistas, claro, a garantir a segurança de toda a intervenção e, bem como, a possibilidade de disseminação dos resultados obtidos.

A intervenção empregou sequências didáticas por dois motivos, basicamente. Primeiro, para garantir a uniformidade de intervenção em ambas as turmas pertencentes ao grupo experimental e, em segundo, para facilitar o julgamento da banca avaliadora da dissertação. Pois, em uma sequência didática deve-se apresentar em detalhe cada passo da aula. Um outro ponto que pode ser considerado, mesmo não sendo o intuito inicial do trabalho, é que com o uso de sequências didáticas se abre a possibilidade de replicação da abordagem adotada por outros professores.

Durante a preparação da intervenção foi constatado que a maneira convencional de se apresentar os conceitos envolvendo o tema matrizes não é compatível para uma apresentação que visa o emprego de modelagem. Na apresentação de forma convencional, antes de se iniciar as operações matriciais, é dedicado um tempo considerável na apresentação de nomenclaturas e definições.

No caso da intervenção proposta, as definições envolvendo matrizes foram introduzidas durante o processo de modelagem. Ademais, até a apresentação das operações foi invertida, em vez de se considerar primeiro soma e subtração, na sequência apresentada optou-se por apresentar primeiro o conceito de multiplicação.

Esta mudança na ordem, quando comparada à forma convencional, se deu principalmente pela grande gama de aplicações cotidianas que envolvem multiplicação de matrizes, enquanto que a aplicação de soma fica muito restrita ao processo de se juntar informações dispersas em tabelas, como será apresentado na quinta etapa da sequência didática.

Nesta seção é apresentada a sequência didática que aborda o ensino de matrizes. Nesta sequência o professor, em sala de aula, conduz o aluno a modelar matematicamente situações-problema. No caso, o modelo matemático empregado fará uso do conceito de matrizes e suas operações elementares.

Cabe ressaltar que, durante a apresentação da sequência didática, o modo verbal empregado no texto será o imperativo, o mesmo modo empregado nos textos das sequências didáticas disponíveis no portal do professor do Ministério da Educação[1].

5.1 Sequência didática para o ensino de matrizes - via modelagem

Objetivos Pretende-se que o aluno, no final da sequência, saiba:

- Representar informações em matrizes.
- Compreender a simbologia e os termos empregados na representação por matrizes.
- Realizar operações de adição, multiplicação e transposição matricial.

Conteúdo Matrizes: representação, operações

Ano Segundo ano do ensino médio

Tempo estimado 16 horas/aula.

Material necessário

- Recortes de jornal/revista e/ou artigos de sites especializados.
- Opcional: Projetor e computador.

Desenvolvimento

1ª **Etapa**

Em grupos de cinco alunos, distribua textos abordando o tema que deseja coletar informações. No caso adotaremos textos extraídos de jornais, revistas ou sites que tratem de carros populares novos do mercado brasileiro. Como, por exemplo, o texto disponível em (4RODAS, 2018).

1 http://portaldoprofessor.mec.gov.br/

Solicite aos alunos que leiam os textos e que extraiam informações vinculadas aos carros constantes nos artigos, preenchendo a tabela 1, atribuindo valores de 1 a 5 a cada quesito, sendo 5 para ótimo e 1 para ruim.

Tabela 1 – Dados dos carros a serem preenchidos pelos alunos.

Modelo	Preço	Manutenção	Conforto	Beleza	Revenda
Ford KA					
Chevrolet Onix					
Hyundai HB20					
Volkswagen Gol					
Fiat UNO					
Renault Sandero					

Fonte: a própria autora.

Além dos textos entregue aos alunos, encoraje-os a discutir e apresentar suas impressões sobre os quesitos de cada carro e que, também, procurem por informações em outras fontes como, por exemplo, na Internet ou com pessoas que trabalhem em oficinas mecânicas.

Enquanto os grupos discutem os valores que colocarão em cada célula da tabela, questione sobre os critérios adotados para pontuar cada um dos quesitos. Também aproveite para introduzir os termos empregados na representação de matrizes, fazendo perguntas como, por exemplo:

- Na *linha* do Hyundai HB20, qual o valor vocês dariam para Beleza?
- Na *coluna* Conforto Interno, qual o carro foi melhor avaliado?
- Falta muito para terminar o preenchimento da *Matriz*?

Não se espera que os alunos terminem o preenchimento da tabela na primeira Etapa. De fato, nesta etapa se espera que haja uma grande interação entre os alunos e que o conhecimento prévio de cada aluno seja divulgado em sala para confronto com o conhecimento dos outros alunos, bem como com os do professor da disciplina. O ideal é que o aluno reflita sobre o tema fora de sala de aula, consultando outras fontes e/ou pessoas de seu convívio que possam lhe auxiliar a decidir os valores que melhor se aplicariam a cada quesito da tabela.

Contudo, ao final da aula, independente de toda a turma ter preenchido a tabela, os alunos devem estar familiarizados com os termos matemáticos empregados na etapa. A saber, linha, coluna e matriz.

$2^{\underline{a}}$ **Etapa**

Organize a turma como na primeira etapa. Projete ou escreva no quadro a tabela 2. Deve-se apresentar a tabela distanciando, propositadamente, tanto o cabeçalho quanto a primeira coluna e eliminando a célula que continha a palavra *Modelo*, quando comparada com a tabela 1.

Tabela 2 – Dados dos carros a ser apresentada pelo professor.

	Preço	Manutenção	Conforto	Beleza	Revenda
Ford KA					
Chevolet Onix					
Hyundai HB20					
Volkswagen Gol					
Fiat UNO					
Renault Sandero					

Fonte: a própria autora.

Abra uma discussão com a turma sobre o preenchimento que os grupos fizeram, procurando diagnosticar os locais/pessoas que consultaram para comporem os valores que atribuíram aos quesitos.

Uma vez que, na atividade em questão, foram empregados carros que se encontram entre os mais vendidos no Brasil, é de se supor que alguns alunos da turma tenham conhecimento de uso e isto pode agregar grande valor à discussão.

Dependendo do tamanho da turma e dos recursos computacionais que possua, preencha tabelas com as informações de mais de um grupo. Contudo, o preenchimento de apenas uma tabela já é suficiente para o prosseguimento da etapa.

Supondo que seja gerada a tabela 3.

Tabela 3 – Atribuição de valores aos quesitos.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ \hline 4 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ \hline 5 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 3 & 5 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}_{\;6x5}$$

Fonte: a própria autora

Durante o preenchimento da tabela, repita sempre as palavras linha e coluna, por exemplo:

- Na linha do Ford KA, vou atribuir 3 na coluna Revenda. Porque carros da Ford não são tão fáceis de se revender em Uberlândia.
- Na coluna Preço, acho que o mais barato entre todos é o Fiat UNO. Então, vou atribuir 5 na linha correspondente a este carro.

Também explique aos alunos que, por comodidade, será dado um nome a Tabela como, por exemplo, A. E que será anotada a quantidade de linhas e colunas da mesma. Indicando tais valores no canto inferior direito, primeiro o número de linhas da tabela, seguido do símbolo $\times$ e depois o número de colunas. No caso, seria $A_{6\times5}$.

Peça aos alunos que respondam o seguinte questionário, baseando suas respostas na tabela apresentada no quadro.

Situação Real

1. Por esta tabela, qual carro você acha o mais vantajoso em se adquirir?
2. Qual o critério você empregou para responder a questão anterior?
3. Este critério é o que você realmente adotaria se fosse comprar um carro?
4. Escolha 3 dentre cinco quesitos que você julga imprescindíveis. Dentre estes 3 quesitos, escolhidos, atribua pesos de prioridade a cada um, variando de 1 a 3. Sendo 1 para o menos importante e 3 para o mais importante.
5. Com os quesitos e pesos escolhidos no item anterior, qual carro seria mais vantajoso adquirir? Por quê?

Comentando o questionário

Na primeira pergunta, o mais natural será que os alunos somem os valores contidos na linha da tabela. O que acarretará que o carro da terceira linha, o Hyundai HB20, se apresente como o mais vantajoso.

Conduza os alunos a refletirem sobre o que eles preferem mais entre os quesitos, com perguntas do tipo:

- Beleza é algo que você valoriza mais que Revenda?
- Se você não pretende se desfazer do carro, por que se preocupar com a Revenda?
- Se você pretende ficar pouco tempo com o carro, o quesito manutenção é mesmo tão importante?

Com estes tipos de perguntas, consegue-se debater as questões de 1 a 2 e, desta forma, a turma já se encontrará apta para abordar as questões 4 e 5.

Separe três quesitos dos 5 presentes na tabela. Por exemplo, os quesitos Preço, Conforto e Revenda, atribuindo pesos 3, 1 e 2, e verifique como se comporta o Renault Sandero e o Hyundai HB20.

É uma conta muito simples. Mas, a compreensão da justificativa pode ser de difícil assimilação pelo aluno. Neste momento, para fazer com que os alunos compreendam a questão dos pesos, associe com a distribuição das notas feita pela escola, na qual os últimos semestres tem peso maior na nota final.

Nota atribuída ao Sandero: $4 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times 2 = 25$.

Nota atribuída ao HB20: $4 \times 3 + 4 \times 1 + 4 \times 2 = 24$.

Com esta atribuição de pesos o Renault Sandero se mostra mais vantajoso, quando analisados os três quesitos, em relação ao Hyundai HB20.

A partir da tabela 3, recorte apenas os valores correspondentes às colunas Preço, Conforto e Revenda, escrevendo no quadro da seguinte forma:

Modelo Real

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Explique que, a partir de agora, será empregada esta forma para representar Matrizes em matemática. Aproveite para informar que existem outras formas de fazê-lo como, por exemplo, empregando parênteses em vez de colchetes.

Argumente que também é possível representar os pesos atribuídos aos três quesitos como uma matriz e a represente para a turma.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ou, ainda,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

É natural que os alunos questionem por que dispor os pesos em uma coluna e não em uma linha. Uma abordagem que o professor pode empregar é o fato histórico associado, esclarecendo que o conceito de matrizes surgiu na tentativa de se abordar problemas de sistemas e transformações lineares (sem entrar no mérito do que é uma transformação linear) tais como, rotacionar elementos, transladar... conceitos que atualmente são muito aplicados em computação gráfica, por exemplo.

Explique que para determinar a nota final dos carros foi empregada multiplicação, como a seguir:

Modelo Matemático

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Preço & Conforto & Revenda \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} Pesos \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Destacando apenas as linhas do Hyundai HB20

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Preço & Conforto & Revenda \end{array} \\ \begin{bmatrix} ---- & ---- & ---- \\ ---- & ---- & ---- \\ 4 & 4 & 4 \\ ---- & ---- & ---- \\ ---- & ---- & ---- \\ ---- & ---- & ---- \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} Pesos \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} = 4 \times 3 + 4 \times 1 + 4 \times 2 = \begin{array}{c} Valor \\ \begin{bmatrix} ---- \\ ---- \\ 24 \\ ---- \\ ---- \\ ---- \end{bmatrix} \end{array}$$

Procedendo de forma análoga com o Renault Sandero:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Preço & Conforto & Revenda \end{array} \\ \begin{bmatrix} ---- & ---- & ---- \\ ---- & ---- & ---- \\ ---- & ---- & ---- \\ ---- & ---- & ---- \\ ---- & ---- & ---- \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} Pesos \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} = 4 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times 2 = \begin{array}{c} Valor \\ \begin{bmatrix} ---- \\ ---- \\ ---- \\ ---- \\ ---- \\ 25 \end{bmatrix} \end{array}$$

Prosseguindo para os demais carros, géra-se a seguinte representação:

Cálculos. Resultado Matemático

$$\begin{array}{ccc} Preço & Conforto & Revenda \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{6\times 3} \times \overset{Pesos}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1}} = \overset{Valor}{\begin{bmatrix} 20 \\ 24 \\ 24 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \end{bmatrix}_{6\times 1}}$$

Pergunte aos alunos:

Situação Real

1. E agora, qual o carro é melhor avaliado?

2. Este carro, melhor avaliado, lhe interessa? Por quê?

   Aos que responderem não:

   - Se a resposta dos alunos ao "Por que" envolver Beleza (ou outro item que não foi ponderado), esclareça que não foi levado em conta a Beleza do carro, nesta ponderação.
   - Se a resposta do alunos envolver Conforto (ou outro item que foi ponderado), esclareça que para atender o seu gosto uma nova ponderação deve ser feita.

Convide os alunos a analisarem qual a melhor opção de compra de veículo, se outros pesos forem adotados e/ou outros quesitos forem escolhidos.

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Distribua, no final da etapa, exercícios associados a etapa.

Ao final da etapa o aluno deve ser capaz de modelar problemas similares ao apresentado em formato matricial, bem como ser capaz de realizar a multiplicação de uma matriz por um vetor.

$3^{\underline{a}}$ **Etapa**

Fixando o aprendizado

Já não há mais a necessidade de configurar grupos. Disponha, portanto, a turma da maneira que lhe convier.

Após breve recapitulação do que foi trabalhado na etapa anterior, reproduza no quadro (ou projete) a última operação realizada na etapa anterior. Desta vez, exclua, intencionalmente, os cabeçalhos.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{6\times 3} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 20 \\ 24 \\ 24 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \end{bmatrix}_{6\times 1}$$

Situação Real

Questione os alunos:

- Se estes fizeram outras ponderações, diferentes da trabalhada na etapa passada, envolvendo os quesitos Preço, Conforto e Revenda.
- Qual o carro melhor avaliado nestes 3 quesitos, em suas ponderações, para estes quesitos.
- Quem fez escolha de outros 3 quesitos, que difira de pelo menos um dos quesitos da etapa anterior.
- Qual ponderação foi atribuída a cada quesito.
- Qual carro se mostrou mais vantajoso nesta atribuição e pesos.

Observação 1. Não se espera que o professor ouça as respostas de todas as perguntas de todos os alunos em sala de aula. Isto, de fato, já poderia ter ocorrido em tarefa distribuída à turma no final da etapa 2, a qual o professor pode solicitar a que os alunos lhe entreguem, antes do começo da terceira etapa.

Apresente na lousa (ou projete) a seguinte ponderação de valores, que é pouco diferente da ponderação tratada na etapa anterior.

Modelo Real

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times3+5\times2+3\times1 \\ 4\times3+4\times2+4\times1 \\ 4\times3+4\times2+4\times1 \\ 3\times3+4\times2+5\times1 \\ 5\times3+3\times2+3\times1 \\ 4\times3+5\times2+4\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 24 \\ 24 \\ 22 \\ 24 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Modelo Matemático + Cálculos

Realize as operações, multiplicando linha por coluna, passo-a-passo.

Pergunte à turma:

1. Para esta nova ponderação, houve alguma modificação significante em relação à anterior?
2. Se sim, qual(is)?

Comentando o questionário
Em âmbito geral, a nova ponderação não aponta outro carro com melhor avaliação. Continua o Renault Sandero sendo a melhor aquisição para os quesitos avaliados, nas duas ponderações. Há mudança nos piores carros, antes sendo apenas o Ford KA agora empatados o Ford KA e o Volskwagen Gol.
Mas, não queremos nos importar com o pior. Talvez, apenas por curiosidade. Queremos modelar o problema para identificar o melhor carro que atenda certos quesitos.

Para melhorar a comparação entre as duas ponderações, disponha a operação como a seguir:

Situação Real

$$\begin{array}{|l|} \hline \text{Ford KA} \\ \hline \text{Chevolet Onix} \\ \hline \text{Hyundai HB20} \\ \hline \text{Volkswagen Gol} \\ \hline \text{Fiat UNO} \\ \hline \text{Renault Sandero} \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{6\times3} \times \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 20 & 22 \\ 24 & 24 \\ 24 & 24 \\ 23 & 22 \\ 24 & 24 \\ 25 & 26 \end{bmatrix}_{6\times2}$$

Enfatize com os alunos a posição em que cada elemento é colocado na última matriz. Reforçando o conceito de multiplicação de matrizes, onde os elementos da primeira linha são multiplicados com os das colunas da segunda matriz e, em seguida, somados.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Preço & Conforto & Revenda \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{6\times3} \end{array} \times \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Peso\,1 & Peso\,2 \end{array} \\ \begin{array}{r} Preço \\ Conforto \\ Revenda \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times2} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Valor\,1 & Valor\,2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 22 \\ 24 & 24 \\ 24 & 24 \\ 23 & 22 \\ 24 & 24 \\ 25 & 26 \end{bmatrix}_{6\times2} \end{array}$$

Argumente com os alunos sobre como as dimensões das duas primeiras matrizes produzem a dimensão da matriz resultante, neste momento resgate as atribuições das linhas e das colunas.

Realize questionamentos que instiguem o aluno a identificar como cada elemento da matriz final é obtido. Insira uma nova ponderação, desta vez, juntamente com as outras duas.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Pr. & Con. & Rev. \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{r} Pr. \\ Con. \\ Rev. \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 22 & 3\times2+5\times2+3\times3 \\ 24 & 24 & 4\times2+4\times2+4\times3 \\ 24 & 24 & 4\times2+4\times2+4\times3 \\ 23 & 22 & 3\times2+4\times2+5\times3 \\ 24 & 24 & 5\times2+3\times2+3\times3 \\ 25 & 26 & 4\times2+5\times2+4\times3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 22 & 25 \\ 24 & 24 & 28 \\ 24 & 24 & 28 \\ 23 & 22 & 29 \\ 24 & 24 & 25 \\ 25 & 26 & 30 \end{bmatrix} \begin{array}{|l|} \hline \text{Ford KA} \\ \hline \text{Chevolet Onix} \\ \hline \text{Hyundai HB20} \\ \hline \text{Volkswagen Gol} \\ \hline \text{Fiat UNO} \\ \hline \text{Renault Sandero} \\ \hline \end{array}$$

Neste momento, será possível identificar se os alunos estão confusos ao executar as multiplicações. Portanto, nomear tanto as colunas da primeira matriz quanto as linhas da segunda matriz é muito importante neste momento, pois, permite ao aluno evidenciar que se está multiplicando o valor do quesito pelo peso dado àquele quesito. Isto é, Preço com preço, conforto com conforto e revenda com revenda.

Sempre que surgir dúvidas dos alunos, é interessante que o professor procure associar o modelo/conceito matemático ao problema inicial.

Ao final da etapa o aluno deve ser capaz de modelar problemas similares ao apresentado em formato matricial, bem como ser capaz de realizar multiplicações de matrizes.

4ª **Etapa**

Nesta etapa será trabalho o conceito de transporta de uma matriz. Um novo modelo real será utilizado.

Disponha a turma em sala da maneira que lhe convier. Após breve recapitulação do que foi trabalhado na etapa anterior, proponha o seguinte exercício:

Uma distribuidora de madeiras possui em estoque madeiras de diferentes preços e quantidades. As peças de madeira são separadas em três lotes para cada tipo de madeira. Cada lote representa a quantidade de tábuas por metros (m) de cada tipo de madeira, conforme a matriz M a seguir:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Peroba Rosa} \\ \text{Cambará} \\ \text{Guajará} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Lote 1} & \text{Lote 2} & \text{Lote 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 750 & 526 & 300 \\ 200 & 127 & 300 \\ 250 & 750 & 750 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sendo que o preço de cada tipo de madeira por lote é dado pela matriz P, a seguir:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Peroba Rosa} \\ \text{Cambará} \\ \text{Guajará} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Lote 1} & \text{Lote 2} & \text{Lote 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$1,80 & \$1,95 & \$3,00 \\ \$1,42 & \$1,50 & \$2,50 \\ \$0,95 & \$1,10 & \$2,00 \end{bmatrix} \end{array}$$

Seria útil determinar o produto $M \times P$? O que o valor da célula $[MP]_{11}$ representa?

Esta parte é crucial para a introdução do conceito de matriz transposta.

Ao responder a questão deve-se observar que a célula $[MP]_{11}$ vai combinar o preço de três lotes de tábuas de Peroba Rosa com os valores de três tipos de madeiras contidas no Lote 1, o que não tem o menor sentido.

Modelo Real

Pergunte à turma:

E se trocarmos as posições dos elementos da matriz P? Isto é, se transpormos as linhas no lugar das colunas?

Vejamos:

A matriz P, original, é:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Lote 1} & \text{Lote 2} & \text{Lote 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Peroba Rosa} \\ \text{Cambará} \\ \text{Guajará} \end{array} & \begin{bmatrix} \$1,80 & \$1,95 & \$3,00 \\ \$1,42 & \$1,50 & \$2,50 \\ \$0,95 & \$1,10 & \$2,00 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ou, transpormos os valores da primeira linha no lugar da primeira coluna, teremos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Peroba Rosa} & \underline{\hspace{2cm}}\text{-} & \underline{\hspace{2cm}} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Lote 1} \\ \text{Lote 2} \\ \text{Lote 3} \end{array} & \begin{bmatrix} \$1,80 & ------ & ------ \\ \$1,95 & ------ & ------ \\ \$3,00 & ------ & ------ \end{bmatrix} \end{array}$$

Ao transpormos os valores da segunda linha no lugar da segunda coluna, e acrescentarmos a matriz anterior, teremos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Peroba Rosa} & \text{Cambará} & \underline{\hspace{2cm}} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Lote 1} \\ \text{Lote 2} \\ \text{Lote 3} \end{array} & \begin{bmatrix} \$1,80 & \$1,42 & ------ \\ \$1,95 & \$1,50 & ------ \\ \$3,00 & \$2,50 & ------ \end{bmatrix} \end{array}$$

Por fim, ao transpor os valores da terceira linha no lugar na terceira coluna, teremos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Peroba Rosa} & \text{Cambará} & \text{Guajará} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Lote 1} \\ \text{Lote 2} \\ \text{Lote 3} \end{array} & \begin{bmatrix} \$1,80 & \$1,42 & \$0,95 \\ \$1,95 & \$1,50 & \$1,10 \\ \$3,00 & \$2,50 & \$2,00 \end{bmatrix} \end{array}$$

É importante que seja feito, linha por linha, a transposição. Projete ou escreva na lousa a matriz original e a matriz que receberá a transposta.

Modelo Matemático

Depois de transpor os valores, nomeie a nova matriz. Isto é, diga em sala que a matriz obtida pela transposição das linhas para as colunas é denominada **Matriz Transposta** da matriz original e recebe a letra T super-escrita. Por exemplo, no caso da Matriz P a transposta de P, denotada por P^T, é dada por:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Lote 1} \\ \text{Lote 2} \\ \text{Lote 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Peroba Rosa} & \text{Cambará} & \text{Guajará} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$1,80 & \$1,42 & \$0,95 \\ \$1,95 & \$1,50 & \$1,10 \\ \$3,00 & \$2,50 & \$2,00 \end{bmatrix} \end{array}$$

Agora sim, a turma poderá entender melhor a questão feita acima. Portanto, repita a pergunta:

E se trocarmos as posições dos elementos da matriz P? Isto é, se transpormos as linhas no lugar das colunas?

Adicione a nova pergunta: O que representaria o valor da célula $[MP^T]_{11}$?

Resultado Matemático: Cálculos

Comentando a resposta:
A turma tem que se convencer de que agora terá um sentido prático a multiplicação das duas matrizes. Por isso, recorrer ao problema original é um caminho apropriado. Assim sendo, reescreva as matrizes no quadro, ou projete, com as informações das linhas e colunas, como a seguir:

$$\begin{array}{c} \\ \text{PR} \\ \text{Cam.} \\ \text{Gua.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{L1} & \text{L2} & \text{L3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$1,80 & \$1,42 & \$0,95 \\ \$1,95 & \$1,50 & \$1,10 \\ \$3,00 & \$2,50 & \$2,00 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} \\ \text{L 1} \\ \text{L 2} \\ \text{L 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{PR} & \text{Cam.} & \text{Gua.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 750 & 526 & 700 \\ 200 & 127 & 300 \\ 250 & 750 & 750 \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$\begin{bmatrix} \$1.875,50 & \$1.839,64 & \$2.398,50 \\ \$2.037,50 & \$2.041,20 & \$2.640,00 \\ \$3.250,00 & \$3.395,50 & \$4.350,00 \end{bmatrix}$$

A célula 11 representa o valor total de todas as peças de Peroba Rosa existentes na distribuidora de madeiras.

Pergunte à turma:

1. O que representa o valor da célula $[MP^T]_{22}$?
2. O que representa o valor da célula $[MP^T]_{33}$?

As respostas dadas às duas questões acima são similares à resposta dada para a célula $[MP^T]_{11}$. E é esperado que a turma responda de pronto.

Situação Real

Contudo, se for perguntado aos alunos o que representa o valor da célula $[MP^T]_{12}$, por exemplo, estes também devem se atentar para o fato de não haver um significado para tal valor. Afinal, para produzir $[MP^T]_{12}$ são multiplicados os preços de três lotes de Peroba Rosa com a quantidade nos lotes de Cambará.

O mesmo raciocínio pode ser empregado para os demais valores que não estão na diagonal principal. Aproveite o momento para definir diagonal principal e secundária de uma matriz quadrada.

Ao final desta etapa os alunos devem estar aptos a transpor matrizes e compreender que a associação dos elementos vinculados em uma matriz influencia no momento de se realizar a multiplicação entre matrizes, bem como quais são as diagonais de uma matriz.

$5^{\underline{a}}$ **Etapa**

Nesta etapa será apresentado à turma o conceito de soma e subtração de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar.

Comece a aula apresentando o texto da revista Super-interessante disponível em Bargas (2018).

Discuta com a turma as informações do artigo. Recomenda-se que a discussão seja mais voltada para coletar informações dos alunos à respeito do tema. Afinal, redes sociais é um tema bastante conhecido pelos jovens.

Para aumentar o nível de interação da turma, projete, ou imprima e entregue para os alunos, a imagem do vídeo presente no canal YouTube do youtuber Whinderson Nunes, cf. Figura 10.

Figura 10 – Vídeo do Canal YouTube whinderssonnunes.

Fonte: <https://youtu.be/ALkEj7c8e-c>. Acessado em: setembro de 2018.

Pergunte à turma:

1. Quantas visualizações o vídeo intitulado "O Brasil que eu quero pra mim" possui?
2. Quantos Gostei[2] o video recebeu?
3. Quantos Não Gostei[3] o video recebeu?
4. Quantos inscritos há no canal whinderssonnunes?

Comentando o questionário:

1. São 10.938.131 visualizações.
2. É o número que acompanha o sinal de polegar para cima. No caso, o valor é abreviado e está representado por 2,1MI. Ou seja, 2.100.000.
3. É o número que acompanha o sinal de polegar para baixo. No caso, o valor é abreviado, e está representado por 14MIL. Ou seja, 14.000.
4. Os inscritos são 31MI. Ou seja, 31.000.000.

É interessante que o professor comente, rapidamente, a diferença entre MI e MIL na abreviação empregada, bem como, que as pessoas se inscrevem no Canal e não no vídeo.

Realidade Situação e Modelo Real

Apresente, a seguinte situação-problema:

Um youtuber possui dois canais de vídeo no YouTube e necessita realizar controle das informações destes canais.
O youtuber aborda 3 assuntos em seus canais e, por conta da diferença de perfil dos usuários que acessam cada um dos canais, construiu dois vídeos para cada assunto.
Os assuntos abordados são: Sono e qualidade de vida, alimentação saudável e exercícios para a boa forma.
Quanto ao perfil do usuário de cada canal, estes se diferem basicamente pela faixa etária. O Canal 1 é voltado a adolescentes entre 14 e 18 anos e o Canal 2 é voltado a adultos de 19 a 40 anos.
Após um mês de publicação, o youtuber coletou as seguintes informações em seus dois Canais.

[2] Também conhecido por *Likes*
[3] Também conhecido por *Deslikes*

Visualizações: Assunto 1, Canal 1= 11,2MIL; Assunto 2, Canal 1= 5MIL; Assunto 3, Canal 1= 7MIL; Assunto 1, Canal 2= 10MIL; Assunto 2, Canal 2=8MIL ; Assunto3, Canal 2= 3MIL;

Gostei: Assunto 1, Canal 1= 2MIL; Assunto 2, Canal 1= 1,1MI; Assunto 3, Canal 1= 1,4MIL; Assunto 1, Canal 2=2MIL ; Assunto 2, Canal 2= 1,6MIL ; Assunto 3, Canal 2= 600;

Não Gostei: Assunto 1, Canal 1= 200; Assunto 2, Canal 1= 102; Assunto 3, Canal 1= 131; Assunto 1, Canal 2= 177; Assunto 2, Canal 2= 140; Assunto 3, Canal 2= 90;

O youtuber gostaria de organizar melhor as informações coletadas de forma a facilitar a análise dos dados. Separando-as por Canais.
Ademais, gostaria de saber o total de Visualizações, de Gostei e de Não Gostei de cada assunto nos dois canais. Bem como, qual a diferença entre os três indicadores dos canais.
Como podemos auxiliar o youtuber?

Observação 2. O texto anterior será consultado constantemente durante a etapa. Recomenda-se, portanto, que esteja visível durante toda a aula. Se for usar o projetor, que a imagem possa ser acessada sempre que necessário.

Ao apresentar a situação-problema, espera-se que os alunos recomendem o uso de matrizes para modelá-lo. Afinal, este é o tema que está sendo abordado desde a primeira etapa.

No momento da modelagem foque, portanto, nas vantagens de se modelar o problema empregando matrizes, chamando a atenção para a facilidade de se identificar os dados extraídos do problema. Isto pode ser feito, de forma dialogada com a turma, da seguinte maneira:

1. Que tal representarmos os dados, obtidos pelo youtuber, em formato de tabela (Matrizes) como fizemos nas aulas anteriores?

2. Vez que o youtuber gostaria de ter a visão por canal, devemos ter duas matrizes. Uma para cada canal. Concordam?

3. Que valores serão associados às linhas e às colunas de cada matriz?

Comentando o questionário:

1. Tal pergunta, indutora, deve ser tratada para além da obviedade intrínseca. Neste

caso, a intenção é a de instigar o surgimento, por parte dos alunos, da pergunta "Como?".

Tão logo surja o "Como?", passe à segunda pergunta.

2. Para a condução da segunda pergunta, que ainda não responde à primeira, espere pela concordância da turma e desenhe na lousa ou projete a seguinte imagem:

$$A = \begin{array}{cc} & \text{????????????????} \\ \begin{array}{c} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{array} & \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{cc} & \text{????????????????} \\ \begin{array}{c} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{array} & \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix} \end{array}$$

3. A resposta à questão será dada para substituir os símbolos de interrogação presentes na representação matricial acima.

   A associação com as etapas anteriores é bem útil para se criar um paralelo. Isto pode ser feito ainda por argumentação do tipo:

   a) Nas matrizes que vimos na aula anterior, como distribuímos os dados por linhas e colunas?

      Não foi destinado o espaço das linhas para a informação do tipo de madeira e o de colunas para as informações de lote? Ou vice e versa, quando transpomos os valores?

      Pois, então! Se tivermos dois grupos de informações podemos criar uma associação para as linhas com um dos grupos e uma outra associação para as colunas com o outro grupo.

   b) No caso do problema, em quais grupos podemos associar as informações que foram disponibilizadas?

      Pela própria forma como o youtuber coletou as informações pode-se perceber que um dos grupos tem que conter Visualizações, Gostei e Não Gostei. Enquanto que outro deveria conter os **Assuntos**.

      Se persistir dúvida, apresente o enunciado do problema novamente.

Substitua, pois, os símbolos de interrogação da seguinte forma:

$$\text{Canal 1} = \begin{array}{c} \\ \text{Visualizações} \\ \text{Gostei} \\ \text{Não Gostei} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Assunto 1} & \text{Assunto 2} & \text{Assunto 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Canal 2} = \begin{array}{c} \\ \text{Visualizações} \\ \text{Gostei} \\ \text{Não Gostei} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Assunto 1} & \text{Assunto 2} & \text{Assunto 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Ou, ainda, assim:

$$\text{Canal 1} = \begin{array}{c} \\ \text{Assunto 1} \\ \text{Assunto 2} \\ \text{Assunto 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Visualizações} & \text{Gostei} & \text{Não Gostei} \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Canal 1} = \begin{array}{c} \\ \text{Assunto 1} \\ \text{Assunto 2} \\ \text{Assunto 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Visualizações} & \text{Gostei} & \text{Não Gostei} \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Ambas maneiras de apresentar estão corretas. Uma representação é apenas a transposta da outra. E, dependendo do tipo de aplicação (multiplicação, por exemplo), pode haver casos de se usar as duas representações: uma para o Canal 1 e outra para o Canal 2. Praticamente se encerra aqui a modelagem. Falta, somente, inserir os valores. Como indicado a seguir :

$$\text{Canal 1} = \begin{array}{c} \\ \text{Visualizações} \\ \text{Gostei} \\ \text{Não Gostei} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Assunto 1} & \text{Assunto 2} & \text{Assunto 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 11,2MIL & 5MIL & 7MIL \\ 2MIL & 1,1MIL & 1,4MIL \\ 200 & 102 & 131 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Canal 2} = \begin{array}{c} \\ \text{Visualizações} \\ \text{Gostei} \\ \text{Não Gostei} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Assunto 1} & \text{Assunto 2} & \text{Assunto 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10MIL & 8MIL & 3MIL \\ 2MIL & 1,6MIL & 600 \\ 177 & 140 & 90 \end{bmatrix} \end{array}$$

Modelo Matemático

Tem-se, portanto, um modelo matemático para organizar as informações do problema.

Restam duas questões a primeira sendo: "Como ajudar o youtuber a obter o total de Visualizações, Gostei e Não Gostei?"

Recomenda-se aqui que o professor realmente faça apenas a pergunta acima. Pois, é intuitivo que o emprego de adição convencional se aplicaria de forma similar em matrizes. E os alunos surgirão com respostas do tipo: "Ué, basta somar!!"

Novamente, o professor deve se importar com o "Como".

Pergunte: Vocês querem dizer que basta fazer isto?

Projete, ou escreva no quadro, a seguinte representação:

Cáculos

$$\text{Canal 1} = \begin{array}{r} \\ \text{Visualizações} \\ \text{Gostei} \\ \text{Não Gostei} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Assunto 1} & \text{Assunto 2} & \text{Assunto 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 11,2MIL & 5MIL & 7MIL \\ 2MIL & 1,1MIL & 1,4MIL \\ 200 & 102 & 131 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$+ \qquad\qquad + \qquad + \qquad +$$

$$\text{Canal 2} = \begin{array}{r} \\ \text{Visualizações} \\ \text{Gostei} \\ \text{Não Gostei} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Assunto 1} & \text{Assunto 2} & \text{Assunto 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10MIL & 8MIL & 3MIL \\ 2MIL & 1,6MIL & 600 \\ 177 & 140 & 90 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{c} \text{Canal 1} \\ + \\ \text{Canal 2} \end{array} = \begin{array}{r} \\ \text{Visualizações} \\ \text{Gostei} \\ \text{Não Gostei} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Assunto 1} & \text{Assunto 2} & \text{Assunto 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 11,2MIL+10MIL & 5MIL+8MIL & 7MIL+3MIL \\ 2MIL+2MIL & 1,6MIL+1,1MIL & 1,4MIL+600 \\ 177+200 & 102+140 & 131+90 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\text{Canal 1} + \text{Canal 2} = \begin{array}{r} \\ \text{Visualizações} \\ \text{Gostei} \\ \text{Não Gostei} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Assunto 1} & \text{Assunto 2} & \text{Assunto 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 21,2MIL & 13MIL & 10MIL \\ 4MIL & 2,7MIL & 2MIL \\ 377 & 242 & 221 \end{bmatrix} \end{array}$$

Realidade

E pergunte: Na tabela final, é apresentado o que o youtuber desejava?

Se a turma se convenceu de que a tabela final representa o desejo do youtuber, então o professor pode passar a formalização matemática de soma de matrizes.

Se não, então argumentos devem ser empregados para mostrar que está correto. Na prática, em turmas maiores pode haver alunos que mal interpretem (até mesmo não compreendam) o enunciado do problema.

De forma análoga ao que se fez para multiplicação de matrizes, enfatize a importância da ordem das matrizes no processo de soma, as duas matrizes devem possuir a mesma dimensão.

A última questão do problema era determinar a diferença entre os três indicadores dos canais. Espera-se que, se bem compreendido o conceito de soma, os alunos proponham a aplicação de subtração em analogia ao que acontece com diferença de números.

$$\text{Canal 1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{Assunto 1} & \text{Assunto 2} & \text{Assunto 3}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{Visualizações}\\ \text{Gostei}\\ \text{Não Gostei}\end{array} & \begin{bmatrix} 11,2MIL & 5MIL & 7MIL \\ 2MIL & 1,1MIL & 1,4MIL \\ 200 & 102 & 131 \end{bmatrix}\end{array}$$

$$- \qquad\qquad - \qquad - \qquad -$$

$$\text{Canal 2} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{Assunto 1} & \text{Assunto 2} & \text{Assunto 3}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{Visualizações}\\ \text{Gostei}\\ \text{Não Gostei}\end{array} & \begin{bmatrix} 10MIL & 8MIL & 3MIL \\ 2MIL & 1,6MIL & 600 \\ 177 & 140 & 90 \end{bmatrix}\end{array}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c}\text{Canal 1}\\ - \\ \text{Canal 2}\end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{Assunto 1} & \text{Assunto 2} & \text{Assunto 3}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{Visualizações}\\ \text{Gostei}\\ \text{Não Gostei}\end{array} & \begin{bmatrix} 11,2MIL-10MIL & 5MIL-8MIL & 7MIL-3MIL \\ 2MIL-2MIL & 1,6MIL-1,1MIL & 1,4MIL-600 \\ 200-177 & 102-140 & 131-90 \end{bmatrix}\end{array}$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{Canal 1} - \text{Canal 2} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{Assunto 1} & \text{Assunto 2} & \text{Assunto 3}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{Visualizações}\\ \text{Gostei}\\ \text{Não Gostei}\end{array} & \begin{bmatrix} 1,2MIL & -3MIL & 4MIL \\ 0 & 500 & 800 \\ 33 & -38 & 41 \end{bmatrix}\end{array}$$

Pergunte à turma: A matriz final contém as informações que o youtuber desejava?

Aborde as respostas de forma análoga à abordagem empregada para a soma de matrizes, enfatizando a importância da ordem da matriz.

Ao final da etapa, o aluno deve estar familiarizado com as operações de soma e subtração de matrizes.

Avaliação para a sequência Recomenda-se que a avaliação dos alunos seja feita de forma contínua. E que ao final sejam abordadas questões presentes em exames vestibulares que contenham o tema matriz.

Referência consultada para a sequência

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e aplicações*. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2016.

BURRILL, G. *et al. Advanced Modeling and Matrices*. New York: Dale Seymour, 1998. (Advanced mathematics). ISBN 9781572322592.

FAVERO, L. P.; BELFIORE, P. *Pesquisa Operacional para cursos de Engenharia*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

Capítulo 6

Teste empregado na intervenção

Neste capítulo será apresentada a avaliação da intervenção. Conforme consta no capítulo 4, um mesmo teste foi elaborado e aplicado nas 4 turmas do grupo controle e experimental.

Visando melhor apresentar as intenções por traz de cada questão do teste, além de se colocar o enunciado também é inserida a explicação do por que de tal questão e quais os quesitos da rubrica esta explora.

Para facilitar a análise estatística foi atribuída nota de 0 a 10 a cada elemento considerado na rubrica.

Tabela 4 – Atribuição de nota a cada critério da rubrica.

Critério	**Nota**
Excelente	10,0
Boa	7,5
Satisfatória	5,0
Deficiente	0,0

Fonte: A autora.

Questão 1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, o resultado da operação $A.B$ é:

a) $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Solução 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4+3.1 & 0.(-1)+3.2 \\ 0.4+(-2).1 & 0.(-1)+(-2).2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & -1+6 \\ 0-2 & 0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Será considerada nota parcial apenas no caso de aluno cometer erros nas operações aritméticas elementares.
Rubrica(s): Exercício.
Intenção: Verificar se o aluno sabe executar o algoritmo de multiplicação de matrizes.

Questão 2. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ então $A + B^t$ é igual a:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Solução 2. $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$$A + B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+2 \\ 3+5 & 2-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Se o aluno conseguiu determinar a transposta de B, atribuir nota 5,0.
2. Se aluno conseguiu realizar a soma, mesmo errando a transposição atribuir 5,0.

Nota inferior a 5,0 para cada um dos itens acima somente se o aluno errou em transcrever valores ou se errou ao realizar operações aritméticas elementares.
Rubrica(s): Exercício
Intenção: Similar a anterior, se deseja verificar se o aluno sabe executar os algoritmos de adição e o de transposição de matrizes.

Questão 3. (ESPM-SP) A distribuição dos n moradores de um pequeno prédio de apartamentos é dada pela matriz $\begin{bmatrix} 4 & x & 5 \\ 1 & 3 & y \\ 6 & y & x+1 \end{bmatrix}$, onde cada elemento a_{ij} representa a quantidade de moradores do apartamento j do andar i.

Sabe-se que, no 1^o andar, moram 3 pessoas a mais que no 2^o e que os apartamentos de número 3 comportam 12 pessoas ao todo. O valor de n é:

a) 31 b) 32 c) 33 d) 34

Solução 3. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x & 5 \\ 1 & 3 & y \\ 6 & y & x+1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{cases} 4+x+5=3+1+3+y \\ 5+y+x+1=12 \end{cases} = \begin{cases} 9+x=7+y \\ y+x=6 \end{cases} = \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$x=2$ e $y=2$

Logo, substituindo os valores encontrados na matriz do enunciado e somando-se todos os elementos da matriz encontra-se que $n=32$.

Para a resolução do problema, que consiste em construir o sistemas linear de duas equações e duas incógnitas, atribua 10 se o aluno conseguir construí-lo corretamente. Reduzindo o valor da nota atribuída caso por erros de transcrição. Se o aluno não conseguiu identificar corretamente as posições de linha e coluna da matriz, atribua nota 0(zero).

Para a parte de Exercício, independente se o aluno elaborou construiu o sistema corretamente, atribua 10 se ele conseguiu resolver o sistema linear. Reduzindo o valor atribuído se houver erros na realização das operações aritméticas elementares.

Rubrica(s): Exercício e Resolução de problema

Intenção: Avaliar se o aluno consegue resolver problemas básicos que envolvem os conceitos primitivos de matrizes. No caso, se o aluno identificou os elementos de linha e coluna, bem como, se procura verificar se o aluno consegue associar a resolução do problema com conteúdo previamente ministrado na disciplina, no caso, sistemas lineares.

Questão 4. (ENEM 2012) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4x4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1^0 Bimestre	2^0 Bimestre	3^0 Bimestre	4^0 Bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Portugues	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Solução 4. Resposta é a letra d.
Para a atribuição da nota, verificar se o aluno expressou seu raciocínio corretamente para a escolha da alternativa correta. Identificando:

1. Por que deveria escolher uma matriz de ordem 4x1.

2. Por que escolheu a matriz em que todos os elementos são iguais a $1/4$?

Atribuir nota 5,0 ao primeiro item. Atribuir nota 5,0 ao segundo item, independente da escolha feita no primeiro item. Não há que se pensar em reduzir a atribuição da nota para aquém de 5,0.
Exemplo de raciocínio esperado: Devemos multiplicar linha por coluna, como a matriz tem 4 colunas a matriz que deve-se multiplicar deve ter 4 linhas , assim descartamos os itens a) e b) e como o ano tem 4 bimestres descartamos o item c), restando o item d) como correto.
Rubrica(s): Raciocínio.
Intenção: Verificar se o aluno raciocinou corretamente empregando o conceito de multiplicação de matrizes.

Questão 5. (UEL) Atualmente, com a comunicação eletrônica, muitas atividades dependem do sigilo na troca de mensagens, principalmente as que envolvem transações financeiras. Os sistemas de envio e recepção de mensagens codificadas chamam-se Criptografias. Uma forma de codificar mensagens é trocar letras por números, como indicado na tabela-código a seguir:

	1	2	3	4	5
1	Z	Y	X	V	U
2	T	S	R	Q	P
3	O	N	M	L	K
4	J	I	H	G	F
5	E	D	C	B	A

Na tabela-código, uma letra é identificada pelo número formado pela linha e pela coluna, nessa ordem. Assim, o número 32 corresponde à letra N. A mensagem M é dada por A+B=M, onde B é uma matriz fixada, que deve ser mantida em segredo e A é uma matriz enviada ao receptor legal, sendo o 0(zero) a ausência de letras ou espaço entre palavras.

José tuitava durante o horário do trabalho quando recebeu uma mensagem do seu chefe. De posse da matriz secreta e da tabela-código, ele decodificou a mensagem. O que a chefia informou a José?

Dados:

Mensagem do Chefe=

$$\begin{bmatrix} 12 & 20 & 13 & 8 & 50 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & 32 & 3 & 4 & 0 \\ 45 & 26 & 13 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 16 & 20 & 11 & 17 & 0 \\ 1 & 50 & 21 & 3 & 35 & 42 & 11 \end{bmatrix}$$

Matriz secreta=

$$\begin{bmatrix} 10 & 11 & 10 & 15 & -8 & 30 & -1 \\ 14 & 31 & 19 & 19 & -3 & -4 & 0 \\ 6 & -4 & 8 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 16 & 32 & 20 & -17 & 0 \\ 44 & -8 & 13 & 30 & 20 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

a) SORRIA VOCE ESTA SENDO ADVERTIDO

b) SORRIA VOCE ESTA SENDO FILMADO

c) SORRIA VOCE ESTA SENDO GRAVADO

d) SORRIA VOCE ESTA SENDO IMPRODUTIVO

Solução 5.

Mensagem decodificada $= A + B = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 13 & 8 & 50 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & 32 & 3 & 4 & 0 \\ 45 & 26 & 13 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 16 & 20 & 11 & 17 & 0 \\ 1 & 50 & 21 & 3 & 35 & 42 & 11 \end{bmatrix} +$

$$\begin{bmatrix} 10 & 11 & 10 & 15 & -8 & 30 & -1 \\ 14 & 31 & 19 & 19 & -3 & -4 & 0 \\ 6 & -4 & 8 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 16 & 32 & 20 & -17 & 0 \\ 44 & -8 & 13 & 30 & 20 & 10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 31 & 23 & 23 & 42 & 55 & 0 \\ 14 & 31 & 53 & 51 & 0 & 0 & 0 \\ 51 & 22 & 21 & 55 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 31 & 32 & 52 & 31 & 0 & 0 \\ 45 & 42 & 34 & 33 & 55 & 52 & 31 \end{bmatrix}$$

Ao decodificar, utilizando a tabela código, obtém-se: SORRIA VOCE ESTA SENDO FILMADO.

Para o raciocínio, verificar se o aluno justificou a escolha da matriz que seria a representante de A e qual seria a representante de B. Atribua nota 10,0. Importante notar que pode haver casos em que o aluno realize a operação sem se preocupar com a ordem. Afinal, a soma de matrizes é uma operação comutativa, desde que seja justificado que não importa a ordem da escolha. Neste caso atribua nota 10,0.

Para a parte exercício, verificar se o aluno empregou corretamente o algoritmo de soma de matrizes. Atribuindo nota 10,0. Reduzindo este valor se ocorreram erros de soma básica. Para a parte de resolução de problemas, verificar se o aluno interpretou corretamente o papel da tabela código. Conseguindo, assim, reescrever a mensagem decodificada. Atribua nota 10,0

Rubrica(s): Exercício. Resolução de problema. Raciocínio.

Intenção: Verificar se o aluno consegue raciocinar empregando o conceito de igualdade de matrizes se sabe operar algoritmo da soma de matrizes, e se consegue resolver problemas que exijam maior atenção.

Para as questões 6, 7 e 8 considere o seguinte enunciado:

Uma companhia possui duas fábricas. Uma destas fábricas é responsável pela produção de polímeros e está localizada em Recife. A outra está localizada em Manaus, sendo responsável pela produção de resina.

A fim de reduzir os custos logísticos, os produtos são enviados para um dos centros de distribuição, localizados em São Paulo e no Rio de Janeiro.

A partir dos centros de distribuição, os produtos são transportados para os clientes finais, localizados em Belo Horizonte, Joinville e Porto Alegre.

O custo unitário de produzir e transportar um produto de Manaus para São Paulo é de R$8,00 enquanto que o custo unitário para transportar de Manaus para o Rio de Janeiro é de R$10,00. Já o custo unitário a partir de Recife é R$ 7,00 para São Paulo e de R$ 6,00 para o Rio de Janeiro.

Depois de desembarcadas nos centros de distribuição, os produtos recebem tratamento antes de serem transportados para os consumidores finais. Os custos unitários de tratamento/transporte, a partir de São Paulo é de R$2,00 para Belo Horizonte, de R$3,00 para Joinville e de R$4,00 para Porto Alegre. Enquanto que o custo unitário de tratamento/transporte a partir do Rio de Janeiro é de R$1,00 para Belo Horizonte, R$ 4,00 para Joinville e de R$ 5,00 para Porto Alegre.

Questão 6. De forma a facilitar a apresentação dos custos relatados acima à chefia superior, o gestor da empresa necessita organizar as informações do primeiro trajeto (produção ao centro de distribuição) e do segundo trajeto (centro de distribuição ao consumidor).

Apresente uma forma de organizar as informações que seja de fácil compreensão?

Solução 6.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{São Paulo} & \text{Rio de Janeiro} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Manaus} \\ \text{Recife} \end{array} & \begin{bmatrix} R\$8,00 & R\$10,00 \\ R\$7,00 & R\$6,00 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Belo Horizonte} & \text{Joinville} & \text{Porto Alegre} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{São Paulo} \\ \text{Rio de Janeiro} \end{array} & \begin{bmatrix} R\$2,00 & R\$3,00 & R\$4,00 \\ R\$1,00 & R\$4,00 & R\$5,00 \end{bmatrix} \end{array}$$

Verificar se o aluno conseguiu identificar a possibilidade de associar as informações em forma de tabela/Matriz. Se assim o fizer, atribuir nota 10,0. Cabe ressaltar que há outros possibilidades de representação como, por exemplo, troca de linhas ou de colunas e transposição. A nota pode ser menor que 10,0 apenas no caso de o aluno transcrever erroneamente os valores do enunciado.

Rubrica(s): Modelagem.

Intenção: Verificar se consegue modelar problemas empregando o conceito de matriz.

Questão 7. Uma vez que as informações envolvem custos unitários. O gestor necessita determinar os custos totais para transportar das fábricas para os centros de distribuição. E fez a seguinte simulação:

Se a fábrica de Manaus produzir 500 unidades de polímeros e transportar tudo para São Paulo, levando nada para o Rio de Janeiro. E se, por outro lado, Recife produzir 300 unidades de resina, transportando 100 unidades para São Paulo e 200 unidades para o Rio de Janeiro.

Qual será o custo do transporte de Manaus para São Paulo e Rio de Janeiro e o custo de Recife para São Paulo e Rio? Represente as informações de forma similar a apresentada na questão anterior.

Solução 7.

$$\begin{bmatrix} 8,00 \times 500 & 10,00 \times 0 \\ 7,00 \times 100 & 6,00 \times 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000,00 & 0 \\ 700,00 & 1.200,00 \end{bmatrix}$$

Atribuir 10,0 ao aluno que representar cada célula da matriz como multiplicação escalar do preço por unidade pela quantidade de unidades produzidas.

Se o aluno represente a seguinte operação: $\begin{bmatrix} 8,00 & 10,00 \\ 7,00 \times 100 & 6,00 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 4000,00 & 0 \\ 700,00 & 1.200,00 \end{bmatrix}$, considerar 5,0 pela processo de modelagem.

Quanto ao raciocínio, verificar se o aluno testou as possibilidades de multiplicação de matrizes antes de se convencer que não se emprega a multiplicação de matrizes para se resolver a questão. Atribuir nota 10,0 ao aluno se foi detectado esta reflexão.

Quanto a resolução de problemas, verificar se o aluno extraiu corretamente as informações do enunciado da questão e se expressou que bastaria expor o resultado da multiplicação numa matriz 2×2. Se assim o fizer, atribua nota nota 10,0 ao quesito.

Quanto aos exercícios, verificar se o aluno realizou as multiplicações corretamente. Atribuindo nota 10,0, podendo reduzir a nota em caso de erros de operação ou transcrição errada de valores.

Rubrica(s): Modelagem, Raciocínio, Resolução de problemas e Exercício.

Intenção: Verificar se os alunos compreenderam o conceito de multiplicação de matrizes, particularmente o algoritmo de multiplicação.

Avaliar o raciocínio crítico do aluno durante o processo de produção do modelo matemático. Pois, nesse caso, é possível verificar que uma multiplicação deve ser aplicada contudo, tal multiplicação não é a empregada entre matrizes.

Questão 8. Das 600 unidades (entre polímeros e resinas) que chegaram em São Paulo, o gestor da empresa transportou 250 unidades para Joinville e 350 para Porto Alegre. Enquanto que as 200 unidades que chegaram no Rio de Janeiro foram todas transportadas para Belo Horizonte.

Considerando os custos de tratamento/transporte envolvidos no processo, qual será o custo para tratar/transportar dos centros de distribuição para os consumidores? Represente as informações de forma similar a apresentada na questão 8.

Solução 8.

$$\begin{bmatrix} R\$2,00\times 0 & R\$3,00\times 250 & R\$4,00\times 100 \\ R\$1,00\times 200 & R\$4,00\times 350 & R\$5,00\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 & 750,00 & 1.400,00 \\ 200,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Empregar os mesmos critérios empregados na questão 7.

Rubrica(s): Modelagem, Raciocínio, Resolução de problemas e Exercício.

Intenção: Os mesmos da questão 7.

Capítulo 7

Análise dos dados coletados

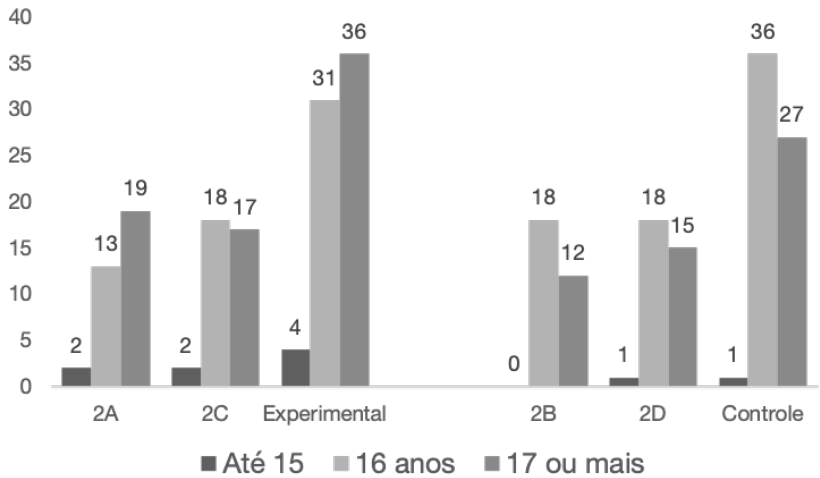
7.1 Questionário inicial

O questionário inicial foi utilizado para diagnosticar o perfil das turmas, conforme apêndice A. Tal questionário foi aplicado à turma tão logo o projeto de pesquisa obteve sua aprovação no comitê de ética.

Quanto ao sexo dos alunos, a distribuição entre masculino e feminino é próxima. Isto é, 30 alunos do sexo masculino (42%) e 42 do sexo feminino (58%), em um total de 72, para o grupo experimental. Enquanto 27 alunos do sexo masculino (41,5%) e 38 do sexo feminino (58,5%), em um total de 65 alunos. Quanto a faixa etária, o grupo experimental possui mais alunos com idade superior a 17, conforme Figura 11.

A maioria dos alunos é oriunda da mesma escola, em ambos os grupos, tendo ingressado na escola para cursar o primeiro ano do ensino médio em 2017 e obtiveram aprovação para cursar o segundo ano em 2018.

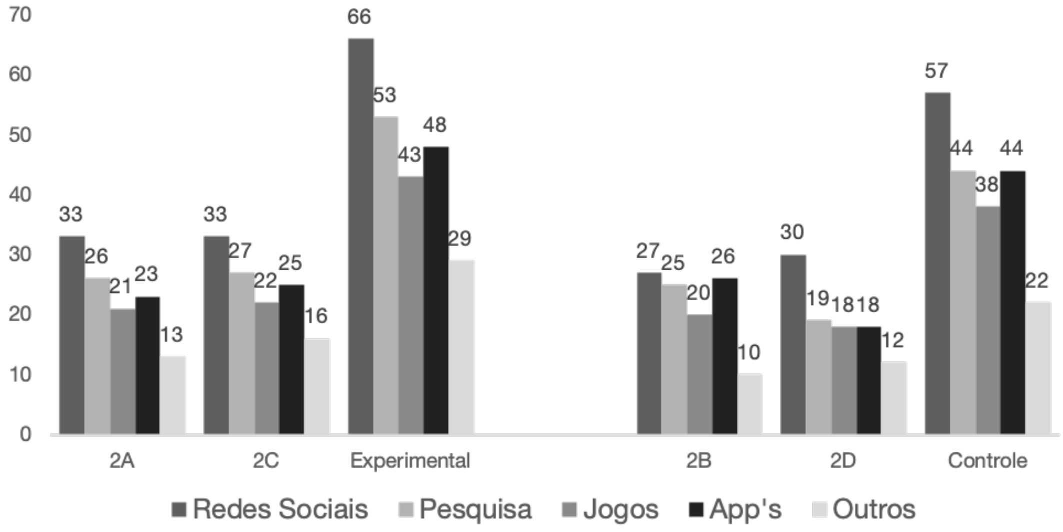
Figura 11 – Distribuição dos alunos por idade.



Fonte: A autora.

Quase a totalidade dos alunos, 95%, possui algum tipo de *Gadget*. Isto facilita, por exemplo, a utilização de sistemas. A maior parte dos alunos, em ambos grupos, navegam na internet para realizar atividades, conforme Figura 12.

Figura 12 – Como os alunos navegam pela internet



Fonte: A autora

Uma vez que a grande maioria dos alunos possuem *smartphones*, era de se supor que muitos usassem a calculadora destes aparelhos para realizar operações matemáticas. Muitos alunos conheciam e faziam uso de aplicativos. A maioria dos que responderam que utilizam aplicativos, alegaram utilizar o PhotoMath.

A escola está envolvida em variados projetos de pesquisa. Alguns desenvolvidos por grupos de trabalho formados por professores da escola, outros desenvolvidos pelos professores em virtude de seus trabalhos de pesquisa pessoal (mestrado, especialização...).

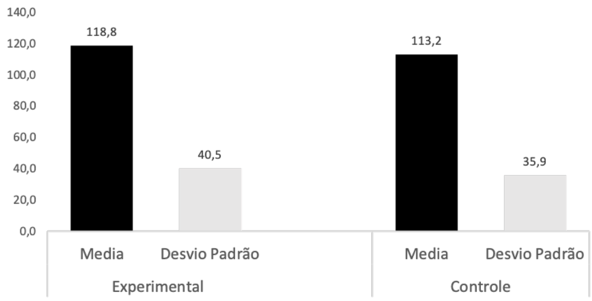
No entanto, 50% dos alunos não participou de nenhum projeto, tanto do grupo de controle quanto do grupo experimental. A alegação utilizada pelos alunos para justificar o não envolvimento em projetos é o temor de que o tempo dedicado a algum projeto poderá reduzir o tempo a ser dedicado aos estudos vestibulares.

7.2 Teste aplicado

Para a produção dos gráficos, as atribuições de pesos de cada questão foram atribuídas valores 0,0, 5,0, 7,5 ou 10,0, seguindo a pontuação prevista no gabarito (seção 6) e a conversão proposta na tabela 4. Todas as questões de todos os testes foram corrigidas pela professora da disciplina que, no caso, é a autora do presente trabalho, de forma a garantir a menor discrepância possível.

A Figura 13 mostra a média e o desvio padrão da nota obtida no teste pelos grupos controle e experimental após a intervenção. A nota máxima possível é de 170,0 pontos. Como mostrado na figura, não há uma diferença marcante nos resultados dos testes, pois, apesar da média ser maior para o grupo experimental, a diferença foi muito pequena. Ademais, o desvio padrão no grupo experimental é um pouco maior que no grupo controle.

Figura 13 – Análise comparativa da nota geral.

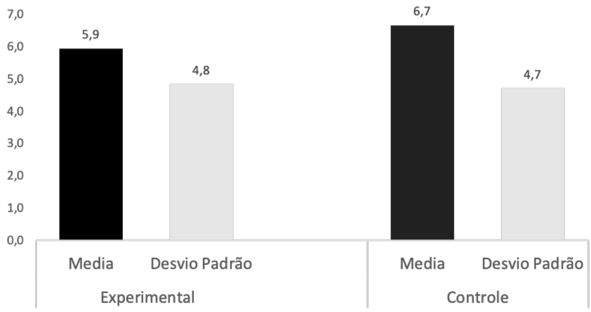


Fonte: A autora.

Isto mostra que, de maneira geral, tanto a abordagem via modelagem quanto a abordagem convencional de ensino, no desenho considerado, produzem resultados similares.

Ao se analisar cada rubrica, separadamente, pode-se retirar novas conclusões. A Figura 14 mostra a média e o desvio padrão obtidos no teste, considerando a rubrica exercícios. Como mostrado na figura, os alunos do grupo de controle se sobressaem um pouco quando comparado com o grupo experimental.

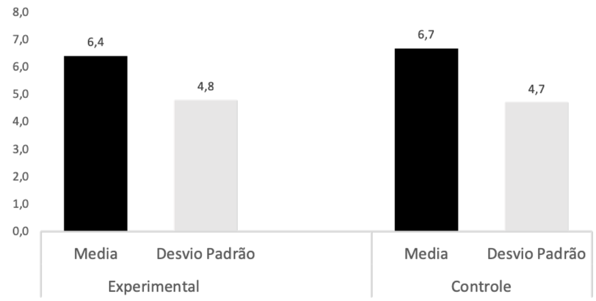
Figura 14 – Análise comparativa do quesito exercício.



Fonte: A autora.

A Figura 15 mostra a média e o desvio padrão obtidos no teste, considerando a rubrica resolução de problemas, pelos grupos controle e experimental. Como mostrado na figura, os resultados dos testes são muito semelhantes em ambos os grupos.

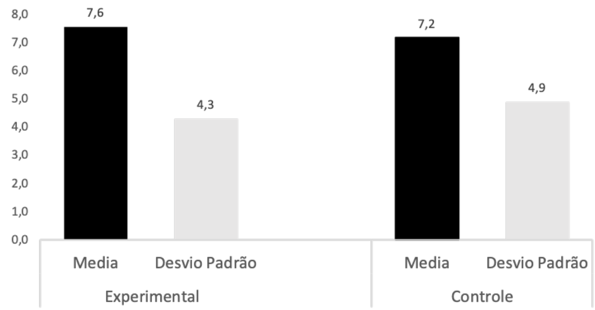
Figura 15 – Análise comparativa do quesito resolução de problemas.



Fonte: A autora.

A Figura 16 mostra a média e o desvio padrão obtidos no teste, considerando a rubrica raciocínio. Como mostrado na figura, os resultados dos testes são muito semelhantes em ambos os grupos, com uma pequena vantagem para o grupo experimental.

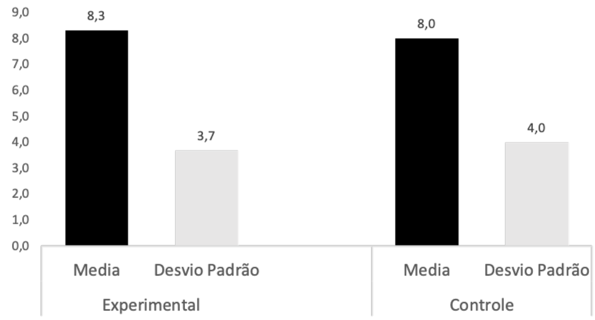
Figura 16 – Análise comparativa do quesito raciocínio.



Fonte: A autora

A Figura 17 mostra a média e o desvio padrão obtidos nos testes, considerando a rubrica modelagem. Como mostrado na figura, os resultados dos testes são muito semelhantes em ambos os grupos. O resultado deste quesito já se mostrou surpreendente. Pois, pensava-se que os alunos do grupo experimental, por serem instigados a refletir continuamente para responder as questões levantadas pelo professor em sala de aula, sobressaíssem em relação aos alunos do grupo de controle.

Figura 17 – Análise comparativa do quesito modelagem.



Fonte: A autora.

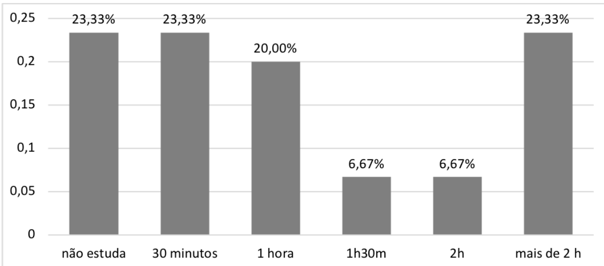
Contudo, alguns aspectos merecem melhores esclarecimentos. Por exemplo, o tempo consumido para se chegar ao resultado final da questão que envolvia modelagem. Os alunos do grupo experimental resolviam de forma mais rápida que os alunos do grupo de controle. Bem como, interpretavam os resultados antes de transcrever para o papel. Mais detalhes na seção 7.4.

7.3 Questionário Final

Para coletar as impressões dos alunos a respeito da intervenção, foi aplicado o questionário final, conforme apêndice B, às turmas do grupo experimental. No que segue serão apresentados os resultados coletados após análise das respostas dos alunos.

Quando perguntados se gostam de estudar, 23% responderam não enquanto 77% responderam que sim. Na Figura 18 é apresentado o tempo que os alunos dedicam aos estudos extra-classe diariamente.

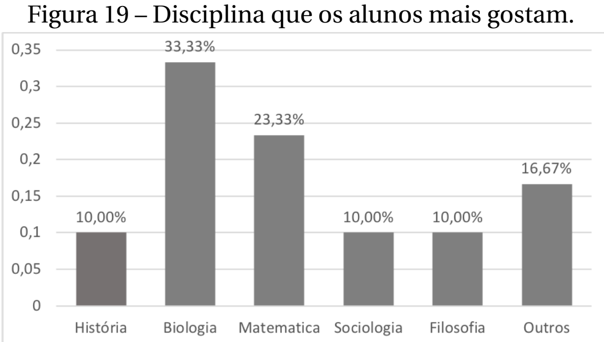
Figura 18 – Horas diárias destinadas ao estudo.



Fonte: A autora.

Apesar de os alunos afirmarem que gostam de estudar, na primeira questão, na segunda questão se percebe que 56,6% dos alunos dedicam no máximo uma hora de estudo extra-classe, o que leva a crer que os alunos gostam de estudar dentro do ambiente escolar, apenas. Na Figura 19 é apresentada a análise das respostas dos alunos quando são perguntados sobre a disciplina que mais gostam.

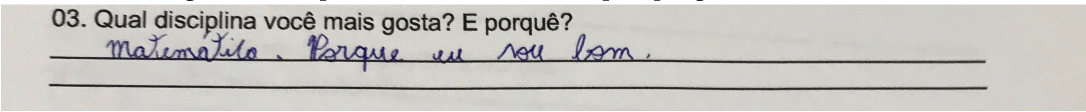
Figura 19 – Disciplina que os alunos mais gostam.



Fonte: A autora.

Analisando as repostas dos alunos que explicaram o porque da afinidade pela disciplina apontada, é passível de se constatar que os alunos que preteriram matemática alegavam suas escolhas à facilidade de associar o ensinado com o que presenciam no seu cotidiano. Quanto aos alunos que indicavam matemática como disciplina preferida, a justificativa vinha associada apenas com a facilidade em absorver os conceitos. Como, por exemplo, a justificativa apresentada por um dos alunos, cf. Figura 20:

Figura 20 – Depoimento de aluno sobre por que gosta de matemática.


03. Qual disciplina você mais gosta? E porquê?

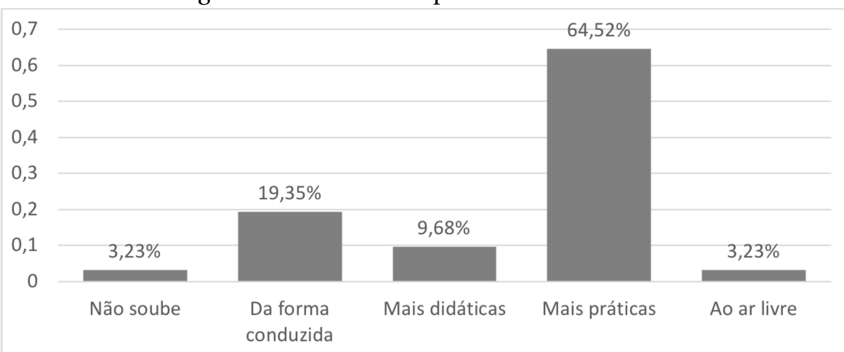
Matemática. Porque eu sou bom.

Fonte: A autora.

Quando perguntados se gostaram da forma como a disciplina foi conduzida no ano letivo, 72% responderam que sim.

Analisando o resultado da interpretação da quinta questão (cf. Figura 21), que trata da forma como os alunos preferem que as aulas sejam conduzidas, é possível inferir que os alunos gostaram da emprego da Modelagem Matemática como metodologia de ensino principalmente por evidenciar que o conteúdo pode auxiliar em problemas práticos.

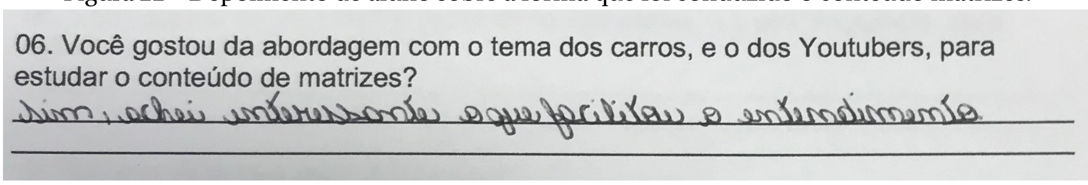
Figura 21 – Preferência pela forma das aulas.



Fonte: A autora.

As respostas dadas à sexta questão, reforçam as suspeitas acima, pois, 94% dos alunos gostaram da forma como o conteúdo de matrizes foi abordado na disciplina. Vide depoimento de um dos alunos, Figura 22.

Figura 22 – Depoimento de aluno sobre a forma que foi conduzido o conteúdo matrizes.


06. Você gostou da abordagem com o tema dos carros, e o dos Youtubers, para estudar o conteúdo de matrizes?

Sim, achei interessante e que facilitou o entendimento

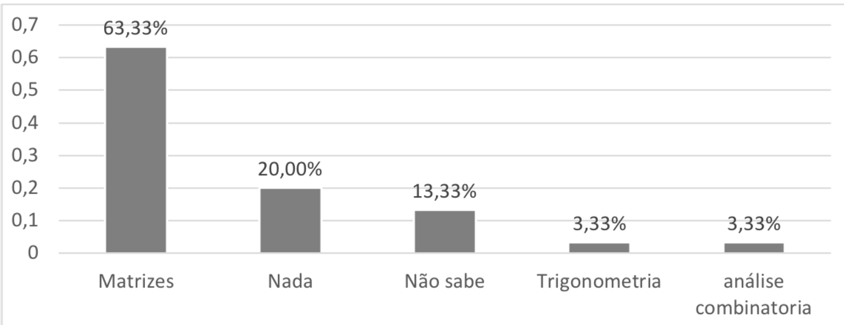
Fonte: A autora

A sétima questão foi formulada com a intenção de identificar qual conteúdo de matrizes abordado na intervenção os alunos apresentaram dificuldade. Contudo, durante a aplicação do questionário, apenas 6,6% dos alunos alegaram dificuldade em assimilar o conceito de matrizes.

Durante a condução da intervenção, mesmo havendo maior disponibilidade do professor em sala, notou-se que os alunos pouco chamavam a docente para sanar dúvidas. Com a oitava pergunta se pretendia confirmar esta impressão bem como identificar os motivos. Uma quantidade considerável dos alunos (42%) não recorre ao professor da disciplina para sanar suas dúvidas. Entretanto, os alunos não detalharam o motivo pela pouca procura ao professor.

Na Figura 23 se constata que os alunos realmente gostaram da abordagem adotada para o ensino de matrizes.

Figura 23 – Conteúdo que agradou alunos.



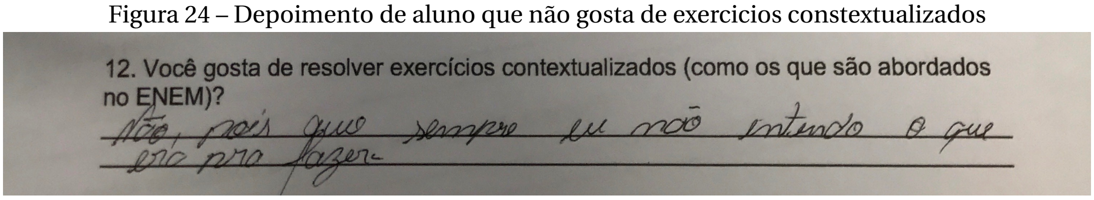
Fonte: A autora.

A intervenção foi capaz de mudar a percepção dos alunos em relação à Matemática, pois, 57% dos alunos responderam que, após a dinâmica, passaram a gostar da disciplina.

Ao serem perguntados se gostam de exercícios contextualizados, quase a metade dos alunos que respondeu sim. Contudo, a outra metade alegou que não, mesmo sabendo que esta é a abordagem que se emprega no ENEM. E, para a condução de atividades que envolvem modelagem, questões contextualizadas são de suma importância.

Alguns alunos escreveram em suas respostas que não gostam de questões contextualizadas por terem dificuldade em interpretar o enunciado em busca dos dados necessários para resolvê-las, conforme Figura 24.

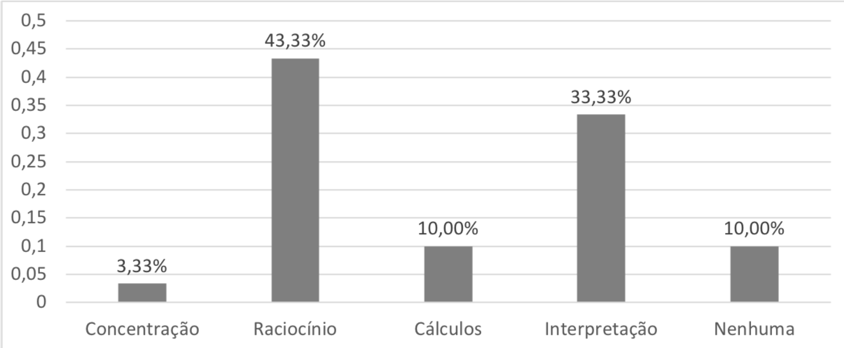
Figura 24 – Depoimento de aluno que não gosta de exercicios constextualizados



Fonte: A autora

As respostas dadas à última pergunta discriminam qual o maior problema alegado pelos alunos em resolver questões contextualizadas, apontando, claramente, que têm dificuldade em interpretar e raciocinar sobre este tipo questão.

Figura 25 – Qual a maior dificuldade do aluno em Matemática.



Fonte: A autora.

7.4 Análise Qualitativa

A análise qualitativa se deu em dois momentos. Um contínuo que durou toda a intervenção, e um pontual ao final da intervenção. O primeiro consistiu na observação e coleta de informações durante as aulas e avaliações e o segundo consistiu da análise de um questionário preenchido pelos alunos que participaram do experimento.

De forma a documentar e facilitar a transcrições do que foi observado, tudo foi anotado em um "diário de campo". Além disso, foram registrados momentos em foto e depoimentos em vídeo. A Figura 26 mostra um grupo de alunos da turma usando o *smartPhone* para fazer a consulta web.

Figura 26 – Grupo da turma C consultando *smartPhone*.

Fonte: Arquivo da autora.

Um aluno da turma C, de participação muito discreta em atividades da disciplina, mostrou pro-atividade e destreza ao preencher a tabela 1 da primeira etapa da atividade. A modificação de atitude perdurou até o final do ano letivo.

A discussão ficou bem acalorada quando se passou para a segunda etapa da sequência didática, nas turmas do grupo experimental, pois, os alunos tinham opiniões divergentes sobre os valores atribuídos a cada quesito da tabela, o que foi extremamente positivo. Como exemplo, o peso atribuído ao valor de revenda do Fiat Uno. Alguns alunos acharam incorreto atribuir apenas 3, pois, o Fiat Uno é, segundo esses alunos, um carro de fácil revenda. Na turma C foi necessário intervir para controlar a conversa, pois o som da discussão estava muito alto.

Uma outra situação, que também surgiu na turma C, foi o fator "torcida". Isto é, os alunos torciam para o carro melhor avaliado, levando em consideração a tabela colocada no quadro, sem se preocupar com as contas associadas. Isto também foi muito bom, mostrando a necessidade do questionário presente no final da segunda etapa, pois, assim, os alunos puderam analisar as informações colocadas no modelo matemático e confrontá-las com o esperado no mundo real.

Apesar de se ter desenvolvido uma etapa da sequência para abordar o conceito de transposta de uma matriz, pretendia-se apresentar o referido conceito de forma convencional, pois, havia o problema de tempo associado ao experimento, vez que as turmas do grupo de controle já se encontravam bem adiantadas em relação ao conteúdo, e temia-se que a forma proposta na sequência didática poderia ser de difícil assimilação.

Contudo, alguns alunos questionaram a necessidade da existência do conceito de transposta de um matriz, perguntando o que há na prática que necessita do uso de tal matriz, enquanto outros reportaram que a explicação dada sobre multiplicação de matrizes não permitia solucionar alguns exercícios do ENEM [1]. Grata foi a surpresa quando os alunos compreenderam bem o conceito de transposição e sua necessidade quando há um contexto associado. Logo, os temores anteriores se mostraram infundados e o tempo consumido não foi além do previsto.

Cabe relatar a falha de conhecimento que os alunos carregam, desde o primeiro ano do ensino médio[2], em operar números decimais.

Durante a aplicação da quinta etapa da sequência didática, foram identificados dois alunos da turma A que possuem canais no Youtube. Estes alunos serviram de referência para consulta dos demais alunos da sala, no sentido de que os demais alunos queriam comprovar com os youtubers presentes se as informações do artigo da revista condiziam com a realidade.

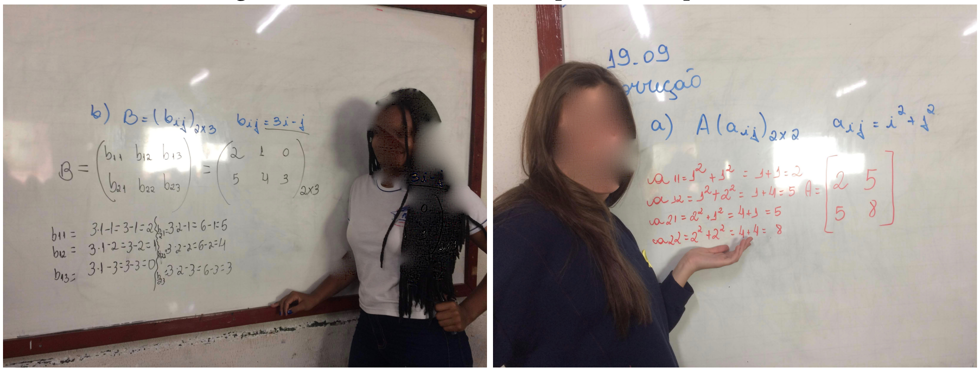
[1] Similar a questão 4 do teste empregado na intervenção

[2] Acredita-se que a falha que os alunos carregam sobre operações advém do ensino fundamental. Contudo, a professora não possui condições de afirmar, pois, passou a ter contato com os alunos a partir do ensino médio.

Na turma C não haviam alunos que possuíam canais no YouTube, o que não permitiu a consulta a colegas, porém este não foi empecilho para a participação ativa da turma na atividade.

Os alunos das turmas A e C, participaram mais ativamente na resolução dos exercícios. Uns alunos sanando a dúvida do outro colega. Por vezes os alunos solicitavam para resolver os exercícios no quadro, conforme Figura 27. Poucas vezes a professora teve que intervir na apresentação da solução de algum problema.

Figura 27 – Alunas resolvendo questão no quadro.



Fonte: Arquivo da autora.

Já as turmas do grupo de controle solicitavam que o professor fosse até as suas carteiras para sanar dúvidas. Comportamento, este, análogo ao empregado durante todo ano letivo, o que sobrecarregou por demais a professora.

Do ponto de vista da professora, as aulas foram muito mais agradáveis e bem mais fáceis de se ministrar no grupo experimental, pois, grande parte do trabalho foi feito previamente na preparação das aulas ficando a condução muito mais ao aluno. Isto é, para conduzir as aulas o trabalho da professora focava mais em instigar os alunos e em sanar eventuais dúvidas.

O fato de os alunos não chamarem tanto a professora para sanar dúvidas se mostra como um hábito. Cabe uma investigação mais aprofundada sobre os motivos, mas talvez isto se deva à forma que foram conduzidos a se portarem em sala. Pois, na forma convencional de ensino, os professores transcrevem conteúdos no quadro, esperam os alunos transcreverem para seus cadernos e em seguida explicam, através de uma leitura, o que os alunos copiaram.

As impressões que se tinham durante a intervenção era de que os alunos estavam muito satisfeitos, também, com o resultado. O questionário proposto, contudo, pecou no momento de coletar a satisfação percebida. Pois, as perguntas permitiam que o aluno às respondessem de forma binária (com sim ou não).

Quando os alunos são convidados a falar eles conseguem se expressar melhor é o caso do depoimento gravado em vídeo de uma das alunas do grupo experimental (cf. Figura 28).

Neste depoimento a aluna descreveu a abordagem adotada pela professora e apresentou o motivo de ter gostado da forma como a aula foi conduzida. Destaca-se o seguinte trecho:

> "A professora trouxe a matéria de matrizes, que, no começo a gente achou que não tinha nada a ver.... mas, depois, a gente foi ver que fazia muito sentido. E, foi muito legal: os trabalhos, os vídeos, as pesquisas ... inclusive a gente fez pesquisa no YouTube..."

Figura 28 – Captura de tela do depoimento em vídeo da aluna do grupo experimental.

Fonte: Arquivo da autora.

Além das dificuldades associadas ao espaço físico da escola campo, outros problemas encontrados ainda podem ser elencados.

Valendo-se do depoimento da aluna, que foi gravado em vídeo, em que ela diz: "... Que, no começo a gente achou que não tinha nada a ver...". Pode-se compreender que abordagens não convencionais de ensino não são amplamente aceitas por todos. Neste sentido, houve certa dificuldade em convencer os envolvidos da seriedade com que seria conduzido o trabalho, atestando que o conteúdo previsto seria todo abordado.

Pretendia-se, no início, trabalhar com o conteúdo de Matemática Financeira nas sequências didáticas. Pois, há uma grande gama de possibilidades de se empregar modelos para trabalhar tal conteúdo. Mas, para se trabalhar com Matemática Financeira, seria necessário inverter a ordem de conteúdos prevista no planejamento anual da escola, pois, Matemática Financeira deveria ser iniciada no primeiro semestre letivo e a intervenção para o segundo. Visando não criar desgastes com o quadro docente da instituição, preferiu-se aguardar o término do primeiro semestre letivo para, em seguida, se estimar qual conteúdo do planejamento escolar coincidiria com o calendário previsto para aprovação da pesquisa pelo CEP.

Este postergar, contudo, causou um acúmulo de trabalho no segundo semestre de 2018. Restando para o primeiro semestre o trabalho de revisão bibliográfica e fichamento.

Capítulo 8

Considerações finais

Neste trabalho foi apresentada uma intervenção junto a uma escola da rede pública estadual da cidade de Uberlândia, no estado de Minas Gerais. Tal intervenção teve por objetivo avaliar se o emprego de Modelagem Matemática, durante o horário destinado a disciplina de matemática, em turmas do segundo ano do ensino médio, é capaz de produzir bons resultados no processo de ensino-aprendizagem, em se considerando 4 quesitos: Exercícios, Resolução de Problema, Raciocínio e Modelagem. Foi construída uma sequência didática abordando o ensino de Matrizes, a qual faz uso dessa estratégia de ensino para abordar o conteúdo em questão.

Foi diagnosticado, quantitativamente, que o emprego na forma considerada produz resultados semelhantes quando comparada à forma convencional de se ministrar o mesmo conteúdo. Também foi percebida a preferência dos alunos pela nova forma de se apresentar o conteúdo. Na visão do professora e também pesquisadora, chegou-se à conclusão de que o trabalho investido na preparação da aula é compensador. Pois, se por um lado, é consumido mais tempo preparando a aula, por outro se perde menos com controle de disciplina e se desprende menos esforço para se conduzir a aula. Confirmou-se no trabalho o que foi descrito por Aymerich, Gorgorió e Albarracín (2017). Isto é, que mesmo que os alunos não sejam treinados para modelar são capazes de fazê-lo em problemas que exigem conteúdos matemáticos conhecidos.

Havia no início da pesquisa a intenção de se empregar o uso de TIC em parte da intervenção. Contudo, a estrutura escolar não estava propícia. Uma alternativa que se apresenta para suprir a carência de laboratórios de informática funcionais é fazer uso dos *smartphones* dos alunos para se conduzir as atividades na própria sala de aula, inclusive em escolas da rede pública de ensino. De fato, em algumas partes das atividades em sala, os alunos foram convidados a consultar, via *smartphone*, referências sobre o terma abordado. Após se analisar o questionário inicial aplicado às turmas, foi diagnosticado que mais de 95% dos alunos possuem *smartphones*.

Com a mudança nas diretrizes educacionais do Brasil, por conta da BNCC do ensino médio, aprovada em final de 2018, pode-se pensar em abordagens que empreguem o uso de modelagem para além do horário regular das aulas. Pois, conforme relatado em Greefrath e Vorhölter (2016), o uso de modelagem matemática no ensino é viável e altamente producente. Contudo, o tempo e espaço dedicado ao emprego de modelagem precisa ser revisto para que se possa alcançar bons resultados.

Na experiência alemã, por exemplo, emprega-se modelagem em projetos de no mínimo três dias, nos quais são apresentados ao aluno problemas que demandam pesquisa e conhecimento prévio de conceitos matemáticos mas, que também, instigue o aluno a buscar novos conhecimentos durante a atividade.

Ainda conforme Greefrath e Vorhölter (2016), muito ainda pode ser explorado com respeito ao uso de TIC no ensino de matemática via modelagem. Este, pois, deve ser um dos focos de trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

4RODAS, R. *Melhor Compra 2018: os melhores compactos até R$ 60.000*. Revista Quatro Rodas - Editora Abril, 2018. Atualizado em: Setembro de 2018. Acessado em: Outubro de 2018. Disponível em: <https://quatrorodas.abril.com.br/guia-de-compras/melhor-compra-2018-os-melhores-compactos-ate-r-60-000/>. Citado na página 44.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. The meaning of the problem in a mathematical modelling activity. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Ed.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice- Cultural, Social and Cognitive Influences*. New York: Springer International Publishing, 2015, (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling). p. 45–54. Citado na página 34.

ARAÚJO, J. de L.; CAMPOS, I. da S. Negotiating the use of mathematics in a mathematical modelling project. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Ed.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice- Cultural, Social and Cognitive Influences*. New York: Springer International Publishing, 2015, (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling). p. 283–292. Citado na página 34.

AYMERICH, À.; GORGORIÓ, N.; ALBARRACÍN, L. Modelling with statistical data: Characterisation of student models. In: ____. *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*. Cham: Springer International Publishing, 2017. p. 37–47. ISBN 978-3-319-62968-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_3>. Citado 3 vezes nas páginas 18, 35 e 86.

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: *REUNIÃO ANUAL DA ANPED*. Caxambu: [s.n.], 2001. Citado na página 30.

____. Modelagem matemática na sala de aula. *Perspectiva*, Erechim (RS), v. 27, n. 98, p. 65–74, jul. 2003. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.

BARBOZA, J. V. *et al.* The possibility of interdisciplinary integration through mathematical modelling of optical phenomena. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Ed.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice- Cultural, Social and Cognitive Influences*. New York: Springer International Publishing, 2015, (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling). p. 305–316. Citado na página 34.

BARGAS, D. *Quanto o YouTube paga por pageview?* Revista Super Interessante - Editora Abril, 2018. Atualizado em: Julho de 2018. Acessado em: Outubro de 2018. Disponível em: <https:

//super.abril.com.br/mundo-estranho/quanto-o-youtube-paga-por-pageview/>. Citado na página 57.

BASSANEZI, R. *Modelagem Matemática - Teoria e Prática*. [S.l.]: Editora Contexto, 2015. ISBN 9788572448932. Citado 4 vezes nas páginas 16, 20, 26 e 38.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com Modelgem Matemática*. São Paulo: Editora Contexto, 2014. 389 p. Citado 4 vezes nas páginas 22, 27, 29 e 38.

BIEMBENGUT, M. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 07–32, 2009. ISSN 1982-5153. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37939>. Citado na página 36.

BIEMBENGUT, M.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. [S.l.]: Contexto, 2002. ISBN 9788572441360. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 30.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. 5. ed. Belo Horizonte: Autentica, 2018. 127 p. Citado 4 vezes nas páginas 16, 18, 20 e 37.

BLUM, W. *et al.* (Ed.). *Modelling and Applications in Mathematics Education*, (The 14th ICMI Study). New York: Springer, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 35.

BLUM, W.; KIRSCH, A. The problem of the graphic artist. In: ____. *Applications and modeling in learning and teaching mathematics*. Chichester: Ellis Horwood, 1989. p. 129–135. Citado na página 25.

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), Lei 9.394/96, de 20 de dezembro*. 1996. Citado na página 17.

____. *Constituição da República Federativa do Brasil*. Brasília: Senado Federal: Centro Gráfico, 1998. 292 p. Citado na página 18.

____. *Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008. 127 p. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 37.

____. *Base Nacional Comum Curricular(BNCC): Educação é a Base*. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018. 292 p. Disponível em: <http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acessado em: Janeiro de 2019. Citado na página 17.

BUCHHOLTZ, N. How teachers can promote mathematising by means of mathematical city walks. In: ____. *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*. Cham: Springer International Publishing, 2017. p. 49–58. ISBN 978-3-319-62968-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_4>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 35.

BURRILL, G. *et al. Advanced Modeling and Matrices*. New York: Dale Seymour, 1998. (Advanced mathematics). ISBN 9781572322592. Citado na página 37.

CALAO, L. A. *et al.* Developing mathematical thinking with scratch. In: CONOLE, G. *et al.* (Ed.). *Design for Teaching and Learning in a Networked World*. Cham: Springer International Publishing, 2015. p. 17–27. ISBN 978-3-319-24258-3. Citado 3 vezes nas páginas 19, 35 e 39.

D'AMBROSIO, U. Mathematical modelling as a strategy for building-up systems of knowledge in different cultural environments. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Ed.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice- Cultural, Social and Cognitive Influences*. New York: Springer International Publishing, 2015, (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling). p. 35–44. Citado na página 34.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e aplicações*. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2016. Citado na página 37.

FERRI, R. B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, v. 38, n. 2, p. 86–95, Apr 2006. ISSN 1863-9704. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02655883>. Citado na página 20.

FERRI, R. B. On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, v. 31, n. 1, p. 99–118, Mar 2010. ISSN 1869-2699. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

FERRI, R. B.; BLUM, W. Insights into teachers' unconscious behaviour in modeling contexts. In: ____. *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013. p. 423–432. ISBN 978-94-007-6271-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8_36>. Citado na página 30.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos*. Campinas-SP: Autores associados, 2006. 228 p. Nenhuma citação no texto.

FISCHER, R.; MALLE, G. Mensch und mathematik. *Mannheim: Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag*, 1985. Citado na página 22.

FONSECA, J. R. S. Reduzir as atitudes negativas em relação à aprendizagem de Matemática e aumentar o desempenho dos alunos através da metodologia CAL. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, v. 22, n. 1, p. 121–131, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 29.

GREEFRATH, G.; VORHÖLTER, K. Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from german speaking countries. In: ____. *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries*. Cham: Springer International Publishing, 2016. p. 1–42. ISBN 978-3-319-45004-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1>. Citado 11 vezes nas páginas 15, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 29, 35, 36 e 87.

HERTZ, H. *Die prinzipien der mechanik in neuem zusammenhange dargestellt ...: mit einem vorworte*. Leipzig: Barth, 1894. (Gesammelte werke). Citado na página 21.

ICTMA-17 Modelling perspectives: looking in and across boundaries - Conference Contributions. 2015. Disponível em: <https://www.nottingham.ac.uk/conference/fac-socsci/ictma-17/documents/abstracts-final---15-july-2015.pdf>. Acessado em novembro de 2017. Citado na página 34.

JULIE, C.; MUDALY, V. Mathematical modelling of social issues in school mathematics in south africa. In: ____. *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*. Boston, MA: Springer US, 2007. p. 503–510. ISBN 978-0-387-29822-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_58>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 35.

JÚNIOR, A. J. de S. *et al.* Collective production with mathematical modelling in digital culture. In: ____. *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences*. Cham: Springer International Publishing, 2015. p. 465–474. ISBN 978-3-319-18272-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_39>. Citado na página 34.

KAISER, G.; STENDER, P. Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. In: ____. *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013. p. 277–293. ISBN 978-94-007-6540-5. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_23>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.

KÜHNEL, J.; KOLLER, E. *Neubau des Rechenunterrichts: ein Handbuch der Pädagogik für ein Sondergebiet*. [S.l.]: Klinkhardt, 1954. Citado na página 15.

MAASS, K. What are modelling competencies? *ZDM*, v. 38, n. 2, p. 113–142, Apr 2006. ISSN 1863-9704. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02655885>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 27 e 28.

MADRUGA, Z.; BIEMBENGUT, M.; LIMA, V. Das relações entre modelagem, etnomatemática e carnaval: reflexões para aplicação na educação básica. *Fronteiras: Journal of Social, Technological and Environmental Science*, v. 4, n. 2, p. 31–52, nov. 2015. Disponível em: <http://periodicos.unievangelica.edu.br/index.php/fronteiras/article/view/1336>. Citado na página 27.

MATHEMATICS, N. C. of Teachers of Mathematics. Commission on Standards for S. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. [S.l.]: Natl Council of Teachers of Mathmatics, 1989. Citado na página 25.

MEYER, J. F. da Costa de A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. dos S. *Modelagem em Educação Matemática*. 3. ed. Belo Horizonte: Autentica, 2017. 142 p. (Coleção Tendencia em Educação Matemática). Citado 3 vezes nas páginas 17, 20 e 37.

PALHARINI, B.; ALMEIDA, L. M. W. de. Mathematical modelling tasks and the mathematical thinkingofstudents. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Ed.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice- Cultural, Social and Cognitive Influences*. New York: Springer International Publishing, 2015, (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling). p. 219–228. Citado na página 34.

PETERSEN, K. *et al.* Systematic mapping studies in software engineering. In: *Proceedings of the 12th International Conference on Evaluation and Assessment in Software Engineering*. Swindon, UK: BCS Learning & Development Ltd., 2008. (EASE'08), p. 68–77. Citado na página 33.

POLLAK, H. The interaction between mathematics and other school subjects (including integrated courses). In: *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education, Karlsruhe*. [S.l.: s.n.], 1977. p. 255–264. Citado na página 16.

QUIROZ, S. M. R.; ORREGO, S. M. L.; LÓPEZ, C. M. J. Measurement of area and volume in an authentic context: An alternative learning experience through mathematical modelling. In: ____. *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences*. Cham: Springer International Publishing, 2015. p. 229–240. ISBN 978-3-319-18272-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_18>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 34.

ROBERT, A. Level of conceptualization and secondary school math education. In: ____. *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2000. p. 125–131. ISBN 978-0-306-47224-4. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/0-306-47224-4_3>. Citado na página 15.

ROSA, M.; OREY, D. C. Social-critical dimension of mathematical modelling. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Ed.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice- Cultural, Social and Cognitive Influences*. New York: Springer International Publishing, 2015, (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling). p. 385–396. Citado na página 34.

SCHELLER, M.; CIVIERO, P. A. G.; OLIVEIRA, F. P. Z. de. Pedagogical actions of reflective mathematical modelling. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Ed.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice- Cultural, Social and Cognitive Influences*. New York: Springer International Publishing, 2015, (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling). p. 397–406. Citado na página 34.

SCHMIDT, B. Modelling in the classroom: Obstacles from the teacher's perspective. In: KAISER, G. *et al.* (Ed.). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2011. p. 641–651. ISBN 978-94-007-0910-2. Citado na página 29.

STILLMAN, G. Implementation case study: Sustaining curriculum change. In: ____. *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*. Boston, MA: Springer US, 2007. p. 497–502. ISBN 978-0-387-29822-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_57>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 35.

SUURTAMM, C.; ROULET, G. Modelling in ontario: Success in moving along the continuum. In: ____. *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*. Boston, MA: Springer US, 2007. p. 491–496. ISBN 978-0-387-29822-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_56>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 35.

VILLA-OCHOA, J. A.; BERRíO, M. J. Mathematical modelling and culture: An empirical study. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Ed.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice- Cultural, Social and Cognitive Influences*. New York: Springer International Publishing, 2015, (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling). p. 241–250. Citado na página 34.

YENMEZ, A. A. *et al.* Developing teachers' models for assessing students' competence in mathematical modelling through lesson study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Taylor & Francis, v. 48, n. 6, p. 895–912, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 20.

YOSHIMURA, N. Mathematical modelling of a social problem in japan: The income and expenditure of an electric power company. In: ____. *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences*. Cham: Springer International Publishing, 2015. p. 251–261. ISBN 978-3-319-18272-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_20>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 34.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Citado na página 18.

ZEYTUN, A. S.; ÇETINKAYA, B.; ERBAS, A. K. Understanding prospective teachers' mathematical modeling processes in the context of a mathematical modeling course. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, v. 13, n. 3, p. 691–722, 2016. ISSN 1305-8215. Nenhuma citação no texto.

____. ____. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, v. 13, n. 3, p. 691–722, 2017. ISSN 1305-8215. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.12973/eurasia.2017.00639a>. Citado na página 20.

Apêndices

APÊNDICE A

Questionário Inicial

QUESTIONÁRIO DA PESQUISA

Favor marcar com um **X** somente em uma única resposta que melhor se apresente para você.

1. Sexo: ( ) Masculino ( ) Feminino

2. Faixa de idade: ( ) Até 15 ( ) 16 anos ( ) 17 anos ou mais

3. Tempo em que você está nesta escola:
( ) 1 ano ou menos ( ) de 1 a 3 anos ( ) de 3 a 5 anos ( ) mais de 5 anos

4. Você possui em casa smartphone, tablet ou notebook? ( ) Sim ( ) Não
Qual (ou quais) deles?____

5. Assinale na lista abaixo quais os aplicativos que você utiliza quando usa seu equipamento eletrônico (smartphone, tablete, notebook ou computador):
( ) Redes sociais ( ) Sites de pesquisa ( ) Jogos ( ) Programas e aplicativos ( ) Outros

6. Você tem o hábito de usar calculadora e/ou similares para resolver os exercícios de matemática? ( ) Sim ( ) Não

7. Você conhece algum programa ou aplicativo que resolve ou auxilia na resolução de exercícios de matemática? ( ) Sim ( ) Não Qual (ou quais)? ______________

8. Você já participou do desenvolvimento de algum projeto de pesquisa que busque uma melhor aprendizagem? ( ) Sim ( ) Não

APÊNDICE B

Questionário final

Questionário

01. Você gosta de estudar?
(   ) Sim   (   )Não

02. Você estuda em casa? Quanto tempo por dia?
____

03. Qual disciplina você mais gosta? E porquê?
____
____

04. Você gosta de como a matemática é ensinada?
(   ) Sim   (   )Não

05. Como você gostaria que fossem as aulas de matemática?
____
____

06. Você gostou da abordagem com o tema dos carros, e o dos Youtubers, para estudar o conteúdo de matrizes?
____
____

07. Em que você teve mais dificuldade?
____
____

08. Você discutiu com o professor as dificuldades em relação a matéria?
____
____

09. O que mais te chamou a atenção?
____
____

10. Ajudou a se interessar mais por estudar matemática?
____
____

11. Gostaria que fosse feito outro tipo de atividade na abordagem deste conteúdo? Qual sua sugestão?
____
____

12. Você gosta de resolver exercícios contextualizados (como os que são abordados no ENEM)?
____
____

13. Qual sua maior dificuldade ao resolver este tipo de questão?
____
____

Anexos

ANEXO A

Aprovação Comitê de ética

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: MODELAGEM MATEMÁTICA:ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Pesquisador: ANGELA MARIA MORAES

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 88741518.2.0000.8058

Instituição Proponente: Universidade Federal de Goiás - UFG

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 2.698.362

Apresentação do Projeto:

Este trabalho fala sobre o ensino através da modelagem para a resolução de problemas

Objetivo da Pesquisa:

Contribuir para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem e entendimento de conceitos, regras e fórmulas.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

riscos e benefícios traçados em acordo com a resolução 466

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

pesquisa bem descrita e dentro dos aspectos éticos

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

termos apresentados de forma satisfatória

Recomendações:

aprovado

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

sem pendências

Considerações Finais a critério do CEP:

Aprovado pelo colegiado

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1091133.pdf	21/04/2018 21:57:29		Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	projeto.pdf	21/04/2018 21:56:06	ANGELA MARIA MORAES	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	Termo_de_anuencia.pdf	17/04/2018 21:09:43	ANGELA MARIA MORAES	Aceito
Declaração de Pesquisadores	Termo_de_compromisso.pdf	17/04/2018 21:09:06	ANGELA MARIA MORAES	Aceito
Outros	lattes_elida.pdf	17/04/2018 21:08:39	ANGELA MARIA MORAES	Aceito
Outros	Curriculo_Lattes_angela.pdf	17/04/2018 21:08:16	ANGELA MARIA MORAES	Aceito
Folha de Rosto	Folha_de_rosto.pdf	17/04/2018 21:05:07	ANGELA MARIA MORAES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_aluno.pdf	17/04/2018 21:04:48	ANGELA MARIA MORAES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TALE_pai.pdf	17/04/2018 21:04:37	ANGELA MARIA MORAES	Aceito
Outros	Questionario.pdf	17/04/2018 20:12:26	ANGELA MARIA MORAES	Aceito
Orçamento	Orcamento.pdf	17/04/2018 20:07:45	ANGELA MARIA MORAES	Aceito
Cronograma	Cronograma.pdf	17/04/2018 20:07:10	ANGELA MARIA MORAES	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

GOIANIA, 07 de Junho de 2018

Assinado por:
Patrícia Gonçalves Evangelista Marçal
(Coordenador)

Endereço: EMILIO POVOA
Bairro: VILA REDENCAO **CEP:** 74.845-250
UF: GO **Município:** GOIANIA
Telefone: (62)3956-8860 **E-mail:** centrodeestudoshmdi@gmail.com