Universidade Federal de Goiás

Regional Catalão

Unidade Acadêmica Especial de

Matemática e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

O INFINITO EM DOIS FRAGMENTOS:

ARTE E MATEMÁTICA

GUSTAVO RODRIGUES DE LISBOA

Catalão

2019

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Gustavo Rodrigues de Lisboa

Título do trabalho: O Infinito em Dois Fragmentos: Arte e Matemática

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Gustavo Rodrigues de Lisboa
Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 30 / 04 / 2019

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Versão atualizada em setembro de 2017.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Gustavo Rodrigues de Lisboa

O INFINITO EM DOIS FRAGMENTOS:

ARTE E MATEMÁTICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia / Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro

Catalão

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Rodrigues de Lisboa, Gustavo
O Infinito em Dois Fragmentos: Arte e Matemática [manuscrito] / Gustavo Rodrigues de Lisboa. - 2019.
LXVII, 67 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Catalão, 2019.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Matemática. 2. Infinito. 3. Arte. 4. Perspectiva. 5. Linguagem. I. Roberto Rocha Ribeiro, Márcio, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás - UFG
Regional Catalão
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia
Mestrado Profissional em Matemática

Defesa N° 24

Ata de Defesa da Dissertação

Em 12 de abril de 2019, às 14 h 49 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro (orientador), Dr. Flávio Raimundo de Souza, Dr. Paulo Roberto Bergamaschi para, em sessão pública realizada no Bloco J - Sala 03, da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação da Dissertação intitulado "O INFINITO EM DOIS FRAGMENTOS: ARTE E MATEMÁTICA", de autoria de GUSTAVO RODRIGUES DE LISBOA, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo(a) presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que, em 24 min procedeu a apresentação da Dissertação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerado: (X) **Aprovado** ou ( ) **Reprovado**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 15 h 49 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Márcio Roberto Rocha Ribeiro, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente.

Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Flávio Raimundo Souza

Dr. Flávio Raimundo de Souza
IFG-Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias de Goiás /Goiânia

Dr. Paulo Roberto Bergamaschi
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

Gustavo Rodrigues de Lisboa

Gustavo Rodrigues de Lisboa
Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/RC/UFG

À Pablyne, mulher da minha vida, pelo apoio
em todos os momentos, incondicionalmente,
principalmente nos de incerteza, muito comuns
para quem tenta trilhar novos caminhos.
Sem você nenhuma conquista valeria a pena.

Agradecimentos

A Deus que me dá força para continuar lutando, e Maria Santíssima, por suas interseções.

À minha esposa Pablyne e meu filho Heitor, que são o motivo para eu querer sempre ser um homem melhor.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro, que confiou no meu potencial para concluir essa jornada.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

À minha mãe e meu irmão Eduardo, que sempre me incentivam.

Aos meus amigos Suenio, Anailton, Marcelino e Walter que juntos superamos vários desafios.

RESUMO

As abordagens acerca do infinito matemático, geralmente eruditas e abstratas por natureza, nem sempre favorecem a uma compreensão imediata, notadamente por serem contrárias à intuição e experiências cotidianas. O presente trabalho aborda o tema infinito matemático a partir da correlação entre as linguagens matemática e artística, sobretudo a partir do tratamento matemático dado por Cantor e das pinturas dos artistas Jan van Eyck e Mauritis Cornelis Escher, em que cada um com suas peculiaridades, versaram acerca do infinito a partir da perspectiva. Desta forma, a Arte é apresentada como um lugar de diálogo com a Matemática, buscando compreender como o infinito pode ser tratado e problematizado pelo campo da Pintura e buscando relacioná-lo com as ideias matemáticas de Cantor, visando abrir uma janela na busca da compreensão da ideia de infinito. Destarte, acredita-se contribuir com a formação de professores, especialmente no que tange à prática escolar e busca por uma formação continuada e plural.

Palavras-Chave: Matemática; Infinito; Arte; Perspectiva; Linguagem.

ABSTRACT

The approaches about mathematical infinity, usually erudite and abstract by nature, do not always favor an immediate understanding, notably because they are contrary to intuition and everyday experiences. The present work discusses the mathematical infinite theme from the correlation between the mathematical and artistic languages, especially from the mathematical treatment given by Cantor and the paintings of artists Jan van Eyck and Mauritis Cornelis Escher, in which each with Their peculiarities, they dealt with the infinity from the perspective. Thus, Art is presented as a place of dialogue with Mathematics, seeking to understand how infinity can be treated and problematized by the field of Painting and seeking to relate it with the mathematical ideas of Cantor, aiming to open a window in the search for understanding of the idea of infinity. In this way, it is believed to contribute to the formation of teachers, especially in relation to school practice and search for a continuous and plural formation.

Keywords: Mathematics; Infinite; Art; Perspective; Language

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

1. INTRODUÇÃO

O infinito é um tema abstrato pela sua própria natureza e, também apresenta fatos que são contrários a intuição e experiências cotidianas. Estes fatos causam um certo embaraço à compreensão clara e precisa do conceito de infinito, mesmo a partir da revelação de vários resultados, que desde a Grécia Antiga pululam entre os intelectuais do mundo ocidental, que vem se debruçando de forma hercúlea sobre essa temática.

Ainda hoje, os estudos acerca do infinito provocam perturbações tanto quanto no tempo de Aristóteles. Ao colocar as noções matemáticas e filosóficas acerca do tema em confrontação com o mundo real, este se torna tão vago e misterioso como nas teorias que o tentaram explicar ao longo da história. Destarte, a história do infinito não é apenas uma história da Matemática. Muito além disso, é uma história de progresso do pensamento científico e de possibilidades de pensar em algo que transcende qualquer probabilidade de compreensão, como afirmou Morris, “pensar o infinito é pensar no incomensurável dentro de um corpo de conhecimento que se baseia na capacidade de medir”. (MORRIS, 1998, p. 9 – 10)

Por assim dizer “o infinito além de belo, além de suscitar ideias poéticas e matemáticas tem mexido com a cabeça das pessoas”. (INSTITUTO ARTE NA ESCOLA, 2010, n.p.)

Na História da Arte percebe-se que muitos artistas fizeram aplicações dos conceitos matemáticos acerca do infinito em suas obras, de forma que é possível uma amarração entre as duas linguagens, a artística e a matemática.

> O tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta

> das conexões que ele estabelece entre ela e as demais áreas. (BRASIL, 1998, p.57)

Conforme orientação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, este texto tem, portanto, o objetivo geral de fazer uma correlação entre a Matemática e a Arte com o intuito de abordar o infinito, tornando possível aos interlocutores perceber a ideia de infinito pelo sentido da visão e plasmar tal conceito matemático, que é inteligível. A importância da análise de imagens é ressaltada por Ana Mae Barbosa:

> Apreciar, educar os sentidos e avaliar a qualidade das imagens produzidas pelos artistas é uma ampliação necessária à livre-expressão, de maneira a possibilitar o desenvolvimento contínuo daqueles que, depois de deixar a escola, não se tornarão produtores de arte. Através da apreciação e da decodificação de trabalhos artísticos, desenvolvemos fluência, flexibilidade, elaboração e originalidade – os processos básicos da criatividade. Além disso, a educação da apreciação é fundamental para o desenvolvimento cultural de um país. Este desenvolvimento só acontece quando uma produção artística de alta qualidade é associada a um alto grau de entendimento desta produção pelo público. (BARBOSA, 1998, p.18)

Neste trabalho são abordadas e analisadas, principalmente, as pinturas e desenhos de Jan van Eyck e Mauritis Cornelis Escher, que abordaram, cada um à sua maneira, o conceito de infinito matemático e deram forma a ele em suas obras. Essas análises se dão a partir de concepções científicas fundamentadas na obra de Cantor e a possível existência de Deus como criador de todas as coisas em sua perfeição.

> Acredito que é melhor manter Deus fora de discussões científicas. No entanto, quando falamos das condições necessárias à vida e à possível existência de um número infinito de universos, já nos aventuramos tanto no reino da metafísica que questões religiosas brotam bastante naturalmente. Não pretendo tomar partido no tocante a tais questões, mas não vejo razão para não discutir quais poderiam ser as implicações de tais ideias tanto para o crente quanto para o ímpio. Veremos, de modo um tanto surpreendente, que elas são na verdade muito similares. (MORRIS, 1998, p. 145)

Dessa forma, ao correlacionar a Matemática e a Arte para entender o infinito, objetiva-se, contribuir para ampliar a reflexão e o conhecimento da Matemática, além de difundir o conhecimento científico e fazer proliferar a cultura de maneira geral.

A disposição das ideias desenvolvidas neste trabalho trilha uma ordenação cronológica, e tem início no capítulo que traz “Uma Abordagem Histórica do Infinito”, perfazendo o percurso histórico da gênese da ideia de infinito. Neste contexto, é possível observar a contundência da barreira que a humanidade teve que romper para domar a força impetuosa, rebelde e irrefreável da ideia de infinito. Foram necessárias mentes extraordinariamente prodigiosas como as de Pitágoras, Zenão, Arquimedes, Galileu, Bolzano, Cantor, entre outras tantas, para que o infinito pudesse vir a ser encerrado em ideias assimiláveis a nós seres finitos.

No capítulo destinado a “Deus, o Infinito e Cantor” é possível compreender a grandiosidade do pensamento Cantoriano, que brilhou ao desenvolver toda uma teoria sobre “os infinitos”, já que Cantor provou a existência de uma cadeia infinita de infinitos, onde o infinito subsequente seria, numa linguagem imprecisa, “maior” que o antecedente. Assim, neste capítulo, buscou-se uma síntese das teorias de Cantor acerca do infinito matemático e suas relações com o Divino, que serviram de ponto de partida para as analogias entre as linguagens matemática e artística.

O último capítulo trata da perspectiva e, portanto, do infinito na Pintura, além de uma construção histórica do tema na arte ocidental, partindo dos gregos, passando pelos romanos, até chegar à Idade Média, com ênfase nas obras de Jan van Eyck e as possíveis analogias com Cantor. Depois, aborda o artista contemporâneo Maurits Cornelis Escher e a intensa afinidade demostrada para com a Matemática em sua obra, sobretudo acerca do infinito, da mesma forma relacionando-o com Cantor.

Em suma, este texto se destina aos professores do Ensino Básico que muitas vezes padecem com a limitada disponibilidade de material para elucidar suas aulas que tangem os temas relacionados ao infinito. É um trabalho incipiente, mas necessário às agruras docentes, ao tentar alistar alguns dos principais pensadores e matemáticos que trataram do infinito com dois pintores consagrados, Jan van Eyck, que viveu no crepúsculo da Idade Média e Mauritis Cornelis Escher, artista contemporâneo, interdisciplinarizando as linguagens, com o intuito de plasmar o infinito e torná-lo compreensível a maioria dos estudantes.

2. UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DO INFINITO

O infinito é sempre motivo de discussão. Desde os tempos mais remotos os homens têm se debruçado sobre essa questão. Aparentemente, o infinito se resumiu àquilo que não se pode alcançar, entender com os sentidos. Tal questão logo gerou elucubrações absurdas acerca do tema em diversas explicações, nas mais diversas linguagens e civilizações ao longo de suas histórias, entretanto, é na Matemática, enquanto linguagem universal, que se encontram as elucidações mais coesas e didáticas.

Conforme Boyer (2003), por muito tempo entendia-se que a Matemática tratava apenas do mundo que os sentidos pudessem entender. Contudo, após o limiar do século XIX foi rompida a barreira da lógica por observações da natureza. Antes, o que era possível entender apenas por semelhanças apesar das diferenças, como entre uma árvore e uma floresta ou relacionar as mãos com os pés, passaram a ser argúcias abstratas que certos elementos têm em comum e que são chamados de números.

Por entender a Matemática como uma linguagem e todas as suas peculiaridades e não apenas como uma ciência, é que se busca no passado as teorias que deram origem às ideias mais complexas acerca do infinito. Segundo Abbagnano (1962), o infinito na Matemática é um arranjo ou a qualidade de uma grandeza, que pode ser explicada, mas nunca a exaurir todas as aclarações.

Pensar o infinito como algo que se relacione com a realidade exige um profundo conhecimento prático, científico. Destarte, é inevitável relacionar o infinito ao inatingível, ao muito grande ou ao muito pequeno. Para Morris (1998), pensar o infinito é pensar o incomensurável dentro de um corpo de conhecimento que se baseia na capacidade de medir.

Calder (2006) afirmou que para os gregos da antiguidade a Matemática limitava-se quase que inteiramente à Geometria e que Euclides, por volta do Sec. III, contribuiu para separar essas ideias em sua obra Os Elementos. Euclides partiu de objetos não definidos, como pontos, retas, planos e certos números de axiomas, vistos de forma intuitiva a partir desses objetos, e aplicou-lhes regras da dedução aristotélica, para obter novas proposições ou teoremas. Ainda que, objetos como ponto, que não possui dimensões, e a reta, dotada de comprimento, mas não de largura, não existam no mundo real, tem-se a impressão de saber o que eles são.

As raízes das civilizações ocidentais estão fincadas na Grécia Antiga, logo, as bases das explicações para o infinito também são gregas. Em princípio, muito mais filosóficas do que científicas. Pitágoras foi um dos pioneiros nas abordagens pertinentes ao infinito matemático.

2.1. Pitágoras e os Números Irracionais

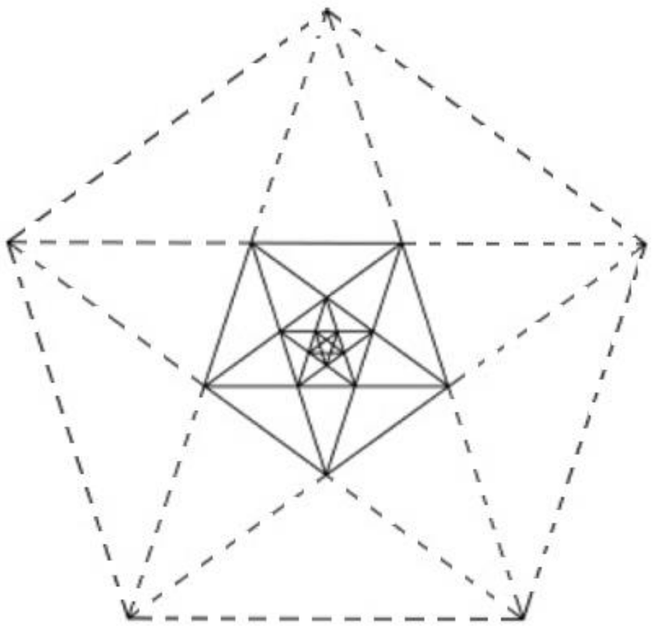
Pitágoras viveu na Grécia Antiga por volta do Século V, período Clássico e toda a sua história envolve mitos e lendas, principalmente, porque nesse período predominava uma cultura oral e não letrada como se percebe hoje. Portanto, é complexo separar a verdade da realidade histórica. Ademais, a própria existência de Pitágoras é digna de dúvida.

Os seguidores de Pitágoras se baseavam no argumento de que os números inteiros eram o alicerce de tudo. Eles exaltavam as características, os modelos e a aritmética dos números e sequências, chegando ao arremate de que o universo é dirigido por números. Os pitagóricos não criaram os números, mas os elevaram a um patamar superior.

Entretanto, a descoberta da existência de segmentos que não podiam ser medidos por nenhum número inteiro ou racional, como a diagonal de um quadrado de lado um, levou os pitagóricos a instabilidade. De fato, pois então os números não seriam o princípio de tudo, como pensavam.

O Pentagrama era o símbolo dos seguidores de Pitágoras que constitui um exemplo de como caminhar no sentido do infinitamente grande e, por outro lado, do infinitamente pequeno. Sua continuidade é um laço infinito, pois se prolongarmos os lados do pentágono regular, os pontos de intersecção destes prolongamentos, forma um novo pentagrama, veja a Figura 1. Por outro lado, é possível fazer um pentagrama menor, traçando seguimentos entre os vértices não adjacentes no pentágono regular do pentagrama maior.

Figura 1 – Pentagrama



Fonte: Elaborada pelo Autor

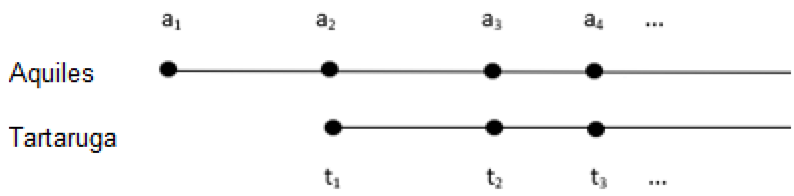
2.2. Os Paradoxos e Dicotomias de Zenão

Outro filósofo grego que também tratou do infinito foi Zenão (Século V a.C.). Ele questiona fortemente a ideia da fragmentação infinita do espaço e do tempo. Para ele, a ideia de que um segmento de reta possa ser subdividido infinitamente cria um paradoxo incontornável, que ele denominou *Dicotomia.* Outro paradoxo que ele expõe é o da *flecha.*

> A *Dicotomia*: se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível, pois para percorrê-lo é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se então que o movimento jamais começará.
> A *Flecha*: se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move. (EVES, 2004, p.418)

Para exemplificar a *dicotomia,* Zenão cria uma situação que a humanidade nunca mais iria desconsiderar, Aquiles e a tartaruga. Nela tem-se a hipotética corrida entre o herói grego e uma tartaruga. Comparando as velocidades do herói e da tartaruga, o primeiro leva grande vantagem: a sua velocidade; a tartaruga, por sua vez, larga alguns metros à frente da linha de partida. Zenão então conclui que Aquiles nunca iria ultrapassar a tartaruga, e justifica: considerando que Aquiles começasse na posição a_1 e a tartaruga na posição t_1, quando Aquiles atingisse o ponto $a_2 = t_1$ a tartaruga estaria na posição t_2, quando Aquiles atingisse o ponto $a_3 = t_2$ a tartaruga estaria em t_3, veja a Figura 2, continuando esse processo indefinidamente, sem estipular tempo final para a corrida, a tartaruga estaria, surpreendentemente, sempre à frente.

Figura 2 – Aquiles e a Tartaruga



Fonte: Elaborada pelo autor

A conclusão do paradoxo de Aquiles e a tartaruga vai, evidentemente, contra o senso comum. É claro que Zenão sabia que Aquiles alcançaria a tartaruga, o que ele está assinalando aqui é que, ao afirmarmos que um segmento possa ser subdividido infinitamente, isto traz implicações práticas paradoxais. Ele nos chama à atenção que essa ideia da subdivisão infinita não encontra um suporte básico na prática da realidade efetiva, afinal, isto gera paradoxos como este que ele traz.

Um desdobramento da reflexão sobre estas ideias, trazido pela Matemática, vai, bem mais adiante na história, ser alavancado com o conceito de sequência matemática, em que as posições de Aquiles e da tartaruga podem ser escritas na forma $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ e $(t_1, t_2, t_3, \dots)$, respectivamente. Uma *sequência* matemática $A = \{a_n\}$, considerando n um número natural, de modo geral, é um conjunto de números reais escritos por uma ordem definida, isto é, existe uma função bijetora entre o conjunto dos números naturais e A.

Para uma melhor compreensão, faz necessário elucidar as definições de Função *injetiva*, *sobrejetiva* e *bijetora*. De maneira que as definições aqui apresentadas estão no livro Curso em Análise 1 de Elon Lages Lima (1976, p. 14), transcritas integralmente: Uma função $f: A \to B$ chama-se *injetiva* (ou biunívoca) quando, dados x, y quaisquer em A, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Em outras palavras: quando $x \neq y$, em A, implica $f(x) \neq f(y)$, em B; Uma função $f: A \to B$ chama-se *sobrejetiva* (ou *sobre* B) quando, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que

$f(x) = y$; Uma função $f: A \to B$ chama-se *bijetora* (uma *bijeção*, ou uma *correspondência biunívoca*) quando é *injetiva* e *sobrejetiva* ao mesmo tempo.

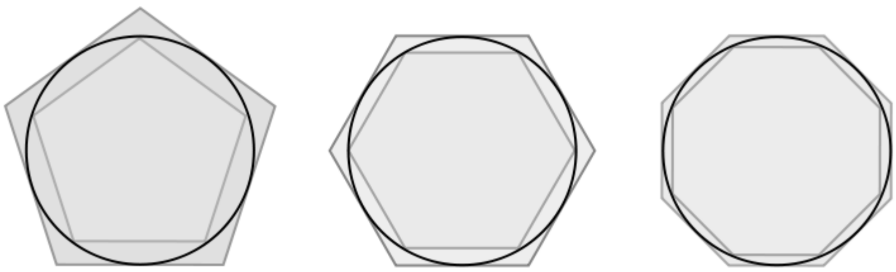
2.3. Arquimedes e o Cálculo do Comprimento de uma Circunferência

Arquimedes viveu por volta Século III na cidade de Siracusa e, conforme Roque e Carvalho (2012), possuía uma grande obsessão: medir objetos curvos, tema comum em grande parte de seus trabalhos. Assim, essa obsessão o conduziu a um de seus maiores aportes no estudo do infinito: o valor aproximado do número π.

Arquimedes, em seus estudos que buscavam determinar a área de uma dada circunferência, desenvolveu o *Método da Exaustão,* onde a circunferência dada é encaixada em dois polígonos, um circunscrito e outro inscrito, de número de lados cada vez maiores, como mostra a Figura 3.

> Em seu trabalho, desenvolveu também o método de exaustão, creditado a Eudoxo, pelo qual se aproxima a quantidade desejada pelas somas parciais de uma série ou pelos termos de uma sequência. Obteve aproximações da área de um círculo comparando-a com as áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos.
> (Boyer, 1995, p.117).

Figura 3 – Circunferência de Arquimedes – Método da Exaustão

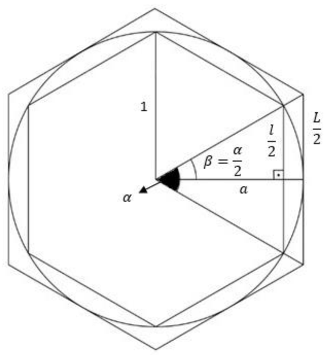


Fonte: Elaborado pelo Autor

Para o cálculo de uma grandeza que vai sendo tomada cada vez menor, o método de exaustão é um fundamento essencial. Porém, Arquimedes não considerou que as somas tivessem infinitas parcelas, mesmo deduzindo que no cálculo se soma um número infinito de parcelas. Para tal conceito seria necessária uma definição de limite, que pressupõe a consideração do infinito, que estava excluído da Matemática grega, mesmo em Arquimedes. Mas, os trabalhos de Arquimedes foram um forte incentivo para o desenvolvimento posterior de ideias de limite e infinito.

Para desenvolver o Método da Exaustão, Arquimedes utilizou dois hexágonos, um inscrito e outro circunscrito à circunferência dada, duplicando seus lados, a cada passo e repetindo esse processo, Arquimedes chega a um polígono de noventa e seis lados. Depois, calculou a área do polígono interno e do externo, que respectivamente, compreendia o limite inferior e o superior da área do círculo. Assim, ele chegou a um valor aproximado para a área do círculo entre esses dois limites. Dessa forma, calculou a área do polígono interno que estabelecia o limite inferior da área do círculo. Feito isso, calculou também a área do polígono externo, que fixava o limite superior. E assim, através desse processo, chegou a um valor aproximado para a área do círculo a qual figurava, rigorosamente, entre esses dois limites.

Figura 4 - Hexágonos Regulares Inscritos e Circunscritos ao Círculo



Fonte: Elaborada pelo autor

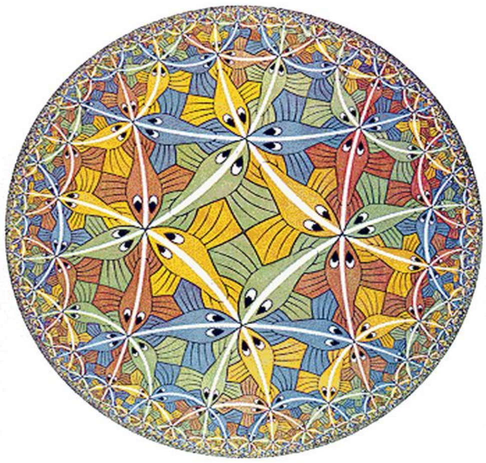
Usando a linguagem matemática atual e com o apoio da Figura 4, pode-se calcular a aproximação obtida por Arquimedes para o número π, partindo de dois polígonos de noventa e seis lados, um inscrito e outro circunscrito. Por simplificação de cálculos é considerado uma circunferência de raio unitário. Dessa forma, tem-se $\alpha = \frac{360}{96}$ e $\beta = \frac{360}{192}$. Usando as relações trigonométricas em um triângulo retângulo, chega-se a $sen\beta = \frac{l}{2}$, mas como $\frac{l}{2} = sen\frac{360}{192}$, então $l = 0{,}0654381656$, aproximadamente, sendo l o lado do polígono inscrito.

Como a é o apótema do polígono inscrito, usando o Teorema de Pitágoras tem-se: $a^2 = 1 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 1 - \frac{l^2}{4}$, então $a = \sqrt{1 - \frac{l^2}{4}} = 0{,}9994645875$, aproximadamente. Calculando a área de um dos noventa e seis triângulos do polígono inscrito, como demonstrado na Figura 4, nota-se: $A_t = \frac{l \cdot a}{2}$. Destarte, pode-se concluir que a área do polígono inscrito é $A_p = 96 \cdot A_t = 48 \cdot l \cdot a = 3{,}1393502010$, aproximadamente, onde $48 \cdot l = p$ é o semi-perímetro do polígono inscrito.

Portanto, considerando o triângulo maior, do polígono circunscrito, formando o mesmo ângulo β, temos: $tg\beta = \frac{L}{2}$, então $L = 0{,}0654732208$, aproximadamente. Sendo o apótema do polígono circunscrito o raio $r = 1$ da circunferência, calcula-se a área de um dos noventa e seis triângulos do polígono circunscrito, $A_T = \frac{L \cdot 1}{2} = \frac{L}{2}$, logo a área do polígono circunscrito será: $A_G = 96 \cdot A_T = 48 \cdot L$, semiperímetro do polígono circunscrito. Então, tem-se $A_G = 48 \cdot L = 48 \cdot 0{,}0654732208 = 3{,}1427145984$, aproximadamente. Ademais, $A_p \leq A_C \leq A_G$, onde $A_C = \pi$ é a área do círculo, tem-se:$3{,}1393502010 \leq \pi \leq 3{,}1427145984$.

Os cálculos de Arquimedes podem ser percebidos nas obras de Escher, Limite Circular III de 1958 (Figura 5), quando ele diminui sistematicamente as figuras à medida que se aproxima da extremidade, transmitindo a ideia de infinito na circunferência.

Figura 5 - M. C. Escher. Limite Circular III, 1958



Fonte: Ernst (1978)

2.4. Galileu

Galileu Galilei nasceu na cidade de Pisa em 15 de fevereiro de 1564, dia da morte do grande pintor renascentista Michelangelo. Foi em sua cidade natal que passou a maior parte da infância até que, em 1574, sua família se mudou para Florença. Galileu foi enviado à Universidade de Pisa aos dezessete anos para estudar Medicina, onde conheceu a Matemática.

Por volta de 1609, Galileu ficou sabendo da invenção do que se chama hoje em dia de telescópio, que lhe foi apresentado em Veneza. Galileu, então, buscou melhorar a invenção, até que em agosto de 1609 Galileu fez a demonstração de seu telescópio. Pelo ponto mais alto da cidade os senadores venezianos puderam ver com exatidão as velas de uma nau que estava a duas horas de poder ser vista a olho nu. Logo, os venezianos perfilharam as possibilidades bélicas desse instrumento.

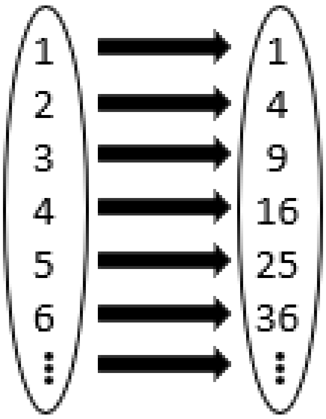
Pelos seus telescópios Galileu observava diuturnamente os céus. Em suas observações, pôde constatar a existência de corpos celestes diminutos orbitando corpos celestes maiores, evidenciando a teoria de Nicolau Copérnico. Não obstante, isso acabou atraindo a aversão de várias pessoas da Igreja Católica que defendiam as teorias do Geocentrismo de Aristóteles, em que a Terra é o centro do universo.

Em 1633, depois de publicar o livro *Diálogos Sobre os Dois Maiores Sistemas do Mundo*, em que defendia as ideias do Heliocentrismo, o Sol como o centro do Universo, de Copérnico, deu-se a devassa da Inquisição. Ele foi perseguido, preso, julgado e condenado. Em sua pena foi obrigado a renunciar suas ideias, seus livros foram queimados e listados no *Index Librorum Prohibitorum* (Lista dos Livros Proibidos) e confinado à posição domiciliar.

Foi no período de prisão domiciliar que Galileu desenvolveu suas mais importantes questões acerca do infinito. Em seu livro *Diálogos Sobre Duas Novas Ciências*, publicado em 1638, afirmou que dobrando um segmento de reta em quatro ou oito partes iguais, forma-se um quadrado ou um octógono regular. Portanto, curvando-se o segmento em forma de circunferência, estar-se-ia trazendo à realidade os infinitos números de partes contidas no segmento. Assim, a circunferência nada mais é que um polígono regular com uma quantidade infinita de lados. Entretanto, foi quando tratou do infinito em aritmética que Galileu aportou em um lugar diferente de seus antecessores, o infinito como se percebe na atualidade.

Conforme Boyer (1996), Galileu situou uma equivalência biunívoca entre os números inteiros positivos e seus quadrados (Figura 6), chegando à conclusão que existem tantos números inteiros positivos quanto quadrados perfeitos. Ele enfrentava a propriedade fundamental de um conjunto infinito — de que uma parte dele pode equivaler ao conjunto todo — entretanto ele não chegou a esta conclusão. Apesar de que o número de quadrados não é menor que o número de inteiros, não se pode afirmar que são iguais. Ele concluiu, assim, que os atributos ‘igual’, ‘maior’ e ‘menor’ não se aplicam às comparações que envolvem conjuntos infinitos, ao menos não com o mesmo sentido dado às quantidades finitas. Chegou a afirmar —diferentemente do que se concebe atualmente —que não se pode dizer que um infinito é “maior” que outro infinito, ou mesmo que um infinito é “maior” que um número finito. Como Moisés, Galileu chegou a avistar a terra prometida, mas não pôde penetrar nela.

Figura 6 - Correspondência Biunívoca de Galileu



Fonte: Elaborada pelo Autor.

2.5. Bolzano

Bernhard Bolzano nasceu na cidade de Praga em 1781, atual República Tcheca, e ingressou na universidade em 1796. Sempre demonstrou habilidade lógico-matemática e se interessou pelos estudos acerca da Matemática Grega Primitiva.

Estudando alguns matemáticos gregos da antiguidade, demonstrou interesse pelo infinito, que permeou seus principais trabalhos.

Bolzano foi ordenado padre em 1805 e assumiu a cadeira de Filosofia da Religião da Universidade de Praga, mas passou mais de 20 anos em conflito com a Igreja, até deixar o sacerdócio e ser demitido da Universidade. Nesse ínterim, ele realizou importantes avanços dentro da Matemática. Em 1817, por exemplo, ele proferiu o teorema hoje denominado de *Teorema do Valor Intermediário*.

> O teorema do valor intermediário do cálculo, de tanta utilidade, muitas vezes é conhecido como teorema de Bolzano. O teorema diz que se *f(x)* é uma função real contínua definida num intervalo aberto *R* e toma os valores *α* e *β* nos pontos a e b de *R*, então *f* assume qualquer valor situado entre *α* e *β* em pelo menos um ponto *c* de *R* entre *a* e *b*. (EVES, 2004, p.530)

Interessado pelas ideias de Galileu, em particular, a da possibilidade de se fazer uma correspondência biunívoca entre os inteiros positivos e seus quadrados. Bolzano inquiriu sobre a possibilidade de estendê-la ao *continuum*. Ele examinou a função real $y = 2x$ com domínio restrito ao intervalo de 0 a 1 e verificou que a cada número deste intervalo correspondia a um único número do intervalo de 0 a 2, e reciprocamente, chegando à conclusão que existiam tantos números entre 0 e 1 quanto entre 0 e 2, apesar do intervalo entre 0 e 2 ter o dobro do comprimento da intermitência entre 0 e 1. E, de maneira análoga, a função $y = 10x$ estabelece uma correspondência entre os pontos do intervalo que vai de 0 a 1 com o intervalor que vai de 0 a 10, evidenciando uma aparente contradição com o pensamento do senso comum: se a distância de 0 a 10 é 10 vezes maior que a de 0 a 1, como pode o intervalo $(0,1)$ ter a mesma quantidade de pontos que o intervalo $(0,10)$? Aqui salienta-se o pensamento de Zenão, que alertou sobre as contradições que a ideia da subdivisão infinita de um segmento pode trazer consigo, afinal, estas só se dão na presença de um pensamento que afirma, acata, delibera, aceita como verdadeira a ideia de que entre dois pontos sempre existe um terceiro contido estritamente entre os dois dados.

Bolzano foi responsável pela descoberta de importantes propriedades dos conjuntos infinitos e parece ter entendido que o infinito dos números inteiros e o infinito dos números reais eram de tipos distintos.

Foi só depois de sua morte, em 1850, que seus estudos acerca do infinito foram publicados no livro *Paradoxos do Infinito*, no qual importantes propriedades foram elucidadas.

O próximo capítulo trata de um dos nomes mais singulares no desenvolvimento da ideia de infinito, tal qual percebe-se ainda hoje: Cantor.

3. DEUS, O INFINITO E CANTOR

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em 3 de março do ano 1845 na cidade São Petersburgo, Rússia, e morreu no dia 6 de janeiro de 1918 em Halle, Alemanha. Seus trabalhos envolveram estudos sobre a teoria dos conjuntos e também abarcaram o conceito de números infinitos a partir de estudos sobre números cardinais. Ele também prosseguiu com estudos das séries trigonométricas. Cantor começou seus estudos acadêmicos na Universidade de Zürich em 1862. Entretanto foi na Universidade de Berlim que ele participou de conferências de Weierstrass, Kummer e Kronecker. Cantor se tornou doutor em 1867 nesta mesma Universidade de Berlim e aceitou uma posição na Universidade de Halle, em 1869, local onde exerceu suas funções catedráticas até se aposentar em 1913.

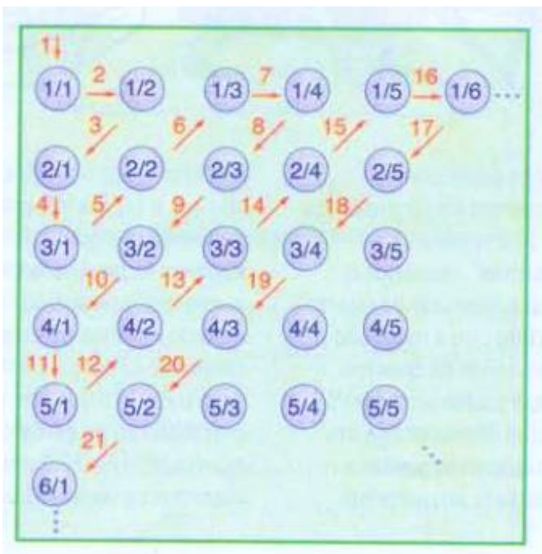
Seus estudos incipientes mostraram a influência dos ensaios de Weierstrass, aliando à série trigonométrica. Em 1872, ele determinou números irracionais em termos de sequências convergentes de números racionais.

Para Cantor, um conjunto é infinito quando é possível encontrar um subconjunto próprio dele tal que exista uma correspondência biunívoca entre o conjunto e este seu subconjunto. Assim, o conjunto dos naturais é infinito pois é possível estabelecer uma correspondência biunívoca dele com o subconjunto formado pelos quadrados de cada natural, $\{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}$ de forma que cada natural n é associado a seu quadrado n^2. A grosso modo, isto poderia ser expresso dizendo que o subconjunto dos quadrados de números naturais tem “o mesmo tanto” de elementos que o conjunto dos naturais. Eles têm, portanto, o “mesmo tamanho”. Assim, Cantor definiu um conjunto infinito como sendo aquele que possui um subconjunto próprio que tenha o mesmo “tanto de elementos” que o conjunto original. Esse termo “tanto de elementos” ou “mesmo tamanho”, por se tratar de comparação entre conjuntos infinitos, foi considerado bastante impróprio e preferiu-se dizer que os conjuntos possuíam a mesma ***cardinalidade.*** Assim, dois conjuntos infinitos que admitem uma bijeção entre si são denominados conjuntos de mesma cardinalidade. Um conjunto que admite uma bijeção com os naturais é chamado ***enumerável***.

Em 1873, Cantor evidenciou um fato surpreendente, a enumerabilidade dos números racionais, demonstrando que eles podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais, mostrando assim que o infinito dos números racionais coincide com o infinito dos números naturais e, dito de outra forma, existem tantos números racionais quanto naturais. Isto contradiz o imaginário do senso comum, que tinha como certa a ideia de que o conjunto dos números racionais possuíam “muito mais elementos” que o dos naturais.

> O conjunto infinito dos números racionais (isto é, o conjunto dos números que são quocientes de dois inteiros) parece ser maior que o conjunto dos números naturais. Cantor mostrou que é possível dispor os racionais em um arranjo e associar um único número natural a cada número racional, seguindo o caminho [das setas] representado na figura. O conjunto dos números racionais é enumerável! (DELAHAYE, 2006, p. 15)

Figura 7 – A “Contagem” dos Racionais



Fonte: Delahaye (2006).

Tudo isto levava-se a crer que o infinito dos números naturais seria suficiente para enumerar qualquer conjunto de elementos. Contudo, Cantor mais uma vez surpreende e estarrece o mundo da ciência quando afirma que não, que existe outro infinito diferente do infinito dos naturais. Que existe, por assim dizer, um infinito maior do que o dos naturais, isto é, que existem conjuntos com cardinalidades diferentes da dos naturais.

> Seu método, claro como água, consistiu em comparar a lista dos números inteiros com as de outros números. Por exemplo, com os [números] existentes entre 0 e 1, tais como 0,014828910… ou 0,999999273… E a comparação era feita como quem vistoria uma sala de cinema: se não há cadeiras vazias e ninguém está de pé, é certo que o número de cadeiras é igual ao de pessoas. Caso contrário, será maior o número do que sobrar, cadeiras ou pessoas. (DIEGUEZ, 1994, n.p.)

Em 1874 ele observou, com simplicidade, característica marcante da genialidade, que o conjunto dos números reais não poderia ser colocado em correspondência biunívoca com os naturais. Que ao tentar estabelecer qualquer correspondência desta natureza, 0 a 1, entre os naturais e os reais, sempre sobraria números reais, o que demonstraria a existência de mais números reais que naturais, isto é, as cardinalidades dos dois conjuntos eram distintas. Então, Cantor afirmava que existem “infinitos maiores” que o dos naturais: o dos reais, por exemplo. Na verdade, Cantor mostrou que o conjunto dos números naturais não são suficientes sequer para contar os números reais que estão compreendidos entre 0 e 1.

> Assim, supondo que este conjunto [o dos números reais] seja enumerável, podemos listar os seus números (escritos na forma decimal) da seguinte maneira: $0, a_1a_2a_3a_4a_5 \ldots$, $0, b_1b_2b_3b_4b_5 \ldots$, $0, c_1c_2c_3c_4c_5 \ldots$, $0, d_1d_2d_3d_4d_5 \ldots$, etc. Pela nossa suposição, esta lista contém todos os números [reais] entre 0 e 1. Obtemos a contradição exigida ao construir um novo número entre 0 e 1 que não está nesta lista. Para isso, escolhemos os números [naturais] $X_1, X_2, X_3, X_4 \ldots$ de 1 a 9 tais que $X_1 \neq a_1$, $X_2 \neq b_2$, $X_3 \neq c_3$, $X_4 \neq d_4, \ldots$ e consideramos o número $0, X_1X_2X_3X_4 \ldots$. Como $X_1 \neq a_1$, este novo número difere do primeiro da lista; como $X_2 \neq b_2$, ele difere do segundo número da lista; e assim por diante. Portanto, esse novo número difere de todos os números da lista. Isso nos leva a contradição exigida, logo o conjunto de todos os números reais não é enumerável. (FLOOD; WILSON, 2013, p.165)

Cantor foi ainda além, sua genialidade revelou à Matemática uma diversidade de infinitos, a existência de diferentes infinitos, de fato, ele observou que tomando um conjunto infinito $\boldsymbol{A}$ e, em seguida, considerando o conjunto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$**,** das partes de $\boldsymbol{A}$, formado por todos os subconjuntos de $\boldsymbol{A}$, a cardinalidade de $\boldsymbol{A}$ é sempre menor que a de $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$, denota-se $\#\boldsymbol{A} < \#P(A)$**,** o que significa dizer que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$ são conjuntos infinitos, mas de infinitos distintos, e que o infinito de $\boldsymbol{A}$ é, por assim dizer, menor que o de $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$. Dessa forma, Cantor construiu uma sequência de conjuntos infinitos, com cardinalidades distintas e "crescente": $\#\boldsymbol{A} < \#P(A) < \#P(P(\boldsymbol{A})) < \#P(P(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}))) < \cdots$

Em Artigo intitulado "Um Breve Passeio ao Infinito Real de Cantor" de Maria Gorete Carreira Andrade (2010), que foi apresentado na V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática na Universidade Federal da Paraíba em outubro de 2010 traz uma demonstração para tal fato, sendo esse artigo um excelente material para leitura com boas referências bibliográficas. Na Preposição 2.1. e no Teorema 2.1. apresentado no artigo, observa-se:

Preposição 2.1. Sejam S um conjunto e $P(S) = \{A; A \subseteq S\}$ o conjunto das partes de S. Então, S não é equipotente a $P(S)$.

Demonstração. Vamos supor $S \approx P(S)$. Logo existe $f: S \to P(S)$ bijeção. Seja: $A = \{x \in S; x \notin f(x)\}$. Denotemos $f(x) = B_x \subseteq S$. Assim, $A = \{x \in S; x \notin B_x\}$. Portanto, $A \in P(S)$. Como f é bijetora, existe $p \in S$ tal que $f(p) = A$.

Se $p \in A$, então $p \notin f(p) = B_p = A$ (absurdo!).

Se $p \notin A$, então $p \in f(p) = B_p = A$ (absurdo!).

Logo, não existe $f: S \to P(S)$ bijetora.

Teorema 2.1. (Cantor) $\#A < \#P(A)$. Logo, dado qualquer número cardinal, sempre existe um número cardinal maior que o número cardinal dado.

Demonstração. A aplicação $f: A \to P(A)$ definida por $f(x) = \{x\}$ é injetora. Portanto, $\#A \leq \#P(A)$. Mas, vimos que A não é equipotente a $P(A)$. Assim $\#A \neq \#P(A)$. Logo, $\#A < \#P(A)$.

Cantor também mostrou que, considerando $\boldsymbol{N}$ o conjunto dos números naturais, o conjunto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$ coincide com o conjunto dos números reais $\boldsymbol{R}$, no sentido de haver uma bijeção entre eles, ou seja, $\#\boldsymbol{P}(\boldsymbol{N}) = \#\boldsymbol{R}$. A partir deste fato, Cantor colocou uma questão que até hoje ainda não conseguimos dominar plenamente: existe um conjunto infinito $\boldsymbol{X}$, que esteja estritamente entre $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{R}$, isto é:

$\#\boldsymbol{N} < \#X < \#R$?

Esta é uma questão intrigante, porque ele mostrou que o infinito dos Naturais $\boldsymbol{N}$ é diferente do infinito dos reais $\boldsymbol{R}$, então, nada mais natural que questionar se entre estes dois há algum infinito diferente de ambos. Cantor não conseguiu obter uma resposta a este problema, mas fez uma conjectura que ficou conhecida como Hipótese do Continuum: *não existe um conjunto* $\boldsymbol{X}$ *tal que* $\#\boldsymbol{N} < \#X < \#R$.

> Cantor conseguiu quantificar e dar uma hierarquia aos níveis de infinito. Por incrível que pareça, apesar de a ideia ser totalmente contra nossa intuição, seu trabalho colocou em bases sólidas a análise de conjuntos, funções e outros elementos que têm caráter contínuo na matemática. A mesma solidez foi dada às ciências, que não sobrevivem hoje sem os cálculos usando números reais. (KAWANO, 2015, n.p.)

Todos estes resultados permitiram um avanço na compreensão do infinito real que permitiram construir uma hierarquia de infinitos, apesar de diversas críticas que o trabalho sofreu por parte de grandes nomes da Matemática à época, entre eles Leopold Kronecker (1823 - 1891) que afirmou: “Deus criou os números naturais o resto é obra dos homens.” Henri Poincaré (1854 - 1912) afirmou que “A teoria dos conjuntos de Cantor é uma moléstia, uma doença perversa, da qual algum dia os matemáticos estarão curados”. (ANDRADE, 2010, n.p.)

Inquirir sobre a nossa origem e duração são questões que fundamentam a vida humana, isso desde os primórdios. Essas questões sugerem o infinito, que mesmo abordados por tantos pensadores, filósofos, físicos e matemáticos, não possui explicações precisas e elucidativas, capazes de atender à todas as demandas do ser humano.

Para Cantor o infinito supera, transcende, os números compreensíveis. Cantor conceituou o infinito absoluto, comparando-o a Deus. Ele afirmava que o infinito possuía vários atributos matemáticos, incluindo objetos menores. Logo, os conjuntos numéricos possuem tamanhos distintos, maiores ou menores, ou seja, infinitos enumeráveis e não enumeráveis.

Nessa maneira de enxergar o infinito sugere-se a existência de Deus, como aponta Michael Hallet.

> Embora não possamos intuir diretamente a coleção dos números naturais como um todo, Cantor assume que Deus pode; portanto, a unidade do conjunto de todos os números naturais existe como uma ideia na mente de Deus, e pode, dessa forma, ser tomado como um objeto pela matemática. (HALLETT, 1996, p. 21)

Logo, para Cantor os números naturais existem no pensamento divino, em toda a sua perfeição. Então, os números naturais, incluindo todos os números ordinais maiores ou iguais dentro de uma sequência infinita, podem ordenar todo número, como afirma o próprio Cantor:

> A realidade e a absoluta informalidade dos números inteiros parece-me muito mais forte do que esta do mundo dos sentidos; e só há uma simples razão para tanto, a saber, que os números inteiros existem todos separadamente, em sua infinitude atual, no modo mais real possível, como ideias eternas no intelecto divino. (CANTOR *in* HALLETT, *ibid*, p. 149)

Para Cantor (HALLETT, 1996), a infinita sequência de infinitos números entre os números naturais, por exemplo, entre os números 1 e 2, é a prova irrefutável da existência e onipotência de Deus. Pois apenas Ele é capaz de criar mundos de tamanho infinito, todos metricamente organizados. No intelecto divino, todos os números da sequência infinita entre os números naturais são singulares, únicos.

Por essa ótica, o infinito existe, entretanto, é complexo e só pode ser percebido de forma teórica pela mente do homem. Já no intelecto divino todo número natural é perfeitamente definido, assim como a sequência infinita que existe entre esses números, como por exemplo $1, \ldots, 1{,}0000111\ldots, \ldots, 1{,}0000112\ldots, 2$. E se são infinitos, o homem não consegue prever onde essa sequência começa e termina. O infinito é intangível conforme Cantor.

> Creio que a passagem da Sagrada Escritura “Vós ordenastes tudo em medida, peso e número” [...] em que foi vista uma contradição em relação aos números infinitos atuais, efetivamente não os contradiz. Suponhamos que há, como acredito, ‘potencias’ infinitas [...] e realmente ‘enumerações de conjuntos bem ordenados’, isto é, os números ordinais [...] então, certamente, estes números *transfinitos* também seriam considerados pela aludida passagem da sagrada escritura [...] [No domínio transfinito], uma vastíssima abundância de formas e de *speciesnumerorum* é dispensável e, em um certo sentido, [estas espécies estão em um estoque muito maior] do que o existe correspondente no pequeno domínio de que é limitado e finito. Por conseguinte, estas espécies transfinitas, assim como os números finitos, estão à disposição da intenção do Criador e da sua vontade absolutamente inestimável. [...] Que uma ‘criação infinita’ deva ser assumida como tal pode-se provar de muitas formas [...] Prova-se isto do próprio conceito de Deus. Posto que Deus é sumamente perfeito, conclui-se que Lhe é possível criar um *transfinitumordinatum*. Portanto, em virtude de Sua pura benevolência e majestade, concluímos que há atualmente um *transfinitum* criado. (CANTOR *in* HALLETT, *ibid*, p.23)

Assim, a capacidade intelectual do homem é limitada para compreender o infinito criado por Deus, a quem nada escapa. Ademais, não existe nada que não possa ser mensurado por Deus e que, portanto, perpasse a totalidade dos números naturais. Conforme Cantor, qualquer multiplicidade plausível é contável por uma sequência ordinal da ordem inequívoca dos números naturais.

Portanto, entende-se que as explicações acerca do infinito permeiam a organização do pensamento. O infinito matemático é um conceito pelo qual, provavelmente, muitos indivíduos nunca tenham pensado. É possível que cada pessoa, no âmbito de suas práticas cotidianas tenham concebido o infinito, entretanto, sem os devidos argumentos para explicá-lo ou, até mesmo, entendê-lo.

Destarte, assim como Cantor considerou o infinito uma criação divina, os artistas buscaram, principalmente a partir do final da Idade Média, representar a natureza como Deus a teria criado. A isso dá-se o nome de naturalismo e realismo. Para tanto, esses artistas fizeram uso das ideias do infinito para construir a perspectiva e dar volumes às formas. Assim, enquanto os matemáticos buscam explicar o infinito os artistas o plasmaram em suas obras.

4. A ARTE E O INFINITO

Do latim *infinítum,* o infinito é um adjetivo cujo significado imediato é o de ausência de início e fim, denota algo que não tem limites ou não pode ser medido. É um conceito amplo, abordado em várias áreas do conhecimento, como na Matemática e na Filosofia.

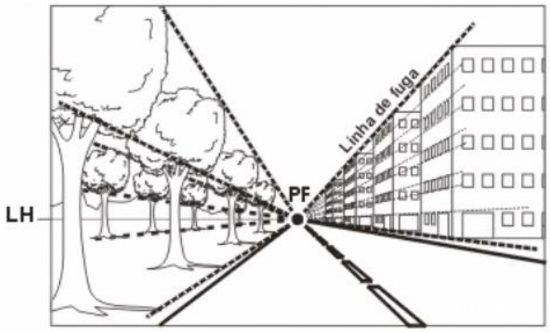
De acordo com Maor (1991), em sua obra o infinito pode ser visto de várias perspectivas. Por intuição percebe-se como uma variação de número maior do que qualquer outro. Para alguns povos primitivos é algo maior que três, representando muitos, algo incontestável. Para um fotógrafo, o infinito começa a dez metros da lente, ao passo que para um cosmólogo pode não ser suficiente para conter o universo. Para um filósofo é algo metafísico e está relacionado a eternidade e ao sagrado. Entretanto, é na Matemática que o conceito tem suas raízes mais profundas e uma relação com a Arte pode vir a auxiliar sua compreensão.

Na Arte, fundamentalmente nas artes plásticas, e mais especificamente na Pintura, pois é fundamentalmente a ela que este texto se atem, o infinito está especialmente relacionado a dois elementos da *perspectiva*: a *linha do horizonte e* o *ponto de fuga.*

A *linha do horizonte* (LH) é uma linha imaginária acurada a partir da altura dos olhos de um observador em relação a um determinado ponto dentro da obra analisada, com pode ser observado na Figura 8.

Um *ponto de fuga* (PF) é um ponto imaginário, localizado na linha do horizonte para o qual as linhas paralelas vistas em perspectiva convergem, conforme a Figura 8.

Figura 8 - Linha do Horizonte e Ponto de Fuga



Fonte: (Juvenil, 2006)

Um ponto de fuga é, portanto, um ponto imaginário que nos fornece a sensação visual de estar muito além do alcance, como que no infinito, isto é, localizado a uma distância infinita do interlocutor, e, portanto, expressa uma visão relativa do infinito. Essa técnica permite que os artistas estabeleçam noções realistas de tempo, espaço e volume entre os objetos ou personagens representados em uma cena.

As primeiras noções de infinito na arte advêm da Antiguidade Clássica, principalmente quando os romanos, ao perceberem o volume e, por conseguinte a profundidade, começaram a representar em suas pinturas a perspectiva ao imitar a estatuária grega e nas pinturas de mural.

Os gregos aprenderam a compor suas esculturas de vulto, compostas em três dimensões em clara alusão ao infinito, com os egípcios ainda no Período Arcaico de sua história. Os egípcios esculpiam muito bem, provavelmente, devido aos conhecimentos de anatomia, oriundos dos rituais de mumificação que praticavam conforme sua religião. Imitando as dos egípcios, as estátuas gregas seguiam um padrão rígido, simétrico, em que as personagens eram representadas sempre de frente e com o peso igualmente distribuído entre os membros. No Período Clássico, os gregos começaram a esculpir com leveza e permitiram a ideia de movimento nas obras, o que, devido à tensão e as características físicas do mármore, fez com que os membros, braços e pernas principalmente, começassem a partir. Esse problema foi solucionado com o emprego do bronze, que mesmo mais rígido, ainda favoreceu a leveza e a ideia de movimento. A partir do Período Helenístico, a estatuária grega evoluiu para a composição de cenas completas, com expressividade no rosto e nas linhas de movimento dos corpos, além de serem belas de todos os ângulos possíveis. Assim como nas posteriores pinturas, que os artistas devem compor de forma a levar o interlocutor a se ater a um determinado ponto, independente do ângulo de visão, que, de maneira geral, é um ponto no infinito.

Os romanos legaram muitos conhecimentos dos gregos, entre eles as noções de infinito, que foram aplicados em suas pinturas de mural. A princípio os romanos recobriam as paredes com uma camada de gesso para dar a noção de painel saliente, onde realizavam a pintura, conforme pode ser observado na Figura 9. Com o passar do tempo perceberam que era possível dar essa noção de saliência apenas com o desenho, conduzindo-os a realizar pinturas como janelas abertas, profundidade e a noção de espaço entre os objetos retratados, de acordo com a Figura 10.

Figura 9 - Detalhe de Mural em Primeiro Estilo Primitivo. Pompeia

Fonte: (Beckett, 1994)

Figura 10 - Iniciação ao Culto de Deméter, Afresco da Villa dos Mistérios, Pompeia

Fonte: (Beckett, 1994)

Durante a Alta Idade Média, essas noções de perspectiva foram abandonadas, os artistas anônimos estavam mais preocupados em retratar uma cena religiosa, voltada para a catequese, do que conceber uma cena naturalista. Foi apenas no final da Baixa Idade Média, período do Pré-Renascimento, é que ressurgem nas artes plásticas as noções de infinito. Foram artistas como Cimabue (Figura11), Lorenzetti, Guioto (Figura12) e, principalmente, Jan van Eyck que retomaram o infinito na Arte.

Em consonância com Wendy Beckett (1994), Guioto foi o precursor da perspectiva e, por conseguinte, do infinito na pintura ocidental.

> O revolucionário tratamento que dava à forma e o modo com que representava realisticamente o espaço 'arquitetônico' (de maneira que as dimensões das figuras eram proporcionais às das construções e paisagens circundantes) assinalaram um grande passo na história da pintura. (BECKETT, 1994, p.46).

Guioto fez uso de cores claras, não obstante sólidas e luminosas. Vanguardista e revolucionário na arte, "(...) conseguia dar expressão às figuras humanas e profundidade nas figuras que construiu ao mesmo tempo em que as colocava em sobreposição." (CANOTILHO, 2005). "Para Giotto, o mundo real era a base de tudo.” (BECKETT, 1994, *ibid,* p.46), logo, é patente a percepção do infinito em suas obras.

Figura 11 - Cimabue. Madonna Enthroned with the Child and Two Angels, s.d.

Fonte: (Beckett, 1994)

Figura 12 - Giotto. Lamentação, c. 1304-1313

Fonte: (Beckett, 1994)

4.1. O Infinito na Obra de Jan van Eyck

Jan van Eyck foi um pintor flamengo nascido no século XIV, ao crepúsculo da Idade Média, no período conhecido como Gótico. É considerado um dos grandes mestres da história da pintura ocidental, principalmente devido a invenção da tinta a óleo e do emprego das noções do infinito em suas pinturas.

> Na realidade, este recurso já existia, sendo usado para pintar esculturas e velar a têmpera. A verdadeira realização dos Van Eyck (Jan tinha um irmão, Hubert, a quem atribuem algumas obras de Jan) foi terem desenvolvido, após muitos experimentos, um verniz estável que secava de modo uniforme. Conseguiram isso com óleos de linhaça e amêndoas misturados a resinas. (BECKETT, 1994, *ibid*, p.64).

Jan van Eyck viveu em uma época de transformações intensas, período de transição entre a Idade Média e a Idade Moderna. Época em que as cidades e o comércio recrudesceram e levaram os homens a se afastarem dos dogmas religiosos para buscar respostas centradas no uso da razão. Entretanto, as noções de universo ainda eram finitas, correspondente a um sistema fechado. Mas, foi a partir do confronto entre os dogmas e as novas realidades sociais e políticas da época que surgiram novas explicações e possibilidades para explicar o universo e o infinito, como aconteceu com Galileu.

Conforme Wendy Beckett (1994), na Baixa Idade Média (séculos V – X) não havia perspectiva, os artistas representavam os objetos sobrepostos, ignorando as noções de verossimilhança, ou seja, do que não contraria a verdade estabelecida. Assim, como na Ciência em que os objetos eram dispostos de acordo com a importância ou relevância, o artista o fazia em suas obras. Por exemplo, como predominaram no período os temas religiosos, as personagens sagradas eram sempre representadas em tamanho maior. A partir da Alta Idade Média (séculos X –

XV), os artistas se afastaram dos dogmas religiosos e começaram a representar a natureza o mais próximo o possível da realidade, de forma natural. Essas novas compreensões na arte, conforme pode ser observado nas Figuras 18 - 20, acarretaram a inúmeros estudos e aproveitamentos das noções matemáticas, principalmente acerca do infinito, nas obras de arte.

A obra de Jan van Eyck é caracterizada pelo rigor técnico, realismo e naturalismo. Em seus trabalhos são plausíveis uma enorme riqueza de detalhes, volume e perspectiva. Talvez o seu quadro mais emblemático seja "*O Casal Arnolfini*" (Figura13), pintado em 1434 e que se encontra hoje na *National Gallery*em Londres. Esta obra representa um casamento e é uma cena de caráter particular do cotidiano, que, além do rico trabalho em detalhes e do realismo, foi, quiçá, a primeira obra assinada da história da pintura ocidental. "O mundo de Van Eyck era de uma nitidez luminosa; o artista enxergava as coisas mais corriqueiras com uma clareza maravilhosa e uma grande percepção da espantosa beleza que elas guardam" (BECKETT, 1994, *ibid*, p.62)

Acredita-se, conforme Isabela Fuchs (2018), em seu artigo publicado na Revista Eletrônica Obvious, que esta obra de Van Eyck revela o matrimônio de Giovanni Arnolfini, um bem-sucedido banqueiro da Península Itálica. Que se revela dotado de simbolismo em diversos planos: como retrato de duas figuras proeminentes da sociedade pintadas pelo principal artista local; como um registro de seu casamento; e como comentário sobre as obrigações do casamento em geral, tais como eram comuns à época do século XV. Jan Van Eyck também demonstra nessa obra sua admirável aptidão como pintor, com total comando das mais inovadoras técnicas artísticas, em especial à pintura a óleo.

No Lustre (Figura14) que ornamenta o teto do quarto do casal e, conforme a Figura 13, compõe o infinito, chama a atenção uma única vela que arde. Ela, possivelmente, representa o olho de Deus onipresente. Era costume medieval colocar uma única vela acesa junto ao leito dos casais recém-casados para estimular a fertilidade. As mãos atreladas são centrais no casamento cristão, constituindo a união de duas pessoas em uma só. As mãos unidas também integram a pintura, e o formato delas se repete acima, integrando toda a cena nas formas curvas do candelabro. Na parede, à esquerda do espelho (Figura15), está pendurado um rosário, que era um presente comum de casamento de um futuro marido para sua noiva. O cristal é símbolo de pureza, e o rosário alude a virtude da noiva e seu dever de continuar devota e leal. Ademais, é para este espelho, de acordo com a Figura 13, que converge o olhar do interlocutor, tornando-o o Ponto de Fuga (Figuras 19 - 21). No móvel e na janela há frutos (Figura16) que para uns são pêssegos e para outros laranjas. As laranjas, importadas do sul, eram artigos de luxo na Europa do setentrional, e até podem fazer alusão às origens greco-romanas dos modelos do retrato. As laranjas também eram conhecidas como “pomos de Adão”, empregadas para representar o fruto proibido no Jardim do Éden. Destarte, elas se referem ao pecado mortal da luxúria que, segundo se avaliava, levou à queda do homem do paraíso. Os instintos pecaminosos da humanidade são santificados através do ritual cristão do Matrimônio. Contribuindo ainda mais para o realismo e dirigindo o olhar do interlocutor para o Ponto de Fuga (Figuras 19 - 21). (FUCHS, 2018)

Figura 13 - Jan Van Eyck. O casal Arnolfini, 1434

Fonte: (Beckett, 1994)

Figura 14 - Jan Van Eyck. O casal Arnolfini, 1434 - Detalhe da Lâmpada

Fonte: (Beckett, 1994)

Figura 15 - Jan Van Eyck. O casal Arnolfini, 1434 –Detalhe do Espelho

Fonte: (Beckett, 1994)

Figura 16 - Jan Van Eyck. O casal Arnolfini, 1434 - Detalhe dos Frutos

Fonte: (Beckett, 1994)

Ainda conforme Isabela Fuchs (2018), Giovani de Arrigo Arnolfini era proeminente mercador latino que se constituiu em Bruges, por volta de 1421. Teve ocupações significativas na corte de Filipe, o Bom, Duque da Burgúndia. À época os Países Baixos faziam parte do Império da Burgúndia. Mais tarde, ele tornou-se responsável pelo tesouro da Normandia e enriqueceu-se cobrando tributos impostos sobre bens de importação. Ele usa roupas austeras, que eram airosas na corte. Os tamancos (Figura 13) que se encontram ao lado eram sinal de que um ritual religioso ocorrera – uma amostra de que a obra deve ser uma certidão matrimonial. O destaque dado aos calçados é significativo: os sapatos vermelhos de Giovanna estão próximos ao leito, os de seu esposo próximo ao mundo exterior. À época acreditava-se que bater o chão com os pés descalços garantia a fertilidade. Ainda se pode inferir uma questão religiosa, pois, conforme a Bíblia, não se usa sapatos em lugar sagrado. O cão (Figura13) caracteriza um toque de ternura à obra e que se consagra pela solenidade. A riqueza de detalhes nos pelos é uma demonstração da técnica apurada. Nos retratos, um cão, como animal de estimação, costuma conceber a fidelidade e o amor terreno, provavelmente é este o seu objetivo simbólico nas obras. Ademais, assim como Cantor, construiu com minúcia de detalhes sua obra em referência ao sagrado e ainda, como se tenta construir neste texto, uma conexão com o infinito.

O espelho (Figura15) é cercado por dez das catorze estações da Via Sacra – acontecimentos significativos que se deram durante a jornada de Cristo até sua morte na cruz. O que sugere uma explicação de que a pintura admite uma conotação religiosa cristã e não apenas uma cena cotidiana. No século XV, o matrimônio poderia ser realizado sem a presença de um sacerdote; podia ser realizado em ambiente privado, na presença de testemunhas. No espelho aparecem refletidas de duas personagens, portanto a obra é, na verdade, um documento que certifica o matrimônio de Arnolfini. Giovanna usa um apurado vestido de cor verde, apropriado para um retrato da boa sociedade e de casamento, já que o verde é a cor alegórica da fecundidade. Ela não está grávida – sua pose apenas ressalta o ventre, que à época era considerado um mote de beleza. Possivelmente sua postura e curvatura exagerada do ventre aludam a fertilidade. A noiva era oriunda de uma rica família italiana, e indubitavelmente sua união foi atenciosamente impetrada com um "bom partido". (FUCHS, 2018)

A parte mais significativa de toda a obra e que mais chama a atenção dos interlocutores é a assinatura (Figura17), traçada acima do espelho numa ordenada caligrafia ao estilo gótico, que diz "*Johannes de Eyckfuit hic 1434*" (em latim, Jan van Eyck esteve aqui em 1434). O artista também aparece refletido no espelho (Figura14) como uma das testemunhas do matrimônio.

Figura 17 - Jan Van Eyck. O Casal Arnolfini, 1434 - Detalhe da Assinatura

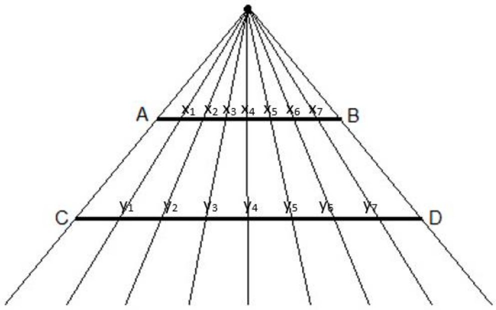
Fonte: (Beckett, 1994)

Foi no espelho convexo (Figura 13) ao fundo do quarto que o autor revelou seus conhecimentos acerca do infinito. De maneira geral, ele construiu a perspectiva traçando paralelas a partir do piso e na disposição das personagens, dirigindo a atenção do interlocutor até o ponto de fuga, que fica no espelho.

4.2. Cantor e Jan Van Eyck

De acordo com as teorias de Cantor, dados dois segmentos não nulos quaisquer AB e CD, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos destes segmentos. Isto pode ser observado na Figura 18.

Figura 18 - Correspondência Biunívoca entre os Segmentos AB e CD



Fonte: Elaborada pelo Autor

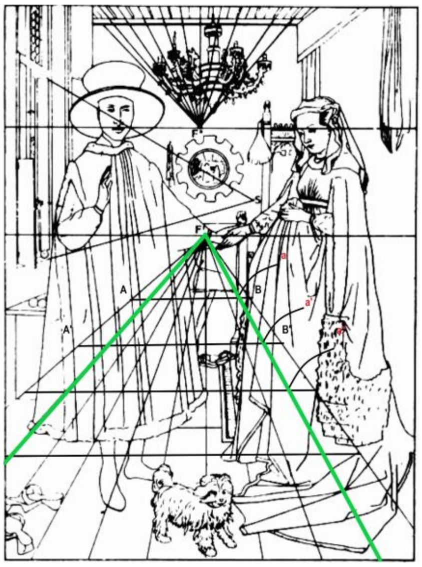
Destarte, correspondência estabelecida entre os pontos $x_1, x_2, \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots$ pertencentes aos segmentos AB e $CD,$ respectivamente,mostram uma forma de estabelecer uma correspondência biunívoca entre os dois conjuntos de pontos que constituem os segmentos. Então pode-se dizer que os conjuntos têm a mesma cardinalidade e escrevemos $AB{\sim}CD$. Segundo Cantor, se dois conjuntos tem a mesma cardinalidade eles são equivalentes.

Mais ainda, se do segmento AB retira-se os pontos A e B, é possível mostrar que este novo segmento tem a mesma cardinalidade da reta, isto é, tem tantos pontos quanto a reta toda possui.

> [...] qualquer intervalo tem a mesma cardinalidade que a reta, isto é, existe uma correspondência biunívoca entre os números de um intervalo e todos os números reais, ou, geometricamente, existem tantos pontos num segmento quantos na reta toda. (BONGIOVANNI, 1993, p.15)

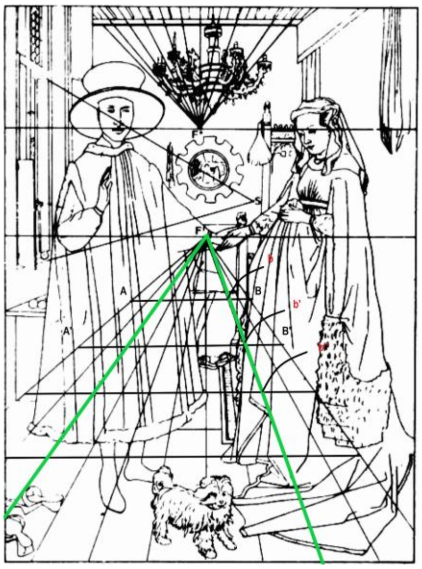
Analisando a obra, Casal Arnolfini, fica claro essa correspondência biunívoca entre os conjuntos. Nas figuras 19 - 21.

Figura 19 - Jan Van Eyck. O Casal Arnolfini, 1434 (Adaptação 1)



Fonte: (Beckett, 1994)

Figura 20 - Jan Van Eyck. O Casal Arnolfini, 1434 (Adaptação 2)



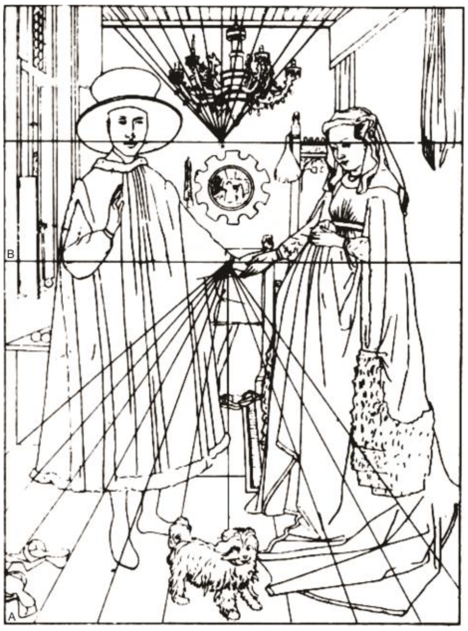
Fonte: (Beckett, 1994)

Considerando o ponto de fuga F', tem-se diversas linhas de fuga que sobre elas pode-se traçar segmentos, como AB e $A'B'$, que representam conjuntos equivalentes. Tais segmentos admitem um conjunto de linhas de fuga, ou melhor, infinitos pontos de vistas (perspectivas). Então, tem-se a correspondência biunívoca entre os conjuntos, pois a cada elemento do segmento AB corresponde um único elemento de segmento $A'B'$ e reciprocamente.

A existência de infinitos números entre dois algarismos está intimamente relacionada à existência de infinitos pontos de um segmento de extremos A e B. E é intrigante o fato de que à época de Jan Van Eyck não havia um estudo teórico desenvolvido como o produzido por Cantor, que só aparece no século XIX. Contudo, Jan van Eyck desenvolve o chamado ponto de fuga, talvez sem o devido conhecimento matemático, que era limitado à sua época, a partir de vários planos possíveis, trazendo à tona a impressão visual da existência de vários infinitos entre cada um dos planos, o que dirige a atenção do interlocutor a esses planos e torna a obra, como um todo, tão bela e agradável.

Quanto a perspectiva, a pintura do Casal Arnolfini revela uma intensa relação com a ciência. Mesmo sem o domínio dos cálculos matemáticos necessários Jan van Eyck executa a imagem desdobrando-se em vários planos, como pode ser observado nas Figuras 19 - 21. Se for traçada uma linha no cão, que aparece em primeiro plano e outra no casal, que está em segundo plano, percebe-se uma distância relativa que pode ser verificada pelas paralelas que convergem a atenção do interlocutor para um ponto no infinito, o chamado ponto de fuga. Dessa forma, entre as retas A, no primeiro plano e a reta B, no segundo plano, podem ser traçadas outras infinitas retas e ainda continuar até o ponto de fuga. Destarte, assim como nas teorias de Cantor, que existem infinitos números entre dois algarismos, existem infinitos planos entre as duas retas, A e B, traçadas na imagem de Jan van Eyck.

Figura 21 - Jan Van Eyck. O Casal Arnolfini, 1434 (Adaptação 3)



Fonte: (Beckett, 1994)

Essa análise denota a qualidade técnica do artista setentrional como genial e é possível inferir dela a relação entre essa obra de arte e a noção de infinito dada por Cantor. Ademais, à sua época os conhecimentos acerca da Matemática e da Geometria eram limitados e as teorias que tratam do infinito, que até os dias atuais se apresentam com uma certa complexidade, eram ainda incipientes. É lúcido tratar tal obra como um trabalho de exaltação ao racionalismo e ao cientificismo que predominariam na civilização europeia a partir daquele momento do crepúsculo da Idade Média e limiar da Idade Moderna, o Renascimento.

4.3. O Infinito na Obra de Maurits Cornelis Escher

A obra de Escher possui de forma implícita, por si só, um elemento de irretorquível inspiração ao trabalho de muitos autores ao longo do tempo. Não só no que tange a Arte e Matemática, onde a obra de Escher compõe um inegável pilar de inquirição, as possibilidades nela implícita é captada pelo olhar de vários estudiosos inclinados aos domínios dos saberes.

Para melhor tratar das relações entre a obra e o infinito segue, conforme Frazão (2018), a Biografia de M. C. Escher (1898-1972) que foi um pintor e gravador batavo, conhecido, principalmente, por sua técnica em xilogravuras e litogravuras que representam obras prodigiosas, insólitas, construídas em perspectiva, causadoras de ilusão de ótica no observador. Para muitos, deve ser tratado como um artista matemático, principalmente geômetra.

Maurits Cornelis Escher é natural de Leeurwarden, situada ao norte da Holanda e veio à luz no dia 17 de junho de 1898. Descendente de George Arnold Escher, engenheiro civil e dirigente de uma divisão de engenharia do Estado, e de sua segunda esposa, Sara Gleichman, era o caçula de três irmãos. Em 1903, toda família transfere-se para Amhelm, onde Maurits iniciou seus estudos. Ainda na adolescência, demostrou talento para o desenho e foi incentivado pelos professores. Em 1919, ingressou na School of Architecture and Decorative Artes, em Haarlem. Ao alargar o interesse por desenho e gravura, passou então a estudar Artes Decorativas deixando de lado a arquitetura, aconselhado pelo professor Samuel Jessurun de Mesquita.

Em 1921, Escher e sua família visitaram a Itália, que se tornou um dos lugares prediletos do artista. No ano seguinte, voltou à Itália quando visitou inúmeras cidades, entre elas, Florença, Siena e Ravello, onde buscou inspiração para sua arte. Conheceu também a Espanha, quando visitou Madri, Toledo e Granada, se arrebatando com a cidade muralhada de Alhambra e seu palácio do século XIV, quando conheceu os mosaicos e arabescos da arte decorativa islâmica, que foi inspirador para muitos de seus trabalhos.

Em 1923, período em que estava na Itália, conheceu Jetta Umiker, com quem se uniu em matrimônio a 12 de junho de 1924. O casal se constituiu em Roma, onde em 1926, Escher adquiriu uma casa. O casal teve três filhos. Escher viveu na obscuridade até 1951, quando pôr-se a vender suas xilogravuras e litogravuras. Em 1954, alcançou destaque pela geometria constante em suas obras, um predicado da arte islâmica que o inspirava.

Em 1935, durante o regime Fascista de Mussolini, Escher trocou, compulsoriamente, a Itália, pela Suíça, onde permaneceu durante dois anos. Em 1937, resolve transferir-se para Uccle, na Bélgica. Em 1941, durante a Segunda Grande Guerra, retorna a sua terra natal, mais precisamente na cidade de Baaru, na Holanda. Em 1944, falece seu antigo professor Samuel Mesquita. Escher contribuiu para proteger seus trabalhos e em 1946, preparou um memorial para o velho amigo no Museu Stedelijk.

A obra de Escher açambarcou diversas fases: O “Período das Paisagens” (1922-1937), período em que viveu na Itália, quando concebeu as estradas sinuosas do campo italiano e sua arquitetura sobrecarregada de pequenas cidades das abas, o “Período das Metamorfoses” (1937-1945), quando a forma ou objeto era decomposto em algo completamente diferente – tornando-se, talvez, o tema favorito de Escher, o “Período das Gravuras Subordinadas à Perspectiva” (1946-1956) e “Período da Aproximação ao Infinito” (1956-1970).

Escher veio a falecer em Laren, cidade de sua terra natal, no dia 27 de março de 1972.

Escher enveredou entre a Matemática e a Arte. Entretanto, conforme suas palavras, a despeito de não possuir formação acadêmica em Matemática, pressentia ser mais próximo de um matemático do que dos artistas de sua época, demonstrando particular alacridade ao interesse com que os matemáticos e cientistas admiravam a sua obra, assumindo que “…um contato fecundo pôde ser estabelecido entre os matemáticos [e ele próprio]…” (ESCHER *apud* MARTINHO, 1998, p. 9).

O conceito de infinito é marcadamente presente na obra de Escher. Em muitos de suas obras Escher se aproxima dele tanto e tão precisamente quanto possível.

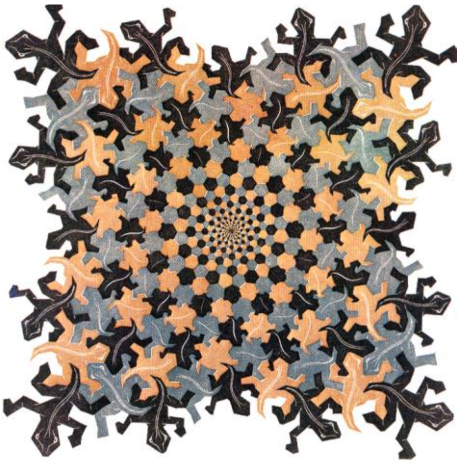
Em um trabalho publicado em 1959, Escher exibe bem o seu deslumbre pela ideia de infinito:

> “...não podemos imaginar que algures por detrás da estrela mais longínqua do céu noturno, o espaço possa ter um fim, um limite para além do qual nada mais existe. O conceito de vácuo diz-nos ainda alguma coisa, pois um espaço pode estar vazio (...), mas a nossa força de imaginação é incapaz de apreender o conceito de nada no sentido de ausência de espaço...”(ERNEST, 1978, p.102)

Destarte, essa aproximação ao infinito acorre a partir da utilização de “diagramas” pelos quais empreende a expectativa de reprodução de algo infinito sobre uma superfície plana, com apenas altura e largura. Em princípio, ocorre através de figuras em que é plausível uma diminuição radial progressiva das margens para um ponto no centro. Dessa forma, ocorre como que um abatimento ou tendência para um ponto infinitamente menor. Não obstante, quando há concentração no ponto central da figura e ainda se começa a desviar a atenção do olhar para um ponto no exterior percebe-se a representação de um ponto infinitamente maior.

Esta é a técnica que pode ser percebida na gravura Evolução II (Figura 22), de 1939, em que Escher representa um plano preenchido por répteis ligando uns aos outros, conduzindo o interlocutor, por intuição, a perceber a aproximação ao infinito muito pequeno, como também ao infinito muito grande.

Figura 22 - M. C. Escher. Evolução II, 1939

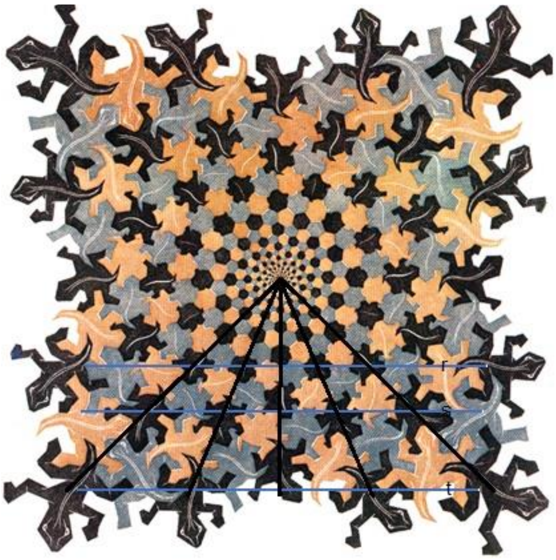


Fonte: (Ernest, 1978)

Na obra Evolução II, pode-se identificar a definição de conjunto infinito de Cantor, “um conjunto é infinito se existe um subconjunto próprio dele que possui mesma cardinalidade que ele”, isto é, o conjunto e o subconjunto próprio dele possuem o mesmo “tamanho”.

Na obra, observa-se um ponto de fuga ao centro e os lagartos percorrem as “linhas de fuga”. Assim, cada camada de lagarto na horizontal pode ser vista como um conjunto ou um subconjunto cujos elementos estão associados por uma correspondência bijetora. Na Figura 23 foram traçados os segmentos r, s e t, bem como cinco linhas de fuga, da extremidade para o centro, onde é possível perceber como o artista utiliza da correspondência biunívoca estabelecida por Cantor, para associar a cada lagarto de t outro em s e outro em r. Na gravura, é possível perceber como a ideia de cardinalidade entre segmentos de tamanhos diferentes, por exemplo os contidos em r, s e t, pode trazer uma percepção visual de uma sequência de pontos, neste caso lagartos, tomados cada vez menores, em direção ao ponto de fuga, e que passa uma ideia de que é sempre possível tomar um ponto após o outro numa repetição interminável e, portanto, com destino ao infinito.

Figura 23 - M. C. Escher. Evolução II, 1939 (Adaptado)



Fonte: (Ernest, 1978)

Desta forma, se forem retirados os lagartos que estão na primeira borda (exterior) do quadrado, obtém-se um novo desenho, mas este coincide com o anterior, no sentido de poder estabelecer uma correspondência biunívoca entre cada lagarto do primeiro quadrado com um do segundo (aquele que foi retirado a “borda”).

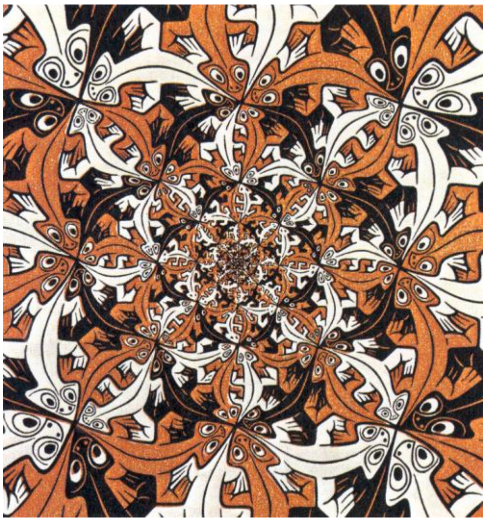
Na verdade, pode-se escolher retirar as 10 primeiras bordas e ainda assim impetra-se a correspondência biunívoca, isto denota com clareza uma ideia de infinito como algo que ao retirar-se dele uma porção ou quantidade finita, ele ainda permanece como que inalterado, como que idêntico ao que era. E, reciprocamente, pode-se pensar em acrescentar uma quantidade finita de elementos a ele e ainda assim ele permanecer como que inalterado, idêntico ao que era, no sentido de haver uma correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto atual e o do conjunto acrescido de uma quantidade finita de elementos.

Em sua carreira Escher buscou representar o infinito em diversas técnicas. Após 1955 buscou a seriação de figuras análogas. Dessas, identificam-se três grupos distintos, conforme os diagramas que lhe compõe a base: Gravuras de limite quadrado, Gravuras com espiral e Gravuras de Coxeter.

4.3.1. Gravuras de limite quadrado

Este grupo é composto por obras que talvez, pela construção, são as de maior simplicidade. Em princípio, a imagem Cada vez mais Pequeno I (Figura 24), confeccionada em 1956, possui em sua construção um número infinito de lagartos, interligados uns aos outros.

Figura 24 - M. C. Escher. Cada vez mais Pequeno I, 1956



Fonte: (Ernest, 1978)

Em diversas das obras de Escher esta mesma ideia de construção do infinito pode ser observado, como na gravura Limite Quadrado de 1964 (Figura 25) à cerca da qual, numa carta Escher observou:

> “...o professor Coxeter chamou-me a atenção para o método da redução de dentro para fora, o qual anos em vão, tinha procurado. Pois uma redução de fora para dentro (como em Cada vez mais Pequeno I) não traz nenhuma

> satisfação filosófica porque assim não resulta nenhuma composição logicamente acabada e perfeita...” (ERNEST, 1978, p.104-105)

Figura 25 - M. C. Escher. Limite Quadrado, 1964

Fonte: (Ernest, 1978)

4.3.2. Gravuras com Espiral

Escher elaborou uma série de xilogravuras em espiral como Turbilhões, 1957, Senda da Vida I, 1958, Senda da Vida II, 1958 (Figura 26) e Senda da Vida III, 1966, que podem servir de exemplos deste grupo. Nelas o esquema que lhes compõe a base é tão somente uma série de espirais logarítmicas. O jocoso é saber que Escher, até onde se sabe, desconhecia o conceito de logaritmo. Não obstante, o objetivo aparente das obras não é apenas a representação do infinito muito pequeno, mas do infinito como um todo e em sua simplicidade. Existe algo implícito nas gravuras!

Figura 26 - M. C. Escher. Senda da Vida II, 1958

Fonte: (Ernest, 1978)

De modo geral, Escher procura constituir uma relação ao ritmo biológico — nascimento, crescimento e morte de forma que expressou o crescimento do próprio infinito muito pequeno do agitar vital até ao infinitamente grande e, por fim, o seu retorno ao infinitamente pequeno.

Fixando o olhar no peixe maior (Figura 26) com a calda branca e a cabeça, que se encontra em baixo à esquerda é adjacente à cauda de um segundo peixe, que se encontra logo ao lado e é menor. Destarte, perseguindo os peixes cada vez menores, percebe-se o espiral que está em vermelho até ao centro, onde os peixes são tão pequenos até o ponto de não serem distinguidos. Tem-se assim, a aproximação ao infinito muito pequeno e por afinidade ao infinito muito grande ao dirigir atenção do interlocutor por meio de uma espiral azul, pela a qual os peixes se tornam cada vez maiores. Abordada a extremidade, a espiral azul alinha-se com a vermelha e, com isso, retorna-se ao ponto de partida de modo que os peixes variam novamente de cor e reinicia-se o ciclo. Destarte, a analogia biológica está feita. Um peixe branco brota no centro, se desenvolve até atingir o seu máximo tamanho e, encanecido, retorna como peixe cinzento a “submergir no infinito” de onde teve início a jornada.

4.3.3. Gravuras de Coxeter

Escher descobriu um diagrama ao ler um livro de H. S. M. Coxeter que lhe causou espanto devido a possibilidade de novas aproximações ao infinito. A partir desse momento, ele compõe uma série de obras com o tema Limite Circular que referendam a ilustração de Coxeter, como Limite Circular I, 1958 (Figura 27) e Limite Circular III,1958 (Figura 5) e sobre as quais escreveu: “Para além das três linhas retas que passam pelo ponto central o esqueleto desta figura consiste em menos arcos de circunferência com um raio sempre mais curto, quanto mais se aproxima da periferia. Além disto todas se intersectam em ângulo reto...”. (ERNEST, 1978, p.108)

Figura 27 - M. C. Escher. Limite Circular I, 1958

Fonte: (Ernest, 1978)

As obras de Escher conferem o trabalho de um homem muito inteligente e dedicado e irreverente, o que não significa displicente. Ademais, seus trabalhos denotam, além do envolvimento técnico, estudos aprofundados de outras áreas do conhecimento, como a Geometria e, principalmente, acerca do infinito. De acordo com Keith Devlin:

> Limite circular III, da autoria do artista holandês M. C. Escher. O interior do círculo é um mundo em que a geometria é hiperbólica. Dentro deste mundo todas as criaturas que se veem têm o mesmo tamanho. A aparente redução do tamanho à medida que nos aproximamos da circunferência, deve-se à forma como este mundo hiperbólico se encontra encaixado na geometria euclidiana da página onde aparece. Escher era um artista prolífico, a quem as ideias matemáticas sempre fascinaram ao longo de toda a sua carreira. Tinha profundos conhecimentos de geometria e construiu temas geométricos em muitas das suas gravuras e xilogravuras. Escher baseou esta xilogravura particular num modelo circular da geometria hiperbólica inventada por Henri Poincaré. (DEVLIN, 2002, p. 135)

Escher legou em sua obra os vínculos entre tempo e espaço, entre eternidade e infinitude nas superfícies planas de seus desenhos. Apesar de não haver na literatura disponível uma relação direta entre Escher e Cantor, é plausível perceber que, implicitamente, como demonstram as análises anteriores, a teoria dos conjuntos infinitos do matemático foi utilizada com alguma propriedade pelo artista, dando ao infinito uma vertente visual, uma forma de torná-lo plausível aos sentidos mais simples, contribuindo para uma melhor compreensão.

5. CONCLUSÃO

As muitas dificuldades em explicar as teorias do infinito, por se tratar de conceitos abstratos, conduziram os estudos inerentes a este trabalho. As observações permitiram ainda entender que utilização de elementos plausíveis, concretos e até tangíveis podem ajudar na apreensão do infinito matemático. Então, essa relação entre a Arte e a Matemática mostrou-se bastante eficiente. Afinal, os estudantes conseguem perceber pelos sentidos o infinito e a partir daí entendê-lo. Um princípio hedonista e muito eficiente.

A Matemática, como linguagem, não se caracteriza por mecanizar os conceitos, trata-se de uma necessidade, de uma arte a ser desvendada por todos. Esta afinidade fecunda possui um potencial pedagógico no ensino da Matemática. É plausível compreender que de acordo com vários estudos efetivados, se conclui que as imagens são mais diligentes em memória que apenas palavras, já que, de acordo com Lieury (1997, p. 49), "a memória de imagens é extremamente poderosa e duradoura (…) mas a memória das imagens não é a memória 'fotográfica' da concepção popular, mas sim a da síntese da imagem", tratando-se então da decorrência de variados engenhos. Para ler uma imagem, deve-se sempre associar a palavras e conceitos, o que demanda tempo, mas favorece um melhor entendimento.

Cantor foi um matemático a frente do seu tempo e o seu legado científico ainda deve ser outras infinitas vezes estudado. As relações com as pinturas de Jan van Eyck, artista do final da Idade Média e prelúdio da Idade Moderna, período em que as demonstrações matemáticas acerca do infinito começaram a fazer sentido e Maurits Cornelis Escher, cuja a obra, de maneira geral, se confunde com o infinito, a escolha para tentar deixar mais interessante aos estudantes e, ao mundo acadêmico de maneira geral.

Este texto é ainda insipiente e por isso aberto a críticas e acréscimos. Ademais, não é tarefa simples relacionar Cantor, Jan van Eyck e Maurits Cornelis Escher, que foram as principais personagens do presente trabalho.

De acordo Munari (1968, p. 19-20), “conhecer as imagens que nos rodeiam significa também alargar as possibilidades de contato com a realidade, significa ver mais e perceber mais”. As obras de Escher e Jan van Eyck são exemplos concretos de como as imagens podem contribuir para o entendimento de assuntos complexos, ao oposto do exclusivo emprego das palavras. Ademais, através das suas construções, os artistas conseguem plasmar as transformações do plano: translações, rotações e reflexões, tornando as elucidações acerca do infinito plausíveis ao olhar dos estudantes.

Atingir os estudantes e atender suas demandas educacionais, principalmente na Escola Pública que é muito carente na maior parte do Brasil, é muito mais gratificante. Principalmente, conseguir elucidar conceitos matemáticos tão complexos, tratar do infinito de forma prática e relativamente simples, aprimorando o inteligível, que é o infinito, e o tangível que é a Arte, é algo grandioso para um professor.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, Nicola. *Dicionário de Filosofia.* São Paulo: Mestre Jou, 1962.

ANDRADE, Maria Gorete Carreira. *Um breve passeio ao infinito real de Cantor*. V Bienal da SBM, UFPB, 18 a 22 de outubro de 2010. Disponível em: http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Conferencias%20Apresentadas/C%205.pdf. Acesso em 17 de outubro de 2018.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. *Várias faces da matemática*: tópico para licenciaturas e leitura geral. São Paulo, 2010.

BARBOSA, Ana Mae. *Tópicos Utópicos*. Belo Horizonte: Editora C/Arte, 1998.

BECKETT, Wendy. *The Story of Painting. História da pintura*. Tradução: Mário Vilela. São Paulo: Ática, 1994.

BONGIOVANNI, Vicenzo. *1,2,3,..., e Depois? In* Revista do Professor de Matemática Nº 24. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira da Matemática, 1993.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo: Ed Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio. Brasília, 1998.

CALDER, Allan. *O Infinito*: teste decisivo para a construtivismo. *In* Scientific American. São Paulo: Duetto, 2006.

CANOTILHO, Luís Manoel Leitão. *Educação matemática e arte*: um estudo da representação em perspectiva nas pinturas do renascimento Disponível em: http://www.ipt.pt/~luiscano. 2005. Acesso em 17 de outubro de 2018.

CANTOR, Georg - Biografia. *Enciclopédia Mirador Internacional e Georg Cantor y lateoría de conjuntos transfinitos*. UOL - Educação. Acessoem 22 de outubro de 2017.

DELAHAYE, Jean-Paul. *O infinito é um paradoxo na matemática?In* ScientificAmerican. São Paulo: Duetto, 2006.

DEVILIN, Keith. *Matemática*: A Ciência dos Padrões. Porto: Porto Editora, 2002.

DIEGUEZ, Flávio. *Georg Cantor e o álefe-zero: O homem que colocou o infinito no bolso*. O alemão Georg Cantor, no início do século, desafiou o senso comum ao descobrir números que a imaginação matemática ainda não alcançava. https://super.abril.com.br, 1994. Acesso em 23 de novembro de 2017.

ERNST, B. *The Magic Mirror of M. C. Escher*. England: Tarquin Publications, 1978.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 2004.

FLOOD, Raymond; WILSON, Robin. *A História dos Grandes Matemáticos*: As descobertas e a propagação do conhecimento através das vidas dos grandes matemáticos.1. ed. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2013.

FRAZÃO, Dilva. https://www.ebiografia.com/bertrand_russell/. Acesso em 22 de outubro de 2017.

_______. https://www.ebiografia.com/m_c_escher/. Acesso em 03 de fevereiro de 2017.

FUCHS, Isabela. *Casal Arnolfini*: mistério, perfeccionismo e talento http://lounge .obviousmag.org/quer_dizer/2012/07/casal-arnolfini-misterio-perfeccionismo-e-talen-to.html. Acesso em 20 de Outubro de 2018.

HALLETT, M. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size. Clarendon Press*, Oxford, 1996.

INSTITUTO ARTE NA ESCOLA. *Arte e Matemática - Tempo e infinito*. Autoria de Solange Utuari; coordenação de Mirian Celeste Martins e Gisa Picosque. – São Paulo: 2010. Disponível em: https://tvescola.org.br/tve/video/tempoeinfinito. Acesso em 26 de janeiro de 2018.

JUVENIL, Antonio. *Estudos de Desenho:* Elementos de Perspectiva. Disponível em: http://www.sobrearte.com.br/desenho/perspectiva/elementos_da_perspectiva.php. Acesso em 11 outubro de 2018.

KAWANO, *Carmen. Além do infinito*: A batalha filosófica de Georg Cantor para ampliar a fronteira da matemática, Eureca, Editora Abril. http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT638940-2680,00.html, 2015. Acesso em 23 de Novembro de 2017.

LIEURY, Alain. *Memória e sucesso escolar*. Lisboa: Editorial Presença, 1997.

LIMA, Elon Lages. Curso de análise volume 1, 7ª edição. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Cnpq, 1992.

MAOR, Eli. *To infinity and beyond:* a cultural history of the infinity. N.J.: Princeton University Press, 1991.

MARTINHO, M. M.C. Escher - Arte e Matemática. (APM, Ed.). Guimarães: Gráfica Covense, Lda, 1998.

MORRIS, Richard. *Uma breve história do infinito*: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

MUNARI, Bruno. *Design e comunicação visual*. Lisboa: Edições 70, 1668.

ORTIGUES, Edmond. *Interpretações*. *In*.: Enciclopédia Einaudi. Vol. II. Lisboa: Imprensa Nacional/Casa da Moeda, 1987.

ROONEY, Anne. *A História da Matemática*: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2012.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. *Tópicos de História da Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.