UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Eventos temporais: uma forma interessante de aprender probabilidade

Francisco Masashi Ueno

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Francisco Masashi Ueno

Eventos temporais: uma forma interessante de aprender probabilidade

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Geraldine Goes Bosco

USP – São Carlos
Junho de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

U22e

Ueno, Francisco Masashi
Eventos temporais: uma forma interessante de aprender probabilidade / Francisco Masashi Ueno; orientadora Geraldine Góes Bosco. -- São Carlos, 2019.
126 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Probabilidade. 2. Processos estocásticos. 3. Cadeias de Markov. I. Bosco, Geraldine Góes , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Francisco Masashi Ueno

Temporal events: an interesting way to learn probability

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Geraldine Goes Bosco

USP – São Carlos
June 2019

À minha esposa Elaine que sempre me incentivou,
e de forma carinhosa sempre me deu força e coragem,
me apoiando e motivando nos momentos de maiores dificuldades.
E também para as minhas filhas Naomi e Tiemi
que embora ainda não entenderem o significado desta trajetória
estimularam de maneira especial os meus pensamentos
me levando buscar mais conhecimentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, por ter dado saúde e ter permitido realizar este trabalho.

Agradeço a minha esposa, Elaine e minhas filhas, Naomi e Tiemi, pelo incentivo, paciência, compreensão e companhia durante toda a realização deste trabalho. Compreenderam minhas ausências e apoiaram em toda a trajetória principalmente nos momentos mais difíceis.

À minha orientadora, Professora Doutora Geraldine Goes Bosco, pela orientação prestada, pelo seu incentivo, disponibilidade , dedicação, por toda a paciência e apoio que sempre demonstrou. Agradeço por me ter corrigido sempre que necessário sem nunca me desmotivar.

A todos os familiares, que mesmo de longe, estarem ao meu lado e terem compreendido a necessidade das minhas faltas em compromissos da família.

Aos todos os meus amigos, pelo apoio e incentivo durante todo o curso deste trabalho.

Aos professores do PROFMAT, por transmitirem todo conhecimento e incentivo a cada etapa, nos motivando a sempre prosseguir.

Aos meus amigos do PROFMAT, pelo convívio, amizade e companheirismo.

À CAPES, pois "o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES)- Código de Financiamento 001".

RESUMO

UENO, F. M. **Eventos temporais: uma forma interessante de aprender probabilidade**. 2019. 126 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

A contextualização de eventos próximos da realidade dos alunos aliada a utilização da informática como ferramenta auxiliar no aprendizado da probabilidade, pode ser um dos caminhos para a melhoria do ensino de Matemática. Assim, este trabalho buscou a modelagem matemática de eventos temporais do dia a dia dos alunos do ensino básico. A modelagem se baseou no conceito de Cadeias de Markov e teve o objetivo de auxiliar o professor dos ensinos fundamental e médio a introduzir o conceito de probabilidade. As aplicações das Cadeias de Markov também possibilitam apresentar aos alunos dos ensinos médio e fundamental como a Matemática pode resolver problemas do cotidiano. Para introduzir os conceitos de Cadeias de Markov foi necessário uma revisão teórica dos conceitos da teoria da probabilidade e os conceitos de Cadeias de Markov foram estudados em literatura em língua inglesa. Considerando o interesse e curiosidade demonstrado pelos alunos em experiência prévia com o material, as atividades mostraram-se muito eficientes. Espera-se que esse trabalho possa contribuir para a prática docente de outros professores.

Palavras-chave: Probabilidade, Processos estocásticos, Cadeia de Markov.

ABSTRACT

UENO, F. M. **Temporal events: an interesting way to learn probability**. 2019. 126 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

The contextualization of events close to the reality of the students allied to the use of information technology as an auxiliary tool in the learning of probability, can be one of the ways to improve the teaching of Mathematics. Thus, this paper sought the mathematical modeling of temporal events from the daily of students of basic Education. The modeling was based on the concept of Markov Chains and aimed to help the middle and high school teachers to introduce the concept of probability. The applications of the Markov Chains also make it possible to present to the students of the middle and high school teachings how Mathematics can solve daily problems. To introduce the concepts of Markov Chains, a theoretical revision of the concepts of probability theory was necessary and the concepts of Markov Chains were studied in literature in English Language. Considering the interest and curiosity demonstrated by the students in previous experience with the material, the activities were very efficient. It is hoped that this paper may contribute to the teaching practice of other teachers.

Keywords: Probability, Stochastic Processes, Markov Chain.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagrama de Venn de $A \cup B$ 28
Figura 2 – Diagrama de Venn de $A \cap B$ 28
Figura 3 – Diagrama de Venn A^c 29
Figura 4 – Diagrama de Venn de $A - B = A \cap B^c$ 29
Figura 5 – Diagrama de Venn de $A \cap B = \emptyset$. 29
Figura 6 – Diagrama de Venn de $A \subset B$ 33
Figura 7 – Diagrama de Venn de $A \cup B$ 33
Figura 8 – Função de uma Variável aleatória 41
Figura 9 – Função de uma Variável aleatória bidimensional 48
Figura 10 – Diagrama de transição de estados do exemplo 29 58
Figura 11 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de estado acessível 59
Figura 12 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de estado que se comunica . . 59
Figura 13 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de uma cadeia irredutível - 1 . 59
Figura 14 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de uma cadeia irredutível - 2 . 60
Figura 15 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de uma cadeia redutível 60
Figura 16 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de estados transientes e recorrentes 60
Figura 17 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de estado absorvente 61
Figura 18 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de uma cadeia irredutível - 3 . 61
Figura 19 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de uma cadeia irredutível - 4 . 63
Figura 20 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de uma cadeia aperiódica . . . 64
Figura 21 – Diagrama de árvore 65
Figura 22 – Ilustração de Urna de Ehrenfest 84
Figura 23 – Diagrama da Urna de Ehrenfest 84
Figura 24 – Diagrama da Urna de Ehrenfest 5 bolas 85
Figura 25 – Diagrama de transição Exemplo 38 91
Figura 26 – Diagrama de transição entre estados Chuvoso e Ensolarado 99
Figura 27 – Diagramas de árvores de probabilidades em 2 passos - Previsão do Tempo . 100
Figura 28 – Diagrama de árvore - probabilidade em 2 passos - estado inicial Chuvoso . . 100
Figura 29 – Diagrama de árvore de probabilidade em 3 passos - estado inicial Chuvoso e estado final Chuvoso 101
Figura 30 – Diagrama de transição entre estados Próprio e Impróprio 105
Figura 31 – Qualidade das praias de Guarujá-SP - 1º semestre de 2018 109
Figura 32 – Diagrama de transição entre estados Gol e Defesa 112

Figura 33 – Diagramas de árvores de probabilidades em 2 passos - Penalidade 112
Figura 34 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de preferência de marca de celular 118
Figura 35 – Calculadora de Matrizes 121

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Análise semanal da qualidade da praia .... no período de Janeiro/2018 Junho/2018 107
Quadro 2 – Análise semanal da qualidade da praia da Enseada da cidade de Guarujá no período de Janeiro/2018 Junho/2018 110
Quadro 3 – Resultado dos últimos 20 pênaltis cobrados por 113
Quadro 4 – Resultado dos últimos 20 pênaltis cobrados por Lionel Messi 115

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Variável aleatória bidimensional - lançamento de 2 dados 48
Tabela 2 – Distribuição de probabilidade conjunta 49
Tabela 3 – Distribuição de probabilidade de (X, Y) 51
Tabela 4 – Representação da distribuição de probabilidade conjunta 52
Tabela 5 – Distribuições marginais de X e Y 53
Tabela 6 – Distribuição condicional de probabilidade de X dado $\{Y = 0\}$ 54
Tabela 7 – Probabilidade de transição do Exemplo 29 57
Tabela 8 – Transição de estados de uma Cadeia de Markov períodica do Exemplo 35 onde $n = 3m$, ou seja para trajetórias de mudanças de estados de $i \to j$ em uma quantidade múltipla de 3 passos 81
Tabela 9 – Transição de estados de uma Cadeia de Markov períodica do Exemplo 35 onde $n = 3m+1$, ou seja para trajetórias de mudanças de estados de $i \to j$ em $3m+1$ passos 82
Tabela 10 – Transição de estados de uma Cadeia de Markov períodica do Exemplo 35 onde $n = 3m+2$, ou seja para trajetórias de mudanças de estados de $i \to j$ em $3m+2$ passos 83
Tabela 11 – Transição de estados de uma Cadeia de Markov períodica para $m \to \infty$ do Exemplo 37 - Urna de Ehrenfest com 5 bolas 90
Tabela 12 – Frequência de mudança de classificação da praia 106
Tabela 13 – Porcentagem de mudança de classificação dos estados 107
Tabela 14 – Frequência de mudança de classificação da praia da Enseada 109
Tabela 15 – Porcentagem de mudança de classificação dos estados da praia da Enseada no Guarujá-SP 109
Tabela 16 – Frequência de mudança de estados do jogador 114
Tabela 17 – Porcentagem de mudança de classificação dos estados do jogador 114
Tabela 19 – Quantidade de mudança de estados nas cobranças de penalidades - de Lionel Messi 115
Tabela 20 – Probabilidade de mudança de estados (Probabilidade de Transição) nas cobranças de penalidades - Lionel Messi 116
Tabela 21 – Mudança de marca de celular dos alunos - 1 119
Tabela 22 – Mudança de marca de celular dos alunos - 2 119

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO . . . 21
1.1 Escolha do tema . . . 21
1.2 Contexto histórico . . . 22
1.3 Currículo Oficial . . . 23
1.4 A estruturação deste trabalho . . . 24

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . 27
2.1 Conceitos iniciais . . . 27
2.1.1 Conjuntos . . . 27
2.1.2 Experimento aleatório e espaço amostral . . . 30
2.2 Probabilidade . . . 30
2.2.1 Definição Axiomática da Probabilidade . . . 30
2.2.2 Definição axiomática x abordagem "clássica"da probabilidade . . . 34
2.3 Probabilidade Condicional . . . 35
2.3.1 Regra geral da multiplicação . . . 37
2.4 Eventos independentes . . . 38
2.5 Variável aleatória discreta . . . 40
2.5.1 Definição variável aleatória discreta . . . 40
2.5.1.1 Distribuição de massa de probabilidade . . . 41
2.5.1.2 Função de variável aleatória . . . 42
2.5.1.3 Esperança $\mathbb{E}(X)$ . . . 43
2.5.1.4 Variância Var(X) . . . 44
2.5.2 Distribuição Bernoulli . . . 45
2.5.3 Distribuição de binomial . . . 46
2.5.4 Distribuição geométrica . . . 47
2.6 Vetores aleatórios discretos . . . 47
2.6.1 Distribuição de probabilidade conjunta . . . 49
2.6.2 Distribuição marginal . . . 51
2.6.3 Distribuição condicional . . . 53
2.6.3.1 Variáveis Aleatórias Independentes . . . 54
2.7 Processos estocásticos . . . 55
2.7.1 Cadeias de Markov . . . 56
2.7.2 Classificação dos estados . . . 59

2.7.3 Distribuição de equilíbrio 65
2.7.4 Existência e unicidade da distribuição de equilíbrio 68

3 CADEIAS DE MARKOV NOS ENSINOS MÉDIO E FUNDAMENTAL 97
3.1 Aplicando o plano de aula 98
3.1.1 Atividade 1 - Previsão do Tempo 98
3.1.2 Atividade 2 - Qualidade das praias 104
3.1.2.1 Exemplo analisado pelos alunos - Atividade 2 - Qualidade das praias 108
3.1.3 Atividade 3 - Probabilidade de acerto de Pênaltis dos jogadores de futebol 111
3.1.3.1 Exemplo analisado pelos alunos - Atividade 3 114
3.1.4 Atividade 4 - Preferência de marca de celular 117
3.1.4.1 Resultado da atividade 4 118
3.1.5 Usando o site Calculadora de Matrizes - https://matrixcalc.org/pt 120

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 123

REFERÊNCIAS 125

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

No ensino de Matemática muito se tem falado sobre a contextualização dos conteúdos, mostrando aos alunos como a Matemática pode ser utilizada no dia a dia. Mas o que se percebe muitas vezes é que a contextualização utilizada foge completamente do cotidiano do aluno, não sendo atraente e nem auxiliando o seu aprendizado. As aplicações e contextualizações apresentadas nos livros didáticos são bem distantes da realidade dos alunos e portanto não colaboram para a melhora do aprendizado. Cada vez mais observamos eventos ou situações que evoluem ao longo do tempo, que chamamos aqui de eventos temporais. Os eventos que aqui tratamos são aleatórios e não determinísticos, que se traduzem em uma ótima oportunidade para a introdução do conceito de probabilidade. Neste trabalho escolhemos um tipo específico de evento temporal, que são as Cadeias de Markov.

As Cadeias de Markov podem auxiliar na contextualização de eventos e promover uma melhora no aprendizado pois permitem a modelagem de situações cotidianas interessantes e motivadoras mais próximas da realidade dos alunos. As Cadeias de Markov podem tanto modelar situações temporais e prever algum comportamento futuro como auxiliar na tomada de decisão.

Este trabalho tem como objetivo utilizar a riqueza dos exemplos em que se podem usar as Cadeias de Markov para introduzir conceitos de probabilidade nos ensinos fundamental e principalmente no médio, ou seja, sugerir exemplos de situações-problema que possam ser utilizados como motivadores no ensino da Probabilidade aos respectivos alunos.

1.1 Escolha do tema

A autor é formado em Ciências Contábeis e fez uma complementação pedagógica para poder lecionar como professor de Matemática. Deste modo a formação matemática ficou comprometida, visto que muitos conteúdos não foram vistos nos cursos de complementação pedagógica e em Ciências Contábeis. Quando o autor conheceu o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) viu uma oportunidade de ter um aperfeiçoamento/formação de qualidade que fosse possível para professores da escola pública. Ao iniciar o curso foram muitas as dificuldades pois com a formação que o autor tinha era quase tudo novidade. O curso propiciou uma grande melhora em todos os sentidos como professor, fazendo com que conhecesse novas maneiras de pensar matemáticamente e também aprender matemática em um nível mais elevado.

Uma das partes mais importantes do mestrado foi a interação entre os colegas e os professores do PROFMAT, pois essa troca de experiências foi muito enriquecedora e também de um grande aprendizado profissional. Dentre as conversas entre os colegas do mestrado o que chamou a atenção foi que a maioria comentou que o ensino da probabilidade no ensino básico é bastante difícil. Ao refletir sobre o modo como normalmente o assunto é ensinado, por meio de fórmulas, vemos que a resolução dos problemas é bastante mecânica. Essa prática dificulta o entendimento de alunos e professores. Assim, uma das motivações pessoais foi aprender mais sobre probabilidade para oferecer um ensino de melhor qualidade.

Inicialmente a ideia era pesquisar sobre questões interessantes e motivadoras sobre probabilidade e também relacionar com um site que permite auxiliar os alunos por meio de questões como se fosse um jogo. Mas durante as pesquisas o autor conheceu os processos estocásticos, mais precisamente as Cadeias de Markov e então buscamos mais informações e direcionamos este trabalho para aplicar as Cadeias de Markov como uma forma de introduzir conceitos de probabilidade condicional aos alunos do ensino fundamental e do ensino médio.

1.2 Contexto histórico

Vamos conhecer um pouco sobre a história de Andrey Markov de acordo com Britannica (2018) o matemático russo Andrey Andreyevich Markov (1856-1922) ajudou a desenvolver a teoria dos processos estocásticos, especialmente as chamadas Cadeias de Markov. Baseado no estudo da probabilidade de eventos mutuamente dependentes, seu trabalho foi desenvolvido e amplamente aplicado nas ciências biológicas e sociais.

Em 1886 tornou-se professor na univeridade de São Peterburgo e membro da Academia Russa de Ciências em 1896. Embora tenha se aposentado oficialmente em 1905, ele continuou a ensinar probabilidade na universidade até praticamente sua morte.

Enquanto seu trabalho inicial foi dedicado à teoria dos números e análise, após 1900, ele foi principalmente ocupado com a teoria da probabilidade. Em 1908, Markov conseguiu provar um resultado geral para o Teorema Central do Limite (TCL) usando o método de seu orientador Parnuty Chebyshev. Enquanto trabalhava com este problema, ele estendeu tanto a lei dos grandes númeoros quanto o Teorema Central do Limite para certas variáveis aleatórias dependentes que hoje são conhecidas como Cadeias de Markov,que tem inúmeras aplicações em áreas como a física moderna e modelagem de preços no mercado de ações.

1.3 Currículo Oficial

Em relação a contextualização de situações-problema, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

> No Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida; por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2017, p.527)

O uso de tecnologia como calculadoras, internet e computadores facilita o aprendizado conforme a Base Nacional Comum Curricular

> Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes aprofundar sua participação ativa nesse processo de resolução de problemas. São alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (BRASIL, 2017, p.528)

De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) "as calculadoras e o computador ganham importância como instrumentos que permitem a abordagem de problemas com dados reais ao mesmo tempo que o aluno pode ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e os softwares"(BRASIL, 2002, p.127). Ainda de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo

> A educação tecnológica básica tem o sentido de preparar os alunos para viver e conviver em um mundo no qual a tecnologia está cada vez mais presente, no qual a tarja magnética, o celular, o código de barras e outros tantos recursos digitais se incorporam velozmente à vida das pessoas, qualquer que seja sua condição socioeconômica."(SÃO PAULO, 2011, p.22)

Conforme as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)as habilidades e competências a serem desenvolvidas em relação a probabilidade

> • Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
> • Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico.
> • Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades (BRASIL, 2002, p.127-128)

1.4 A estruturação deste trabalho

Para introduzir o conceito de Cadeias de Markov precisamos de um embasamento teórico sobre espaço de probabilidade. Assim, no Capítulo 2, trabalharemos toda a parte teórica, buscando retomar os principais conceitos da teoria de probabilidade que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Começaremos na secção 2.1, com os conceitos básicos necessários para a definição axiomática da probabilidade . Iremos falar sobre probabilidade na secção 2.2, na secção 2.3 falaremos sobre a probabilidade condicional, na secção 2.4 o assunto serão eventos independentes, na secção 2.5 discutiremos sobre variáveis aleatórias e na secção 2.6 comentaremos sobre vetores aleatórios que utilizaremos na definição de Cadeia de Markov. Na última seção, 2.7, apresentamos os processos estocásticos e na subsecção 2.7.1 as Cadeias de Markov. Na subsecção 2.7.2 apresentamos as classifcações de estados e cadeias; na subsecção 2.7.3 falaremos sobre as distribuições de equilíbrio e, finalizando, na subsecção 2.7.4 discutiremos a existência e unicidade das distribuições de equilíbrio.

No capítulo 3 apresentaremos sugestões de planos de aula com situações-problema que envolvem eventos temporais que podem ser modelados segundo as Cadeias de Markov e assim, introduzir os conceitos de probabilidade contextualizadas com a realidade dos alunos, pois de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM),

> Uma das grandes competências propostas pelos PCNEM diz respeito à contextualização sócio-cultural como forma de aproximar o aluno da realidade e fazê-lo vivenciar situações próximas que lhe permitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta realidade. A Matemática do ensino médio pode ser determinante para a leitura das informações que circulam na mídia e em outras áreas do conhecimento na forma de tabelas, gráficos e informações de caráter estatístico. Contudo, espera-se do aluno nessa fase da escolaridade que ultrapasse a leitura de informações e reflita mais criticamente sobre seus significados. Assim, o tema proposto deve ir além da simples descrição e representação de dados, atingindo a investigação sobre esses dados e a tomada de decisões (BRASIL, 2002, p.126).

Já de acordo com a Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação,

> Os conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados ganham também papel de destaque para as Ciências Humanas e para o cidadão comum, que se vê imerso numa enorme quantidade de informações de natureza estatística ou probabilística. No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e o computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações (BRASIL, 2006, p.45).

Ao pesquisar dissertações já publicadas, verificamos que existem vários trabalhos que utilizaram as Cadeias de Markov para serem aplicadas ao Ensino Médio. Podemos citar os trabalhos de Manoel (2016) e Júnior (2014) que utilizaram exemplos de previsão dos resultados de uma partida de futebol, o trabalho de Delatorre (2016) que fala da importância da contextualização para o aprendizado de matemática e os trabalhos de Castro (2015) e Magela (2015) que utilizaram exemplos relacionados à previsão do tempo. Apresentaremos neste trabalho planos de aulas com 4 atividades que envolvem situações problema que estão relacionadas ao contexto do dia a dia dos alunos, como: o futebol, calculando a probabilidade de um jogador fazer o gol na cobrança de pênaltis; previsão do tempo; previsão da qualidade da água das praias próprias e impróprias para o banho e a preferência de compra de uma marca de celular.

Os planos de aulas poderão ser bastante motivadores aos alunos e professores do ensino médio e fundamental, além de utilizar conceitos que envolvem probabilidades e também conteúdos como matrizes. Para facilitar os cálculos utilizaremos o site Calculadora de Matrizes, pois segundo o Currículo do Estado de São Paulo,

> Reiteramos que um novo Currículo deve estar especialmente atento à incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos disponíveis para a representação de dados e o tratamento de informações na busca de transformação em conhecimento (SÃO PAULO, 2011, p.30).

No final do trabalho apresentaremos as considerações finais. Esperamos que este trabalho possa motivar e incentivar alunos e professores a buscarem novas maneiras de aprendizagem da Matemática e também contribuir para a formação continuada dos professores.

CAPÍTULO

2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos e definições utilizados na área de Probabilidade que serão necessários para a compreensão deste trabalho. A ideia deste capítulo é apresentar os conceitos de Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos para compreender as Cadeias de Markov, o principal objeto matemático deste trabalho. Os conceitos são apresentados de maneira acessíveis aos professores de matemática do ensino básico, contribuindo para suas aulas, seu aperfeiçoamento e formação continuada. As referência utilizadas nas secções 2.1 à 2.6 são Dantas (2004), Ross (2010) e Morgado e Carvalho (2013). Na secção 2.7 utilizamos como referência Durrett (2009) e Grinstead e Snell (2006).

2.1 Conceitos iniciais

Iniciaremos esta seção com os conceitos necessários para a definição axiomática da Probabilidade. Não utilizaremos referências em exemplos mais comuns utilizados na área, tais como lançamento de moedas, lançamentos de dados ou retirar bolas de urnas.

2.1.1 Conjuntos

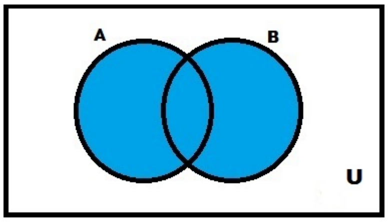
O conceito de **conjunto** é fundamental e primitivo na matemática. De acordo com (LIMA, 2013, p.2), "um conjunto é formado por elementos", ou seja, é uma coleção de elementos. A representação de um conjunto é feito por letra maiúscula (A, B, C, por exemplo) e seus elementos são representados por letras minúsculas (a, b, c, por exemplo), e são separados por vírgulas e colocados entre chaves ({...}). Por exemplo, o conjunto A que contém os elementos 0, 1, 2 e 5 é A={0, 1, 2, 5}.

A relação entre um elemento e um conjunto é chamada de pertinência, representada pelos símbolos $\in$ (pertence) e $\notin$ (não pertence). O conjunto vazio é representado pelos símbolos $\emptyset$ ou { }, e é o conjunto que não possui elementos. O conjunto universo representado pela letra U é um conjunto arbitrário que contém os elementos de interesse. Se todo elemento do conjunto A for também elemento do conjunto B, dizemos que A é um subconjunto de B e a notação matemática usada é A $\subset$ B. Apresentamos a seguir outras relações entre conjuntos.

- $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

- Sendo A e B dois conjuntos, temos que a união entre eles, $A \cup B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um deles, representado pelo diagrama de Venn da Figura 2, onde a região azul corresponde a $A \cup B$.

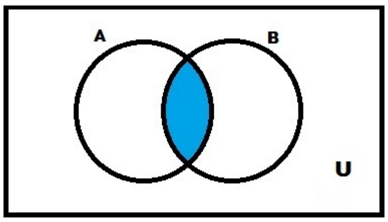
Figura 1 – Diagrama de Venn de $A \cup B$



Fonte: Elaborada pelo autor.

- Sendo A e B dois conjuntos, temos que a intersecção entre eles, $A \cap B$, é o conjunto dos elementos que pertencem ao mesmo tempo ao conjunto A e ao conjunto B, representado pelo diagrama de Venn da Figura 3, onde a região azul corresponde a $A \cap B$.

Figura 2 – Diagrama de Venn de $A \cap B$

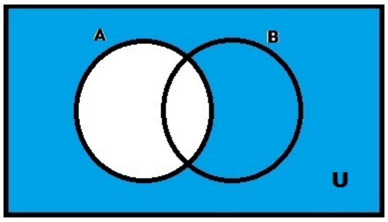


Fonte: Elaborada pelo autor.

- Sendo A um conjunto, temos que A^c é chamado de conjunto complementar de A, e nenhum de seus elementos pertence ao conjunto A, representado pelo diagrama de Venn da Figura 4, onde a região azul corresponde a A^c.

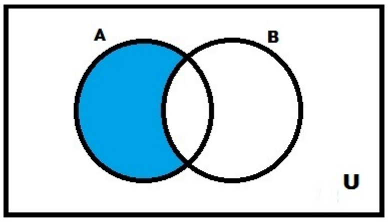
- Sendo A e B dois conjuntos, a diferença entre eles, $A - B$, é o conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto A, mas não pertencem ao conjunto B. Podemos escrever que $A - B = A \cap B^c$. No diagrama de Venn da Figura 5 a região azul representa $A - B$.

Figura 3 – Diagrama de Venn A^c



Fonte: Elaborada pelo autor.

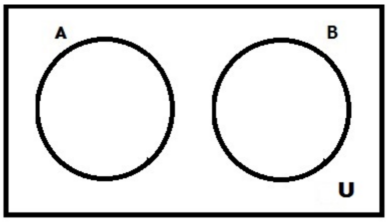
Figura 4 – Diagrama de Venn de $A - B = A \cap B^c$



Fonte: Elaborada pelo autor.

- Dois conjuntos, A e B, que não possuem elementos em comum, são chamados de conjuntos disjuntos ou mutualmente exclusivos. A intersecção entre A e B é o conjunto vazio, e podemos escrever $A \cap B = \emptyset$ e representar com o diagrama de Venn da Figura 6.

Figura 5 – Diagrama de Venn de $A \cap B = \emptyset$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

- Seja $A_1, A_2, \ldots$ uma sequência infinita de conjuntos, o conjunto dos elementos que pertencem ao mesmo tempo a todos os $A_1, A_2, \ldots$ será representado por $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$

- Seja $A_1, A_2, \ldots$ uma sequência infinita de conjuntos, o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ será representado por $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$.

2.1.2 Experimento aleatório e espaço amostral

Os **experimentos aleatórios** são experimentos que quando repetidos nas mesmas condições podem apresentar resultados diferentes.

Definição 1. O **espaço amostral** é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório e representamos pela letra Ω.

Os subconjuntos de Ω são chamados de **eventos**. Caso esse subconjunto seja formado apenas por um elemento, será chamado de **evento elementar**.

Exemplo 1. Ao lançar um dado e observar o número que aparece na face superior, o espaço amostral é Ω={1,2,3,4,5,6}.

A seguir apresentaremos algumas propriedades que relacionem eventos e espaço amostral. Sejam A e B eventos,

- $\Omega^c = \emptyset$.
- $(\Omega \cup A) = \Omega$.
- $(\Omega \cap A) = A$.
- $(A \cup A^c) = \Omega$.
- Leis de Morgan 1: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- Leis de Morgan 2: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

2.2 Probabilidade

Nesta seção abordaremos a definição axiomática da probabilidade e algumas considerações sobre a chamada "abordagem clássica"da probabilidade usada frequentemente no Ensino Médio. A definição axiomática da probabilidade é importante pois sem ela não existiria a Teoria da Probabilidade como é conhecida hoje. Nos livros didáticos e apostilas do Ensino Médio os axiomas da probabilidade são mencionados como propriedades da probabilidade, como por exemplo os livros didáticos de Dante (2013), Balestri (2016) e Garcia (2016).

2.2.1 Definição Axiomática da Probabilidade

Para podermos definir a probabilidade por meio de axiomas é necessário a compreensão de alguns conceitos que apresentaremos a seguir.

Definição 2. Chamamos de **σ-álgebra** de eventos de Ω, uma coleção não vazia de subconjuntos de um espaço amostral Ω representada por $\mathscr{A}$,que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\Omega \in \mathscr{A}$;

2. Se $A \in \mathscr{A}$, então $A^c \in \mathscr{A}$;

3. Se $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathscr{A}$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Para os exemplos que serão abordados neste trabalho, onde o Ω é finito, a σ- álgebra usada é o **conjunto das partes** de Ω, que é o conjunto de todos os subconjuntos de Ω. Representamos o conjunto das partes por $\mathscr{P}(\Omega)$. Vamos verificar se o conjunto das partes de Ω realmente satisfaz as propriedades da σ-álgebra,

(i) Como $\Omega \in \mathscr{P}(\Omega)$, então $\mathscr{P}(\Omega)$ satisfaz a propriedade 1.

(ii) Para qualquer $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, temos que $A^c \in \mathscr{P}(\Omega)$, pois $A^c \subset \Omega$, portanto $\mathscr{P}(\Omega)$ satisfaz a propriedade 2.

(iii) A união de quaisquer eventos de Ω está em $\mathscr{P}(\Omega)$, portanto $\mathscr{P}(\Omega)$ satisfaz a propriedade 3.

Como as 3 propriedades da σ-álgebra foram satisfeitas, concluimos que $\mathscr{P}(\Omega)$, é uma σ-álgebra de Ω.

Exemplo 2. Dado o espaço amostral $\Omega = \{a,b,c\}$, o conjunto das partes de Ω será a σ-álgebra $\mathscr{P}(\Omega) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\Omega,\emptyset\}$.

Exemplo 3. Seja o experimento aleatório "lançamento de um dado de 6 faces". O espaço amostral é $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. O conjunto das partes de Ω é
$\mathscr{P}(\Omega)$={{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1,2,6}, {1,3,4}, {1,3,5}, {1,3,6}, {1,4,5}, {1,4,6}, {1,5,6}, {2,3,4}, {2,3,5}, {2,3,6}, {2,4,5}, {2,4,6}, {3,4,5}, {3,4,6}, {3,5,6}, {4,5,6}, {3,5,6}, {3,4,5,6}, {2,4,5,6}, {2,3,5,6}, {2,3,4,6}, {2,3,4,5}, {1,4,5,6}, {1,3,5,6}, {1,3,4,6}, {1,3,4,5}, {1,2,5,6}, {1,2,4,6}, {1,2,4,5}, {1,2,3,6}, {1,2,3,5}, {1,2,3,6}, {2,3,4,5,6}, {1,3,4,5,6}, {1,2,4,5,6}, {1,2,3,5,6}, {1,2,3,4,6}, {1,2,3,4,5}, $\emptyset, \Omega$}

Exemplo 4. Dado o espaço amostral $\Omega = \{x,y,z\}$ e $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega, \{x\}, \{y,z\}\}$ vamos verificar se $\mathscr{A}$ é uma $\sigma-$álgebra, ou seja, verificaremos as 3 propriedades que definem a $\sigma-$álgebra,

- Como $\Omega \in \mathscr{A}$, então, $\mathscr{A}$ satisfaz a propriedade 1.

- Como $\Omega^c = \emptyset \in \mathscr{A}$, $\emptyset^c = \Omega \in \mathscr{A}$, $\{x\}^c = \{y,z\} \in \mathscr{A}$, $\{y,z\}^c = \{x\} \in \mathscr{A}$, portanto, $\mathscr{A}$ satisfaz a propriedade 2.

- Como $\{x\} \cup \{y,z\} = \Omega \in \mathscr{A}$, $\{x\} \cup \emptyset = \{x\} \in \mathscr{A}$, $\{y,z\} \cup \emptyset = \{y,z\} \in \mathscr{A}$, $A \cup \emptyset = A$, para $\forall A \in \mathscr{A}$ e $\Omega \cup A \in \mathscr{A}$, para todo $A \subset \Omega$, assim, $\mathscr{A}$ satisfaz a propriedade 3.

portanto, $\mathscr{A}$ é uma $\sigma-$álgebra.

Exemplo 5. Dado o espaço amostral $\Omega = \{x,y,z\}$, $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega, \{x\}, \{y\}, \{x,z\}, \{y,z\}\}$ vamos verificar se $\mathscr{A}$ é uma $\sigma-$álgebra. Verificando novamente as 3 propriedades que definem uma $\sigma-$álgebra temos:

- Como $\Omega \in \mathscr{A}$, então, $\mathscr{A}$ satisfaz a propriedade 1.
- Como $\Omega^c = \emptyset \in \mathscr{A}$, $\emptyset^c = \Omega \in \mathscr{A}$, $\{x\}^c = \{y,z\} \in \mathscr{A}$, $\{y,z\}^c = \{x\} \in \mathscr{A}$, $\{y\}^c = \{x,z\} \in \mathscr{A}$, $\{x,z\}^c = \{y\} \in \mathscr{A}$, assim, a propriedade 2 está satisfeita por $\mathscr{A}$.
- Como $\{x\} \cup \{y\} = \{x,y\} \notin \mathscr{A}$, então, $\mathscr{A}$ não satisfaz a propriedade 3.

assim, $\mathscr{A}$ não é uma $\sigma-$álgebra.

Definição 3 (Definição axiomática da Probabilidade)**.** A **probabilidade** é uma função $\mathbb{P}$, definida em uma σ-álgebra ($\mathscr{A}$), de um espaço amostral Ω que assume os valores no intervalo [0 ,1] satisfazendo os seguintes axiomas:

Axioma 1 Para todo evento A de Ω, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

Axioma 2 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Axioma 3 Para uma sequência infinita de eventos disjuntos, $A_1, A_2, \ldots$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $\forall i \neq j$ temos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots$$

Vale observar que para uma sequência finita de eventos disjuntos, que faz mais sentido para os espaços amostrais deste trabalho, que são finitos, temos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)$$

Várias propriedades interessantes decorrem desta definição, tais como

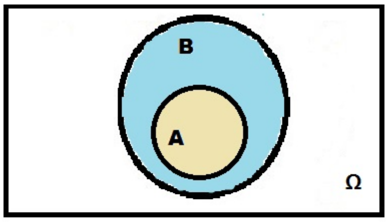
1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
   Demonstração: Como $A^c \cup A = \Omega$, temos que $\mathbb{P}(A^c \cup A) = \mathbb{P}(\Omega)$. Pelo axioma 2 temos que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ e pelo axioma 3 temos que $\mathbb{P}(A^c \cup A) = \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(A)$. Portanto $\mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(A) = 1$ e finalmente $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ onde $\emptyset$ é o conjunto vazio
   Demonstração: Temos que $\Omega^c = \emptyset$, portanto $\mathbb{P}(\Omega^c) = \mathbb{P}(\emptyset)$. Pela propriedade demostrada anteriormente temos que $\mathbb{P}(\Omega^c) = 1 - \mathbb{P}(\Omega)$ e assim $1 - \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\emptyset)$. Como $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, pelo axioma 2 temos que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

3. $A \subset B$ então $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

   Demonstração: Como $A \subset B$ temos que $B = A \cup (A^c \cap B)$ e assim $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (A^c \cap B))$. Usando o axioma 3, pois $A \cap (A^c \cap B) = \emptyset$, temos que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$. Pelo axioma 1 verificamos que $\mathbb{P}(A^c \cap B) \geq 0$ portanto $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. Podemos ver pelo diagrama de Venn da Figura 7 que como $A \subset B$, então $B = A \cup (A^c \cap B)$.

Figura 6 – Diagrama de Venn de $A \subset B$



Fonte: Elaborada pelo autor.

4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

   Demonstração: Como $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$ temos $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (A^c \cap B))$. Usando o axioma 3 pois, $A \cap (A^c \cap B) = \emptyset$, temos que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B) \quad (I).$$

   Sendo $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$ temos $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((A^c \cap B) \cup (A \cap B))$. Como

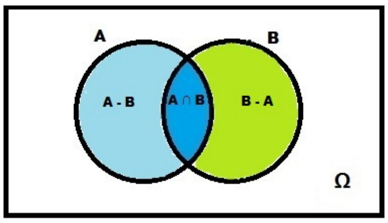
$$(A^c \cap B) \cap (A \cap B) = \emptyset,$$

   pelo axioma 3 $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)$ e portanto

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad (II).$$

   Substituindo (II) em (I) vemos que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. A Figura 8

Figura 7 – Diagrama de Venn de $A \cup B$



Fonte: Elaborada pelo autor.

   representa o diagrama de Venn de $A \cup B$. Podemos ver que $\mathbb{P}(A)$ é representado no diagrama pelas áreas das regiões azul claro $(A - B)$ e azul escuro $(A \cap B)$, e $\mathbb{P}(B)$ é representado pelas áreas das regiões azul escuro ($A \cap B$) e verde ($B - A$). Assim, $\mathbb{P}(A \cup B)$ será representada pela união das áreas das regiões azul claro, azul escuro e verde, mas a probabilidade de $\mathbb{P}(A \cap B)$ será considerado duas vezes. Portanto, precisamos subtrair $\mathbb{P}(A \cap B)$ de $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, conforme demostração.

2.2.2 Definição axiomática x abordagem "clássica"da probabilidade

A abordagem "clássica"da probabilidade é a forma predominante de se calcular probabilidade encontrada nos livros didáticos do ensino médio, onde o espaço amostral é finito e também os eventos elementares são equiprováveis. Mas afinal de contas do que difere e quais os problemas que verificamos ao comparar a abordagem "clássica"com a definição axiomática da probabilidade? Para responder vamos verificar o que diz a abordadem "clássica"da probabilidade: Seja Ω um espaço amostral finito contendo $m > 0$ elementos, e A um evento de Ω contendo n elementos. Aprendemos nos livros didáticos do Ensino Médio que $\mathbb{P}(A)$ é a probabilidade de ocorrer o evento A que é calculada como a divisão do número de elementos de A pelo número de elementos de Ω, ou seja:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{n}{m}, \tag{2.1}$$

onde $\#A$ e $\#\Omega$ são respectivamente a quantidade de elementos de A e de Ω.
Vamos verificarmos se a abordagem "clássica"satisfaz os axiomas da probabilidade. Sejam m, n e q respectivamente, as quantidades de elementos de Ω, A e B, assim temos que,

1. A é um evento de Ω com n elementos e $n \geq 0$ então, $\mathbb{P}(A) \geq 0$, portanto a "abordagem clássica"satisfaz o Axioma 1 da probabilidade.

2. Se $A = \Omega$, então, $\#\Omega = \#A = m$, portanto $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{m}{m} = 1$ com $m > 0$, assim, a "abordagem clássica"segue o Axioma 2 da probabilidade.

3. Se A e B forem eventos disjuntos, temos que $A \cup B = n + q$, então,

   $$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{\#\{A \cup B\}}{\#\{\Omega\}} = \frac{n+q}{m} = \frac{n}{m} + \frac{q}{m} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$$

   portanto, a "abordagem clássica"satisfaz o Axioma 3 da probabilidade.

assim, verificamos que a "abordagem clássica"satisfaz os axiomas da probabilidade.
É importante comentar que tipo de problema surge quando só temos em mãos a "abordagem clássica",

- Se o espaço amostral Ω não for finito não conseguimos calcular a probabilidade usando a abordagem "clássica". Por exemplo ao verificar os pintinhos recém nascidos em uma granja estamos interessados em machos (M) quando as aves são para corte e fêmeas (F) quando as aves são para botar ovos. Consideremos o experimento aleatório "selecionar pintinhos recém-nascidos em machos e fêmeas"e o evento A ="encontrar a primeira fêmea". O espaço amostral será $\Omega = \{F, MF, MMF, MMMF, ..., MM...MMF, ...\}$ ou seja, é um conjunto com um número infinito de elementos e portanto não se aplica a abordagem "clássica"da probabilidade neste caso. Uma justificativa para este impedimento seria o fato de o espaço amostral ser infinito implica que a somatória da probabilidade dos infinitos eventos terá que ser 1(Axioma 2 da Definição 3). Mas a $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) > 1$, ou seja, a somatória da probabilidade dos infinitos eventos será sempre maior que 1.

- Se o espaço amostral Ω for finito mas os eventos elementares não forem equiprováveis também não poderemos aplicar a abordagem "clássica"da probabilidade. Por exemplo, vamos considerar um dado viciado de 6 faces ($\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$), onde a probabilidade de sair número par é 1/3 ($\mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = 1/9$) e sair número ímpar é 2/3 ($\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = 2/9$). Considere A o evento "sair número primo"($A = \{2,3,5\}$). Usando a "abordagem clássica"para calcular a probabilidade de A temos que,
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$
mas pelo axioma 3 da probabilidade temos que,
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2\} \cup \{3\} \cup \{5\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{5\}) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9},$$

portanto, quando os eventos elementares não forem equiprováveis não se aplica a "abordagem clássica"da probabilidade.

2.3 Probabilidade Condicional

A probabilidade de um evento ocorrer sabendo que um outro evento ocorreu é a idéia inicial de probabilidade condicional. Para pensarmos a respeito da probabilidade condicional podemos verificar a seguinte situação.

Exemplo 6. Considere o lançamento de um dado honesto de 6 faces e o evento B = "sair face 4". O espaço amostral é $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ e a probabilidade $\mathbb{P}(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{1}{6}$, onde $\#B$ é a quantidade de elementos de B e $\#\Omega$ é a quantidade de elementos de Ω. Mas se fosse fornecida uma informação adicional como, por exemplo, "não saiu a face 3", representado pelo evento A, então a probabilidade de ocorrência do evento B seria $\frac{1}{5}$, visto que essa informação altera o espaço amostral original que passa a ser $\Omega^* = \{1,2,4,5,6\}$. Esse exemplo nos dá uma intuição para a definição de probabilidade condicional.

Definição 4. Sejam $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, A e B dois eventos de Ω com $\mathbb{P}(A) \neq 0$. A **probabilidade condicional** de ocorrer B sabendo que o evento A aconteceu e que denotamos por $\mathbb{P}(B|A)$, é dada por:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}. \tag{2.2}$$

Exemplo 7. Vamos calcular a probabilidade condicional do exemplo anterior usando a definição 4. Assim, $B = \{4\}$, $A = \{1,2,4,5,6\}$ e $B \cap A = \{4\}$. Portanto $\mathbb{P}(B \cap A) = 1/6$ e assim a probabilidade de B dado que o evento A ocorreu é:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/6}{5/6} = \frac{1}{5}.$$

É importante notar que a definição de probabilidade condicional satisfaz os axiomas da probabilidade conforme veremos a seguir:

- Seja $A \subset \Omega$ tal que $\mathbb{P}(A) > 0$, então $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \geq 0$ pois $\mathbb{P}(B \cap A) \geq 0$ e assim, a probabilidade condicional satisfaz o axioma 1 da probabilidade.
- Seja $A \subset \Omega$, então $\mathbb{P}(\Omega \cap A) = \mathbb{P}(A)$, então $\mathbb{P}(\Omega|A) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$, portanto a probabilidade condicional também satisfaz o axioma 2 da probabilidade.
- Supondo B e C eventos mutuamente exclusivos e A um evento ocorrido com $\mathbb{P}(A) > 0$, temos que;

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[(B \cup C)|A] &= \frac{\mathbb{P}[(B \cup C) \cap A)]}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\mathbb{P}[(B \cap A) \cup (C \cap A)]}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(C \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(C \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(C|A),
\end{aligned}$$

e assim, a probabilidade condicional satisfaz o axioma 3 da probabilidade.

Como consequência da definição de probabilidade condicional temos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A). \tag{2.3}$$

Exemplo 8. Seja uma urna contendo 5 bolas brancas e 6 bolas amarelas. Retiramos sucessivamente e sem reposição 2 bolas e vamos calcular a probabilidade de ambas serem brancas. Sejam os eventos $B_1 =$ "a primeira bola ser branca" e $B_2 =$ "a segunda bola ser branca". A probabilidade que vamos calcular é a probabilidade de acontecer $B_1 \cap B_2$. Usando a fórmula da probabilidade condicional teremos:

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1).\mathbb{P}(B_2|B_1) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{11}.$$

Neste exemplo podemos ver que, condicionando na informação de que a primeira bola retirada é branca, fica fácil calcular a probabilidade da segunda bola ser branca, pois sabemos que nesta segunda retirada a urna tem 4 bolas brancas e 6 amarelas. De modo geral é mais simples calcular eventos futuros condicionados em eventos passados.

Exemplo 9. Voltando ao exemplo 8, vamos agora calcular a probabilidade da primeira bola ser branca, sabendo que a segunda bola era branca. Sejam os eventos $B_1 =$ "a primeira bola ser branca", $A_1 =$ "a primeira bola ser amarela" e $B_2 =$ "a segunda bola ser branca". A probabilidade que queremos calcular é $\mathbb{P}(B_1|B_2)$, ou seja, $\mathbb{P}(B_1|B_2) = \dfrac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)}$. O valor de $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$ já foi calculado no exemplo anterior e vale $\dfrac{2}{11}$. Precisamos calcular o valor da probabilidade da segunda bola ser branca, $\mathbb{P}(B_2)$. Existem duas possibilidades para a segunda bola ser branca, ou a primeira bola era branca ou a primeira bola era amarela. Assim, a probabilidade $\mathbb{P}(B_2)$ vai ser a probabilidade de ocorrer B_1 e B_2 ou A_1 e B_2:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}[(B_1 \cap B_2) \cup (A_1 \cap B_2)] \\
&= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap B_2) \\
&= \frac{2}{11} + \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(B_2|A_1) \\
&= \frac{2}{11} + \frac{6}{11}.\frac{5}{10} = \frac{2}{11} + \frac{3}{11} = \frac{5}{11},
\end{aligned}$$

e portanto temos,

$$\mathbb{P}(B_1|B_2) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)} = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{5}{11}} = \frac{2}{5}.$$

Exemplo 10. Retirando duas cartas de um baralho (52 cartas com 4 naipes e 13 cartas de cada naipe) sem reposição vamos calcular a probabilidade de sair duas cartas de ouros. Usaremos $O_1 =$"carta de ouros na primeira retirada "e $O_2 =$ "carta de ouros na segunda retirada". A probabilidade que queremos é $\mathbb{P}(O_1 \cap O_2)$, ou seja,

$$\mathbb{P}(O_1 \cap O_2) = \mathbb{P}(O_1)\,.\,\mathbb{P}(O_1|O_2) = \frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51} = \frac{1}{17}.$$

2.3.1 Regra geral da multiplicação

Seja $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ uma sequência de eventos de Ω então podemos calcular a probabilidade da intersecção de n eventos $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ por meio de probabilidades condicionais sucessivas

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2|A_1).\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)...\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}). \quad (2.4)$$

Para indicar ao leitor como chegar a essa equação vamos considerar os eventos A_1, A_2, A_3. A probabilidade condicional de A_3 dado que a intersecção A_1 e A_2 ocorreu é:

$$\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{\mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)},$$

então

$$\mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_1 \cap A_2),$$

como

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1),$$

temos que,

$$\mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1).$$

A demonstração para n eventos pode ser provada por indução.

Exemplo 11. Retirando de um baralho três cartas sem reposição vamos calcular a probabilidade de retirar três cartas de espadas. Sejam os eventos E_1 = "carta de espadas na primeira retirada", E_2 = "carta de espadas na segunda retirada"e E_3 = "carta de espadas na terceira retirada". A probabilidade pedida é $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) &= \mathbb{P}(E_1) \,.\, \mathbb{P}(E_2|E_1) \,.\, \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \\ &= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = \frac{11}{850}. \end{aligned}$$

2.4 Eventos independentes

Iniciaremos essa seção com um exemplo que pretende nos dar a ideia do que são eventos independentes.

Exemplo 12. Ao lançarmos dois dados honestos de 6 faces, vamos considerar os seguintes eventos A="sair a face 1 no primeiro dado"e B="sair uma face maior que 4 no segundo dado". Observamos que:

- #(Ω)=36;
- A = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)};
- B = {(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)};
- $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$;
- $\mathbb{P}(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$;
- $A \cap B = \{(1,5),(1,6)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;
- $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$,

chegamos à conclusão que $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{3}$, ou seja, a probabilidade de ocorrer B não foi alterada com a ocorrência de A. Isto se deve ao fato do evento A estar associado ao primeiro dado e o evento B ao segundo dado. A probabilidade de ocorrer algum deles não depende da ocorrência ou não do outro evento. Do mesmo modo podemos verificar que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{6}$, o que não deixa de ser uma surpresa, pois a ocorrência do evento B também não altera o resultado do evento A. Usando a fórmula da probabilidade condicional temos:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B)$$

mas como $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ temos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B).$$

Definição 5. Sejam A e B dois eventos de Ω com $\mathbb{P}(B) > 0$. O evento A é **independente** do evento B se, e somente se, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ e consequentemente temos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B). \tag{2.5}$$

Assim a probabilidade da intersecção entre dois eventos independentes é igual ao produto das probabilidades de cada um deles.

Exemplo 13. Ao lançar duas moedas honestas, vamos considerar A_1 para o evento "saiu cara na primeira moeda"e A_2 para o evento "saiu cara na segunda moeda". Usando a notação C = cara e K = coroa, teremos

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(C,C),(C,K),(K,C),(K,K)\} \\
A_1 &= \{(C,C),(C,K)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2} \\
A_2 &= \{(C,C),(K,C)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2} \\
A_1 \cap A_2 &= \{(C,C)\} \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

e portanto, A_1 e A_2 são independentes. Podemos usar a fórmula da probabilidade condicional para verificar a independência de A_1 e A_2 conforme mostramos a seguir:

$$\mathbb{P}(A_1|A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1).$$

A seguir uma definição para z eventos independentes baseados em Bastos (2015).

Definição 6 (**z eventos independentes**)**.** Sejam os eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_z$, com $z \geq 2$ são independentes se e somente se as probabilidades de todas as intersecções possíveis (2 a 2, 3 a 3, 4 a 4,...) forem iguais aos produtos das probabilidades dos eventos que fazem parte das intersecções, ou seja,

Intersecção de eventos 2 a 2 $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i).\mathbb{P}(A_j)$ onde $i < j$ e $j = 2,3,...,z$

Intersecção de eventos 3 a 3 $\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \mathbb{P}(A_i).\mathbb{P}(A_j).\mathbb{P}(A_k)$ onde $i < j < k$ e $k = 3,4,5,...,z$

Intersecção de eventos 4 a 4 $\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) = \mathbb{P}(A_i).\mathbb{P}(A_j).\mathbb{P}(A_k).\mathbb{P}(A_l)$ onde $i < j < k < l$ e $l = 4,5,6,...,z$

$\vdots$

Intersecção de eventos z a z $\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_z) = \mathbb{P}(A_i).\mathbb{P}(A_j)...\mathbb{P}(A_z)$

Exemplo 14. Vamos considerar os eventos A, B e C, pela Definição 6, temos que

Intersecção de eventos 2 a 2

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B).\mathbb{P}(C)$$

Intersecção de eventos 3 a 3

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B).\mathbb{P}(C),$$

então, A, B e C são independentes.

2.5 Variável aleatória discreta

Muitas vezes ao realizarmos um experimento aleatório estamos interessados em uma função que associa a cada ponto do espaço amostral um número real. Por exemplo, ao jogar dois dados não queremos saber quais faces apareceram em cada dado, mas sim, a soma dos valores das suas faces. Essas funções que associam um número real a cada resultado, e portanto, definidas no espaço amostral são chamados de variáveis aleatórias.

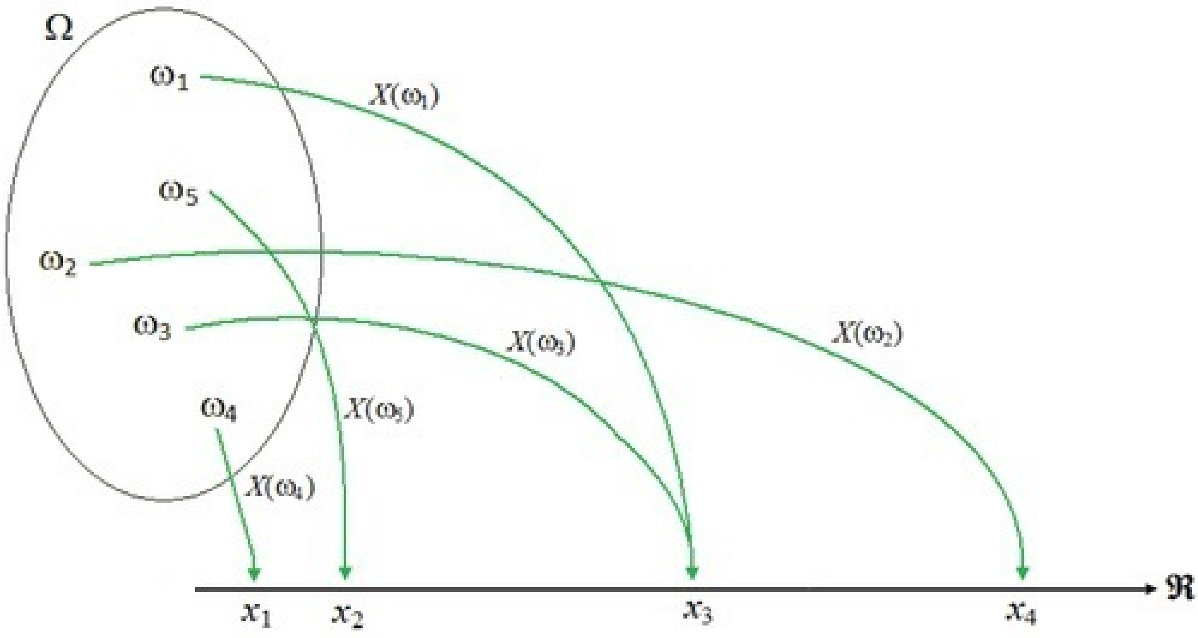
2.5.1 Definição variável aleatória discreta

Definição 7 (Variável aleatória)**.** Uma variável aleatória é uma função que associa valores em $\mathbb{R}$, a cada elemento do espaço amostral Ω, ou seja,

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

A representação de uma variável aleatória é feita por letras maiúsculas como X, Y e Z. Para representar um valor genérico que a variável aleatória pode assumir usamos letras minúsculas como x, y e z. Na Figura 8 indicamos um exemplo onde a variável aleatória X leva cada ω_i a um x_j em $\mathbb{R}$.

Figura 8 – Função de uma Variável aleatória



Fonte – (WIKIPÉDIA, 2018)

Quando as variáveis aleatórias assumem valores em um conjunto enumerável serão chamados de variáveis aleatórias discretas e quando assumem valores num intervalo da reta real serão chamados de variáveis aleatórias contínuas.

Exemplo 15. Ao jogarmos 2 moedas honestas e verificarmos suas faces, temos o espaço amostral $\Omega = \{(C,C),(C,K),(K,C),(K,K)\}$, considerando a notação C = cara e K = coroa. Seja X a variável aleatória que assume o número de caras neste experimento. Temos que $X((C,C)) = 2$, $X((C,K)) = 1$, $X((K,C)) = 1$, $X((K,K)) = 0$ e, portanto, X assume os valores 0, 1 e 2.

2.5.1.1 Distribuição de massa de probabilidade

Uma distribuição de probabilidade está associada a cada variável aleatória e fornece a probabilidade da variável aleatória assumir cada um dos elementos do seu conjunto imagem. Assim, se x for o valor que a variável aleatória X pode assumir, então $p_X(x)$ é a probabilidade de ocorrer o evento $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$, ou seja,

$$\mathbb{P}(\{X = x\}) = \mathbb{P}(X = x) = p_X(x). \tag{2.6}$$

Exemplo 16. Continuando o exemplo 15 e lembrando que as moedas são honestas, temos

- $\{X = 0\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}$, então, $p_X(0) =$"probabilidade de X assumir zero"$=\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\{(K,K)\}) = \dfrac{1}{4}$;

- $\{X=1\}=\{\omega \in \Omega : X(\omega)=1\}$, então, $p_X(1)=$"probabilidade de X assumir 1 "$=\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}\{(C,K),(K,C)\})=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$;
- $\{X=2\}=\{\omega \in \Omega : X(\omega)=0\}$, então, $p_X(2)=$"probabilidade de X assumir 2 "$=\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}\{(C,C)\})=\dfrac{1}{4}$.

2.5.1.2 Função de variável aleatória

Podemos aplicar uma função g [1] a uma variável aleatória X e também calcular a sua distribuição de probabilidade.

Exemplo 17. Ainda usando o exemplo 15, considere $Y=g(X)=2X+1$, e vamos calcular a distribuição de probabilidade de Y. Temos que X assume 0, 1, ou 2, então:

- quando $X=0$ temos $Y=2.(0)+1=1$ ou seja, $\{X=0\}=\{Y=1\}$;
- quando $X=1$ temos $Y=2.(1)+1=3$ ou seja, $\{X=1\}=\{Y=3\}$;
- quando $X=2$ temos $Y=2.(2)+1=5$ ou seja, $\{X=2\}=\{Y=5\}$.

Assim, Y assume o valores 1, 3 e 5 e a distribuição de probabilidade de Y será:

- $p_Y(1)=\mathbb{P}(\{Y=1\})=\mathbb{P}(\{X=0\})=p_X(0)=\dfrac{1}{4}$;
- $p_Y(3)=\mathbb{P}(\{Y=3\})=\mathbb{P}(\{X=1\})=p_X(1)=\dfrac{1}{2}$;
- $p_Y(5)=\mathbb{P}(\{Y=5\})=\mathbb{P}(\{X=2\})=p_X(2)=\dfrac{1}{4}$.

Como $\{X=0\}\cup\{X=1\}\cup\{X=2\}=\Omega$, então,

$$\mathbb{P}(\{X=0\}\cup\{X=1\}\cup\{X=2\})=\mathbb{P}(\Omega),$$

mas como $\{X=0\},\{X=1\}$ e $\{X=2\}$ são disjuntos, pelo Axioma 2 e 3 da Definição 3 temos que,

$$\sum_x \mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)\cup\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(\Omega)=1.$$

A distribuição de probabilidade de Y é a mesma de X, então a somatória das probabilidades de Y assumir 1, 3 e 5 é igual a 1.

$$p_Y(y)=p_Y(1)+p_Y(3)+p_Y(5)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1,$$

[1] Para o leitor que já estudou Teoria da Medida, para que $g(X)$ seja uma variável aleatória a função g deve ser contínua

assim, a distribuição de massa de probabilidade de Y é definida por

$$p_Y = (y) = \begin{cases} 1/4 \text{ se } y = 1 \\ 1/2 \text{ se } y = 3 \\ 1/4 \text{ se } y = 5. \end{cases}$$

2.5.1.3 Esperança $\mathbb{E}(X)$

A esperança matemática de uma variável aleatória X é a média ponderada de seus valores com pesos iguais às probabilidades de X assumir esses valores, ou seja,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x.\mathbb{P}(X = x). \tag{2.7}$$

Exemplo 18. Voltando ao exemplo 15 temos que, "X assume 0,1 ou 2"e

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

Assim, usando a equação 2.7, temos que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{2} x.\mathbb{P}(X = x) = 0.\mathbb{P}(X = 0) + 1.\mathbb{P}(X = 1) + 2.\mathbb{P}(X = 2) = 0.\frac{1}{4} + 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} = 1,$$

ou seja, se repetirmos várias vezes o experimento de lançar duas moedas, o valor esperado (Esperança) será 1, isto é, a média ponderada do número de caras no lançamento de 2 moedas é 1.

Exemplo 19. Considere o lançamento de um dado honesto de 6 faces. Seja X a variável aleatória que representa o número da face que fica voltada para cima após o lançamento, então, "X assume os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6"e

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(X = 6) = 1/6.$$

Calculando o valor esperado usando a equação 2.7, temos que;

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x=1}^{6} x.\mathbb{P}(X = x) \\ &= 1.\mathbb{P}(X = 1) + 2.\mathbb{P}(X = 2) + 3.\mathbb{P}(X = 3) + 4.\mathbb{P}(X = 4) + 5.\mathbb{P}(X = 5) + 6.\mathbb{P}(X = 6) \\ &= 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5. \end{aligned}$$

Podemos ver que $\mathbb{E}(X)$ não é o resultado que podemos esperar quando X for observado uma única vez, e mesmo o valor $\mathbb{E}(X) = 3,5$ nem é um valor possível de X assumir. Esse valor significa que se jogássemos o dado um grande número de vezes e calculássemos a média aritmética dos vários resultados, esperaríamos que essa média ficasse próxima de 3,5 e quanto maior o número de vezes que o dado fosse lançado, mais a média aritmética se aproximaria de 3,5.

2.5.1.4 Variância Var(X)

A variância é o valor esperado da variável aleatória $(X-\mathbb{E}(X))^2$, ou seja,

$$Var(X)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2]. \tag{2.8}$$

A variância fornece uma medida de dispersão dos valores da variável aleatória em relação a sua esperança. Podemos calcular a variância usando uma outra fórmula que é obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2-2.\mathbb{E}(X).X+[\mathbb{E}(X)]^2] \\ &= \mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}(X).\mathbb{E}(X)+[\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2)-[\mathbb{E}(X)]^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Exemplo 20. Vamos calcular a variância do exemplo 19 onde X é a variável aleatória definida como o número da face observada no lançamento de um dado honesto de 6 faces. Usando a expressão 2.8 temos que;

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2] \\ Var(X) &= \sum_{x=1}^{6}(x-\mathbb{E}(X))^2.px(X) \\ Var(X) &= (1-3,5)^2.\frac{1}{6}+(2-3,5)^2.\frac{1}{6}+(3-3,5)^2.\frac{1}{6}+(4-3,5)^2.\frac{1}{6}+ \\ &\quad (5-3,5)^2.\frac{1}{6}+(6-3,5)^2.\frac{1}{6} \\ Var(X) &= [(-2,5)^2+(-1,5)^2+(-0,5)^2+(0,5)^2+(1,5)^2+(2,5)^2].\frac{1}{6} \\ Var(X) &= \frac{17,5}{6} \\ Var(X) &\cong 2,92. \end{aligned}$$

Podemos calcular a variância usando a expressão 2.9, ou seja, $Var(X)=\mathbb{E}(X^2)-[\mathbb{E}(X)]^2$. Para fazer isso devemos calcular a distribuição de probabilidade de $Y=X^2$. Sabemos que X assume o valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, assim temos que:

- para $X=1$ então $Y=1^2=1$;
- para $X=2$ então $Y=2^2=4$;
- para $X=3$ então $Y=3^2=9$;
- para $X=4$ então $Y=4^2=16$;
- para $X=5$ então $Y=5^2=25$;

- para $X = 6$ então $Y = 6^2 = 36$.

Assim, Y assume 1, 4, 9, 16, 25, 36, e portanto,

- $p_Y(1) = \mathbb{P}(\{Y = 1\}) = \mathbb{P}(\{X = 1\}) = p_X(1) = 1/6$;
- $p_Y(4) = \mathbb{P}(\{Y = 4\}) = \mathbb{P}(\{X = 2\}) = p_X(2) = 1/6$;
- $p_Y(9) = \mathbb{P}(\{Y = 9\}) = \mathbb{P}(\{X = 3\}) = p_X(3) = 1/6$;
- $p_Y(16) = \mathbb{P}(\{Y = 16\}) = \mathbb{P}(\{X = 4\}) = p_X(4) = 1/6$;
- $p_Y(25) = \mathbb{P}(\{Y = 25\}) = \mathbb{P}(\{X = 5\}) = p_X(5) = 1/6$;
- $p_Y(36) = \mathbb{P}(\{Y = 36\}) = \mathbb{P}(\{X = 6\}) = p_X(6) = 1/6$,

portanto, a distribuição de probabilidade de Y será:

$$p_Y = (y) = \begin{cases} 1/6 \text{ se } y = 1 \\ 1/6 \text{ se } y = 4 \\ 1/6 \text{ se } y = 9 \\ 1/6 \text{ se } y = 16 \\ 1/6 \text{ se } y = 25 \\ 1/6 \text{ se } y = 36. \end{cases}$$

Vamos calcular $\mathbb{E}(X^2)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= 1.\mathbb{P}(Y = 1) + 4.\mathbb{P}(Y = 4) + 9.\mathbb{P}(Y = 9) + \\ &\quad 16.\mathbb{P}(Y = 16) + 25.\mathbb{P}(Y = 25) + 36.\mathbb{P}(Y = 36) \\ &= 1.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 9.\frac{1}{6} + 16.\frac{1}{6} + 25.\frac{1}{6} + 36.\frac{1}{6} = \frac{91}{6} \cong 15,17. \end{aligned}$$

Do exemplo 18 temos que, $\mathbb{E}(X) = 3,5$, assim podemos encontrar $Var(X)$,

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 15,17 - (3,5)^2 = 15,17 - 12,25 = 2,92.$$

Podemos citar que a $Var(X)$ não tem a mesma ordem de grandeza da $\mathbb{E}(X)$. Quem está na mesma ordem de grandeza da $\mathbb{E}(X)$ é o desvio padrão que é calculado como $\sqrt{Var(X)}$.

2.5.2 Distribuição Bernoulli

Consideremos um experimento aleatório cujos resultados possam ser classificados em sucesso e fracasso. Seja X a variável aleatória que assume 1 no caso de sucesso e 0 no caso de fracasso. Chamaremos de p a probabilidade de sucesso. Então,

$$p_X(0) = \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - p \text{ e} p_X(1) = \mathbb{P}(\{X = 1\}) = p,$$

onde $0 \leq p \leq 1$. Dizemos que essa variável aleatória tem distribuição de Bernoulli ($X \sim Bernoulli(p)$) que pode ser resumida como,

$$\mathbb{P}(X = x) = p^x.(1-p)^{1-x}, \tag{2.10}$$

com $x \in \{0,1\}$ e $p \in [0,1]$. A variável aleatória de Bernoulli é usada para modelar situações onde há apenas dois eventos, tais como:

- Ao resolver uma questão objetiva de uma prova: acertar ou errar.
- Lançar uma moeda: cara ou coroa.
- Situação de um paciente em um hospital: curado ou doente.

Exemplo 21. Uma urna contem 10 bolas azuis e 20 bolas brancas. Ao retirar uma bola a probabilidade de sair bola azul é $p = \dfrac{10}{30}$ e a probabilidade de sair bola branca é $1 - p = \dfrac{20}{30}$. Seja X uma variável aleatória de Bernoulli que assume 1 se a bola for azul, e 0 se a bola for branca. Assim, a distribuição de probabilidade de X é:

$$\mathbb{P}(X = x) = \left(\frac{10}{30}\right)^x . \left(\frac{20}{30}\right)^{1-x}$$

com $x \in 0,1$ e $p \in [0,1]$.

2.5.3 Distribuição de binomial

Supondo que sejam realizados n experimentos do tipo sucesso-fracasso e seja X a variável aleatória que assume o número de vezes em que ocorreu sucesso. Assim $n-k$ será o número de vezes que ocorreu fracasso. Chamando de p a probabilidade de sucesso, a distribuição de probabilidade de X é

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k},\ k \in \mathbb{N} \geq 0. \tag{2.11}$$

Essa variável aleatória X é conhecida como Binomial de parâmetros n e p e denotada como $X \sim b(n,p)$, onde n é o número de ensaios e p a probabilidade de sucesso em cada ensaio. Lembrando que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Exemplo 22. Uma moeda honesta é lançada 3 vezes, vamos calcular a probabilidade de sair exatamente 2 caras. Seja X a variável aleatória que assume o número de caras em 3 lançamentos, assim, X assume os seguintes valores 0, 1, 2, 3. X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 3$ e $p = 1/2$. Portanto, a probabilidade de sair duas caras em três lançamentos, é:

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2} . \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3!}{2!.(3-2)!} . \frac{1}{4} . \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

2.5.4 Distribuição geométrica

Seja uma sequência de experimentos com 2 resultados, sucesso e fracasso que será repetida até ocorrer o primeiro sucesso. Chamaremos de p a probabilidade de sucesso. Seja a variável aleatória que conta a quantidade de repetições do experimento até ocorrer o primeiro sucesso, ou seja, X assume $1,2,3,\ldots$. Essa variável aleatória é chamada de Geométrica com parâmetro p que denotamos por $X \sim Ge(p)$ e é dada por

$$\mathbb{P}(X=k) = p.(1-p)^{k-1}, \tag{2.12}$$

onde $k = 1,2,3,\ldots$ é a quantidade de experimentos necessários até o primeiro sucesso.

Exemplo 23. Vamos jogar um dado honesto de 6 faces e estudar o n^o de vezes que devemos jogar o dado até sair a face 1. Neste exemplo, o sucesso é "sair face 1", que ocorre com probabilidade $p = 1/6$ e consequentemente o fracasso será "não sair face 1"que ocorre com probabilidade $1-p = 5/6$. Seja X a variável aleatória geométrica que assume a quantidade de repetições necessárias até ocorrer o 1^o sucesso, assim, X assume os valores $1,2,3,4,\ldots$". Calculando a probabilidade de "sair face 1"apenas no 6^o lançamento, isto é $k = 6$, temos que

$$\mathbb{P}(X=6) = \frac{1}{6}.\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cong 0,067.$$

2.6 Vetores aleatórios discretos

Ao analisarmos um experimento muitas vezes nos deparamos com várias variáveis aleatórias associadas aos resultados de um experimento. Podemos então definir uma variável aleatória multidimensional ou vetor aleatório como uma função que associa cada elemento ω de um espaço amostral Ω a uma n-upla $(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

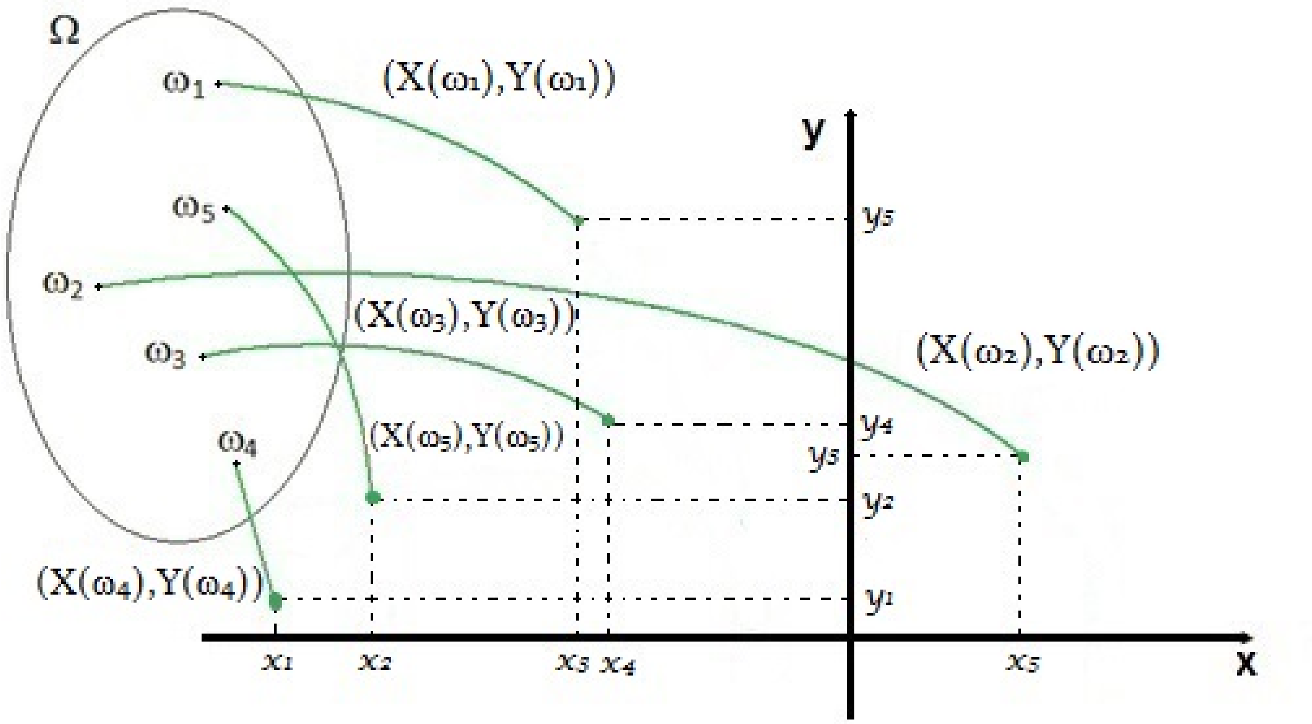
Definição 8. Considere $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ variáveis aleatórias definidas em um espaço amostral Ω. A n-upla $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$ é chamada variável aleatória n-dimensional que associa cada elemento ω a n-upla $(X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), ..., X_n(\omega))$.

Na Figura 9, representamos um exemplo onde o vetor $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ leva cada ω a um vetor aleatório $(X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 24. Ao lançarmos 2 dados de 6 faces, consideramos a variável aleatória X definida como a soma das faces destes lançamentos e Y a variável aleatória definida como o produto das faces dos lançamentos. Assim, X poderá assumir os valores $2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$ e 12, e Y pode assumirá os valores $1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,20,24,25,30$ e 36. O par (X,Y) é uma variável aleatória bidimensional que assume os valores demonstrados conforme a tabela abaixo.

Exemplo 25. Em um questionário de uma pesquisa socioeconômico há as seguintes perguntas e consideraremos cada resposta como uma variável aleatória;

Figura 9 – Função de uma Variável aleatória bidimensional



Fonte – adaptada de (WIKIPÉDIA, 2018)

Tabela 1 – Variável aleatória bidimensional - lançamento de 2 dados

1º dado \2ºdado	1	2	3	4	5	6
1	(2,1)	(3,2)	(4,3)	(5,4)	(6,5)	(7,6)
2	(3,2)	(4,4)	(5,6)	(6,8)	(7,10)	(8,12)
3	(4,3)	(3,6)	(6,9)	(7,12)	(8,15)	(9,18)
4	(5,4)	(3,8)	(7,12)	(8,16)	(9,20)	(10,24)
5	(6,5)	(3,10)	(8,15)	(9,20)	(10,25)	(11,30)
6	(7,6)	(3,12)	(9,18)	(10,24)	(11,30)	(12,36)

Fonte: Elaborada pelo autor.

1. Número de cômodos = X_1

2. Número de banheiros = X_2

3. Quantidade de carros = X_3

4. Quantidade de TV = X_4

5. Quantidade de celulares = X_5

A cada resposta fica associada uma quíntupla de inteiros $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ que é uma variável aleatória de dimensão 5. A quíntupla (5,2,1,2,3) por exemplo, corresponde a um domicílio que tem 5 cômodos, 2 banheiros, 1 carro, 2 TVs e 3 celulares.

2.6.1 Distribuição de probabilidade conjunta

Definição 9 (Distribuição de probabilidade conjunta)**.** Seja (X,Y) um vetor aleatório discreto, onde X assume valores $x_1, x_2, ..., x_n$ e Y assume os valores $y_1, y_2, ..., y_m$. Chamamos de distribuição de probabilidade conjunta do vetor aleatório (X,Y), o conjunto de valores $p(x_i, y_j)$ representado normalmente em uma tabela onde cada posição na tabela é a probabilidade conjunta de ocorrerem $\{X = x_i\}$ e $\{Y = y_j\}$ ou seja,

$$\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = p(x_i, y_j)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$ para quaisquer i e j.
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1,$

para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

Podemos representar a distribuição de probabilidade conjunta com o exemplo da tabela abaixo onde X assume os valores x_1, x_2 e x_3 e Y assume os valores y_1 e y_2. Assim teremos:

Tabela 2 – Distribuição de probabilidade conjunta

Y\X	x_1	x_2	x_3
y_1	$\mathbb{P}(X = x_1, Y = y_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2, Y = y_1)$	$\mathbb{P}(X = x_3, Y = y_1)$
y_2	$\mathbb{P}(X = x_1, Y = y_2)$	$\mathbb{P}(X = x_2, Y = y_2)$	$\mathbb{P}(X = x_3, Y = y_2)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 26. Dado um baralho normal com 52 cartas formadas por 4 naipes (paus, ouros, copas e espadas) e cada naipe formado por 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q e K), vamos sortear 2 cartas. Considere X a variável aleatória definida como o número de cartas que sejam damas e Y a variável aleatória definida como o número de cartas que sejam de copas. Assim, X assume os valores $0, 1$ e 2 e Y também assume $0, 1$ e 2. Queremos determinar a distribuição de probabilidade de (X, Y). Para todos os casos total de combinações de 2 cartas escolhidas entre as 52 cartas será dado por $\binom{52}{2} = 1326$.

Para calcular $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0)$, ou seja, calcular a probabilidade das 2 cartas sorteadas não serem nem dama e nem copas, assim, devemos considerar dentre as 52 cartas, 2 que não são damas e nem são copas, ou seja, formaremos $\binom{52-13-3}{2} = \binom{36}{2}$ combinações possíveis. A quantidade de combinações totais que podemos formar usando 2 cartas entre as cartas do baralho são $\binom{52}{2}$. Assim para calcular teremos $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \binom{36}{2}/\binom{52}{2} = \frac{630}{1326}$.

Para calcular $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1)$, ou seja, calcular a probabilidade das 2 cartas sorteadas não serem damas mas uma carta é copas, temos que considerar 2 situações. A primeira carta é de copas que não é dama, ou seja, temos que escolher 1 carta entre as são 12 cartas de copas possíveis, $\binom{13-1}{1} = \binom{12}{1}$. A segunda carta será uma carta que não é copas e nem dama, ou seja, $\binom{52-13-3}{1} = \binom{36}{1}$. Portanto, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \binom{12}{1} \cdot \binom{36}{1}/\binom{52}{2} = \frac{432}{1326}$.

Já para calcular $\mathbb{P}(X = 0, Y = 2)$, ou seja, calcular a probabilidade da duas cartas não serem damas mas as duas cartas são de copas, portanto, as duas cartas são de copas mas não são damas, assim, dentre as 13 cartas de copas devemos considerar apenas 12 cartas e calcular a combinação $\binom{13-1}{2} = \binom{12}{2}$. A probabilidade será $\mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \binom{12}{2}/\binom{52}{2} = \frac{66}{1326}$.

Para calcular $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0)$, ou seja calcular a probabilidade de 1 carta ser dama e nenhuma das duas cartas serem de copas, devemos ter $\binom{4-1}{1} = \binom{3}{1}$ para escolher uma carta que seja dama e não seja de copas e $\binom{52-13-3}{1} = \binom{36}{1}$ para escolher a outra carta que não é dama e nem copas. A probabilidade será $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \binom{3}{1} \cdot \binom{36}{1}/\binom{52}{2} = \frac{108}{1326}$.

No caso de calcular $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$ temos que pensar em duas possibilidades, uma carta é dama de copas e a outra uma carta que não é nem copas e nem dama $(1 \cdot \binom{52-13-3}{1})$ ou uma carta é dama que não é copas e a outra é copas que não é dama $(\binom{4-1}{1} \cdot \binom{13-1}{1})$. A probabilidade será $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = (1 \cdot \binom{36}{1} + \binom{3}{1} \cdot \binom{12}{1})/\binom{52}{2} = \frac{72}{1326}$.

Para calcular $\mathbb{P}(X = 0, Y = 2)$ temos que uma carta é dama de copas e a outra carta é dama ou seja $1 \cdot \binom{13-1}{1}$. Portanto a probabilidade $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \binom{12}{1}/\binom{52}{2} = \frac{12}{1326}$.

Para o caso de calcular $\mathbb{P}(X = 2, Y = 0)$ duas cartas são damas e nenhuma é de copas, portanto devemos escolher 2 entre 3 damas, $\binom{4-1}{2} = \binom{3}{2}$ e a probabilidade será $\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \binom{3}{2}/\binom{52}{2} = \frac{3}{1326}$.

No caso de calcular $\mathbb{P}(X = 2, Y = 1)$ uma carta é dama de copas e a outra é uma dama qualquer, ou seja precisamos selecionar uma carta (dama) das 3 damas possíveis já que uma carta está definida como dama de copas, ou seja, $\binom{4-1}{1} = \binom{3}{1}$. A probabilidade será $\mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = \binom{3}{1}/\binom{52}{2} = \frac{3}{1326}$.

No caso de calcular $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2)$ não ocorre pois não temos em um baralho normal 2 cartas que são damas de copas, portanto, $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 0$

Podemos organizar os valores calculados usando a tabela a seguir;

Observamos que ao somar todos os valores da tabela de distribuição conjunta obteremos 1.

Tabela 3 – Distribuição de probabilidade de (X, Y)

Y\X	X=0	X=1	X=2
Y=0	630/1326	108/1326	3/1326
Y=1	432/1326	72/1326	3/1326
Y=2	66/1326	12/1326	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.6.2 Distribuição marginal

Consideramos anteriormente uma variável aleatória bidimensional (X,Y), onde X assume valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ e Y assume os valores $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$. Calculamos a distribuição conjunta de (X,Y) usando $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ para $i = 1,2,3,\ldots,n$ e $j = 1,2,3,\ldots,m$. Podemos calcular $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ ou seja, as probabilidades de ocorrer $\{X = x\}$ e $\{Y = y\}$ respectivamente.

Definição 10 (Distribuição marginal)**.** Seja (X,Y) um vetor aleatório bidimensional e $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ a sua distribuição conjunta para $i = 1,2,...,n$ e $j = 1,2,...,m$. A distribuição marginal de probabilidade de X é calculada para $i = 1,2,3,...,n$ conforme veremos a seguir:

$$\begin{aligned}
\{X = x_i\} &= (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_1\}) \cup (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_2\}) \cup \ldots \cup (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_m\}) \\
\mathbb{P}(X = x_i) &= \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cup \{Y = y_1\}) \cup (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_2\}) \cup \ldots \cup (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_m\}) \\
&= \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_1\}) + \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_2\}) + \cdots + \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_m\}) \\
&= \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_1) + \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_2) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_m).
\end{aligned}$$

Podemos usar a notação,

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j),$$

para a distribuição marginal de probabilidade de X.
De modo análogo podemos calcular a distribuição marginal de probabilidade para Y que será para $j = 1,2,3,...,m$ conforme veremos abaixo:

$$\begin{aligned}
\{Y = y_j\} &= (\{X = x_1\} \cap \{Y = y_j\}) \cup (\{X = x_2\} \cap \{Y = y_j\}) \cup \ldots \cup (\{X = x_n\} \cap \{Y = y_j\}) \\
\mathbb{P}(Y = y_j) &= \mathbb{P}(\{X = x_1\} \cup \{Y = y_j\}) \cup (\{X = x_2\} \cap \{Y = y_j\}) \cup \ldots \cup (\{X = x_n\} \cap \{Y = y_j\}) \\
&= \mathbb{P}(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_j\}) + \mathbb{P}(\{X = x_2\} \cap \{Y = y_j\}) + \cdots + \mathbb{P}(\{X = x_n\} \cap \{Y = y_j\}) \\
&= \mathbb{P}(X = x_1, Y = y_j) + \mathbb{P}(X = x_2, Y = y_j) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_n, Y = y_j).
\end{aligned}$$

Podemos usar a notação,

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j),$$

para representar a distribuição marginal de probabilidade para Y.

Podemos representar a distribuição de probabilidade conjunta com o exemplo da tabela a seguir onde X assume os valores x_1 e x_2 e Y assume os valores y_1 e y_2. Assim teremos:

Tabela 4 – Representação da distribuição de probabilidade conjunta

$Y \setminus X$	x_1	x_2	**Distribuição Marginal de** Y
y_1	$\mathbb{P}(X = x_1, Y = y_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2, Y = y_1)$	$\mathbb{P}(Y = y_1) =$ $= \mathbb{P}(X = x_1, Y = y_1) +$ $+ \mathbb{P}(X = x_2, Y = y_1)$
y_2	$\mathbb{P}(X = x_1, Y = y_2)$	$\mathbb{P}(X = x_2, Y = y_2)$	$\mathbb{P}(Y = y_2) =$ $= \mathbb{P}(X = x_1, Y = y_2) +$ $+ \mathbb{P}(X = x_2, Y = y_2)$
Distribuição Marginal de X	$\mathbb{P}(X = x_1) =$ $= \mathbb{P}(X = x_1, Y = y_1) +$ $+ \mathbb{P}(X = x_1, Y = y_2)$	$\mathbb{P}(X = x_2) =$ $= \mathbb{P}(X = x_2, Y = y_1) +$ $+ \mathbb{P}(X = x_2, Y = y_2)$	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 27. Calculando a distribuição marginal de X e Y do exemplo 26 teremos que a distribuição marginal de X será,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) &= \sum_{j=1}^{2} \mathbb{P}(X = 0, Y = y_j) \\
&= \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) \\
&= \frac{630}{1326} + \frac{432}{1326} + \frac{66}{1326} = \frac{1128}{1326}. \\
\mathbb{P}(X = 1) &= \sum_{j=1}^{2} \mathbb{P}(X = 1, Y = y_j) \\
&= \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) \\
&= \frac{108}{1326} + \frac{72}{1326} + \frac{12}{1326} = \frac{192}{1326}. \\
\mathbb{P}(X = 2) &= \sum_{j=1}^{2} \mathbb{P}(X = 2, Y = y_j) \\
&= \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) \\
&= \frac{3}{1326} + \frac{3}{1326} + \frac{0}{1326} = \frac{6}{1326}.
\end{aligned}
$$

Analogamente a distribuição marginal de Y será,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) &= \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(X=x_i, Y=0) \\
&= \mathbb{P}(X=0,Y=0)+\mathbb{P}(X=1,Y=0)+\mathbb{P}(X=2,Y=0) \\
&= \frac{630}{1326}+\frac{108}{1326}+\frac{3}{1326}=\frac{741}{1326}. \\
\mathbb{P}(Y=1) &= \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(X=x_i, Y=1) \\
&= \mathbb{P}(X=0,Y=1)+\mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=2,Y=1) \\
&= \frac{432}{1326}+\frac{72}{1326}+\frac{3}{1326}=\frac{507}{1326}. \\
\mathbb{P}(Y=2) &= \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(X=x_i, Y=2) \\
&= \mathbb{P}(X=0,Y=2)+\mathbb{P}(X=1,Y=2)+\mathbb{P}(X=2,Y=2) \\
&= \frac{66}{1326}+\frac{12}{1326}+\frac{0}{1326}=\frac{78}{1326}.
\end{aligned}
$$

Podemos ver os valores das distribuições marginais de X e Y na tabela a seguir:

Tabela 5 – Distribuições marginais de X e Y

Y$\backslash X$	X=0	X=1	X=2	**Distribuição Marginal de Y**
Y=0	630/1326	108/1326	3/1326	**741/1326**
Y=1	432/1326	72/1326	3/1326	**507/1326**
Y=2	66/1326	12/1326	0	**78/1326**
Distribuição Marginal de X	**1128/1326**	**192/1326**	**6/1326**	**1**

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.6.3 Distribuição condicional

Definição 11 (Distribuição condicional)**.** Considere (X,Y) um vetor aleatório bidimensional com a distribuição conjunta $\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$, onde X assume os valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ e Y assume os valores $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$. A distribuição condicional de $\{X=x_i\}$ dado que $\{Y=y\}$ ocorreu é calculada conforme a expressão:

$$\mathbb{P}(X=x_i|Y=y)=\frac{\mathbb{P}(X=x_i,Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} \tag{2.13}$$

se $\mathbb{P}(Y=y)>0$ e para $x_i,\ i=1,2,3,\ldots,n$.

Da mesma forma podemos calcular a distribuição condicional de $\{Y=y_j\}$ dado $\{X=x\}$

Tabela 6 – Distribuição condicional de probabilidade de X dado $\{Y = 0\}$

X	0	1	2
$\mathbb{P}(X\|Y=0)$	$\frac{630}{741}$	$\frac{108}{741}$	$\frac{3}{741}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

conforme a expresão:

$$\mathbb{P}(Y = y_j|X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y_j)}{\mathbb{P}(X = x)} \tag{2.14}$$

se $\mathbb{P}(X = x) > 0$ para $y_j,\ j = 1,2,3,\ldots,m.$

Exemplo 28. Vamos usar o exemplo 26 para calcular a distribuição condicional de probabilidade de X dado $\{Y = 0\}$, ou seja "não sair carta de copas". Assim, temos que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x|Y = 0) &= \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} \\
\mathbb{P}(X = 0|Y = 0) &= \frac{\mathbb{P}(X = 0, Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} = \frac{\frac{630}{1326}}{\frac{741}{1326}} = \frac{630}{741} \\
\mathbb{P}(X = 1|Y = 0) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} = \frac{\frac{108}{1326}}{\frac{741}{1326}} = \frac{108}{741} \\
\mathbb{P}(X = 2|Y = 0) &= \frac{\mathbb{P}(X = 2, Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} = \frac{\frac{3}{1326}}{\frac{741}{1326}} = \frac{3}{741}
\end{aligned}$$

Portanto,

2.6.3.1 Variáveis Aleatórias Independentes

Podemos relacionar variáveis aleatórias quanto à sua independência. Informalmente podemos dizer que uma variável aleatória é independente de outra se os valores que uma variável aleatória assume não influênciam os valores que a outra variável assume. Usando a expressão da probabilidade condicional de X dado Y podemos escrever essa ideia como:

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \mathbb{P}(X = x),$$

mas como

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(X = x),$$

assim,

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

Com essa ideia em mente podemos definir variáveis aleatórias independentes.

Definição 12 (Variáveis aleatórias independentes)**.** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Elas são independentes, se e somente se,

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_j)$$

para todos os valores que X e Y podem asssumir.

Analogamente para mais de duas variáveis aleatórias, como por exemplo, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes se,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

para todos os valores que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ podem assumir.

2.7 Processos estocásticos

Nesta última seção vamos definir processos estocásticos, a classificação dos estados, cadeias de Markov e a distribuição de equilíbrio, que serão importantes para a compreensão e o entendimento do plano de aula que será proposto no próximo capítulo.

Definição 13. Processos estocástico é uma sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indexadas por $\mathbb{N}$ (geralmente o tempo), que assumem valores em um conjunto S, chamado de espaço de estados. O valor que cada variável aleatória X_n pode assumir representa o estado do processo no tempo **n**.

Podemos definir o espaço de estados da seguinte forma;

Definição 14. O espaço de estados de um processo estocástico é o conjunto de todos os possíveis valores que a variável aleatória X_n pode assumir.

Se o espaço de estado for finito ou enumerável então é chamado de estado discreto, mas se definido sobre o conjunto dos números reais então é chamado estados contínuos. Em relação ao parâmetro tempo também podemos classificar como tempo discreto se o tempo for finito ou enumerável e tempo contínuo se o parâmetro tempo for um número real não negativo.

A seguir alguns exemplos de processos estocásticos:

- Variação do preço de uma ação na bolsa de valores durante o dia, onde o preço da ação é o espaço de estados e o parâmetro n é qualquer hora durante o funcionamento da bolsa de valores durante o dia (estado contínuo e o parâmetro tempo contínuo);

- Variação da quantidade de carros que passam por hora de um pedágio em um determinado dia. Neste exemplo o espaço de estados será a quantidade de carros passam durante uma hora e o parâmetro será n será as horas, $n = 0$ corresponde 0h, $n = 1$ corresponde à 1h, ... (estado discreto e tempo discreto);

- Alteração semanal do estoque de um produto no mercado, onde a quantidade do estoque do produto é o espaço de estado e o parâmetro tempo é dado pelas semanas durante o ano, semana 1, semana 2, ... (estado discreto e tempo discreto);

- Variação da temperatura por hora de um local durante um dia. O espaço de estado será a variação da temperatura e o parâmetro tempo será dado de hora em hora (estado contínuo e tempo discreto);

- Índice pluviométrico diário, onde a quantidade de chuva é o espaço de estado e o parâmetro tempo é o data verificada (estado discreto e tempo discreto).

2.7.1 Cadeias de Markov

Apresentamos nesta seção as cadeias de Markov e para isso definiremos a propriedade de Markov.

Um processo estocástico é markoviano ou tem a propriedade de Markov se a ocorrência de um estado futuro $(n+1)$ depender exclusivamente de seu estado presente (n), não interessando o estado passado. Assim, podemos dizer que a probabilidade condicional de X_{n+1} assumir j sabendo que ocorreram $X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0$ vai depender exclusivamente de $X_n = i$. Portanto para quaisquer estados $j, i, i_{n-1}, ..., i_0 \in S$ teremos;

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}, \forall n = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{2.15}$$

Definição 15. (Cadeia de Markov) Uma sequência de variáveis aleatórias $X_0, X_1, ...$ é uma Cadeia de Markov com espaço de estado S, se para todo $i,\ j,\ i_0, \ldots,\ i_{n-1} \in S$, com $n \geqslant 1$ temos que;

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij} \tag{2.16}$$

Assim, a probabilidade condicional $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$ chamada de probabilidade de transição representa a probabilidade de X_{n+1} assumir j no instante $n+1$ dado que X_n assume o estado i no instante n.

Definição 16. (Matriz estocástica) Uma matriz quadrada (**T**) será chamada de **matriz de transição** se cada elemento da matriz p_{ij} representar a probabilidade de transição do estado **i** para o estado **j** em um passo. A matriz de transição será uma **matriz estocástica** se satisfazer as seguintes propriedades;

- $p_{ij} \geq 0$ (todos os elementos não negativos)
- $\sum_j p_{ij} = 1$ (a soma dos elementos de uma linha é 1)

Uma matriz estocástica para um espaço de estados finito é representado por,

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{i} & \mathbf{j} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \vdots \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{array} & \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0i} & p_{0j} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1i} & p_{1j} \\ p_{20} & p_{21} & \cdots & p_{2i} & p_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{i0} & p_{i1} & \cdots & p_{ii} & p_{ij} \\ p_{j0} & p_{j1} & \cdots & p_{ji} & p_{jj} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{2.17}$$

Assim,

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{j} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \vdots \\ \mathbf{j} \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=0) & \mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=0) & \cdots & \mathbb{P}(X_{n+1}=j|X_n=0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=1) & \mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=1) & \cdots & \mathbb{P}(X_{n+1}=j|X_n=1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=2) & \mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=2) & \cdots & \mathbb{P}(X_{n+1}=j|X_n=2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=j) & \mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=j) & \cdots & \mathbb{P}(X_{n+1}=j|X_n=j) \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.18}$$

Por exemplo, $p_{21} = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 2)$ representa a probabilidade de transição do estado 2 para o estado 1 em um passo.

Exemplo 29. Vamos supor que no mercado só existam 2 tipos de achocolatados que chamaremos de A e B. Se uma pessoa compra o achocolatado A, a probabilidade de repetir a compra em uma próxima oportunidade é de 90%. Já no caso de quem compra o achocolatado B, a probabilidade de comprar novamente em uma próxima oportunidade é de 80%. Supondo que a escolha do achocolatado seja uma cadeia de Markov, ou seja, a escolha do achocolatado só depende da última compra. Neste exemplo, a cadeia de Markov terá estados discretos e o tempo discreto e o espaço de estados é $S = \{A, B\}$. Podemos organizar as probabilidades de transição conforme a tabela 7:

Tabela 7 – Probabilidade de transição do Exemplo 29

	A	B
A	0,9	0,1
B	0,2	0,8

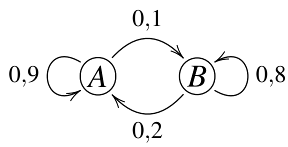
Fonte: Elaborada pelo autor.

A matriz estocástica para representar a probabilidade condicional da próxima compra do achocolatado $(n+1)$ dependendo da última compra (n) é:

$$T = \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = A|X_n = A) & \mathbb{P}(X_{n+1} = B|X_n = A) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = A|X_n = B) & \mathbb{P}(X_{n+1} = B|X_n = B) \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.19}$$

Outra forma de se representar a relação entre os estados é por meio de diagramas de transições conforme Figura 10.

Figura 10 – Diagrama de transição de estados do exemplo 29



Fonte: Elaborada pelo autor.

Saber as probabilidades de transição entre os estados é de grande importância nas Cadeias de Markov. A análise de uma Cadeia de Markov tem como principal característica calcular as probabilidades de transições em n períodos ou passos e denotamos por p_{ij}^n que representa a probabilidade de transição do estado i para o estado j em n passos. Definimos a probabilidade de transição em n passos como,

$$p_{ij}^n = \mathbb{P}(X_{m+n} = j|X_m = i) = \mathbb{P}(X_n = j|X_0 = i), \tag{2.20}$$

para $\forall m = 0, 1, 2, \ldots$. Podemos calcular o valor de p_{ij}^n somando todas as probabilidades de cada um dos caminhos que partem do estado i e chegam ao estado j em n passos.

Outra forma de se calcular p_{ij}^n é utilizando a matriz de transição T elevado a n, ou seja T^n. A ij-ésima entrada da matriz T^n na Cadeia de Markov determina a probabilidade do estado i esteja no estado j após n passos. No Exemplo 29 podemos calcular o valor da probabilidade de compra do achocolatado A após 2 passos sabendo que comprou o mesmo achocolatado na última compra, ou seja

$$T^2 = \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{2.21}$$

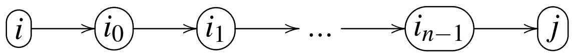
assim, a probabilidade da compra do achocolatado A após 2 compras sabendo que comprou o achocolatado A é $0,83$.

2.7.2 Classificação dos estados

Um estado **j** é **acessível** pelo estado **i**, que representado por $i \to j$, se $p_{ij}^{n} > 0$ para algum $n \geqslant 0$, ou seja, existe a possibilidade de ir do estado **i** para o estado **j** em n passos. Neste caso, podemos dizer que existe uma sequência $i, i_0, i_1, i_2, ..., i_{n-1}, j$ tal que $p(i, i_0) > 0$, $p(i_0, i_1) > 0$, $p(i_1, i_2), ..., p(i_{n-1}, j) > 0$.

Podemos representar um exemplo de estado acessível por meio de um diagrama como na Figura 11,

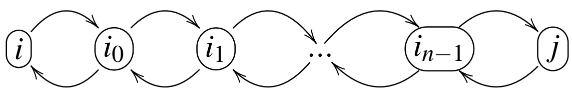
Figura 11 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de estado acessível



Fonte: Elaborada pelo autor.

Um estado **j** se **comunica** com o estado **i**, que indicamos por $i \leftrightarrow j$, se o estado **j** for acessível pelo estado **i**, $i \to j$, e o estado **i** for acessível pelo estado **j**, $j \to i$, conforme representado na Figura 12,

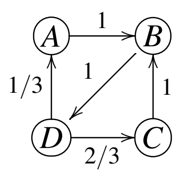
Figura 12 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de estado que se comunica



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma cadeia é **irredutível** se todos os estados se comunicam uns com os outros, ou seja, é possível sempre ir de um estado para outro, não necessariamente em apenas um passo. Podemos ver isso no exemplo da Figura 13.

Figura 13 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de uma cadeia irredutível - 1

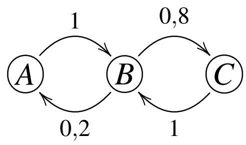


Fonte: Elaborada pelo autor.

Outro exemplo de cadeia **irredutível** é dada pelo diagrama da Figura 14.

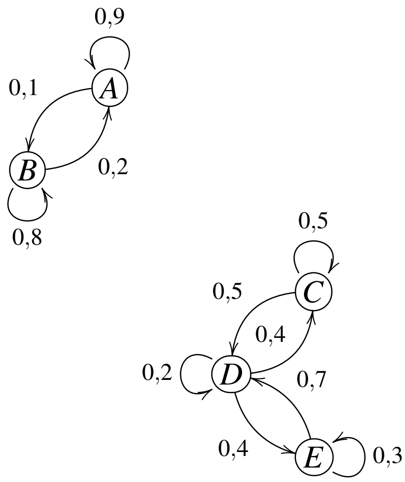
Uma cadeia é **redutível** se pelo menos um estado não se comunica com os outros, ou seja, nem todos os estados se comunicam entre si. No exemplo da Figura 15, os estados A e B não se comunicam com os estados C, D e E.

Figura 14 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de uma cadeia irredutível - 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 15 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de uma cadeia redutível



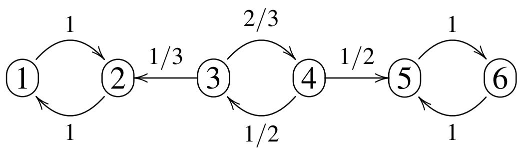
Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja **i** um estado de uma Cadeia de Markov com $\{X_n : n = 0, 1, 2, 3, ...\}$, o estado **i** é **transiente** se $\mathbb{P}(X_n = i|X_0 = i) < 1$ para algum $n \geq 1$, ou seja o estado i é visitado apenas uma quantidade finita de vezes.

Seja **i** um estado de uma Cadeia de Markov com $\{X_n : n = 0, 1, 2, 3, ...\}$, o estado **i** é **recorrente** se $\mathbb{P}(X_n = i|X_0 = i) = 1$ para algum $n \geq 1$, ou seja o estado **i** é **recorrente** se for visitado um número infinito de vezes. Em outras palavras um estado é **recorrente** se não for transiente.

No diagrama da Figura 16 os estados 3 e 4 são transientes e os estados 1, 2, 5 e 6 são recorrentes. Este exemplo mostra que se existe um estado transiente na cadeia, então essa cadeia é redutível.

Figura 16 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de estados transientes e recorrentes

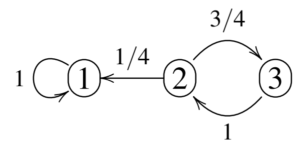


Fonte: Elaborada pelo autor.

Se todos os estados de uma cadeia de Markov fossem recorrentes chamaremos essa cadeia de **cadeia recorrente**.

Um estado **i** é **absorvente** se o processo entrar nesse estado não poderá sair, ou seja, $p_{ii} = 1$. No diagrama da Figura 17 o estado 1 é absorvente, pois ao entrar nesse estado não sairá. Quando a Cadeia de Markov tem um estado absorvente, ela é redutível. Verificamos na Figura 17 os estados 2 e 3 são transientes.

Figura 17 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de estado absorvente

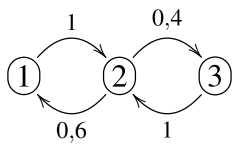


Fonte: Elaborada pelo autor.

O **período** de um estado i, representado por $d(i)$, de uma cadeia de Markov é o maior divisor comum (**mdc**) do conjunto de todos os n, $n \geq 1$, tal que $p^n_{i,i} > 0$, onde n é o número de passos necessários para que se possa sair do estado i e retornar a i. Uma notação mais formal para a definição do período de um estado é $d(i) = mdc\{n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 :\ p^n_{ii} > 0\}$. O período de uma cadeia irredutível é o período comum dos estados pertencentes a cadeia.

Exemplo 30. No diagrama de transição de estados da Figura 18 podemos ver que o espaço de estados é $S = \{1,2,3\}$ e a cadeia é irredutível.

Figura 18 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de uma cadeia irredutível - 3



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelo diagrama da Figura 18 podemos ver que saindo do estado 1 conseguimos retornar ao estado 1 em 2 passos (estado 1 $\rightarrow$ estado 2 $\rightarrow$ estado 1), 4 passos (estado 1 $\rightarrow$ estado 2 $\rightarrow$ estado 3 $\rightarrow$ estado 2 $\rightarrow$ estado 1), 6 passos (estado 1 $\rightarrow$ estado 2 $\rightarrow$ estado 3 $\rightarrow$ estado 2 $\rightarrow$ estado 3 $\rightarrow$ estado 2 $\rightarrow$ estado 1), ..., conforme representado a seguir:

- $1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{\mathbf{2}} 1$, ou seja, $n = 2$
- $1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{\mathbf{4}} 1$, assim, $n = 4$
- $1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{5} 2 \xrightarrow{\mathbf{6}} 1$, ou seja, $n = 6$,

portanto, $d(1) = mdc\{2,4,6,...\} = 2$

Em relação ao estado 2, conseguimos sair e retornar desse estado em 2 passos conforme podemos ver:

- $2 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{\mathbf{2}} 2$, assim, $n = 2$
- $2 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{\mathbf{2}} 2$, ou seja, $n = 2$,

portanto, $d(2) = 2$

Analogamente, saindo do estado 3, a quantidade de passos necessários para retornar ao estado 3 será:

- $3 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{\mathbf{2}} 3$, ou seja, $n = 2$
- $3 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 1 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{\mathbf{4}} 3$, assim, $n = 4$
- $3 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 1 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{4} 1 \xrightarrow{5} 2 \xrightarrow{\mathbf{6}} 3$, assim, $n = 6$

portanto, $d(3) = mdc\{2,4,6,...\} = 2$.

Assim, o período desta cadeia é 2.

Exemplo 31. Seja T a matriz 2.22 de transição de uma cadeia de Markov, onde o espaço de estados $S = \{1,2,3,4\}$:

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{2.22}$$

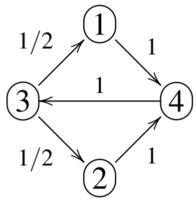
A partir da matriz 2.22 podemos construir o diagrama da Figura 19, que representa a forma como os estados se comunicam. Vamos determinar o período de cada estado, começando pelo estado 1:

- $1 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{\mathbf{3}} 1$, assim, $n = 3$
- $1 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{4} 4 \xrightarrow{5} 3 \xrightarrow{\mathbf{6}} 1$, ou seja, $n = 6$
- $1 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{4} 4 \xrightarrow{5} 3 \xrightarrow{6} 2 \xrightarrow{7} 4 \xrightarrow{8} 3 \xrightarrow{\mathbf{9}} 1$, assim, $n = 9$,

ou seja, $d(1) = mdc\{3,6,9,...\} = 3$.

Calculando o período do estado 2, temos que:

Figura 19 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de uma cadeia irredutível - 4



Fonte: Elaborada pelo autor.

- $2 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{\mathbf{3}} 2$, assim, $n = 3$
- $2 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{3} 1 \xrightarrow{4} 4 \xrightarrow{5} 3 \xrightarrow{\mathbf{6}} 2$, ou seja, $n = 6$
- $2 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{3} 1 \xrightarrow{4} 4 \xrightarrow{5} 3 \xrightarrow{6} 1 \xrightarrow{7} 4 \xrightarrow{8} 3 \xrightarrow{\mathbf{9}} 2$, portanto, $n = 9$,

assim, $d(2) = mdc\{3,6,9,...\} = 3$.

Calculando o período do estado 3, temos que:

- $3 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{\mathbf{3}} 3$, ou seja, $n = 3$
- $3 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{\mathbf{3}} 3$, assim, $n = 3$,

portanto, $d(3) = 3$.

Finalmente para calcular o período do estado 4, temos que:

- $4 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{2} 1 \xrightarrow{\mathbf{3}} 4$, assim, $n = 3$
- $4 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{\mathbf{3}} 4$, portanto, $n = 3$,

ou seja, $d(4) = 3$. Verificamos que o período da cadeia é 3.

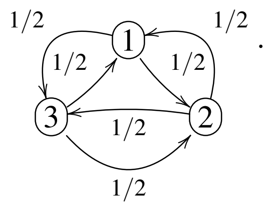
Exemplo 32. Uma criança assiste sempre a 3 canais de programação infantil na televisão (canais 1, 2 ou 3). A cada intervalo comercial muda para outro canal com probabilidade de $1/2$ para cada um dos canais que não estava assistindo. Supondo que a criança sempre faça a mudança de canal a cada intervalo comercial e também que só pode assistir aos canais 1, 2 ou 3 , temos uma Cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{1,2,3\}$. A matriz de transição T será a matriz

2.23,

$$T = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{2.23}$$

e o diagrama da Figura 20 construída a partir da matriz 2.23 de transição T que representa a forma como os estados se comunicam, assim Calculando o período do estado 1, temos que:

Figura 20 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de uma cadeia aperiódica



Fonte: Elaborada pelo autor.

- $1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{\mathbf{2}} 1$, assim, $n = 2$
- $1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{\mathbf{3}} 1$, portanto, $n = 3$,

como 2 e 3 são números primos não precisaremos continuar, pois $d(1) = mdc\{2,3,...\} = 1$.
Analogamente, calculando o período do estado 2, temos que:

- $2 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{\mathbf{2}} 2$, assim, $n = 2$
- $2 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{2} 1 \xrightarrow{\mathbf{3}} 2$, ou seja, $n = 3$,

portanto, $d(2) = mdc\{2,3,...\} = 1$.
Do mesmo modo, calculando o período do estado 3, temos que:

- $3 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{\mathbf{2}} 3$, assim, $n = 2$
- $3 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{\mathbf{3}} 3$, portanto, $n = 3$,

ou seja, $d(3) = mdc\{2,3,...\} = 1$.
Assim, verificamos que o período da cadeia é 1.

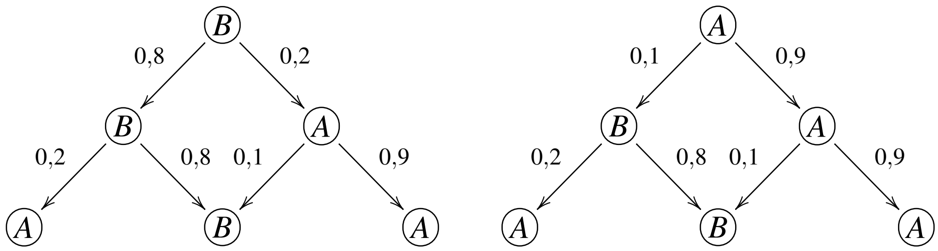
Um estado **recorrente i** é **aperiódico** se $d = 1$. Uma cadeia **aperiódica** é uma cadeia em que todos os estados tem período $d = 1$.

Podemos verificar também que se uma cadeia de Markov for irredutível, então, todos os estados tem o mesmo período e todos são recorrentes, como nos exemplos 30, 31 e 32. Assim, para calcular o período de uma Cadeia de Markov irredutível será necessário apenas calcular o período de um estado, pois todos os estados tem o mesmo período.

2.7.3 Distribuição de equilíbrio

Uma das formas de representação utilizadas no ensino de probabilidades é o **diagrama de árvore**, também conhecido como **árvore de probabilidade**. Em cada nó do diagrama representa um evento e cada galho está associado a probabilidade desse evento. O somatório de todas as probabilidades das ramificações de um mesmo nó é sempre igual a 1. As sub-ramificações de uma ramificação correspondem a probabilidade condicional dos eventos da segunda ramificação com relação ao evento da primeira ramificação. No exemplo 29, onde consideramos a compra de um achocolatado como uma Cadeia de Markov podemos representar por meio de um diagrama de árvore os eventos da compra de achocolatado em dois passos, conforme Figura 21. Podemos

Figura 21 – Diagrama de árvore



Fonte: Elaborada pelo autor.

ver pelo diagrama que se uma pessoa compra o achocolatado A no momento inicial, comprará o achocolatado B com probabilidade de 10% na próxima compra. Para a compra do achocolatado B após 2 passos sabendo que a compra inicial foi do achocolatado A devemos partir do nó A no diagrama da Figura 21 e chegar ao nó B depois de 2 passos, assim, comprando inicialmente o achocolatado A podemos comprar no primeiro passo A ou B e depois no segundo passo comprar o achocolatado B. Podemos representar a compra do achocolatado B após 2 passos (compras) da seguinte forma,

- $\underbrace{A}_{\text{Início}} \rightarrow \underbrace{A}_{1 passo} \rightarrow \underbrace{B}_{2 passos}$ ou
- $\underbrace{A}_{\text{Início}} \rightarrow \underbrace{B}_{1 passo} \rightarrow \underbrace{B}_{2 passos}$

Assim, a probabilidade de comprar B após dois passos sabendo que no momento inicial comprou A pode ser calculado como uma sequência de probabilidades condicionais,

$$\mathbb{P}(X_2=B|X_0=A)=\mathbb{P}(X_1=A|X_0=A).\mathbb{P}(X_2=B|X_1=A)+\mathbb{P}(X_1=B|X_0=A).\mathbb{P}(X_2=B|X_1=B).$$

Usaremos a notação p_{AB} para indicar a probabilidade de compra do achocolatado B sabendo que a compra anterior foi o achocolatado A, p_{BA} para indicar a probabilidade de compra do achocolatado A sabendo que a compra anterior foi do achocolatado B e $p_{AB}^{(2)}$ para representar a compra do achocolatado B após 2 passos sabendo que a compra inicial foi o achocolatado A, assim

$$p_{AB}^{(2)} = p_{AA} . p_{AB} + p_{AB} . p_{BB}. \tag{2.24}$$

Podemos criar uma matriz de transição

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} & \begin{pmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{2.25}$$

e para calcular as probabilidades de transição em mais de um passo, basta elevarmos a matriz ao passo desejado. Para calcular a probabilidade de sair do estado A e ir no estado B em 2 passos temos que:

$$T^2 = T.T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} & \begin{pmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{pmatrix} \end{array} . \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} & \begin{pmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} & \begin{pmatrix} p_{AA} . p_{AA} + p_{AB} . p_{BA} & p_{AA} . p_{AB} + p_{AB} . p_{BB} \\ p_{BA} . p_{AA} + p_{BB} . p_{BA} & p_{BA} . p_{AB} + p_{BB} . p_{BB} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{2.26}$$

assim, o elemento p_{12} da matriz T^2 é exatamente a equação 2.24 que nos fornece o resultado esperado de $p_{AB}^{(2)}$.

Podemos calcular as probabilidades de transição em quantidade maiores de passos conforme demonstrados a seguir, para 1 passo,

$$T^1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}$$

para 2 passos,

$$T^2 = T \cdot T = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix}$$

para 3 passos,

$$T^3 = T \cdot T^2 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,781 & 0,219 \\ 0,438 & 0,562 \end{pmatrix}$$

para 4 passos,

$$T^4 = T^2 \cdot T^2 = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,747 & 0,253 \\ 0,507 & 0,493 \end{pmatrix}$$

para 8 passos,

$$T^8 = T^4 \cdot T^4 = \begin{pmatrix} 0,747 & 0,253 \\ 0,507 & 0,493 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,747 & 0,253 \\ 0,507 & 0,493 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,686 & 0,314 \\ 0,628 & 0,372 \end{pmatrix}$$

para 16 passos

$$T^{16} = T^8 \cdot T^8 = \begin{pmatrix} 0,686 & 0,314 \\ 0,628 & 0,372 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,686 & 0,314 \\ 0,628 & 0,372 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,668 & 0,332 \\ 0,664 & 0,336 \end{pmatrix}$$

Podemos verificar que os elementos das linhas estão se aproximando dos valores $0,666... = 2/3$ e $0,333... = 1/3$ assim, para uma quantidade de n passos, onde $n \to \infty$ teremos

$$\lim_{n\to\infty} T^n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} & \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Portanto quando $n \to \infty$ as linhas da matriz T^n convergem para o vetor linha chamado distribuição de equilíbrio. Podemos dizer que ao longo prazo a probabilidade da cadeia se encontrar no estado A é $2/3$ e a probabilidade da cadeia se encontar no estado B será $1/3$.

Podemos definir a distribuição de equilíbrio de probabilidades da seguinte forma;

Definição 17 (Distribuição de equilíbrio de probabilidades)**.** Dado uma Cadeia de Markov com espaço de estado $S = \{1,2,3,\ldots,m\}$ com matriz de transição T, chamamos de distribuição de equilíbrio de probabilidades ou distribuição estacionária da Cadeia de Markov ao vetor linha $(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$ que satisfaz as seguintes propriedades;

1. $\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1$, onde $\pi_i \geq 0$ e $i = 1,2,3,...,m$
2. $\pi \cdot T = \pi$
3. $\lim_{n\to\infty} p^n_{jk} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = j) = \pi_k$, para todo j e k.

Podemos representar a distribuição de equilíbrio da Cadeia de Markov da seguinte forma;

$$T^n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \ldots & \mathbf{k} & \ldots & \mathbf{m} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \vdots \\ \mathbf{j} \\ \vdots \\ \mathbf{m} \end{array} & \begin{pmatrix} p^n_{11} & p^n_{12} & \cdots & p^n_{1k} & \cdots & p^n_{1m} \\ P^n_{21} & p^n_{22} & \cdots & p^n_{2k} & \cdots & p^n_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^n_{j1} & p^n_{j2} & \cdots & p^n_{jk} & \cdots & p^n_{jm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^n_{m1} & p^n_{m2} & \cdots & p^n_{mk} & \cdots & p^n_{mm} \end{pmatrix} \end{array} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \ldots & \mathbf{k} & \ldots & \mathbf{m} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \vdots \\ \mathbf{j} \\ \vdots \\ \mathbf{m} \end{array} & \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_k & \ldots & \pi_m \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_k & \ldots & \pi_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_k & \ldots & \pi_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_k & \ldots & \pi_m \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.27}$$

onde $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k, ..., \pi_m)$ é a distribuição de equilíbrio da Cadeia de Markov.

Exemplo 33. Para ir de ônibus de São Carlos à São Paulo temos 2 empresas que fazem esse percurso. Vamos chamar essas empresas de A e B. Supondo que quem usou a empresa A tem a probabilidade de 80% de repetir na próxima oportunidade e quem usou a empresa B tem a probabilidade de 60% de repetir na próxima oportunidade. Vamos calcular a distribuição limite dessa Cadeia de Markov. Temos que a matriz de transição da cadeia de Markov será:

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \textbf{A} & \textbf{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textbf{A} \\ \textbf{B} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para calcular a distribuição limite usaremos a propriedade 2 da definição 17:

$$(\pi_1 \quad \pi_2) \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (\pi_1 \quad \pi_2)$$

Assim temos:

$$\begin{cases} 0,8\pi_1 + 0,4\pi_2 &= \pi_1 \quad (I) \\ 0,2\pi_1 + 0,6\pi_2 &= \pi_2 \quad (II) \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \quad (III) \end{cases}$$

Isolando o π_1 na equação (III) temos $\pi_1 = 1 - \pi_2$. Substituindo π_1 na equação (I) temos,

$$0,8(1-\pi_2) + 0,4\pi_2 = (1-\pi_2)$$

$$0,8 - 0,8\pi_2 + 0,4\pi_2 = 1 - \pi_2$$

$$0,6\pi_2 = 0,2$$

$$\pi_2 = 0,2/0,6 = 1/3$$

como $\pi_1 + \pi_2 = 1$ temos $\pi_1 = 2/3$.
Portanto, $\pi = (\pi_1 \quad \pi_2) = (1/3 \quad 2/3)$.

2.7.4 Existência e unicidade da distribuição de equilíbrio

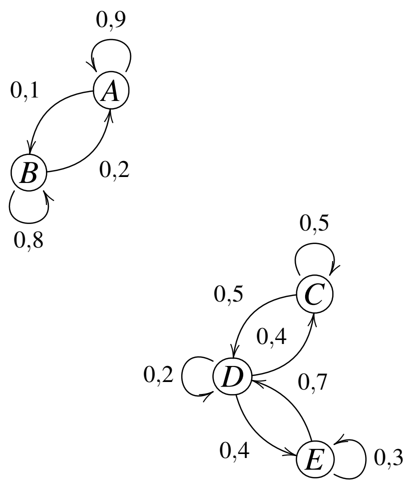
Após entendermos o conceito e a forma de se calcular a distribuição de equilíbrio vamos determinar quando ela existe e se ela é única.

Teorema 1. Durrett (2009, p. 134)Seja uma Cadeia de Markov irredutível e aperiódica então existe uma única distribuição de equilibrio, π com Ω finito, tal que:

$$p_{i,j}^n \to \pi_j \quad \text{se} \quad n \to \infty.$$

A irredutibilidade garante a unicidade da distribuição de equilíbrio, pois como todos os estados se comunicam uns com os outros, portanto, é possível ir de qualquer estado para qualquer outro estado em n passos. Deste modo a distribuição de equilíbrio será única. Vamos analisar uma cadeia redutível, isto é, uma cadeia onde não existe a comunicação entre todos os estados.

Exemplo 34. O exemplo que usaremos será da Figura 15 que é uma cadeia redutível com 5 estados, A, B, C, D e E onde os estados A e B se comunicam e os estados C, D e E se comunicam entre si, mas não há comunicação entre os estados (A,B) e (C,D e E). Portanto se iniciarmos nos estados A ou B é impossível chegarmos aos estados C, D ou E e vice-versa. Desta forma, os valores de zero da matriz de transição continuarão para sempre.



A matriz de transição da cadeia de Markov que representa a figura acima é

$$T = \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Essa cadeia pode ser escrito como a união disjunta de duas classes de estados, originando portanto mais de uma distribuição de equilíbrio. Neste caso temos duas distribuições de equilíbrio que serão: $\pi_1 = (\pi_A \quad \pi_B \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ e $\pi_2 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad \pi_C \quad \pi_D \quad \pi_E)$. Para calcular a distribuição equilíbrio devemos resolver a seguinte multiplicação de matrizes de acordo com a propriedade 2 da definição 17,

$$(\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C \quad \pi_D \quad \pi_E) . \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} = (\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C \quad \pi_D \quad \pi_E) .$$

Resolvendo a multiplicação temos que:

$$\left\{\begin{array}{rcll} 0,9\pi_A+0,2\pi_B &=& \pi_A & (I)\\ 0,1\pi_A+0,8\pi_B &=& \pi_B & (II)\\ 0,5\pi_C+0,4\pi_D &=& \pi_C & (III)\\ 0,5\pi_C+0,2\pi_D+0,7\pi_E &=& \pi_D & (IV)\\ 0,4\pi_D+0,3\pi_E &=& \pi_E & (V)\\ \pi_A+\pi_B+\pi_C+\pi_D+\pi_E &=& 1 & (VI) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -0,1\pi_A+0,2\pi_B &=& 0 & (I)\\ 0,1\pi_A-0,2\pi_B &=& 0 & (II)\\ -0,5\pi_C+0,4\pi_D &=& 0 & (III)\\ 0,5\pi_C-0,8\pi_D+0,7\pi_E &=& 0 & (IV)\\ 0,4\pi_D-0,7\pi_E &=& 0 & (V)\\ \pi_A+\pi_B+\pi_C+\pi_D+\pi_E &=& 1 & (VI) \end{array}\right. .$$

Verificamos que as equações (I) e (II) são equivalentes. Da equação (III) temos que $0,4\pi_D = 0,5\pi_C$, e substituindo em (IV) temos que $\pi_A+\pi_B+\pi_C+\pi_D+\pi_E = 1$, ou seja , a equação (IV) será equivalente a (V). Assim teremos 5 incógnitas e 4 equações portanto teremos um sistema possível e indeterminado. Uma forma de resolver esse sistema de inequações é calcular separadamente como se fosse 2 matrizes como demonstraremos a seguir:

$$T_1 = \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{e} \quad T_2 = \begin{array}{c} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \end{array},$$

assim resolvendo o sistema para T_1, temos que,

$$(\pi_A \quad \pi_B).\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (\pi_A \quad \pi_B).$$

Assim

$$\left\{\begin{array}{rcll} 0,9\pi_A+0,2\pi_B &=& \pi_A & (I)\\ 0,1\pi_A+0,8\pi_B &=& \pi_B & (II)\\ \pi_A+\pi_B &=& 1 & (III) \end{array}\right. .$$

Resolvendo o sistema temos que $\pi_A = 0,67$ e $\pi_B = 0,33$. Do mesmo modo resolvendo o sistema para T_2 temos que

$$(\pi_C \quad \pi_D \quad \pi_E).\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} = (\pi_C \quad \pi_D \quad \pi_E).$$

Portanto

$$\left\{\begin{array}{rcll} 0,5\pi_C+0,4\pi_D &=& \pi_C & (I)\\ 0,5\pi_C+0,2\pi_D+0,7\pi_E &=& \pi_D & (II)\\ 0,4\pi_D+0,3\pi_E &=& \pi_E & (III)\\ \pi_C+\pi_D+\pi_E &=& 1 & (IV) \end{array}\right.$$

Resolvendo o sistema temos que $\pi_C = 0,34$, $\pi_D = 0,42$ e $\pi_E = 0,24$.

Podemos elevar a matriz de transição e verificar que linhas da matriz de transição T^n para $n \to \infty$, não convergem para o vetor linha chamado distribuição de equilíbrio conforme mostraremos a seguir:

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Para dois passos temos que:

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 & 0 & 0 & 0 \\ 0,34 & 0,66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,45 & 0,35 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,28 & 0,52 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,28 & 0,35 & 0,37 \end{pmatrix}.$$

Para 4 passos temos que:

$$T^4 = T^2.T^2 = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 & 0 & 0 & 0 \\ 0,34 & 0,66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,45 & 0,35 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,28 & 0,52 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,28 & 0,35 & 0,37 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 & 0 & 0 & 0 \\ 0,34 & 0,66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,45 & 0,35 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,28 & 0,52 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,28 & 0,35 & 0,37 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,51 & 0,49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,36 & 0,41 & 0,23 \\ 0 & 0 & 0,33 & 0,44 & 0,23 \\ 0 & 0 & 0,33 & 0,41 & 0,26 \end{pmatrix}.$$

Para 8 passos temos que:

$$T^8 = T^4.T^4 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,51 & 0,49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,36 & 0,41 & 0,23 \\ 0 & 0 & 0,33 & 0,44 & 0,23 \\ 0 & 0 & 0,33 & 0,41 & 0,26 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,51 & 0,49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,36 & 0,41 & 0,23 \\ 0 & 0 & 0,33 & 0,44 & 0,23 \\ 0 & 0 & 0,33 & 0,41 & 0,26 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,69 & 0,31 & 0 & 0 & 0 \\ 0,63 & 0,37 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,34 & 0,42 & 0,24 \\ 0 & 0 & 0,34 & 0,42 & 0,24 \\ 0 & 0 & 0,34 & 0,42 & 0,24 \end{pmatrix}.$$

Assim aumentando o número de passos, ou seja, para $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} T^n = \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0,67 & 0,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,34 & 0,42 & 0,24 \\ 0 & 0 & 0,34 & 0,42 & 0,24 \\ 0 & 0 & 0,34 & 0,42 & 0,24 \end{pmatrix} \end{array}.$$

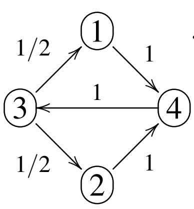
Verificamos que não temos uma distribuição de equilíbrio única, pois as linhas da matriz de transição T^n quando $n \to \infty$ não são iguais, ou seja, se iniciarmos a cadeia nos estado A e B teremos uma distribuição $\pi_1 = (\pi_A = 0,67,\ \pi_B = 0,33,\ \pi_C = 0,\ \pi_D = 0,\ \pi_E = 0)$ e se iniciarmos a cadeia nos estados C, D ou E então, teremos como distribuição $\pi_2 = (\pi_A = 0,\ \pi_B = 0,\ \pi_C = 0,34,\ \pi_D = 0,42,\ \pi_E = 0,24)$. Assim, se a Cadeia de Markov for não for irredutível, então a distribuição limite não é única, portanto teremos mais de uma distribuição de equilíbrio.

A periodicidade trata da convergência das linhas da matriz T^n, quando $n \to \infty$, para a distribuição de equilíbrio, ou seja, se a cadeia de Markov for aperiódica as linhas da matriz T^n convergem para o vetor linha $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$ quando $n \to \infty$. O que aconteceria com a distribuição de equilíbrio se a cadeia de Markov fosse periódica? Vamos usar o Exemplo 31 da Figura 19 para ver o que acontece.

Exemplo 35. A matriz de transição 2.22 do Exemplo 31 é:

$$T = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

E o diagrama correspondente é a Figura 19



.

O período neste exemplo já foi calculado e é d=3, portanto é uma cadeia periódica e também irredutível. Vamos ver se teremos convergência usando a multiplicação de matriz. Para 2 passos temos que;

$$T^2 = T.T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para 3 passos temos que;

$$T^3 = T^2.T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para 4 passos temos que:

$$T^4 = T^3.T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = T.$$

Verificamos que $T^4 = T^1 = T$, ou seja, a partir do passo 4 temos que T^4 volta a matriz T, assim,

$$T^5 = \underbrace{T^4}_{T}.T = T.T = T^2$$

$$T^6 = \underbrace{T^5}_{T^2}.T = T^2.T = T^3$$

$$T^7 = \underbrace{T^6}_{T^3}.T = T^3.T = T^4 = T.$$

portanto, não teremos convergência pois as matrizes se alternarão entre $T^1, T^2, T^3, T^1, T^2, T^3, T^1, \ldots$.

Mesmo não tendo convergência das matrizes de transição para uma distribuição de equilíbrio, podemos calcular o valor da distribuição de equilíbrio $\pi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ usando a expressão da propriedade 2 da definição 17, ou seja, $\pi.T = \pi$, portanto

$$(\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4). \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4),$$

resolvendo a multiplicação temos o seguinte sistema linear,

$$\begin{cases} 0,5\pi_3 &= \pi_1 \quad (I) \\ 0,5\pi_3 &= \pi_2 \quad (II) \\ \pi_4 &= \pi_3 \quad (III) \\ \pi_1+\pi_2 &= \pi_4 \quad (IV) \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4 &= 1 \quad (V) \end{cases}.$$

Substituindo (I), (II) e (III) em (V) temos que, $0,5\pi_3+0,5\pi_3+\pi_3+\pi_3=1$ logo $\pi_3=1/3$ substituindo esse resultado em (I) temos que $\pi_1=1/6$, de modo análogo substituindo em (II) temos que $\pi_2=1/6$ e finalmente temos que $\pi_4=1/3$ pela expressão (III). A distribuição equilíbrio é $\pi=(1/6 \quad 1/6 \quad 1/3 \quad 1/3)$.

Observação: Se a cadeia fosse aperiódica, teriamos

$$\lim_{n\to\infty} T^n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} & \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{2.28}$$

mas não é isso que foi observado. Verificamos que quando a cadeia de Markov é periódica com período d, as linhas da matriz de transição T^n para $n\to\infty$, não convergem para o vetor linha chamado distribuição de equilíbrio. O Teorema 2 a seguir traz um resultado para o comportamento limite de uma Cadeia de Markov com espaço de estados finito e periódica.

Teorema 2. Segundo Hoel, Port e Stone (1972, p. 73-74): Seja X_n, $n\geq 0$, uma cadeia de Markov com espaço de estados finito, irredutível e periódica, com período d, então para cada par i,j de estados

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = 0,$$

a menos que $n=md+r$ para um inteiro r, $0\leq r<d$ e um inteiro positivo m, e neste caso temos que

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{md+r} = d\pi_j.$$

Em palavras, o Teorema 2 diz que uma Cadeia de Markov com espaço de estados finito, irredutível e periódica será

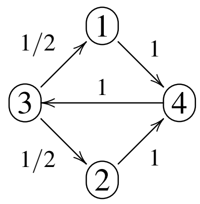
$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = 0,$$

se não for possível ir do estado i para o estado j em n passos e

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{md+r} = d\pi_j,$$

se for possível ir do estado i para o estado j em n passos, onde n é um número é definido como um múltiplo m do período d mais um resto r, onde $0 \leq r < d$. Vamos ver um exemplo para entendermos o Teorema acima.

Exemplo 36. Voltando para o Exemplo 35, que repetimos abaixo o diagrama da Figura 19, das relações entre os estados e sua respectiva matriz estocástica 2.22,



$$\mathbf{T} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Como vimos essa cadeia de Markov é periódica de período $d = 3$. Assim, o Teorema 2 nos diz que para $n = 3m + r$, com $0 \leq r < 3$, ou seja, para $n = 3m$, $n = 3m+1$ e $n = 3m+2$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = 3\pi_j$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = 0.$$

Como calculamos anteriormente $\pi = (1/6 \quad 1/6 \quad 1/3 \quad 1/3)$. Então, para $n = 3m$, ou seja, os multiplos de 3, temos

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{3m} = 3\pi_j$$

e relembrando que p_{ij}^{3m} é a probabilidade da cadeia ir do estado i para o estado j em uma quantidade múltipla de 3. Analogamente, para $n = 3m+1$ passos, temos

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{3m+1} = 3\pi_j$$

e relembrando que p_{ij}^{3m+1} é a probabilidade da cadeia ir do estado i para o estado j em $3m+1$ passos. Finalmente, para $n = 3m+2$ passos, temos

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{3m+2} = 3\pi_j$$

e relembrando que p_{ij}^{3m+1} é a probabilidade da cadeia ir do estado i para o estado j em $3m+2$ passos.

- Sair do estado 1 e retornar ao estado 1.

Para n=3m Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 1 e retornar ao estado 1 em uma quantidade múltipla de 3 passos, então,

$$\lim_{m\to\infty} p_{11}^{3m} = 3\pi_1 = 3.(1/6) = 1/2.$$

Para n=3m+1 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 1 e retornar ao estado 1 em uma quantidade de $3m+1$ passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{11}^{3m+1} = 0.$$

Para n=3m+2 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 1 e retornar ao estado 1 em uma quantidade de $3m+2$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{11}^{3m+2} = 0.$$

- Ir do estado 1 para o estado 2.

Para n=3m Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 1 para o estado 2 em uma quantidade multipla de 3 passos, então,

$$\lim_{m\to\infty} p_{12}^{3m} = 3\pi_2 = 3.(1/6) = 1/2.$$

Para n=3m+1 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 1 e para o estado 2 em uma quantidade de $3m+1$ passos,

$$\lim_{m\to\infty} p_{12}^{3m+1} = 0.$$

Para n=3m+2 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 1 e para o estado 2 em uma quantidade de $3m+2$ passos,, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{12}^{3m+2} = 0.$$

- Ir do estado 1 para o estado 3.

Para n=3m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 1 e para o estado 3 em uma quantidade multipla de 3 passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{13}^{3m} = 0.$$

Para n=3m+1 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 1 e para o estado 3 em uma quantidade de $3m+1$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{13}^{3m+1} = 0.$$

Para n=3m+2 Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 1 e para o estado 2 em uma quantidade de $3m+2$ passos,, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{13}^{3m+2} = 3\pi_3 = 3.(1/3) = 1.$$

- Ir do estado 1 para o estado 4.

Para n=3m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 1 e para o estado 4 em uma quantidade multipla de 3 passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{14}^{3m} = 0.$$

Para n=3m+1 Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 1 e para o estado 4 em uma quantidade de $3m+1$ passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{14}^{3m+1} = 3\pi_4 = 3.(1/3) = 1.$$

Para n=3m+2 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 1 e para o estado 4 em uma quantidade de $3m+2$ passos,, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{14}^{3m+2} = 0.$$

- Ir do estado 2 para o estado 1.

Para n=3m Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 2 e para o estado 1 em uma quantidade múltipla de 3 passos, então,

$$\lim_{m\to\infty} p_{21}^{3m} = 3\pi_1 = 3.(1/6) = 1/2.$$

Para n=3m+1 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 2 e para o estado 1 em $3m+1$ passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{21}^{3m+1} = 0.$$

Para n=3m+2 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 2 e para o estado 1 em $3m+2$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{21}^{3m+2} = 0.$$

- Sair do estado 2 e retornar ao estado 2.

Para n=3m Existe a probabilidade da cadeia sair do estado 2 e reotrnar ao estado 2 em uma quantidade múltipla de 3 passos, então,

$$\lim_{m\to\infty} p_{22}^{3m} = 3\pi_2 = 3.(1/6) = 1/2.$$

Para n=3m+1 Não existe a probabilidade da cadeia sair do estado 2 e reotrnar ao estado 2 em $3m+1$ passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{22}^{3m+1} = 0.$$

Para n=3m+2 Não existe a probabilidade da cadeia sair do estado 2 e reotrnar ao estado 2 em $3m+2$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{22}^{3m+2} = 0.$$

- Ir do estado 2 para o estado 3.

Para n=3m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 2 e para o estado 3 em uma quantidade múltipla de 3 passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{23}^{3m} = 0.$$

Para n=3m+1 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 2 e para o estado 3 em $3m+1$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{23}^{3m+1} = 0.$$

Para n=3m+2 Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 2 e para o estado 3 em $3m+2$ passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{23}^{3m+2} = 3\pi_3 = 3.(1/3) = 1.$$

- Ir do estado 2 para o estado 4.

Para n=3m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 2 e para o estado 4 em uma quantidade múltipla de 3 passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{24}^{3m} = 0.$$

Para n=3m+1 Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 2 e para o estado 4 em $3m+1$ passos, então,

$$\lim_{m\to\infty} p_{24}^{3m+1} = 3\pi_4 = 3.(1/3) = 1.$$

Para n=3m+2 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 2 e para o estado 4 em $3m+2$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{24}^{3m+2} = 0.$$

- Ir do estado 3 para o estado 1.

Para n=3m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 3 e para o estado 1 em uma quantidade múltipla de 3 passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{31}^{3m} = 0.$$

Para n=3m+1 Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 3 e para o estado 1 em $3m+1$ passos, então,

$$\lim_{m\to\infty} p_{31}^{3m+1} = 3\pi_1 = 3.(1/6) = 1/2.$$

Para n=3m+2 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 3 e para o estado 1 em $3m+2$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{31}^{3m+2} = 0.$$

- Ir do estado 3 para o estado 2.

Para n=3m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 3 e para o estado 2 em uma quantidade múltipla de 3 passos, portanto

$$\lim_{m\to\infty} p_{32}^{3m} = 0.$$

Para n=3m+1 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 3 e para o estado 2 em $3m+1$ passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{32}^{3m+1} = 3\pi_2 = 3.(1/6) = 1/2.$$

Para n=3m+2 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 3 e para o estado 2 em $3m+2$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{32}^{3m+2} = 0.$$

- Sair do estado 3 e voltar para o estado 3.

Para n=3m Existe a probabilidade da cadeia sair do estado 3 e retornar ao estado 3 em uma quantidade múltipla de 3 passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{33}^{3m} = 3\pi_3 = 3.(1/3) = 1.$$

Para n=3m+1 Não existe a probabilidade da cadeia sair do estado 3 e voltar ao estado 3 em $3m+1$ passos, portanto

$$\lim_{m\to\infty} p_{33}^{3m+1} = 0.$$

Para n=3m+2 Não existe a probabilidade da cadeia sair do estado 3 e retornar ao estado 3 em $3m+2$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{33}^{3m+2} = 0.$$

- Ir do estado 3 para o estado 4.

Para n=3m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 3 e para o estado 4 em uma quantidade múltipla de 3 passos, portanto

$$\lim_{m\to\infty} p_{34}^{3m} = 0.$$

Para n=3m+1 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 3 e para o estado 4 em em $3m+1$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{34}^{3m+1} = 0.$$

Para n=3m+2 Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 3 e para o estado 4 em $3m+2$ passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{34}^{3m+2} = 3\pi_4 = 3.(1/3) = 1.$$

- Ir do estado 4 para o estado 1.

Para n=3m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 4 e para o estado 1 em uma quantidade múltipla de 3 passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{41}^{3m} = 0.$$

Para n=3m+1 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 4 e para o estado 1 em $3m+1$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{41}^{3m+1} = 0.$$

Para n=3m+2 Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 4 e para o estado 1 em $3m+2$ passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{41}^{3m+2} = 3\pi_1 = 3.(1/6) = 1/2.$$

- Ir do estado 4 para o estado 2.

Para n=3m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 4 e para o estado 2 em uma quantidade multipla de 3 passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{42}^{3m} = 0.$$

Para n=3m+1 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 4 e para o estado 2 em $3m+1$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{42}^{3m+1} = 0$$

Para n=3m+2 Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 4 e para o estado 2 em $3m+2$ passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{42}^{3m+2} = 3\pi_2 = 3.(1/6) = 1/2.$$

- Ir do estado 4 para o estado 3.

Para n=3m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 4 e para o estado 3 em uma quantidade múltipla de 3 passos, portanto

$$\lim_{m\to\infty} p_{43}^{3m} = 0.$$

Para n=3m+1 Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 4 e para o estado 3 em $3m+1$ passos, então,

$$\lim_{m\to\infty} p_{43}^{3m+1} = 3\pi_3 = 3.(1/3) = 1.$$

Para n=3m+2 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 4 e para o estado 3 em $3m+2$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{43}^{3m+2} = 0.$$

- Sair do estado 4 e retornar ao estado 4.

Para n=3m Existe a probabilidade da cadeia sair do estado 4 e retornar ao estado 4 em uma quantidade múltipla de 3 passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{44}^{3m} = 3\pi_4 = 3.(1/3) = 1.$$

Para n=3m+1 Não existe a probabilidade da cadeia sair do estado 4 e retornar ao estado 4 em $3m+1$ passos, então

$$\lim_{m\to\infty} p_{44}^{3m+1} = 0.$$

Para n=3m+2 Não existe a probabilidade da cadeia sair do estado 4 e retornar ao estado 4 em $3m+2$ passos, assim

$$\lim_{m\to\infty} p_{44}^{3m+2} = 0.$$

Vamos organizar os valores calculados em tabelas para facilitar a visualização, e depois veremos como as matrizes se comportam. Primeiro iremos organizar os valores dos elementos p_{ij}^n da matriz de transição da Cadeia de Markov periódica onde $n = 3m$, ou seja, apresentaremos os elementos da matriz T^{3m}, isto é, a probabilidade da cadeia ir do estado i para o estado j em uma quantidade múltipla de 3 passos conforme a Tabela 8,

Tabela 8 – Transição de estados de uma Cadeia de Markov períodica do Exemplo 35 onde $n = 3m$, ou seja para trajetórias de mudanças de estados de $i \to j$ em uma quantidade múltipla de 3 passos

Transição de Estados $i \to$j	Valor de p_{ij}^n quando $n \to \infty$ sendo $n = 3m$
1→ 1	$\lim_{m\to\infty} p_{11}^{3m} = 3\pi_1 = 3.(1/6) = 1/2$
1→ 2	$\lim_{m\to\infty} p_{12}^{3m} = 3\pi_2 = 3.(1/6) = 1/2$
1→ 3	$\lim_{m\to\infty} p_{13}^{3m} = 0$
1→ 4	$\lim_{m\to\infty} p_{14}^{3m} = 0$
2→ 1	$\lim_{m\to\infty} p_{21}^{3m} = 3\pi_1 = 3.(1/6) = 1/2$
2→ 2	$\lim_{m\to\infty} p_{22}^{3m} = 3\pi_2 = 3.(1/6) = 1/2$
2→ 3	$\lim_{m\to\infty} p_{23}^{3m} = 0$
2→ 4	$\lim_{m\to\infty} p_{24}^{3m} = 0$
3→ 1	$\lim_{m\to\infty} p_{31}^{3m} = 0$
3→ 2	$\lim_{m\to\infty} p_{32}^{3m} = 0$
3→ 3	$\lim_{m\to\infty} p_{33}^{3m} = 3\pi_3 = 3.(1/3) = 1$
3→ 4	$\lim_{m\to\infty} p_{34}^{3m} = 0$
4→ 1	$\lim_{m\to\infty} p_{41}^{3m} = 0$
4→ 2	$\lim_{m\to\infty} p_{42}^{3m} = 0$
4→ 3	$\lim_{m\to\infty} p_{43}^{3m} = 0$
4→ 4	$\lim_{m\to\infty} p_{44}^{3m} = 3\pi_4 = 3.(1/3) = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, de acordo com a Tabela 8 a matriz de transição para $3m$ passos é

$$\mathbf{T^3} = \mathbf{T^6} = \mathbf{T^9} = \ldots = \mathbf{T^{3m}} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Organizamos a seguir os valores para dos elementos p_{ij}^n da matriz de transição da Cadeia de Markov periódica onde $n = 3m+1$, ou seja, apresentaremos os elementos da matriz T^{3m+1}, ou seja p_{ij}^{3m+1} que é a probabilidade da cadeia ir do estado i para o estado j em $3m+1$ passos conforme a Tabela 9

Tabela 9 – Transição de estados de uma Cadeia de Markov períodica do Exemplo 35 onde $n = 3m+1$, ou seja para trajetórias de mudanças de estados de $i \to j$ em $3m+1$ passos

Transição de Estados $i \to$j	Valor de p_{ij}^n quando $n \to \infty$ sendo $n = 3m+1$
1$\to$ 1	$\lim_{m\to\infty} p_{11}^{3m+1} = 0$
1$\to$ 2	$\lim_{m\to\infty} p_{12}^{3m+1} = 0$
1$\to$ 3	$\lim_{m\to\infty} p_{13}^{3m+1} = 0$
1$\to$ 4	$\lim_{m\to\infty} p_{14}^{3m+1} = 3\pi_4 = 3.(1/3) = 1$
2$\to$ 1	$\lim_{m\to\infty} p_{21}^{3m+1} = 0$
2$\to$ 2	$\lim_{m\to\infty} p_{22}^{3m+1} = 0$
2$\to$ 3	$\lim_{m\to\infty} p_{23}^{3m+1} = 0$
2$\to$ 4	$\lim_{m\to\infty} p_{24}^{3m+1} = 3\pi_4 = 3.(1/3) = 1$
3$\to$ 1	$\lim_{m\to\infty} p_{31}^{3m+1} = 3\pi_1 = 3.(1/6) = 1/2$
3$\to$ 2	$\lim_{m\to\infty} p_{32}^{3m+1} = 3\pi_2 = 3.(1/6) = 1/2$
3$\to$ 3	$\lim_{m\to\infty} p_{33}^{3m+1} = 0$
3$\to$ 4	$\lim_{m\to\infty} p_{34}^{3m+1} = 0$
4$\to$ 1	$\lim_{m\to\infty} p_{41}^{3m+1} = 0$
4$\to$ 2	$\lim_{m\to\infty} p_{42}^{3m+1} = 0$
4$\to$ 3	$\lim_{m\to\infty} p_{43}^{3m+1} = 3\pi_3 = 3.(1/3) = 1$
4$\to$ 4	$\lim_{m\to\infty} p_{44}^{3m+1} = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Analogamente, a matriz para $3m+1$ passos de acordo com a Tabela 9 é

$$\mathbf{T^1} = \mathbf{T^4} = \mathbf{T^7} = \ldots = \mathbf{T^{3m+1}} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Do mesmo modo, organizaremos os valores para dos elementos p_{ij}^n da matriz de transição da Cadeia de Markov periódica onde $n = 3m+2$, ou seja, apresentaremos os elementos da matriz T^{3m+2} isto é p_{ij}^{3m+2} que é a probabilidade da cadeia ir do estado i para o estado j em $3m+2$ passos conforme a Tabela 10

Tabela 10 – Transição de estados de uma Cadeia de Markov períodica do Exemplo 35 onde $n = 3m+2$, ou seja para trajetórias de mudanças de estados de $i \to j$ em $3m+2$ passos

Transição de Estados $i \to$j	Valor de p_{ij}^n quando $n \to \infty$ sendo $n = 3m+2$
1→ 1	$\lim_{m\to\infty} p_{11}^{3m+2} = 0$
1→ 2	$\lim_{m\to\infty} p_{12}^{3m+2} = 0$
1→ 3	$\lim_{m\to\infty} p_{13}^{3m+2} = 3\pi_3 = 3.(1/3) = 1$
1→ 4	$\lim_{m\to\infty} p_{14}^{3m+2} = 0$
2→ 1	$\lim_{m\to\infty} p_{21}^{3m+2} = 0$
2→ 2	$\lim_{m\to\infty} p_{22}^{3m+2} = 0$
2→ 3	$\lim_{m\to\infty} p_{23}^{3+2m} = 3\pi_3 = 3.(1/3) = 1$
2→ 4	$\lim_{m\to\infty} p_{24}^{3m+2} = 0$
3→ 1	$\lim_{m\to\infty} p_{31}^{3m+2} = 0$
3→ 2	$\lim_{m\to\infty} p_{32}^{3m+2} = 0$
3→ 3	$\lim_{m\to\infty} p_{33}^{3m+2} = 0$
3→ 4	$\lim_{m\to\infty} p_{34}^{3m+2} = 3\pi_4 = 3.(1/3) = 1$
4→ 1	$\lim_{m\to\infty} p_{41}^{3m+2} = 3\pi_1 = 3.(1/6) = 1/2$
4→ 2	$\lim_{m\to\infty} p_{42}^{3m+2} = 3\pi_2 = 3.(1/6) = 1/2$
4→ 3	$\lim_{m\to\infty} p_{43}^{3m+2} = 0$
4→ 4	$\lim_{m\to\infty} p_{44}^{3m+2} = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

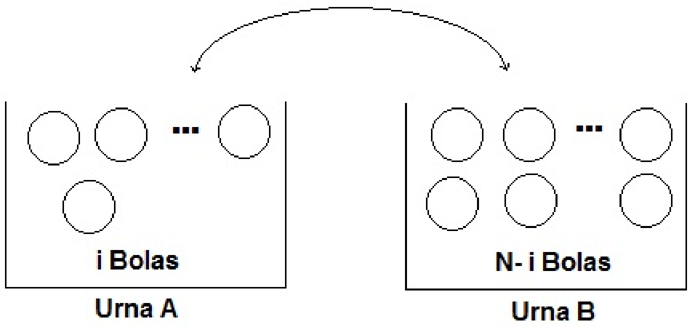
Finalmente, a matriz para $3m+2$ passos de acordo com a Tabela 10 é

$$\mathbf{T^2 = T^5 = T^8} = \ldots = \mathbf{T^{3m+2}} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exemplo 37 (Urna de Ehrenfest com $N = 5$ bolas)**.** O modelo de urna de Ehrenfest é definido como N bolas numeradas (de 1 a N) distribuídas em duas urnas, urna A e urna B. Podemos considerar que inicialmente quase todas as bolas estão localizadas na urna A. Então, a cada intervalo de tempo uma bola é sorteada aleatoriamente e trocada de urna. Em cada etapa apenas uma bola é trocada de urna, conforme ilustração da Figura 22.

Seja X_n o número de bolas da urna A após n passos. Assim, $X_n : 0, 1, ...$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, ..., N\}$ e a matriz de transição é dada para $0 < i < N$

Figura 22 – Ilustração de Urna de Ehrenfest



Fonte: Elaborada pelo autor.

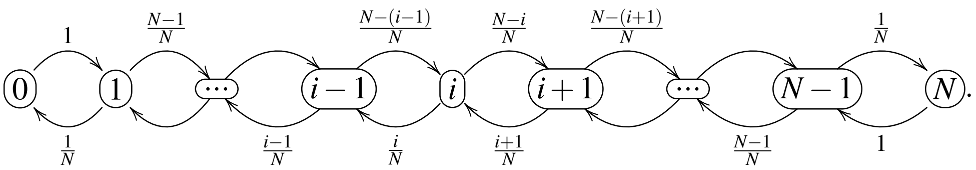
da seguinte forma:

1. $\mathbb{P}_{i,j} = i/N$ se $j = i-1$

2. $\mathbb{P}_{i,j} = (N-i)/N$ se $j = i+1$

3. $\mathbb{P}_{i,j} = 0$ em qualquer outro caso

Figura 23 – Diagrama da Urna de Ehrenfest



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos ver na Figura 23 que na Urna de Ehrenfest só ocorre transição em estados vizinhos (anteriores ou posteriores), ou seja , só ocorre transição em estados subsequêntes, pois a cada passo somente uma bola se movimenta entre as urnas, não ocorrendo a mudança de mais de um estado. Considere a Urna de Ehrenfest com N=5 bolas e X_n o número de bolas na urna A no instante n. Temos que o espaço de estados é $S = \{0,1,2,3,4,5\}$ e a matriz de transição desta cadeia de Markov será:

- Estado 0, ou seja na urna A tem 0 bola e consequêntemente na urna B terá 5 bolas. Ocorre que a urna A terá 1 bola no passo seguinte, pois somente teremos esta possibilidade, usando a fórmula $\mathbb{P}_{0,1} = (5-0)/5 = 5/5 = 1$. Nos outros casos a probabilidade será 0.

- Estado 1, ou seja, na urna A tem 1 bola e na urna B 4 bolas. Neste caso, ou esta bola que está na urna A vai para a urna B ou uma das bolas da urna B irá para a urna A. Assim, temos $1/5$ a probabilidade da urna A ficar com 0 bola e $4/5$ a probabilidade da urna A ficar com 2 bolas. Usando as fórmulas, $\mathbb{P}_{1,0} = 1/5$ se $j = i-1$ e $\mathbb{P}_{1,2} = (5-1)/5 = 4/5$ se $j = i+1$. Os demais casos a probabilidade será 0.

- Estado 2, ou seja, na urna A terá 2 bolas e na urna B 3 bolas. Já podemos dizer que a urna A ficará ou com 1 bola ou com 3 bolas. Usando as fórmulas temos que, $\mathbb{P}_{2,1} = 2/5$ se $j = i-1$ e $\mathbb{P}_{2,3} = (5-2)/5 = 3/5$ se $j = i+1$. Os demais casos a probabilidade será 0.

- Estado 3, ou seja, na urna A tem 3 bolas e na urna B 2 bolas. Analogamente aos itens anteriores, temos que a urna A poderá ficar com 2 ou com 4 bolas, conforme calcularemos a seguir, $\mathbb{P}_{3,2} = 3/5$ se $j = i-1$ e $\mathbb{P}_{3,4} = (5-3)/5 = 2/5$ se $j = i+1$. Os demais casos a probabilidade será 0.

- Estado 4, ou seja, na urna A terá 4 bolas e na urna B terá 1 bola. Calculando os valores das probabilidades de transição temos que, $\mathbb{P}_{4,3} = 4/5$ se $j = i-1$ e $\mathbb{P}_{4,5} = (5-4)/5 = 1/5$ se $j = i+1$. Os demais casos a probabilidade será 0.

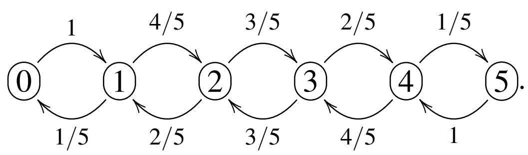
- Estado 5, ou seja , na urna A terá 5 bolas e na urna B não terá bolas. Neste caso o que acontecerá é que a urna A terá 4 bolas ao final deste passo. Usando a fórmula temos que, $\mathbb{P}_{5,4} = 5/5 = 1$ se $j = i-1$ e nos demais casos a probabilidade será 0.

Assim, temos a matriz de transição 2.29

$$\mathbf{T} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{2.29}$$

A representação por diagrama é dada pela Figura 24: O modelo da urna de Ehrenfest é

Figura 24 – Diagrama da Urna de Ehrenfest 5 bolas



Fonte: Elaborada pelo autor.

uma cadeia de Markov com espaço de estado finito, irredutível é periódica com período $d = 2$. Podemos calcular a distribuição de equilíbrio π usando a propriedade 2 da Definição 17 que é

$$\pi.T = \pi,$$

assim,

$$(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4 \quad \pi_5).\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4 \quad \pi_5).$$

Resolvendo a multiplicação termos,

$$\begin{cases} 1/5\pi_1 &= \pi_0 & (I) \\ \pi_0 + 2/5\pi_2 &= \pi_1 & (II) \\ 4/5\pi_1 + 3/5\pi_3 &= \pi_2 & (III) \\ 3/5\pi_2 + 4/5\pi_4 &= \pi_3 & (IV) \\ 2/5\pi_3 + \pi_5 &= \pi_4 & (V) \\ 1/5\pi_4 &= \pi_5 & (VI) \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 &= 1 & (VII) \end{cases}.$$

Substituindo a equação (I) em (II) temos que,

$$1/5\pi_1 + 2/5\pi_2 = \pi_1$$

$$2/5\pi_2 = 4/5pi_1$$

$$\pi_2 = 2\pi_1 \quad (VIII).$$

Substituindo $(VIII)$ em (III) temos que,

$$4/5\pi_1 + 3/5\pi_3 = 2\pi_1$$

$$3/5\pi_3 = 6/5\pi_1$$

$$\pi_3 = 2\pi_1 \quad (IX).$$

Substituindo (IX) em (IV) temos que,

$$3/5\pi_2 + 4/5\pi_4 = 2\pi_1$$

$$4/5\pi_4 = 4/5\pi_1$$

$$\pi_4 = \pi_1 \quad (X).$$

Substituindo (IX) e (X) em (V) temos que,

$$(2/5)2\pi_1 + \pi_5 = \pi_1$$

$$\pi_5 = 1/5\pi_1 \quad (XI).$$

Substituindo $(I), (VIII), (IX), (X)$ e (XI) em (VII) temos que,

$$1,5\pi_1 + \pi_1 + 2\pi_1 + 2\pi_1 + \pi_1 + 1/5\pi_1 = 1,$$

assim,

$$\pi_1 = 5/32 \quad (XII).$$

Finalmente substituindo (XII) em $(VIII), (IX), (X)$ e (XI) temos os valores,

$$\pi_2 = 10/32, \quad \pi_3 = 10/32, \quad \pi_4 = 5/32 \quad \text{e} \quad \pi_5 = 1/32.$$

Assim a distribuição de equilíbrio é

$$\pi = (1/32 \quad 5/32 \quad 10/32 \quad 10/32 \quad 5/32 \quad 1/32).$$

Pelo Teorema 2 temos que, se o período $d = 2$ então, $n = 2m + r$ onde $0 \leq r < 2$, ou seja, para $n = 2m$ ou $n = 2m+1$. Assim, para $n = 2m$, ou seja, os múltiplos de 2, temos que

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{2m} = 2\pi_j,$$

portanto, p_{ij}^{2m} é a probabilidade da cadeia ir do estado i para o estado j em uma quantidade múltipla de 2 passos e de modo análogo, para $n = 2m+1$ temos que,

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{2m+1} = 2\pi_j,$$

ou seja, p_{ij}^{2m+1} é a probabilidade da cadeia ir do estado i para o estado j em $2m+1$ passos.

- Sair do estado 0 e retornar ao estado 0.

  Para n=2m Existe a probabilidade da cadeia sair do estado 0 e retornar ao estado 0 em uma quantidade múltipla de 2 passos, assim,

  $$\lim_{m\to\infty} p_{00}^{2m} = 2\pi_0 = 2(1/32) = 1/16.$$

  Para n=2m+1 Não existe a probabilidade da cadeia sair do estado 0 e retornar ao estado 0 em $2m+1$ passos, assim,

  $$\lim_{m\to\infty} p_{00}^{2m+1} = 0.$$

- Ir do estado 0 para o estado 1.

  Para n=2m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 0 ao estado 1 em uma quantidade múltipla de 2, assim,

  $$\lim_{m\to\infty} p_{01}^{2m} = 0.$$

Para n=2m+1 Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 0 ao estado 1 em $2m+1$ passos, assim,

$$\lim_{m\to\infty} p_{01}^{2m+1} = 2\pi_1 = 2(5/32) = 5/16.$$

- Ir do estado 0 para o estado 2.

Para n=2m Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 0 ao estado 2 em uma quantidade múltipla de 2 passos, assim,

$$\lim_{m\to\infty} p_{02}^{2m} = 2\pi_2 = 2(10/32) = 5/16.$$

Para n=2m+1 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 0 ao estado 2 em $2m+1$ passos, assim,

$$\lim_{m\to\infty} p_{02}^{2m+1} = 0.$$

- Ir do estado 0 para o estado 3.

Para n=2m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 0 ao estado 3 em uma quantidade múltipla de 2, assim,

$$\lim_{m\to\infty} p_{03}^{2m} = 0.$$

Para n=2m+1 Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 0 ao estado 3 em $2m+1$ passos, assim,

$$\lim_{m\to\infty} p_{03}^{2m+1} = 2\pi_3 = 2(10/32) = 10/16.$$

- Ir do estado 0 para o estado 4.

Para n=2m Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 0 ao estado 4 em uma quantidade múltipla de 2 passos, assim,

$$\lim_{m\to\infty} p_{04}^{2m} = 2\pi_4 = 2(5/32) = 5/16.$$

Para n=2m+1 Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 0 ao estado 4 em $2m+1$ passos, assim,

$$\lim_{m\to\infty} p_{04}^{2m+1} = 0.$$

- Ir do estado 0 para o estado 5.

Para n=2m Não existe a probabilidade da cadeia ir do estado 0 ao estado 5 em uma quantidade múltipla de 2 passos, assim,

$$\lim_{m\to\infty} p_{05}^{2m} = 0.$$

Para n=2m+1 Existe a probabilidade da cadeia ir do estado 0 ao estado 5 em $2m+1$ passos, assim,

$$\lim_{m\to\infty} p_{03}^{2m+1} = 2\pi_5 = 2(1/32) = 1/16.$$

Podemos perceber que a existe a probabilidade da cadeia ir do estado i para o estado j para uma quantidade múltipla de 2 passos sempre que a soma dos estados $(i+j)$ for par, isto é, quando $n = 2m$ o $\lim_{m\to\infty} p^{2m} = 2.\pi_j$. Da mesma forma existe a probabilidade da cadeia ir do estado i para o estado j quando a soma dos estados $(i+j)$ for ímpar em $2m+1$ passos, ou seja $\lim_{m\to\infty} p^{2m+1} = 2.\pi_j$. Podemos organizar os valores que ainda não foram calculados conforme a Tabela 11,

Portanto para $n = 2m$ onde $m \to \infty$ temos que,

$$\mathbf{T^{2m}} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/16 & 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 \\ 0 & 5/16 & 0 & 10/16 & 0 & 1/16 \\ 1/16 & 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 \\ 0 & 5/16 & 0 & 10/16 & 0 & 1/16 \\ 1/16 & 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 \\ 0 & 5/16 & 0 & 10/16 & 0 & 1/16 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.30}$$

De modo análogo, para $n = 2m+1$ onde $m \to \infty$ temos que,

$$\mathbf{T^{2m+1}} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5/16 & 0 & 10/16 & 0 & 1/16 \\ 1/16 & 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 \\ 0 & 5/16 & 0 & 10/16 & 0 & 1/16 \\ 1/16 & 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 \\ 0 & 5/16 & 0 & 10/16 & 0 & 1/16 \\ 1/16 & 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.31}$$

O interessante notar neste exemplo que os valores das matrizes T^{2m} e T^{2m+1} foram convergindo quando $m \to \infty$. Para $m = 1$, temos que $T^{2m} = T^2$, portanto,

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13/25 & 0 & 12/25 & 0 & 0 \\ 2/25 & 0 & 17/25 & 0 & 6/25 & 0 \\ 0 & 6/25 & 0 & 17/25 & 0 & 2/25 \\ 0 & 0 & 12/25 & 0 & 13/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

e para $m \to \infty$ temos que,

$$T^{2m} = \begin{pmatrix} 1/16 & 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 \\ 0 & 5/16 & 0 & 10/16 & 0 & 1/16 \\ 1/16 & 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 \\ 0 & 5/16 & 0 & 10/16 & 0 & 1/16 \\ 1/16 & 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 \\ 0 & 5/16 & 0 & 10/16 & 0 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

Tabela 11 – Transição de estados de uma Cadeia de Markov períodica para $m \to \infty$ do Exemplo 37 - Urna de Ehrenfest com 5 bolas

Transição de Estados	Quantidade de passos	
	$n = 2m$	$n = 2m+1$
$1 \to 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{10}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{10}^{2m+1} = 2\pi_0 = 2(1/32) = 1/16$
$1 \to 1$	$\lim_{m\to\infty} p_{11}^{2m} = 2\pi_1 = 2(5/32) = 5/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{11}^{2m+1} = 0$
$1 \to 2$	$\lim_{m\to\infty} p_{12}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{12}^{2m+1} = 2\pi_2 = 2(10/32) = 10/16$
$1 \to 3$	$\lim_{m\to\infty} p_{13}^{2m} = 2\pi_3 = 2(10/32) = 10/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{13}^{2m+1} = 0$
$1 \to 4$	$\lim_{m\to\infty} p_{14}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{14}^{2m+1} = 2\pi_4 = 2(5/32) = 5/16$
$1 \to 5$	$\lim_{m\to\infty} p_{15}^{2m} = 2\pi_5 = 2(1/32) = 1/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{15}^{2m+1} = 0$
$2 \to 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{20}^{2m} = 2\pi_0 = 2(1/32) = 1/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{20}^{2m+1} = 0$
$2 \to 1$	$\lim_{m\to\infty} p_{21}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{21}^{2m+1} = 2\pi_1 = 2(5/32) = 5/16$
$2 \to 2$	$\lim_{m\to\infty} p_{22}^{2m} = 2\pi_2 = 2(10/32) = 10/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{22}^{2m+1} = 0$
$2 \to 3$	$\lim_{m\to\infty} p_{23}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{23}^{2m+1} = 2\pi_3 = 2(10/32) = 10/16$
$2 \to 4$	$\lim_{m\to\infty} p_{24}^{2m} = 2\pi_4 = 2(5/32) = 5/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{24}^{2m+1} = 0$
$2 \to 5$	$\lim_{m\to\infty} p_{24}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{25}^{2m+1} = 2\pi_5 = 2(1/32) = 1/16$
$3 \to 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{30}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{30}^{2m+1} = 2\pi_0 = 2(1/32) = 1/16$
$3 \to 1$	$\lim_{m\to\infty} p_{31}^{2m} = 2\pi_1 = 2(5/32) = 5/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{31}^{2m+1} = 0$
$3 \to 2$	$\lim_{m\to\infty} p_{32}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{32}^{2m+1} = 2\pi_2 = 2(10/32) = 10/16$
$3 \to 3$	$\lim_{m\to\infty} p_{33}^{2m} = 2\pi_3 = 2(10/32) = 10/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{33}^{2m+1} = 0$
$3 \to 4$	$\lim_{m\to\infty} p_{34}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{34}^{2m+1} = 2\pi_4 = 2(5/32) = 5/16$
$3 \to 5$	$\lim_{m\to\infty} p_{35}^{2m} = 2\pi_5 = 2(1/32) = 1/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{35}^{2m+1} = 0$
$4 \to 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{40}^{2m} = 2\pi_0 = 2(1/32) = 1/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{40}^{2m+1} = 0$
$4 \to 1$	$\lim_{m\to\infty} p_{41}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{41}^{2m+1} = 2\pi_1 = 2(5/32) = 5/16$
$4 \to 2$	$\lim_{m\to\infty} p_{42}^{2m} = 2\pi_2 = 2(10/32) = 10/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{42}^{2m+1} = 0$
$4 \to 3$	$\lim_{m\to\infty} p_{43}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{43}^{2m+1} = 2\pi_3 = 2(10/32) = 10/16$
$4 \to 4$	$\lim_{m\to\infty} p_{44}^{2m} = 2\pi_4 = 2(5/32) = 5/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{44}^{2m+1} = 0$
$4 \to 5$	$\lim_{m\to\infty} p_{54}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{45}^{2m+1} = 2\pi_5 = 2(1/32) = 1/16$
$5 \to 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{50}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{50}^{2m+1} = 2\pi_0 = 2(1/32) = 1/16$
$5 \to 1$	$\lim_{m\to\infty} p_{51}^{2m} = 2\pi_1 = 2(5/32) = 5/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{51}^{2m+1} = 0$
$5 \to 2$	$\lim_{m\to\infty} p_{52}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{52}^{2m+1} = 2\pi_2 = 2(10/32) = 10/16$
$5 \to 3$	$\lim_{m\to\infty} p_{53}^{2m} = 2\pi_3 = 2(10/32) = 10/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{53}^{2m+1} = 0$
$5 \to 4$	$\lim_{m\to\infty} p_{54}^{2m} = 0$	$\lim_{m\to\infty} p_{54}^{2m+1} = 2\pi_4 = 2(5/32) = 5/16$
$5 \to 5$	$\lim_{m\to\infty} p_{55}^{2m} = 2\pi_5 = 2(1/32) = 1/16$	$\lim_{m\to\infty} p_{55}^{2m+1} = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Do mesmo modo, quando $m = 1$, temos que $T^{2m+1} = T^3$, assim

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 13/25 & 0 & 12/25 & 0 & 0 \\ 13/125 & 0 & 88/125 & 0 & 24/125 & 0 \\ 0 & 44/125 & 0 & 3/5 & 0 & 6/125 \\ 6/125 & 0 & 3/5 & 0 & 44/125 & 0 \\ 0 & 24/125 & 0 & 88/125 & 0 & 13/125 \\ 0 & 0 & 12/25 & 0 & 13/25 & 0 \end{pmatrix}$$

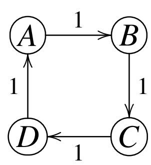
e para $m \to \infty$ temos que,

$$T^{2m+1} = \begin{pmatrix} 0 & 5/16 & 0 & 10/16 & 0 & 1/16 \\ 1/16 & 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 \\ 0 & 5/16 & 0 & 10/16 & 0 & 1/16 \\ 1/16 & 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 \\ 0 & 5/16 & 0 & 10/16 & 0 & 1/16 \\ 1/16 & 0 & 10/16 & 0 & 5/16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para finalizar vamos verificar como se comporta um exemplo de cadeia periódica onde os valores de probabilidade de transição são apenas 0 ou 1.

Exemplo 38. Dado o diagrama de transição de estado da Figura 25 ,

Figura 25 – Diagrama de transição Exemplo 38



Fonte: Elaborada pelo autor.

a matriz de transição será dada por,

$$\mathbf{T} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.32}$$

O período neste caso é $d = 4$. Calculando a distribuição de equilíbrio pela propriedade 2 da Definição 17, ou seja $\pi.T = \pi$ temos,

$$\begin{pmatrix} \pi_A & \pi_B & \pi_C & \pi_D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_A & \pi_B & \pi_C & \pi_D \end{pmatrix}$$

resolvendo o sistema temos que

$$\begin{cases} \pi_D &=& \pi_A & (I) \\ \pi_A &=& \pi_B & (II) \\ \pi_B &=& \pi_C & (III) \\ \pi_C &=& \pi_D & (IV) \\ \pi_A+\pi_B+\pi_C+\pi_D &=& 1 & (V) \end{cases}$$

como $\pi_A = \pi_B = \pi_C = \pi_D$ e substituindo em V temos que $\pi_A = \pi_B = \pi_C = \pi_D = 1/4$. Portanto, a distribuição de equilíbrio é $\pi = (1/4 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad 1/4)$. Usaremos o Teorema 2 para ver o comportamento ao longo prazo, assim, se $d = 4$, então $n = 4m + r$ com $0 \leq r < 4$, ou seja, para $n = 4m,\ n = 4m+1,\ n = 4m+2,$ e $n = 4m+3$. E assim, temos que

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = 4\pi_j$$

se ocorrer transição entre os estados i e j em n passos ou

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = 0$$

se não for possível a transição entre os estados i e j em n passos. Assim,

- De $A \to A$ só pode ocorrer transição em $4m$ passos, ou seja, sair do estado A e retornar ao estado A pode ser feito em múltiplos de 4 passos. Portanto,

  $$\lim_{m\to\infty} p_{AA}^{4m} = 4\pi_A = 1.$$

  Nos demais casos a transição não é possível, ou seja, não podemos sair do estado A e retornar ao estado A em $4m+1$, $4m+2$ e $4m+3$ passos, portanto,

  $$\lim_{m\to\infty} p_{AA}^{4m+1} = \lim_{m\to\infty} p_{AA}^{4m+2} = \lim_{m\to\infty} p_{AA}^{4m+3} = 0.$$

- De $A \to B$ só pode ocorrer transição em $4m+1$ passos, ou seja, sair do estado A e ir ao estado B pode ser feito em $4m+1$ passos. Portanto,

  $$\lim_{m\to\infty} p_{AB}^{4m} = 4\pi_B = 1.$$

  Nos demais casos a transição não é possível, portanto,

  $$\lim_{m\to\infty} p_{AB}^{4m} = \lim_{m\to\infty} p_{AB}^{4m+2} = \lim_{m\to\infty} p_{AB}^{4m+3} = 0.$$

- De $A \to C$ só ocorre em $4m+2$ passos, portanto,

  $$\lim_{m\to\infty} p_{AC}^{4m+2} = 4\pi_C = 1.$$

  Nos demais casos

  $$\lim_{m\to\infty} p_{AC}^{4m} = \lim_{m\to\infty} p_{AC}^{4m+1} = \lim_{m\to\infty} p_{AC}^{4m+3} = 0.$$

- Finalmente de $A \to D$ só ocorre em $4m+3$ passos, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{AD}^{4m+3} = 4\pi_D = 1.$$

Nos demais casos

$$\lim_{m\to\infty} p_{AD}^{4m} = \lim_{m\to\infty} p_{AD}^{4m+1} = \lim_{m\to\infty} p_{AD}^{4m+2} = 0.$$

- De $B \to A$ só ocorre em $4m+3$ passos, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{BA}^{4m+3} = 4\pi_A = 1.$$

Nos demais casos

$$\lim_{m\to\infty} p_{BA}^{4m} = \lim_{m\to\infty} p_{BA}^{4m+1} = \lim_{m\to\infty} p_{BA}^{4m+2} = 0.$$

- De $B \to B$ só pode ocorrer transição em $4m$ passos, ou seja, sair do estado B e retornar ao estado B pode ser feito em múltiplos de 4 passos. Portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{BB}^{4m} = 4\pi_B = 1.$$

Nos demais casos não é possível, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{BB}^{4m+1} = \lim_{m\to\infty} p_{BB}^{4m+2} = \lim_{m\to\infty} p_{BB}^{4m+3} = 0.$$

- De $B \to C$ só pode ocorrer transição em $4m+1$ passos, ou seja, sair do estado B e ir ao estado C pode ser feito em $4m+1$ passos. Portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{BC}^{4m+1} = 4\pi_C = 1.$$

Nos demais casos não é possível, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{BC}^{4m} = \lim_{m\to\infty} p_{BC}^{4m+2} = \lim_{m\to\infty} p_{BC}^{4m+3} = 0.$$

- De $B \to D$ só ocorre em $4m+2$ passos,portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{BD}^{4m+2} = 4\pi_D = 1.$$

Nos demais casos

$$\lim_{m\to\infty} p_{BD}^{4m} = \lim_{m\to\infty} p_{BD}^{4m+1} = \lim_{m\to\infty} p_{BD}^{4m+3} = 0.$$

- De $C \to A$ só ocorre em $4m+2$ passos,portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{CA}^{4m+2} = 4\pi_A = 1.$$

Nos demais casos

$$\lim_{m\to\infty} p_{CA}^{4m} = \lim_{m\to\infty} p_{CA}^{4m+1} = \lim_{m\to\infty} p_{CA}^{4m+3} = 0.$$

- De $C \to B$ só ocorre em $4m+3$ passos, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{CB}^{4m+3} = 4\pi_B = 1.$$

Nos demais casos

$$\lim_{m\to\infty} p_{CB}^{4m} = \lim_{m\to\infty} p_{CB}^{4m+1} = \lim_{m\to\infty} p_{CB}^{4m+2} = 0.$$

- De $C \to C$ só pode ocorrer transição em $4m$ passos, ou seja, sair do estado C e retornar ao estado C pode ser feito em múltiplos de 4 passos. Portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{CC}^{4m} = 4\pi_C = 1.$$

Nos demais casos não é possível, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{CC}^{4m+1} = \lim_{m\to\infty} p_{CC}^{4m+2} = \lim_{m\to\infty} p_{CC}^{4m+3} = 0.$$

- De $C \to D$ só pode ocorrer transição em $4m+1$ passos, ou seja, sair do estado C e ir ao estado D pode ser feito em $4m+1$ passos. Portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{CD}^{4m+1} = 4\pi_D = 1.$$

Nos demais casos não é possível, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{CD}^{4m} = \lim_{m\to\infty} p_{CD}^{4m+2} = \lim_{m\to\infty} p_{CD}^{4m+3} = 0.$$

- De $D \to A$ só pode ocorrer transição em $4m+1$ passos, ou seja, sair do estado D e ir ao estado A pode ser feito em $4m+1$ passos. Portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{DA}^{4m+1} = 4\pi_A = 1.$$

Nos demais casos não é possível, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{DA}^{4m} = \lim_{m\to\infty} p_{DA}^{4m+2} = \lim_{m\to\infty} p_{DA}^{4m+3} = 0.$$

- De $D \to B$ só ocorre em $4m+2$ passos,portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{DB}^{4m+2} = 4\pi_A = 1.$$

Nos demais casos

$$\lim_{m\to\infty} p_{DB}^{4m} = \lim_{m\to\infty} p_{DB}^{4m+1} = \lim_{m\to\infty} p_{DB}^{4m+3} = 0.$$

- De $D \to C$ só ocorre em $4m+3$ passos, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{DC}^{4m+3} = 4\pi_C = 1.$$

Nos demais casos

$$\lim_{m\to\infty} p_{DC}^{4m} = \lim_{m\to\infty} p_{DC}^{4m+1} = \lim_{m\to\infty} p_{DC}^{4m+2} = 0.$$

- De $D \to D$ só pode ocorrer transição em $4m$ passos, ou seja, sair do estado D e retornar ao estado D pode ser feito em múltiplos de 4 passos. Portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{DD}^{4m} = 4\pi_D = 1.$$

Nos demais casos a transição não é possível, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} p_{DD}^{4m+1} = \lim_{m\to\infty} p_{DD}^{4m+2} = \lim_{m\to\infty} p_{DD}^{4m+3} = 0.$$

Assim, a matriz T^n para $n = 4m$ é

$$\mathbf{T^4} = \mathbf{T^8} = \mathbf{T^{12}} = \ldots = \mathbf{T^{4m}} = \mathbf{I} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

onde I é a matriz identidade, onde os elementos da diagonal principal da matriz vale 1 e os demais valores é zero.

Para $n = 4m+1$ a matriz T^n é

$$\mathbf{T^1} = \mathbf{T^5} = \mathbf{T^9} = \ldots = \mathbf{T^{4m+1}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

A matriz T^n para $n = 4m+2$ é

$$\mathbf{T^2} = \mathbf{T^6} = \mathbf{T^{10}} = \ldots = \mathbf{T^{4m+2}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Para $n = 4m+3$ a matriz T^n é

$$\mathbf{T^3} = \mathbf{T^7} = \mathbf{T^{11}} = \ldots = \mathbf{T^{4m+3}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Verificamos neste exemplo que os valores da matriz de transição vão se alternando em 4 casos, pois o período $d = 4$.

No próximo capítulo apresentaremos um plano de aula para aplicar a teoria deste capítulo para introduzir e motivar os alunos do Ensino Médio utilizando conceitos de Probabilidade, Matrizes e Sistemas Lineares.

CAPÍTULO

3

CADEIAS DE MARKOV NOS ENSINOS MÉDIO E FUNDAMENTAL

Apresentaremos sugestões de planos de aula com situações-problema que envolvem eventos temporais ou estocásticos que podem ser modelados segundo cadeias de Markov, que foram tratadas no capítulo anterior. O objetivo é introduzir o conceito de Probabilidade de uma forma mais próxima da realidade dos alunos, envolvendo elementos do dia-a-dia, tais como futebol, praia e celulares. Os exemplos envolvem o fator tempo, que terá um significado diferente em cada uma das atividades propostas.

Propomos atividades diferentes para alunos dos ensinos fundamental e médio. Para os alunos do ensino fundamental, o pré-requisito são os sistemas de duas equações e duas incógnitas, e para alunos do ensino médio são os conceitos de matrizes e sistemas lineares. O professor também pode usar as atividades para recordar os conceitos envolvidos nos pré-requisitos.

As situações-problema serão apresentadas em aulas expositivas, seguidas ou não de pesquisa em sites, a ser realizada pelos alunos e sob orientação do professor, para a coleta dos dados necessários. Na sequência o professor propõe a modelagem da situação-problema, definindo a unidade de tempo, introduzindo o conceito de estado, com a respectiva enumeração de todos os estados do problema, além de montar, junto com os alunos, figura que mostre as transições permitidas de um estado para outro. O professor pode usar um software para calcular multiplicação de matrizes de ordens maiores que dois. Neste trabalho foi usado o software conhecido como Calculadora de Matrizes disponível em https://matrixcalc.org/pt/, cujo uso é explicado na seção 3.1.5.

Para implementar a atividade o professor precisará de uma sala com lousa, giz e computadores ou propor que os alunos usem seus celulares com internet, individualmente ou em grupo.

A avaliação será por meio de trabalhos escritos com intenção de estimular os alunos a aprenderem formas diferentes de calcular a Probabilidade e também auxiliar o professor a verficar como os conceitos foram assimilados pelos alunos.

3.1 Aplicando o plano de aula

Este plano de aula foi aplicado em uma escola estadual da cidade de Guatapará-SP e com uma turma de alunos do 3º ano do ensino médio. A escolha da escola e dos alunos se deve ao fato de o autor lecionar na mesma e ter a informação dos conhecimentos prévios dos conteúdos que os alunos dominavam até então. Inicialmente foi feita uma revisão dos conteúdos necessários para a realização desta atividade: probabilidade, matrizes e sistemas lineares. Como os conteúdos necessários foram trabalhados no 2º ano de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo a realização das atividades foi facilitada.

3.1.1 Atividade 1 - Previsão do Tempo

Tempo necessário para o desenvolvimento da atividade: 2 aulas de 50 minutos

Público alvo: alunos do ensino fundamental e médio.

Descrição da situação-problema

Professor deve apresentar a situação problema para os alunos entenderem o exemplo.

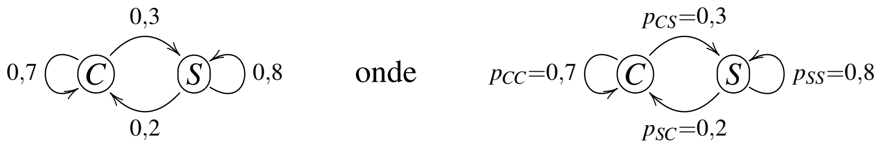
Em uma certa cidade foi verificado estatísticamente que chove 70% das vezes no dia seguinte a um dia chuvoso e faz sol em 80% das vezes no dia seguinte a um dia ensolarado. Portanto, após um dia chuvoso chove no dia seguinte 70% das vezes e em 30% não chove no dia seguinte a um dia chuvoso. Do mesmo modo se o dia for ensolarado no dia seguinte em 80% das vezes será ensolarado e consequentemente em 20% dos casos será um dia chuvoso. Temos então nesta situação-problema 2 estados: Chuvoso ou Ensolarado. O tempo neste exemplo será contado em dias, ou seja, começaremos no momento atual ou tempo zero ($n = 0$) e o tempos subsequentes serão após 1 dia ($n = 1$), após 2 dias ($n = 2$), ..., após n dias, onde $n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$

Modelagem

Sugerimos modelar a situação-problema com os alunos mostrando as transições de estados.

O professor pode modelar essa situação-problema usando um diagrama de transição de estados, usando C para o estado chuvoso e S para o estado ensolarado. Assim ele pode representar como ocorrem as transições entre os estados Chuvoso e Ensolarado e suas respectivas probabilidades de transição, como pode ser visualizado na Figura 26.

Figura 26 – Diagrama de transição entre estados Chuvoso e Ensolarado



Fonte: Elaborada pelo autor.

Explicar aos alunos o significado de p_{CC}, p_{CS}, p_{SC} e p_{SS}.

Usaremos a notação p_{AB} para representar a probabilidade de transição do estado A para o estado B em 1 passo, assim:

- p_{CC} é a probabilidade de Chover amanhã sabendo que Choveu hoje;
- p_{CS} é a probabilidade se ser Ensolarado amanhã sabendo que hoje Choveu;
- p_{SS} é a probabilidade se ser Ensolarado amanhã sabendo que hoje foi Ensolarado;
- p_{SC} é a probabilidade de Chover amanhã sabendo que hoje foi Ensolarado.

O diagrama de transição de estados auxilia os alunos a visualizar as transições de estados em apenas um "passo", ou seja os alunos podem verificar facilmente como é a transição de estado de um dia para outro. Basta saber o clima em determinado dia para saber com que probabilidades o dia seguinte será chuvoso ou ensolarado. E para 2 dias ou 3 dias? O diagrama de transição da Figura 26 não vai ser muito prático e nem vai ser fácil verificar, por exemplo, a previsão de chuva para daqui a dois dias sabendo-se que choveu hoje. Para resolver esses casos pode ser usado o diagrama de árvore, também conhecido como árvore de probabilidades, que neste caso é um diagrama de transição de estados. A Figura 27 representa 2 diagramas de árvores para 2 dias sendo os estados iniciais Chuvoso e Ensolarado.

Atenção ao explicar árvore de probabilidade para alunos do ensino fundamental

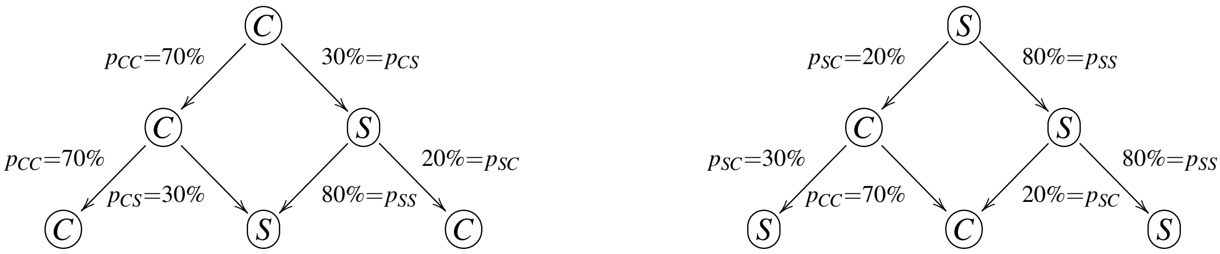
Nesse diagrama, cada nó/vértice da árvore de probabilidades representa o estado C para chuva e S para ensolarado, e cada ramo/aresta representa a probabilidade de mudança/transição de um estados para outro.

Para calcular a probabilidade de chover daqui a 2 dias sabendo que choveu hoje deve ser considerado apenas as probabilidades que partem do estado C e que chegam ao estado C em 2 dias. Na Figura 28 os ramos/arestas da árvore de probabilidades com setas duplas representa as etapas dos "caminhos"necessários para sair do estado C e chegar ao estado C após 2 dias, ou seja, considerar as trajetórias Chuva ⇒ Chuva ⇒ Chuva ou Chuva ⇒ Ensolarado ⇒ Chuva.

Perguntar aos alunos as trajetórias que saem de C e chegam em C em 2 passos

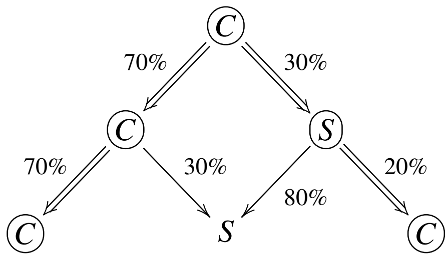
Portanto a probabilidade de chover daqui a 2 dias, sabendo que choveu hoje pode ser calculada

Figura 27 – Diagramas de árvores de probabilidades em 2 passos - Previsão do Tempo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 28 – Diagrama de árvore - probabilidade em 2 passos - estado inicial Chuvoso



Fonte: Elaborada pelo autor.

como

$$p^2_{CC} = \underbrace{p_{CC} \cdot p_{CC}}_{C \to C \to C} + \underbrace{p_{CS} \cdot p_{SC}}_{C \to S \to C}$$

onde p^2_{CC} é a probabilidade de chover após 2 dias de um dia chuvoso.

Assim seguindo os ramos da árvore de probabilidades que iniciam no estado C e após 2 transições retorna ao estado C temos 2 trajetórias que são $C \to C \to C$ ou $C \to S \to C$, ou seja, a probabilidade de chover daqui a 2 dias sabendo-se que choveu hoje é

$$p^2_{CC} = \underbrace{70\%.70\%}_{C \to C \to C} + \underbrace{30\%.20\%}_{C \to S \to C} = 55\%.$$

Para calcular a probabilidade de chover daqui a 3 dias, sabendo que choveu hoje, pode ser usado a árvore de probabilidades somente com os ramos/arestas que começam com C e terminam em C em 3 dias. A representação da árvore de probabilidade é dada pela Figura 29.

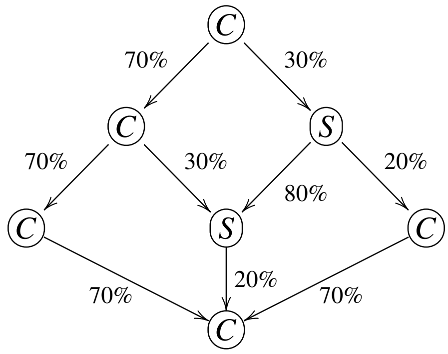
Sugerimos construir a árvore de probabilidade junto com os alunos

A probabilidade que queremos será:

$$p^3_{CC} = \underbrace{p_{CC} \cdot p_{CC} \cdot p_{CC}}_{C \to C \to C \to C} + \underbrace{p_{CC} \cdot p_{CS} \cdot p_{SC}}_{C \to C \to S \to C} + \underbrace{p_{CS} \cdot p_{SC} \cdot p_{CC}}_{C \to S \to C \to C} + \underbrace{p_{CS} \cdot p_{SS} \cdot p_{SC}}_{C \to S \to S \to C} .$$

onde p^3_{CC} é a probabilidade de chover daqui a 3 dias sabendo que choveu hoje. Portanto temos que

Figura 29 – Diagrama de árvore de probabilidade em 3 passos - estado inicial Chuvoso e estado final Chuvoso



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$
\begin{aligned}
p_{CC}^3 &= \overbrace{70\%.70\%.70\%}^{C\to C\to C\to C} + \overbrace{70\%.30\%.20\%}^{C\to C\to S\to C} + \overbrace{30\%.20\%.70\%}^{C\to S\to C\to C} + \overbrace{30\%.80\%.20\%}^{C\to S\to S\to C} \\
&= 34,3\% + 4,2\% + 4,2\% + 4,8\% = 47,5\%.
\end{aligned}
$$

Assim a probabilidade de chover após 3 dias, sabendo que choveu hoje será 47,5%.

Para alunos do ensino fundamental ir para a próxima atividade

Para alunos do ensino médio usar matrizes para calcular as probabilidades

Pode ser usado o conceito de matrizes e sua multiplicação para calcular esses valores. Neste caso, usar o conceito de matriz de transição da Definição 16, que organiza as probabilidades calculadas acima.

$$
T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} p_{CC} & p_{CS} \\ p_{SC} & p_{SS} \end{pmatrix} \end{array}
$$

Caso necessário fazer uma revisão sobre operações com matrizes

A matriz que representa as probabilidades após 2 dias será dada por:

$$
T^2 = \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70\%.70\% + 30\%.20\% & 70\%.30\% + 30\%.80\% \\ 20\%.70\% + 80\%.20\% & 20\%.30\% + 80\%.80\% \end{pmatrix}.
$$

Portanto,

$$
T^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 55\% & 45\% \\ 30\% & 70\% \end{pmatrix} \end{array}. \tag{3.1}
$$

A matriz 3.1 representa que se choveu hoje, daqui a 2 dias choverá com probabilidade de 55% e não choverá com probabilidade de 45%. Do mesmo modo, se não choveu hoje, choverá com probabilidade de 30% e não choverá com probabilidade de 70% após 2 dias.

Pensando nas probabilidades de transição em dois passos,

$$
T^2 = \begin{pmatrix} p_{CC} & p_{CS} \\ p_{SC} & p_{SS} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_{CC} & p_{CS} \\ p_{SC} & p_{SS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{CC}\cdot p_{CC} + p_{CS}\cdot p_{SC} & p_{CC}\cdot p_{CS} + p_{CS}\cdot p_{SS} \\ p_{SC}\cdot p_{CC} + p_{SS}\cdot p_{SC} & p_{SC}\cdot p_{CS} + p_{SS}\cdot p_{SS} \end{pmatrix}.
$$

Verificar que a probabilidade de chover após 2 dias, sabendo que choveu hoje é dada por $p_{CC}.p_{CC} + p_{CS}.p_{SC}$ que é o elemento da linha 1 e coluna 1 da matriz T^2.

Revisar /explicar multiplicação de matrizes se necessário

De modo análogo calcular a probabilidade para 3 dias que será:

$$T^3 = T^2.T = \begin{pmatrix} p_{CC}.p_{CC} + p_{CS}.p_{SC} & p_{CC}.p_{CS} + p_{CS}.p_{SS} \\ p_{SC}.p_{CC} + p_{SS}.p_{SC} & p_{SC}.p_{CS} + p_{SS}.p_{SS} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_{CC} & p_{CS} \\ p_{SC} & p_{SS} \end{pmatrix}.$$

Se choveu hoje, então daqui a 3 dias a probabilidade de chover é calculada por

$$p^3_{CC} = p_{CC}.p_{CC}.p_{CC} + p_{CS}.p_{SC}.p_{CC} + p_{CC}.p_{CS}.p_{SC} + p_{CS}.p_{SS}.p_{SC}$$

e a probabilidade de não chover é calculada por

$$p^3_{CS} = p_{CC}.p_{CC}p_{CS} + p_{CS}.p_{SC}.p_{CS} + p_{CC}.p_{CS}.p_{SS} + p_{CS}.p_{SS}.p_{SS}.$$

Da mesma forma se não choveu hoje, então daqui a 3 dias teremos a probabilidade de chuva calculada por

$$p^3_{SC} = p_{SC}.p_{CC}.p_{CC} + p_{SS}.p_{SC}.p_{CC} + p_{SC}.p_{CS}.p_{SC} + p_{SS}.p_{SS}.p_{SC}$$

e a probabilidade de não chover é calculada por

$$p^3_{SS} = p_{SC}.p_{CC}.p_{CS} + p_{SS}.p_{SC}.p_{CS} + p_{SC}.p_{CS}p_{SS} + p_{SS}.p_{SS}.p_{SS}.$$

Assim

$$T^3 = T^2.T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 55\% & 45\% \\ 30\% & 70\% \end{pmatrix} \end{array} . \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 47,5\% & 52,5\% \\ 35\% & 65\% \end{pmatrix} \end{array}.$$

Sugerimos fazer a multiplicação de matrizes com números naturais para alunos com dificuldade

Desta forma mostrar aos alunos que se as probabilidades de transição são mantidos as probabilidades futuras podem ser previstas utilizando a multiplicação de matrizes. Utilizando a multiplicação de matrizes para calcular a previsão para 5 dias,

$$T^5 = T^3.T^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 47,5\% & 52,5\% \\ 35\% & 65\% \end{pmatrix} \end{array} . \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 55\% & 45\% \\ 30\% & 70\% \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 41,88\% & 58,12\% \\ 38,75\% & 61,25\% \end{pmatrix} \end{array}$$

e concluir que, se não choveu hoje, daqui a 5 dias a probabilidade de chover será de 38,75%.

Analogamente, a previsão para daqui a 10 dias é

$$T^{10} = T^5.T^5 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 41,88\% & 58,12\% \\ 38,75\% & 61,25\% \end{pmatrix} \end{array} . \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 41,88\% & 58,12\% \\ 38,75\% & 61,25\% \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 40,06\% & 59,94\% \\ 39,96\% & 60,04\% \end{pmatrix} \end{array}$$

Pelo resultado da multiplicação de matrizes chega-se à conclusão de que se choveu hoje, daqui a 10 dias a probabilidade de chover será de aproximadamente 40,06%.

$$T^{11} = T^{10}.T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 40,06\% & 59,94\% \\ 39,96\% & 60,04\% \end{pmatrix} \end{array} . \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 40,03\% & 59,97\% \\ 39,98\% & 60,02\% \end{pmatrix} \end{array} .$$

A probabilidade de chover daqui a 11 dias sabendo que choveu hoje é aproximadamente 40,03%.

$$T^{12} = T^{11}.T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 40,03\% & 59,97\% \\ 39,98\% & 60,02\% \end{pmatrix} \end{array} . \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 40,01\% & 59,99\% \\ 39,99\% & 60,01\% \end{pmatrix} \end{array} .$$

Daqui a 12 dias a probabilidade de chover sabendo que choveu hoje é aproximadamente 40,01%.

$$T^{13} = T^{12}.T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 40,01\% & 59,99\% \\ 39,99\% & 60,01\% \end{pmatrix} \end{array} . \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 40,01\% & 59,99\% \\ 40\% & 60\% \end{pmatrix} \end{array} .$$

Daqui a 13 dias a probabilidade de chover sabendo que choveu hoje é de aproximadamente 40,01%. Se aumentarmos as casas decimais a probabilidade de chover daqui a 13 dias sabendo que choveu hoje é 40,007%.

Não houve alteração na probabilidade entre 12 e 13 dias por causa de arredondamentos

Verificando os resultados [1] da multiplicação da matriz T, observar que com o passar do tempo as probabilidades se estabilizam, ou seja, ao longo prazo a probabilidade de chover será de 40% e de não chover será de 60%.

Apresentar o cálculo da distribuição de equilibrio como curiosidade

Observação: Para os alunos que se interessarem o assunto a seguir é estudado em uma das disciplinas de um curso de graduação de Matemática, Matemática Aplicada a Negócios ou Estatística. Outra forma de calcular os valores das probabilidades de transição que convergem para a chamada "distribuição de equilíbrio"de acordo com a propriedade 2 da Definição 17, é utilizando sistemas lineares,

$$(\pi_1 \quad \pi_2).\begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix} = (\pi_1 \quad \pi_2).$$

[1] Obs. Para a multiplicação de matrizes utilizaremos o site Calculadora de Matrizes para agilizar e facilitar as contas.

Usando a notação decimal no lugar das porcentagens,

$$(\pi_1 \quad \pi_2).\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (\pi_1 \quad \pi_2).$$

Assim temos que;

$$\begin{cases} 0,7\pi_1 & + & 0,2\pi_2 & = & \pi_1 \\ 0,3\pi_1 & + & 0,8\pi_2 & = & \pi_2 \end{cases}$$

Como $\pi_1 + \pi_2 = 1$ podemos substituir $\pi_1 = 1 - \pi_2$ na primeira equação e assim:

$$0,7.(1-\pi_2) + 0,2\pi_2 = 1 - \pi_2$$

$$0,7 - 0,7\pi_2 + 0,2\pi_2 - 1 + \pi_2$$

$$0,5\pi_2 = 0,3$$

$$\pi_2 = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

Consequentemente como $\pi_1 + \pi_2 = 1$ temos que $\pi_1 = 0,4$

Assim descobrimos que a distribuição de equilibrio é

$$(\pi_1 \quad \pi_2) = (0,4 \quad 0,6) = (40\% \quad 60\%).$$

Para as atividades 2, 3 e 4 recomenda-se a sala de informática para utilizar o site a Calculadora de Matrizes e a internet para pesquisar informações necessárias.

3.1.2 Atividade 2 - Qualidade das praias

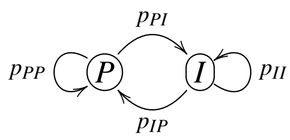
Tempo necessário para o desenvolvimento da atividade: 2 aulas de 50 minutos

Público alvo: alunos do ensino médio

Descrição da situação-problema Saber a qualidade das águas nas praias em que irá passear é muito importante, pois existem diversos casos de praias impróprias para o banho que são muito prejudiciais a saúde. Pensando nisso, podemos verificar a qualidade das águas nas praias e também calcular a probabilidade da praia estar própria ou imprópria para banho nas próximas semanas. Esta atividade consiste em coletar e analisar os dados da qualidade da água de uma praia para modelar e calcular a probabilidade dela estar própria ou imprópria para banho nas próximas semanas sabendo a classificação atual. Neste exemplo podemos pensar em 2 estados:

Próprio para banho e Impróprio para banho. O tempo n neste caso será contado em semanas, visto que os dados coletados são semanais. Assim a classificação atual será o tempo inicial ($n = 0$) e $n \geq 0$, com $n \in \mathbb{N}$. Podemos representar a mudança/transição de estados deste exemplo pela Figura 30,

Figura 30 – Diagrama de transição entre estados Próprio e Impróprio



Fonte: Elaborada pelo autor.

Explicar aos alunos o significado de p_{PP}, p_{PI}, p_{IP} e p_{II}.

Sugerimos para esta atividade utilizar laboratório de informática

Roteiro para a atividade 2:

- Entrar na internet no site da CETESB (2018) - Companhia Ambiental do Estado de São Paulo - http://cetesb.sp.gov.br/
  Os alunos podem usar os celulares/smartfones para entrar no site

- Clicar em Água - Praias.

- Entrar em Classificação Semanal por Município - 2018 e Classificação por Municípios em anos anteriores (se necessário).
  Escolher uma praia que tenha algumas transições entre estados - Própria$\rightleftarrows$ Imprópria

- Escolher alguma praia para fazer a análise dos dados e montar uma tabela com a frequência de mudança da classificação da praia. Preencher o Quadro 1.
  Contar quantas vezes no período determinado ocorreram as transições de estados

- Preencher a Tabela 12 com os dados encontrados da frequência de mudança da classifcação das praias usando I para imprópria e P para própria, onde I e P serão os estados. Preencher a Tabela 12.

- Transformar os dados da Tabela 12 em um tabela de probabilidade de transição de estados. Preencher a Tabela 13. Ao contar as transições que iniciam em P há 2 estados possíveis, P e I com suas respectivas quantidades f_{PP} e f_{PI}, onde f_{PP} é a frequência de casos em que ocorre a mudança/transições do estado P para o estado P e f_{PI} é a frequência de casos em que ocorre a mudança/transição do estado P para o estado I. Sendo a probabilidade de transição do estado P para P representado por p_{PP}[2] será calculado como,

$$p_{PP} = \frac{f_{PP}}{f_{PP} + f_{PI}},$$

analogamente para calcular a probabilidade de transição do estado P para o estado I que é representado por p_{PI} será,

$$p_{PI} = \frac{f_{PI}}{f_{PP} + f_{PI}}.$$

Do mesmo modo, calcular as probabilidades de transição de estados que começam em I é

$$p_{IP} = \frac{f_{IP}}{f_{IP} + f_{II}} \quad \text{e} \quad p_{II} = \frac{f_{II}}{f_{IP} + f_{II}}.$$

- Transformar essa Tabela 13 em uma matriz de transição de estados. Preencher a matriz de transição.
- Entrar no site Calculadora de Matrizes.(http://matrixcalc.org/pt/)
- Calcular a qualidade da praia nas próximas semanas.
- Determinar a distribuição de equilíbrio.

A critério do professor analisar outro intervalo de tempo

Tabela 12 – Frequência de mudança de classificação da praia

Praia		
em semanas		
	Própria	Imprópria
Própria		
Imprópria		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Preencher na tabela quantas vezes no período determinado ocorreram as transições de estados

Preencha os valores das matrizes de transição:

$$T = \begin{array}{l} \\ \textbf{Própria} \\ \textbf{Imprópria} \end{array} \begin{array}{cc} \textbf{Própria} & \textbf{Imprória} \\ \left(\begin{array}{c} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right) \end{array}.$$

[2] a estimativa de máxima verossimilhança para p_{ij}, $i,\ j \in S$ sai do escopo deste trabalho.

Quadro 1 – Análise semanal da qualidade da praia .... no período de Janeiro/2018 Junho/2018

Mês/Ano	dia	Praia ....
Junho/2018	24	
	17	
	10	
	3	
Maio/2018	27	
	20	
	13	
	6	
Abril/2018	29	
	22	
	15	
	8	
	1	
Março/2018	25	
	18	
	11	
	4	
Fevereiro/2018	25	
	18	
	11	
	4	
Janeiro/2018	28	
	21	
	14	
	7	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 13 – Porcentagem de mudança de classificação dos estados

Praia		
em porcentagem		
	Própria	Imprópria
Própria		
Imprópria		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Usar o site Calculadora de Matrizes para calcular as probabilidades

Probabilidade para daqui a 2 semanas

$$T^2 = \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix}.$$

Probabilidade para daqui a 3 semanas

$$T^3 = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix}.$$

Probabilidade para daqui a 4 semanas

$$T^4 = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix}.$$

Probabilidade para daqui a 5 semanas

$$T^5 = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix}.$$

Aumentando os valores das semanas chegaremos a valores que não variam com o tempo, assim, a probabilidade para n semanas, com $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T^n} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{P} & \mathbf{I} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \mathbf{I} \end{array} & \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix} \end{array}.$$

A seguir apresentaremos um exemplo que foi feito pelos alunos para mostrar como foi esta atividade.

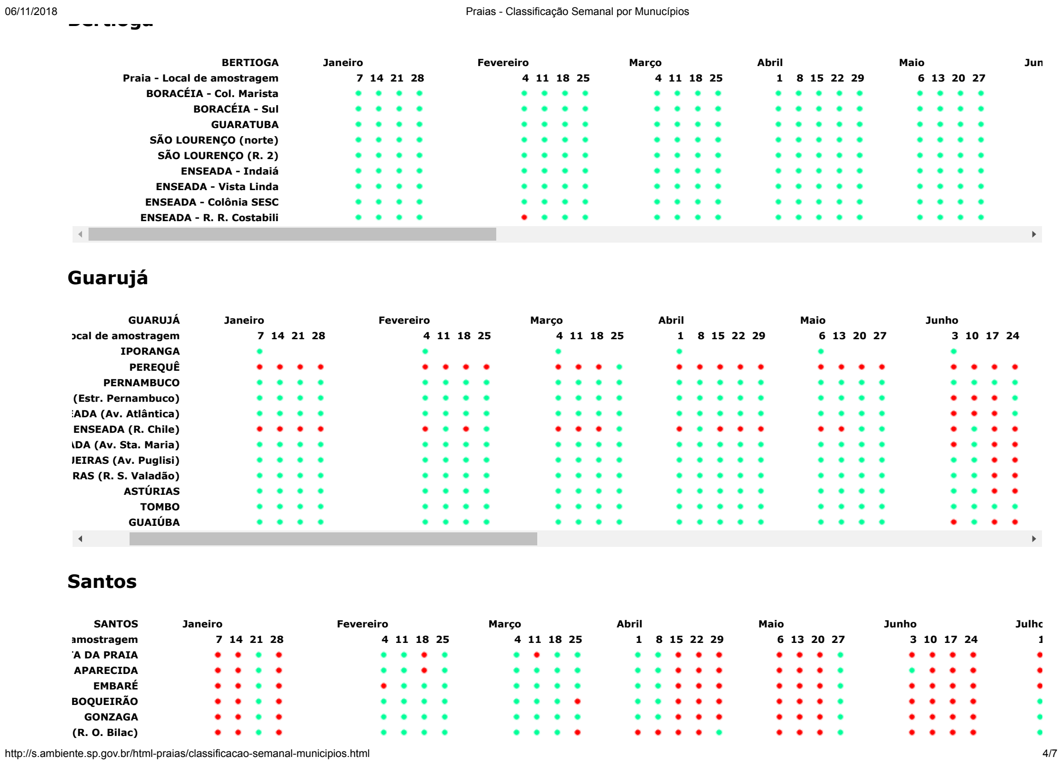
3.1.2.1 Exemplo analisado pelos alunos - Atividade 2 - Qualidade das praias

Uma das praias que os alunos analisaram foi a praia de Enseada da cidade de Guarujá-SP. Para verificarmos a qualidade da praia para banho no primeiro semestre deste ano analisamos a Figura 31, onde podemos analisar como as praias do Guarujá foram classificadas semanalmente. Os pontos em vermelho significa que a praia está imprópria para o banho e os pontos em verde significa que a praia está própria para banho. Assim, preenchemos o Quadro 1 com os dados da qualidade da praia da Enseada do Guarujá conforme a Figura 31.

Com os valores do Quadro 2 preenchemos a Tabela 12 onde contamos as quantidades de vezes que ocorreram mudanças ou não entre os estados Próprio e Impróprio, ou seja contamos quantas vezes ocorreram as sequências Própria $\to$ Própria, Própria $\to$ Imprópria, Imprópria $\to$ Própria e Imprópria $\to$ Imprópria.

Com o valor a Tabela 14 os alunos transformaram essa frequência em porcentagem e preencheram a Tabela 13, Os alunos tiveram dificuldades para transformar os valores da frequência de mudança de classificação em porcentagem.
Usando a Tabela 15 orientamos os alunos a entrarem no site Calculadora de Matrizes para calcularem as probabilidades da qualidade da praia da Enseada nas próximas semanas, assim

Figura 31 – Qualidade das praias de Guarujá-SP - 1º semestre de 2018



Fonte – (CETESB, 2018)

Tabela 14 – Frequência de mudança de classificação da praia da Enseada

Praia Enseada		
em semanas		
	Própria	Imprópria
Própria	1	6
Imprópria	6	11

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 15 – Porcentagem de mudança de classificação dos estados da praia da Enseada no Guarujá-SP

Praia Enseada		
em porcentagem		
	Própria	Imprópria
Própria	$1/7 = 14,28\%$	$6/7 = 85,72\%$
Imprópria	$6/17 = 35,29\%$	$11/17 = 64,71\%$

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$T = \begin{array}{r} \\ \textbf{Própria} \\ \textbf{Imprópria} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{Própria} & \textbf{Impróría} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 14,28\% & 85,72\% \\ 35,29\% & 64,71\% \end{pmatrix} \end{array}.$$

Quadro 2 – Análise semanal da qualidade da praia da Enseada da cidade de Guarujá no período de Janeiro/2018 Junho/2018

Mês/Ano	dia	Praia da Enseada
Junho/2018	24	Imprópria
	17	Imprópria
	10	Própria
	3	Imprópria
Maio/2018	27	Própria
	20	Própria
	13	Imprópria
	6	Imprópria
Abril/2018	29	Imprópria
	22	Imprópria
	15	Imprópria
	8	Própria
	1	Imprópria
Março/2018	25	Própria
	18	Imprópria
	11	Imprópria
	4	Imprópria
Fevereiro/2018	25	Própria
	18	Imprópria
	11	Própria
	4	Imprópria
Janeiro/2018	28	Imprópria
	21	Imprópria
	14	Imprópria
	7	Imprópria

Fonte – (CETESB, 2018)

Probabilidade para daqui a 2 semanas

$$T^2 = \begin{pmatrix} 14,28\% & 85,72\% \\ 35,29\% & 64,71\% \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14,28\% & 85,72\% \\ 35,29\% & 64,71\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32,29\% & 67,71\% \\ 27,88\% & 72,12\% \end{pmatrix}.$$

Probabilidade para daqui a 3 semanas

$$T^3 = \begin{pmatrix} 28,51\% & 71,49\% \\ 29,43\% & 70,57\% \end{pmatrix}.$$

Probabilidade para daqui a 4 semanas

$$T^4 = \begin{pmatrix} 29,30\% & 70,70\% \\ 29,11\% & 70,89\% \end{pmatrix}.$$

Probabilidade para daqui a 5 semanas

$$T^5 = \begin{pmatrix} 29,13\% & 70,87\% \\ 29,17\% & 70,83\% \end{pmatrix}.$$

Probabilidade para n semanas, com $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T^n} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{P} & \mathbf{I} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \mathbf{I} \end{array} & \begin{pmatrix} 29,16\% & 70,84\% \\ 29,16\% & 70,84\% \end{pmatrix} \end{array}.$$

A distribuição de equilíbrio será

$$\pi = (29,16\% \quad 70,84\%).$$

Ao longo prazo a probabilidade de encontrarmos a praia da Enseada Própria para banho será de $29,16\%$ e a probabilidade de encontrarmos a praia da Enseada Imprópria é de $70,84\%$. A utilização da sala de informática para os alunos é bem produtiva pois se interessam e muitos gostaram da atividade. Mesmo tendo dificuldades para entenderem os cáculos aprovaram a iniciativa de praticar uma aula "diferente"da tradicional sala/lousa/giz.

3.1.3 Atividade 3 - Probabilidade de acerto de Pênaltis dos jogadores de futebol

Tempo necessário para o desenvolvimento da atividade: 1 aula de 50 minutos

Público alvo: alunos do ensino médio e alunos do ensino fundamental

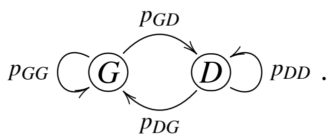
Descrição da situação-problema

O futebol é um dos esportes mais populares do mundo. E o gol é o momento principal deste esporte. E a consagração de quem fez o gol e a frustração do goleiro que levou o gol. Neste esporte existe o pênalti ou penalidade que é uma infração que deve ser marcada toda vez que houver uma falta dentro da área que favoreça o time adversário ao do goleiro que defende o gol de tal área. O time que sofreu o pênalti tem direito de chutar diretamente ao gol numa disputa única com o goleiro.

Na cabeça de muitas pessoas existe o mito de que pênalti é "loteria", ou seja "sorte/azar"mas na realidade fazer o gol cobrando pênalti é fruto de muito treino e dedicação. O resultado anterior de uma cobrança de pênalti interfere e muito na cobrança atual. Mesmo para os melhores jogadores do mundo, após um erro sempre fica uma pressão maior, por outro lado se o jogador vai fazer a cobrança após um acerto ou uma sequência de acertos a confiança estará bem maior. A modelagem deste problema terá 2 estados: Gol e Defesa. Considerar Defesa como todos os casos que não foi Gol. O tempo neste exemplo é dado pela quantidade de cobranças após a cobrança considerada inicial ($n = 0$), onde $n \geq 0.$, com $n \in \mathbb{N}$.

A representação por meio de diagrama deste exemplo pode ser verificado pela Figura 32 que mostra a mudança/transição de estados em um passo (neste caso 1 cobrança de penalidade).

Figura 32 – Diagrama de transição entre estados Gol e Defesa



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para representar a mudança/transição de estados em 2 passos podemos usar a árvore de probabilidades que neste exemplo será dado pela Figura 33 A árvore de probabilidades será útil

Figura 33 – Diagramas de árvores de probabilidades em 2 passos - Penalidade

Fonte: Elaborada pelo autor.

para os alunos entenderem as transições/mudanças de estados que ocorrem após duas cobranças de penalidades.

Segue o roteiro para a atividade 3:

- Entre na internet no site https://www.transfermarkt.pt/
- Escolha um jogador para analisar seu desempenho e digite o nome do jogador em pesquisa.
  Sugerimos escolher jogadores que cobram pênaltis com frequência
- Clique em Desempenho - Detalhes - *Golos de penalti*.

- Preencher o Quadro 3 de desempenho, onde Gol ou Defesa serão os estados. Neste caso, analisaremos as 20 últimas cobranças do jogador.
  Escolher de acordo com o professor uma quantidade maior ou menor de penalidades.

- Preencher a Tabela 16 de mudança de estados e a Tabela 17.

- Transformar essa tabela em uma matriz de transição de estados.
  Para alunos do fundamental utilize a árvore de probabilidades para calcular até 2 cobranças

- Entrar no site Calculadora de Matrizes.

- Calcular a probabilidade de acertos das próximas cobranças.

Quadro 3 – Resultado dos últimos 20 pênaltis cobrados por ....

Nº de Jogos	Data	Time Adversário	Gol ou Defesa
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Fonte: Elaborada pelo autor.

Preencha os valores das matrizes de transição:

$$\mathbf{T} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \textbf{Gol} & \textbf{Defesa} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textbf{Gol} \\ \textbf{Defesa} \end{array} & \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix} \end{array}$$

Tabela 16 – Frequência de mudança de estados do jogador ....

Jogador		
em penalidades cobradas		
	Gols	Defesas
Gols		
Defesas		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 17 – Porcentagem de mudança de classificação dos estados do jogador ....

Jogador		
em porcentagem		
	Gols	Defesas
Gols		
Defesas		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Probabilidade para daqui a 2 cobranças de pênaltis

$$T^2 = \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix}$$

Probabilidade para daqui a 3 cobranças de pênaltis

$$T^3 = \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix}$$

Probabilidade para daqui a 4 cobranças de pênaltis

$$T^4 = \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix}$$

Probabilidade para daqui a 5 cobranças de pênaltis

$$T^5 = \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix}$$

Probabilidade para n cobranças futuras de pênaltis, com $n \to \infty$

$$\mathbf{T^n} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \textbf{Gol} & \textbf{Defesa} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textbf{Gol} \\ \textbf{Defesa} \end{array} & \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix} \end{array}$$

3.1.3.1 Exemplo analisado pelos alunos - Atividade 3

Apresentaremos a seguir um exemplo para servir de modelo na aplicação desta atividade. Analisando o desempenho do jogador Leonel Messi, argentino, jogador do FC Barcelona-Espanha:

Quadro 4 – Resultado dos últimos 20 pênaltis cobrados por Lionel Messi

Nº de Jogos	Data	Time Adversário	Gol ou Defesa
1	30/05/2018	HAITI	Gol
2	17/01/2018	Espanhol	Defesa
3	23/12/2017	Real Madrid	Gol
4	17/12/2017	La Corunha	Defesa
5	19/09/2017	Eibar	Gol
6	26/08/2017	Alaves	Defesa
7	13/08/2017	Real Madrid	Gol
8	21/05/2017	Eibar	Gol
9	21/05/2017	Eibar	Defesa
10	06/05/2017	Villareal	Gol
11	24/03/2017	CHILE	Gol
12	19/03/2017	Valencia	Gol
13	08/03/2017	PSG	Gol
14	19/02/2017	Leganes	Gol
15	26/01/2017	Real Sociedad	Gol
16	23/11/2016	Celtic	Gol
17	22/10/2016	Valencia	Gol
18	17/09/2016	Leganes	Gol
19	30/03/2016	BOLIVIA	Gol
20	12/03/2016	Getafe	Defesa

Fonte – (TRANSFERMARKT, 2018)

Após os alunos pesquisarem o desempenho das cobranças de pênaltis de um jogador, orientar o preenchimento da tabela de desempenho contando a quantidades de vezes que ocorreu as seguintes transições de estados: Gol$\rightarrow Gol$, $Gol \rightarrow Defesa$, $Defesa \rightarrow Gol$ e $Defesa \rightarrow Defesa$.

Usando o Quadro 4 do desempenho do jogador Messi podemos preencher a Tabela 16 da desempenho conforme abaixo;

Tabela 19 – Quantidade de mudança de estados nas cobranças de penalidades - de Lionel Messi

	Gol	Defesa	Total
Gol	10	4	14
Defesa	5	0	5

Fonte: Elaborada pelo autor.

O resultado pode provocar alguma dúvida por causa que verificamos 20 penalidades e na tabela acima temos um total de 19 "mudanças de estados". Outro dado interessante que podemos verificar é que nas últimas 20 cobranças não ocorreu nehuma vez Defesa seguido de Defesa, mostrando que após uma cobrança perdida o jogador não costuma se abalar. Mas as últimas 7 cobranças mostrou que o jogador não está conseguindo manter um bom aproveitamento, alternando gols com defesa. Observação: O jogador perdeu sua última cobrança de pênaltis na Copa do Mundo da Russia (16/06/2018). Transformando a Tabela 19 da quantidade do desempenho em probabilidade teremos os seguintes valores conforme Tabela 20:

Tabela 20 – Probabilidade de mudança de estados (Probabilidade de Transição) nas cobranças de penalidades - Lionel Messi

	Gol	Defesa	Total
Gol	71,43%	28,57%	100%
Defesa	100%	0%	100%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Preencha os valores das matrizes de transição:

$$\mathbf{T} = \begin{array}{c} \\ \textbf{Gol} \\ \textbf{Defesa} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{Gol} & \textbf{Defesa} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 71,43\% & 28,57\% \\ 100\% & 0\% \end{pmatrix} \end{array}$$

Probabilidade para daqui a 2 cobranças de pênaltis

$$T^2 = \begin{pmatrix} 71,43\% & 28,57\% \\ 100\% & 0\% \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 71,43\% & 28,57\% \\ 100\% & 0\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 79,59\% & 20,41\% \\ 71,43\% & 28,57\% \end{pmatrix}$$

Probabilidade para daqui a 3 cobranças de pênaltis

$$T^3 = \begin{pmatrix} 77,26\% & 22,74\% \\ 79,59\% & 20,41\% \end{pmatrix}$$

Probabilidade para daqui a 4 cobranças de pênaltis

$$T^4 = \begin{pmatrix} 77,93\% & 22,07\% \\ 77,26\% & 22,74\% \end{pmatrix}$$

Probabilidade para daqui a 5 cobranças de pênaltis

$$T^5 = \begin{pmatrix} 77,74\% & 22,26\% \\ 77,93\% & 22,07 \end{pmatrix}$$

Probabilidade para n cobranças futuras de pênaltis, com $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T^n} = \begin{array}{c} \\ \textbf{Gol} \\ \textbf{Defesa} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{Gol} & \textbf{Defesa} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 77,78\% & 22,26\% \\ 77,78\% & 22,26\% \end{pmatrix} \end{array}$$

Assim a distribuição de equilíbrio será $\pi = (77,78 \quad 22,26\%)$.

Podemos dizer que a longo prazo a probabilidade do jogador Messi acertar um pênalti em uma cobrança será de $77,78\%$.

Obrservação 1: Esta atividade pode ser aplicada em alunos do Ensino Fundamental de forma a introduzir conceitos de probabilidade e probabilidade condicional. Mesmo sem o conhecimento de sistemas e matrizes o professor poderá usar árvore de probabilidades e o assunto pode motivar os alunos a buscar conhecimentos relacionados a probabilidade.

Observação 2: Esta atividade foi aplicada para os alunos do curso Obmep na Escola da cidade de Franca em visita ao Departamento de Matemática na USP-Ribeirão Preto. Os alunos eram em sua maioria do nível 2 da Obmep, mas também alguns do nível 1 e 3, ou seja, eram 60 alunos do 6º ano até alguns do ensino médio. Para introduzir conceitos de probabilidade condicional esta atividade foi muito satisfatória, o interesse e a curiosidade dos alunos foi bem visível. E mesmo não tendo conhecimentos sobre probabilidade condicional os alunos interagiram bastante perguntando, debatendo e querendo saber mais sobre o assunto. Neste caso a contextualização aliada ao grupo de alunos que gostam e tem facilidade em matemática fez com que a aula fosse bem aproveitada.

3.1.4 Atividade 4 - Preferência de marca de celular

Tempo necessário para o desenvolvimento da atividade: 1 aula de 50 minutos

Público alvo: alunos do ensino médio

Descrição da situação-problema

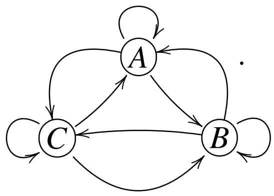
Atualmente o celular passou a ser um dos meios de comunicação indispensável principalmente para os adolecentes pois é um aparelho que mudou a forma de se comunicar e relacionar facilitando as necessidades cotidianas. Também podemos perceber que pela grande importância e interesse que eles tem e também pela necessidade de estar sempre com celulares melhores as pessoas estão trocando de aparelhos cada vez mais rápidos. Sabendo do interesse que o celular desperta nos alunos, esta atividade propõe verificar a preferência das marcas de celulares analisando como os alunos trocaram de aparelhos.

Para a modelagem desta situação-problema temos como estados as marcas dos celulares e o tempo é determinado pela troca do aperelho celular, ou seja o celular atual será a referência inicial ($n = 0$) onde $n \geq 0$, com $n \in \mathbb{N}$. Podemos representar com um diagrama de transição/mudança de estados com 3 estados como na Figura 34.

Segue roteiro para a atividade 4:

- Faça uma pesquisa verificando a marca do celular anterior e a marca do celular atual de

Figura 34 – Diagrama de transição de estados - Exemplo de preferência de marca de celular



Fonte: Elaborada pelo autor.

cada um dos alunos.

Sugerimos fazer essa pesquiza dias antes da atividade

- Crie uma tabela da frequência de mudança entre marcas de celulares pelos alunos. Exemplo Tabela 21 e Tabela 22.

  Sugerimos juntar as marcas pouco citadas e classificar como Outras

- Crie a matriz de transição de estados onde cada estado será a marca de celular.
- Entrar no site Calculadora de Matrizes e estimar como serão as próximas alterações nas marcas.

3.1.4.1 Resultado da atividade 4

A pesquisa foi feita em algumas salas verificando a marca do celular atual dos alunos e a marca do celular anterior que resultou na seguinte tabela:

Observação: As marcas Nokia, Sony,Positivo, Lenovo e Alcatel foram pouco citados e assim agrupamos as quantidades e consideramos neste exemplo como "Outros".

Podemos transformar esta tabela 21 para uma tabela de mudança de estados(celular) 22. A primeira coluna representa a marca de celular que os alunos tinham antes e as demais colunas qual a marca de celular atual. Por exemplo na primeira linha podemos ver que dos 38 alunos que tinham celular da marca Samsung 15 continuaram com a marca,8 trocaram para Motorola, 4 compraram LG, 6 partiram para Apple e 5 mudaram para outras marcas.

Transformar a tabela 22 em matriz de transição de estados, ou seja,

$$\mathbf{T} = \begin{array}{l} \\ \textbf{Samsung} \\ \textbf{Motorola} \\ \textbf{LG} \\ \textbf{Apple} \\ \textbf{Outros} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \textbf{Samsung} & \textbf{Motorola} & \textbf{LG} & \textbf{Apple} & \textbf{Outros} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 39,47\% & 21,05\% & 10,53\% & 15,79\% & 13,16\% \\ 40,91\% & 36,36\% & 4,55\% & 9,09\% & 9,09\% \\ 35,71\% & 35,71\% & 14,29\% & 0\% & 14,29\% \\ 0\% & 50\% & 0\% & 25\% & 25\% \\ 33,33\% & 22,22\% & 0\% & 11,11\% & 33,33\% \end{pmatrix} \end{array}$$

Tabela 21 – Mudança de marca de celular dos alunos - 1

Marca anterior	Marca atual	Frequência
Samsung	Samsung	15
Samsung	Motorola	8
Samsung	LG	4
Samsung	Apple	6
Samsung	Outros	5
Motorola	Samsung	9
Motorola	Motorola	8
Motorola	LG	1
Motorola	Apple	2
Motorola	Outros	2
LG	Samsung	5
LG	Motorola	5
LG	LG	2
LG	Apple	0
LG	Outros	2
Apple	Samsung	0
Apple	Motorola	2
Apple	LG	0
Apple	Apple	1
Apple	Outros	1
Outros	Samsung	3
Outros	Motorola	2
Outros	LG	0
Outros	Apple	1
Outros	Outros	3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 22 – Mudança de marca de celular dos alunos - 2

	Samsung	Motorola	LG	Apple	Outros	Total
Samsung	15	8	4	6	5	38
Motorola	9	8	1	2	2	22
LG	5	5	2	0	2	14
Apple	0	2	0	1	1	4
Outros	3	2	0	1	3	9

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos estimar como serão as próximas trocas de marcas, primeiramente para daqui a 2 trocas,

$$\mathbf{T^2} = \begin{array}{l} \\ \mathbf{Samsung} \\ \mathbf{Motorola} \\ \mathbf{LG} \\ \mathbf{Apple} \\ \mathbf{Outros} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{Samsung} & \mathbf{Motorola} & \mathbf{LG} & \mathbf{Apple} & \mathbf{Outros} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 32,34\% & 30,54\% & 6,62\% & 13,56\% & 16,95\% \\ 35,68\% & 30,02\% & 6,61\% & 13,05\% & 14,64\% \\ 38,57\% & 28,78\% & 7,43\% & 10,47\% & 14,75\% \\ 28,79\% & 36,24\% & 2,28\% & 13,57\% & 19,13\% \\ 33,35\% & 28,06\% & 4,52\% & 13,76\% & 20,29\% \end{pmatrix} \end{array}$$

para daqui a 3 trocas de marcas teremos,

$$\mathbf{T^3} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \textbf{Samsung} & \textbf{Motorola} & \textbf{LG} & \textbf{Apple} & \textbf{Outros} \end{array} \\ \begin{array}{l} \textbf{Samsung} \\ \textbf{Motorola} \\ \textbf{LG} \\ \textbf{Apple} \\ \textbf{Outros} \end{array} & \begin{pmatrix} 33,27\% & 30,82\% & 5,74\% & 13,15\% & 17,01\% \\ 33,60\% & 30,56\% & 6,07\% & 13,25\% & 16,51\% \\ 34,57\% & 29,75\% & 6,43\% & 12,96\% & 16,29\% \\ 33,37\% & 31,08\% & 5,01\% & 13,36\% & 17,18\% \\ 33,02\% & 30,23\% & 5,43\% & 13,51\% & 17,79\% \end{pmatrix} \end{array}$$

para daqui a 4 trocas de marcas teremos,

$$\mathbf{T^3} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \textbf{Samsung} & \textbf{Motorola} & \textbf{LG} & \textbf{Apple} & \textbf{Outros} \end{array} \\ \begin{array}{l} \textbf{Samsung} \\ \textbf{Motorola} \\ \textbf{LG} \\ \textbf{Apple} \\ \textbf{Outros} \end{array} & \begin{pmatrix} 33,46\% & 30,62\% & 5,73\% & 13,23\% & 16,96\% \\ 33,44\% & 30,65\% & 5,80\% & 13,23\% & 16,88\% \\ 33,54\% & 30,49\% & 5,91\% & 13,21\% & 16,84\% \\ 33,40\% & 30,61\% & 5,64\% & 13,34\% & 17,00\% \\ 33,27\% & 30,59\% & 5,63\% & 13,32\% & 17,18\% \end{pmatrix} \end{array}$$

ao longo prazo, fazendo $n \to \infty$ temos que,

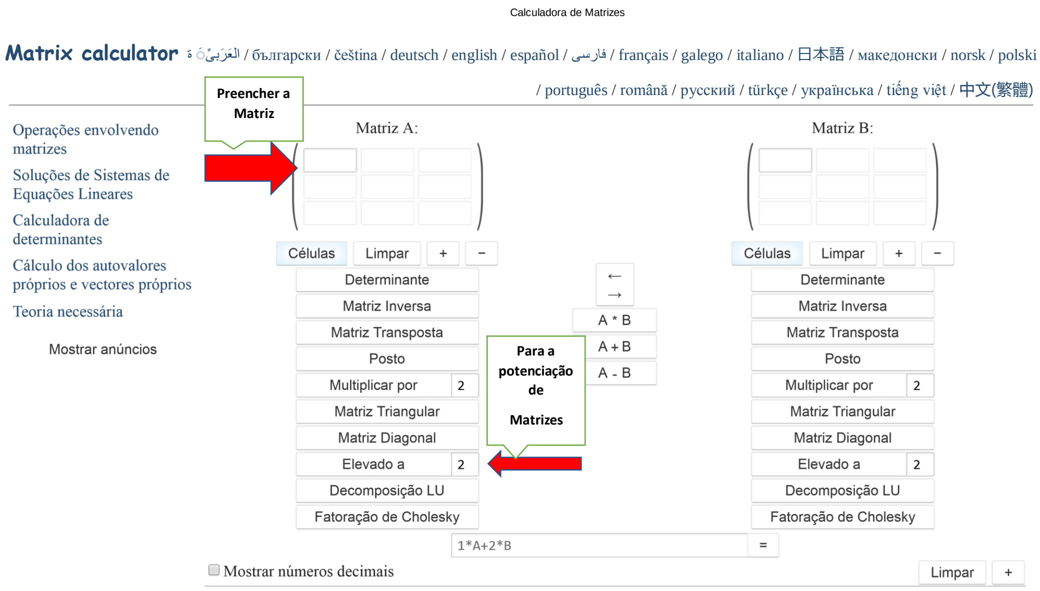
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T^n} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \textbf{Samsung} & \textbf{Motorola} & \textbf{LG} & \textbf{Apple} & \textbf{Outros} \end{array} \\ \begin{array}{l} \textbf{Samsung} \\ \textbf{Motorola} \\ \textbf{LG} \\ \textbf{Apple} \\ \textbf{Outros} \end{array} & \begin{pmatrix} 33,36\% & 30,56\% & 5,72\% & 13,24\% & 16,94\% \\ 33,36\% & 30,56\% & 5,72\% & 13,24\% & 16,94\% \\ 33,36\% & 30,56\% & 5,72\% & 13,24\% & 16,94\% \\ 33,36\% & 30,56\% & 5,72\% & 13,24\% & 16,94\% \\ 33,36\% & 30,56\% & 5,72\% & 13,24\% & 16,94\% \end{pmatrix} \end{array}$$

ou seja, $\pi = (33,36\% \quad 30,56\% \quad 5,72\% \quad 13,24\% \quad 16,94\%)$. Assim, podemos dizer que ao longo prazo as probabilidades de escolher/comprar as marcas **Samsung**, **Motorola**, **LG**, **Apple** e **Outros** serão respectivamente 33,36%, 30,56%, 5,72%, 13,24%, e 16,94%. De modo geral os alunos ficaram interessados nos resultados, visto que o celular é para a maioria dos adolecentes um aparelho de extrema imporância.

3.1.5 Usando o site Calculadora de Matrizes - https://matrixcalc.org/pt

Para facilitar os cálculos podemos utilizar o site Calculadora de Matrizes, que irá auxiliar nos casos de multiplicação de matrizes, potênciação de matrizes e resolução de sistemas lineares. Vamos ver como funciona esse site. Entrando no site Calculadora de Matrizes disponível em https://matrixcalc.org/pt podemos verificar que a utilização deste site é bem simples e bem explicativo. Neste site você pode calcular o determinante, a soma de matrizes, um produto de matrizes, uma matriz inversa, elevar uma matriz e outros. Você pode usar decimais exatos, decimais periódicos, e algumas expressões aritméticas para o preeenchimento das céluas vazias. Usar Enter, Barra de espaço, e as setas $\rightarrow \uparrow \leftarrow \downarrow$ para navegar sobre células.

Figura 35 – Calculadora de Matrizes



Fonte – (CALCULADORA. . . , 2018)

Neste trabalho utilizaremos o cálculo da potência de matriz, ou seja elevar a matriz para verificar se a mesma converge a longo prazo e também caso ocorra a convergência determinar a distribuição de equilíbrio π. Usando o icone Solução de Sistemas de Equações Lineares nos possibilita a resolução de sistemas lineares de modo rápido e simples facilitando a obtenção da distribuição de equilíbrio π quando precisamos calcular por $\pi.T = \pi$.

A Figura 35 é a tela inicial do site Calculadora de Matrizes. Podemos ver que para elevar uma matriz ao quadrado por exemplo, basta preencher as células em uma das matrizes (Matriz A ou Matriz B) e clicar em elevado a 2. Os valores dos resultados podem ser apresentados em frações ou em números decimais.

CAPÍTULO

4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final deste trabalho podemos destacar que há muitas outras possibilidades de contextualizações que podem ser utilizadas nos ensinos médio e fundamental, e utilizando da modelagem pelas Cadeias de Markov para introdução de conceitos de probabilidade. A aplicação das atividades propostas para este fim foi bem aceita pelos alunos, mostrando que a mudança de metodologia e a utilização de ferramentas como computador/internet pode indicar outras formas de ensino e aprendizagem do que a tradicional aula expositiva.

Dentre as atividades propostas, a atividade das penalidades de um jogo de futebol foi a atividade que teve maior interesse e entusiasmo pelos alunos tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio. Isto mostra que precisamos adequar sempre que possível os conteúdos com a realidade dos alunos, fazendo com que a matemática faça sentido, e também usar com mais frequência de tecnologias como computadores e internet para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

Ainda em relação às atividades propostas, aplicamos todas as 4 atividades aos alunos do ensino médio e, para os alunos do projeto Obmep na Escola, aplicamos apenas a atividade das penalidades de futebol. Para os alunos do ensino médio, foram necessárias 5 aulas conforme previsto e, mesmo com dificuldades, os alunos conseguiram acompanhar as atividades de forma satisfatória. Já em relação aos alunos do Obmep na Escola, o tempo programado foi de 1 aula, mas pelo interesse demonstrado pelos alunos, seriam necessárias 2 aulas. Mesmo com o tempo reduzido, a atividade cumpriu o objetivo de introduzir conceitos de probabilidade, utilizando os conceitos de Cadeias de Markov.

Em relação à fundamentação teórica, apresentamos a teoria básica de Cadeias de Markov com suas definições, exemplos, propriedades e resultados. Podemos destacar as subsecções 2.7.3

da distribuição de equilíbrio e 2.7.4 da existência e unicidade da distribuição de equilíbrio onde tivemos alguma dificuldade por não encontrar muitos exemplos comentados/explicativos.

Uma perspectiva para a continuidade deste trabalho seria buscar novas situações-problemas que contextualizadas à realidade dos alunos possam ser modeladas pelas Cadeias de Markov para introduzir conceitos de probabilidade e propiciar a melhoria no ensino e aprendizagem da matemática.

REFERÊNCIAS

BALESTRI, R. **Matemática**: interação e tecnologia. 2. ed. [S.l.]: Leya, 2016. v. 2. Citado na página 30.

BASTOS, F. de A. A. **Estatística e Probabilidade**. EdUECE - Editora da Universidade Estadual do Ceará, 2015. Disponível em: <www.uece.br/computacaoead/index.php/downloads/doc_download/2176->. Citado na página 39.

BRASIL. **PCN + Parâmetros Curriculares Nacionais**: Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. [S.l.], 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Citado nas páginas 23 e 24.

____. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**: Orientações curriculares para o ensino médio. Ministério da educação. [S.l.], 2006. v. 2, 135 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Citado na página 25.

____. **Base Nacional Comum Curricular**: A educação é a base. [S.l.], 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Citado na página 23.

BRITANNICA, E. **Enciclopedia Britannica**. 2018. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Andrey-Andreyevich-Markov>. Citado na página 22.

CALCULADORA de Matrizes. 2018. Disponível em: <https://matrixcalc.org/pt/>. Citado na página 121.

CASTRO, D. M. de S. **Cadeias de Markov: uma aplicação para o ensino de matrizes e probabilidades**. 57 p. Dissertação (Mestrado), 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=76270>. Citado na página 25.

CETESB. **Companhia Ambiental do Estado de São Paulo**. 2018. Disponível em: <https://cetesb.sp.gov.br/>. Citado nas páginas 105, 109 e 110.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: Um Curso Introdutório**. 2ª edição, 1ª reimpressão. ed. São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2004. ISBN 85-314-0399-5. Citado na página 27.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto aplicações. 2. ed. [S.l.]: Ática, 2013. v. 2. Citado na página 30.

DELATORRE, H. T. **Aplicações das Cadeias de Markov no Ensino Médio**. 65 p. Dissertação (Mestrado), 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=80478>. Citado na página 25.

DURRETT, R. **Elementary Probability for Applications**. [S.l.]: Cambridge Univertity Press, 2009. Citado nas páginas 27 e 68.

GARCIA, J. R. de Souza; Jaqueline da S. R. **Contato matemática**. 1. ed. [S.l.]: FTD, 2016. v. 2. Citado na página 30.

GRINSTEAD, C. M.; SNELL, J. L. **Grinstead and Snell's Introduction to Probability**. 2º. ed. Americam Mathematical Society, 2006. Disponível em: <https://www.math.dartmouth.edu/~prob/prob/prob.pdf>. Citado na página 27.

HOEL, P. G.; PORT, S. C.; STONE, C. J. **Introduction to stochastic process**: University of california, los angeles. Houghton Mifflin Company, 1972. Disponível em: <https://docs.ufpr.br/~benitoag/%5BPaul_G._Hoel%5D_Introduction_to_Stochastic_Processes.pdf>. Citado na página 74.

JúNIOR, G. P. S. **Cadeias de Markov: uma proposta de ensino e aprendizagem**. 71 p. Dissertação (Mestrado), 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=641>. Citado na página 25.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**: Coleção profmat. 1ª. ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. 297 p. ISBN 978-85-85818-81-4. Citado na página 27.

MAGELA, M. M. **Teorias Básicas das Cadeias de Markov**. Dissertação (Mestrado), 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=87175>. Citado na página 25.

MANOEL, M. de R. **Cadeias de Markov: uma abordagem voltada para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado), 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=85391>. Citado na página 25.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 1ª edição. ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Barasileira de Matemática, 2013. 204 p. ISBN 978-85-8337-015-4. Citado na página 27.

ROSS, S. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**. 8ª. ed. Porto Alegre: Bookman Companhia Editora Ltda, 2010. 608 p. ISBN 978-85-7780-621-8. Citado na página 27.

SÃO PAULO. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas tecnologias. 1ª. ed. [S.l.], 2011. 72 p. Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>. Citado nas páginas 23 e 25.

TRANSFERMARKT: Mercado de transferências. 2018. Disponível em: <https://www.transfermarkt.com.br/>. Citado na página 115.

WIKIPÉDIA. **Variável Aleatória**. 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Variável_aleatória>. Citado nas páginas 41 e 48.

ICMC USP
SÃO CARLOS