UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente

Amanda Aléssio

A importância do Cálculo Diferencial e Integral para a formação do professor de Matemática da Educação Básica

Presidente Prudente
2019

Amanda Aléssio

A importância do Cálculo Diferencial e Integral para a formação do professor de Matemática da Educação Básica

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Presidente Prudente.

Orientadora: Profª. Dra. Cristiane Nespoli Morelato França

Presidente Prudente
2019

A372i

Alessio, Amanda
A importância do Cálculo Diferencial e Integral para a formação do professor de Matemática da Educação Básica / Amanda Alessio. -- Presidente Prudente, 2019
90 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientadora: Cristiane Nespoli Morelato França

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral. 3. Professores de matemática. 4. Educação básica. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Amanda Aléssio

A importância do Cálculo Diferencial e Integral para a formação do professor de Matemática da Educação Básica

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT, da Faculdade de Ciêcias e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Presidente Prudente.

Banca Examinadora

Profª. Dra. Cristiane Nespoli Morelato França
UNESP – Câmpus de Presidente Prudente
Orientadora

Profª. Dra. Monica Furkötter
Unoeste

Prof. Dr. Marco Antonio Piteri
UNESP – Câmpus de Presidente Prudente

Presidente Prudente
19 de fevereiro de 2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela saúde por permitir vivenciar este momento de suma importância.

Aos meus familiares e amigos, pelos bons e maus momentos e pela força que me proporcionaram durante esta jornada.

Agradeço aos meus professores Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira, Prof. Dr. Aylton Pagamisse, Prof. Dr. José Carlos Rodrigues, Prof. Dr. José Gilberto Spasiani Rinaldi, Prof. Dr. Luis Carlos Benini, Prof. Dr. Marco Antônio Piteri, Prof. Dr. Ronaldo Celso Messias Correia e Prof. Dr. José Roberto Nogueira pelo aprendizado. Em especial, agradeço a minha orientadora Prof.ª Dra. Cristiane Nespoli Morelato França pela paciência e dedicação.

Aos meus colegas Aline, Dhiéssica, Rosangela, Luzia, Camila, Rubens, Leonardo e Thomaz, que sempre me ajudaram nos momentos em que precisei.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal investigar a importância da disciplina Cálculo Diferencial e Integral na formação do professor de Matemática. A pesquisa envolveu os aspectos históricos do surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, visando reconhecer a importância dessa disciplina na formação do professor de matemática, a partir de sua origem e aplicabilidade. Foram realizados o levantamento das regulamentações envolvendo a obrigatoriedade da disciplina, assim como o estudo dos Projetos Político Pedagógicos dos cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Foram analisadas as respostas de 19 docentes a um questionário sobre a ementa, a bibliografia e o papel das disciplinas de Cálculo nos cursos de Licenciatura em Matemática da UNESP em que atuam (ou atuaram). Além disto, foram investigados conteúdos da Educação Básica que estão associados a conceitos de Cálculo com o objetivo de explorar sua aplicabilidade em sala de aula. Verificou-se que o Cálculo surgiu para resolver problemas que até aquele momento não haviam sido solucionados. Atualmente é disciplina obrigatória nos cursos de Licenciatura em Matemática, cujas aplicações ocorrem de modo direto, ou indireto, em diversos conteúdos da Educação Básica, tais como progressão geométrica, trigonometria, taxa de variação de uma função, ponto de máximo e mínimo de uma função quadrática, coeficiente angular da reta tangente, áreas e volumes de sólidos.

Palavras–chave: Cálculo Diferencial e Integral. Formação de Professores. Professor de Matemática. Educação Básica.

ABSTRACT

The present work aims to investigate the importance of the discipline Differential and Integral Calculus in the teachers' mathematics formation. The research involved the historical aspects of the appearance of Differential and Integral Calculus aiming to recognize the importance of this discipline in the teachers' mathematics formation from its origin and applicability. The survey of the regulations involving the obligatoriness of the discipline as well as the study of the Political Pedagogical Projects of the undergraduate courses in Mathematics of the State University Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) were carried out. The answers of 19 professors to a questionnaire about the syllabus, bibliography and the role of Calculus disciplines of the undergraduate courses in Mathematics at UNESP, in which they act (or acted), were analyzed. In addition, contents of Basic Education associated with concepts of Calculus were investigated, in order to explore its applicability in the classroom. It turned out that the Calculus came up to solve problems that until that moment had not been solved. Now is a compulsory discipline in undergraduate courses in Mathematics, which applications occur directly, or indirectly in several contents of Basic Education, such as geometric progression, trigonometry, rate of variation of a function, maximum and minimum point of a quadratic function, angular coefficient of the tangent line, areas and volumes of solids.

Keywords: Differential and Integral Calculus. Teachers' Formation. Mathematics Teacher. Basic Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contexto e Justificativa

De acordo com Fainguelernt e Nunes (2015) a Matemática, em geral, é considerada uma disciplina difícil, fechada, enigmática, destinada a uns poucos que nasceram com o talento especial para aprendê-la. Essa situação fica evidenciada quando são observados dados envolvendo o desempenho de estudantes, de nível fundamental e médio, em avaliações de aprendizagem promovidas pelo Ministério da Educação (MEC).

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), através do Sistema de Avaliação da Educação Básica[1] (Saeb), avalia os níveis de proficiência em Língua Portuguesa e Matemática dos estudantes brasileiros dos 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio. Na edição de 2017 o Inep visitou mais de 73 mil escolas, e mais de 5,4 milhões de estudantes fizeram os testes de Língua Portuguesa e de Matemática (BRASIL, 2018). Os dados indicam que a proficiência média nacional em Matemática, tanto no Ensino Fundamental quanto no médio, alcançou o nível 4, em uma escala que varia de 0 a 10, o que equivale a afirmar que menos de 4% dos avaliados têm conhecimento adequado em Matemática. Para se ter uma ideia, no nível 4 o estudante reconhece retângulos em meio a outros quadriláteros e o maior valor em uma tabela cujos dados possuem até oito ordens, por exemplo. (NOGUEIRA, 2018)

Conforme dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, do inglês *Programme for International Student Assessment* (Pisa), em 2015 o Brasil ficou na 66ª posição no ranking mundial de Matemática que avaliou 70 países. O Pisa é uma iniciativa de avaliação comparada, realizada trienalmente, aplicada de forma amostral a estudantes matriculados a partir do 7º ano do Ensino Fundamental na faixa etária dos 15 anos. No Brasil, a avaliação é também coordenada pelo Inep.

Muitos são os desafios a serem enfrentados para que esse quadro seja revertido e a formação dos professores que dão aula na Educação Básica é certamente um deles. Os professores que ministram aulas de Matemática do 1.º ao 5.º ano do Ensino Fundamental, por exemplo, não têm formação específica em Matemática como ocorre

---

[1] A terminologia Educação Básica é usada no texto como referência aos níveis escolares de Ensino Fundamental Médio, não obstante a LDB-Lei 9394/96 preconizar em seu Art. 21, que a Educação Básica seja composta pela Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

com os que atuam do 6.º ao 9.º ano. E, mesmo aqueles que têm essa formação, muitas vezes não conseguem vencer o obstáculo que consiste em aproximar os conceitos matemáticos tratados em sala de aula da vida social do aluno.

Sem dúvida é papel do professor ajudar a quebrar os paradigmas que envolvem o ensino de Matemática. Vale ressaltar que a formação do professor implica na qualidade de ensino, uma vez que o licenciado em Matemática tem a possibilidade de relacionar conteúdos complexos estudados em ambiente universitário àqueles associados ao cotidiano do aluno, dando forma a novas situações de aprendizagens que despertem seu interesse.

Neste contexto, o presente trabalho trata a importância do Cálculo Diferencial e Integral na formação de professores de Matemática que irão lecionar na Educação Básica, disciplina obrigatória que está presente na matriz curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2001).

O interesse pelo tema foi impulsionado pelas dúvidas de colegas em sala de aula durante a graduação, que questionavam o docente que ministrava a disciplina: “Se não vou dar aula de Cálculo, porque tenho que estudar?”; “Onde aplico este conteúdo?”.

Desta forma, por meio de uma pesquisa qualitativa de delineamento analítico descritivo, como objetivo geral tenta-se responder: “Por que o Cálculo Diferencial e Integral está presente na matriz curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática?”. “Qual a importância do Cálculo Diferencial e Integral para a formação do professor de Matemática?”.

Como espaço da pesquisa foram considerados os cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) presentes nos Câmpus de Bauru, Guaratinguetá, Ilha Solteira, Presidente Prudente, Rio Claro e São José do Rio Preto, e como sujeitos da investigação, docentes destas Unidades que atuam ou atuaram em disciplinas de Cálculo. Como instrumento de coleta de dados foram utilizados análise documental e questionário. Os objetivos específicos buscaram: levantar as regulamentações estabelecidas pelos órgãos responsáveis associadas à obrigatoriedade da disciplina; analisar os Projetos Político Pedagógicos (PPP) de cada um destes cursos com foco nas disciplinas de Cálculo e identificar como os docentes participantes da pesquisa avaliam a importância das disciplinas de Cálculo na formação dos licenciados.

1.2 Estrutura do trabalho

Na primeira etapa deste trabalho, apresentada na Seção 2, investigou-se o contexto histórico do “Cálculo” a fim de encontrar os motivos pelos quais ocorreu seu surgimento e a “revolução” a que deu origem. A inserção de disciplinas de Cálculo nos cursos de formação de professores de Matemática no Brasil também foi objeto de pesquisa.

A Seção 3 contém uma análise documental envolvendo os PPP dos Cursos de Licenciatura em Matemática da Unesp no que se refere especificamente aos conteúdos de Cálculo, que consiste na segunda etapa do trabalho. Visando uma compreensão mais ampla e detalhada dos PPP, realizou-se o levantamento das regulamentações que cercam a obrigatoriedade dos conteúdos de Cálculo nas Licenciaturas em Matemática, indicadas pelas resoluções propostas pelos órgãos que normalizam tais cursos, ou seja, o Conselho Nacional de Educação (CNE) e o Conselho Estadual de Educação São Paulo (CEE/SP).

A terceira etapa, apresentada na Seção 4, compreendeu o levantamento das opiniões de um grupo de docentes que lecionam/lecionaram disciplinas de Cálculo nas Licenciaturas em Matemática da Unesp, acerca do papel destas disciplinas na formação do professor de Matemática do Educação Básica. Mais especificamente foi aplicado um questionário, que consiste em uma adaptação daquele proposto por Moreira, Cury e Vianna (2005) quando investigaram o papel da disciplina Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática, envolvendo as seguintes indagações: “O Cálculo Diferencial e Integral deveria ser uma disciplina obrigatória num curso de Licenciatura em Matemática? Por quê? Quais os conteúdos que deveriam ser trabalhados?”

Por fim, a Seção 5 traz algumas das aplicações do Cálculo na Educação Básica.

2 O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

2.1 Um pouco da história do Cálculo

A expressão “Cálculo” é usada aqui para simplificar a referência ao “Cálculo Diferencial e Integral”, que constitui certamente a ferramenta Matemática responsável pelos maiores avanços alcançados na área da Matemática ao longo da história, com implicações em muitas outras áreas da Ciência.

Quando nos referimos ao Cálculo logo vem a indagação: “o Cálculo foi descoberto ou inventado?”. De acordo com o dicionário Aurélio, da Língua Portuguesa, o termo “inventar” está associado à “criação de algo novo”, enquanto a palavra “descobrir” significa “achar, encontrar”. Portanto, não se pode afirmar que o Cálculo foi um conteúdo “encontrado” ao longo da história, mas sim “inventado”. Também não se pode afirmar que foi objeto de invenção unicamente de um homem, ao contrário, foi o resultado do esforço de muitos estudiosos ao longo dos séculos, sendo os primeiros registros datados de 1.800 a.C. Conforme Eves (2004, p. 417)“[...] com essa invenção a Matemática criativa passou a um plano superior e a história da Matemática elementar essencialmente terminou”.

Tendo em vista que nos séculos XVII e XVIII os matemáticos eram também físicos, os primeiros estudos estavam associados a Física, mais especificamente com “[...] o movimento dos planetas e a queda dos corpos na terra, o funcionamento das máquinas, o fluxo dos líquidos, a expansão dos gases, forças físicas tais como o magnetismo e a eletricidade” (DEVLIN, 2010, p. 24-25).

Na maior parte dos livros e documentários atribui-se a invenção do Cálculo a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727), personagens estes que viveram na Idade Moderna. Hoje, com pesquisas avançadas de historiadores e arqueólogos, sabemos que vestígios do Cálculo remontam muito antes dessa época.

O Cálculo pode ser dividido em duas partes: uma relacionada às derivadas ou Cálculo Diferencial, que fornece métodos para calcular e possui muitas aplicações geométricas, em especial para encontrar tangentes para curvas e taxas de variações de grandezas. E outra parte relacionada às integrais, ou Cálculo Integral, cujas aplicações geométricas referem- se ao cálculo de áreas e volumes.

2.1.1 O Cálculo na Antiguidade

Euclides (325 a.C.-265 a.C.) não foi uma das principais peças na construção do Cálculo, mas foi de grande importância na história da Matemática. Esse geômetra grego, embora não seja considerado o matemático mais original de sua época, deixou um grande legado: “Euclides foi um grande sintetizador, e seu texto de geometria, *Os Elementos,* tornou-se um best-seller de todos os tempos”. (STEWART, 2014, p.33)

Em *Os Elementos* Euclides trabalha com uma geometria no plano e alguns aspectos da geometria no espaço. É em *Os Elementos* que encontramos, por exemplo, as definições de reta e círculo, a prova de existência de cinco polígonos regulares, entre outros. Euclides formulou postulados, axiomas e teoremas que posteriormente foram utilizados por outros matemáticos como base de estudo.

Outro matemático que não teve contato direto com o Cálculo e também não era considerado o mais brilhante de sua época, mas que certamente contribuiu para sua criação futura, foi Apolônio (226 a.C.-190 a.C.). Em suas andanças por Alexandria, Apolônio teve contato com *Os Elementos* de Euclides. Foi sob sua orientação que escreveu sua obra prima: “*Secções Cônicas”.* Em *Secções Cônicas* destacamos três importantes curvas: elipse, hipérbole e parábola, que séculos depois foram estudadas com mais precisão por Fermat (1601-1665).

Além das curvas, Apolônio demonstrava muito interesse em relação a tangente a essas curvas:

> Os teoremas de Apolônio sobre máximos e mínimos na verdade são teoremas sobre tangentes e normais a secções cônicas. Sem um conhecimento das propriedades das tangentes a uma parábola, uma análise de trajetórias locais seria possível, e um estudo dos planetas é impossível se referência às tangentes a uma elipse. (BOYER, 1996, p.104)

Embora na Antiguidade não tenhamos promovido grandes avanços no Cálculo, essa época foi marcada por algumas ideias que serviram como ponto de partida para a formação de alguns conceitos utilizados posteriormente, como por exemplo, as curvas, os infinitesimais, tangentes e o método da exaustão.

Podemos afirmar que as primeiras ideias do Cálculo surgiram de fato na Grécia Antiga. À época, já eram conhecidas as áreas de polígonos regulares como o triângulo e o quadrado. Porém, não se sabia como calcular a área do círculo, por não se tratar de uma figura com lados retos. Foi assim criado o método da exaustão. Uma de suas aplicações consistia em preencher a superfície do círculo de raio um com polígonos com número de lados cada vez maiores até que sua área ficasse toda completa.

Através deste processo, foi encontrado um número de infinitas casas decimais que fora chamado posteriormente de pi (π). De acordo com Boyer (1996, p. 62), esse método pode ter sido desenvolvido pelo grego Eudoxo de Cnido (408 a.C.-355 a.C.): “[...] Arquimedes atribuiu a Eudoxo a primeira prova satisfatória de que o volume de um cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e mesma altura, o que parece indicar que o método da exaustão vem de Eudoxo.” Posteriormente, Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) utilizou o método para calcular a aproximação de π:

> Ao avaliar a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo novamente Arquimedes provou sua habilidade em computação. Começando com o hexágono regular inscrito, ele calculou os perímetros de polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados. [...] O resultado do cálculo de Arquimedes sobre o círculo foi uma aproximação do valor de π [...] (BOYER, 1996, p.86-87)

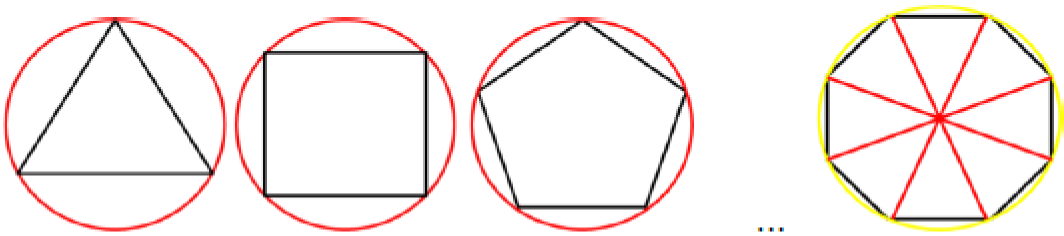

Figura 1: Aproximação da área por polígonos inscritos
Fonte: MACEDO et al, 2013

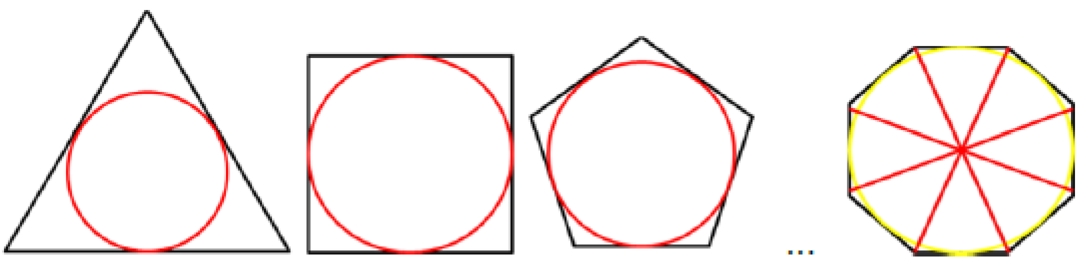

Figura 2: Aproximação da área por polígonos circunscritos.
Fonte: MACEDO et al, 2013

Para calcular a área do círculo é necessário inscrever e circunscrever polígonos regulares no círculo, conforme o número de lados aumenta, há uma aproximação para a área real do círculo (Figuras 1 e 2). Tal explicação pode ser interpretada da seguinte maneira: a área do círculo é o limite das áreas dos polígonos regulares nele inscritos/circunscritos. É através do limite que chegamos a derivada, integração é a operação inversa da derivação. O método da exaustão é visto como precursor dos métodos do Cálculo. Vemos surgirem assim, as sementes que determinaram a descoberta do Cálculo.

2.1.2 Idade Média

Marcada pelo fim do Império Romano do Ocidente em 476 d.C., e pela retomada de Constantinopla pelos turcos em 1453, a Idade Média, também intitulada “Idade das Trevas” da Ciência, foi a época considerada de pouco prodígio matemático (principalmente na Europa) e nesse período as ideias que norteiam o Cálculo Diferencial e Integral estagnaram: “Essa foi de fato a “idade das trevas” da ciência, mas não deveríamos cometer o erro de supor que isso fosse verdade para Idade Média como um todo.” (BOYER, 1996, p. 170)

Entre os poucos registros de estudiosos que se dedicaram ao Cálculo, podemos destacar, sem muito entusiasmo, a Matemática indiana dessa época. Conforme Stewart (2014) pode-se destacar Aryabhata (nascido em 476 d.C.), Brahmagupta (nascido em 598 d.C.), Mahavira (século IX) e Bhaskara (nascido em 1114).

Aryabhata em seu tratado denominado *Aryabhatiya* continha problemas envolvendo Álgebra, Trigonometria, Aritmética e Astronomia:

> Por mais breve que seja a seção de matemática do livro, ela contém uma riqueza de material: um sistema alfabético de numerais, regras aritméticas, métodos de resoluções para equações lineares e quadráticas, trigonometria (incluindo a função seno e o “seno verso” $1 - cos\theta$). Há também uma excelente aproximação de $\pi, 3{,}1416$. (STEWART, 2014, p.57)

Brahmagupta escreveu dois livros importantes entre eles *Brahma Sputa Siddhanta,* no qual descrevia um método para interpolar tabelas de senos: consistia em “achar o seno de um ângulo a partir dos senos de um ângulo maior e um ângulo menor”. (STEWART, 2014, p. 57)

Os estudos de Mahavira baseavam-se nas obras de Aryabhata e Brahmagupta, e seu livro *Ganita Sara Sangraha* continha “frações, permutações e combinações, solução de equações quadráticas, triângulos pitagóricos e uma tentativa de achar a área e o perímetro de uma elipse”. (STEWART, 2014, p.57)

Dos quatro matemáticos indianos dessa época, o mais notável foi Bhaskara. Suas obras tinham como base a Álgebra e a Geometria e a mais importante foi *Lilavati* que continha “ideias sofisticadas em aritmética, inclusive o método da prova dos nove, criada para conferir cálculos, na qual os números são substituídos pela soma de seus dígitos”. (STEWART, 2014, p.58)

Uma figura influente dessa época foi o italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido como Fibonacci. Autor de *Liber Abbaci*, livro que continha a notação de um traço horizontal nas frações e o símbolo 0 (zero).

Segundo Boyer (1996) o problema do livro *Liber Abbaci* que mais inspirou os futuros matemáticos foi: "Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"

Esse problema originou a "sequência de Fibonacci", estudada até os dias atuais:

> Verificou-se que essa sequência tem muitas propriedades belas e significativas. Por exemplo, pode-se provar que dois termos sucessivos quaisquer são primos entre si e que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}$ é a razão da secção áurea $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$. (BOYER, 1996, p.174)

Não há muitos registros sustentáveis com relação ao desenvolvimento do Cálculo sob o olhar da Matemática indiana, que sem dúvida teve como contribuição mais marcante o sistema de numeração decimal e posicional. Estagnado, o Cálculo voltou a dar vestígios no final da Idade Média na Europa.

2.1.3 Idade Moderna

A Matemática retornou fortalecida na Idade Moderna, marcada pela retomada de Constantinopla pelo Império Otomano em 1453, até 1789 quando se inicia a Revolução Francesa.

Foi na Europa o cenário em que se deu o desenvolvimento mais significativo da história do Cálculo. O Renascentismo italiano, movimento cultural, político e econômico, que se alastrou pela Europa Ocidental foi o grande responsável pelo despertar da Matemática.

O primeiro pensador renascentista foi Nicolau Copérnico (1473-1543) que criticava o modelo geocêntrico, onde a Terra era considerada o centro do universo. Em torno de um século depois, foi a vez de Johann Kepler (1571-1630) retomar a crítica ao geocentrismo. Através de suas três leis do movimento, Kepler provou matematicamente que as órbitas descritas pelos planetas em torno do Sol são elipses, com o Sol em um de seus focos (1ª Lei); o segmento que une o centro do Sol a um planeta descreve áreas iguais em intervalos de tempos iguais (2ª Lei); ao quadrados

dos períodos de revolução dos planetas ao redor do Sol são diretamente proporcionais aos cubos dos raios médios de suas órbitas (3ª Lei).

Kepler, indiretamente, utilizou o conceito de integral para demonstrar suas três leis:

> Ao tratar problemas de áreas, como da segunda lei, Kepler pensava na área formada por uma infinidade de pequenos triângulos com vértices no Sol e os outros dois vértices em pontos infinitamente próximos um do outro ao longo da órbita. Dessa forma ele pôde usar uma forma grosseira de calcular integral. (RAVAGNANI, 2014, p.37)

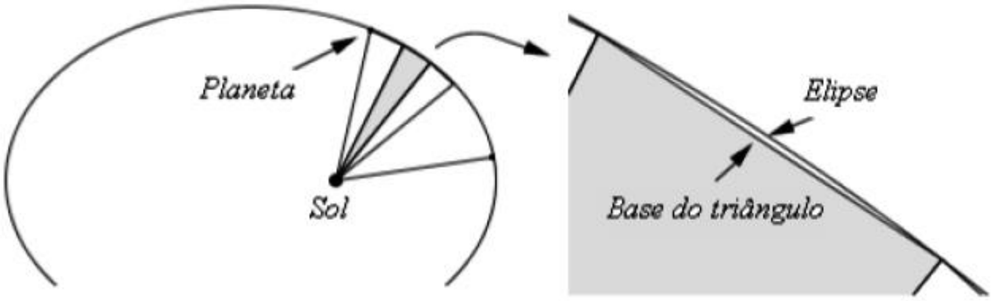

Figura 3: "Triangularização" da elipse
Fonte: RAVAGNANI, 2014.

Contemporâneo de Kepler, Galileu Galilei (1564-1642) também era um defensor da teoria heliocêntrica. Os estudos de Galileu resultaram em dois famosos tratados, *Os dois principais sistemas* e *As duas novas ciências*, nas quais utilizou seus conhecimentos sobre infinitesimais: "[...] em ambos há muitos pontos que se faz apelo à Matemática, frequentemente às propriedades dos infinitamente grandes e infinitamente pequenos" (BOYER, 1996, p.224). Sem dúvida, a grande contribuição de Galileu se deu na Física com sua teoria da queda livre dos corpos. Mais tarde o conceito de infinitesimais foi aperfeiçoado por Cavalieri e Torricelli.

Bonaventura Cavalieri (1598–1647) foi padre, intelectual e estudioso matemático, tendo por hobby a Matemática Pura e Aplicada. Discípulo de Galileu, Cavalieri escreveu um dos livros mais influentes de sua época, *Geometria Indivisibilibus Continuorum,* cujo conteúdo abrange o cálculo de áreas e volumes com o auxílio do conceito chamado "indivisíveis": "[...] uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e que volume pode ser considerado como um composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase-atômicos". (BOYER, 1996, p. 226). Dentre as contribuições de Cavalieri se destacam dois princípios que envolvem o Cálculo de áreas e volumes:

> Cavalieri defendia que uma linha é um conjunto infinito de pontos, uma superfície, um conjunto infinito de linhas e um volume, um conjunto infinito de planos. Para calcular uma área, em vez de somar esse número infinito de

> linhas, ele compara a superfície com outra que tenha o mesmo número de linhas. (PINTO, 2008, p.47)

Os dois princípios podem ser resumidos nas Figuras 4 e 5:

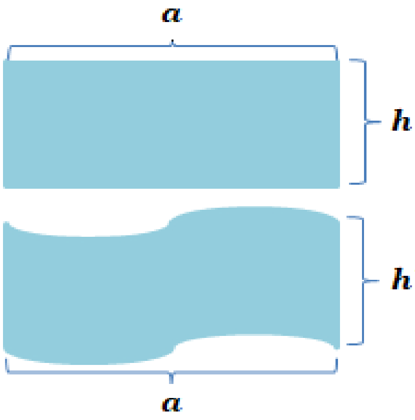

Figura 4: Princípio das áreas de Cavalieri
Fonte: Elaborada pela Autora

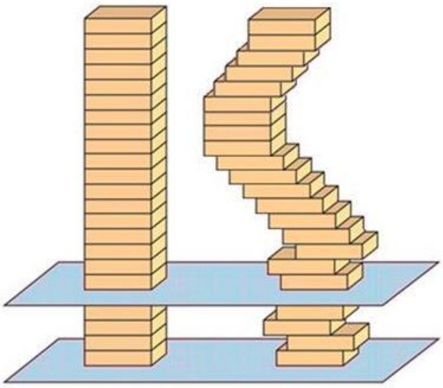

Figura 5: Princípio dos volumes de Cavalieri
Fonte:<http://mauroweigel.blogspot.com.br/2010/08/bonaventura–cavalieri.html>

No retângulo da Figura 5, a área pode ser calculada somando a um número $h$de vezes, ao distorcermos esse retângulo, geramos outra figura de mesma área, pois é formada pelos infinitos segmentos h do retângulo. Na pilha composta de paralelepípedos, estes resultam dos infinitos planos que cortam a figura, sendo ambas de mesmo volume.

Um outro discípulo de Galileu foi o matemático Evangelista Torricelli (1608-1647), que utilizou os infinitesimais para determinar o ponto no interior de um triângulo, cuja soma das distâncias de seus vértices é mínima. Esse brilhante matemático italiano em sua obra *Opera Geometrica* demonstrou a quadratura da cicloide e a construção da reta tangente.

Na mesma linha de estudo o inglês John Wallis (1616-1703) escreveu vários tratados matemáticos, entre eles *Arithimetica Infinitorum,* onde utilizou a noção de infinitesimal para desenvolver seu "método de indução". O legado que Wallis deixou foi muito produtivo para área da Matemática, como podemos perceber no trecho abaixo:

> Wallis, sem dúvida o principal matemático inglês antes de Newton, fez contribuições mais importantes em análise infinitesimal. Entre elas havia uma em que, ao calcular $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\,dx$ ele antecipou algo da obra de Euler sobre a função gama ou fatorial. Da obra de Cavalieri, Fermat e outros, Wallis sabia que essa integral representa a área sob o semicírculo $y = \sqrt{x - x^2}$ e que essa área portanto é $\frac{\pi}{8}$.(BOYER, 1996, p.263-264)

Contemporâneo de Wallis, Isaac Barrow (1630-1677) foi professor de Geometria em Cambridge onde teve como ilustríssimo aluno Issac Newton. Barrow traduziu obras importantes, entre elas *Os Elementos* de Euclides, mas sua contribuição para o Cálculo foi em *Lectiones Geometricae*, onde desenvolveu seu método para encontrar tangentes a partir de uma curva dada. Esse trabalho mais tarde foi revisado por Newton, contribuindo para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial.

Segundo Boyer (1996), a Idade Moderna contemplou muitos personagens que marcaram a história da Matemática, entre eles, Gilles de Roberval (1602-1675), Girard Desargues (1591-1661), Blaisel Pascal (1623-1662) e James Gregory (1638-1675). Além destes, destacam-se os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), responsáveis pela germinação da Geometria Analítica na época, possibilitando que o estudo das curvas fosse aperfeiçoado com o passar do tempo.

Descartes, reconhecido por muitos como o pai da Geometria Analítica, dizia que a dúvida era o primeiro passo para se chegar ao conhecimento. Em 1637 publicou *O Discurso do Método*, dividido em três livros; o primeiro: Dos problemas que podem ser construídos sem usar mais do que círculos e linhas retas; o segundo: Da natureza das linhas curvas; e finalmente o terceiro: Da construção dos problemas sólidos ou mais que sólidos.

A Geometria Analítica de Descartes tinha como objetivo traduzir operações algébricas em linguagem geométrica. O objetivo de seu método era duplo: libertar a geometria de diagramas por processos algébricos e dar significado as operações de álgebra por meio de interpretações geométricas.

Descartes dedicou-se também ao cálculo da “normal”, como se referia a reta tangente. Em *A Geometria*, obra de grande sucesso, explicou seu método para calcular tangentes a curvas, método este considerado um marco de seu trabalho. Paralelo à Descartes, Fermat também estudou a natureza das curvas:

> Descartes tinha toda razão ao dizer que o problema de achar a normal (ou a tangente) a uma curva era de grande importância, mas o método que aplicou em *La Géométrie* era menos eficiente que o que Fermat tinha observado na época. (BOYER, 1996, p.236-237)

Fermat não era matemático de profissão, estudava Matemática por prazer, ocupava-se de restauração de obras perdidas na Antiguidade. E entre elas, as obras de Apolônio que tratavam as curvas lhe chamou a atenção, fazendo com que pesquisasse mais sobre o assunto. Fermat percebeu então a existência de uma Geometria Analítica com mais de duas dimensões, a qual denominou “lugares”. Demonstrou equações que resultam em curvas como parábola, hipérbole e elipses e círculos. Segundo Boyer (1996) desenvolveu um método para calcular os pontos de máximo e mínimo de curvas polinomiais de forma $y = f(x)$. E, além do cálculo de tangentes a curvas, Fermat também desenvolveu um método para calcular a área sob essas curvas.

Por muitos estudiosos da época, Fermat foi reconhecido como o inventor do Cálculo, inclusive por Laplace (1749-1827). (BOYER, 1996, p. 240)

O avanço mais significativo do Cálculo, no entanto, ocorreu por volta de 1680, com Isaac Newton e Gottfried Leibniz, que publicou primeiro, mas Newton alegou primazia nos estudos, acusando Leibniz de plagiador, iniciando uma longa disputa sobre a invenção do Cálculo, que mais tarde se tornou livro.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, na Alemanha, prematuramente ingressou na universidade onde estudou Teologia, Filosofia, Direito e Matemática, sendo nesta última que obteve maior destaque. Por volta de 1673, dedicou esforços para o problema de encontrar a tangente para uma curva, “percebeu então, em 1673, que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das *diferenças* das ordenadas e das abscissas, quando se tornavam infinitamente pequenas”. (BOYER, 1996, p.276)

Leibniz constatou que os problemas de quadraturas poderiam ser resolvidos através da soma retângulos infinitamente pequenos que formam a área delimitada pela curva estudada. Foi o primeiro a introduzir pequenos incrementos dx e dy a grandezas x e y, usava a razão $\frac{dy}{dx}$ para determinar a taxa de variação de y como função de x (STEWART, 2014, p. 153).“Leibniz escrevia $dy = f(x + dx) - f(x)$ de modo que $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ é a aproximação secante habitual para a inclinação da tangente”. (STEWART, 2014, p. 153).

No entanto, Leibniz percebeu que essa notação tinha suas limitações: se dy e dx são diferentes de zero, então a razão $\frac{dy}{dx}$ não é a taxa de variação instantânea, mas sim uma aproximação. Ele tentou contornar o problema admitindo dx e dy como infinitesimalmente pequenos (um infinitesimal é um número diferente de zero e menor que qualquer outro número diferente de zero).

Segundo Stewart (2014), Leibniz sabia integrar e diferenciar qualquer potência de x, escrevendo a fórmula: $dx^n = nx^{n-1}dx$, ou $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$. Além disso, deduziu regras para diferenciar a soma, o produto e o quociente de duas funções. De acordo com estudos, em 1680, obteve a fórmula para o cumprimento de arco de curva e do volume de um sólido de rotação como integrais das várias grandezas correlacionadas.

Outro estudioso contemporâneo de Leibniz foi o aluno prodígio de Barrow, Issac Newton (1642-1727). Aos quinze anos de idade, o jovem Newton ingressou na Universidade de Cambridge e a partir daí fez descobertas que mudaram o rumo da ciência. “Em terminologia moderna, perguntava qual é a equação de uma função $f(x)$ se a área sob esse gráfico é da formax^m. [...] Ele deduziu, para sua própria satisfação, que a resposta era $f(x) = mx^{m-1}$”. (STEWART, 2014, p. 155)

Segundo Boyer (1996), as abordagens de Newton para o Cálculo de derivadas eram muito semelhantes às de Leibniz, exceto a notaçãodx, onde Newton utilizava$o$ para representar intervalos de tempo muito pequenos. Em suas notações das Leis do Movimento escrevia a segunda derivada $\ddot{x}$ ao invés de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Newton dedicou-se às séries infinitas e às taxas de variação de certas grandezas, a esta última Newton denominou de “fluxo”. Ele introduziu uma palavra nova para denominar uma grandeza “fluindo” rumo à zero, mas sem jamais chegar lá, a “fluxão” (STEWART, 2014, p. 155). Em 1671, escreveu o *Método de fluxões e séries infinitas,* ficando claro que nessa época Newton possuía a maior parte das ideias básicas do Cálculo.

Em 1665 a peste bubônica arruinou Londres, obrigando Newton a deixar o Trinity College e voltar para casa. Foi nessa época que Newton fez algumas de suas principais invenções: o Teorema Binomial, a Lei da Gravitação e a Natureza das Cores.

Foi através da Física que Newton alavancou o Cálculo, através de suas Leis do Movimento, estudando os padrões da natureza.

> A grande descoberta de Newton foi que os padrões da natureza parecem se manifestar não como regularidades em certas grandezas, mas como relações entre suas *derivadas.* As leis da natureza são escritas na linguagem do Cálculo; o que importa não são os valores das variáveis físicas e sim as taxas com que variam. (STEWART, 2014, p. 161)

Estima-se que Newton inventou o Cálculo por volta de 1665-1666, mas só em 1687 publicou seus feitos no famoso tratado *Philosophiae naturalis principia mathematica.*

Embora Newton tenha começado a trabalhar com o Cálculo antes de Leibniz, foi este, entretanto, que fez as primeiras publicações do assunto. Atualmente, utilizamos os métodos algébricos de Leibniz por serem de mais fácil compressão comparados aos de Newton.

Finalmente, o Cálculo se despediu do século XVIII com muitos matemáticos renomados, entre eles Brook Taylor (1685-1731) e Colin Maclaurin (1698-1746) contribuindo com o desenvolvimento das séries infinitas através da expansão de funções em séries de potências.

Pode-se afirmar que em toda a história da Matemática nenhuma família produziu tantos matemáticos brilhantes quanto à família Bernoulli. Incentivado pelo pai, Jacques Bernoulli (1654-1705) também conhecido por Jakob, tinha verdadeiro fascínio pela Matemática, em especial pelas curvas e séries infinitas:

> Entre outras coisas, ele observou que num ponto de máximo ou mínimo a derivada da função não precisa se anular, mas pode tomar um "valor infinito" ou assumir forma indeterminada. Ele logo se interessou pelas séries infinitas, e em seu primeiro artigo sobre o assunto em 1686 ele apresentou a bem conhecida "desigualdade de Bernoulli" $(1+x)^n > 1+nx$ onde x é real e $x > -1$ e $x \neq 0$ e n é um inteiro maior que um [...] (BOYER, 1996, p.287)

Para Boyer (1996), foi Jacques que sugeriu o termo "integral" a Leibniz, que concordou que *calculus integralis*seria um nome melhor que *calculus summatorius* para o inverso do *calculus differentialis.*

Leibniz procurava uma curva na qual uma partícula se desloca de um ponto ao outro no menor intervalo de tempo possível, e foi Jacques quem demonstrou que a curva procurada era uma cicloide.

Além do interesse pelo Cálculo, Jacques estudou minuciosamente a Teoria das Probabilidades, descrita em seu tratado *Ars conjectandi,* publicado em 1713, oito anos após sua morte.

Jean Bernoulli (1667-1748), também conhecido por Johann, era o irmão caçula de Jacques, escreveu singelos livros didáticos sobre o Cálculo. Em uma de suas viagens a Paris, conheceu o marquês Guillaume François Antoine de L'Hospital (1661-1704), ensinando-lhe a nova disciplina leibniziana.

Segundo Boyer (1996), Jean Bernoulli descobrira que, se $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis em $x = a$ tais que $f(a) = 0$ e $g(a) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$ existe então: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$. Essa regra muito conhecida atualmente e presente em praticamente todos os livros de Cálculo foi redigida por L'Hospital em seu livro *Analyse des infiniment petits* publicado em 1696.

Com a desenvoltura do Cálculo pela Europa, surgiram matemáticos que questionavam a veracidade dos métodos infinitesimais, entre esses críticos estava Michael Rolle (1652-1719) reconhecido pelo teorema descrito em seu livro *Méthode pour résoudre les égalitéz:* se uma função é diferenciável no intervalo de a e b, e se $f(a) = f(b) = 0$ então $f'(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz entre a e b. (BOYER, 1996, p.300)

Por sua vez, Leonard Euler (1707-1783), aluno de Jean Bernoulli, merece lugar de destaque na história da Matemática. Euler era muito eclético, fez contribuições em quase todos os ramos da Matemática, sua linguagem e notação foram as mais bem sucedidas de todos os tempos. A perda da visão de um dos olhos não afetou sua produção de conhecimento publicando centenas de artigos em toda sua vida.

Com a introdução de notações para funções $\left(f(x)\right)$; base de logaritmos naturais (e); unidade imaginária ($\sqrt{-1}$); somatórios (Σ), entre outras notações, Euler modelou o Cálculo tornando-o mais rebuscado, o qual fundamentou em seu tratado *Introductio in analysin infinitorum.* Ele tomou o Cálculo Diferencial e o método dos fluxos e tornou-os parte de um ramo mais geral da Matemática que a partir daí foi chamado "Análise" – estudo dos processos infinitos. (BOYER, 1996, p.306)

Contemporâneo de Euler, o francês Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) também fez contribuições em diversas áreas da ciência. Segundo Boyer (1996, p.311) em um de seus artigos "[...] ele chamou de uma quantidade o limite de uma segunda quantidade [variável] se a segunda pode se aproximar da primeira de mais perto que por qualquer quantidade dada (sem coincidir com ela)". A imprecisão na tentativa de definir limite levou a remoção desta definição das obras Matemáticas da época.

Outro francês, desta vez Adrien-Marie Legendre (1752-1833) que lecionou Análise para estudantes da École Polytechnique em Paris, colaborou para o desenvolvimento do Cálculo e das Equações Diferenciais entre outros ramos da Matemática. Legendre trabalhou na teoria das funções e no cálculo das variações, devemos a ele a notação usual para derivadas de várias ordens, $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$.

E assim o ciclo do Cálculo termina na Idade Moderna. Despedindo-se do século das luzes, ressurge em diversas áreas, não sendo mais regionalizado como nos séculos anteriores.

2.1.4 Idade Contemporânea

A idade contemporânea teve início com a Revolução Francesa e é contemplada até os dias atuais. O Cálculo foi abordado de uma maneira mais rigorosa, conceitos como continuidade, função, séries, limites, derivadas e integrais adquiriram fundamento e precisão. Sobressaíram-se matemáticos tais como Cauchy, Riemann e Weiertrass.

August Louis Cauchy (1789-1857) nasceu em Paris no ápice da Revolução. Autor de quase 800 artigos matemáticos, Cauchy fez contribuições na Teoria das Funções de Variável Complexa; em 1829 em seu *Leçons sur le calcul différentiel,* deu a primeira definição de função complexa. Aprimorou a definição de D'Alembert sobre limites: "Quando valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a acabar diferindo dele por tão pouco quanto se queira, esse último chama-se o limite dos outros todos". (BOYER, 1996, p.355)

A definição de limite atribuída a Cauchy foi aperfeiçoada posteriormente pelo alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 –1897): "uma função $f(x)$ tem por limite o valor L no ponto $x = x_0$ se, dado ε tão pequeno quanto se queira, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - L| < \varepsilon$". (GARBI, 2009, p.299)

Weierstrass foi autor de vários teoremas, facilmente encontrados nos livros de Cálculo e Análise atualmente, tendo elaborado o Teorema dos Extremos onde afirmava que toda função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ assume um máximo e um mínimo em $[a, b]$. Também foi responsável pelo Teorema conhecido como Bolzano-Weiertrass, segundo o qual toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) se ocupou de diversas áreas da Matemática entre elas a Análise, Topologia, Geometria e Teoria dos Números. Sua tese de doutorado foi sobre Teoria das Funções de Variável Complexa, desenvolvendo a chamada equação de Cauchy-Riemann. Reconhecido pelo refinamento da definição de integral, Riemann considerou uma curva limitada por certo intervalo e a área que esta formava com o eixo das abcissas. Para calcular tal área dividiu-a em retângulos cada vez menores, utilizando a aproximação da soma das áreas destes retângulos para encontrar a integral, conforme Figura 6, atualmente chamada de Integral de Riemann.

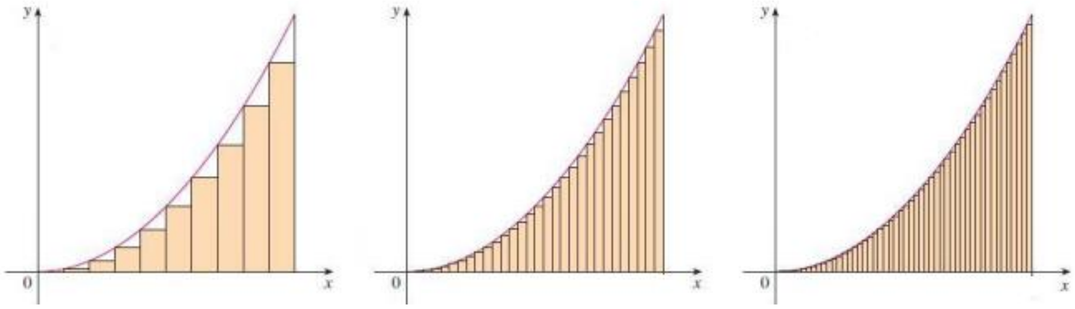

Figura 6: Aproximação da área da curva pela soma das áreas dos retângulos
Disponível em: <https://wp.ufpel.edu.br/nucleomatceng/files/2012/07/Somas-de-Riemann-e-integração-numérica.pdf>. Acesso: 20 de fevereiro de 2019

Resumidamente, Riemann desenvolveu a expressão: $\int_a^b f(x)dx$ para calcular a integral, ou seja, a área sob a curva $y = f(x)$, com $f(x)$ contínua num intervalo $[a, b]$, conforme ilustra a Figura 7 a seguir.

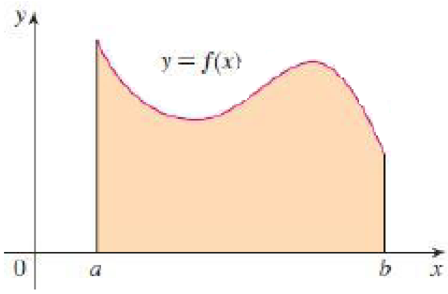

Figura 7: Área da curva delimitada pelos intervalos$[a, b]$.
Disponível em: <https://wp.ufpel.edu.br/nucleomatceng/files/2012/07/Somas-de-Riemann-e-integração-numérica.pdf>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2019

Depois de Riemann, outros matemáticos se ocuparam em definir a integral, dentre eles, Henri Lebesgue (1875-1941); Arnaud Denjoy (1884-1974); Alfred Haar (1885-1933) e Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894):

> Riemann tornou claro o conceito de integrabilidade pela definição que chamamos agora *integral de Riemann,* abrindo caminho, no século XX, para o conceito mais geral de *integral de Lebesgue* e, daí, para gerações ulteriores da integral. (EVES, 2014, p. 614)

À medida que foram se desenvolvendo campos tais como da Física, Estatística, Economia, Ciências da Computação e das tecnologias em geral, o Cálculo foi se aprimorando, criando forma, tornando-se o que hoje conhecemos nos livros como Cálculo Diferencial e Integral.

2.2 A introdução do Cálculo nos Cursos de Matemática no Brasil

A introdução da disciplina Cálculo Diferencial e Integral no currículo brasileiro ocorreu em 1811 inicialmente no segundo ano do curso Matemático da Real Academia Militar do Rio de Janeiro, ministrada pelo professor Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvin (1775-1856). De acordo com SILVA (1999),

> Durante um período de mais de cem anos (1810-1920), a Academia Militar do Rio de Janeiro (e todas as suas ramificações: Escola Central, Escola Militar, Escola Politécnica, Escolas preparatórias) foi praticamente a única instituição onde os brasileiros poderiam adquirir conhecimentos matemáticos sistemáticos de nível superior e obter um diploma de bacharel e doutorado em ciências físicas e Matemáticas (SILVA, 1999, p.13).

O livro adotado foi *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* do francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843), o qual segundo Boyer (1949, p. 264) talvez seja “o mais famoso e ambicioso livro no tema [Cálculo] que apareceu na época”. Este livro, traduzido para várias línguas, teve sua versão em Língua Portuguesa produzida pelo próprio professor. Esta versão, fiel ao original, foi adotada como principal referência para o ensino de Cálculo no Brasil durante décadas.

Até o final do século XIX poucas mudanças haviam ocorrido até que em 1842, José Saturnino da Costa Pereira (1771-1852) publicou “Elementos do Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral segundo o Sistema de Lacroix, Para Uso da Escola Militar”. Este seria o primeiro livro-texto a ser redigido por um brasileiro e pelo fato de conter muito do estilo de François Lacroix não trouxe inovação no ensino de Cálculo, conforme indica Silva (1996).

Até 1960 os cursos eram estruturados de modo que a disciplina de Cálculo era incorporada com a de Análise Matemática:

> Era o modelo dos famosos “Cours d’Analyse” das escolas francesas, nos quais se ensinava tudo o que hoje incluímos nas disciplinas de Cálculo de uma ou mais variáveis, e mais ainda funções de uma variável complexa, boa parte das equações diferenciais ordinárias e um tanto das parciais, geometria diferencial de curvas e superfícies e um pouco de análise de Fourier. (ÁVILA, 2002, p.83)

De acordo com Ávila (2002) a partir da década de 1960 os livros europeus foram substituídos pelos livros americanos, e assim surgiu o hábito de ensinar Cálculo primeiro e posteriormente Análise. Nessa época, o Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) de São José dos Campos adotava essa didática por influência de professores americanos.

Durante esse período, o Cálculo era apresentado de maneira rigorosa já no primeiro ano do curso: “A marca mais visível disso é a introdução, logo no início do curso, da definição de limites em termos de ε e δ, e consequente dedução das propriedades do limite”. (ÁVILA, 2002, p. 84)

O primeiro curso de Matemática no Brasil foi criado em 1934 na Universidade de São Paulo (USP), mais especificamente dentro da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras que compreendia, em sua implantação, três seções – Filosofia, Ciências e Letras. A primeira subseção da seção de Ciências, denominada Ciências Matemáticas, compreendia as seguintes disciplinas: 1º ano: Geometria (Analítica e Projetiva), Análise Matemática (1ª parte), Física Geral e Experimental (1ª parte), Cálculo Vetorial; 2º ano: Análise Matemática (2ª parte), Mecânica Racional, Física Geral e Experimental (2ª parte);3º ano: Análise Matemática (3ª parte), Geometria, História das Matemáticas. (Ziccardi, 2009). Para se formar como professor da escola secundária, o aluno, depois de obtido o título de bacharel nos três primeiros anos, deveria cursar um ano de Didática. Como podemos observar pela estrutura curricular do curso de Matemática da USP, havia disciplinas na área de Análise Matemática. Vale registrar que a disciplina de Análise envolve conceitos do Cálculo de forma que tais disciplinas estão relacionadas no que se refere aos conteúdos envolvidos.

Após a implantação do curso na USP, pesquisa recente envolvendo apenas as Licenciaturas em Matemática do Estado de São Paulo, realizada por Martins-Salandim (2012), aponta que até o final de 1950 havia cinco desses cursos, ao passo que uma expansão na década de 1960 levou a criação de oito novos cursos no interior, mais especificamente nos municípios de Araraquara, Campinas, Dracena, Presidente Prudente, Santo André, São José do Rio Preto, São Paulo, Taubaté e Tupã, em instituições públicas e particulares.

O trabalho de Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) contém detalhes acerca dos conteúdos de Análise tratados em alguns dos primeiros cursos de Licenciatura em Matemática acima citados.

Atualmente, a Universidade Estadual Paulista (UNESP) possui cursos de Licenciatura em Matemática em 06 (seis) diferentes Unidades, alguns deles em períodos duplicados, oferecendo anualmente 330 (trezentos e trinta) vagas, conforme indica o Quadro 1:

Quadro 1: Distribuição das vagas dos cursos de Licenciatura em Matemática da Unesp

Unidade da UNESP	Vagas oferecidas
FCT/Câmpus de Presidente Prudente	Diurno: 40 Noturno: 50
IBILCE/Câmpus de São José do Rio Preto	Diurno: 55 Noturno: 45
FEIS/Câmpus de Ilha Solteira	Noturno: 30
IGCE/Câmpus de Rio Claro	Diurno: 40
FEG/Câmpus de Guaratinguetá	Noturno: 30
FC/Bauru	Noturno: 40

Fonte: Elaborado pela autora.

Conforme indica o parecer CNE/CES 1302/2001 o Cálculo Diferencial e Integral figura como conteúdo comum e obrigatório a todos os cursos de Licenciatura em Matemática do Brasil.

Vale registrar que o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), destinado exclusivamente a professores da Educação Básica possui Fundamentos do Cálculo também como disciplina obrigatória. Dentre os objetivos do PROFMAT, destaca-se a importância da formação do professor da Educação Básica:

> Artigo 1º - O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada relevante ao exercício da docência no Ensino Básico, visando dar ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática. (BRASIL, 2016)

Visando uma formação mais aprofundada e relevante, o PROFMAT oferece ao aluno uma coletânea como complemento de estudo de suas disciplinas. Dentre os livros disponíveis encontra-se o denominado “Fundamentos do Cálculo”, em cujo prefácio o autor faz o seguinte comentário:

> Tendo em vista o que foi dito até aqui, fica clara, para formação dos professores de Matemática o ciclo básico de ensino, a importância de um domínio minimamente adequado dos conceitos e resultados do Cálculo, bem como de suas aplicações mais simples. Tal importância é reforçada pelo fato de que os conteúdos e métodos mais elementares do Cálculo, por aplicarem, sintetizarem e expandirem o currículo de Matemática do ensino básico, ofertam um fechamento natural ao mesmo. Portanto, uma vez terminada a leitura deste livro, exorto os colegas professores de Matemática da escola básica, e que compõem o corpo discente do PROFMAT, a resgatarem o Cálculo para suas salas de aula trazendo mais organicidade aos currículos que lecionam. (MUNIZ NETO, 2015)

Na seção a seguir, é apresentado um levantamento das regulamentações que cercam a obrigatoriedade da disciplina Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Licenciatura em Matemática e também são analisados os PPP dos 6 (seis) cursos de Licenciatura em Matemática da Unesp.

3 O CÁLCULO NOS PROJETOS POLÍTICO PEDAGÓGICOS DOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNESP

3.1 Introdução

Nesta seção busca-se analisar os PPP dos Cursos de Licenciatura em Matemática da Unesp bem como as leis/resoluções que os regulamentam, especificamente com relação às disciplinas que envolvem o Cálculo Diferencial e Integral.

Em primeiro lugar, são averiguadas as regulamentações previstas pelo CNE, órgão responsável por estabelecer as diretrizes dos cursos de Licenciatura do Brasil. É o CNE que estabelece a carga horária, as disciplinas obrigatórias, entre outras atribuições dos cursos de Licenciatura.

No que se refere à duração e à carga horária dos cursos de Licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior, a Resolução CNE/CP 02/2015 preconiza:

> Art. 13. Os cursos de formação inicial de professores para a Educação Básica em nível superior, em cursos de licenciatura, organizados em áreas especializadas, por componente curricular ou por campo de conhecimento e/ou interdisciplinar, considerando-se a complexidade e multirreferencialidade dos estudos que os englobam, bem como a formação para o exercício integrado e indissociável da docência na Educação Básica, incluindo o ensino e a gestão educacional, e dos processos educativos escolares e não escolares, da produção e difusão do conhecimento científico, tecnológico e educacional, estruturam-se por meio da garantia de base comum nacional das orientações curriculares.
> § 1º Os cursos de que trata o *caput* terão, no mínimo, 3.200 (três mil e duzentas) horas de efetivo trabalho acadêmico, em cursos com duração de, no mínimo, 8 (oito) semestres ou 4 (quatro) anos, compreendendo:
> I - 400 (quatrocentas) horas de prática como componente curricular, distribuídas ao longo do processo formativo;
> II - 400 (quatrocentas) horas dedicadas ao estágio supervisionado, na área de formação e atuação na Educação Básica, contemplando também outras áreas específicas, se for o caso, conforme o projeto de curso da instituição;
> III - pelo menos 2.200 (duas mil e duzentas) horas dedicadas às atividades formativas estruturadas pelos núcleos definidos nos incisos I e II do artigo 12 desta Resolução, conforme o projeto de curso da instituição;
> IV - 200 (duzentas) horas de atividades teórico-práticas de aprofundamento em áreas específicas de interesse dos estudantes, conforme núcleo definido no inciso III do artigo 12 desta Resolução, por meio da iniciação científica, da iniciação à docência, da extensão e da monitoria, entre outras, consoante o projeto de curso da instituição. (BRASIL, 2002, p. 11)

Por sua vez, o Parecer CNE/CES 1302/2001, que estabeleceu as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, indica conteúdos tidos como obrigatórios:

> Os conteúdos descritos a seguir, **comuns a todos os cursos de Licenciatura**, podem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela IES:
> ·Cálculo Diferencial e Integral
> ·Álgebra Linear
> ·Fundamentos de Análise
> ·Fundamentos de Álgebra
> ·Fundamentos de Geometria
> ·Geometria Analítica
> A parte comum deve ainda incluir:
> a) conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise;
> b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias;
> c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática.(BRASIL, 2001, p. 5-6)

Além destes conteúdos, também são previstas para as Licenciaturas:

> Para a licenciatura serão incluídos, no conjunto dos conteúdos profissionais, os conteúdos da Educação Básica, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio. (BRASIL, 2001, p. 6)

Assim, no cenário das regulamentações nacionais, conteúdos de Cálculo estão previstos na formação do licenciado em Matemática, além dos próprios conteúdos da Educação Básica.

No que segue são analisadas as disciplinas de Cálculo nos PPP dos cursos de Licenciatura em Matemática da Unesp, considerando a carga horária, a disposição na matriz curricular e os conteúdos programáticos.

3.2 O Cálculo nas Licenciaturas em Matemática da Unesp

A Unesp oferece Cursos de Licenciatura em Matemática em 6 (seis) Unidades Universitárias: Faculdade de Ciências do Câmpus de Bauru, Faculdade de Engenharia do Câmpus de Guaratinguetá, Faculdade de Engenharia do Câmpus de Ilha Solteira, Faculdade de Ciências e Tecnologia do Câmpus de Presidente Prudente, Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus Rio Claro e Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas do Câmpus de São José do Rio Preto. Nestes dois últimos, também oferece a modalidade de Bacharelado em Matemática.

De acordo com seus PPP, os cursos de Licenciatura em Matemática da Unesp têm em comum o objetivo de formar um profissional com visão crítica e abrangente da Matemática e do seu papel enquanto educador, além de serem capazes de trabalhar de forma multidisciplinar utilizando dos conteúdos matemáticos do mundo que o cerca. Este profissional também deve ser capaz de despertar o habito de estudo e criatividade em seus alunos por meio de adaptações e criações de métodos pedagógicos em seu ambiente de trabalho. (CHUEIRI, 2012)

As matrizes curriculares das Licenciaturas em Matemática da Unesp diferem em alguns pontos, tais como, disciplinas especificas, que em alguns cursos são obrigatórias em outros optativas, disciplinas pedagógicas e carga horária. No entanto, dentre as disciplinas obrigatórias, as disciplinas de Cálculo são comuns a todas elas, apesar de constarem com nomenclaturas diferentes. Por exemplo, Cálculo Diferencial e Integral I, Cálculo Diferencial e Integral II, Cálculo Diferencial e Integral III, Cálculo Diferencial e Integral IV ou apenas Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III e Cálculo IV.

Os dados a seguir foram extraídos dos PPP que estão vigentes e indicam a disposição das disciplinas na matriz curricular, se são semestrais ou anuais, assim como a nomenclatura.

3.2.1 Licenciatura em Matemática - Câmpus de Bauru

Quadro 2: Distribuição da disciplina de Cálculo no curso de Licenciatura em Matemática – Câmpus Bauru

Disciplina	Período (semestral)	Carga Horária	Conteúdo
Calculo Diferencial e Integral I	2°	60 h	-Limite e continuidade de funções de uma variável real - Derivadas - Aplicações de derivadas -Exploração de softwares de Matemática dinâmica no estudo e investigação dos conteúdos de Cálculo diferencial de funções de uma variável real.
Calculo Diferencial e Integral II	3°	60 h	- Integração de função de uma variável real - Métodos de Integração - Aplicações de integrais definidas - Integrais impróprias - Exploração de softwares de Matemática dinâmica no estudo e investigação dos conteúdos de Cálculo Integral de funções de uma variável real.
Calculo Diferencial e Integral III	4°	60 h	- Funções com valores Vetoriais. - Espaços Euclidianos: métrica e topologia. - Funções reais de duas ou mais variáveis reais. - Limites e continuidade. - Derivadas parciais. - Diferenciabilidade. - Aplicações das derivadas parciais. -Exploração de softwares de Matemática dinâmica no estudo e investigação dos

			conteúdos de funções de duas ou mais variáveis e seus aspectos gráficos.
Calculo Diferencial e Integral IV	5°	60 h	- Integrais múltiplas e aplicações - Integral de linha - Integral de superfície - Campos vetoriais - Teoremas Fundamentais - Exploração de softwares de Matemática dinâmica no estudo e investigação dos conteúdos de funções de duas ou mais variáveis e seus aspectos gráficos.

Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/graduacao/ppc matematica-1506.pdf> Acesso em: 26 de fevereiro de 2019.

3.2.2 Licenciatura em Matemática -Câmpus de Ilha Solteira

Quadro 3: Distribuição da disciplina de Cálculo no curso de Licenciatura em Matemática – Câmpus Ilha Solteira

Disciplina	Período (semestral)	Carga Horária	Conteúdo
Calculo Diferencial e Integral I	2°	90 h	- Números Reais. - Funções. - Limite e continuidade. - Derivada. - Regras de derivação. - Aplicações da derivada. - Máximos e Mínimos. - Primitivas. - Integral. - Técnicas de Integração. - Aplicações da Integral. - Fórmula de Taylor. - Integrais Impróprias.
Calculo Diferencial e Integral II	3°	60 h	- Funções de várias variáveis (duas e três). - Gráficos. - Continuidade. - Curvas de nível e superfícies de nível. - Derivadas Parciais. - Derivadas Direcionais. - Plano Tangente. Regra da Cadeia. - Fórmula de Taylor. - Máximos e Mínimos. - Multiplicadores de Lagrange. - Áreas. - Integral dupla. - Jacobiano. - Integral Tripla e Volume. - Integrais iteradas. - Mudança de coordenadas.
Calculo Diferencial e Integral III	4°	60 h	- Funções Vetoriais e curvas. - Derivadas de Funções Vetoriais: vetor velocidade e vetor aceleração. - Comprimento do Arco. - Integral de Linha no Plano e no Espaço. - Teorema de Green. - Independência de Caminhos e Campos Conservativos.

			- Integrais de Superfície. - Parametrização de Superfícies. - Área de Superfícies. - Orientação de Superfícies. - Teorema de Stokes e Campos Conservativos. - Teorema de Gauss.

Disponível em: <https://www.feis.unesp.br/Home/Graduacao/cursos/projeto-politico-pedagogico.pdf>
Acesso em: 26 de fevereiro de 2019.

3.2.3 Licenciatura em Matemática - Câmpus de Presidente Prudente

Quadro 4: Distribuição da disciplina de Cálculo no curso de Licenciatura em Matemática – Câmpus Presidente Prudente

Disciplina	Período (semestral)	Carga Horária	Conteúdo
Calculo Diferencial e Integral I	2°	60 h	- Limite e Continuidade. - Derivadas. - Regras de L'Hospital. - Estudo da variação das funções. - Aplicações da derivada.
Calculo Diferencial e Integral II	3°	60 h	- Primitivas. - Técnicas de Integração. - Integral Definida. - Integrais Impróprias. - Sequências Numéricas. - Séries Infinitas.
Calculo Diferencial e Integral III	4°	60 h	- Vetores e Superfícies. - Funções Vetoriais. - Noções Topológicas do$\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. - Funções de várias variáveis. - Máximos e Mínimos.
Calculo Diferencial e Integral IV	5°	60 h	- Integrais Múltiplas - Cálculo Vetorial.

Disponível em: <http://www.fct.unesp.br/Home/Graduacao/Matematica/ppp_matematica_2015.pdf>
Acesso em: 26 de fevereiro de 2019.

3.2.4 Licenciatura em Matemática – Câmpus de Rio Claro

Quadro 5: Distribuição da disciplina de Cálculo no curso de Licenciatura em Matemática – Câmpus Rio Claro

Disciplina	Período (semestral)	Carga Horária	Conteúdo
Calculo Diferencial e Integral I	1°	90 h	- Funções reais de uma variável real. - Limite e continuidade. - Derivada. - Aplicações de derivadas.
Calculo Diferencial e Integral II	2°	90 h	- Integração. - Aplicações de integrais. Integrais impróprias. - Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. - Sequências e séries numéricas (noções introdutórias – número e).

Calculo Diferencial e Integral III	3°	60 h	- Noções Topológicas do$\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. - Funções reais de duas ou mais variáveis reais. - Limite e continuidade. - Derivadas parciais. - Diferenciabilidade. - Aplicações de derivadas.
Calculo Diferencial e Integral IV	4°	60 h	- Integrais duplas e triplas. - Aplicações. - Funções vetoriais. - Curvas planas e espaciais. - Integrais de linha. - Teorema de Green. - Integrais de superfície. - Teorema de Gauss. - Teorema de Stokes.

Disponível em: <http://igce.rc.unesp.br/Home/Graduacao29/matematica/projetofinalset.pdf> Acesso em: 26 de fevereiro de 2019.

3.2.5 Licenciatura em Matemática – Câmpus São José do Rio Preto

Quadro 6: Distribuição da disciplina de Cálculo no curso de Licenciatura em Matemática – Câmpus São José do Rio Preto

Disciplina	Período (semestral)	Carga Horária	Conteúdo
Calculo Diferencial e Integral I	1° + 2° (anual)	120 h	- Números Reais. - Funções Reais de uma Variável Real. - Limite e continuidade. - Derivadas. - Aplicações. - Fórmula de Taylor. - Primitiva de uma Função. - Integral Definida. - Técnicas de Integração. - Integrais Impróprias. - Prática como Componente Curricular.
Calculo Diferencial e Integral II	3° + 4° (anual)	120 h	-Funções reais de duas ou mais variáveis reais - Limite e continuidade - Derivadas parciais - Diferenciabilidade - Aplicações de derivadas - Integrais duplas a triplas e aplicações - Funções vetoriais, curvas planas e espaciais - Integrais de linha - Teorema de Green - Integrais de superfície - Teorema de Gauss - Teorema de Stokes.

Disponível em: <https://www.ibilce.unesp.br/Home/Graduacao450/LicenciaturaemMatematica/mat.-2019-reestr.-ppp-anexo-pe.pdf > <https://www.ibilce.unesp.br/Home/Graduacao450/LicenciaturaemMatematica/mat.-2019-reestr.-ppp-s-planos.pdf> Acesso em: 26 de fevereiro de 2019.

3.2.6 Licenciatura em Matemática– Câmpus de Guaratinguetá

Quadro 7: Distribuição da disciplina de Cálculo no curso de Licenciatura em Matemática – Câmpus Guaratinguetá

Disciplina	Período (semestral)	Carga Horária	Conteúdo
Calculo Diferencial e Integral I	1° + 2° (anual)	180 h	- Números Reais e Funções. - Limite e Continuidade. - Derivada. - Aplicações da Derivada. - Regra de L'Hôspital. - Integral. - Técnicas de Integração. - Aplicações da Integral definida. - Integrais Impróprias.
Calculo Diferencial e Integral II	3° + 4° (anual)	180 h	- Funções reais de duas ou mais variáveis reais. - Limite e continuidade. - Derivadas parciais. - Diferenciabilidade. - Aplicações de derivadas. - Integrais duplas e triplas. - Aplicações. - Funções vetoriais. - Curvas planas e espaciais. - Integrais de linha. - Teorema de Green. - Integrais de superfície. - Teorema de Gauss. - Teorema de Stokes. - Sucessões e Séries Numéricas. - Séries de Potências, Taylor e Maclaurin.

Disponível em: <http://www.feg.unesp.br/#!/graduacao/matematica/projeto-pedagogico/projeto-pedagogico-a-partir-de-2015/> Acesso em: 26 de Fevereiro de 2019.

3.3 Considerações

As disciplinas de Cálculo são oferecidas na modalidade semestral a partir do segundo semestre do primeiro ano nos Câmpus de Bauru, Ilha Solteira e Presidente Prudente, e do primeiro semestre em Rio Claro. Já nos Câmpus de Guaratinguetá e São José do Rio Preto são ofertadas anualmente, a partir do primeiro ano. Com exceção de Ilha Solteira, onde se concentram em três semestres, nos demais cursos se distribuem em quatro semestres. Por sua vez, a carga horária total envolvendo as disciplinas de Cálculo é de 360 horas em Guaratinguetá, 300 horas em Rio Claro, 240 horas em Presidente Prudente, São José do Rio Preto e em Bauru e 210 horas em Ilha Solteira.

Em todos os programas de ensino das disciplinas mencionadas, a metodologia utilizada baseia-se em aulas expositivas e resolução de listas de exercícios. Com relação a bibliografia utilizada, dentre a diversidade de livros e autores citados nestes programas, podem ser destacados: “Um curso de Cálculo – Hamilton L. Guidorizzi”, “Cálculo – George B. Thomas”, “Cálculo A - Diva Marília Flemming” e “A Matemática do Ensino Médio – Elon L. Lima [et al]”. Os conteúdos diferem em alguns tópicos por conta da carga horária de cada curso, mas foram estruturados e distribuídos de modo que não haja prejuízos no que diz respeito ao conhecimentos básicos que o discente deverá adquirir. Verifica-se que a disciplina norteia três conceitos fundamentais: limites, derivadas e integrais. Por mais flexíveis que as propostas pedagógicas sejam, tais conteúdos se apresentam em cada termo (semestre) de alguma maneira.

Importante destacar, a Prática como Componente Curricular (PCC), como estabelecida pela Resolução CNE/CP 02/2015, deve ter no mínimo 400 (quatrocentas) horas distribuídas ao longo do curso devendo ser realizada através de atividades, nas quais, os futuros professores articularão os conteúdos da disciplina com a prática pedagógica colocando em uso os conhecimentos adquiridos. Nas disciplinas de Cálculo, apenas os cursos de São José do Rio Preto (Cálculo Diferencial e Integral I – 20 horas), Ilha Solteira (Cálculo Diferencial e Integral I – 15 horas); e Rio Claro (Cálculo Diferencial e Integral I – 20 horas), contemplam a prática diretamente em sua carga horária.

No PPP de São José do Rio Preto são verificadas algumas atividades propostas:

> Práticas como Componentes Curriculares: realizadas através de atividades que articulem o conteúdo da disciplina com a prática pedagógica colocando em uso os conhecimentos adquiridos, na forma de elaboração de planos de aula, apresentação de oficinas de trabalhos, apresentação de seminários, realização de trabalhos em grupo e desenvolvimento de atividades práticas aplicáveis no universo de ação dos alunos do ensino básico, visando situações de ensino que explorem a participação do aluno, tratando problemas que motivam o ensino e o gosto pela Matemática, desenvolvendo assim habilidades para ensinar diante da necessidade de solucionar problemas reais. Alguns temas a serem explorados com atividades práticas:
>
> • Buscar problemas do cotidiano do aluno que possam ser modelados por funções reais e identificar graficamente as principais propriedades de algumas funções através do uso de programas como Geogebra, Graphmatica, Maple, Mathematica, Winplot, etc., em especial, problemas que envolvem as funções afim e quadrática, reforçando a interpretação prática dos conceitos.
>
> • Discussão da relação entre problemas que envolvem fenômenos contínuos e o gráfico de algumas funções contínuas que o modelam, utilizando inclusive a plotagem de seus gráficos através de softwares.

> • Estudo geométrico de máximos e mínimos em aplicações reais, por exemplo, construção de um cilindro, uma caixa, um tanque, etc. (Projeto Político Pedagógico dos cursos de Graduação em Matemática, 2018, p. 95)

Rio Claro e Ilha Solteira não fornecem uma sequência didática, mas no PPP de Ilha Solteira é verificada a seguinte relação entre Cálculo Diferencial e Integral I e o conteúdo de funções ensinado na Educação Básica:

> Na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, o estudo das funções permite identificar associações entre elementos de dois conjuntos, de modo que certas características (por exemplo, a unicidade da imagem) sejam preservadas. No dia a dia, temos várias situações em que essas características são preservadas ou devem ser preservadas. Assim, o conceito de função é fundamental para poder estabelecer e identificar essas relações. (Projeto Político Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática, 2014, p. 48)

Nos cursos oferecidos em Guaratinguetá, Presidente Prudente e Bauru, a PCC não está presente na disciplina de Cálculo. No PPP de Presidente Prudente, é possível observar algumas reflexões sobre os conceitos estudados e possíveis abordagens na Educação Básica:

> No caso do 2º. ano, as disciplinas Cálculo Numérico I e II, Cálculo Diferencial e Integral II e III, Álgebra Linear I, Geometria Euclidiana I e II e Laboratório de Ensino de Matemática I desenvolverão atividades articuladas, propiciando aprendizagem colaborativa e interação, e comunicação entre os professores em formação e deles com os formadores. (Projeto Político Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática, 2015, p. 55)

A importância, para o discente (futuro professor), em realizar um elo entre a disciplina de Cálculo I e a Educação Básica está evidenciada na ementa da disciplina de Cálculo I do curso de Bauru:

> Ao término da disciplina o aluno deverá ser capaz de calcular limites e derivadas e aplicar estes conceitos para resolver problemas que envolvam a variação das funções de uma variável real. Correlacionar os conceitos fundamentais do Cálculo diferencial de funções de uma variável real com os demais tópicos da Matemática da Educação Básica, bem como com o cotidiano das pessoas e outras áreas do conhecimento. Utilizar a calculadora científica e o computador e, dentro do possível, instrumentalizá-los para os Ensinos Fundamental e Médio. (Projeto Político Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática, 2017, p. 53)

Diante deste cenário, considerando o fato de que conteúdos de Cálculo são obrigatórios nos cursos de formação de professores de Matemática, cujo objetivo é formar profissionais para atuar na Educação Básica, questiona-se o porquê da sua obrigatoriedade. Um dos argumentos que poderiam ser lançados em sentido contrário é que tais conteúdos não estão presentes na matriz curricular do Ensino Fundamental e Médio.

A partir desse questionamento, foi elaborado um questionário – “Cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura em Matemática” – para levantar opiniões de docentes que ministram, ou ministraram, disciplinas envolvendo Cálculo Diferencial e Integral na Unesp, com o objetivo de averiguar a importância das disciplinas na formação do professor que lecionará Matemática na Educação Básica.

4 FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA E O ENSINO DE CÁLCULO

Um dos objetivos específicos deste trabalho é investigar as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral no curso de Licenciatura em Matemática da Unesp, inseridas nos PPP dos Cursos, à luz da formação do professor de Matemática. Como estratégia, buscamos colher a opinião dos docentes que ministram ou ministraram tais disciplinas na licenciatura, sobre a importância dos conteúdos tratados e sua relação com aqueles ensinados no Ensino Fundamental e Médio. Mais especificamente, foi aplicado um questionário, que consiste em uma adaptação daquele proposto por Moreira, Cury e Vianna (2005) quando investigaram a ementa, as referências bibliográficas e o papel da disciplina Análise Real nas Licenciaturas em Matemática.

O questionário, enviado por correio eletrônico para 63 (sessenta e três) docentes que ministraram/ministram disciplinas envolvendo Cálculo Diferencial e Integral da Unesp, contou com 19 (dezenove) respostas. Nos Quadros 8, 9 e 10 estão sintetizadas as respostas às Questões 1, 2 e 3, que são de caráter objetivo. Mais adiante a Questão 4, de caráter subjetivo, tem suas respostas analisadas. Embora o questionário na integra encontre-se presente no Apêndice A, optou-se por elencar aqui as Questões, com o objetivo de facilitar a leitura.

QUESTÃO 1

Na sequência indicamos alguns dos conteúdos a serem desenvolvidos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Licenciatura em Matemática. Indique quais deles deveriam ser trabalhadas de modo indispensável no curso (se for o caso, acrescente outros).

Quadro 8: Número de indicações e porcentagem da Questão 1

Conteúdos indicados	Número de indicações	% (em 19)
Números reais e Funções reais de uma variável real	16	84,2%
Limite e continuidade	19	100%
Derivadas e suas aplicações	19	100%
Sequências e séries numéricas	15	78,9%
Integral e suas aplicações	19	100%
Integrais impróprias	14	84,2%
Noções topológicas do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$;	14	73,4%
Funções vetoriais	14	73,4%
Curvas planas e espaciais	13	68,4%

Funções reais de duas ou mais variáveis reais	19	100%
Fórmula de Taylor;	18	94,7%
Teoremas da função Implícita e função Inversa	16	84,2%
Integrais duplas e triplas. Aplicações	17	89,5%
Integrais de linha e de superfície	16	84,2%
Opção adicional: Teorema de Divergência, Green, Stokes e Gauss	1	5,3%
Opção adicional: Equações Diferenciais e Cálculo de Variáveis Complexas	1	5,3%
Opção adicional: Derivação de funções de duas ou mais variáveis reais e funções complexas	1	5,3%

Fonte: Elaborado pela autora

QUESTÃO 2

Indique livro(s) que você recomendaria para as disciplinas de Cálculo Diferencial e integral em um curso de Licenciatura em Matemática (se for o caso, acrescente outros).

Quadro 9: Número de indicações e porcentagem da Questão 2

Livros indicados	Número de indicações	% (em 19)
Um Curso de Cálculo – Hamilton Luiz Guidorizzi	12	63,2%
O Cálculo com Geometria Analítica – Louis Leitthold	8	42,1%
Cálculo - George B. Thomas	10	52,6%
Cálculo A: Funções Limite, Derivação e Integração - Diva Marilia Flemming e Mirian Buss Gonçalves	9	47,4%
Opção adicional: Cálculo das Funções de uma variável - Geraldo Ávila	1	5,3%
Opção adicional: Introdução ao Cálculo – Geraldo Ávila	1	5,3%
Opção adicional: Análise Matemática para Licenciatura - Geraldo Ávila	2	10,6%
Opção adicional: Cálculo em uma variável real - Plácido Zoega Táboas	1	5,3%
Opção adicional: Cálculo – Stewart	4	21,4%
Opção adicional: Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis - D. Pinto, M. C. F. Morgado	1	5,3%
Opção adicional: Cálculo – Howard Anton	1	5,3%

Fonte: Elaborado pela autora

Vale observar que nas Questões 1 e 2, embora os respondentes tenham assinalado mais de um item ou indicado mais de um livro, as porcentagem foram calculadas sobre o número total de respondentes (19).

QUESTÃO 3

Pense em uma disciplina (ou num conjunto de disciplinas) que contemple (m) os itens marcados na pergunta 1, com uma abordagem semelhante as bibliografias indicadas na pergunta 2. Na sua opinião, todo curso de Licenciatura em Matemática deveria ter essa(s) disciplina(s) como obrigatória(s)?

Quadro 10: Indicações e porcentagem da Questão 3

Respostas	Número de indicações	% (em 19)
Sim	18	94,7%
Não	0	0%
Não necessariamente	1	5,3%

Fonte: Elaborado pela autora

Como se pode visualizar no Quadro 8, 100% dos docentes indicaram os conteúdos Limite e Continuidade, Derivadas e suas aplicações, Integral e suas aplicações e Funções reais de duas ou mais variáveis reais, como indispensáveis para serem trabalhadas nas disciplinas de Cálculo. Por sua vez, o conteúdo Curvas Planas e Espaciais foi indicado por 68,4% dos docentes, sendo este o conteúdo com menor número de indicações. Foram incluídos Teorema de Green (5,3%), Equações diferenciáveis e Cálculo de Variáveis complexas (5,3%), Derivação de funções de duas ou mais variáveis reais e funções complexas (5,3%), cada uma delas por indicação de 1 (um) docente.

Referente à Questão 2, apenas um professor não indicou bibliografia. O livro mais indicado foi Um Curso de Cálculo - Hamilton Luiz Guidorizzi, com 63,2% das indicações (12 professores), seguido de Cálculo - George B. Thomas (52,6%);Cálculo A: Funções Limite, Derivação e Integração - Diva Marilia Flemming e Mirian Buss Gonçalves (47,4%) e O Cálculo com Geometria Analítica – Louis Leitthold (42,1%). Foram inseridos: Cálculo - Stewart (4 indicações – 21,4%); Análise Matemática para Licenciatura - Geraldo Ávila (2 indicações - 11,8%); além dos títulos Cálculo das Funções de uma variável e Introdução ao Cálculo ambos de Geraldo Ávila, Cálculo em uma variável real - Plácido Zoega Táboas e Cálculo Diferencial e Integral de

Funções de Várias Variáveis - D. Pinto, M. C. F. Morgado e Cálculo – Howard Anton, cada um com 1 indicação.

Com relação à Questão 3, a obrigatoriedade da disciplina na Licenciatura em Matemática foi defendida por 94,7% dos docentes (18), enquanto apenas um (5,3%) indicou que, não necessariamente, a disciplina devesse ser obrigatória.

As respostas apresentadas na Questão 4, conforme Apêndice A, por se tratar de uma questão aberta, são discutidas na sequência. Os respondentes do questionário foram identificados como: Docente 1 (D1), Docente 2 (D2) e assim sucessivamente até Docente 19 (D19).

O docente que indicou "não necessariamente", com relação a obrigatoriedade da disciplina na Licenciatura, respondeu da seguinte maneira a Questão 4:

> D2. Se me coubesse defender o Sim, eu apresentaria os seguintes argumentos: O Cálculo além de permitir uma base teórica (a Análise Matemática) também permite um leque de aplicações. Se olharmos quando da criação do Cálculo por Isaac Newton, este serviu como importante ferramenta para seus estudos.

A resposta do Docente 2 ressalta o fato do Cálculo permitir uma base teórica e uma diversidade de aplicações, mas não cita quais seriam essas aplicações e nem sua importância na prática docente no ensino básico.

As respostas à essa questão lançam uma variedade de argumentos, entre eles o fato da disciplina permitir a consolidação de uma base teórica e possuir carácter de aplicabilidade (também observadas na resposta 2), são os mais comuns:

> O futuro professor de Matemática deve estar preparado com esses conhecimentos, tanto pra dar aula como para realizar pesquisas bibliográficas nessa linha de estudo. (D4)
> Todo aluno do Curso de Matemática deve ter uma base ter uma formação sólida em Matemática. (D5)
> Tratando-se de um curso de Matemática, ainda que de Licenciatura, vejo como indispensável introduzir aos alunos o formalismo e rigor matemático, o qual é muito bem explorado no livro do Guidorizzi por exemplo. Isso sem dúvida não exclui que devamos também motivar os conceitos tanto quanto possível com exemplos aplicados, e por isso eu costumo usar também o livro do Stewart, o qual apresenta uma abordagem com menos rigor e com exemplos mais diversos. (D6)
> Na minha opinião os conteúdos marcados são fundamentais nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, pois contemplam o conteúdo base para outras disciplinas mais complexas, além do desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno. (D7)
> Os temas e ideias do Cálculo Diferencial e Integral são fundamentais para a formação do professor de Matemática. Nessas disciplinas é que podemos desenvolver e ampliar a compreensão sobre funções e sobre o universo dos números. (D9)
> Eu entendo que os conteúdos assinalados na pergunta 1 devem fazer parte de qualquer curso da área de exatas e portanto, ao curso de Matemática também, mesmo sendo um curso de Licenciatura. Isso tem a contribuir para a formação do futuro professor de Matemática. O livro do Stewart possui

> muitas aplicações, projetos e notas históricas, o que pode deixar a leitura mais agradável. (D15)
>
> Os alunos precisam ter conhecimento desses conceitos, bem como suas relações com os conceitos da Educação Básica. (D17)

Como pode ser observado nas respostas dos Docentes 4; 5; 6; 7; 15 e 17, é relatada a importância do professor ter uma base sólida em sua formação, devendo estar preparado, através dos conhecimentos adquiridos, para a prática docente. Além do formalismo e rigor da disciplina, o docente deve ter conhecimento de seus conceitos e a capacidade de relacioná-los com os conteúdos ensinados na Educação Básica. Entretanto, as respostas não fornecem elementos que permitam entender a relevância dessa "base sólida", "conceitos e aplicações" na prática docente.

A resposta do Docente 9 oferece como argumento para justificar a obrigatoriedade o fato "dos temas e das ideias" do Cálculo serem fundamentais na formação do professor. Segundo o respondente, o Cálculo permite desenvolver e ampliar a compreensão sobre funções e o universo dos números, conteúdos estes, ensinados no ensino básico.

O simples fato de estudar os conteúdos de Cálculo e adquirir os conhecimentos específicos que a disciplina proporciona, para dois professores, já é suficiente para justificar sua defesa:

> Defendo o sim, pois creio que na formação plena do aluno de Licenciatura em Matemática. Embora ele não vá ensinar todos estes conceitos em sala de aula no Ensino Fundamental e médio o simples fato de saber e conhecer para mim se torna importante. (D1)
>
> Tais conteúdos são relevantes na área de Matemática. (D8)

As respostas dos Docentes 1 e 8 não oferecem razões pelas quais este "saber" e esta "relevância" deveriam ser obrigatórios no processo de formação do professor.

Por outro lado, uma possível revisão no tratamento da disciplina e nas referências, é considerada por três dos respondentes, conforme indicado a seguir.

> Historicamente, essas disciplinas estão há anos nas grades curriculares das Licenciaturas. Os conteúdos são importantes para que o estudante (re)construa vários conceitos matemáticos, os quais era ensinar de forma direta ou indiretamente no Ensino Médio, como professor de Matemática. No entanto, entendo que as abordagens dadas às disciplinas de Cálculo precisam ser revistas. (D11)
>
> Sim, entretanto com abordagens bem feitas mas não muito profundas. Não sei dizer se existe literatura que abranja todo o conteúdo proposto. Creio ainda que deveria ser um conjunto de disciplinas encadeadas. (D13)
>
> Considero essas referências importantes nas disciplinas Cálculo Diferencial e Integral, mas não é possível segui-las sem adaptações que se fazem necessárias quando se trata de um curso de Licenciatura em Matemática. (D19)

Em ambas as respostas 11, 13 e 19é evidente a preocupação com as relações entre a formação Matemática e as demandas de conhecimento da pratica docente escolar. Os respondentes realçam a importância da disciplina de Cálculo na Licenciatura porém, relatam que as abordagens dos conteúdos da disciplina, bem como a bibliografia utilizada precisam ser revistas.

Uma reflexão bastante significativa foi apresentada pelo Docente 18:

> Uma condição *sine qua non* para o professor ensinar Matemática é o conhecimento do conteúdo. O problema é a qual conteúdo nos referimos? O professor precisa conhecer profundamente o conteúdo específico da disciplina, como ele é/foi produzido (que se refere à natureza do conhecimento matemático trabalhado) e não se limitar ao conhecimento de algoritmos e técnicas. Além disso, o professor deve conhecer o "para que" e "por que" é importante ao aluno aprender tal conteúdo. Isso tudo é o que estou chamando de conhecimento do conteúdo. O autor Shulman ressalta que além do conhecimento do conteúdo, o professor é aquele que deve conhecer "como ensinar" tal conteúdo, além do conhecimento curricular - ou seja, de como os conceitos dessa disciplina se relacionam com outros. Assim, penso que para um curso de Licenciatura em Matemática, o Cálculo Diferencial e Integral deva ser ensinado não só apresentando-se os conceitos e seus Cálculos, mas de modo a promover uma reflexão no futuro professor de Matemática de como tais conceitos abordados na disciplina se relacionam aos conteúdos que irão ensinar no Ensino Fundamental e Médio. E, para isso, penso que nenhum dos livros indicados na questão 2, sozinhos, dão condições para uma abordagem de tal natureza. Será necessário um professor capaz de relacionar e discutir os conteúdos e aplicações abordados em Cálculo ao contexto escolar. (D18)

Chama a atenção a expressão *sine qua non*, utilizada pelo Docente 18, muito empregada no meio acadêmico, cujo significado é *sem a qual não*, ou seja, o Cálculo é considerado uma ferramenta indispensável para o futuro professor da Educação Básica. Reforça a relevância do conhecimento matemático: “para que” e “por que” da importância do aluno do ensino básico aprender tais conteúdos. O Docente 18 também traz como contribuição, a menção ao autor Shulman, a qual conduziu para uma leitura interessante, cujo recorte é destacado a seguir. Shulman (2005) trata de três categorias do conhecimento do professor: o conhecimento específico ou conhecimento da matéria ensinada; no qual busca compreensões da estrutura matéria ensinada, conhecimento pedagógico; trabalhar a matéria em sala de aula de modo compreensível para o aluno, e o conhecimento curricular; baseia- se em conhecer currículo como o conjunto de programas elaborados para o ensino de assuntos em um dado nível. Shulman (1986)

Concepção semelhante é defendida por Lins (2005), quando menciona uma maior “qualidade” na Licenciatura em Matemática, ao invés de “quantidade” nos conteúdos abordados:

> [...] defendo que o professor precisa saber *mais,* e não *menos* Matemática, mas sempre esclarecendo que este *mais* não se refere a mais conteúdo, e sim a um *entendimento*, uma *lucidez* maior, e isto inclui necessariamente, a compreensão de que *mesmo dentro da Matemática do matemático* produzimos significados diferentes para o que *parece* ser a esma coisa. (LINS, 2005, p. 122)

A ideia de um futuro professor crítico, com maturidade intelectual é sustentada na resposta de três professores:

> Acredito que o conjunto de temas do Cálculo diferencial e integral, como apresentados acima, são indispensáveis para o crescimento e estímulo de raciocínio de um aluno de Licenciatura em Matemática, definindo um futuro professor de Matemática muito mais completo, crítico e pronto para julgar as necessidades na formação Matemática dos jovens de hoje. (D10)
>
> Ao estudar os conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, o estudante tem a possibilidade de trabalhar com noções elementares (comportamento de funções, taxa de variação, áreas, volumes, etc) de maneira mais aprofundada e consistente. Tendo esse conhecimento mais amplo e uma visão mais ampla sobre essas noções, ele terá mais condições de ensinar seus futuros alunos do Ensino Fundamental e médio de maneira mais satisfatória. (D14)
>
> Acredito que para que um licenciado em Matemática possa exercer plenamente a atividade de docência no Ensino Fundamental e médio, é sem dúvida necessário ter conhecimento matemático em um patamar mais elevado do que o abordado nesses níveis de ensino. Nesse sentido, um curso de Cálculo Diferencial e Integral solidamente desenvolvido é o mínimo que se requer. De fato, vou ainda além, achando que noções de Análise, Topologia e Álgebra são imprescindíveis para qualquer licenciando de Matemática. Também por isso, o curso de Cálculo é imprescindível, haja vista que serve de base para praticamente todas as disciplinas avançadas da Matemática. (D16)

As respostas anteriores dirigem-se ao fato de que a disciplina de Cálculo proporciona um estímulo ao raciocínio do aluno-professor, tornando-o um profissional crítico e capaz, preparado para trabalhar em sala de aula com noções elementares vistas na graduação, somado ao conhecimento matemático em um estágio mais elevado em relação aos demais níveis de ensino. Tais argumentos reforçam que o docente deve compreender que o ato de ensinar não se baseia apenas na posse de conhecimentos prévios de determinados assuntos, mas também exige pesquisa e curiosidade sobre os mesmos. “Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino”. (FREIRE, 2015, p. 30)

A resposta do Docente 14 descreve alguns dos conteúdos que o Cálculo permite trabalhar na Educação Básica como comportamento de funções, taxa de variação, áreas e volumes.

O fato do Cálculo ser uma disciplina moderna, com aplicações em diversas áreas da ciências, é destacado pelo Docente 12:

> Penso que a disciplina Cálculo Diferencial e Integral é fundamental na formação de qualquer professor de Matemática principalmente por estar relacionada às questão modernas na Ciência e Tecnologia e ao próprio

> desenvolvimento de temas da Educação Básica como números reais, números complexos e o estudo de funções. Sem uma formação básica em Cálculo que leve em conta os aspectos históricos do desenvolvimento da ciência e tecnologia nos últimos 400 anos, como esse professor seria capaz de problematizar os temas relevantes da Educação Básica? Quanto a bibliografia, essa peca por sua excessiva tecnicalidade. Sugiro, como fazemos no nosso curso, a inclusão de temas ligados ao desenvolvimento da Matemática e sua relação com todas as outras ciências. (D12)

Observa-se que a resposta do Docente 12 preconiza a ideia do Cálculo relacionar-se com questões modernas da Ciência e Tecnologia bem como temas da Educação Básica citados acima, Ávila (1991), reforça essa ideia:

> O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2° grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. (ÁVILA, 1991, p. 2)

Ainda de acordo com o respondente, também é importante o professor levar em consideração os aspectos históricos e a formulação de problematizações com temas relevantes. Termina seu comentário sugerindo a inclusão nos cursos de Licenciatura, de temas ligados ao desenvolvimento da Matemática e sua relação com outras disciplinas, embora não cite quais temas e quais disciplinas.

O Docente responsável pela resposta 3, indicou todos os itens da Questão 1, além de inserir outros conteúdos. Na Questão 2, assinalou as bibliografias de Um Curso de Cálculo – Hamilton Luiz Guidorizzi, e O Cálculo com Geometria Analítica – Louis Leitthold, e também incluiu mais livros. Na Questão 3, reforçou a importância do Cálculo na formação do professor de Matemática, exemplificando suas aplicações na Educação Básica:

> Para Licenciatura, importante o Teorema de Green (que é o caso planar do Teorema de Stokes), com o qual pode-se justificar o perímetro de uma coroa circular, por exemplo, e o Teorema da Divergência no caso 2D. O tópico Integral de superfície, juntamente com os Teoremas de Gauss e Stokes (caso espacial), penso que pode ser dado como informação e não necessariamente cobrado como formação (na Licenciatura).
> Gosto como escreve o saudoso Ávila em: Introdução ao Cálculo, e em Cálculo das funções de uma variável - volumes 1 e 2, todos da LTC; bem como "Análise Matemática para Licenciatura" da Edgard Blucher. (Thomas e Flemming são bem vindos, complementares).
> (Sim) O estudo detalhado do comportamento das funções é muito importante para preparar um futuro professor de Matemática. No dia-a-dia nos deparamos com problemas que podem ser modelados por equações Matemáticas e cujas técnicas de soluções podem requerer noções de limites (para visualizar o comportamento da variável em torno de um valor específico ou para valores suficientemente grandes, etc), noções de derivadas (taxa de variação de uma dada propriedade com relação a uma variável; uso da diferencial e também da expansão em Taylor para aproximações; otimização de problemas); noções de integral (Cálculo de áreas, volumes de regiões e sólidos irregulares; e diversas aplicações da derivada, se olhadas por outro

> ponto de vista podem ser resolvidas via integral, como exemplo simples: posição $s(t)$ no instante t, obtém-se a velocidade $v(t)$ no instante t. Por outro lado, se você conhece uma velocidade $v(t)$ em um intervalo de tempo $a \leq t \leq b$, basta integrar neste intervalo para obter exatamente qual foi o deslocamento $(b) - s(a)$ (Teorema Fundamental do Cálculo). Usando este raciocínio, pode-se resolver diversos problemas com o uso da integral, que não seja apenas áreas e volumes - para isso, gosto do livro da Deborah Hughes - Hallet et al., Cálculo e Aplicações, Ed. Edgard Blucher Ltda, 1999. Integral de linha amarrada com o Teorema de Green resolve diversos problemas práticos, exemplo uma questão no ENADE 2014 para Licenciatura que tinha um contexto de uma região com lago, etc..., em que o problema era resolvido pelo Cálculo Vetorial (noções de função potencial, integral de linha e teorema de Green). Portanto, estudar os tópicos acima na Licenciatura é primordial para um professor de Matemática. (D3)

O Docente 3 lançou uma série de argumentos sobre o modo pelo qual os conceitos estudados na disciplina de Cálculo justificam os conteúdos ministrados na Educação Básica. Comentou na Questão 1, que os tópicos de Integral de Superfície juntamente com o Teorema de Gauss e Stokes deveriam ser dados como informação na Licenciatura, e não cobrados. Ressalta situações em que o professor necessita da noção de limite, derivada e integral para articular problemas e ainda, exemplifica tais situações.

De acordo com os dados coletados, observa-se que apenas um dos respondentes considerou a não obrigatoriedade da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, e este, contraditoriamente (do ponto de vista desta autora), destacou “O Cálculo além de permitir uma base teórica (a Análise Matemática) também permite um leque de aplicações”. Ou seja, com esta afirmação fica subentendida a importância dos conteúdos de Cálculo, inseridos no contexto da Análise.

Diante do cenário anteriormente apresentado, na concepção dos docentes entrevistados, pode-se afirmar que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é considerada indispensável para o curso de Licenciatura em Matemática. Dessa forma, partindo do fato de que é importante e essencial ter um conhecimento amplo e aprofundado dos conteúdos que são ministrados em sala de aula, faz-se necessário buscar e examinar mais a fundo o que isto significa (SAVIOLI; CARVALHO; ELIAS,2015).

5 APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO BÁSICO

A formação do professor de Matemática suscita o interesse de muitos pesquisadores brasileiros. Nos trabalhos de Fiorentini (2005) e Lins (2005), por exemplo, encontram-se estudos envolvendo o trabalho docente dos formadores de professores junto aos Cursos de Licenciatura e também estudos que indicam a existência de disciplinas de conteúdo específico desarticuladas da prática docente do futuro professor. Em Moreira, Cury e Vianna (2005) e Santos e Morelatti (2013), por sua vez, são discutidos o papel da Análise Real e da Álgebra, respectivamente, na formação do futuro professor.

Dentre os objetos de estudo se destaca a contribuição das disciplinas específicas para a prática docente dos professores de Matemática quando em sala de aula da Educação Básica. Conforme indica Lins (2005, p. 117) “A existência de cursos de conteúdo matemático (Cálculo, por exemplo), desarticulados teórica e praticamente do que seja a profissão do professor de Matemática, se apresenta como um enorme desafio para a comunidade de formadores”.

Vale registrar novamente que neste trabalho o interesse recai sobre os conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral previstos nos programas das disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática da Unesp, conforme descriminados na Seção 3. Certamente, estes conteúdos têm intersecção com aqueles constantes dos programas da disciplina de Análise Real (que também integram a matriz curricular da maioria das Licenciaturas em Matemática), a não ser pelo enfoque e profundidade com que são tratados. Na verdade, os conceitos introdutórios envolvendo limites, derivadas e integrais, que são tratados em Análise, são abordados nas disciplinas de Cálculo.

Na Seção anterior, os argumentos lançados pelos docentes que se manifestaram acerca da obrigatoriedade do Cálculo na formação do professor de Matemática da Educação Básica, defendem a possibilidade de explorar os conceitos estudados quando do ensino de determinados conteúdos do Ensino Fundamental e Médio.

Com base nesta ideia, nesta seção são apresentados conteúdos da Educação Básica onde alguns conceitos do Cálculo Diferencial e Integral podem ser aplicados, de forma direta e indireta, sendo estes: progressão geométrica, radianos, função afim, função quadrática, coeficiente angular da reta tangente, taxa de variação, cálculo de áreas e volumes.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para o Ensino Médio buscam sistematizar elementos que contribuem para o desenvolvimento pessoal, social e profissional do aluno. Os conteúdos de Matemática apresentados em toda extensão escolar devem ser interligados com outras áreas do conhecimento, propiciando uma visão ampla e científica dos patamares em que a Matemática transcende:

> Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 2002, p.40-41)

Diante dessa visão os conteúdos ministrados na disciplina de Matemática devem ser aprofundados, evidenciando suas aplicabilidades.

Ao pesquisar sobre os conteúdos propostos por três livros didáticos do Ensino Médio, “Matemática: ciência e aplicações” – Gelson Iezzi, et al., “Matemática” - Luiz Roberto Dante e “Caderno do aluno” - Governo do Estado de São Paulo, foram identificados tópicos relativos aos conceitos do Cálculo Diferencial Integral, entretanto, esses temas passam despercebidos pelos professores, isso ocorre muitas vezes pela falta de domínio do conteúdo e pelo mau julgamento de que o conceito não está ligado aos conteúdos ministrados em sala de aula.

De acordo com Ávila (1991, p. 2), “É perfeitamente possível, em uma única aula, introduzir a noção de reta tangente a uma curva e a de derivada de uma função [...]”. O autor continua o texto ressaltando a importância de que a introdução da derivada venha acompanhada de suas aplicações:

> Uma vez aprendido que a derivada é o declive da reta tangente, o aluno entenderá facilmente, com apelo à intuição geométrica, que uma função é constante se sua derivada é zero. Daí segue que funções *que tenham* a mesma derivada *diferem por uma constante,* ou seja, uma é igual à outra mais uma constante. Isso permite obter, facilmente a equação da velocidade a partir do dado de que a aceleração é constante; e também a equação horária do movimento, fazendo raciocínio análogo sobre a equação da velocidade. (ÁVILA, 1991, p. 2)

Contextualizando as palavras do autor, o ensino da derivada é relevante para a compreensão das propriedades da reta tangente e funções, abrangendo sua aplicabilidade e em que áreas são trabalhadas, encaixando-se nas propostas dos PCN já citadas anteriormente.

Grande parte dos alunos, ao se depararem com os conteúdos de Cálculo no primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática, apresentam dificuldades que evidenciadas pelo alto índice de retenção que é característico dessas disciplinas. Este fato não é exclusivo destes cursos mas, de todos os cursos nas áreas de Ciências Exatas em geral.

A escolha do tema aqui trabalhado ocorre frente às dúvidas de futuros professores, alunos dos cursos de Licenciatura de Matemática, que se deparam com conteúdos apresentados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral presentes na matriz curricular e se questionam em que situações podem associar os conceitos da derivada com os conteúdos propostos na Ensino Básica.

5.1 Limite

O conceito de limite está relacionado à ideia de tendência, convergência. A noção intuitiva que podemos ter é imaginar uma variável/grandeza cujos valores estão se aproximando de outro valor.

O limite de $f(x)$, quando x tende a p é igual a L:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L.$$

A expressão indica que, quando x tende a p (se aproxima de p), $f(x)$ tende a L. A interpretação geométrica pode ser entendida de acordo com as Figuras 8 e 9.

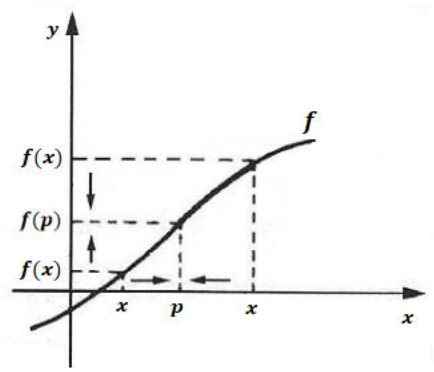

Figura 8:Quando$x$tende ap,$f(x)$tende a$f(p)$:$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$

Fonte: Guidorizzi, H. L., 2001, p.55

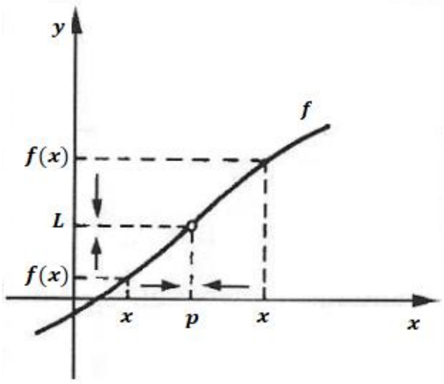

Figura 9: Quando$x$tende a $p, f(x)$tende aL: $\lim_{x\to p} f(x) = L$

Fonte: Guidorizzi, H. L., 2001, p.55

5.1.1 Soma dos termos de um P.G. infinita

O livro Matemática Ciência e Aplicações da primeira série do Ensino Médio (IEZZI, et al., 2017) traz o conceito de soma de uma P.G. infinita:

Na P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, com $-1 < q < 1$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Dizemos, então, que a soma dos termos da P.G. infinita é igual a $\frac{a_1}{1-q}$.

Na Situação de Aprendizagem 4 do Caderno do Professor entre as competências e habilidades que o aluno deve desenvolver está "compreender a noção intuitiva de limite de uma função".

No decorrer do conteúdo é verificado um exemplo que o autor utiliza:

> A PG $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$, por exemplo, tende a zero, assim como a progressão $-3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots$ Nesses dois casos, em que a razão é um número real entre -1 e 1, é possível determinar o termo que desejarmos, mas ele poderá ser tão pequeno que, dependendo das exigências, poderá ser considerado nulo. O centésimo termo da primeira sequência, por exemplo, é igual a um número que tem 30 zeros após a vírgula, antes de aparecer o primeiro algarismo não nulo. É um número pequeno, se for comparado à espessura de um fio de cabelo, mas não é pequeno, se comparado às dimensões atômicas. Aumentando ainda mais o número de termos, além dos cem, chegará um momento em que o resultado será pequeno mesmo quando comparado com a medida de raios atômicos. Mas o termo ainda não será nulo e poderá continuar a ser diminuído. Nesse raciocínio, estão contidas as ideias de continuidade e de limite. (São Paulo, 2014-2017, p.48)

Na Situação de Aprendizagem 4 do Caderno do Aluno é proposta a seguinte atividade:

> **Desafio!**
> O triângulo ABC da figura a seguir é equilátero de lado $1u$. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos o segundo triângulo PQR.Unindo os pontos médios dos lados PQR, obtemos o terceiro triângulo STU, e assim

sucessivamente. Determine a soma dos perímetros dos infinitos triângulos construídos por esse processo.

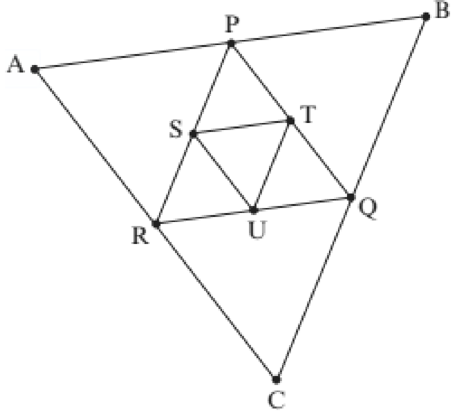

Figura 10: Representação dos triângulos equiláteros ABC; RPQ e STU.
Fonte: SÃP PAULO, 2014 -2017, p. 53.

a) Quanto mede o lado PQ do triângulo PQR? E os lados PR e RQ?
b) Qual é o perímetro dos triângulos ABC, PGR e STU?
c) Escreva uma sequência numérica cujos termos são os perímetros dos triângulos ABC, PQR, STU e de mais outros dois triângulos construídos segundo o mesmo critério. (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 52-53)

Respondendo ao desafio temos os seguintes resultados:

a) Quanto mede o lado PQ do triângulo PQR? E os lados PR e RQ?

Como P é ponto médio de AB e Q é ponto médio de BC, temos que o lado PQ é paralelo ao lado AC, portanto $PQ = \frac{AC}{2}$, ou seja, $PQ = \frac{1}{2}u$. No mesmo raciocínio chegamos que $PQ = PR = RQ = \frac{1}{2}u$.

b) Qual é o perímetro dos triângulos ABC, PGR e STU?

$$ABC = 1u + 1u + 1u = 3u,$$

$$PGR = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u = \frac{3}{2}u,$$

$$STU = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u = \frac{3}{4}u.$$

c) Escreva uma sequência numérica cujos termos são os perímetros dos triângulos ABC, PQR, STU e de mais outros dois triângulos construídos segundo o mesmo critério.

$$\left(3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}\right).$$

Depois da realização do desafio, o professor pediria aos alunos que somassem os perímetros dos triângulos obtidos:

Após esses Cálculos, o professor poderia solicitar que os alunos fizessem suas conjecturas a respeito deles, procurando responder a questão: *O que acontece à soma se as parcelas forem aumentando com os perímetros de outros triângulos da sequência?*

É importante discutir com a turma que as somas aumentariam, com o acréscimo de novas parcelas, mas esse crescimento é cada vez menor.
O uso da fórmula da soma dos termos de uma PG pode ampliar essa discussão:

$$S = \frac{a_n . q - a_1}{q - 1} = \frac{a_n . \frac{1}{2} - 3}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{a_n}{2} - 3}{-\frac{1}{2}}.$$

A soma assim obtida está em função de a_n, aqui considerado o último termo. O questionamento a seguir é sobre o que ocorre com a_n, à medida que n cresce muito. As respostas dos alunos tendem a caminhar no sentido da intuição de que o último termo da sequência, supondo grande número de termos, será praticamente zero ou, como o professor poderá comentar, "tenderá a zero". Assim, por meio da ideia de limite, pode-se perguntar aos alunos como fica a expressão da soma, uma vez que a_n é praticamente nulo. O correto será, nesse momento, substituir "S" por "$\lim_{n\to\infty} S$".

$$\lim_{n\to\infty} S = \frac{\frac{a_n}{2} - 3}{-\frac{1}{2}} = \frac{0 - 3}{-\frac{1}{2}} = 6.$$

(SÃO PAULO, 2014-2017, p.51)

O objetivo dessa atividade é introduzir a noção intuitiva de limite de uma sequência por meio da soma dos termos de uma P.G infinita, de modo que os termos se tornariam cada vez menores, tão próximos quanto se queira de zero.

5.1.2 Radiano

O radiano pode ser entendido como a razão entre o comprimento de um arco e o seu raio, seu símbolo é o $rad.$ Pode-se entender que $1\ rad$ é o ângulo definido pela medida de um arco de circunferência com o mesmo comprimento que o raio:

$$2\pi = 360°$$

$$1\ rad = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \cong 57{,}29577951°.$$

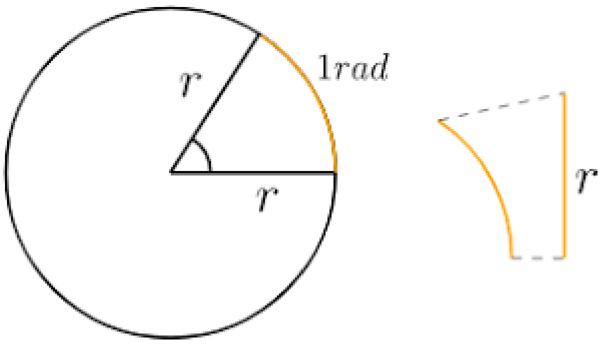

Figura 11: Interpretação geométrica de1 *rad.*
Fonte: <https://matika.com.br/radianos/definicao-do-radiano> Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

Nas funções trigonométricas os ângulos devem ser representados em radianos.

Em uma de suas vídeo-aulas de Cálculo, o professor Claudio Possani (2015) enfatiza a importância do radiano para o conceito do limite fundamental $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$

Afirma que "o radiano é uma invenção do Renascimento para fazer Cálculo"[2]. O $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$ só é 1 se x estiver em radianos.

Acrescenta ainda que, se o professor de Matemática dispuser dessa informação, poderá dizer aos seus alunos quando ensinar radianos "que o radiano é recente, ao contrário do grau, e que tem uma razão de existir", e esta razão está ligada ao desenvolvimento do Cálculo.

É possível demonstrar este limite utilizando a Figura 12, na qual o setor circular tem raio 1, e com dois triângulos com um de seus ângulos internos medindo$0 < x < \frac{\pi}{2}$ (em radianos):

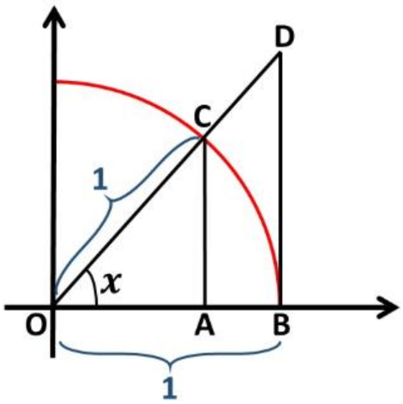

Figura 12: Setor circular de $r = 1$.
Fonte: <https://www.dicasdecalculo.com.br/conteudos/limites-e-continuidade/limites-fundamentais/>
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

É possível perceber a relação: $\overline{AC} \leq B\hat{O}C \ \leq \overline{BD}$.

Do triângulo AOC temos:

$$sen(x) = \frac{\overline{AC}}{\overline{\overline{OC}}} = \frac{\overline{AC}}{1} \Rightarrow sen(x) = \overline{AC}.$$

Do triângulo BOD temos:

$$tg(x) = \frac{\overline{BD}}{\overline{\overline{OB}}} = \frac{\overline{BD}}{1} \Rightarrow tg(x) = \overline{BD}.$$

Substituindo as relações encontradas na desigualdade $\overline{AC} \leq B\hat{O}C \ \leq \overline{BD}$, temos:

$$sen(x) \leq x \ \leq tg(x).$$

---

[2] Informação fornecida pelo professor Dr. Claudio Possani em uma vídeo aula: Cálculo I - Aula 01 - A importância do Cálculo na formação do professor de Ciências, para a Universidade Virtual do Estado de São Paulo – UNIVESP- 2015.

Dividindo a desigualdade acima por $sen(x)$:

$$\frac{sen(x)}{sen(x)} \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{tg(x),}{sen(x)}$$

$$1 \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}.$$

Invertendo as frações temos;

$$1 \geq \frac{x}{sen(x)} \geq \cos(x).$$

Aplicando o limite quando $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} 1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{x}{sen(x)} \geq \lim_{x\to 0} \cos(x),$$

$$1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{x}{sen(x)} \geq 1.$$

Temos que $\lim_{x\to 0} \frac{x}{sen(x)} = 1.$

Conhecendo esta relação do limite fundamental com os radianos, o professor de Matemática não precisa necessariamente ensinar Cálculo para seus alunos, mas explicar que alguns conceitos como por exemplo o de radiano, não surgiram do nada, mas sim existe uma razão muito importante para sua existência, assim como outros conceitos em Matemática.

5.2 Derivada

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da taxa de crescimento de uma população, da taxa de crescimento ou decrescimento econômico de um país, da taxa de mortalidade infantil, variação das temperaturas, velocidade a qual os corpos e objetos se movimentam, ou seja, calcular a derivada, é calcular a rapidez que tal acontecimento varia.

> A derivada é a taxa em que $f(x)$ está variando, como comparada com a variação de x – a taxa de variação de $f(x)$ em relação x. Geometricamente, a taxa de variação é a inclinação da tangente ao gráfico de f no valor x. Ele pode ser aproximado achando-se a inclinação da secante – a linha que corta o ponto de f em dois pontos próximos, corresponde a x e $x+h$, respectivamente, onde h é pequeno. A inclinação da secante é $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Agora suponhamos que h se torne muito pequeno. Então a secante aproxima-se da tangente ao gráfico em x. Assim, em certo sentido a inclinação pedida – a derivada de f em x é o limite dessa expressão quando h se torna tão pequeno quanto se queira. (STEWART, 2014, p. 142)

Interpretando a definição acima temos: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$.

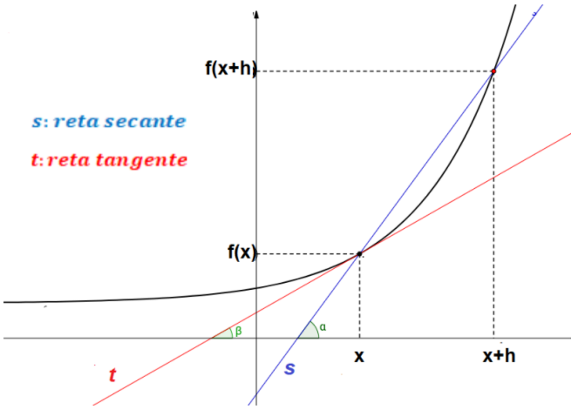

Figura 13: Interpretação geométrica da derivada
Fonte: <http://tananyag.geomatech.hu/m/52612> Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

5.2.1 Tangente

Iezzi et al. (2017, p. 216) introduz o conceito de tangente como declividade de uma rampa:

> A declividade de uma rampa é a razão entre o desnível a ser vencido e o comprimento horizontal da rampa, como mostra a figura seguinte:

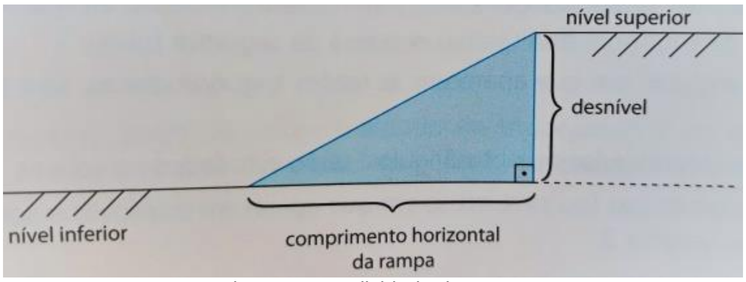

Figura 14: Declividade da rampa
Fonte: IEZZI, 2017, p.216

> Podemos também pensar na declividade de uma rampa como a razão entre o deslocamento vertical e o deslocamento horizontal experimentados ao se caminhar sobre a rampa.
> $declividade = \frac{desnível}{comprimento\ horizontaldarampa} = \frac{deslocamentovertical}{deslocamento\ horizontal}$ (IEZZI et al., 2017, p.206)

Dante (2009, p.188) faz uma abordagem semelhante, associa a ideia de tangente com o índice de subida (vide Figura 15): “Para cada ponto P alcançado na subida, temos um percurso, um afastamento e uma altura”.

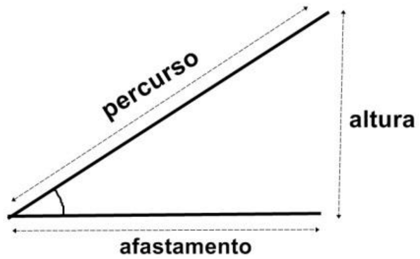

Figura 15: Relação em percurso e afastamento
Fonte: <http://mathemaniacos.blogspot.com/2012/09/trigonometria-introducao-sen-cos-e-tg.html>
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

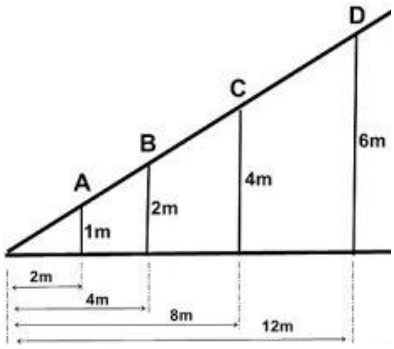

Figura 16: Relações métricas entre percurso, afastamento e altura
Fonte: <http://mathemaniacos.blogspot.com/2012/09/trigonometria-introducao-sen-cos-e-tg.html>
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

Para cada um dos pontos da Figura 16, a razão entre altura e o afastamento correspondente é dada por:

Ponto A: $\frac{altura}{afastamento} = \frac{1\,m}{2\,m} = \frac{1}{2}$.

Ponto B: $\frac{altura}{afastamento} = \frac{2\,m}{3\,m} = \frac{1}{2}$

Ponto C: $\frac{altura}{afastamento} = \frac{4\,m}{8\,m} = \frac{1}{2}$

Ponto D: $\frac{altura}{afastamento} = \frac{6\,m}{12\,m} = \frac{1}{2}$

Note que a razão entre a altura e o afastamento, para cada ponto de uma mesma subida é uma constante (é sempre a mesma). No exemplo dado, essa constante é $\frac{1}{2}$e a ela damos o nome de *índice de subida*. (DANTE, 2009, p.188)

$$\text{índice de subida} = \frac{altura}{afastamento}.$$

Outra maneira de definir tangente é pelo coeficiente angular da reta: “Consideramos uma reta r de inclinação α em relação ao eixo x.O coeficiente angular ou declividade dessa reta r é o número real m que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α, ou seja: $m = tg\ \alpha$”. (DANTE, 2009, p.400)

A definição acima pode ser interpretada de acordo com a Figura17:

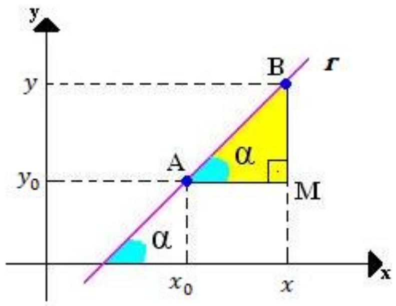

Figura 17: Cálculo do coeficiente angular
Fonte: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/calculo-coeficiente-angular.htm>
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

O coeficiente angular da reta pode ser calculado pela razão entre as distancias do ponto B ao ponto M, e do ponto A ao ponto M:

$$\frac{d_{BM}}{d_{AM}} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = m,$$

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Temos assim a equação da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e possui declividade m.

5.2.2 Função do 1° Grau – Função Afim

Uma função polinomial do 1º grau é uma função do tipo $f(x) = ax + b,$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Seu gráfico é uma reta podendo ser crescente, decrescente ou constante.

5.2.2.1Taxa de variação da função do primeiro grau

Na Situação de Aprendizagem 3 do Caderno do Aluno da 3ª série do Ensino Médio o autor conceitua taxa de variação da função de primeiro grau da seguinte maneira:

> As funções de 1° grau, expressas na forma $f(x) = ax + b$, são crescentes $(a > 0)$ ou decrescentes $(a < 0)$, sendo que o coeficiente a representa a variação em $f(x)$, quando x aumenta em 1 unidade a partir de qualquer valor inicial. O valor de a é chamado taxa de variação unitária de $f(x)$, ou somente taxa de variação de $f(x)$. Naturalmente, se $a = 0$, ou seja, se a taxa de variação é zero, então a função $f(x)$ é constante: $f(x) = 0$.

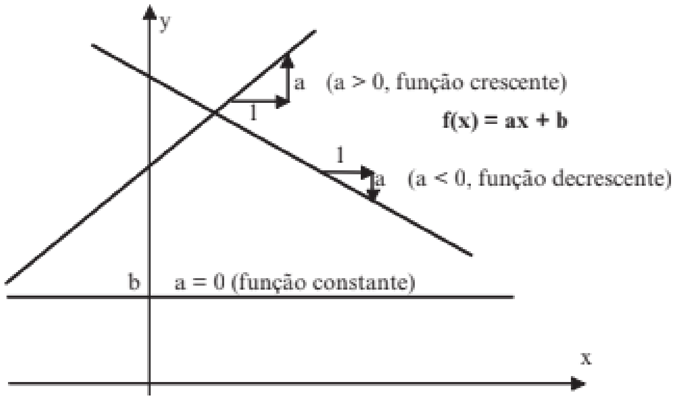

Figura 18: Taxa de variação de $f(x)$
Fonte: SÃO PAULO, p. 26, 2014- 2017.

Entre as competências e habilidades que o aluno deve desenvolver estão: “compreender fenômenos que envolvem crescimento ou decrescimento, bem como expressar a rapidez com que crescem ou decrescem a partir de qualidades expressas nos gráficos das funções representadas.” (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 29).

De acordo com Dante (2009, p.55) “O parâmetro a da função $f(x) = ax + b$ é chamado de taxa de variação (ou taxa de crescimento)”.

Para obter a basta tomarmos: $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, fazendo $f(x_2)$ - $f(x_1)$, temos:

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b),$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1),$$

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

“A taxa de variação é sempre constante para cada função afim, e isso é uma característica importante das funções afins”. (DANTE, 2009, p.55)

Iezzi et al, (2017, p. 65) define a taxa de variação média de uma função quadrática como: “Seja f uma função definida por $y = f(x)$; sejam x_1 e x_2 dois valores do domínio de f, $(x_1 \neq x_2)$, cujas imagens são, respectivamente, $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

O quociente $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ recebe o nome de taxa de variação da função f, para x variando de x_1 até x_2.

Exemplo: Seja f uma função afim, definida por $y = -2x + 1$. No gráfico apresentado na Figura 14estão indicados alguns pontos da função.

Quadro 11: Taxa de variação da função $y = -2x + 1$

Intervalo	$\Delta y = y_2 - y_1$	$\Delta x = x_2 - x_1$	Taxa de variação = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
D a E	$3 - 2 = 1$	$-1 - (-0{,}5) = -0{,}5$	$\frac{1}{-0{,}5} = -2$
E a B	$2 - 1 = 1$	$-0{,}5 - 0 = -0{,}5$	$\frac{1}{-0{,}5} = -2$
B a A	$1 - 0 = 1$	$0 - 0{,}5 = -0{,}5$	$\frac{1}{-0{,}5} = -2$
A a F	$0 - (-1) = 1$	$0{,}5 - 1 = -0{,}5$	$\frac{1}{-0{,}5} = -2$

Fonte: Elaborado pela autora

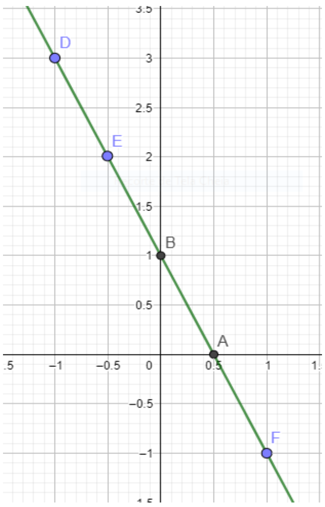

Figura 19: Gráfico: $f(x) = -2x + 1$
Fonte: Elaborado pela autora

Verifica-se que a taxa de variação da função dada é -2.

“O nome *taxa de variação* é referente à relação entre a variação da grandeza y e a variação da grandeza x”. (DANTE, 2009, p.59)

A taxa de variação média é facilmente encontrada derivando as funções de primeiro grau, observe:

Exemplo 1: $y = -2x + 1 \Rightarrow y' = -2$.

O parâmetro a pode ser encontrado pelo quociente Δy por Δx ou pela derivada y':

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Iezzi et al. (2017, p. 75) faz um elo entre Matemática e Física introduzindo os conceitos de velocidade como a taxa de variação da posição em relação ao tempo e aceleração como a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo:

> 1ª Situação
> Viajando em um ônibus para a praia, Cléber observou que exatamente às 10h o ônibus passou pelo km 56 da rodovia; às 11h 30min, o ônibus passava pelo km 191da mesma rodovia.
> Observe que, nesse período de $1{,}5$h $(11{,}5$ h - 10h$)$, a variação da posição ocupada pelo ônibus é 191 km – 56 km = 135 km.
> A razão $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(191-56)km}{(11{,}5-10)h} = \frac{135\ km}{1{,}5\ h} = 90km/h$ representa a taxa média de variação da posição ou variação do espaço (Δs) em relação ao tempo (Δt) da viagem.
> Esse quociente é a conhecida velocidade escalar média. Isso não significa, necessariamente, que o ônibus manteve a velocidade de 90 km/h em todo o percurso. Em alguns trechos ele pode ter ido mais rápido ou mais devagar. O valor da velocidade escalar média nos da apenas uma ideia global sobre o movimento do ônibus nesse período.
> 2ª Situação
> Um carro esta viajando em uma via expressa. Em um certo momento, quando o velocímetro apontava a velocidade de 72km/h, o motorista aciona os freios ao observar um congestionamento à sua frente. Em 4 s de frenagem, o veículo diminuiu uniformemente a velocidade até parar.
> Vamos calcular a taxa de variação da velocidade, considerando o intervalo de tempo decorrido do instante em que o motorista aciona os freios até a parada:
> $$v_1 = 72\ km/h = \frac{72000\ m}{3600\ s} = 20\ m/s$$
> $v_2 = 0\ km/h$ou$0\ m/s$ (parada para o veículo após 4 segundos)
> A taxa é:
> $$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0-20}{4-0} = -5m/s^2$$
> Isso significa que a velocidade do carro variou (diminuiu – veja o sinal negativo obtido), em média, $5\ m/s$ a cada segundo. Esse quociente representa a taxa média de variação da velocidade em relação ao tempo e é conhecido como aceleração escalar média. (IEZZI et al, p.69, 2017)

Nos livros de Física podemos encontrar as expressões que representam a posição em relação ao tempo $(s(t))$ do movimento uniforme, e a velocidade em função do tempo $(v(t))$ do movimento uniformemente variado:

$$s(t) = s_0 + vt,$$

$$s'(t) = v,$$

$$v(t) = v_0 + at,$$

$$v'(t) = a\,.$$

Observe que ao derivar a função da posição em relação ao tempo $(s(t))$, encontramos a velocidade em um dado instante, ao passo que derivamos a função da velocidade em função do tempo $(v(t))$, encontramos a aceleração.

5.2.3 Função do 2° Grau

Uma função quadrática ou função polinomial do 2° grau é qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais com $a \neq 0$.

5.2.3.1 Taxa de variação da função do segundo grau

Dante (2009) define taxa de variação de uma função quadrática como:

> Diferente da função afim, a taxa de variação da função quadrática não é constante. Ela varia conforme o ponto P da parábola, e é dada por $2ax_0 + b$, em que x_0 é a abscissa de P. Por isso dizemos *taxa de variação no ponto*P. Geometricamente, a taxa de variação da função quadrática em um ponto P é a inclinação da reta tangente à parábola $y = ax^2 + bx + c$ no ponto $P(x_0, y_0)$. (DANTE, 2009, p. 93)

A definição acima pode ser interpretada de acordo com a Figura 20, em que:

$$t = 2ax_0 + b.$$

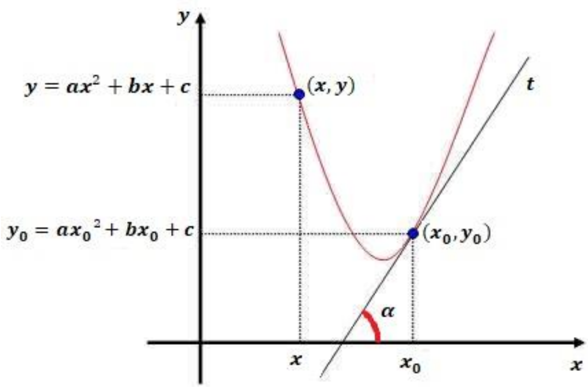

Figura 20: Inclinação da reta t em relação ao ponto(x_0, y_0) pertencente à parábola $y = ax^2 + bx + c$
Fonte: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/taxa-variacao-funcao-2-grau.htm>
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

A reta$t$ tangencia a parábola no ponto $P(x_0, y_0)$. Observe que a $t = 2ax_0 + b$ pode ser encontrada calculando a primeira derivada da função $y = ax^2 + bx + c$ no ponto dado:

$$y' = 2ax + b.$$

O Quadro 12 exemplifica o cálculo da taxa de variação de uma função quadrática definida por: $y = x^2$. No gráfico estão indicados alguns pontos da função:

Quadro 12: Taxa de variação da função $y = x^2$

Intervalo	$\Delta y = y_2 - y_1$	$\Delta x = x_2 - x_1$	Taxa de variação = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
A a B	$1 - 0 = 1$	$1 - 0 = 1$	$\frac{1}{1} = 1$
B a C	$4 - 1 = 3$	$2 - 1 = 1$	$\frac{3}{1} = 3$
C a D	$9 - 4 = 5$	$3 - 2 = 1$	$\frac{5}{1} = 5$
Intervalo	$\Delta y = y_2 - y_1$	$\Delta x = x_2 - x_1$	Taxa de variação = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
G a F	$4 - 9 = -5$	$-2 - (-3) = 1$	$\frac{-5}{1} = -5$
F a E	$1 - 4 = -3$	$-1 - (-2) = 1$	$\frac{-3}{1} = -3$
E a A	$0 - 1 = -1$	$0 - (-1) = 1$	$\frac{-1}{1} = -1$

Fonte: Elaborado pela autora

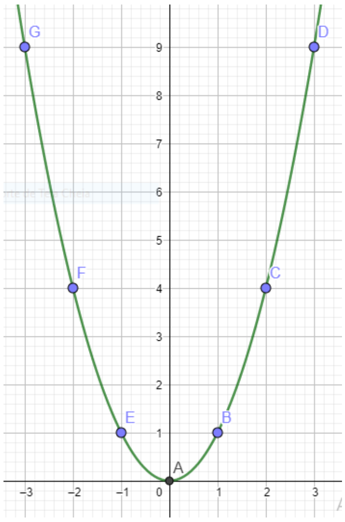

Figura 21: Gráfico da função $y = x^2$
Fonte: Elaborado pela autora

Observe no lado direito da Figura 21 que, ao passo que aumentamos uma unidade de x, os valores de y aumentam $1, 3$ e 5 unidades, respectivamente. Mas à medida que x aumenta uma unidade no lado esquerdo do gráfico, os valores de y diminuem $5, 3$ e 1 unidade.

De acordo com a definição de taxa de variação da função quadrática conseguimos calcular a reta tangente à parábola nos pontos dados, vejamos alguns exemplos:

- $B(1, 1)$ temos $x_0 = 1$, vamos calcular a inclinação a partir da definição:

$2ax_0 + b$, como $a = 1$ e $b = 0$, temos $2.1.1 + 0 = 2$.

Logo a inclinação no ponto $B(1,1)$ é 2.

Vamos calcular a reta tangente à função $y = x^2$ que passa pelo ponto $B(1,1)$cuja inclinação é 2. Da equação da reta tangente temos:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 1 = 2(x - 1)$$
$$y = 2x - 2 + 1$$
$$y = 2x - 1.$$

Portanto, a reta tangente ao ponto $B(1,1)$ é $y = 2x - 1$.

- $C(2,4)$, temos $x_0 = 2$, vamos calcular a inclinação a partir da definição:

$2ax_0 + b$, como $a = 1$e $b = 0$, temos $2.1.2 + 0 = 4$

Logo, a inclinação no ponto $C(2,4)$ é4. Vamos calcular a reta tangente à função $y = x^2$ que passa pelo ponto $C(2,4)$ cuja inclinação é 4: Da equação da reta tangente temos:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 4 = 4(x - 2)$$
$$y = 4x - 8 + 4$$
$$y = 4x - 4.$$

Portanto, a reta tangente ao ponto $C(1,1)$ é $y = 4x - 4$.

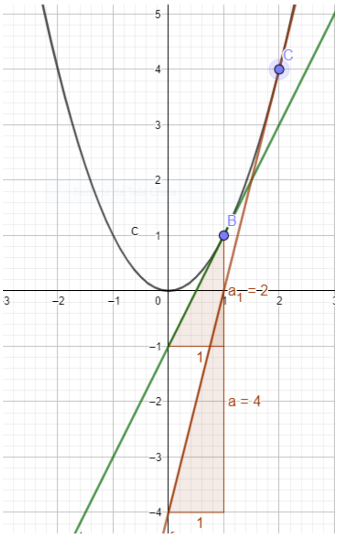

Figura 22: Retas tangentes a $y = x^2$nos pontos $B\ (1,1)$ e $C\ (2,4)$
Fonte: Elaborado pela autora

É possível encontrar a reta tangente ao gráfico de modo mais direto. Imagine uma curva e dois pontos pertencentes a essa curva (Figura 23):

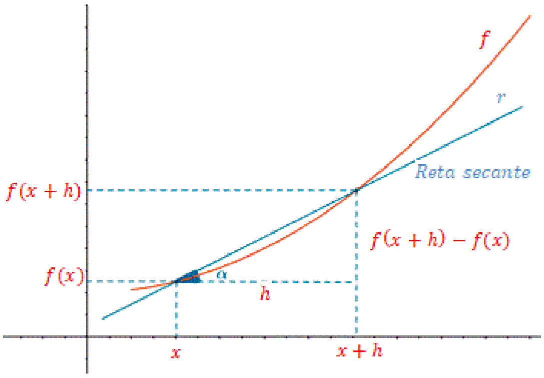

Figura 23: Representação da reta secante af
Fonte: <http://ltodi.est.ips.pt/projIIIEC/matematica/cxl06/02cxl06.htm>
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

Seja f uma curva e $(x, f(x))$, $(x+h, f(x+h))$ dois pontos pertencentes a esta curva, r é a reta secante a f. À medida que o intervalo h diminui os pontos ficam cada vez mais próximos, ou seja, a reta secante se aproxima da reta tangente a f:

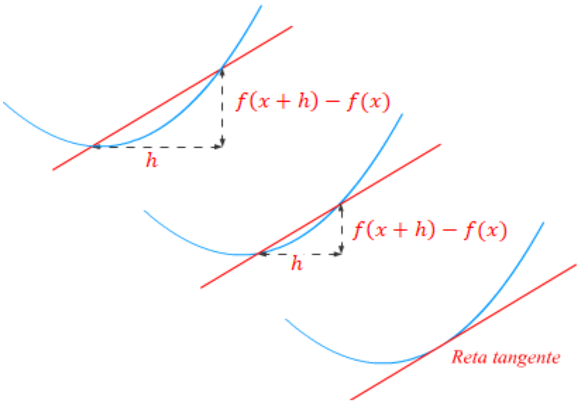

Figura 24: Aproximação da reta secante com a reta tangente
Fonte:<http://ltodi.est.ips.pt/projIIIEC/matematica/cxl06/02cxl06.htm>
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

Com o intervalo h cada vez menor, dizemos que h esta "tendendo a zero", matematicamente dizendo temos a expressão:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

A expressão acima nos fornece a taxa de variação instantânea da função no ponto dado. Calculando a taxa de variação da função $f(x) = ax^2 + bx + c$temos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(ax^2+2axh+ah^2+bx+bh+c)-(ax^2+bx+c)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2axh+ah^2+bh}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2ax+ah+b)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 2ax+ah+b = 2ax+a.0+b = 2ax+b.$$

Portanto $f'(x) = 2ax + b$.

Um exemplo prático é a função da posição em função do tempo do movimento uniformemente variado (MUV): $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$.

Derivando a função $s(t)$, encontramos a equação da velocidade em função do tempo do MUV:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$$

$$s'(t) = v_0 + at.$$

Derivando novamente, encontramos a aceleração:

$$s''(t) = a.$$

Pode-se concluir que a taxa de variação da posição em relação ao tempo é a velocidade, e taxa de variação da velocidade em relação ao tempo é a aceleração.

5.2.3.2 Ponto de máximo e mínimo de uma função quadrática

O vértice da parábola é o ponto em que a função muda de situação, crescente para decrescente ou de decrescente para crescente. É o ponto que representa o extremo da função, admite ponto de mínimo para a função caso $a > 0$, ou ponto de máximo da função caso $a < 0$.

Da função polinomial do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, seu gráfico é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y. O eixo de simetria do gráfico de uma função polinomial do segundo grau $y = f(x)$, é uma reta vertical que divide a parábola em duas partes simétricas.

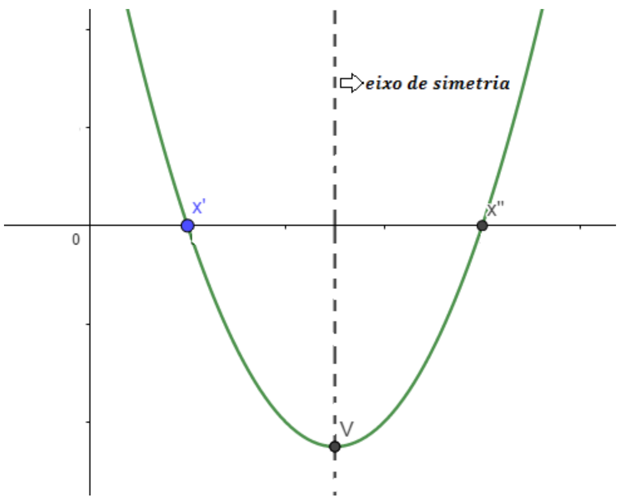

Figura 25: Eixo de simetria da parábola
Fonte: Elaborado pela autora

Observa-se que a reta pontilhada passa pelo vértice da parábola $V(x_v, y_v)$, entre as raízes x' e x'', paralela ao eixo y, sendo uma reta constante x_v. Para encontra-la basta calcular o ponto médio (meio) entre x' e x'':

$$x_v = \frac{x' + x''}{2} = \frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Logo, $x_v = -\frac{b}{2a}$. Para encontrar y_v basta substituir x_v em $y = ax^2 + bx + c$:

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

Chamando $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto, $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Na Figura 26, $a > 0$ e consequentemente a concavidade da parábola é voltada para cima, então a função assume seu valor mínimo no ponto$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. De modo análogo, quando $a < 0$ o valor máximo é assumido no ponto$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

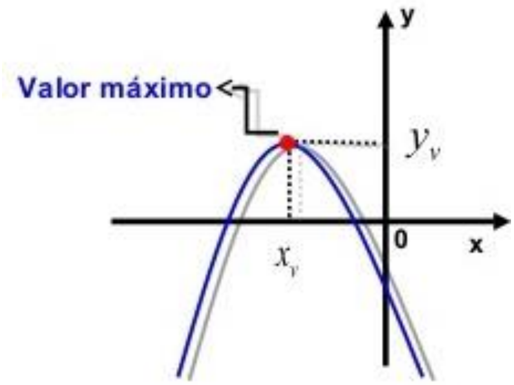

Figura 26: Ponto de máximo da parábola
Fonte: <https://www.slideshare.net/jatobaesem/25-aula-coordenadas-do-vrtice-da-parbola>
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

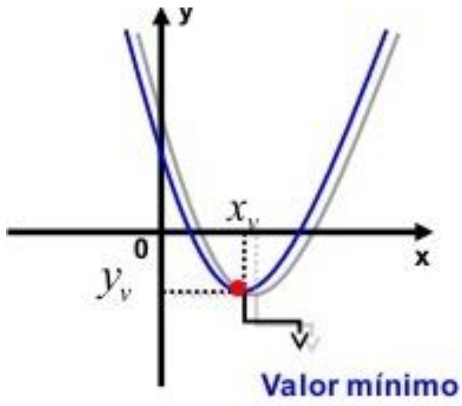

Figura 27: Ponto de mínimo da parábola
Fonte: <https://www.slideshare.net/jatobaesem/25-aula-coordenadas-do-vrtice-da-parbola>
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

Outra situação é quando a função não admite raízes reais, mas possui o vértice.

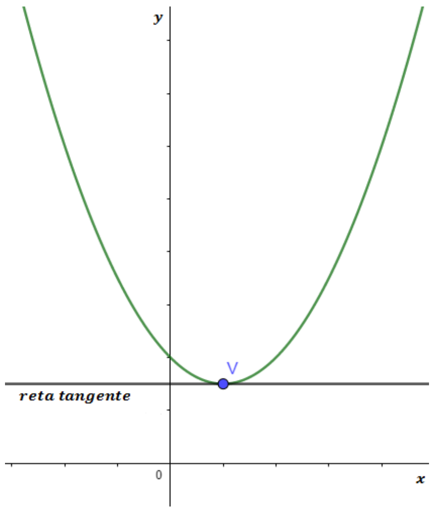

Figura 28: Reta tangente no ponto V
Fonte: Elaborada pela autora

Nota-se que no vértice (V) da parábola, a reta tangente é horizontal, portanto, sua inclinação é nula. Logo, tem – se que a derivada no ponto x_v é zero:

$$f'(x_v) = 0$$

$$f'(x_v) = 2ax_v + b$$

$$2ax_v + b = 0$$

$$x_v = \frac{-b}{2a}.$$

Para encontrar y_v, basta substituir x_v na função dada:

$$f(x_v) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c.$$

$$f(x_v) = a\left(\frac{-b^2}{2a^2}\right) - \frac{b}{2a}^{2} + c$$

$$f(x_v) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x_v) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$f(x_v) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Portanto, o vértice da parábola será $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

5.3 Integral

A integral tem muitas aplicações na Matemática e na física, em especial destacaremos o Cálculo de áreas e volumes.

O símbolo para a integral de uma função $f(x)$ definia num intervalo $[a, b]$ é

$$\int_a^b f(x)dx\ .$$

e lê-se “integral de a até b de $f(x)$ em relação a x”.

5.3.1 Área

É muito comum calcular áreas de figuras quando seus lados são retos. Essa tarefa não é tão fácil quando nos referimos ao cálculo de áreas de figuras cujos lados são curvos. Nesse caso podemos aproximar a área desejada somando as áreas de um conjunto de retângulos. Quanto maior o número de retângulos, melhor será a precisão da área a ser calculada.

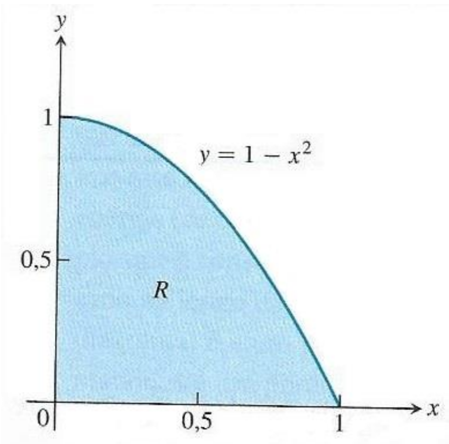

Figura 29: Área da região R
Fonte: THOMAS e GIORDANO, 2009, p.354.

A região R é encontrada abaixo da curva $y = 1 - x^2$, acima do eixo xe entre as retas $x = 0$ e $y = 1$. A área dessa região não pode ser encontrada com uma fórmula simples.

Usando dois retângulos de largura $\frac{1}{2}$ e alturas 1 e $\frac{3}{4}$, respectivamente, a altura de cada retângulo é o valor máximo da função $f(x) = y$, valor este que se obtém calculando o valor de $f(x)$ na extremidade da esquerda do subintervalo de $[0, 1]$ que forma a base dos retângulos.

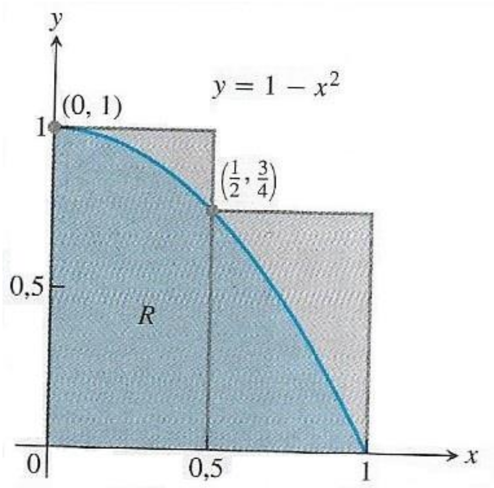

Figura 30: Aproximação da área da região R com dois retângulos
Fonte: THOMAS e GIORDANO, 2009, p.355.

A área total dos dois retângulos (A) que se aproxima da região R será:

$$A \approx 1.\frac{1}{2} + \frac{3}{4}.\frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

A estimativa para a área da região R é muito maior que a área real, pois os dois retângulos ultrapassam as medidas de R. Se fossem utilizados dois retângulos que não ultrapassassem essa região, a área encontrada seria menor do que a área real. Uma maneira de diminuir essa diferença é aumentar o número de retângulos.

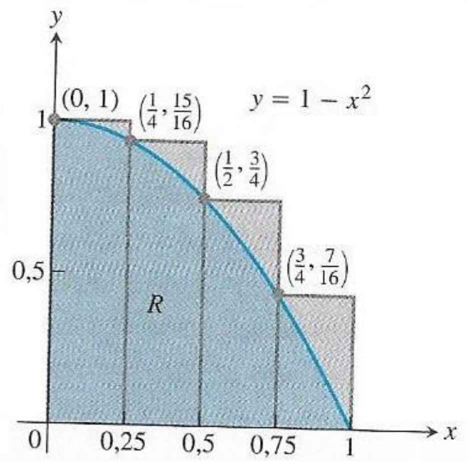

Figura 31: Aproximação da área da região R com quatro retângulos
Fonte: THOMAS e GIORDANO, 2009, p.355.

Usando quatro triângulos de larguras $\frac{1}{4}$ e alturas $\frac{63}{64}$, $\frac{55}{64}$, $\frac{39}{64}$ e $\frac{15}{64}$, respectivamente, sendo a altura de cada retângulo valores de $f(x)$ em pontos médios de suas bases o valor encontrado seria:

$$A \approx \frac{63}{64}.\frac{1}{4}+\frac{55}{64}.\frac{1}{4}+\frac{39}{64}.\frac{1}{4}+\frac{15}{64}.\frac{1}{4}=\frac{172}{256}=0{,}671875.$$

Pegando cada vez mais retângulos, cada um deles mais estreitos que os anteriores, a soma das áreas se aproximara cada vez mais da área real da região R. Em suma, para calcular a área de uma região curva:

> Primeiro, dividimos o intervalo em subintervalos tratando a função apropriada f como se fosse constante em cada subintervalo. Em seguida, multiplicamos a largura de cada subintervalo pelo valor de f em algum ponto dentro dele; depois somamos esses produtos. Se o intervalo $[a, b]$ for dividido em n subintervalos de igual largura $\Delta_x = (b-a)/n$, e se $f(c_k)$ for um valor de f em dado ponto c_k no intervalo k-ésimo, esse processo resultará numa soma finita com a seguinte forma:
>
> $$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x.$$
>
> O valor de c_k pode recair no valor máximo ou mínimo de f no k-ésimo subintervalo, ou a algum valor entre eles. O verdadeiro valor ficará em algum ponto entre as aproximações dadas pelas somas superiores e inferiores. (THOMAS e GIORDANO, 2009, p.362)

Para representar a soma das áreas utiliza-se o símbolo Σ(sigma):

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Quando as partições do intervalo $[a, b]$ (largura dos retângulos) vão se tornando cada vez menores (estreitos), dizemos que este valor está tendendo, se aproximando de zero. Em consequência, o número de retângulos está aumentando, ou seja, crescendo infinitamente, assim podemos escrever:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Foi Leibniz que introduziu a notação atual de integral:

> Ele visualizou as somas finitas $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$tornando- se uma soma infinita dos valores da função $f(x)$ multiplicados por larguras de subintervalos "infinitesimais" dx. O símbolo do somatório, Σ, é substituído no limite pelo símbolo da integral, $\int$, cuja origem é da letra "S". Os valores da função $f(c_k)$ são substituídos por uma seleção contínua dos valores da função $f(x)$. As larguras de subintervalo Δx_k tornam- se a diferencial dx. É como se somássemos todos os produtos da forma $f(x)dx$ conforme x se move de a para b. (THOMAS e GIORDANO, 2009, p.374)

Vamos calcular a área compreendida entre a reta $y = x + 2$ limitada pelos pontos $A\ (0, 2)$ e $B\ (4, 6)$, acima do eixo x:

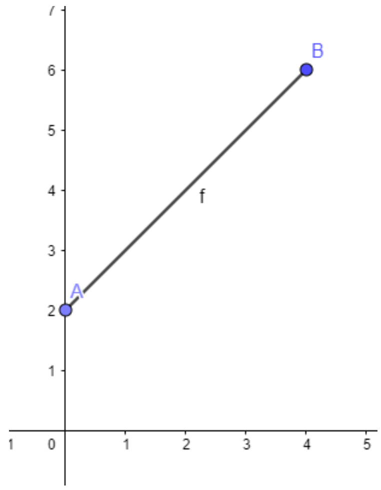

Figura 32*:* Segmento de reta $\overline{AB}$
Fonte: Elaborado pela autora

Observe que o segmento de reta forma com o eixo x a figura de um trapézio de base maior d, base menor a e altura c:

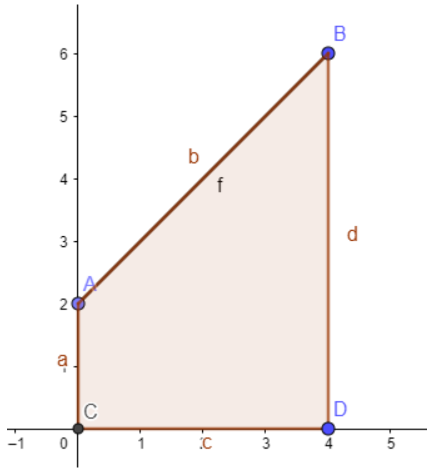

Figura 33: Área formada abaixo do segmento $\overline{AB}$com o eixo x.
Fonte: Elaborado pela autora

A área é encontrada facilmente pela fórmula:

$$A = \frac{(d+a)c}{2} = \frac{(6+2)4}{2} = 16.$$

Outra maneira de calcular a área é pela integral:

$$\int_0^4 (x+2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]\begin{matrix}4\\0\end{matrix} = \left(\frac{4^2}{2} + 2.4\right) - \left(\frac{0^2}{2} + 2.0\right) = 16 - 0 = 16.$$

Não convém utilizar o método da integral neste caso, por se tratar de uma figura simples de lados retos. Mas quando se trata de figuras com lados curvos, a integral pode ser a melhor opção para calcular a área.

A área da região abaixo não pode ser calculada de modo tão simples como no exemplo anterior, pois se trata de uma região curva:

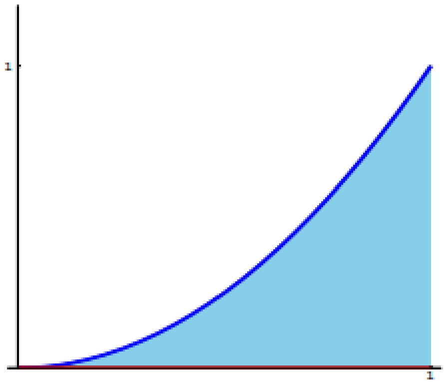

Figura 34:Área limitada por $y = x^2$.
Fonte: <http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/72/calculo2_ufersa.pdf>
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

A área é limitada por $y = x^2$, e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$. Pode ser calculada pela integral:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{1^2}{3} - \frac{0^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Nos livros didáticos do Ensino Médio não se utiliza diretamente a integral para o cálculo de áreas de figuras. Nos livros de Física é comum encontrar o cálculo do “trabalho de uma força”, ou o “trabalho de um gás” através das áreas dos gráficos. No caso do trabalho de um gás, pode ser calculado pela a área abaixo do gráfico pressão x volume, ou seja, quando o volume varia e a pressão permanece constante, o gráfico é uma reta, mas quando ambos variam, o gráfico é uma curva, “cujo valor numérico pode ser obtido por meio do Cálculo integral, que é estudado somente no Ensino Superior”. (BARRETO e XAVIER, p. 162, 2013)

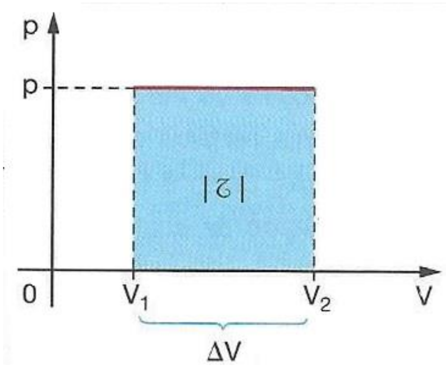

Figura 35:Trabalho de gás de volume variável e pressão constante
Fonte: BARRETO e XAVIER, 2013, p.162.

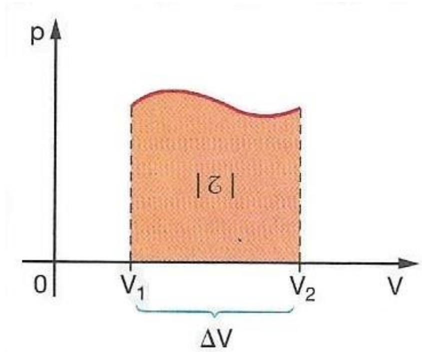

Figura 36: Trabalho de gás de volume e pressão variável
Fonte: BARRETO e XAVIER, 2013, p.162.

5.3.2 Volume

Na tentativa de encontrar o volume de um sólido nos deparamos com o mesmo tipo de problema para calcular áreas.

Podemos “fatiar” um sólido S que está contido num intervalo que vai de a até b, em n fatias, de modo que o número de fatias se torne tão grande quanto se queira:

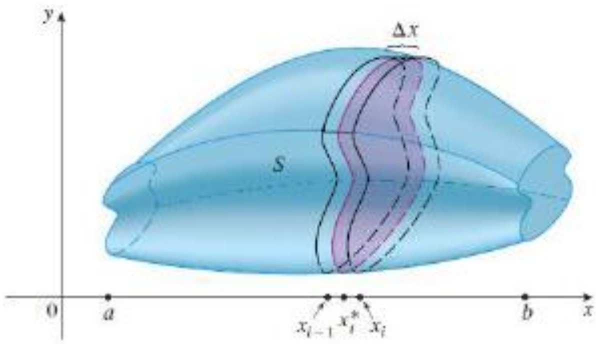

Figura 37: Aproximação do volume do sólido S no intervalo $[a, b]$.
Fonte: <https://wp.ufpel.edu.br/nucleomatceng/files/2012/07/Aplicações-de-integração.pdf>
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

Cada fatia tem altura Δx e área $A(x)$, de modo que varia quando x aumenta de a até b. Adicionando os volumes das fatias, chegamos na aproximação do volume:

$$V \approx \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x = \int_a^b A(x)dx\,.$$

Vamos calcular o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ no intervalo $[0, 1]$:

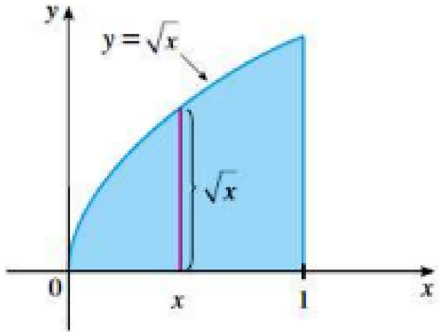

Figura 38: Curva $y = \sqrt{x}$
Fonte: <https://wp.ufpel.edu.br/nucleomatceng/files/2012/07/Aplicações-de-integração.pdf>.
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

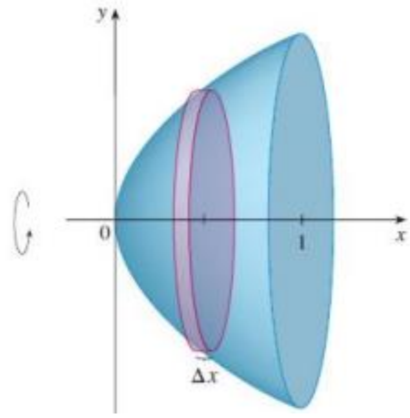

Figura 39: Rotação da curva $y = \sqrt{x}$ em torno do eixo x
Fonte: <https://wp.ufpel.edu.br/nucleomatceng/files/2012/07/Aplicações-de-integração.pdf>
Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

A figura fatiada é um círculo de área πr^2 e altura Δx, Como $r = \sqrt{x}$, a área será:

$$A(x) = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi x.$$

O volume do sólido será:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi x dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \pi.\frac{1^2}{2} - \pi.\frac{0^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Como visto anteriormente, o Cálculo Diferencial e Integral possui muitas aplicações direta ou indiretamente nos conteúdos lecionados na Educação Básica, além de outras áreas do conhecimento interligadas com a Matemática como a física, engenharia, economia, entre outras.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho foi possível observar através da análise dos PPP dos cursos de Matemática da UNESP a relevância dada às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral na formação do licenciado em Matemática. As evidências, mesmo aquelas implícitas, justificam a importância da prática de ensino associada a vários conteúdos que são parte dos programas destas disciplinas.

As respostas apresentadas por 19 docentes que atuam em disciplinas de Cálculo permitiu constatar serem capazes de situar o papel disciplina na formação do futuro professor. Dentre os argumentos, podem ser destacados o fato de que o Cálculo permite uma base teórica sólida; diversidade de aplicações nas áreas do conhecimento; uma maior percepção, ampliação, e compreensão dos conteúdo de funções, taxa de variação, área e volume; noções de limite, derivada e integral para articular problemas e exemplificar situações que irá confrontar na prática escolar, além de relacionar conteúdos que ministrará no ensino básico. Assim, o docente se tornará mais crítico, completo, pronto para atuar na sala de aula.

Evidencia-se, portanto, a compreensão de que o domínio dos conteúdos de Cálculo, e de suas possíveis aplicações na Educação Básica, é instância indispensável na formação do futuro professor, munindo-o de um dos referenciais teóricos necessários para a eficiência do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Além disto, uma questão que norteia muitos pesquisadores é reconhecer quais são de fato os conhecimentos fundamentalmente necessários à formação do professor de Matemática. Fica claro que os conhecimentos adquiridos na graduação e a prática docente devem andar de mão dadas, mas essa é uma tarefa complexa: associar o que se aprende com a prática escolar, como relata Moreira; Cury e Vianna (2005, p. 40) “trata- se de superar essa visão dicotomizada da relações entre formação matemática “sólida” e as demandas de conhecimento da prática docente escolar”.

Vale ressaltar o papel das instituições de ensino na formação do futuro professor. Como observado nas respostas de alguns docentes, em alguns casos faz-se necessário rever as abordagens das disciplinas de Cálculo, afim de garantir o elo entre os conteúdos ensinados e a prática em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo no Segundo Grau. In: **Revista do Professor de Matemática**, n.18, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

ÁVILA, G. O ensino do Cálculo e da Análise. In**: Revista Matemática Universitária**, n. 33, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2002, p. 83-95.

BARRETO, B. B. Filho; XAVIER, C. X. da S. **Física aula por aula: Mecânica dos Fluidos, Termologia e Óptica**. Vol.2, 2.ed. São Paulo: FTD, 2013.

BOYER, B. C. **A História da Matemática.** 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1996.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Saeb 2017:** Resultados do Saeb 2017. Brasília: 2018. Disponível em: <https://medium.com/@inep/resultados-do-saeb-2017-f471ec72168d> Acesso em: 20 de fevereiro de 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** MEC/SEMTEC – Secretária de Educação Média e Tecnológica, Brasília, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2019.

BRASIL. **Parecer** CNE/CES 1.302/2001. Ministério da Educação: Concelho Nacional de Educação. Brasília, 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 26 de fevereiro de 2019.

BRASIL, **Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.** Rio de Janeiro: SBM, 2016. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/Regimento.pdf>. Acesso em: 22 de janeiro de 2019.

BRASIL. **Resolução** CNE/CES Nº 02/2015. Ministério da Educação: Conselho Nacional de Educação. Brasília, 2015. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/maiseducacao/323-secretarias-112877938/orgaos-vinculados-82187207/21028 resolucoes-do-conselho-pleno-2015> Acesso em: 26 de fevereiro de 2019.

CHUEIRI, V. M. M., et al.. **Diretrizes para os cursos de graduação da Unesp:** Matemática: estudos resultantes do processo de articulação e integração dos cursos de Matemática da Unesp. São Paulo: Universidade Estadual Paulista, Pró - Reitoria de Graduação, 2012.

DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2009.

DEVLIN, K. **O gene da Matemática.** 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

Faculdade de Ciências – UNESP. **Projeto Político Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática.** Bauru, 2017. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/graduacao/ppc/matematica-1506.pdf> Acesso em: 26 de fevereiro de 2019.

Faculdade de Ciências e Tecnologia – UNESP. **Projeto Político Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática.** Presidente Prudente, 2015. Disponível em: <http://www.fct.unesp.br/Home/Graduacao/Matematica/ppp_matematica_2015.pdf> Acesso em: 26 de fevereiro de 2019.

Faculdade de Engenharia – UNESP. **Projeto Político Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática.** Ilha Solteira, 2014. Disponível em:<https://www.feis.unesp.br/Home/Graduacao/cursos/projeto-politico-pedagogico.pdf> Acesso em: 26 de fevereiro de 2019.

Faculdade de Engenharia – UNESP. **Projeto Político Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática.** Guaratinguetá, 2015. <http://www.feg.unesp.br/#!/graduacao/matematica/projeto-pedagogico/projeto-pedagogico-a-partir-de-2015/> Acesso em: 26 de Fevereiro de 2019.

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. **Fazendo arte com a matemática**. 2 ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

FIORENTINI, D. A Formação Matemática e Didático-Pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática. **Revista de Educação**. PUC-Campinas, Campinas, n.18, p. 107-115, 2005.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa.50.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2015.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências**: um passeio pelo maravilhoso mundo da matemática. 3 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo.** 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

IEZZI, G., et al. **Matemática, Ciência e Aplicações**: Ensino Médio, vol. 1. São Paulo: Saraiva, 2017.

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – UNESP. **Projeto Político Pedagógico dos cursos de Graduação em Matemática**. São José do Rio Preto, 2018. Disponível em: <https://www.ibilce.unesp.br/Home/Graduacao450/LicenciaturaemMatematica/mat.-2019-reestr.-ppp-anexo-pe.pdf> <https://www.ibilce.unesp.br/Home/Graduacao450/LicenciaturaemMatematica/mat.-2019-reestr.-ppp-s-planos.pdf> Acesso em: 26 de fevereiro de 2019.

Instituto de Geociência e Ciências Exatas – UNESP. **Projeto Político Pedagógico do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática**. Rio Claro, 2015. Disponível em:

<http://igce.rc.unesp.br/Home/Graduacao29/matematica/projetofinalset.pdf> Acesso em: 28 de fevereiro de 2019.

LINS, R. C. A Formação Pedagógica em Disciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Matemática. **Revista de Educação**. PUC – Campinas, n°18, p. 117-123, Campinas: Junho 2005.

LOPES, A. Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS, **Matemática Universitária**, Porto Alegre, n. 26/27, p. 123-143, Junho/Dezembro: 1999.

MACEDO, A. F. de M., et al. **Ideias fundamentais do Cálculo integral.** XI Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM. *Anais...*Curitiba: 2013. p. 4.

MARTINS-SALANDIM, M. E. **A interiorização dos cursos de Matemática no estado de São Paulo**: um exame da década de 1960. 2012. 379 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012. Disponível em:<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102107/martinssalandim_me_dr_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Acesso em: 21 de fevereiro de 2019.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que análise real na Licenciatura? **Zetetiké**, Campinas, SP, v.13, n. 23, p. 11-42, jan./jun. 2005.

MUNIS NETO, A. C. **Fundamentos de Cálculo**. Coleção PROFMAT, 15. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NOGUEIRA, F. **Saeb**: diferença entre estados chega a 50 pontos em Matemática. Agosto: 2018. [online]. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/12501/saeb-diferenca-entre-estados-chega-a-50-pontos-em-matematica> Acesso em: 20 de fevereiro de 2019.

OTERO-GARCIA, S. C., BARONI, R. L. S., MARTINES, P. T.Uma trajetória para a disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.3, p.692-717, 2013.

PINTO, A. **A teoria dos indivisíveis:** Uma contribuição do padre Bonaventura Cavalieri**.** 2008. 84 f. Tese (Mestrado em História da Ciência). Pontifícia Universidade Católica: São Paulo, 2008. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/13396> Acesso em: 20 de fevereiro de 2019.

POSSANI, C. **Cálculo I - Aula 01 - A importância do Cálculo na formação do professor de Ciências**. Universidade Virtual do Estado de São Paulo – UNIVESP-2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Rwq_aSsfS1k&t=30s>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2019.

RAVAGNANI, F. A.. **Cálculo diferencial e integral no movimento dos planetas**. 2014. 71 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/128119>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2019.

SANTOS, D. M. F.; MORELATTI, M. R. M.. A Álgebra no Projeto Pedagógico de um Curso de Licenciatura em Matemática: Implicações Pedagógicas**.** In: **XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**. *Anais*...Curitiba: 2013. p. 15.

SÃO PAULO. Governo do Estado de São Paulo – Secretária de Educação. **Material de apoio ao currículo do estado de São Paulo** - Caderno do Professor - Matemática. Nova edição 2014-2017.

SÃO PAULO. Governo do Estado de São Paulo – Secretária de Educação. **Material de apoio ao currículo do estado de São Paulo** - Caderno do Aluno - Matemática. Nova edição 2014-2017.

SAVIOLI, A. M. P. D.; CARVALHO, D. F.; ELIAS, H. R. A Matemática na formação do professor de Matemática: um estudo a partir de teóricos brasileiros**.** In: **XVI**

Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM – IACME, Chiapas, México,2015.

SHULMAN, L. S. **Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma**. Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado. v.9, n.2, Granada, España, 2005, p.1-30.

SHULMAN, L. S. **Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. Educational Researcher**. v.15, n.2. 1986, p.4-14.

SILVA, C. M.S. **A Matemática Positivista e sua Difusão no Brasil**. Vitória: EDUFES, 1999.

SILVA, C. M. S.**O conceito de derivada no ensino da Matemática no Brasil do século XIX.** In: ICME-8 Satellite Meeting HPM, 1996, Braga. Anais. Braga: Grafis, Coop. de Artes Gráficas, 1996. v. 1. p. 80-87.

STEWART, I. **Em busca do infinito: uma história da Matemática dos primeiros números à teoria do caos.** 1.ed. Trad. de George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

THOMAS, G. B., GIORDANO, W. H. **Cálculo**. Vol. 1, 11. ed.. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

ZICCARDI, L. R. N. **O curso de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo**: uma história de sua construção/desenvolvimento/legitimação. 2009. 408f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

APÊNDICE A - Cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura em Matemática

Pesquisa de opinião de professores que ministraram/ministram disciplinas envolvendo Cálculo Diferencial e Integral, sobre a importância da disciplina na formação do Professor de Matemática
*Obrigatório

1. Nasequênciaindicamosalgunsdosconteúdosaseremdesenvolvidosnasdisciplinasd e Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Licenciatura em Matemática. Indique quais deles deveriam ser trabalhadas de modo indispensável no curso (se for o caso, acrescente outros):*****
   Marque todas que se aplicam.

   - [ ] Números reais e Funções reais de uma variável real;
   - [ ] Limite e continuidade;
   - [ ] Derivadas e suas aplicações;
   - [ ] Sequências e séries numéricas;
   - [ ] Integral e suas aplicações;
   - [ ] Integrais impróprias;
   - [ ] Noções topológicas do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$;
   - [ ] Funções vetoriais;
   - [ ] Curvas planas e espaciais;
   - [ ] Funções reais de duas ou mais variáveis reais;
   - [ ] Fórmula de Taylor;
   - [ ] Teoremas da função Implícita e função Inversa;
   - [ ] Integrais duplas e triplas. Aplicações;
   - [ ] Integrais de linha e de superfície.
   - [ ] Outro: ____________________

2. Indique livro(s) que você recomendaria para as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de Licenciatura em Matemática (se for o caso, acrescente outros):*
   Marque todas que se aplicam.

- [ ] Um Curso de Cálculo – Hamilton Luiz Guidorizzi.
- [ ] O Cálculo com Geometria Analítica – Louis Leitthold.
- [ ] Cálculo - George B. Thomas.
- [ ] Cálculo A: Funções Limite, Derivação e Integração - Diva Marilia Flemming e Mirian Buss Gonçalves
- [ ] Outro: ____________________

3. Pense em uma disciplina (ou num conjunto de disciplinas) que contemple(m) os itens marcados na pergunta 1, com uma abordagem semelhante as bibliografias indicadas na pergunta 2. Na sua opinião, todo curso de Licenciatura em Matemática deveria ter essa(s) disciplina(s) como obrigatória(s)?*
Marque todas que se aplicam.

- [ ] Sim
- [ ] Não
- [ ] Não Necessariamente

4. Se lhe coubesse defender o "Sim" ou o "Não" na pergunta 3, quais argumentos você apresentaria?*

____