UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática

As Funções Hiperbólicas no Ensino Médio: Apresentação, Conceito e Aplicações.

Cristiane Menegante da Silva

DOURADOS - MS

Abril de 2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática

As Funções Hiperbólicas no Ensino Médio: Apresentação, Conceito e Aplicações.

Cristiane Menegante da Silva

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - UEMS, como requisito final à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cosme Eustáquio Rubio Mercedes

DOURADOS - MS
Abril de 2019

S579f Silva, Cristiane Menegante da
As funções hiperbólicas no ensino médio: apresentação, conceito e aplicações/ Cristiane Menegante da Silva. – Dourados, MS: UEMS, 2019.
50p.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Matemática – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2019.
Orientador: Prof. Dr. Cosme Eustaquio Rubio Mercedes.

1. Funções hiperbólicas 2. Winplot 3. Catenária I. Título

CDD 23. ed. - 515.3535

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CRISTIANE MENEGANTE DA SILVA

AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS NO ENSINO MÉDIO: APRESENTAÇÃO, CONCEITO E APLICAÇÕES

Produto Final do Curso de Mestrado Profissional apresentado ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito final para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 10/04/2019.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Cosme Eustaquio Rubio Mercedes (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Vando Narciso

Prof. Dr. Vando Narciso (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Edson Carlos Licurgo Santos (UNIOESTE)
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Dedicatória

Minha vida sempre foi cercada de pessoas que amo, de pessoas que ajudo e que me ajudaram, mas ela só passou a ter um sentido amplo da palavra a partir de 2015, pois foi nesse ano que recebi o meu maior presente, meus filhos Rafael e Julia. Todos os meus esforços sempre são pensando em vocês, por isso dedico esse trabalho a vocês, amores da minha vida

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado a vida, ao meus pais por assumir essa responsabilidade e fazer o possível para me orientar durante toda a minha vida. Agradeço ao meu esposo por me ajudar com as crianças durante minhas longas horas estudando para a qualificação e depois para escrever essa dissertação. Agradeço ao professor Cosme por aceitar prontamente me orientar nesse trabalho. Agradeço a uma pessoa muito especial e paciente, Edson, que me ajudou prontamente tirando minhas dúvidas tanto na manipulação do programa que escolhi para digitar quanto no teor do trabalho.

Resumo

A presente dissertação oferece uma proposta de inserção do conteúdo das funções hiperbólicas no Ensino Médio, uma vez que na grade curricular trabalhada no Estado de Mato Grosso do Sul essas funções não são contempladas. Foram apresentados os conceitos básicos que servem de suporte para a inclusão desse conceito, bem como, um relato histórico do desenvolvimento das funções hiperbólicas na história da matemática. Foram listadas relações entre as funções hiperbólicas e as funções trigonométricas trazendo assim as funções hiperbólicas para um campo conhecido dos alunos, deixando claro, as diferenças e similaridades entre tais conceitos. Apresentamos no decorrer do trabalho conceitos indispensáveis para o entendimento das funções hiperbólicas, tais como, funções exponenciais, funções circulares e a cônica hipérbole. Como ferramenta para facilitar a inserção das funções hiperbólicas foi utilizado o software gratuito Winplot. Este trabalho apresenta a equação da catenária como aplicação direta das funções hiperbólicas e serve-se desta equação para discutir a resolução de um problema, sem a utilização do conceito de derivada e com a utilização desse conceito.

Palavras chaves: Funções hiperbólicas, Winplot, catenária.

Abstract

The present dissertation is an insertion proposal of the content of the hyperbolic functions in High School, since in the curriculum of this level these functions are no studied in the State of Mato Grosso do Sul. It was presented the basic concepts that support the inclusion of this concept, as well as some historical content of the development of hyperbolic functions in the history of mathematics. Some concepts relating the hyperbolic and trigonometric functions were presented to bringing the hyperbolic functions to be easy for the students, making clear, the differences and similarities between such concepts. In the work we present concepts that are indispensable for the understanding of hyperbolic functions, such as exponential functions, circular functions and conic hyperbole. As a tool to facilitate the insertion of hyperbolic functions, the free Winplot Software was used. This work brings the catenary equation as a practical application of the hyperbolic functions, and the presented resolution is done with and without the use of the concept of the derivative.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Conceitos Preliminares **3**

3 As Funções Hiperbólicas no Ensino Médio **13**

4 Aplicações **21**

4.1 Aplicações das funções hiperbólicas sem a utilização do conceito de derivadas 21

4.2 Aplicações das funções hiperbólicas com a utilização do conceito de derivadas 33

5 Considerações Finais **36**

Apêndice **38**

Referências Bibliográficas **47**

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho tem como principal objetivo oferecer uma introdução das funções hiberbólicas aos estudantes do Ensino Médio. Atualmente as escolas do estado de Mato Grosso do Sul trabalham com o referencial escolar, documento este, que lista todos os conteúdos matemáticos que devem ser trabalhados desde o primeiro ano do Ensino Fundamental até o terceiro ano do Ensino Médio. Segundo o referencial teórico do estado: *A proposta deste Referencial Curricular é nortear o trabalho do professor de forma dinâmica, objetivando uma perspectiva interdisciplinar e também garantir a apropriação do conhecimento pelos estudantes [...](Ms, 2008, p.5).*

O ensino das funções hiperbólicas não está contemplado neste documento, porém, os conceitos de função par, função ímpar, função exponencial são abordados no primeiro ano do Ensino Médio. As funções circulares seno cosseno e tangente são abordadas no segundo ano do Ensino Médio e as cônicas são trabalhadas no terceiro ano do Ensino Médio. Tendo em vista que as funções hiperbólicas reúnem os conceitos citados, propomos apresentá-las aos estudantes do EnsinoMmédio, já no segundo ou terceiro ano.

As funções hiperbólicas podem ser abordadas com o amparo de conceitos mais sofisticados e abstratos, trabalhados em nível superior, como por exemplo, as séries de Taylor estudadas em cálculo diferencial e integral. Todavia, este trabalhado abordará esse conceito com ferramentas matemáticas do nível médio, de uma maneira simplificada, permitindo assim o seu entendimento por parte dos estudantes desse nível.

Como ferramenta auxiliar para transformar a linguagem mais sofisticada das funções hiperbólicas, numa linguagem mais acessível aos estudantes do Ensino Médio, utilizamos o software gratuito Winplot. Essa ferramenta de visualização e criação de gráficos auxilia na interpretação e construção de gráficos de várias funções. O uso das tecnologias durante as aulas facilita o trabalho do professor, tornando as aulas mais dinâmicas e atrativas aos alunos. Segundo Gomes e Padovani (2005) são softwares educativos os sistemas computacionais e interativos intencionalmente concebidos para facilitar aprendizagem de conceitos específicos como os conceitos matemáticos ou científicos.

De acordo com Lima (2009, p. 76 apud Pacheco e Barros, 2013, p. 08):

Ao considerar as possibilidades de ensino com o computador, o que pretendo destacar é a dinamicidade desse instrumento que pode ser utilizado para que os alunos trabalhem como se fossem pesquisadores, investigando os problemas matemáticos propostos pelo professor construindo soluções ao invés de esperarem um modelo a ser seguido (LIMA, 2009, P. 36).

Utilizaremos também o excel. Essa ferramenta possibilita cálculos por meio de fórmulas usando linhas e colunas de uma planilha.

Este trabalho foi dividido em cinco capítulos. No primeiro capítulo traremos a introdução. No segundo capítulo abordaremos os conceitos formais dos conteúdos que utilizaremos nos capítulos seguintes e faremos um relato histórico sobre os matemáticos que trabalharam com as funções hiperbólicas. No terceiro capítulo apresentaremos as funções hiperbólicas sob o ponto de vista das ferramentas matemáticas disponíveis no Ensino Médio. No quarto capítulo serão dadas aplicações e sugestões de como podem ser trabalhados, no Ensino Médio, os conceitos abordados nos capítulos anteriores. O quinto capítulo está reservado para a conclusão do trabalho. Além disso, no apendice desse trabalho colocamos, de forma resumida, um tutorial que auxiliou na construção das figuras utilizadas neste trabalho.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Neste capítulo citaremos alguns fatos históricos envolvendo as funções hiperbólicas, matemáticos que trabalharam com esses conceitos, serão trabalhados também conceitos e formalismos das funções trigonométricas, exponenciais e hiperbólicas. Serão dadas definições e propriedades de algumas funções, necessárias no desenvolvido deste trabalho.

Como em vários ramos da matemática os conceitos são construídos a partir de conceitos observados por outros matemáticos, vemos casos em que matemáticos morrem deixando apenas conjecturas para serem demonstradas por outros.

A história das funções hiperbólicas teve registro inicialmente com Galieleu Galilei que descreveu matematicamente a curva formada por uma corda ou corrente flexível, mas não elástica, suspensa entre dois pontos e sob a ação exclusiva da gravidade (ver [6]). Erroneamente conjecturou que a curva fosse uma parábola.

O matemático Christian Huygens mostrou, em 1646, aos 17 anos, que a conjectura de Galileu sobre a corrente era falsa, pois aquela curva não se tratava de uma parábola.

Foi em meados do século XVIII que as funções hiperbólicas tiveram sua utilização mais marcante. O matemático Vincenzo Riccati aplicou os estudos realizados sobre as funções hiperbólicas na resolução de equações cúbicas. Ele observou também a relação existente entre as funções hiperbólicas e as exponenciais. Foi nessa época também que Riccati apresentou as notações Sh e Ch para designar as funções seno e cosseno hiperbólico respectivamente (ver [6]).

Em 1690, Jakob relançou o problema da corrente de Galileu à comunidade científica, porém, a solução usada por Jakob era muito parecida com as apresentadas por Jean Bernoulli, Leibniz e Huygens. A solução de Huygens foi feita utilizando geometria e a de Jean Bernoulli e Leibniz utilizando cálculo diferencial. Estes últimos chegaram bem próximos a equação da catenária em notação moderna, $\frac{e^a+e^{-a}}{2a}$onde a é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente.

Jonnah Lambert apresentou as funções hiperbólicas para a academia, porém seu artigo "*Mémoire Sur Quelques Propriétés Remarquables Des Quantités Transcendantes Circulaires et Logarithmiques*" ficou famoso não pelo uso das funções hiperbólicas, mas pela irracionalidade do número π. Em 1768, Lambert publicou seu trabalho "*Observations Trigonométriques*" relativo as funções hiperbólicas, onde foram usadas as notações que conhecemos hoje (ver [6]). Assim o nome de Lambert ficou associado com as funções hiperbólicas, da mesma forma que Euler às funções circulares. Devido ao trabalho de Lambert as funções hiperbólicas são conhecidas, estudadas, exploradas e aplicadas até os dias de hoje.

A partir daqui, até o final desse capítulo, descreveremos os conceitos preliminares necessários ao desenvolvimento desse trabalho. Daremos a definição das funções trigonométricas pela motivação geométrica.

Seja x um número real. Marcamos um ângulo com medida x radianos, no sentido anti-horário, na circunferência unitária com centro na origem. Seja P o ponto de intersecção da circunferência com o segmento de reta que forma o ângulo x com o eixo das abscissas. Sejam R a projeção de P sobre o eixo das abscissas e Q a projeção de P sobre o eixo das ordenadas, como na figura 2.1.

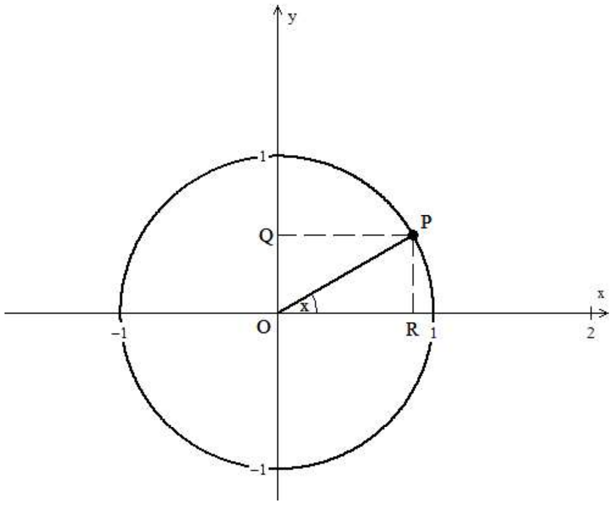

Figura 2.1: Círculo Trigonométrico

Definição 2.1 *Denominamos seno de x, e escrevemos* $\operatorname{sen} x$*, a ordenada Q do ponto P. Desta forma fica definida a função **seno** dada por*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \quad y = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

O domínio da função seno é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e a imagem é o intervalo real $[-1, 1]$.

A função $y = \operatorname{sen} x$ é periódica e seu período é 2π, já que $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$.

Em alguns intervalos $\operatorname{sen} x$ é crescente e em outros é decrescente. Por exemplo, nos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ é crescente. Já no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ é decrescente.

O gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, denominado senóide, pode ser visto na figura 2.2.

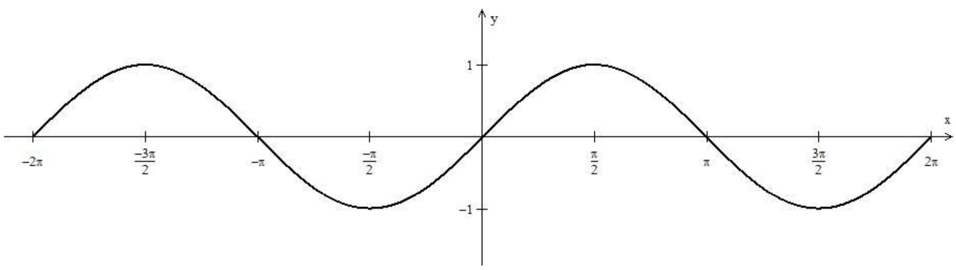

Figura 2.2: Gráfico da função seno

Definição 2.2 *Denominamos cosseno de x, e escrevemos $\cos x$, a abscissa R do ponto P, conforme a figura 2.1. Desta forma fica definida a função* ***cosseno*** *dada por*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \cos x \end{array}$$

O domínio da função cosseno é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e a imagem é o intervalo real $[-1, 1]$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Portanto a função cosseno, assim como a função seno, é periódica e seu periodo é 2π.

Em alguns intervalos cosseno é crescente e em outros é decrescente. Por exemplo, no intervalos $[0, \pi]$ a função $f(x) = \cos x$ é decrescente. Já no intervalo $[\pi, 2\pi]$ é crescente.

O gráfico da função $f(x) = \cos x$, denominado cossenóide, pode ser visto na figura 2.3.

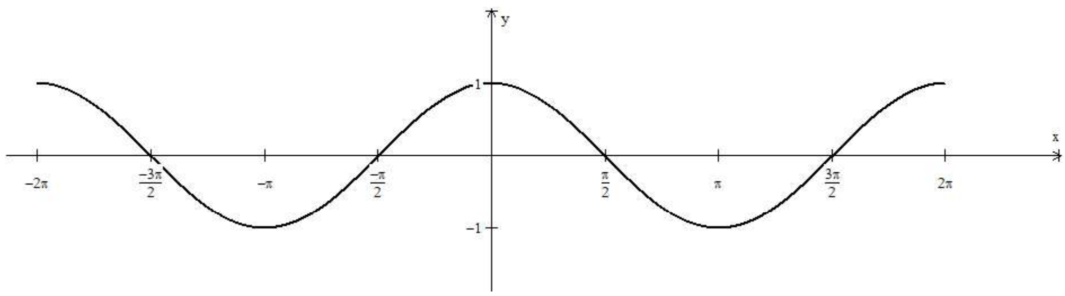

Figura 2.3: Gráfico da função cosseno

As funções tangente, secante, cossecante e cossecante são definidas em termos de seno e cosseno. A tangente e a secante são respectivamente, denotadas pelos símbolos tan e sec e definidas por

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \text{ e } \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

para todos os números reais x tais que $\cos x \neq 0$. Como $\cos x = 0$, quando $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, ...,$ isto é $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, temos $Dom(\tan) = Dom(\sec) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

As funções cotangente e cossecante são, respectivamente denotadas por $\operatorname{cotan} x$ e $\operatorname{cosec} x$ e definidas por

$$\begin{aligned} \operatorname{cotan} x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

para todos os números reais x tais que $\operatorname{sen} x \neq 0$. Como $\operatorname{sen} x = 0$, para $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, temos $Dom(\operatorname{cotan} x) = Dom(\operatorname{cosec} x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

O esboço dos gráficos das funções tangente, secante, cossecante e cotangente estão abaixo.

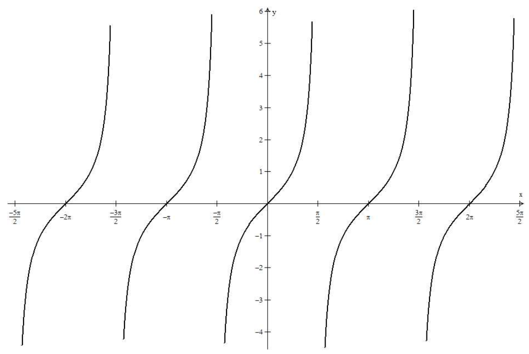

Figura 2.4: Gráfico da tangente

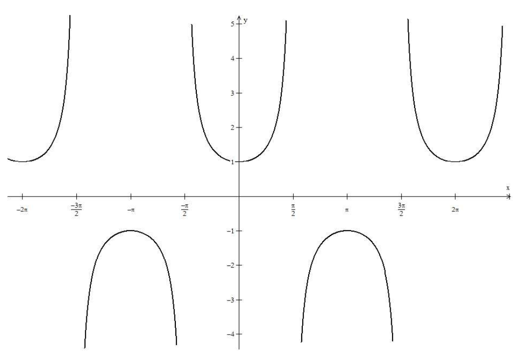

Figura 2.5: Gráfico da secante

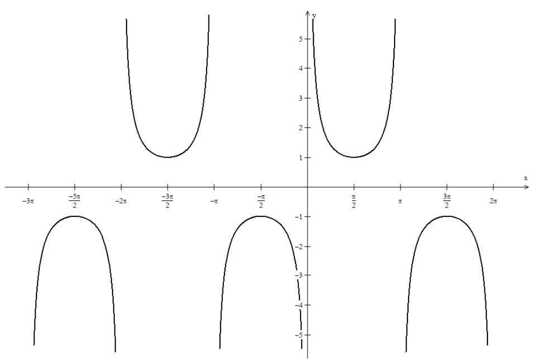

Figura 2.6: Gráfico da cossecante

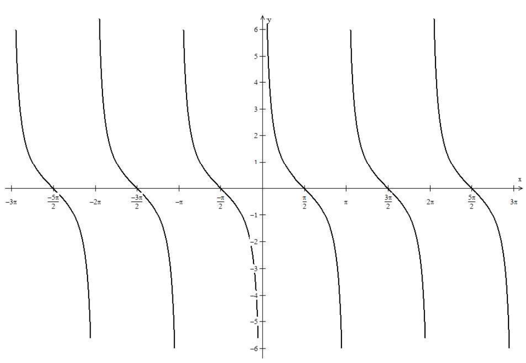

Figura 2.7: Gráfico da cotangente

Passamos agora às funções exponencias, que são objetos fundamentais nos capítulos que se seguem.

Definição 2.3 *Chamamos de função exponencial, de base real a, a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada número real x real o número real a^x, sendo $0 < a \neq 1$.*

Denotamos por

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = a^x \end{aligned}$$

O domínio da função exponencial é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. A imagem é $\mathrm{Im}(f) = (0, \infty)$.

A simples observação do gráfico da função $f(x) = a^x$ (figuras 2.8 e 2.9), permite afirmar que:

1) a curva que o representa está toda acima do eixo das abcissas, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, independentemente do valor de a

2) a curva intersepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$;

3) $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

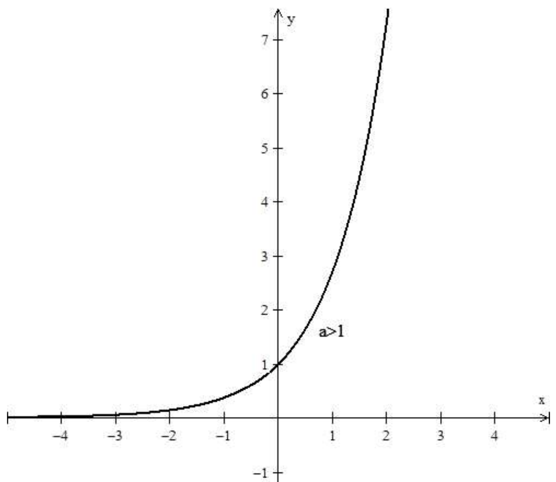

Figura 2.8: Função $f(x) = a^x$, $a > 1$

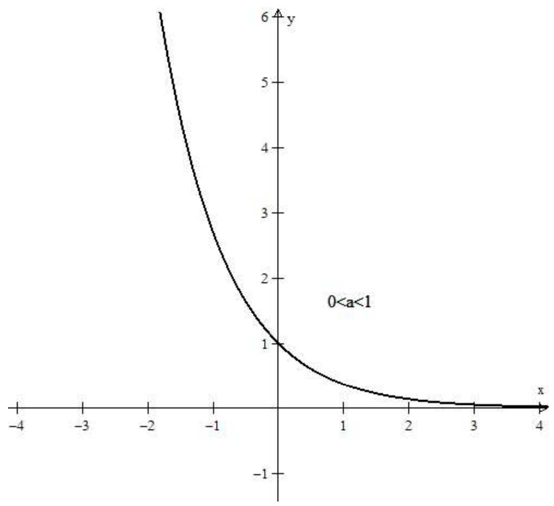

Figura 2.9: Função $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$

Algumas funções reais clássicas apresentam propriedades bastante interessantes. Duas dessas propriedades serão citadas posteriormente.

Definição 2.4 *Dizemos que uma função $y = f(x)$ é* ***par*** *se, para todo x no domínio de f, tem-se $f(-x) = f(x)$. Uma função $f(x)$ é* ***ímpar*** *se, para todo x no domínio de f, tem-se $f(-x) = -f(x)$.*

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y e o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação a origem. Por exemplo,

i) A função $f(x) = x^2$ é par, já que $f(-x) = (-x)^2 = f(x)$

ii) A função $f(x) = x^5 + x^3$ é ímpar, já que $f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 = -x^5 - x^3 = -(x^5 + x^3) = -f(x)$

iii) A função $f(x) = x^3 + 4$ não é par nem ímpar.

Dentre as cônicas (curvas dadas por equação da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$), destacamos a hipérbole pelo fato de que ela tem elevada importante no desenvolvido deste texto.

Definição 2.5 *Uma curvva no plano cuja equação é dada por*

$$xy = a \text{ ou } x = \frac{a}{y},$$

sendo a um número real não nulo, é chamada de ***Hipérbole.***

Podemos observar que quanto maior for o valor absoluto de x, menor será o valor absoluto de y, e reciprocamente. Em outras palavras, se x tende ao infinito, então y tende a zero, e se y tende ao infinito, então x tende a zero. Geometricamente isso significa que a hipérbole se aproxima arbitrariamente dos eixos coordenados, mas não os intercepta, pois a equação $xy = a \neq 0$ impede que x ou y sejam nulos.

Uma reta da qual uma curva se aproxima, mas sem tocá-la, é chamada de **assíntota** da curva. Assim, os eixos coordenados são assíntotas da hipérbole.

A hipérbole é composta de dois ramos. Quando $a > 0$ estes ramos estão no primeiro quadrante do sistema de coordenadas (x e y ambos positivos) e no terceiro quadrante (x e y ambos negativos), conforme figura 2.10.

A equação algébrica $xy = a$ tem uma interpretação geométrica simples relacioanda a hipérbole. Se consideramos M um ponto arbitrário da hipérbole e o retângulo $MQOP$, delimitado pelos eixos coordenados e dois segmentos de retas com extremos em M e paralelos aos eixos, conforme figura 2.10, então a área deste retângulo é igual a a. De fato, as coordenadas dos pontos M, P e Q são, respectivamente, $\left(x, \frac{a}{x}\right)$, $(x, 0)$ e $\left(0, \frac{a}{x}\right)$. Logo a área do retângulo é $OP \cdot OQ = x \cdot \frac{a}{x} = a$. Isto signica que a área do retângulo é independente da escolha do ponto M.

Variando os pontos P (sobre o eixo x) e o ponto Q (sobre o eixo y), podemos dizer que a hipérbole é o conjunto dos pontos, situados nos primeiro e terceiro quadrantes do sistema de coordenadas, cujos retângulos $MQOP$ têm uma determinada área a.

A hipérbole tem um centro de simetria: os dois ramos da hipérbole são simétricos em relação à origem O do sistema de coordenadas. (Os retângulos $MQOP$ e $M'Q'O'P'$ simétricos em relação a reta $x = y$ têm áreas iguais).

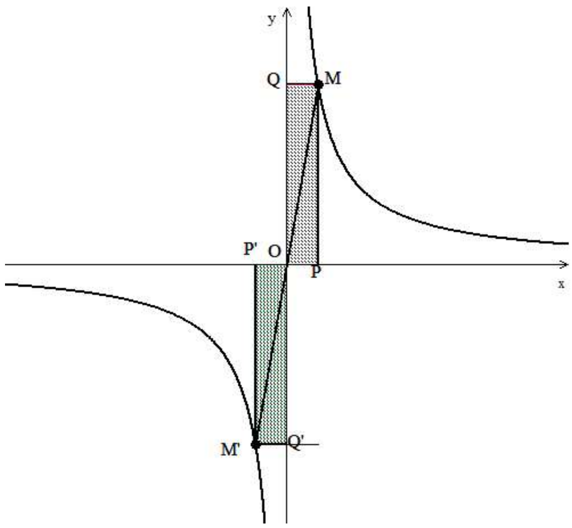

Figura 2.10: Hipérbole e Centro de simetria da hipérbole

A hipérbole também possui dois eixos de simetria, as retas $x = y$ e $x = -y$, que dividem os ângulos entre os eixos coordenados, conforme figura 2.11. Os retângulos $MQOP$ e $M"O"Q"P"$ (simétricos em relação a reta $x = -y$) possuem áreas iguais. O centro de simetria e os eixos de simetria são usualmente chamados de **centro e eixos da hipérbole.** Os pontos A e B, nos quais a hipérbole cruza o eixos de simetria, são chamados de **vértices** da hipérbole.

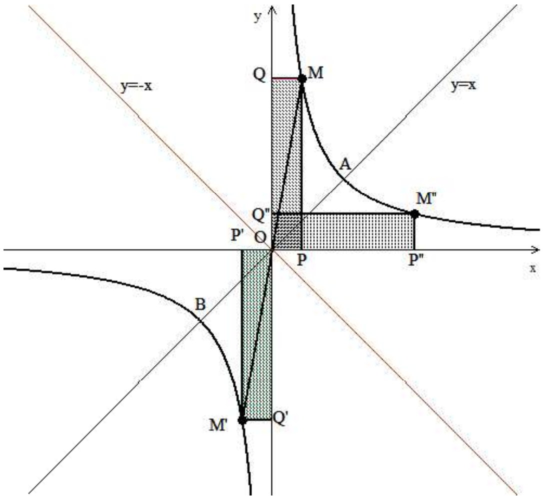

Figura 2.11: Eixos de simetria da hipérbole

Vamos considerar o sistema de coordenadas uv, obtido do sistema xy, por rotação de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ (ou $45°$), conforme figura 2.12. Neste caso os novos eixos coordenados são as retas $x = y$ e $x = -y$. A reta r que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ e é paralela a reta $x = -y$ tem equação $y = -x + x_0 + y_0$. A reta s que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ e é paralela a reta $x = y$ tem equação $y = x - x_0 + y_0$.

A intersecção da reta r com a reta $y = x$ é o ponto U de coordenadas $\left(\frac{x_0+y_0}{2}, \frac{x_0+y_0}{2}\right)$. A intersecção da reta s com a reta $y = -x$ é o ponto V de coordenadas $\left(\frac{x_0-y_0}{2}, \frac{y_0-x_0}{2}\right)$.

As distâncias do centro O do sistema aos pontos U e V, que fornecem as coordenadas de P, no sistema uv, são $d_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|x_0 + y_0|$ e $d_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|x_0 - y_0|$, respectivamente. Este raciocínio permite concluir que as coordenadas de P no sistema uv são

$\frac{\sqrt{2}}{2}(x_0+y_0), \frac{\sqrt{2}}{2}(y_0-x_0)$.

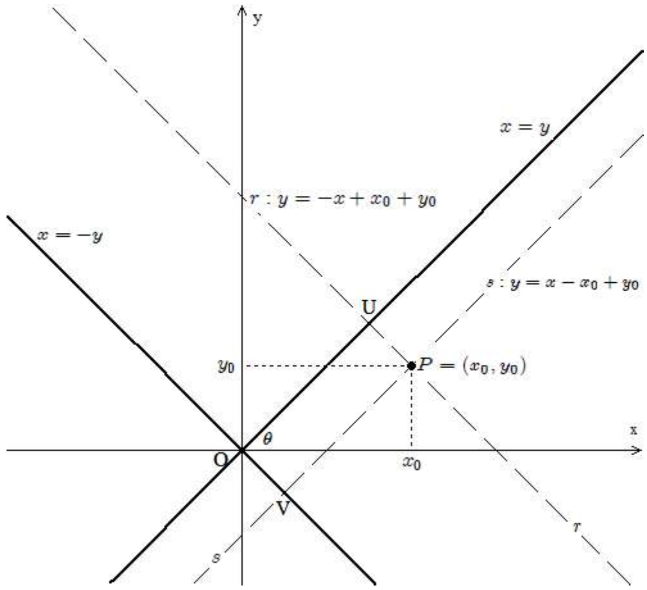

Figura 2.12: Rotação do sistema xy

Consequentemente, se um ponto P tem coordenadas (x, y) no sistema xy e (u, v) no sistema uv, estas se relacionam por meio das equações

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \text{ e } v = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)$$

Logo,

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= \frac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2\right) - \frac{1}{2}\left(x^2-2xy+y^2\right) \\ &= 2xy \end{aligned}$$

Se $xy = a$, então $u^2 - v^2 = 2a$.

Portanto a hipérbole $xy = a$ pode ser escrita na forma $x^2 - y^2 = 2a$, e reciprocamente. Para tal basta que seja considerada um rotação $\frac{\pi}{4}$ do plano. Por exemplo, as hipérboles $xy = 1$ e $x^2 - y^2 = 2$ são obtidadas uma da outra por rotação.

Capítulo 3

As Funções Hiperbólicas no Ensino Médio

Certas combinações das funções exponenciais são tão frequentemente usadas nas aplicações da matemática que recebem nomes especiais. Duas delas são as funções seno e cosseno hiperbólico. Daremos inicialmente a interpretação geométrica de cada ponto da hipérbole e associando a ele, o seno e o cosseno hiperbólico. Posteriormente vamos dar a definição das funções hiperbólicas como soma e subtração das funções $\exp x$ e $\exp(-x)$. Estas últimas serão respectivamente denotadas por e^x e por e^{-x}.

Vamos considerar o ramo pertencente ao primeiro e ao quarto quadrante da hipérbole equilátera de equação $x^2 - y^2 = 1$, como na figura 3.1. A partir da origem traçamos um segmento de reta $\overline{OP}$ que intersepta a hipérbole no ponto P. A esse ponto associamos o cosseno hiperbólico de x e o seno hiperbólico de x, onde x é o dobro da área formada pela região hiperbólica R, limitada pelas retas $y = 0$, pelo segmento $\overline{OP}$ e pela hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, conforme figura 3.1.

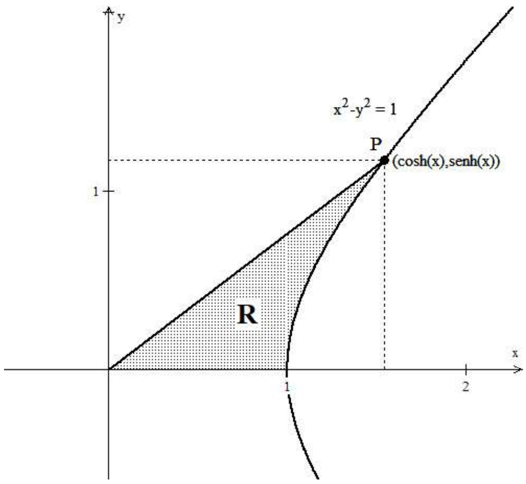

Figura 3.1: Hipérbole Equilátera

Como estamos considerando o ramo direito da hipérbole, os valores de $\cosh(x)$ são sempre positivos, e os valores de $\text{senh}(x)$ são ora positivos ora negativos . Vimos no capítulo anterior que a cada ponto P da circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$ fazemos corresponder $(\text{sen}(\theta), \cos(\theta))$, sendo θ o ângulo que forma, no sentindo anti-horário, o eixo das abscissas com o segmento de reta que passa pela origem e pelo ponto P. Nas funções hiperbólicas não trabalhamos com arcos, e sim com regiões hiperbólicas. A interpretação geométrica dada ao número real "x" é a de que x corresponde ao dobro da área formada pela região hiperbólica, ou seja, podemos ter essa mesma interpretação na trigonometria circular. Observe a figura 3.2.

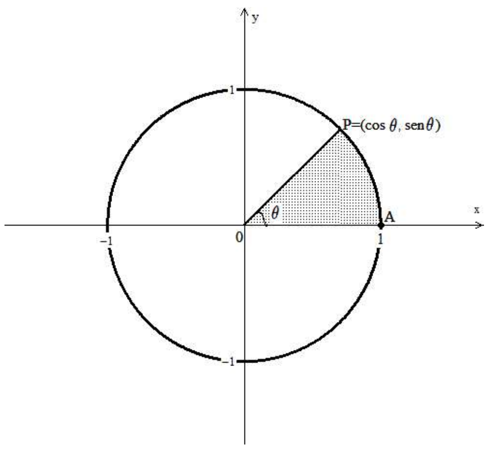

Figura 3.2: Região Circular

Sabemos que a área do setor circular AOP é dada por $A_s = \frac{\theta r^2}{2}$, sendo θ o arco dado em radianos. Com $r = 1$ temos

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{\theta r^2}{2} \\ A_s &= \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Portanto θ é o dobro da área da região circular.

As funções hiperbólicas e funções circulares têm em comum além do nome, algumas propriedades, pois as funções trigonométricas satisfazem a equação da circunferência de raio 1 e as funções hiperbólicas a equação da hipérbole equilátera. Sabemos que as funções circulares seno e cosseno são funções periódicas e limitadas e as hiperbólicas, por sua vez, são funções ilimitadas e não periódicas pois, por definição, são funções originadas da soma e subtração de funções exponenciais cuja base é o número de Euler "e", como veremos nas próximas definições.

As funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico são definidas, respectivamente por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad e \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

As demais funções hiperbólicas são definidas em termos das funções seno e cosseno hiperbólicos.

As funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} \qquad & \operatorname{cotanh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} \\ \operatorname{sech}(x) &= \frac{1}{\cosh(x)} \qquad & \operatorname{cosech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} \end{aligned}$$

As funções hiperbólicas definidas acima podem ser expressas em termos das funções exponenciais usadas na definição do seno e cosseno hiperbólico, dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad & \operatorname{cotanh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ \operatorname{sech}(x) &= \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad & \operatorname{cosech}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

Existem identidades satisfeitas pelas funções hiperbólicas que são similares aquelas que são satisfeitas pelas funções trigonométricas, como é o caso da relação fundamental $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Observe que existe uma identidade similar que é satisfeita pelas funções hiperbólicas.

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-x} - e^{2x} + 2e^0 - e^{-2x}}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

As funções hiperbólicas calculadas na soma, diferença, dobro e metade de um número real, tem propriedades similares as funções trigonométricas.:

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(x \pm y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) \pm \operatorname{senh}(y)\cosh(x) \\
\operatorname{senh}(2x) &= 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x) \\
\operatorname{senh}\left(\frac{x}{2}\right) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}, \text{ se } x \geq 0 \\ \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}, \text{ se } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cosh(x \pm y) &= \cosh(x)\cosh(y) \pm \operatorname{senh}(y)\operatorname{senh}(x) \\
\cosh(2x) &= \operatorname{senh}^2(x) + \cosh^2(x) \\
\cosh\left(\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\cosh(x)+1}{2}}
\end{aligned}$$

Vamos abordar agora os gráficos das funções hiperbólicas seno, cosseno e tangente.

No Ensino Médio quando vamos esboçar gráficos de funções costumamos utilizar uma tabela com valores relacionados a x e y, pois dessa forma os alunos podem acompanhar o comportamento da construção do gráfico no plano cartesiano e concluir por eles mesmos que os pontos descreverão a curva que representa o gráfico. Para facilitar o preenchimento dessa tabela e ter uma análise de cada ponto do gráfico das funções hiperbólicas criamos uma tabela auxiliar no excel, pois calcular pontos dos gráficos das funções hiperbólicas, utilizando calculadora comum é exaustivo, e nada atrativo aos alunos.

x	$\operatorname{senh}(x)$	$\cosh(x)$	$\tanh(x)$
-8	$-1490,478826$	$1490,479161$	$-0,999999775$
-7	$-548,3161233$	$548,3170352$	$-0,999998337$
-6	$-201,7131574$	$201,7156361$	$-0,999987712$
-5	$-74,20321058$	$74,20994852$	$-0,999909204$
-4	$-27,28991720$	$27,30823284$	$-0,999329300$
-3	$-10,01787493$	$10,06766200$	$-0,995054754$
-2	$-3,626860408$	$3,762195691$	$-0,964027580$
-1	$-1,175201194$	$1,54308635$	$-0,761594156$
0	0	1	0
1	$1,175201194$	$1,54308635$	$0,761594156$
2	$3,626860408$	$3,762195691$	$0,964027580$
3	$10,01787493$	$10,06766200$	$0,995054754$
4	$27,28991720$	$27,30823284$	$0,999329300$
5	$74,20321058$	$74,20994852$	$0,999909204$
6	$201,7131574$	$201,7156361$	$0,999987712$
7	$548,3161233$	$548,3170352$	$0,999998337$
8	$1490,478826$	$1490,479161$	$0,999999775$

Tabela 1: Valores numéricos do seno, cosseno e tangente hiperbólicos

Na tabela acima foram atribuídos alguns valores para x e, por meio de fórmulas do excel, obtivemos os valores de $\operatorname{senh}(x)$, $\cosh(x)$ e $\tanh(x)$. Observe que por meio dela podemos explorar a paridade de cada função. A tabela sugere que a função $\operatorname{senh}(x)$ é ímpar (assim como a função trigonométrica $\operatorname{sen}(x)$). Como exemplo temos

$$\operatorname{senh}(-4) \sim -27,2899172$$

e

$$-\operatorname{senh}(4) \sim -27,2899172$$

Na figura 3.3 esboçamos o gráfico da função $\operatorname{senh}(x)$ usando o Winplot.

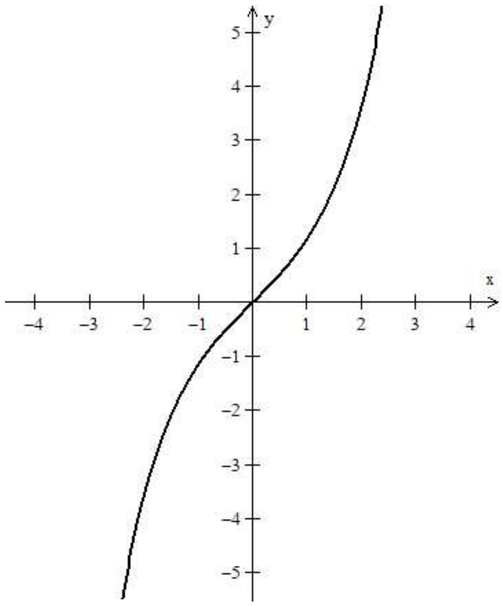

Figura 3.3: Gráfico do seno hiperbólico

O domínio e a imagem da função seno hiperbólico é o conjunto de todos os números reais.

Faremos a mesma análise para a função cosseno hiperbólico. Pela tabela 1 podemos observar também que a função $cosh(x)$ é par (assim como a função trigonométrica $\cos(x)$). Tome como exemplo $x = 1$, temos

$$\cosh(-1) \sim 1,543086635$$

e

$$\cosh(1) \sim 1,543086635$$

Abaixo vamos esboçar o gráfico da função $\cosh(x)$ usando o Winplot.

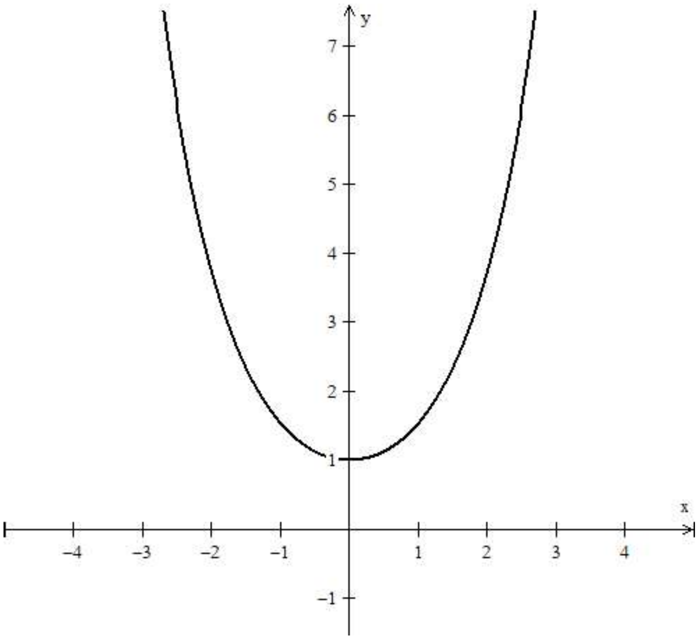

Figura 3.4: Gráfico do cosseno hiperbólico

O domínio da função cosseno hiperbólico é o conjunto de todos os reais, a imagem é o intervalo $[1, \infty)$.

A função $\tanh(x)$ é um quociente de função par e função ímpar, logo $\tanh(x)$ é uma função ímpar, cujos valores numéricos também estão dados na tabela 1. Tome como exemplo $x = -2$.

$$\begin{array}{rcl} \tanh(-2) & \sim & -0,96402758 \\ & \text{e} & \\ -\tanh(2) & \sim & -0,96402758 \end{array}$$

Vamos esboçar o gráfico de $\tanh(x)$ utilizando do Winplot.

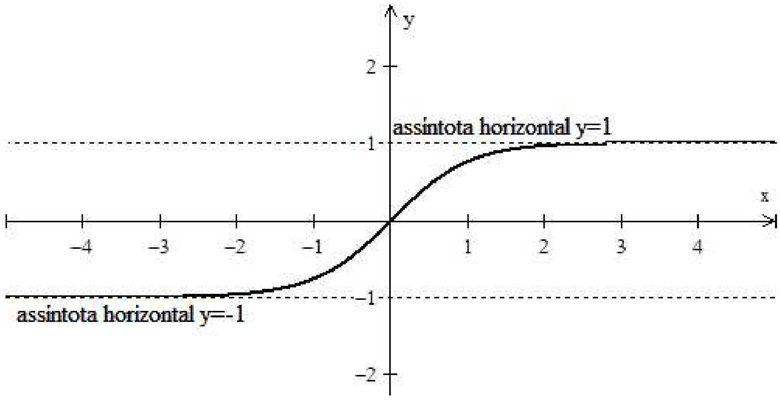

Figura 3.5: Gráfico da tangente hiperbólica

O domínio da função tangente hiperbólica é o conjunto dos números reais e a imagem é o intervalo $(-1, 1)$.

No Ensino Médio pouco se fala sobre o conceito de limite, temos a liberdade de abordar sutilmente esse conceito quando trabalhamos os gráficos das funções exponenciais, logarítmicas e da hipérbole. Neste caso, damos ao aluno uma noção simples de comportamento da função quando o valor de x se aproxima de algum valor ou do infinito. Na função tangente hiperbólica esse conceito pode ser explorado, inclusive usando a tabela acima. Os alunos poderão notar que quanto maior o valor de x mais próximo a função $\tanh(x)$ estará de 1, e quanto menor o valor de x, mais próximo a função $\tanh(x)$ se aproxima de -1. Eles poderão observar, pela tabela 1, que os valores de $\tanh(x)$ estão entre 1 e -1.

Assim podemos dizer ao aluno que limite da função tangente hiperbólica quando x se aproxima do infinito, é 1. Sem receio da generalização ou da notação podemos escrever $\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1$ e $\lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1$.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo vamos abordar alguns exemplos de aplicação das funções hiperbólicas. Algumas aplicações podem ser estudadas sem o conceito de derivadas, o que é essencial para os estudantes do Ensino Médio. Porém, para outras aplicações o conceito de derivadas é tão necessário quanto esclarecedor.

4.1 Aplicações das funções hiperbólicas sem a utilização do conceito de derivadas

Consideramos o problema da determinação da forma de um cabo flexível, fio ou corda grossa suspenso entre dois suportes verticais, sujeito a seu próprio peso. Como o cabo é flexível, então a tensão no cabo é sempre no sentido da tangente. Podemos citar, como exemplo real, um dos cabos de suporte de uma ponte suspensa, como na figura 4.1.

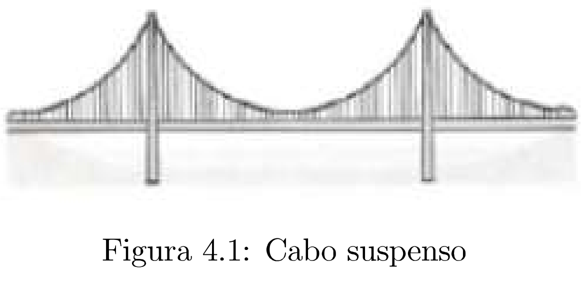

Figura 4.1: Cabo suspenso

A interpretação desse modelo requer o uso de equações diferenciais, equações essas que não são vistas nem de longe no Ensino Médio e nem em alguns cursos de graduação. Para essa primeira etapa da dedução desse modelo vamos adequar a linguagem a um grupo de alunos do Ensino Médio. Os conceitos abordados nessa primeira parte requerem um conhecimento básico dos alunos do Ensino Médio sobre vetores, assunto que é tratado no primeiro ano.

Para começar, vamos examinar somente uma parte ou elemento do cabo entre o ponto mais baixo P e um ponto arbitrário Q. Como indicado na figura 4.2, este elemento do cabo é a curva em um sistema de coordenadas retangular com o eixo y escolhido de forma a passar pelo ponto mais baixo P e o eixo x escolhido a unidades de medida abaixo do ponto Q.

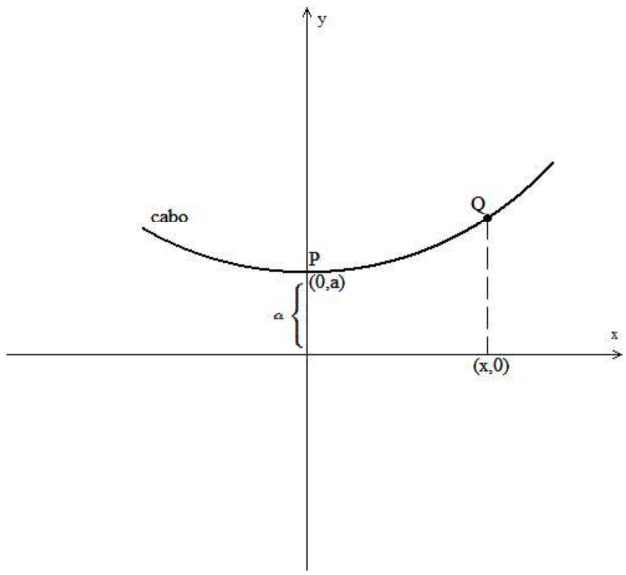

Figura 4.2: Elemento do cabo

Sejam $\overrightarrow{H}$ a tensão do cabo no seu ponto mais baixo (tangente à curva no ponto P), $\overrightarrow{T}$ a tensão do cabo no ponto Q (tangente à curva no ponto Q) e $\overrightarrow{V}$ o peso por unidade de comprimento (vertical, paralelo ao eixo y), ver figura 4.3. Denominamos $H = \left|\overrightarrow{H}\right|$, $T = \left|\overrightarrow{T}\right|$ e $V = \left|\overrightarrow{V}\right|$ o módulo (comprimento) destes três vetores (conforme figura 4.3). Agora a tensão $\overrightarrow{T}$ pode ser decomposta em termos de uma componente vertical e um horizontal, $T \operatorname{sen} \theta$ e $T \cos \theta$, repectivamente.

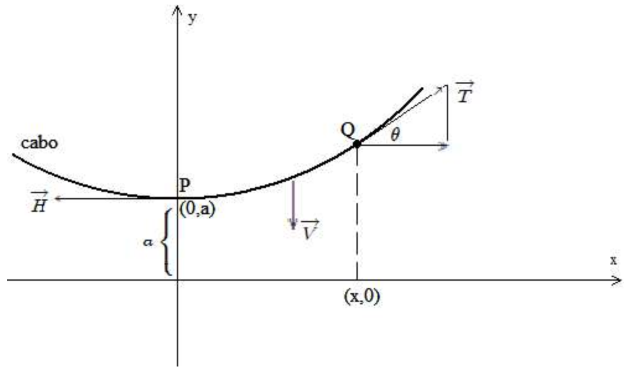

Figura 4.3: Forças sobre o cabo

Por conta do equilíbrio estático temos que

$$\overrightarrow{H} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}.$$

Como $\overrightarrow{H} = (-H, 0)$, $\overrightarrow{V} = (0, -V)$ e $\overrightarrow{T} = (T\cos\theta, T \operatorname{sen}\theta)$, podemos escrever

$$H = T\cos\theta \text{ e } V = T\sin\theta$$

Divindindo a segunda equação acima pela primeira, temos

$$\frac{T \operatorname{sen}\theta}{T\cos\theta} = \frac{V}{H}$$

ou

$$\tan\theta = \frac{V}{H}$$

Esta equação pode ser trabalhada em laboratórios de matemática e permite relacionar o peso do cabo com a sua tensão, bastando para isso medir o ângulo θ em alguns pontos. Esta é uma forma de se trabalhar com a curva da catenária de modo puramente geométrico. A equação também tem um carater interdisciplinar, pois relaciona geometria e física de modo simples e contextualizado.

A equação acima serve como modelo tanto para a forma de um cabo flexível, como para um cabo telefônico pedurado sobre seu próprio peso, quanto para os cabos que suportam pistas de uma ponte pênsil. Essa equação é abordada em nível superior, sendo tratada como uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que, quando resolvida, leva à equação da catenária.

Vamos analisar os elementos que fazem parte da equação da catenária, sem fazer a sua demonstração formal, uma vez que esta demonstração não poderá ser realizada no Ensino Médio.

Consideremos uma corrente supensa, pendurada entre dois pontos, como na figura 4.4:

Figura 4.4: Corrente
Suspensa

Vamos supor que a corrente é flexível, tem densidade uniforme e a distância do ponto mais baixo da corrente ao solo é a. Escolhendo o sistema cartesiano sugerido pela própria figura 4.4, podemos determinar as coordenadas (x, y) de cada ponto da corrente e relacionar as mesmas por meio da equação

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Supondo que a distância entre os pontos de sustentação da corrente é $2r$ e que a distância desses ao solo é p, temos a catenária ilustrada na figura 4.5

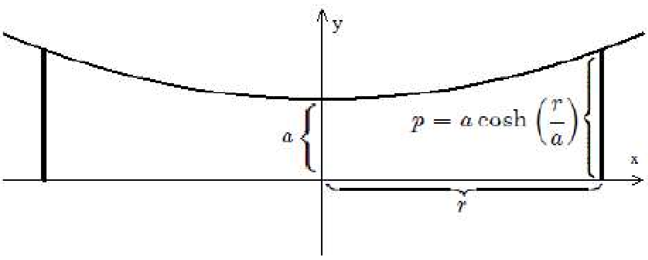

Figura 4.5: Catenária $y = f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

O problema de descrever matematicamente a forma da curva formada por um fio suspenso entre dois pontos e sob a ação exclusiva da gravidade foi proposto por Galileu Galilei, que propôs a conjectura de que a curva fosse uma parábola. Aos 17 anos de idade, Huygens mostrou em 1646 de que a conjectura de Galileu era falsa. Em 1690, Jakob Bernoulli relançou o problema à comunidade científica. A resolução do problema foi publicada independentemente em 1691 por Leibniz, Huygens e o próprio Bernoulli.

As variações da catenária podem ser obtidas por translação vertical da curva. Neste caso uma catenária é o gráfico de uma função real cuja expressão é

$$f(x) = b + a\cosh\left(\frac{x}{a}\right),$$

sendo b um número real positivo a ser somado (transladando a catenária b unidades para cima) ou subtraído (transladando a catenária b unidades para baixo).

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.1 *Uma linha de telefone é pendurada entre dois postes separados a 14 m na forma de catenária de equação $y = -15 + 20\cosh\left(\frac{x}{20}\right)$, onde x e y são medidos em metros. Seja s a reta tangente à curva quando ela encontra o poste à direita.*

a) Encontre a inclinação da reta s.

b) Encontre o ângulo agudo θ, que forma a reta s com poste a direita.

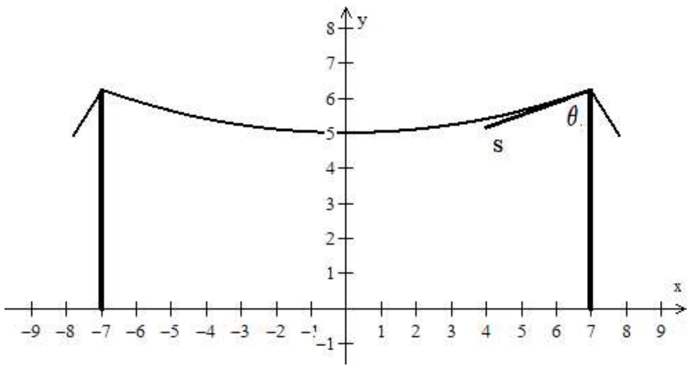

Figura 4.6: $f(x) = -15 + 20cosh\left(\frac{x}{20}\right)$, $x \in [-7, 7]$

Solução

a) Este problema poderia ser resolvido facilmente com o uso de derivada. Entretanto esse conceito não é abordado no Ensino Médio. Desta forma vamos usar recursos visuais com o auxílio do winplot e conceitos que os estudantes do Ensino Médio conhecem.

Como o poste está a $7m$ á direta da origem, esse valor é a coordenada do ponto x. Para determinar y vamos substituir na equação da catenária.

$$\begin{aligned} y &= -15 + 20\cosh\left(\frac{x}{20}\right) \\ y &= -15 + 20\cosh\left(\frac{7}{20}\right) \\ y &\simeq -15 + 21.23 \\ y &\simeq 6.23 \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do ponto de encontro da catenária com o poste a direita são $x = 7$ e $y \simeq 6.23$.

Considere que a inclinação da reta s é m. Então s é a reta que passa pelo ponto $(7, 6.23)$ e tem equação

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m\,(x - x_0) \\ y - 6.23 &= m\,(x - 7) \\ y - 6.23 - mx + 7m &= 0 \\ y - mx - 6.23 + 7m &= 0 \qquad (4.1) \end{aligned}$$

Estamos interessados em deteminar o valor de m. Como não vamos usar derivadas, a ideia é construir uma reta passando pelo ponto $(7, 6.23)$ que seja tangente a curva da catenária nesse ponto. Essa construção nos dará uma aproximação do valor do coeficiente angular m. Para determinar esse valor aproximado de m os alunos farão uso o winplot e escreverão a equação da reta (4.1) atribuindo valores ao parâmetro m.

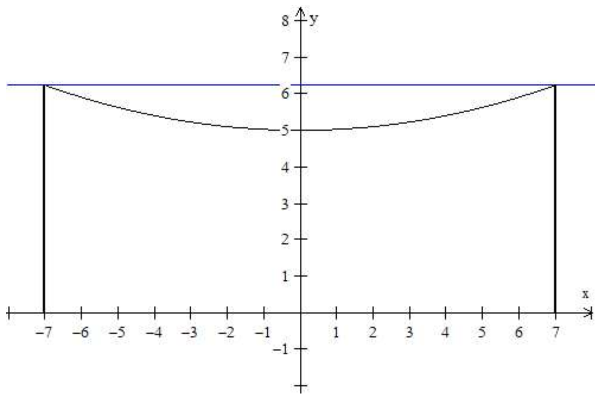

Figura 4.7: Reta tangente com parâmetro

$m = 0$

Na figura 4.7 equação da reta aparece com o parâmetro $m = 0$ e o desenho da mesma está paralela ao eixo x, não formando assim a reta tangente desejada. Os alunos deverão mudar o parâmetro e observar o comportamento da reta. Para que a atividade não se torne cansativa, devemos deixar os alunos testar alguns pontos e sugerir outros. Nesta sugestão deverá constar o parâmetro correto, que já teremos encontrado com antecedência usando derivadas. Podemos sugerir $m = 0,35$ e $m = -0,35$.

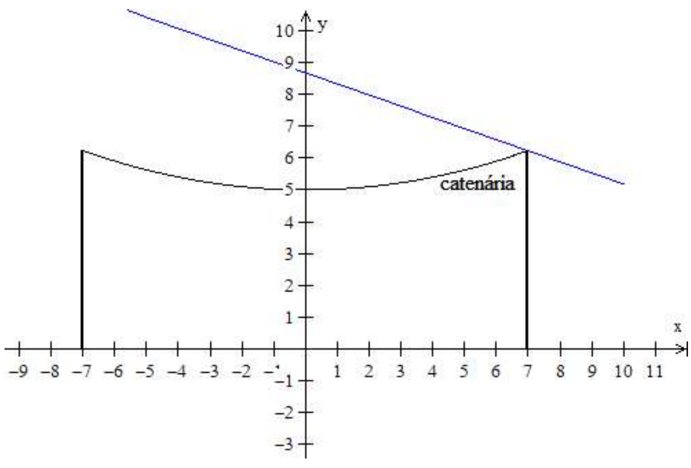

Figura 4.8: Reta tangente com parâmetro

$m = -0.35$

Observe que a figura 4.9 apresenta a reta procurada.

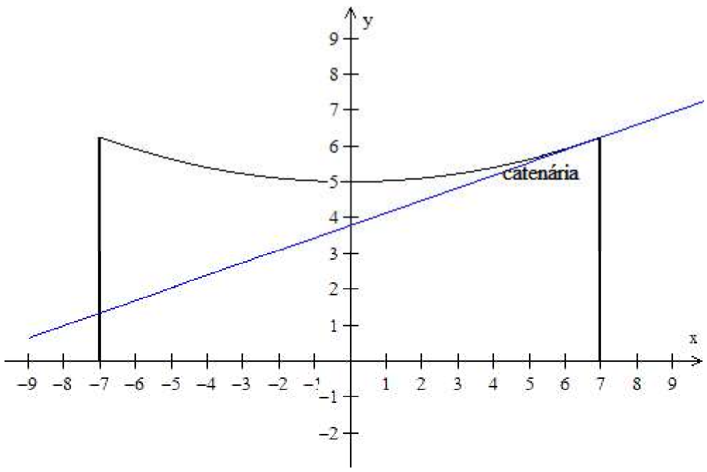

Figura 4.9: Reta tangente com parâmetro

$m = 0.35$

Os alunos poderão comprovar que o valor do parâmetro m é realmente o coeficiente angular procurado, basta aplicar a razão trigonométrica tangente. Na figura 4.10 temos cateto oposto medindo aproximadamente $6.23cm$ e o cateto adjacente medindo $17.9cm$.

$$\tan\beta = \frac{CO}{CA} \simeq \frac{6,23}{17,9} \simeq 0,348$$

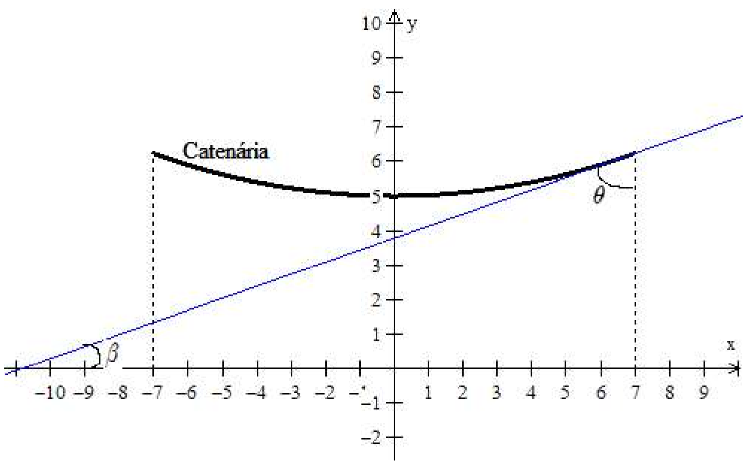

Figura 4.10: Cateto Oposto e Cateto adjacente ao

ângulo β

Devemos salientar que o valor encontrado é apenas uma aproximação e o recurso visual nos dá uma base. Apenas o recurso algébrico nos fornece o valor correto, que é um número irracional.

b) Para resolvermos o item b), basta usarmos uma calculadora científica e determinar a inversa da tangente.

$$\arctan(0.348) \simeq 19.19^o.$$

O ângulo encontrado, corresponde ao ângulo que forma a reta s e o eixo x. O enunciado quer que determinemos o ângulo que forma a reta s com o poste a direta. Logo, θ é (aproximadamente) o ângulo complementar β:

$$\begin{aligned}\theta &\simeq (90^o - 19.19^o)\\ \theta &\simeq 70.81^o\end{aligned}$$

Exemplo 4.2 *Considere as funções* $f(x) = \cosh(x)$ *e* $g(x) = 2\,\text{senh}(x)$.

a) Use o software winplot para esboçar o gráfico das duas funções em um único sistema cartesiano.

b) As funções dadas se interseptam em algum ponto? Justifique sua resposta. Em caso afirmativo, encontre as coordenadas do ponto de intersecção das duas funções.

Solução:

a) Para este item os alunos deverão abrir o Winplot e desenhar os gráficos. O procedimento para construção do gráfico se encontra no tutorial sobre o Winplot no apêndice.

b) Sim, podemos ver claramente essa intersecção no esboço do gráfico das duas funções, conforme figura 4.11. Nesta questão o professor deverá incentivar o aluno a encontrar a intersecção pela observação dos gráficos.

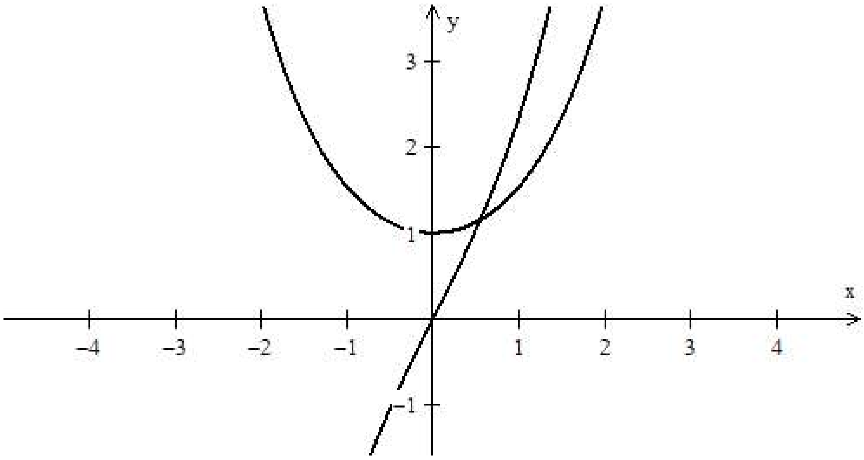

Figura 4.11: Intersecção de 2 senh (x) com $\cosh(x)$.

Ao movimentar o mouse sobre o ponto de intersecção as coordenadas do ponto aparecerão na tela, ver figura 4.12. Basta anotar os valores encontrados.

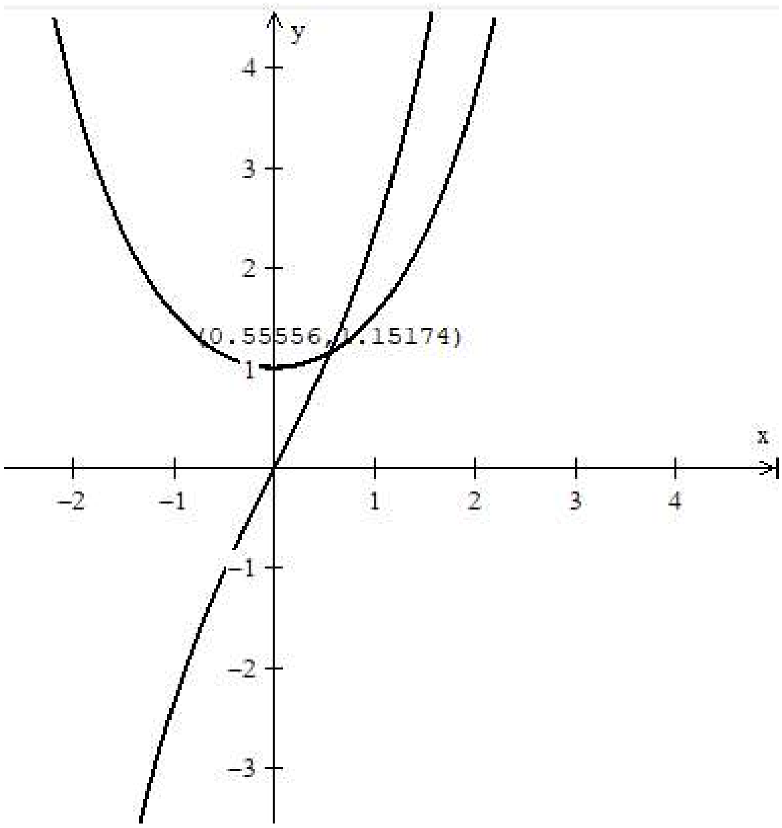

Figura 4.12: Ponto de intersecção.

Para determinar as coordenadas do ponto de intersecção o aluno deverá utilizar as definições de $\operatorname{senh}(x)$ e $\cosh(x)$ e resolver a equação formada. Segue a resolução esperada pelos alunos.

Como buscamos a intersecção vamos igualar as duas funções. Temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
\cosh x &= 2\operatorname{senh} x \\
\frac{e^x + e^{-x}}{2} &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\
e^x + e^{-x} &= 2\left(e^x - e^{-x}\right) \\
e^x + e^{-x} - 2e^x + 2e^{-x} &= 0 \\
-e^x + 3e^{-x} &= 0 \\
-e^x + \frac{3}{e^x} &= 0 \\
-e^{2x} + 3 &= 0 \\
e^{2x} &= 3 \\
\ln(e^{2x}) &= \ln 3 \\
2x \ln e &= \ln 3 \\
2x &= \ln 3 \\
x &= \frac{\ln 3}{2} \\
x &\cong 0,55
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de x encontrado acima, na função dada, temos

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\ln 3}{2}\right) &= \cosh\left(\frac{\ln 3}{2}\right) \\
f\left(\frac{\ln 3}{2}\right) &\cong 1,155
\end{aligned}$$

Substituindo em $g(x)$ obtemos o mesmo valor.

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{\ln 3}{2}\right) &= 2\operatorname{senh}\left(\frac{\ln 3}{2}\right) \\
g\left(\frac{\ln 3}{2}\right) &\cong 1,155
\end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do ponto de intersecção das curvas são $\left(\frac{\ln 3}{2}; \cosh\left(\frac{\ln 3}{2}\right)\right) \cong (0,55; 1,155)$

Exemplo 4.3 *Sabendo que* $\cosh(x) = \frac{13}{5}$ *, determine:*

a) O valor de $\operatorname{senh}(x)$.

b) O valor de x.

Solução:

a) Exemplos similiares a este são bastante usuais no Ensino Médio quando abordamos as razões trigonométricas, pois através deles os alunos podem trabalhar a identidade fundamental da trigonometria $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.Tendo em vista que as funções hiperbólicas $\operatorname{sen} h(x)$ e $\cosh(x)$ se assemelham às trigonométricas, pois satisfazem a idententidade $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2(x) = 1$, podemos utilizar o mesmo raciocínio para a resolução.

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2(x) &= 1 \\
\operatorname{senh}^2(x) &= \frac{169}{25} - 1 \\
\operatorname{senh}^2(x) &= \frac{144}{25} \\
\operatorname{senh}(x) &= \pm\frac{12}{5}
\end{aligned}$$

Como a função $\cosh(x)$ é uma função par, então são dois os valores de x para os quais $\cosh(x) = \frac{13}{5}$. Se $x > 0$, então $\operatorname{sen} h(x) = \frac{12}{5}$. Se $x < 0$, então $\operatorname{sen} h(x) = -\frac{12}{5}$

b) Como

$$\cosh(x) = \frac{13}{5} \text{ e } \operatorname{senh}(x) = \pm\frac{12}{5},$$

Temos que

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{13}{5} \text{ e } \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \pm\frac{12}{5}$$

Somando as duas equações, membro a membro, obtemos

$$\overset{x}{e} = \frac{13 \pm 12}{5}.$$

Logo

$$\begin{aligned} x &= \ln\left(\frac{13 \pm 12}{5}\right) \\ x &= \ln(5) \text{ ou } x = \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5) \end{aligned}$$

4.2 Aplicações das funções hiperbólicas com a utilização do conceito de derivadas

Algumas propriedades algébricas das funções hiperbólicas são simalares às das funções trigonométricas. Por exemplo,

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \operatorname{senh}(x).$$

De fato, temos que $\frac{d}{dx}\,\mathrm{e}^{ax} = a\,\mathrm{e}^{ax}$. Logo,

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x).$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\operatorname{senh}(x)) &= \cosh(x) \\ \frac{d}{dx}(\tanh(x)) &= \operatorname{sech}^2(x) \end{aligned}$$

Conhecendo as derivadas das funções hiperbólicas podemos resolver vários problemas geométricos e de aplicação.

Exemplo 4.4 *Determine a equação da reta* t, *tangente a curva* $y = \cosh(x)$, *no ponto* $(1, \cosh(1))$. *Em seguida, com auxílio do Winplot, faça um esboço da curva e da reta* t.

Solução: A inclinação m da reta tangente à curva no ponto de abscissa $x = 1$ é a derivada da função $y = f(x) = \cosh(x)$, neste pónto. Como

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \operatorname{senh}(x),$$

então a inclinação $m = \operatorname{sen} h(1) = \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}$. A equação de t é

$$\begin{aligned}
y - \cosh(1) &= \operatorname{senh}(1)\,(x-1)\\
y &= \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}\,(x-1) + \frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{2}\\
y &= \left(\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}\right)x + \mathrm{e}^{-1}\\
y &= \left(\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}\right)x + \frac{1}{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

O esboço da curva e da reta t pode ser visto na figura 4.10.

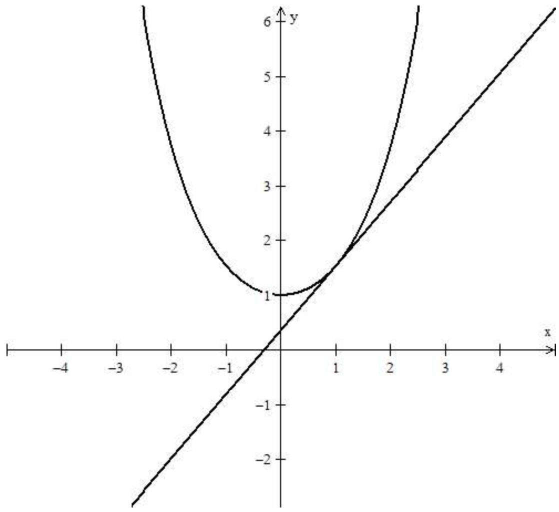

Figura 4.10: Reta tangente a curva

y=cosh(x)

Voltamos a parte a) do exemplo 4.1, agora utilizando derivadas. Temos

$$\begin{aligned}
y &= -15 + 20\cosh\left(\frac{x}{20}\right)\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(15 + 20\cosh\left(\frac{x}{20}\right)\right)\\
&= \frac{d}{dx}\,(15) + \frac{d}{dx}\left(20\cosh\left(\frac{x}{20}\right)\right)\\
&= \left(20\operatorname{senh}\left(\frac{x}{20}\right)\right)\left(\frac{1}{20}\right)\\
&= \operatorname{senh}\left(\frac{x}{20}\right)
\end{aligned}$$

Como $x = 7$,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{senh}\left(\frac{x}{20}\right) \\ \frac{dy}{dx} &\simeq 0,3571 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de x encontrado acima, na função dada, temos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\ln 3}{2}\right) &= \cosh\left(\frac{\ln 3}{2}\right) \\ f\left(\frac{\ln 3}{2}\right) &\cong 1,155 \end{aligned}$$

Substituindo em $g(x)$ obtemos o mesmo valor.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\ln 3}{2}\right) &= 2\operatorname{senh}\left(\frac{\ln 3}{2}\right) \\ g\left(\frac{\ln 3}{2}\right) &\cong 1,155 \end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do ponto de intersecção das curvas são $\left(\frac{\ln 3}{2}; \cosh\left(\frac{\ln 3}{2}\right)\right) \cong (0,55; 1,155)$

Capítulo 5

Considerações Finais

O presente trabalho teve como objetivo principal apresentar uma forma de abordagem das funções hiperbólicas para estudantes do Ensino Médio. O mesmo proporcionou o desafio de transformar uma linguagem acadêmica e mais formais em uma linguagem rotineira e mais comum aos alunos do Ensino Médio, por meio do uso de recursos tecnológicos e algébricos. Nos capítulos que se seguiram foram apresentados exemplos que facilitaram a compreensão e transformação das linguagens. Para esses exemplos foram apresentadas algumas soluções que servirão de sugestão para os professores que tiverem acesso a esse trabalho possam usá-lo na integra ou como apoio para clarear ideias e aprimorar as soluções dadas. Destacamos também o uso das funções hiperbólicas com outras componentes curriculares, como a física, facilitando assim ao professor de Ensino Médio a interdiciplinaridade, conceito esse que faz parte da rotina do professor, mas com conteúdos, por vezes, de dificil articulação. Apresentamos também, de maneira formal os conceitos de função hiperbólica, utilizando derivadas, dando assim ao leitor, uma abordagem acadêmica ao trabalho. A utilização de softwares gratuitos como o winplot, pode tornar as sugestões de soluções apresentadas mais próximas da realidade dos alunos, e ainda proporcionar ao leitor, que tenha pouca intimidade com o software, a oportunidade de conhecer a ferramenta por meio das ilustrações que foram apresentadas no apêndice. Essa parte do trabalho é de suma importância ao professor de Ensino Médio, pois ele pode aproveitar o exposto como sugestão para aprimorar e tornar as suas aulas mais atrativas.

Esse trabalho pode servir como apoio a professores de nível superior também, pois o mesmo apresenta uma abordagem geométrica que facilita a compreensão de conceitos, como o da catenária, que são muito explorados em cursos de engenharia. O desafio de tornar as aulas de matemática acessíveis sem que as mesmas percam a elegância é enfrentado por cada docente de diferentes modos, procuramos nessa dissertação apresentar sugestões de soluções que podem ser enriquecidas de acordo com o olhar e objetivo de cada leitor, oportunizando a compreensão do estudante, que é o objetivo principal.

...

Neste apêndice apresentaremos um pequeno tutorial de uso do Winplot. A intenção é descrever os passos de construção de curvas, segmento e regiões que serviram de ilustração para este trabalho de dissertação. Para mais detalhes sobre a utilização do Winplot em construções não vistas neste trabalho, como por exemplo animações e figuras em 3D, sugerimos os tutoriais dados em

https://www.ime.unicamp.br/~marcio/tut2005/winplot/043808Gregory.pdf

http://www.mat.ufpb.br/sergio/winplot/winplot.html.

O Winplot é um aplicativo gratuíto e executável. Isto permite a sua utilização em máquinas simples ou até mesmo no espaço de PenDrive. Esta é uma poderosa ferramenta no ensino de matemática, tanto de nível médio, quanto de nível superior.

Em qualquer das atividades descritas abaixo o primeiro passo é clicar em "janela"e em seguida "2-dim".

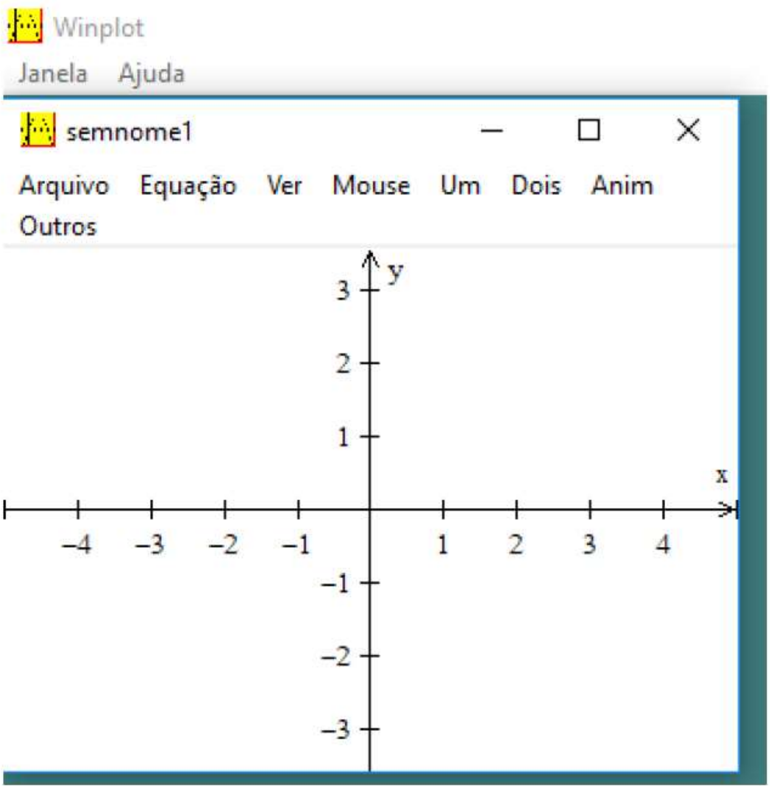

Figura A1: Janela 2-dim

A - FUNÇÕES EXPLÍCITAS: Vamos começar esboçando gráficos de funções dadas explicitamente por uma equação da forma $y = f(x)$. Clicando em "equação"será aberta uma janela com várias opções. Clicamos na primeira opção "1.Explicita". Uma nova janela se abrirá e será oferecida uma função $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$. Devemos apagar esta expressão e digitar a expresão da função que querermos ver o gráfico.

Os gráficos de outras funções (explicitas ou não, segmentos, pontos, etc) podem ser colocados no mesmo plano cartesiano, basta clicar em "equação"e digitar a expressão de uma nova função. É possível, na mesma janela onde se digita a expressão da função, escolher o intervalo de definição da função, a cor do gráfico e a espessuma da linha da curva.

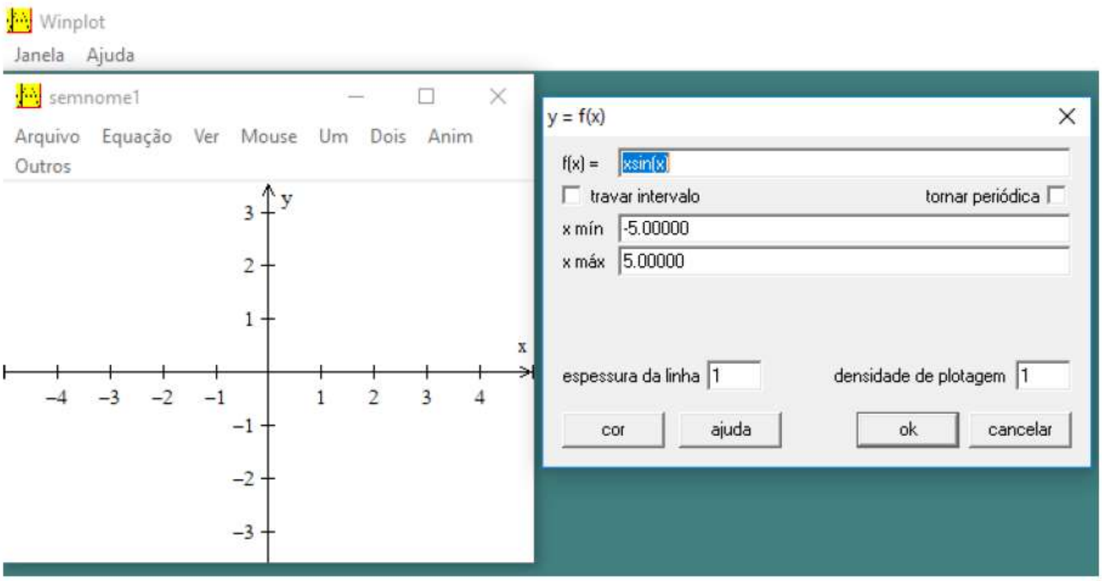

Figura A2: Equação Explícita

Ilustramos com as funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = 2$.

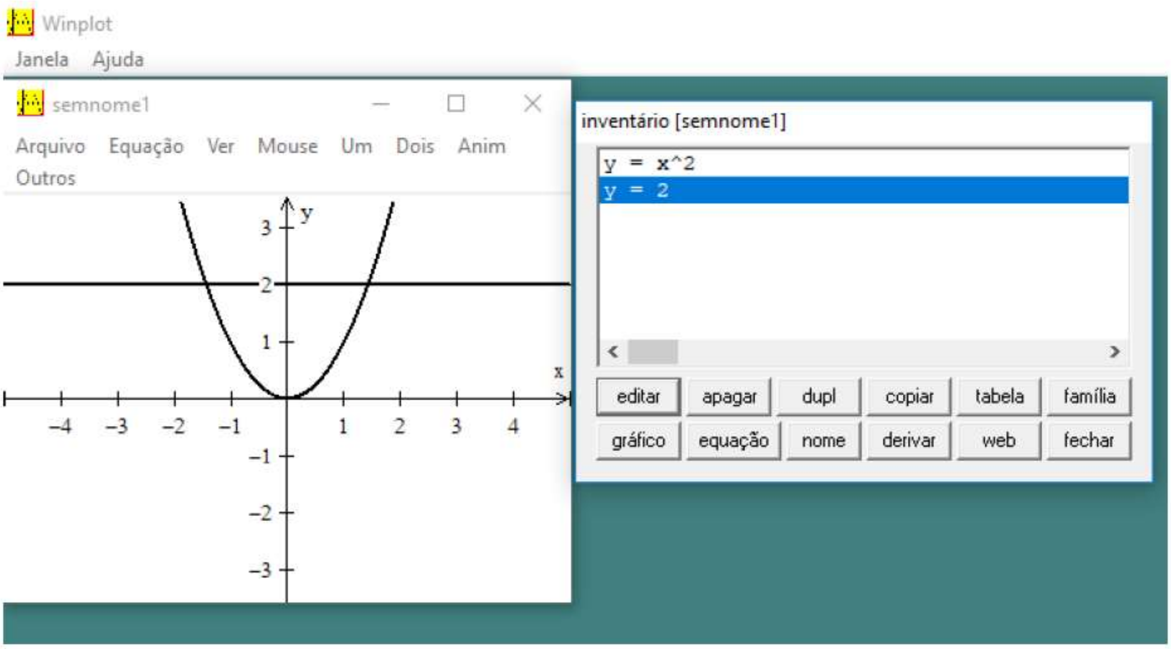

Figura A3: Esboço de vários gráficos no mesmo plano

B - FUNÇÕES IMPLÍCITAS: Para o esboço de curvas dadas implicitamente clicamos, depois de "equação, em "3.Implícita". Devemos apagar a equação $xx + yy = 13$ e digitar a equação que desejamos. Novamente podemos escolher a cor da curva a ser esboçada, a espessura da linha e uma restriçaõ sobre a variação de x ou de y.

A Ilustração da figura A4 contém o esboço das curvas $x^2 + y^2 = 4$ e $y = x$.

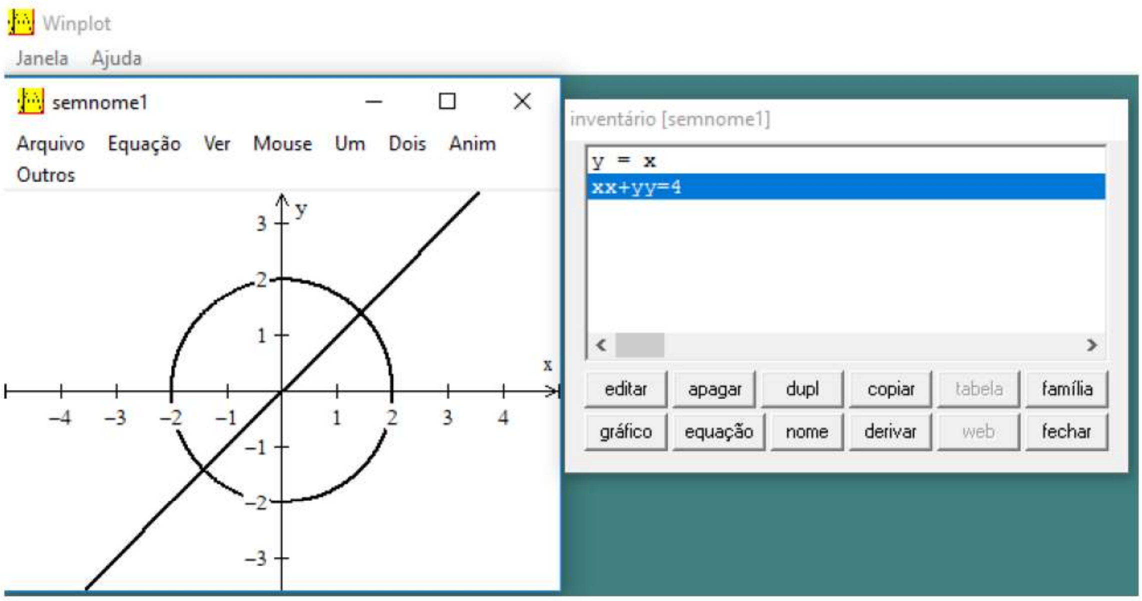

Figura A4: Equações Implícitas

A qualquer momento podemos, depois de "equação", clicar em "Inventário"e redefinir as funções e as características escolhidas para a curva.

C - PONTOS: Conhecendo as coordenadas cartesianas ou as coordenadas polares de pontos, podemos representá-los no plano cartesiano. Depois de clicar em "equação"vamos até a quinta linha da janela. Clicamos em "Ponto". Uma nova janela se abrirá para que possamos escolher entre as coordenadas cartesianas (x, y) ou as coordendas polares (r, t) . É possivel também pedir uma lista de pontos. Escolhida, por exemplo, a opção (x, y) devemos apagar as coordenadas 2.54 e $pi/3$. Em seguida podemos digitar as coordenadas do ponto que desejamos ver representado no plano cartesiano. Na mesma janela podemos escolher o tamanho e a forma da representação do ponto.

Ilustramos na figura A5 os pontos $P = (-1, 2)$ e $Q = (2, 3)$. Para identificar os pontos seguimos o procedimento descrito em **G**.

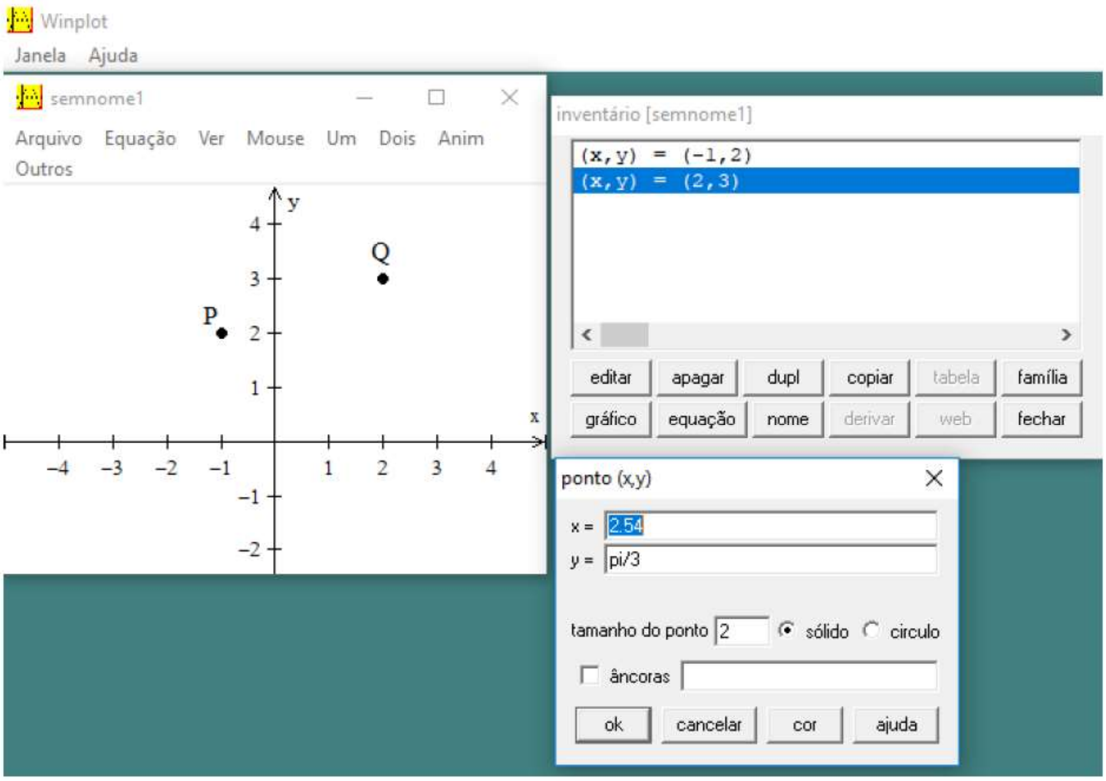

Figura A5: Pontos no plano

D - SEGMENTOS E RETAS. As sexta e sétimas linha da janela "equação" oferecem o esboço de segmentos de retas e retas, respectivamente. Para o esboço de segmentos devemos escolher os extremos. Para o esboço de retas devemos escolher os coeficientes a, b e c da equação $ax + by = c$. Características como espessura, cor e variação de x podem escolhidas na mesma janela.

Partindo dos pontos esboçados no procedimento **C**, ilustramos o segmento de reta com extremos em $P = (-1, 2)$ e $Q = (2, 3)$, na figura A6. Ilustramos também a reta $x - 2y = 3$, na figura A7.

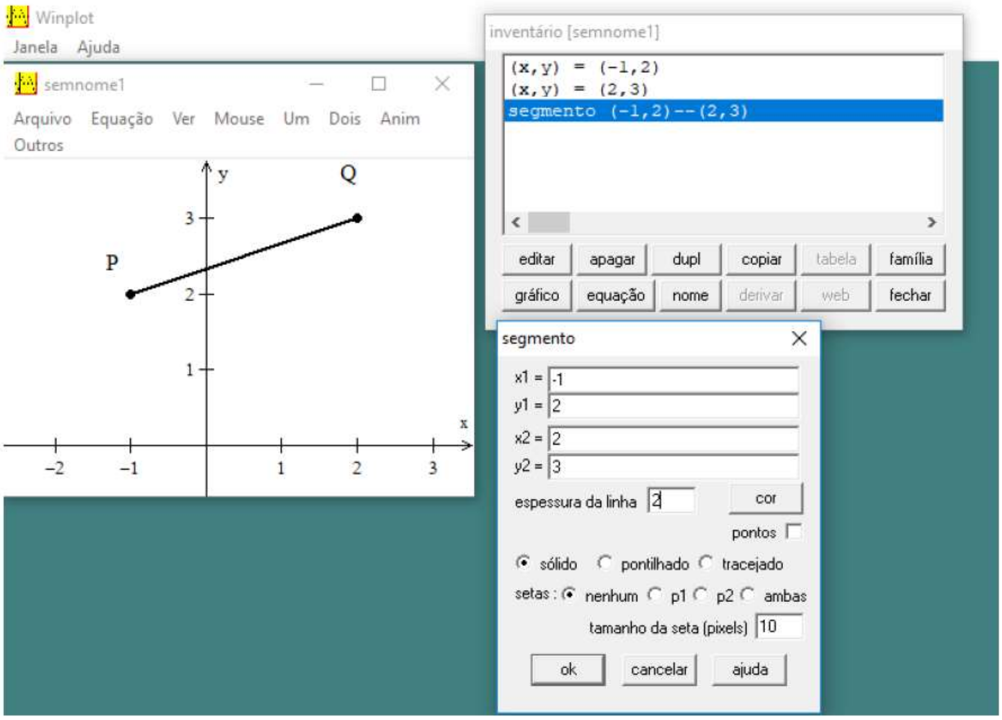

Figura A6: Segmentos

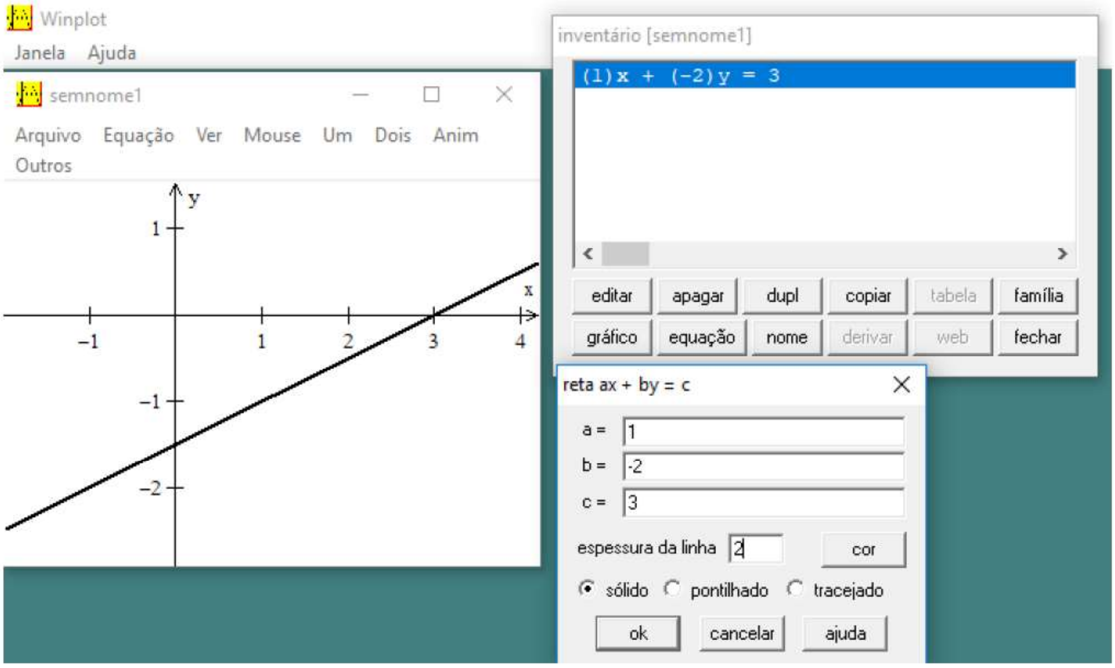

Figura A7: Retas no Plano

E - REGIÕES DO PLANO: Regiões do plano podem ser delimitadas por curvas dadas implicitamente ou explicitamente. Para destacar (hachurar) uma região do plano, que está delimitada por curvas definidas explicitamente, devemos clicar na décima segunda linha da janela "equação", em "Desigualdades explícitas". Uma janela se abrirá para que possamos escolher hachurar uma região acima ou abaixo de uma dada curva. Na mesma janela podemos escolher uma região entre duas curvas. Depois de feita a escolha do intervalo ao qual deve pertencer o valor de x e a cor que irá destacar a região, devemos clicar em "sombrear".

A ilustração da figura A8 é da região do plano entre as curvas explicitas $y = x^2$ e $y = 2$.

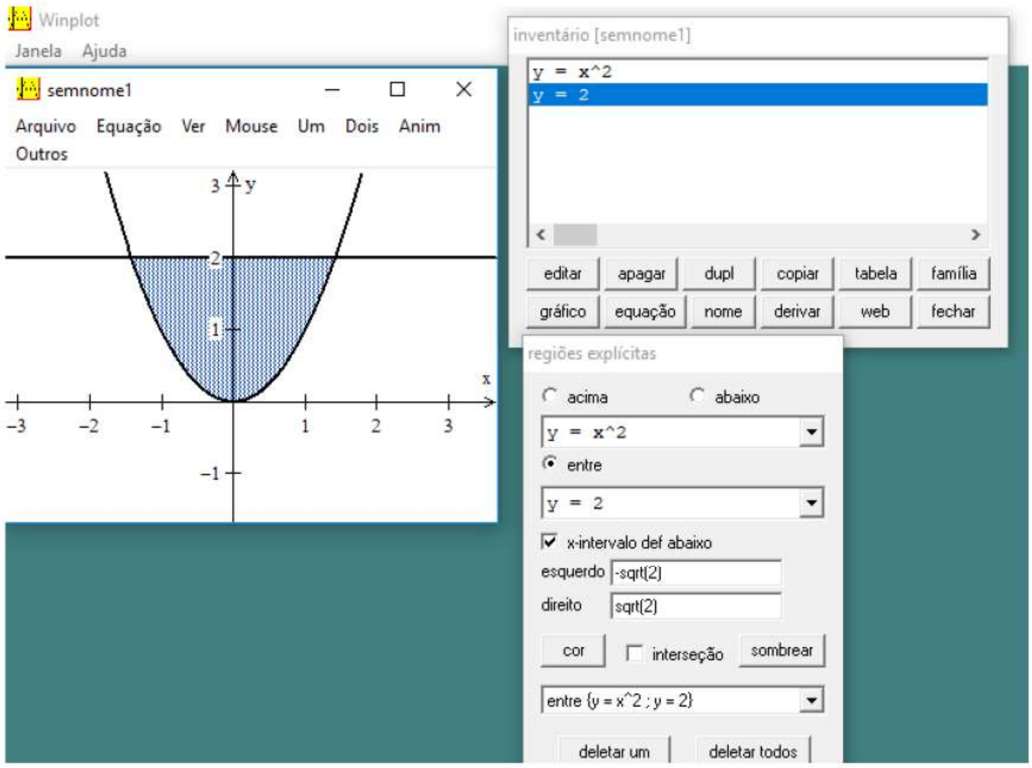

Figura A 8: Regiões Explicitas do Plano

No caso de regiões delimitadas por curvas implicitas devemos clicar na décima terceia linha da janela "equação". Uma nova janela se abrirá e nela é apresentada a relação de equações implicitas digitadas em "3.Implícita". Depois de clicar em uma das equações da lista, por meio dos símbolos de deseguindas $<$ ou $>$, devemos escolher a região a ser destacada.

Na figura A9 ilustramos a região do plano abaixo da curva $x^2 + y^2 = 4$ e acima da curva $y = x$. Para obter esta região clicamos na equação $x^2 + y^2 = 4$ (para selecioná-la) e em "mudar $=$ para $<$". Clicamos em $y - x$ em "muda$=$para $>$".

Em seguida clicamos em "intersecção". Para finalizar destacamos as duas primeiras desigualdades e em "deletar". Desta forma ficamos somente com a região pretendida em destaque.

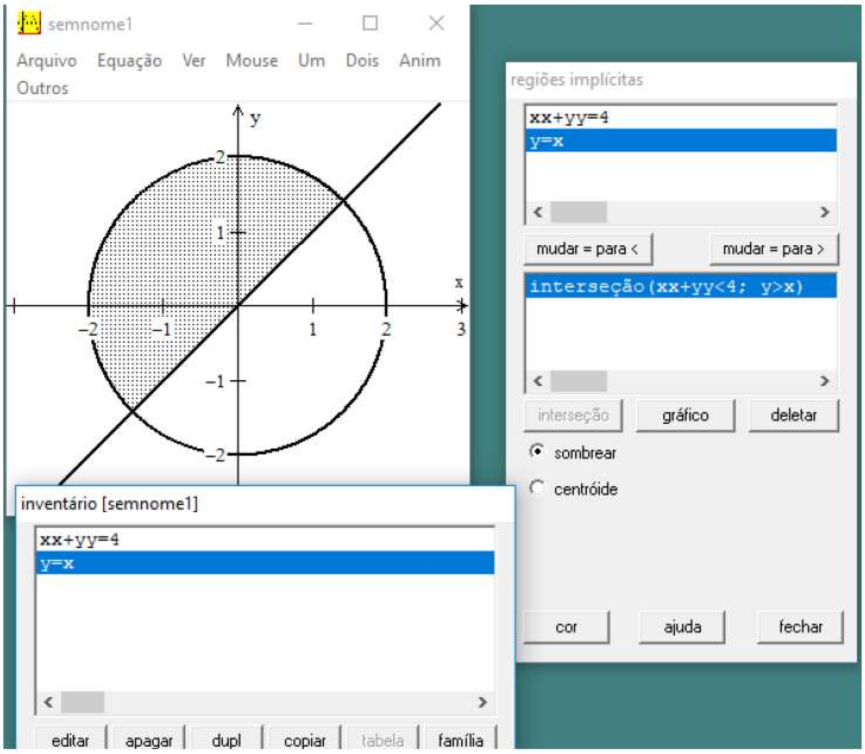

Figura A9: Regiões Implícitas do Plano

F - TEXTOS: Podemos escrever texto e equações no mesmo plano cartesiano que recebe o esboço de curvas. Para tanto basta clicar em "Mouse". Na segunda linha da janela que se abrirá devemos clicar em "Texto". Para digitar um texto ou equação devemos clicar com o lado direito do mouse, sobre o plano. Uma janela se abrirá. Na primeira linha desta janela deve ser digitado o texto. As caracterísicas do texto podem ser escolhidas nas demais linhas da mesma janela. É possível clicar sobre o texto e arrastá-lo para qualquer posição do plano.

Na ilustração baixo o texto a expressão das curvas esboçadas.

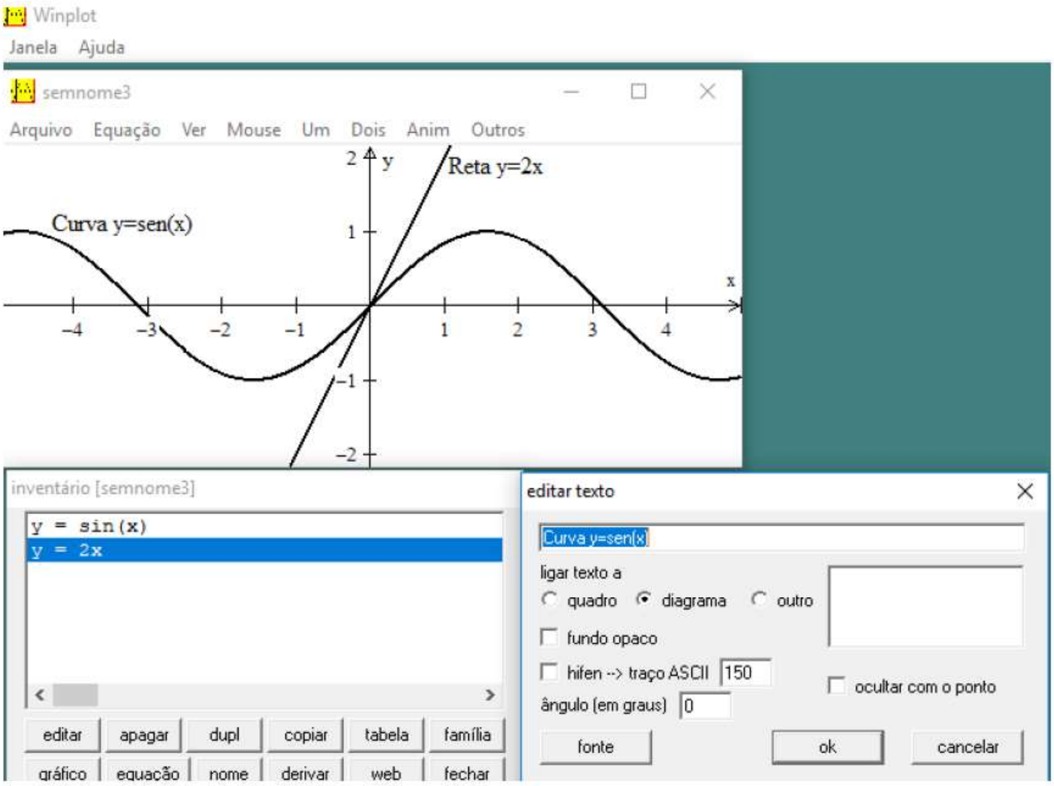

Figura A 10: Legendas

G - FIGURAS E SÍMBOLOS: Qualquer parte de um arquivo no formato PDF pode ser recortada e colada no plano cartesiano do Winplot que está sendo utilizado para o esboço de curvas. Para tal devemos abrir o arquivo PDF no software Adobe. No Adobe clicamos em "Editar"e, na janela que se abre, clicamos em "Tirar um Instantâneo". Escolhemos a parte do arquivo que queremos copiar e colar. No Winplot clicamos em "Mouse"e, na quinta linha, clicamos em "Colar". Em seguida clicamos com o lado direito do mouse sobre o plano cartesiano. A parte do arquvio copiada no Adobe será colada no plano. É possível clicar sobre a figura ou símbolo colado e arrastar até o local do plano que desejamos.

Na ilustração abaixo foi colada a figura de uma corrente suspensa, copiada de um arquivo PDF como descrito acima, sobre o plano cartesiano.

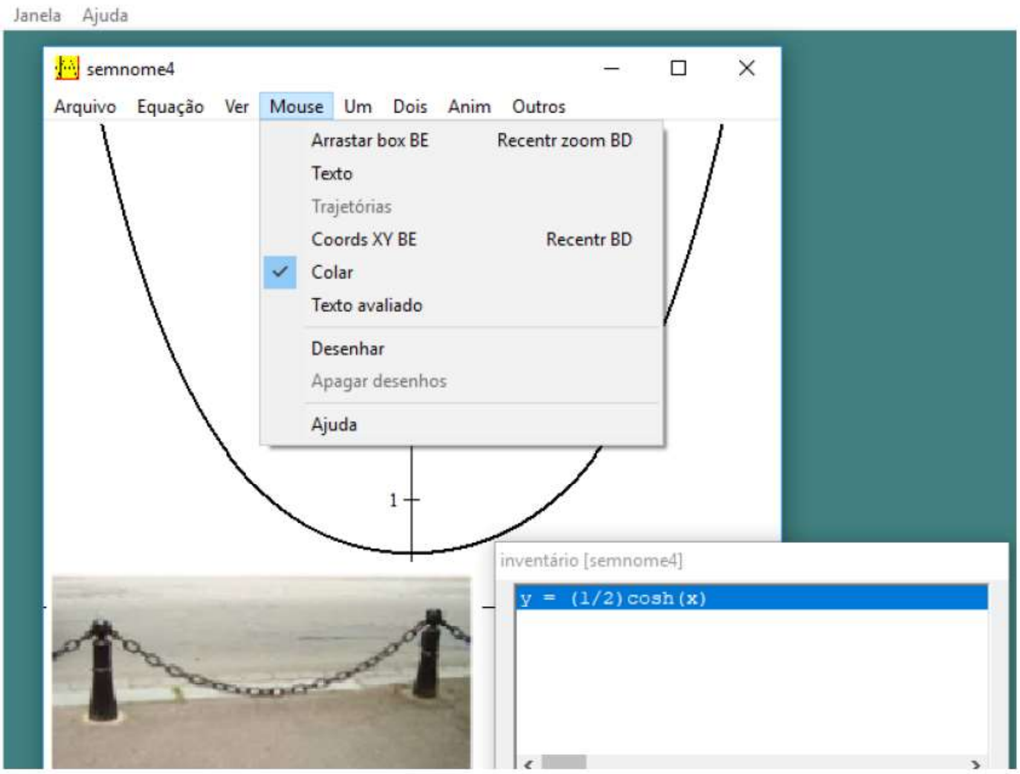

Figura A11: Figuras sobre o plano

H - MUDANÇA DE ESCALA: Clique em "janela"e "2-dim", clique em "Ver". Um nova janela se abrirá e, na nona linha, clique em "Grade". A janela A12 aparecerá.

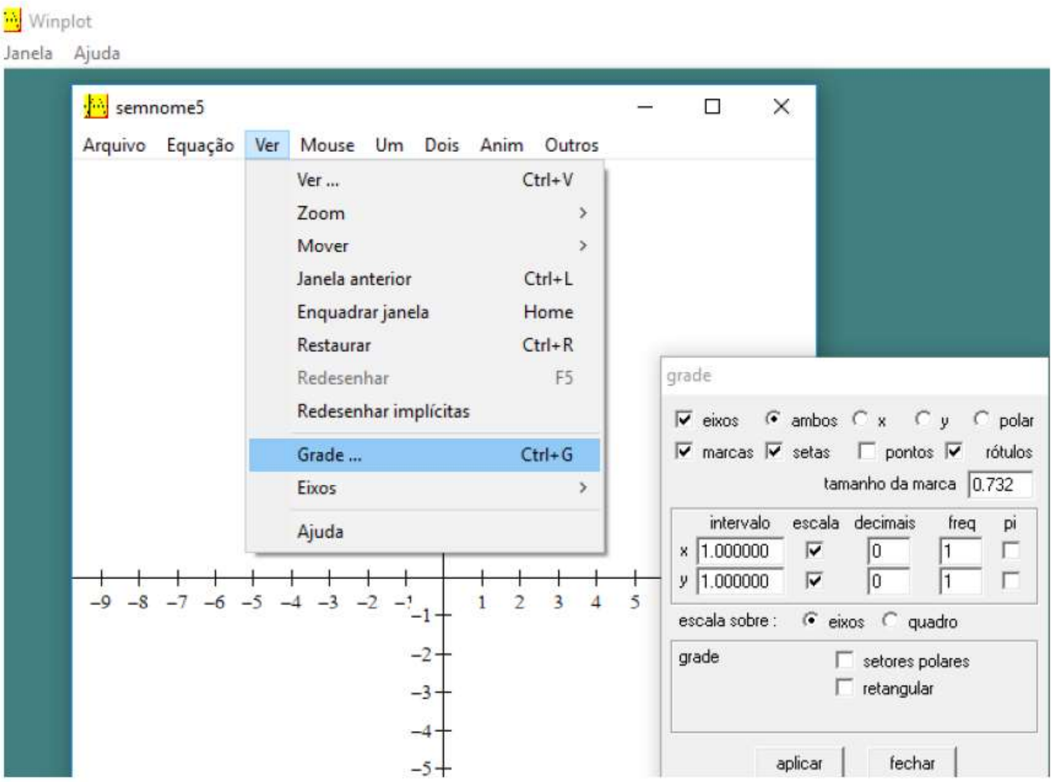

Figura A 12: Mudança de Escala

Na linha destinada à variável x, apague os valores dados e substitua conforme a tabela abaixo.

Intervalo	escala	decimais	freq	Pi
$0.5 * pi$	$\surd$	0	1	$\surd$

Como o intervalo no eixo y varia de -1 até 1, seguro o cursor na borda inferior da plano e dimua verticalmente o plano.

Caso queira a marcação no eixo a cada intervalo de comprimento $\frac{Pi}{4}$, basta digitar $0.25 * pi$ na tabela acima. Pode também ser digitado na forma $pi/2$ ou $pi/4$. Alteração análogas podem ser feitas também no eixo y.

.

Referências Bibliográficas

[1] FLEMMING, DIVA M; GONÇALVES, MIRIAN B. Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração. Pearson, Prentice Hall, São Paulo, 2006.

[2] LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica. 3ª ed. São Paulo. Harbra. 1994.

[3] SHERVATOV, V. G. Hyperbolic Functions. D. C. Heath and :Company Boston, 1966.

[4] FIGUEIREDO, D. G; NEVES, A. F. Equações diferenciais aplicadas. 3. ed. Rio deJaneiro: IMPA, 2008

[5] ZILL, D. G. Equações diferenciais com aplicações em modelagem. 9.ed. Cengage Learning, São Paulo, 2011.

[6] ALLADAS, N. C. Funções hiperbólicas no Ensino Médio (Dissertação de mestrado, (UENF), Rio de Janeiro, 2013.

[7] Referencial curricular: https://pt.slideshare.net/TatyBorges1/referencial-curricular-ensino-mdio-mato-grosso-do-sul, acessado em 21/02/2019

.