UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS - UFGD
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Katiuce Fernandes Rocha

Bases Numéricas Não Usuais: Um breve estudo

Dourados - MS
2019

Katiuce Fernandes Rocha

Bases Numéricas Não Usuais: Um breve estudo

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Orientador: Prof.Dr. Rogério de Oliveira

Dourados - MS

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

R672b Rocha, Katiuce Fernandes

Bases numéricas não usuais: Um breve estudo [recurso eletrônico] / Katiuce Fernandes Rocha. -- 2019.

Arquivo em formato pdf.

Orientador: Rogério de Oliveira.

Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2019.

Disponível no Repositório Institucional da UFGD em: https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio

1. bases numéricas não-convencionais. 2. critérios de divisibilidade. 3. sistemas de numeração. I. Oliveira, Rogério De. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: **"Bases Numéricas não usuais: Um breve estudo"**, de autoria de **Katiuce Fernandes Rocha**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Prof. Dr. Rogério de Oliveira (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Prof^{a}. Dra. Irene Magalhães Craveiro
Membro Examinador (UFGD)

Vando Narciso

Prof. Dr. Vando Narciso
Membro Examinador (UEMS)

Dourados/MS, 29 de abril de 2019

Ao meu esposo Candido que amo muito, meu melhor amigo, companheiro e o maior investidor nos meus sonhos.

Agradecimentos

Gratidão eu tenho e muito. Primeiramente a Deus e a muitas pessoas também, que são a verdadeira revelação do cuidado de Deus em minha vida.

Ao Senhor, obrigada por tudo, exatamente tudo. Tenho certeza de que esse trabalho só foi possível porque Ele esteve comigo em todos os momentos. Obrigada por me ajudar em todas as situações. Durante o desenvolvimento desse trabalho foram muitas as dificuldades, as condições eram totalmente desfavoráveis. Pensei até mesmo em desistir, porém o Senhor me ajudou e com suas providências fez eu prosseguir. Sou testemunha do seu cuidado e do seu infinito amor por nós. Terminar esse trabalho é um milagre depois de tudo que passei. Portanto, toda honra e toda a glória sejam dadas ao Senhor por eu chegar até aqui.

Ao meu esposo Candido Ozorio que me ajudou, me incentivou e, ainda, mesmo sobrecarregado de trabalho arrumava um tempinho para me acompanhar nas viagens e sempre compreendeu minha ausência durante o curso. Agradeço a Deus pela sua vida e obrigada por tudo!

Aos meus pais, aos meus irmãos, as minhas cunhadas Dryzze Kelly e Cláudia e a minha enteada Beatriz que são meus apoiadores incondicionais, sempre cuidando de mim com muito carinho seja com um almoço ou um lanchinho quando eu estava estudando. São tantas coisas que fizeram por mim que não tenho palavras para agradecê-los. Só posso dizer que amo vocês.

Aos meus colegas que fizeram o curso do PROFMAT comigo. Quero dizer que eu aprendi muito com cada um de vocês. Hoje posso dizer que realmente sei que a união faz a força. Obrigada por toda ajuda que me deram durante o curso. Agradeço ainda em especial, a minha amiga Márcia que me incentivou e sempre disse palavras de apoio durante a realização da minha dissertação.

Agradeço também, em especial, aos meus amigos Edvair, Anderson e Eder. Durante todo o curso viajávamos juntos para Dourados e quero dizer aqui que essas viagens nunca foram difíceis pra mim devido a alegria desses três, pois para eles não havia tempo ruim. Digo ainda o quanto eles são parceiros, prestativos e humildes. Além disso me ajudaram demais durante todo o curso, sanando minhas dúvidas, mandando sugestões de vídeo aulas e textos para eu estudar, entre outras. Eu não tenho palavras para agradecer tudo que fizeram por mim.

A todos os professores do curso do PROFMAT que sempre estavam dispostos a nos ajudar com aulas extras.

Agradeço em especial, à professora Dra. Irene Magalhães, exemplo de humildade e dedicação, enquanto professora da disciplina de Aritmética, se dedicou arduamente marcando aulas extras para nos ajudar.

Ao meu orientador, professor Dr. Rogério de Oliveira, minha profunda gratidão, pois me compreendeu quando não foi possível realizar o trabalho. Quero agradecer ainda por todas as aulas que tive com o senhor, pois sempre foram momentos de muito aprendizado que vou levar para o resto da minha vida como professora de Matemática.

As minhas amigas Lauany Borges e Juliana Aquino que estiveram comigo nos momentos mais difíceis dessa caminhada ajudando e incentivando quando eu pensava que seria quase impossível concluir o curso.

À direção, à equipe técnica da Escola Municipal Profª. Gonçalina Faustina de Oliveira que me ajudaram e compreenderam minha ausência em algumas atividades escolares devido as aulas do curso

PROFMAT. Além disso, adaptaram todo o horário da escola para que eu não perdesse as aulas do PROFMAT. Agradeço ainda aos meus colegas de trabalho, em especial, a professora Gládis que me ajudou muito em oração e com suas palavras de incentivo nos momentos mais difíceis da minha vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo principal apresentar os sistemas de numeração em bases não-convencionais, abordando as operações aritméricas e algumas propriedades. Estudaremos os critérios de divisibilidade e a paridade dos números em uma base diferente da que usamos hoje, base decimal. Dessa forma, durante esse trabalho é feito uma reflexão sobre como o estudo em bases não convencionais pode contribuir para o ensino da matemática. O capítulo 1 apresenta um breve resumo histórico dos sistemas de numeração mais usados pelos povos antigos dos quais até hoje existem vestígios. No capítulo 2 é exposto formalmente o conceito de base numérica e demonstrado o teorema que permite representar um número em uma base natural diferente de um. Nesse capítulo ainda enunciamos e demonstramos alguns critérios de divisibilidade em bases não usuais. Após isso, é contruído alguns critérios de divisibilidade no sistema de numeração duodecimal. Por fim, o capítulo 3 traz uma proposta para a formação continuada dos professores do ensino básico, problemas e atividades que podem ser realizadas em um curso de capacitação e/ou oficinas, por exemplo.

Palavras-chave: bases numéricas não-convencionais, critérios de divisibilidade, sistemas de numeração.

Abstract

This work has the main objective to present the numbering systems in non-conventional bases, addressing the arithmetic operations and some properties. We will study the criteria of divisibility and parity of numbers on a different basis from the one we use today, decimal basis. Thus, during this work a reflection is made on how the study in unconventional bases can contribute to the teaching of mathematics. Chapter 1 presents a brief historical summary of the numbering systems most used by the ancient peoples of which there are still vestiges. In chapter 2 the concept of numerical basis is formally exposed and the theorem is shown that allows to represent a number on a natural basis other than one. In this chapter we still state and demonstrate some criteria of divisibility on an unusual basis. After this, some divisibility criteria are constructed in the duodecimal numbering system. Finally, chapter 3 presents a proposal for the continuing education of teachers of basic education, problems and activities that can be carried out in a training course and / or workshops, for example.

Keywords: non-conventional numerical bases, divisibility criteria, numbering systems.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Sumário

Introdução

Sem dúvidas, só há evolução quando a humanidade sente necessidades. Sendo assim, a necessidade de contar e representar números pode ter levado os homens à criação de diversos sistemas de numeração. Hoje percebemos que muitos fatos históricos aconteceram até que chegássemos ao sistema posicional decimal. Observamos que não foi simples sua implantação, havendo muita resistência política e social até o sistema decimal tornar-se o que é hoje.

Nem sempre se usou o princípio posicional e, ainda, muito tempo se passou para que se usasse o símbolo zero. Porém, com essas características, o sistema de numeração evoluiu e passou a registrar quantidades maiores. Alguns dos sistemas que foram criados por povos antigos são utilizados até hoje em medidas de tempo e unidades de medidas.

Ao estudar bases não convencionais, verificamos algumas semelhanças existentes com a base 10. Observamos que os mesmos algoritmos que usamos nas operações básicas podem ser utilizados em bases não convencionais. Por realizarmos as operações de forma tão "automática" no sistema de numeração decimal, não precisamos enxergar como esses algoritmos funcionam. Por isso, a importância dos professores conhecerem os sistemas de numeração em bases não convencionais, já que a falta de familiaridade faz com que seja preciso entender o processo para encontrar o resultado correto.

Outro assunto considerado fundamental para a aprendizagem da matemática é o ensino dos critérios de divisibilidade na base decimal. A construção desses critérios de divisibilidade em bases não convencionais pode contribuir para entender os critérios na base dez. Observe que a proposta neste trabalho é que o professor de matemática tenha esse conhecimento aprofundado para que compreenda como funciona os critérios, a fim de que isso reflita na sua prática em sala de aula.

Os sistemas de numeração formam um conteúdo importante para o ensino da matemática, pois desenvolve a leitura, a escrita do número, desenvolve a capacidade para lidar com os números, ou seja, pode ser considerado um dos alicerces para o ensino da matemática. Por isso, é necessário que o professor conheça profundamente esses conceitos e como cada algoritmo funciona.

Por fim, ressaltamos que o presente trabalho não visa treinar professores/alunos a ter habilidades em algoritmos de outras bases, mas sim estudar sistemas em bases diferentes da decimal com o objetivo de "reaprender" os algoritmos que fazemos no "automático" quando estamos trabalhando com a base decimal.

Além de tudo, apresentar aos professores que ao trabalhar em outras bases diferentes da base dez conseguimos nos colocar na posição de "aluno" e enxergar as dificuldades que os alunos sentem quando estão aprendendo, já que não temos familiaridade com os números representados em bases não convencionais.

1 Breve história dos sistemas de numeração

A história da construção dos números tem vários "capítulos" desde o início da contagem até atingir a forma que usamos hoje. Foi, ainda, uma história de poder, de cultura e sabedoria da humanidade. Muitos sistemas de numeração foram criados até que chegássemos ao nosso sistema atual. Alguns sistemas que foram destaques são o babilônio, egípcio, chinês, maia, romano e o indo-arábico. Percebe-se que todos usavam a ideia de agrupamentos e trocas, mas nem todos possuíam valor posicional e nem o símbolo zero.

Abordaremos, principalmente, as características de cada um deles e apresentaremos, de forma resumida, a evolução histórica de alguns sistemas numéricos, destacando suas principais características e a presença de alguns deles no nosso cotidiano. Assim, o objetivo dessa seção é entender e apresentar a história de alguns sistemas de numeração, mostrando como eles funcionavam.

Os sistemas de numeração foram criados a partir de algumas necessidades que surgiam com o desenvolvimento da sociedade como contar, registrar tempo, medir terras, etc. Sendo assim, para registrar números cada vez maiores, foi necessário sistematizar a representação e a escrita dos números.

Então, vários sistemas surgiram em épocas e/ou regiões diferentes, porém todos com a intenção de facilitar o registro de quantidades. Muitas civilizações chegaram a criar seus próprios sistemas de numeração dos quais até hoje vemos vestígios em nosso dia a dia.

A obrigação de registrar valores em atividades do cotidiano fez com que o homem criasse o que nós chamamos hoje de correspondência biunívoca, por exemplo na contagem de rebanhos, em que cada animal que iria para o pasto correspondia a uma pedrinha. Os povos egípcios, maias, romanos, sumérios conseguiram elaborar seus próprios sistemas. Mas, observamos que a construção do sistema que usamos hoje, hindu-arábico, teve a contribuição de diversos povos em vários momentos da história.

Durante o desenvolvimento desse trabalho falaremos de diversos conceitos que, às vezes, podem causar dúvidas ao leitor, por isso, apresentaremos alguns deles para que a história fique mais compreensível.

1. **número**: é um conceito matemático que descreve uma certa quantidade;
2. **algarismo**: são símbolos gráficos usados para representar números;
3. **sistema de numeração**: são regras de utilização de algarismos para escrever/representar números;

4. **sistema de valor posicional**: são sistemas de numeração em que o valor que o algarismo representa pode mudar de acordo com a posição que ele ocupa;

5. **ordem de um número**: cada algarismo de um número representa uma ordem no sistema posicional. A sequência começa da direita indo em direção à esquerda. Na página 31 é apresentado o quadro 1 que se refere às ordens em um sistema posicional de base decimal, o que é análogo em outras bases.

Ao longo da história esses conceitos foram sendo aprimorados pelo homem primitivo. Inicialmente, usavam a correspondência biunívoca com pedrinhas, com os dedos das mãos, com marcas, pauzinhos, etc. Quando contar dessa forma deixou de ser suficiente para resolver os seus problemas, então o homem sentiu-se obrigado a criar um sistema de numeração.

1.1 Conceito e origem das bases numéricas

A palavra **“base”**[1]. significa sutentação/apoio. Nesse sentido, “base” nos remeterá a sustentação de um sistema de numeração. A partir do momento que foi necessário realizar contagens cada vez maiores, ou seja, quando o homem precisou lidar com números “grandes”, o processo de contagem necessitou ser sistematizado.

Segundo Ifrah (1997, p.52) é evidente que para representar números maiores não poderíamos multiplicar pedras, pauzinhos, nós em cordas, etc., pois esses instrumentos não eram suficientes. O número de dedos da mão ou das partes do corpo também não são extensíveis segundo nossa vontade.

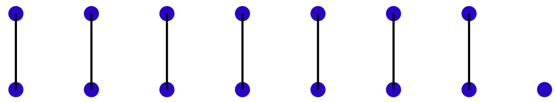
A partir daí o ser humano esbarrou no seguinte problema: Como representar números “grandes” sem usar muitos símbolos?

A resposta para essa pergunta está ligada ao conceito de *base numérica*. A origem desse conceito, pode ser compeendido ao observamos que contar por agrupamentos é mais prático que contar por unidades. Segue abaixo a ideia que está intrínseca no conceito de *base* e, de forma ilustrativa, temos um exemplo que nos permite escrever um número na base dois, por exemplo.

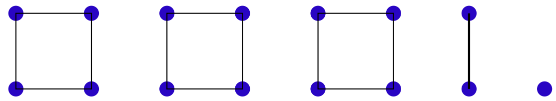
Exemplo 1. *Considere quinze bolinhas que chamaremos cada uma de unidade. Construiremos um sistema de numeração de base dois.*

[1] significado encontrado em https://www.dicio.com.br/aurelio/

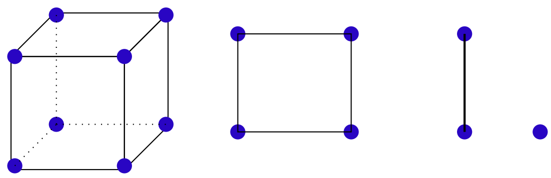
Agruparemos estas bolinhas de dois em dois. Observe que podemos agrupá-las em segmentos que representam duas bolinhas, resultando assim, em 7 segmentos e mais uma unidade.



Esses segmentos podem ser reagrupados de dois em dois. Assim, obteremos 3 quadrados, 1 segmento e mais uma unidade.



Finalmente, reagrupamos os quadrados de dois em dois novamente e teremos 1 cubo, 1 quadrado, 1 segmento e 1 unidade.



Assim, fazendo agrupamentos, temos condições de criar um sistema de numeração. Podemos usar símbolos como representantes do cubo, do quadrado, do segmento e do ponto. Estes símbolos podem ser escolhidos da forma que se desejar. Por exemplo, podem ser usados desenhos dos elementos. Nós escolheremos letras: C para o cubo, Q para o quadrado, S para o segmento e P para o ponto.

Desta forma, QP representaria o número 5, pois utilizaríamos o princípio aditivo para somar 4 do quadrado com 1 do ponto.

Analogamente, SC representaria o número 10. Observe que CS também representaria o 10, isto é, acabamos de construir um sistema não posicional. Mesmo que convencionemos escrever sempre da esquerda para a direita, obedecendo a ordem do maior para o menor, ainda seria um sistema não posicional, já que o C, mesmo em posições diferentes, tem o mesmo valor 8 em CP(9) e em CSP(11). Neste sistema que construímos, o símbolo que representa o maior número, isoladamente, é o C(8).

Assim, para escrever o número 43, neste sistema, precisamos repetir 5 vezes o símbolo C: CCCCCSP = 43. É fácil imaginar como seria trabalhoso escrever o número 1000, mostrando uma desvantagem deste sistema para o de valor posicional, que construiremos a seguir.

Usando os mesmos agrupamentos, agora escreveremos os números de forma diferente. Afirmamos que qualquer número de 1 a 15 pode ser representado por um subconjunto do conjunto de nossos elementos: {cubo, quadrado, segmento, ponto}. O subconjunto {ponto} pode representar o 1, o subconjunto {cubo, segmento}, representa o número 10.

Sendo assim, para escrever um número basta encontrar uma forma de indicar quais elementos estão no subconjunto.

Admitindo sempre a mesma ordem da esquerda para a direita (do maior agrupamento para o menor) e utilizando o símbolo $\circledast$ para indicar o elemento presente, saberíamos, escrevendo { , $\circledast$, , $\circledast$} que apenas o quadrado e o ponto estão no subconjunto e que este representa o número 5.

Para facilitar a escrita poderíamos substituir o símbolo $\circledast$ pelo símbolo 1. O 5, então, ficaria assim: { , 1, , 1}. Omitindo as chaves e as vírgulas teríamos 11, que pode causar confusão com { 1 , , , 1}.

Assim, escolhemos um símbolo para indicar o elemento que não está presente, que pode ser o símbolo 0. Portanto, o 5 se torna 0101. Podemos omitir os zeros à esquerda sem perigo de confusão. Desta forma, criamos um sistema posicional que pode ser usado também para escrever números maiores que 15, bastando acrescentar agrupamento de ordem maior que seria representado por 1, ou seja não precisamos de novos símbolos. Portanto, o número 17 seria escrito como 10001.

A afirmação feita acima pode ser estendida para qualquer número (não apenas de 1 a 15) e será formalizada no teorema 2.1.1. Observe que, na construção feita acima, aproveitamos para mostrar a necessidade do 0 no sistema posicional.

Observe que a base numérica era usada também para dar nomes aos números. Por exemplo,

> as palavras-números atuais na língua inglesa, formadas tomando-se 10 como base. Há os nomes especiais *one*(um), *two*(dois), ... *ten*(dez) para os números $1, 2, 3, \ldots, 10$. Quando se chega a 11 a palavra usada *eleven*, que, segundo os filósofos, deriva de *ein lifon*, cujo significado é "um acima de dez". Analogamente, *twelve*(doze) provém de *twe lif*("dois acima de dez") ... . Outro exemplo, é na língua francesa que *quatre-vingts*($20 \cdot 4 = 80$) são traços da base vinte(vigesimal).(EVES, 2004, p.27).

Observamos que na língua portuguesa isso também acontece, por exemplo, doze $(10 + 2)$. Dessa forma, podemos concluir que a base está intrínseca até nos nomes dos números.

Curiosamente, o idioma *Guarani*, falado principalmente em países como Paraguai, Bolívia, Argentina e no Brasil, por algumas comunidades indígenas, usa a base quinária(cinco) para dar nome aos números. Veja:

1	peteĩ
2	mokõi
3	mbohapy
4	irundy
5	po
6	poteĩ
7	pokõi
8	poapy
9	porundy

Portanto, a solução para registrar quantidades foi fazer agrupamentos em dezenas, dúzias, vintenas, sessentenas, etc. Em outras palavras, foi necessário sistematizar uma escala para agrupar os números e estabelecer uma simbologia para representar quantidades. A maioria dos sistemas tem como princípio fundamental o instrumento natural de contagem que possuíam: os dedos.

1.1.1 Os dedos como origem das bases numéricas

Sem dúvidas, os dedos foram usados na contagem, pois era um instrumento, literalmente à mão. Assim, os dedos das mãos foram essenciais para desenvolver a contagem e, em alguns casos, usavam também os dedos dos pés.

De acordo com Ifrah (1997, p.49) *"não é por acaso que nossos alunos ainda hoje aprendem a contar deste modo, ou que nós também às vezes recorremos a esses gestos para reforçar nosso pensamento"*.

1.1.2 Sistema quinário (*base cinco*)

Um dos primeiros sistemas de numeração a ser usado foi o **sistema quinário**, ou sistema de numeração de base 5. Conforme Eves (2004, p.28) *"nos dias de hoje ainda há tribos da América do Sul que contam com os dedos das mãos: um, dois, três, quatro, mão, mão e um"* e assim por diante. Já mencionamos anteriormente que os números em guarani parecem estar baseados em um sistema quinário.

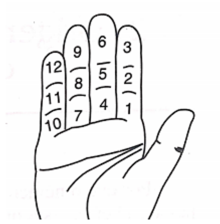
1.1.3 Sistema vigesimal (*base vinte*)

Os povos que usavam a base vinte, como os maias, provavelmente usavam os dedos das mãos e dos pés nas contagens. Segundo Ifrah (1997, p.65) essa base não foi muito difundida no curso da história, mas há traços dela em diversas línguas. Na língua francesa para falar 60, 120 ou 140, usa-se, respectivamente, *trois-vingts (três vintes), six-vingts (seis vintes) ou sept-vingts(sete vintes).*

1.1.4 Sistema duodecimal (*base doze*)

Alguns povos antigos utilizavam as falanges para contar, exceto as do polegar, que era utilizado para acompanhar a contagem. Conforme a figura 1, em uma das mãos, eles passavam o polegar pelas falanges, contando de 1 até 12 no total. Os dedos da outra mão marcavam as dúzias.

Figura 1 – As falanges eram usados para contagem



Fonte: (FOMIN et al., 2012)

De acordo com (IFRAH, 1997, p. 67)

> o grande sucesso dessa base se deve, sem dúvida, a suas vantagens práticas, mas sua origem ainda é desconhecida (...) Na minha opinião, há grandes probabilidades de que ela esteja fundamentada na mão. Com efeito, é possível contar de 1 a 12 usando os dedos das mãos (...) a dúzia pode impor-se deste modo como base de um sistema numérico.

Ainda há muitos vestígios da base 12, que até hoje nós utilizamos. Por exemplo, em lugar de falar doze usamos a palavra "dúzia". A palavra "grosa" não é muito utilizada hoje em dia, porém significa "doze dúzias"(ou seja, a unidade da terceira ordem no sistema duodecimal), mas há algum tempo atrás, "grosa" era usada no comércio. Os ingleses utilizam até hoje o sistema duodecimal no sistemas de medidas (1 pé = 12 polegadas) e no sistema monetário, *shilling = 12 pennies*.

Observa-se ainda que em muitos contextos o número doze está inserido em nosso dia a dia, por exemplo, as horas em um relógio e os meses em um ano.

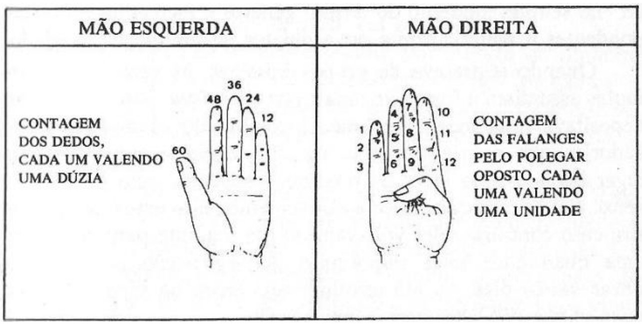
1.1.5 Sistema sexagesimal (*base sessenta*)

Essa base foi usada primeiramente pelos sumérios, porém segundo Ifrah (1997, p.67) até hoje não foi muito bem explicada a ideia de escolher uma base tão elevada assim.

Conforme a figura 2, "a base sessenta aparece efetivamente como base principal e os número 12 e 5 como bases auxiliares"(IFRAH, 1997, p.70). Isso pode ter dado origem ao sistema de base sessenta. A contagem era feita da seguinte maneira:

Eles contavam usando as falanges. Assim como no sistema duodecimal, porém ao contar o total de 12 tomavam 12 como unidade da ordem seguinte, após isso, dobravam o mindinho esquerdo. Assim, voltava-se à primeira mão e contava-se de 13 a 24, repetindo isso sucessivamente; ao atingir 24 dobrava-se o anular esquerdo, ao atingir 36 dobrava-se o dedo médio e, assim sucessivamente até atingir 60, quando os cinco dedos seriam dobrados (IFRAH, 1997, p.70). Sendo assim, cada dedo valia uma dúzia e, assim, teríamos o sistema de base sessenta usando apenas os dedos.

Figura 2 – base sessenta usando as falanges



Fonte: (IFRAH, 1997)

Muito usado pelos Babilônios esse sistema aparece até hoje na subdivisão da hora, em 60 minutos e do minuto em 60 segundos, assim como na medição de ângulos: 1 grau = 60 minutos e 1 minuto = 60 segundos.

Segundo Ifrah (1997, p. 67), *"Os nomes de números ou os símbolos de base por ela exigidos são, assim, tão numerosos que fica difícil decorar, por exemplo, uma tabela de adição e multiplicação"*.

1.1.6 Sistema binário (*base dois*)

Há registros de que poucas civilizações antigas usavam o sistema binário, com exceção do sistema numérico da Síria e o de uma tribo ocidental dos estreitos dos Torres. Gottfried Leibniz, nascido em Leipzig na Alemanha, a 1º de junho de 1646, se tornou um dos grandes matemáticos do século XVII, e idealizou um sistema numérico com um mínimo de símbolos possíveis. A ideia de Leibniz, talvez, seria facilitar os cálculos (CONTADOR, 2008, p.38).

A ideia de Leibniz era padronizá-lo, pois os algarismos binários aparentemente seriam ótimos para efetuar cálculos. No entanto, ele desiste da ideia ao perceber que necessitava de muitos símbolos para representar um número; por exemplo, o número 259, que no sistema binário é representado por 100000011.

Hoje, o binário destaca-se em circuito lógico nos computadores, pois usam os algarismos 1*bit*(para indicar presença de tensão) e 0 *bit*(para indicar ausência de tensão).

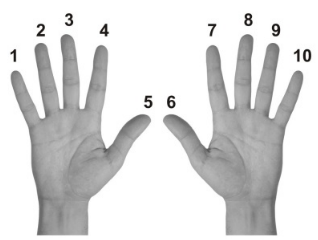
Conforme Contador (2008, p.40-41) encontramos o grande mérito de Leibniz e a beleza da Matemática atingindo seu mais alto grau de interferência em nossas vidas. Nesse sentido, o binário passa a ser usado para armazenamento de dados num disco do computador. Esta gravação acontece da seguinte maneira: a menor unidade de informação chama-se *bit*, que representa um algarismo binário ou uma simples escolha entre 0 e 1, um grupo de oito *bits* recebe o nome de *byte* e pode ter 2^8 combinações de informação, de 000000000 a 1111111.

Por exemplo, nessas 2^8 combinações podemos configurar letras, atribuindo-lhes valores binários por convenção. Outro exemplo de aplicação do sistema binário é na gravação de CD ou Dvd.

1.1.7 Sistema decimal (*base dez*)

O sistema de numeração decimal que usamos atualmente foi desenvolvido pelos hindus e pelos árabes. O sistema decimal é posicional, pois o valor de cada símbolo depende da posição que ele ocupa. É considerada a base numérica mais comum, segundo Ifrah (1997, p.55). A predominância desse sistema deve-se, notoriamente, às vantagens em relação a outras bases, principalmente ao que diz respeito a quantidade de símbolos para representar os números. Por exemplo, uma tabuada da base 20 ou da base sessenta seria de difícil memorização. Na base dez a tabuada pode ser facilmente memorizada. Temos ainda, como exemplo de base decimal, o sistema egípcio, cujos símbolos eram agrupamentos de dez em dez, porém era não posicional.

Figura 3 – Os dedos como origem do sistema de numeração decimal



1.2 Sistemas não posicionais

Como já dissemos, no sistema de numeração não posicional, o valor de cada símbolo(algarismo) não depende do lugar que ocupa. Destacaremos a seguir os dois princiapis sistemas não posicionais: o egípcio e o romano.

1.2.1 Romano

Desenvolvido no início da era cristã, esse sistema foi muito utilizado na Europa durante muitos séculos, sofrendo alterações ao longo do tempo. Nos dias de hoje, ainda é amplamente utilizados na indicação de horas, capítulos em livros e documentos oficiais.

O sistema romano não é posicional. Sendo assim, cada símbolo tem um valor pré-definido independente da sua posiçao.

Na construção dos números do sistema de numeração romano utilizava-se os símbolos da figura abaixo.

Figura 4 – Sistema de Numeração Romano

Letras	I	V	X	L	C	D	M
Valores	1	5	10	50	100	500	1.000

Nessa construção predominava o princípio da adição, ou seja, o número 3 é representado por $III = I + I + I$. Porém, utilizava-se a regra de não repetir o mesmo símbolo mais que três vezes. Quando era necessário, colocava-se um símbolo de valor menor ao lado de um de valor maior e, então, usava-se o princípio subtrativo, ou seja, para representar o número 4, ao invés de IIII, usava-se IV=(5-1).

Sendo assim, o número 197, por exemplo, era descrito da seguinte forma: $CXCVII = 100 + 90 + 5 + 1 + 1 = 197$

Por exemplo, na representação do número trinta e três, $XXXIII$, onde o X e o I aparecem três vezes e em três posições diferentes, porém sempre com o mesmo valor, ou seja, $X = 10$ e $I = 1$.

Como ele é regido pelos princípios aditivos e subtrativos, isto acarreta dificuldades para operar e também registrar quantidades. Por exemplo, $IX(9)$ e $XI(11)$, a troca de posição do símbolo não altera o valor desse símbolo, no entanto, o princípio é subtrativo no primeiro número, no segundo ele é aditivo.

No sistema romano, também era possível realizar as operações básicas, porém de forma não tão eficiente como no sistema de numeração hindu-arábico.

Veja o exemplo, retirado de Souza (2013), mostrando como seria uma adição no sistema de numeração romano.

VIII	
XII	
III+II= V	
X+V=XV	
XV+V=XX	

Com isso, pode-se imaginar a dificuldade em realizar operação com números grandes e, principalmente, a multiplicação.

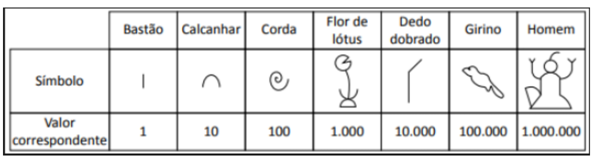
> Executar operações aritméticas com números romanos com múltiplos dígitos era uma tarefa muito trabalhosa. Mesmo assim, o sistema de numeração romana era o sistema predominante na Itália até o século $XIII$, sendo também usado em contabilidade em diversos países da Europa e mesmo depois da difusão dos algarismos indo-arábicos, em outros países da Europa Ocidental ele persistiu até o século XVI, até ser substituído pelos hindo-arábicos por razão das facilidades de operações matemáticas desse novo sistema e da ascensão da cultura árabe (SILVA, 2009, 24).

1.2.2 Egípcio

O sistema de numeração egípcio não possui valor posicional e era baseado em agrupamentos de dez em dez, sendo seu princípio aditivo.

Conforme Ifrah (1997, p.157) foi por volta de 3000 a.C.que os egípcios inventaram uma escrita e a numeração hieroglífica. Os hieróglifos egípcios são quase todos tirados da fauna e da flora do Nilo. Sendo assim, os hieróglifos são produtos da civilização egípcia. Veja que desde seu surgimento a numeração egípcia permite a representação dos números além de um milhão. A figura abaixo apresenta os símbolos que eram utilizados no sistema de numeração egípcio.

Figura 5 – Sistema de numeração Egípcio

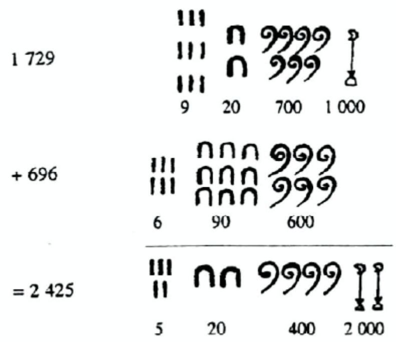


	Bastão	Calcanhar	Corda	Flor de lótus	Dedo dobrado	Girino	Homem
Símbolo							
Valor correspondente	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000

Fonte: https://sites.google.com/site/conjuntosnumericos2017/numeracao-egipcia

Na figura abaixo, há um exemplo de como adicionar os números 1.729 e 696 utilizando hieróglifos. No caso, em que reune-se todas as barras verticais, todas as asas, todas as espirais e todas as flores de lótus.

Figura 6 – Operações com números egípcios- Notação Hieroglífica



Fonte: (IFRAH, 1997)

A soma representada na figura 3 nos faz compreender o sistema de numeração posicional decimal, pois observa-se que há trocas e agrupamentos. Por exemplo, os egípcios agrupavam os dez traços verticais e trocavam por uma asa, dez asas trocavam por uma espiral, dez espirais por uma flor de lótus, e assim por diante. Portanto, há uma semelhança com as unidades, dezenas e centenas do sistema de numeração decimal indo-arábico, que hoje é utilizado. Os egípcios eram realmente muito habilidosos e criativos nos cálculos com números inteiros.

> Assim, à maneira do sistema hieróglifo egípcio, foi estritamente decimal e aditiva, já que só atribuía sinal especial à unidade e a cada uma das potências consecutivas de 10 (BOYER, 1974, p.7).

Para os Egípcios a operação aritmética fundamental era a adição, porém eles resolviam também a multiplicação que era realizada por duplicações, ou seja, séries de multiplicações por 2. Abaixo, um exemplo de como era realizada a multiplicação, mesmo com números grandes.

> A operação aritmética fundamental no Egito era a adição e as operações de multiplicação e divisão eram efetuadas, de Ahmes, por sucessivas "duplacões". Nossa palavra "multiplicação", na verdade, sugerem o processo egípcio. Uma multiplicação de, digamos, 69×19 seria efetuada somando 69 com ele mesmo para obter 138, depois adicionando a si próprio para alcançar 276, novamente duplicando para obter 552 e mais uma vez obtendo 1104, que é, naturalmente, 16×69. Como $19 = 16 + 2 + 1$, o resultado da multiplicação de 69 por 19 é $1104 + 138 + 69$, isto é, 1311 (BOYER, 1974, p.11).

Esquematicamente, essa multiplicação é assim,

$$\begin{array}{r|l} —\text{-}\ 2^0 = 1 & 69\ * \\ —\text{-}\ 2^1 = 2 & 138\ * \\ 2^2 = 4 & 276 \\ 2^3 = 8 & 552 \\ —\text{-}\ 2^4 = 16 & 1104\ * \end{array}$$

Observe que na coluna da direita temos 69 e na coluna da esquerda temos o numero 1. Depois dobramos sucessivamente cada um dos números. Essa duplicação prossegue até obter, na coluna da esquerda, o maior número menor que 19. No caso desse exemplo, paramos no número 16, pois a próxima duplicação resultaria em 32, que é maior que 19. Agora, procuramos na coluna da esquerda os números cuja soma seja 19, marcando com um traço esses números 16, 2 e 1, e com um asterisco os números correspondentes na coluna da direita que totalizam 1311 (isto é, 69, 138 e 1104). Assim, os egípcios concluiam a multiplicação de $69 \times 19 = 1311$.

Hoje, observamos que eles estavam usando o sistema de numeração binário implicitamente em suas multiplicações devido às duplicações realizadas, pois escreveram o número 19 como soma de 16, 2, 1. Isso significa decompor 19 em soma de potências de 2. Veremos no teorema 1 que todo número pode ser decomposto dessa forma.

1.3 Sistemas posicionais

Os Sistemas de numeração podem ser também posicionais. Nesse sistema o valor de cada símbolo é determinado pela sua posição.

Observa-se que os sistemas não posicionais dificultavam a representação de números “grandes”, ou seja, era necessário muitos símbolos para isso. Por outro lado, em um sistema posicional é possível representar números cada vez maiores com os mesmos símbolos. Outra grande vantagem do sistema de numeração com valor posicional é que as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) são de execução bem mais simples.

Em um sistema de numeração posicional o número nove, por exemplo, não tem o mesmo valor quando está colocado na fileira nas unidades, dezenas, centenas e, assim por diante. Por exemplo, 959 – No sistema de numeração que usamos hoje, 9 na unidade, tem como valor posicional nove unidades, na centena o 9 tem valor novecentos. Nesse sistema, o valor de um algarismo depende da posição que ele ocupa no número.

Antes da descoberta do *zero*, para identificar o valor do número, era necessário analisar bem o contexto, já que, por exemplo, 302 era confundido com 32. Assim, o surgimento do símbolo *zero* contribuiu significativamente para a evolução do sistema de numeração posicional.

Em Ifrah (1997, p.131) *"dois fatos são considerados revolucionários para humanidade, a invenção dos algarismos e a invenção do símbolo zero"*. A invenção dos algarismo propiciou a evolução do sistema de numeração que usamos atualmente. Além disso, facilitou os registros de números relativamente "grandes". E a invenção do símbolo *zero* contribui para a representação clara e objetiva dos números.

> o *zero* surgiu para permitir uma notação perfeitamente coerente de todos os números e para oferecer a qualquer um a possibilidade de efetuar qualquer tipo de cálculo sem ter que recorrer a acessórios como a mão, o contador mecânico ou a tábua de contar. Assim como a escrita, o *zero* e nossos números modernos figuram, portanto, entre os mais poderosos instrumentos intelectuais de que dispõe o homem de hoje. Cálculos irrealizáveis durante milênios tornaram-se possíveis graças a sua descoberta, abrindo caminho para o desenvolvimento das matemáticas, das técnicas e de todas as outras ciências (IFRAH, 1997, p.131).

1.3.1 Babilônico

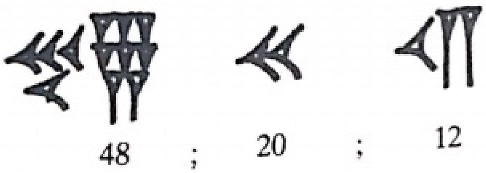
Vários historiadores discordam quanto às origens do sistema de numeração babilônio, surgido, aproximadamente, em 2000 a.C(FOMÍN, 1975, p.5). Uma hipótese, pouco fidedigna, é que

> houve uma fusão de duas tribos, uma das quais usava o sistema de base 6 e a outra, o sistema decimal, surgindo como compromisso de fusão das duas comunidades o sistema sexagesimal (FOMÍN, 1975, p.5)

Outra hipótese que também não conta com fortes argumentos segundo Fomín (1975, p.5) *"é que os babilônios consideravam o ano formado por* 360 *dias, e isso se relaciona de modo natural com o número* 60*"*.

O sistema Babilônico possui valor posicional. Assim, os algarismos mudam de valor de acordo com sua posição. Esse sistema é de base sexagesimal, ou seja, sessenta unidades de uma determinada ordem são equivalentes a unidade de ordem imediatamente superior.

Figura 7 – Representação babilônica do número 174012



Fonte: (IFRAH, 1997)

Na figura 7, temos que o número 174.012 é representado por $48 \times 60^2 + 20 \times 60 + 12 = 48 \times 3600 + 20 \times 60 + 12 = 174.012$. Dessa forma , percebe-se que o sistema babilônio era muito semelhante ao nosso sistema atual tendo como diferença clara, a base.

Conforme Ifrah (1997, p.239), esse sistema tinha várias desvantagens, pois os cinquenta e nove algarismos necessários para representar os números nessa base eram substituídos por repetições aditivas de apenas dois símbolos (um símbolo correspondia a 1 e outro a 10).

Dessa maneira, os números de um a cinquenta e nove formam as unidades simples ou de primeira ordem, e os agrupamentos de sessenta constituíam as unidades de segunda ordem, e assim, sucessivamente. Para escrever os algarismos babilônicos eram usados somente dois símbolos: um "cravo" vertical representando a unidade e uma "cunha" representando o número dez(BITTAR; FREITAS, 2005, p.48).

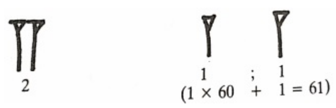
Figura 8 – Sistema de Numeração Babilônico

Fonte: (PEDROZA, 2010)

No entanto, havia ambiguidades nesse sistema, as quais davam origem a muitos erros, principalmente porque ainda não usavam um algarismo que representaria o zero. Conforme a figura abaixo era fácil confundir o número 2 com 61.

Conforme a figura abaixo era fácil confundir o número 2 com 61.

Figura 9 – Ambiguidade no sistema de base sessenta



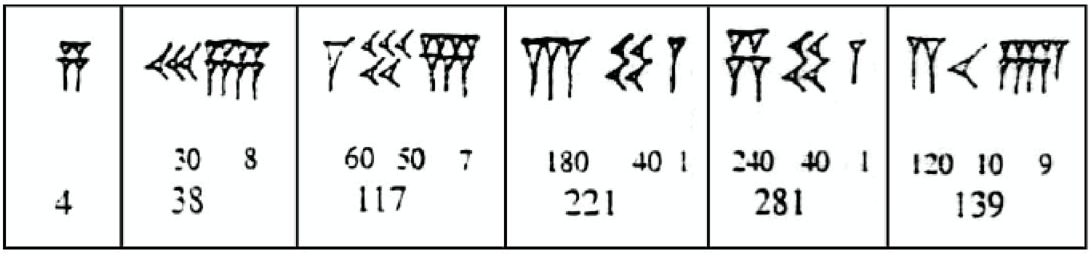
Fonte: (IFRAH, 1997)

Essas ambiguidades perduraram durante muitos anos. De acordo com Ifrah (1997, p.241) "durante mais de quinze séculos os matemáticos e os astrônomos babilônios ignoraram o zero".

Essa dificuldade só foi sanada no século III a. C quando surge um signo para representar o vazio no sistema babilônico, ou seja, o símbolo indicava a ausência das unidades sexagesimais de uma determinada casa (IFRAH, 1997, p.243). Surge assim, a ideia de um símbolo para indicar o vazio, o nada.

Na figura abaixo, um exemplo da utilização desse símbolos na representação de alguns números.

Figura 10 – Representação dos números no sistema babilônico



Fonte: (IFRAH, 1997)

Vestígios desse sistema permanecem até hoje nas divisões e subdivisões do relógio, ou seja a hora em 60 minutos, o minuto em 60 segundos e, de modo análogo na divisão das medidas de ângulos.

1.3.2 Maias

Os Maias eram o povo mais prestigiado da América Central e no primeiro milênio da era cristã, enquanto muitos povos ocidentais estavam em crise, eles estavam no auge do desenvolvimento em várias áreas, entre elas a matemática. Eles se destacaram também na astronomia e na invenção do calendário (IFRAH, 1997, p.248-249).

Eles utilizavam um sistema de numeração de valor posicional de base vinte, ou seja, agrupavam de vinte em vinte. Esse povo se destacou na astronomia e na matemática e inventaram um símbolo para o zero. O símbolo usado para representá-lo tem a forma de um olho, conforme descrito em (BITTAR; FREITAS, 2005, p.50).

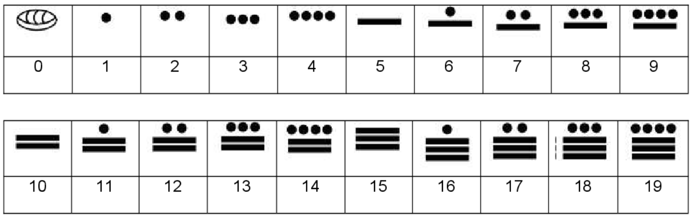
> Eles adotavam um sistema de base vinte e utilizavam apenas três símbolos: o ponto, a barra horizontal e o símbolo zero. Tinham o hábito de contar, não apenas com os dez dedos das mãos, mas também com os seus pés (SILVA, 2009, p.25).

Os algarismos de zero a dezenove estão representados na figura 11.

Os números eram representados na vertical. Cada número maior que 20 era escrito em seguida numa coluna vertical, com uma fileira para cada ordem de unidades. Para os número compostos de duas ordens, colocava-se o algarismo das unidades simples na parte de baixo e o algarismo das vintenas na de cima, conforme foi feito no exemplo abaixo na representação do número 79.

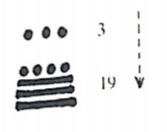
Na figura 12 temos $79 = (3 \times 20 + 19)$. Observe que no primeiro plano temos 19 unidades e no segundo plano temos 3×20 (as vintenas). A denominação planos, na figura, era usada para separar classes. Por exemplo, na figura 12 o número 19, que está na parte

Figura 11 – Sistema de numeração maia



Fonte: (MARTÍN, 2009)

Figura 12 – Representação do número 79 no sistema de numeração maia

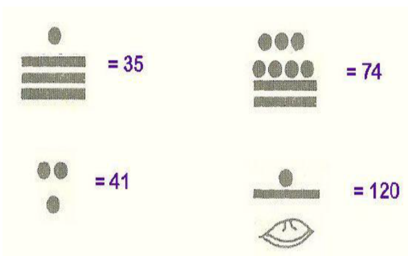


Fonte: (IFRAH, 1997)

de baixo, representa a classe das unidades e o número 3, na parte de cima, chamamos de classe das vintenas.

A representação das quantidades mostra a importância de se ter um símbolo para o zero. De fato, para representar a quantidade 120 (figura 13), no sistema maia, por exemplo, coloca-se uma "bolinha" e uma 'barra horizontal"' no segundo plano e no primeiro plano coloca-se o olho para significar que essa classe é vazia. Sem esse símbolo do zero, há dificuldades para identificar a quantidade que os símbolos escritos indicava.

Figura 13 – Representação Números Maia

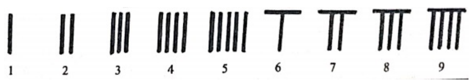


Fonte:portaldoprofessor.mec.gov.br

1.3.3 Chinês

O sistema de numeração chinês surgiu entre os séculos II a. C e III d. C.. Utilizavam um sistema semelhante ao decimal. Era um sistema posicional e usavam barras verticais e horizontais. A base era decimal, porém diferentemente do nosso sistema atual, ele ainda tinha uma escrita ideográfica dos símbolos, vemos, na figura abaixo, as nove unidades simples (IFRAH, 1997, p.244).

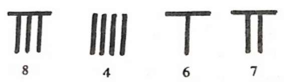
Figura 14 – Sistema de numeração Chinês



Fonte: (IFRAH, 1997)

Quando precisava representar números compostos de duas ou mais ordens eram representado segundo o princípio de posição.

Figura 15 – Numeração Chinesa



$(8 \cdot 10000 + 4 \cdot 1000 + 6 \cdot 10 + 7)$

Fonte: (IFRAH, 1997)

Observando a figura 15, vemos que mesmo sendo posicional, também havia muitas ambiguidades no sistema chinês, pois os símbolos eram facilmente confundidos.

Para sanar algumas dessas ambiguidades eles começaram a utilizar barras verticais nas unidades de casa ímpar (unidades simples, centena, dezenas de milhar, etc) e barras horizontais nas unidades de casa par (dezenas, milhares, centenas de milhar, etc.)(IFRAH, 1997, p.245)

No entanto, ainda existiam muitas dificuldades, pois os chineses não usavam um símbolo para representar a falta de unidade em uma determinada casa, ou seja, não utilizavam símbolo para o zero.

1.3.4 O sistema de numeração decimal indo-arábico

O sistema de numeração decimal indo-arábico tem esse nome, pois os hindus o inventaram, e os arábes difundiram para a Europa Ocidental por volta do século IX.

Apesar de aparentemente simples, esse sistema não foi implantado tão facilmente. Houve resistência dos europeus na época.

Conforme (HEFEZ, 2006, p.58), o sistema posicional decimal,

> foi se espalhando pelo Oriente Médio, por meio das caravanas, tendo encontrado grande aceitação entre os povos Árabes. A introdução do sistema decimal na Europa foi tardia por causa dos preconceitos da Idade Média. Por exemplo num documento de 1299, os banqueiros de Florença condenavam o seu uso.

O Império Romano não se interessava que o povo fossem bem informado. Por isso, os algarismos romanos foram predominantes durante muitos anos, pois poucos conseguiam compreender as operações nesse tipo de sistema. Na época houve resistência para a implantação do sistema posicional decimal, pois isso levaria as pessoas a entenderem e compreenderem melhor os impostos cobrados, pois o sistema decimal facilitava a contagem e o registro de quantidades (HEFEZ, 2006, p.58).

Entretanto, o sistema posicional decimal começa ter maior destaque na Europa a partir de 1202, quando publicou-se o livro Liber Abacci, de Fibonacci. Assim, vários séculos se passaram para que finalmente, esse sistema fosse adotado sem restrições pelos europeus(HEFEZ, 2013, p.58). Hoje, esse sistema é quase universalmente utilizado para representação dos números

A figura abaixo mostra a evolução dos algarismos indo-arábicos.

Figura 16 – Evolução dos algarismos indo-arábicos desde o ano 750

Fonte: https://matematicahistoria.wordpress.com

Esse sistema é chamado posicional pois, cada algarismo, além de seu valor intrínseco, "possui um peso que lhe é atribuído de acordo com a posição que ele ocupa no número"

(HEFEZ, 2006, p.59). Esse peso, sempre uma potência de dez, varia conforme mostrado no exemplo abaixo:

Exemplo 2. *O número* 12019 *na base* 10 *representa:*

$$120190 = 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 1 \times 10^0 = 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 10 + 9$$

No sistema decimal posicional, damos os nomes das classes e ordens, conforme abaixo:

$$Classe \quad das \quad Unidades \begin{cases} Unidades \quad 1^a ordem \\ Dezenas \quad 2^a ordem \\ Centenas \quad 3^a ordem \end{cases}$$

$$Classe \quad do \quad milhar \begin{cases} Unidades \quad de \quad milhar \quad 4^a ordem \\ Dezenas \quad de \quad milhar \quad 5^a ordem \\ Centenas \quad de \quad milhar \quad 6^a ordem \end{cases}$$

$$Classe \quad do \quad milhão \begin{cases} Unidades \quad de \quad milhão \quad 7^a ordem \\ Dezenas \quad de \quad milhão \quad 8^a ordem \\ Centenas \quad de \quad milhão \quad 9^a ordem \end{cases}$$

Assim, dez unidades são uma dezena, dez dezenas são uma centena e, assim por diante. Temos também, que mil unidades são um milhar, mil milhares são uma dezena de milhar e dez dezenas de milhar formam uma unidade de milhão e, assim por diante.

Conforme a figura abaixo:

Quadro 1 – Classificação dos números em ordens e classes

9^a ordem	8^a ordem	7^a ordem	6^a ordem	5^a ordem	4^a ordem	3^a ordem	2^a ordem	1^a ordem
	1	1	2	3	5	8	1	3
3^a classe			2^a classe			1^a classe		

Fonte: autor

$$11.235.813 = 1 \times 10^7 + 1 \times 10^6 + 2 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

Logo, no sistema decimal, cada algarismo de um número possui uma ordem contada da direita para a esquerda. Cada bloco de três ordens formam uma classe, desta forma, temos a classe das unidades, a classe dos milhares, a classe dos milhões, e assim, sucessivamente.

2 BASES NUMÉRICAS

Com o passar dos anos, a sociedade foi evoluindo e suas necessidades de registrar quantidades e contar foram se intensificando. Dessa maneira, foram surgindo símbolos para facilitar a contagem e algoritmos para operar. Ou seja, registrar quantidades e realizar operações surgiram por uma necessidade social e, assim, a sociedade passou a manipular os números com mais frequência.

Destacaremos nesse capítulo o conceito formal de bases numéricas e discorreremos sobre o método utilizado para converter um número de uma base para outra, chamado de método das divisões sucessivas.

Em seguida, apresentaremos também as operações fundamentais de adição, subtração, multiplicação e divisão em bases numéricas não convencionais com o objetivo de mostrar que os mesmos algoritmos utilizados na base decimal, também podem ser utilizados em qualquer outra base.

Exibiremos também o algoritmo da raiz quadrada e, mostraremos que podemos usá-lo para resolver a raiz quadrada de um número em uma base qualquer. E por fim, pretende-se, nesse capítulo, apresentar alguns critérios de divisibilidade em bases numéricas diferentes da que utilizamos hoje.

2.1 Sistema de numeração posicional com base qualquer

Como dissemos anteriormente no capítulo 1, o uso de um sistema com valor posicional possibilitou a evolução do nosso sistema. E destacamos que é muito mais fácil contar por agrupamentos do que por unidades. Dessa maneira, segundo (EVES, 2004, p.27)

> Isso é feito dispondo-se os números em grupos básicos convenientes, sendo a ordem de grandeza desses grupos determinada em grande parte pelo processo de correspondência empregado. Esquematizando-se as ideias, o método consistia em escolher um certo número b como base e atribuir nomes $1, 2, 3, ..., b$. Para os números maiores do que b os nomes eram essencialmente combinações dos nomes dos números já escolhidos.

Assim, escolhemos um número b como base e b símbolos, um para cada número de 0 a $b-1$, chamados de algarismos(dígitos). Multiplicando um destes números(algarismos) pelas potências de b $(1, b^2, b^3$, etc.) e somando-os, conseguimos expressar um número em uma determinada base. Por exemplo, $1352 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$. Esse número, por exemplo, está representado na base decimal, ou seja, $b = 10$.

Assim, os algarismos em qualquer número dado representa um múltiplo de alguma potência da base, potência essa que depende da posição ocupada pelo algarismo.

Como exemplo de sistema posicional temos nosso sistema de numeração posicional decimal indo-arábico. Nesse sistema, por exemplo, 5 em 506 representa $5 \cdot 10^2$ ou 500. Agora, 5 em 58 representa $5 \cdot 10^1$ ou 50. Observe que o *zero* é importante para indicar a ausência de alguma potência da base.

Nos sistemas posicionais podemos ainda representar as frações. Segundo Eves (2004, p.46) os números fracionários podem ser expressos, na base usual(base dez), por dígitos que seguem a vírgula decimal. Pode se usar também a mesma notação para outras bases, portanto, da mesma forma que $0,3012$ representa

$$\tfrac{3}{10} + \tfrac{0}{10^2} + \tfrac{1}{10^3} + \tfrac{2}{10^4}$$

a expressão $0,3012$ representa, na base b,

$$\tfrac{3}{b} + \tfrac{0}{b^2} + \tfrac{1}{b^3} + \tfrac{2}{b^4}.$$

Para evitar ambiguidade, convencionaremos escrever a base do sistema como um índice (na notação decimal) no final do numeral. Como nos exemplos abaixo:

$$(7)_{10} = (11)_6; \quad (12)_{10} = (20)_6; \quad (35)_{10} = (55)_6; \quad (45)_{10} = (113)_6$$

E quando escrevermos o número por extenso, este representara o número em uma base qualquer, mesmo que, muitas vezes, a base dez esteja vinculada aos nomes dos números.

Uma expressão como $(0,3012)_b$ pode ser chamada de *fração posicional* na base b. No caso $b = 10$ o nome usado é fração decimal.

Dessa forma, podemos escrever qualquer número N inteiro positivo em um sistema posicional de base b de forma única. Esse fato é garantido pelo teorema abaixo, cuja demonstração será feita de forma semelhante ao encontrado em (HEFEZ, 2006, p.59).

Teorema 2.1.1. Sejam dados os números naturais N e b, com $N > 0$ e $b > 1$. Existem números naturais inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n < b$, com $a_n \neq 0$ univocamente determinados, tais que

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

Demonstração. A demonstração será realizada por Indução completa sobre N.

Se $N < b$, basta tomarmos $n = 0$ e $a_0 = N$. A unicidade da escrita é clara neste caso.

Supondo que o resultado vale para todo natural menor do que N, provaremos para N.

Assim, aplicando a divisão euclidiana, existem q e a únicos, tais que

$$N = qb + a \quad \text{e} \quad a < b. \tag{2.1}$$

Agora, se tivéssemos $q \geq N$, como $b > 1$, teríamos $bq > N$ o que seria um absurdo. Assim, $q < N$ e, pela hipótese de indução, existem números naturais n' e $a_1, a_2, \ldots, a_{n'} < b$, com $a_{n'+1} \neq 0$, univocamente determinados, tais que:

$$q = a_{n'+1}b^{n'} + a_{n'}b^{n'-1} + \ldots + a_2b + a_1 \tag{2.2}$$

Substituindo 2.2 em 2.1 temos que:

$$N = bq + a = b(a_{n'+1}b^{n'} + a_{n'}b^{n'-1} + \ldots + a_2b + a_1) + a$$

onde o resultado segue-se pondo $a_0 = a$ e $n = n' + 1$. ■

Assim, esse teorema garante que podemos escrever qualquer número inteiro positivo em base numérica qualquer. No teorema temos que b é a base do sistema de numeração e a_i será cada um dos algarismos do número, ou seja,

$$N = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_2b^2 + a_1b + a_0$$

na qual $0 \leq a_i < b, i = 0, 1, \ldots, n$.

Usando esta representação de um número em soma de potências de b podemos escrever apenas os algarismos subentendendo a identidade.

$$N = (a_na_{n-1}\ldots a_1a_0)_b\,.$$

Essa expressão na base b, é chamada de *expansão* relativa à base b. Usamos os símbolos,

$$S = \{a_0, a_1 \ldots, a_n\}$$

Quando a expansão é decimal ($b = 10$) temos os seguintes símbolos:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

A seguir apresentamos um algoritmo para determinar a *expansão* de um número qualquer relativamente à base b. Aplicando a divisão euclidiana sucessivamente, obtemos:

$$a = bq_0 + r_0, r_0 < b,$$

$$q_0 = bq_1 + r_1, r_1 < b,$$

$$q_1 = bq_2 + r_2, r_2 < b,$$

e assim por diante. Como $a > q_0 > q_1 ...$, em algum momento, teremos $q_{n-1} < b$ e, portanto, de

$$q_{n-1} = bq_n + r_n,$$

Decorre que $q_n = 0$, o que implica $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = ...$, e , portanto, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = ...$,

Obtemos, então,

$$a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 ... + r_n b^n$$

Assim, por exemplo, considerando 312 como um número na base 4, escrevemos $(312)_4$. Na base 4 podemos usar os algarismos 0, 1, 2, 3 para representar qualquer número.

Se $b > 10$, devemos acrescentar aos símbolos outros símbolos (que podem ser letras) além dos nossos já conhecidos. Por exemplo, se a *base* $b = 12$, podemos usar os algarismos, $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B$, nos quais $A = 10$ e $B = 11$.

Exemplo 3. *(HEFEZ, 2006) Representar o número* 4967 *na base* 12.

Resposta: Como a base b é maior do que 10, devemos acrescentar símbolos para representar 10 e 11 que se tornam algarismos e que denotaremos por A e B, respectivamente.

Assim,

$$\begin{aligned} 4967 &= 413 \times 12 + 11 \\ 413 &= 34 \times 12 + 5 \\ 34 &= 2 \times 12 + 10 \\ 2 &= 0 \times 12 + 2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$4967 = 2 \times 12^3 + 10 \times 12^2 + 5 \times 12 + 11$$

Portanto, temos que $(4967)_{10} = (2A5B)_{12}$.

Exemplo 4. *(FOMIN et al., 2012) De quantos símbolos para os algarismos precisamos para um sistema numérico?*

a) binário (isto é, com base 2):

Resposta: 2 símbolos

b) Com base n?

Resposta: n símbolos

Exemplo 5. *(FOMIN et al., 2012) Escreva em notação decimal os números:*

a) $(10101)_2$

Resposta: $(10101)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = (21)_{10}$

b) $(3012)_4$

Resposta: $(3012)_4 = 3 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 2 \times 4^0 = 192 + 0 + 4 + 2 = (198)_{10}$

Exemplo 6. *(FOMIN et al., 2012) Uma professora vê escrito no quadro o exemplo* $3 \cdot 4 = 10$. *Quando ia apagar, ela pensou que talvez esta equação estivesse escrita em outro sistema numérico, com base diferente. Isto é possível?*

Resposta: Observe que do lado esquerdo da igualdade temos a quantidade doze que é representada por "10" do lado direito da igualdade e, isso só será possível se a base for "12", pois o número "10" representa um grupo da segunda ordem da base em questão.

Exemplo 7. *"Perguntado sobre quantos alunos havia em sua classe, um professor respondeu: 100 alunos, dos quais 24 são homens e 32 mulheres". Inicialmente a resposta nos pareceu estranha, mas logo compreendemos que o professor não empregou o sistema decimal. Qual sistema usou?*

resposta: Chamando de b a base do sistema utilizado, temos:

- Número de alunos: $(100)_b = b^2$

- Número de alunos homens: $(24)_b = 2b + 4$;

- Número de alunos mulheres: $(32)_b = 3b + 2$

Então, $b^2 = (2b + 4) + (3b + 2)$ e daí, $b^2 - 5b - 6 = 0$, isto é, $b = 6$ ou $b = -1$

Como -1 não pode ser base do sistema de numeração, resulta $b = 6$.

Logo, o professor deu a resposta no sistema senário: Tinha 36 alunos, dos quais 16 homens e 20 mulheres.

Formalmente, *base* é uma maneira de representar os números e de interpretar algarismos em um sistema posicional.

> muitos estudantes sabem dizer que 2653 é o número dois mil, seiscentos e cinquenta e três, seja o que for que isto significa. Já é de costume escrever os números da seguinte maneira: o último algarismo - número da unidade, o penúltimo – o número das dezenas, e o antepenúltimo – o número de centenas e assim por diante. Assim, $2653 = 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. Esta maneira de escrever números (e de interpretar cadeias de algarismos) é chamada de *base numérica*(FOMIN et al., 2012, p.185).

Observe que, se o sistema numérico escolhido fosse de base seis, nossos algarismos seriam $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Por exemplo, o número $45 = 1 \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 3 \times 6^0$. Ou seja, o número $(45)_{10} = (113)_6$.

Em concordância com Eves (2004, p.42) embora a base $b = 10$ esteja enraizada em nossa cultura, a escolha do 10 é, de fato, bastante arbitrária, pois outras bases têm grande importância, tanto na prática como na teoria.

Como vimos no capítulo anterior, a base 10 é a mais comum hoje, sendo que a ideia básica dela consiste nos agrupamentos que são feitos por *dezenas*, *centenas*, milhares e assim por diante. Agrupar dessa forma, é utilizar a base dez.

Observa-se ainda que a base dez apresenta uma vantagem em relação a base vigesimal e sexagesimal, pois necessita de menos símbolos para a representação dos números.

Por outro lado, as bases pequenas, como dois e três, exigem muitos algarismos para representar um número. Por exemplo, 2452 exige apenas quatro algarismos no sistema de base dez, porém esse mesmo número em base binária (base dois) seria escrito da seguinte forma: $(100110010000000)_2$.

2.2 Método de conversão de divisões sucessivas

Converter um número de uma base b para uma B é relativamente simples, porém é importante compreender o que realmente acontece ao usarmos esse algoritmo de conversão de bases, que só é possível devido ao teorema da divisão euclidiana (que está demonstrado em (HEFEZ, 2006, p.59).

É simples a passagem de um número em uma base não convencional para a base usual 10. Por exemplo, converter o número $(2013)_5$ para base decimal:

$$(2013)_5 = 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 250 + 5 + 3 = (253)_{10}$$

Agora, para converter um número da base usual 10 para uma base b, conforme Eves (2004, p.42) faz-se os seguintes procedimentos:

Seja N um número, temos que determinar os coeficientes inteiros $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ na expressão

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

em que $0 \leq a_i < b$.

A divisão euclidiana de N nos dá:

$$N = b(a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + ... + a_2 b^2 + a_1) + a_0$$

Isto é, o resto a_0 dessa divisão é o último algarismo da representação desejada. Fazendo

$$N' = a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + ... + a_2 b^2 + a_1 + a_0,$$

Efetuamos agora, a divisão euclidiana de N' por b, obtendo:

$$N' = b(a_n b^{n-2} + a_{n-1} b^{n-3} + ... + a_2) + a_1,$$

e o resto dessa divisão é o dígito a_1

Procedendo dessa maneira obteremos todos os dígitos $a_0, a_1, ..., a_n$.

Exemplo 8. *Converter* $(29)_{10}$ *para a base binária.*

resposta:

$$\begin{array}{l} 29 = 14 \cdot 2 + 1 \\ 14 = 7 \cdot 2 \\ 7 = 3 \cdot 2 + 1 \\ 3 = 1 \cdot 2 + 1 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}}\right\} \begin{array}{l} 7 = (1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \\ 14 = (1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ 29 = (1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2) \cdot 2 + 1 = \mathbf{1} \cdot 16 + \mathbf{1} \cdot 8 + \mathbf{1} \cdot 4 + \mathbf{1} \cdot 2 \end{array}$$

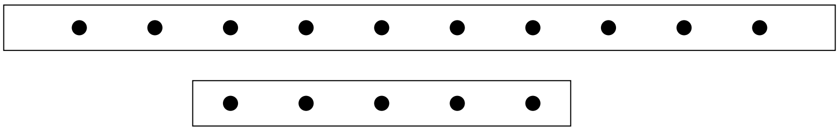
Portanto $(29)_{10} = (1111)_2$

Note que, neste caso, o número 29 reagrupado de 2 em 2.

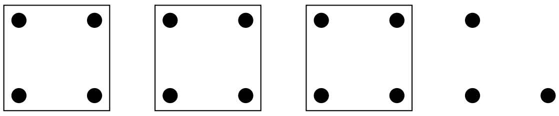
Os exemplos a seguir tem como objetivo mostrar o que está por detrás desse procedimento em dividir sucessivamente. Por exemplo, escrever um número na base dois significa fazer agrupamentos de 2 em 2. Na prática o que acontece são os agrupamentos descritos graficamente nos exemplos abaixo:

Exemplo 9. *Observe as quinze bolinhas. Represente essa quantidade para a base quatro* $(10)_4$

resposta: Mostraremos graficamente a resposta desse exemplo.

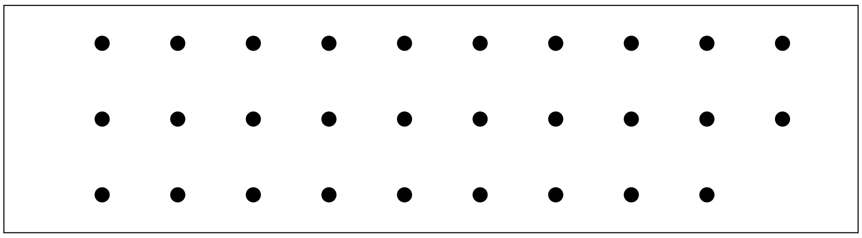


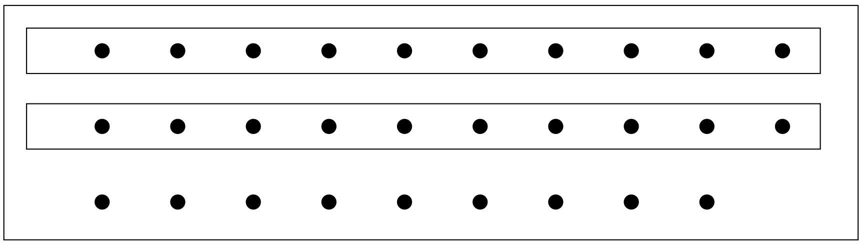
Agrupando-as de quatro em quatro, tem-se:



Portanto, $(15)_{10} = (33)_4$

Exemplo 10. *Escreva a quantidade abaixo na base dez.*



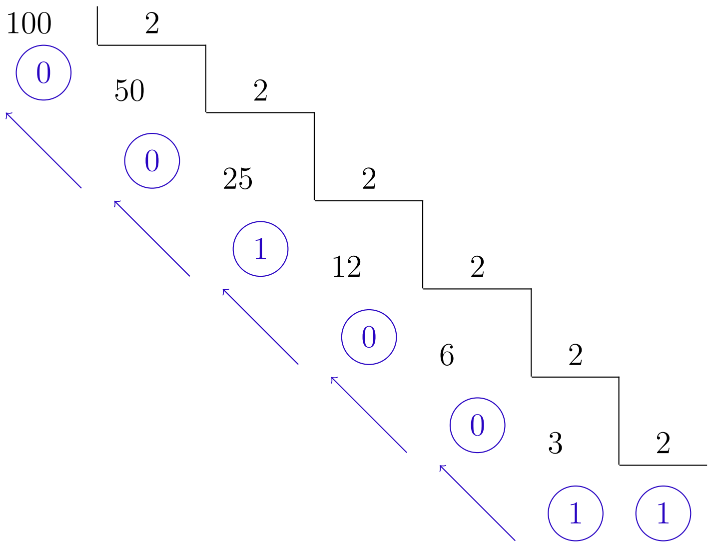


Assim, temos 2 grupos de dez e um grupo de 9 unidades. Portanto, obtemos $(29)_{10}$

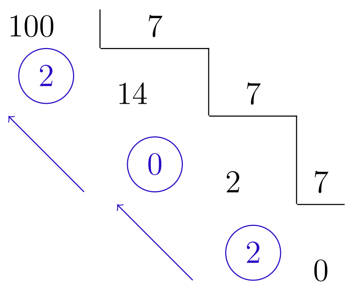
Faremos o exemplo abaixo, usando a notação usual de conversão de bases.

Exemplo 11. *Escreva o número* $(100)_{10}$ *nos sistemas com base* 2 *e* 7*, pelo método de divisões sucessivas.*

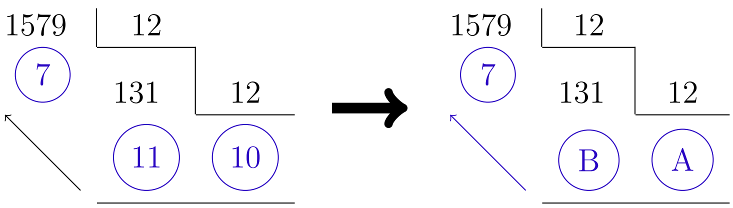
a) **Solução** Base 2 - $(100)_{10} = (1100100)_2$



b) **Solução** Base 7 - $(100)_{10} = (202)_7$



Exemplo 12. *Métodos das divisões sucessivas na base duodecimal*



Portanto, $(1579)_{10} = (AB7)_{12}$ em que $A = 10$ e $B = 11$

O método das divisões sucessivas consiste em

> efetuar a divisão inteira do número dado na base dez pela base b do novo sistema de numeração; tomar o quociente da divisão e dividi-lo também por b, repetindo este processo até que o quociente obtido torne-se menor do que b; feito isto, tomam-se o último quociente e os restos obtidos em cada uma das divisões, escrevendo-os, da esquerda para a direita, na ordem inversa de seu aparecimento ao longo do processo (RODRIGUES; DINIZ, 2015).

Porém, esse método não é valido somente da base 10 para outras bases, mas de qualquer base dada b para uma outra base B qualquer. Observe os exemplos a seguir:

Exemplo 13. *Converter o número* $(354)_6$ *para a base cinco .*

$$
\begin{array}{c|ccccc}
(354)_6 & 5 & & & \\
\cline{2-2}
\text{-32} & 44 & \multicolumn{1}{|c}{5} & & \\
\cline{1-1}\cline{3-3}
34 & \text{-41} & 5 & \multicolumn{1}{|c}{5} & \\
\cline{2-2}\cline{4-4}
\text{-32} & \mathbf{3} & \text{-5} & 1 & \multicolumn{1}{|c}{5} \\
\cline{1-1}\cline{3-3}\cline{5-5}
\mathbf{2} & & \mathbf{0} & \text{-0} & 0 \\
\cline{4-4}
 & & & \mathbf{1} &
\end{array}
$$

Portanto, $(354)_6 = (1032)_5$. No entanto, devemos notar que a divisão foi realizada na base seis.

Exemplo 14. *Converter o número* $(1032)_5$ *para a base seis.*

Nesse exemplo, como teremos que dividir tudo na base cinco, o algarismo 6 não existe no sistema quinário. Assim, $6 = (11)_5$. Lembrando que vamos realizar uma divisão na base cinco. Pelo método das divisões sucessivas temos :

$$
\begin{array}{c|cccc}
(1032)_5 & (11)_5 & & \\
\cline{2-2}
-44 & 43 & \multicolumn{1}{|c}{11} & \\
\cline{1-1}\cline{3-3}
-42 & -33 & 3 & \multicolumn{1}{|c}{11} \\
\cline{2-2}\cline{4-4}
-33 & 10 & -0 & 11 \\
\cline{1-1}\cline{3-3}
4 & & 3 &
\end{array}
$$

Observe que os restos são $(4)_5, (10)_5, (3)_5$. Como $(10)_5 = (5)_{10}$. Segue que $(1032)_5 = (354)_6$.

Com isso, vemos que o método permite conversão entre bases quaisquer.

2.3 Operações aritméticas em bases não usuais

As operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão constituem, talvez, o conteúdo mais importante para o ensino fundamental. Sendo assim é importante que os alunos compreendam os algoritmos dessas operações.

Segundo os PCN's (1997, p.48-199) *"parte dos problemas no interior da matemática e fora dela são resolvidos pelas operações fundamentais"*.

Além disso, os alunos muitas vezes conhecem os algoritmos, porém não o compreendem. Por isso, neste trabalho pretendemos apresentar as operações aritméticas em bases numéricas não usuais para que estudantes e professores possam ter conhecimento aprofundado em relação a esse tema e entendam melhor os algoritmos, pois mais importante que aprender a fazer "contas", é necessário compreender os algoritmos utilizados.

A tarefa de melhorar o processo de aprendizagem da matemática exige atuação diferenciada do professor, principalmente em mostrar porque os algoritmos funcionam, ou seja, apresentar as justificativas de cada procedimento.

Vale a pena destacar que os algoritmos nessas bases são os mesmos que utilizamos no sistema de base decimal, mudando apenas a representação dos números. Dessa forma, é importante que o professor de matemática tenha uma compreensão profunda do funcionamento dos sistemas de numeração.

A intenção dessa seção é mostrar que praticar e estudar os algoritmos com números escritos em bases não usuais pode nos levar a uma compreensão mais ampla desses algoritmos que realizamos de forma "mecânica" no sistema de numeração decimal.

Para os professores isso é de suma importância, já que compreender bem os algoritmos pode garantir que ele ensine melhor as operações básicas de matemática. Assim, ao ensinar matemática em bases distintas da decimal, desenvolve-se habilidades em operações aritméticas até então realizadas apenas na base dez e permite identificar de forma mais clara a importância do valor posicional.

De acordo com Eves (2004, p.43) *"há propensão a esquecer, quando se está somando ou multiplicando em nosso sistema de numeração, que o trabalho real é efetuado mentalmente e que os símbolos numéricos são usados simplesmente para registrar os resultados mentais"*.

Sendo assim, operar em bases não usuais requer que saibamos a tabuada e para que tenhamos agilidade e habilidade mental para efetuar cálculos é necessário que ela seja conhecida mentalmente.

Portanto, é importante fazer algumas reflexões quanto ao uso da tabuada. Em geral, ao falar de ensino de multiplicação vem em mente a necessidade do aluno saber a tabuada.

> duas posições se apresentam de forma antagônica, a primeira defende que é preciso decorar a tabuada a qualquer preço e a segunda é totalmente contra isso. Nós acreditamos que decorar a tabuada não deve ser o objeto central de atenção no momento de estudar a multiplicação, porém a compreensão da tabuada faz parte do conjunto de conhecimentos que o aluno deve adquirir e o importante é que ela seja construída por ele (BITTAR; FREITAS, 2005, p.69).

Percebemos assim, que a importância de ter familiriadade com a tabuada da base que estamos utilizando para executar as operações é facilitar a realização dos cálculos e, ainda, desenvolver o cálculo mental. Isto é, ao fazer as operações em bases não usuais, observamos claramente que é necessário saber a tabuada, caso contrário os cálculos ficam muito mais demorados.

Segundo Eves (2004, p.43) *"nosso êxito e eficiência ao efetuar as operações aritméticas dependem de quão bem tenhamos em mente as tábuas de adição e multiplicação, cujo aprendizado são dedicadas tantas horas das primeiras séries escolares"*.

No entanto, quando nos colocamos a operar com bases diferentes da decimal, percebemos que não temos familiaridade com as tabuadas desses números e, assim, sentimos muitas dificuldades em realizar as operações.

Dessa forma, observamos que assumimos o lugar do aluno que tem dificuldades em operar na base dez quando executamos essas operações em bases não usuais e, assim, percebemos claramente as dúvidas(dificuldades) que surgem no ensino básico.

A seguir, serão apresentadas as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) no conjunto dos números naturais e, ainda, apresentaremos o algoritmo da raiz quadrada como uma curiosidade, visto que não está mais em uso, devido a disseminação do uso de calculadoras.

Escolhemos nesta seção usar, na maioria das vezes, a base seis para executar as operações. Assim, apresentaremos abaixo as tabuadas de adição e de multiplicação que serão úteis para orientar nossas operações. Observamos que estamos acostumados a utilizar as tabuadas referente a base decimal, no caso de outra base o procedimento é o mesmo.

Quadro 2 – Tabuada de adição na base seis $(10)_6$

+	0	1	2	3	4	5	10
0	0	1	2	3	4	5	10
1	1	2	3	4	5	10	11
2	2	3	4	5	10	11	12
3	3	4	5	10	11	12	13
4	4	5	10	11	12	13	14
5	5	10	11	12	13	14	15
10	10	11	12	13	14	15	20

Fonte: autor

2.3.1 Algoritmo da Adição

Observamos que as mesmas regras utilizadas no algoritmo da adição do sistema de numeração decimal são válidas para os números escritos em qualquer outro sistema numérico de base qualquer. Assim, primeiro somamos as unidades, passamos logo à ordem seguinte, etc. até chegar a maior ordem, com a particularidade de que se faz uma transferência(transporte) ou reagrupamos à ordem seguinte toda vez que em uma ordem

Quadro 3 – Tabuada de multiplicação na base seis $(10)_6$

×	0	1	2	3	4	5	10
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	10
2	0	2	4	10	12	14	40
3	0	3	10	13	20	23	30
4	0	4	12	20	24	32	40
5	0	5	14	23	32	41	50
10	0	10	20	30	40	50	100

Fonte: autor

se obtém uma soma maior ou igual à base do sistema empregado. Essa é a ideia intrínseca no chamado por muitos de "vai um".

Percebemos que ao ensinar os algoritmos precisamos compreender a decomposição dos números, ou seja, entender o valor posicional de cada algarismo. Ao ensinar dessa maneira compreendemos o que está por detrás do sistema de numeração e ampliamos nosso entendimento das operações matemáticas.

É importante lembrar que o algoritmo não deve ser super valorizado e que os alunos podem utilizar de outras estratégias para realizar os cálculos, mas sabemos que eles são extremamente úteis para sintetizar os cálculos sem o uso de calculadoras.

O cálculo mental é outra questão importante que deve ser estimulado no ensino da matemática e, para isso, devemos incentivar os estudantes a usar o método de decomposição e composição de um número.

Por exemplo, usando a representação decimal dos números a seguir, temos:

$$134 + 225 = (100 + 30 + 4) + (200 + 20 + 5)$$

$$= (100 + 200) + (30 + 20) + (4 + 5)$$

$$= 300 + 50 + 9$$

$$= 359$$

Exibiremos a seguir o algoritmo da adição, com os números representados no sistema decimal, sendo análogo em sistemas numéricos de bases não usuais. Procedemos do seguinte modo: da esquerda para direita, adicionamos as centenas e seu resultado colocaremos na 1ª ordem, depois faremos o mesmo com as dezenas colocando o resultado nas dezenas, e assim, sucessivamente.

No exemplo abaixo, temos o algoritmo da adição com os números na representação decimal por meio da decomposição dos números. Esse método é válido para a compreensão do que está por detrás do algoritmo da adição.

Exemplo 15. *(SANTANA, 2016, p.27)Qual é a soma* 158 + 265*?*

$$
\begin{array}{rl}
\scriptstyle cdu & \\
158 & (100+50+8) \\
+265 & (200+60+5) \\
\hline
300 & \\
+110 & \\
13 & \\
\hline
423 &
\end{array}
$$

2.3.1.1 Algoritmo Convencional da Adição

Usando o algoritmo convencional, faremos um exemplo de adição na base seis. Consultando o quadro 2 conseguimos realizar esse exemplo sem dificuldades.

Exemplo 16. *Efetue a soma de* $(423)_6$*,* $(521)_6$ *e* $(1341)_6$ *na base 6.*

	6^a ordem	5^a ordem	4^a ordem	3^a ordem	2^a ordem	1^a ordem
	6^5	6^4	6^3	6^2	6^1	6^0
				1		
				4	2	3
Base seis			2	5	2	1
		+	1	3	4	1
			3	1	2	5

Consultando o quadro 2 observe, na base seis, os agrupamentos são realizados de $6^1, 6^2, \ldots$. Primeiro somamos os algarismos da 1ª ordem, depois da segunda ordem e, assim por diante. Porém, quando a soma encontrada for maior ou igual o valor da base do sistema empregado, neste caso seis, “transferimos” ou “transportamos” à ordem seguinte, o famoso “vai um” (ou vai dois, três,...).

No exemplo 15, temos que a soma na segunda ordem é $2 + 2 = 4$ e $4 + 4 = 8$ que corresponde a $(12)_6$, assim temos um grupo de seis mais duas unidades, pois $(12)_6 = 1 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0$. Dessa forma, o resultado da segunda ordem é dois e transportamos um agrupamento de seis para ordem imediatamente superior.

Então, na 3ª ordem acrescenta-se o 1 (um agrupamento de seis). Agora, a adição na terceira ordem será de $1 + 4 + 5 + 3$. Daí, $1 + 4 + 5 + 3 = (21)_6$, ou seja, dois agrupamentos de seis mais uma unidade. Assim, o resultado da 3ª ordem é um e transportamos 2 agrupamentos de seis para ordem imediatamente superior. E assim, sucessivamente até obtermos o resultado da soma $(423)_6 + (521)_6 + (1341)_6 = (3125)_6$.

Do ponto de vista didático, o professor deve ser cuidadoso ao ensinar as operações fundamentais, visto que não é meramente "vai um", mas sim uma troca em que cada agrupamento formado corresponde a uma unidade da ordem imediatamente superior.

2.3.2 Algoritmo da Subtração

A subtração é a operação inversa da adição, portanto podemos consultar o quadro 2 para resolver essa operação na base seis. E, ainda, o algoritmo convencional da subtração é semelhante ao algoritmo da adição.

Muitas vezes, o algoritmo da subtração é feito de forma "mecânica", sem compreendê-lo. Assim, não se compreende o significado do "emprestar", por exemplo. Analogamente ao que foi feito na seção anterior, apresentaremos um exemplo da operação de subtração, utilizando a base seis.

Exemplo 17. *Efetue a subtração de* $(52340)_6 - (4555)_6$ *usando o algoritmo convencional.*

$$\begin{array}{cccccc}
 & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & \\
 & (5 & 2 & 3 & 4 & 0)_6 \\
- & & (4 & 5 & 5 & 5)_6 \\
\hline
 & (4 & 3 & 3 & 4 & 1)_6
\end{array}$$

Note que as regras são as mesmas do sistema de base 10. Tendo um olhar crítico, conseguimos ver o significado de "emprestar". Na verdade ocorre uma troca por agrupamento e, após isso, o aluno tansporta uma unidade de uma ordem, que se torna seis unidades da ordem imediatamente inferior.

No exemplo 16, na primeira ordem(a ordem das unidades) não é possível tirarmos 5 de 0 no conjunto dos números naturais. Assim, teremos que decompor um dos 4 grupos de 6^1 da ordem imediatamente superior . Assim, obtemos $(10)_6$ (seis unidades) nos permitindo, agora, tiramos 5 unidades, restando portanto, $(10)_6 - (5)_6 = (1)_6$ unidade.

Na segunda ordem, nos restou $(3)_6 < (5)_6$. Analogamente, portanto precisamos "emprestar" (trocar) da ordem imediatamente superior, ou seja, tomamos uma unidade das três da terceira ordem.

Note que uma unidade da terceira ordem equivale a um grupo de 6^2. Assim, ao fazer o transporte para a segunda ordem, reagrupamos com as 3 unidades restantes da segunda ordem. Assim, ficaremos com $(13)_6 - (5)_6 = (4)_6$. E assim, sucessivamente.

Portanto, $(52340)_6 - (4555)_6 = (43341)_6$.

No caso do sistema senário (base seis), ao "emprestar" (quando for necessário), retiramos um grupo múltiplo de potência de seis $(6^1, 6^2, 6^3, \ldots)$ da ordem imediatamente superior.

Sendo assim, ao realizar essas operações em bases diferentes da decimal, “reaprendemos”, ou melhor, somos obrigados a pensar sobre o que fazemos, adquirindo conhecimento para ensinar o algoritmo na base decimal.

2.3.2.1 Algoritmo da subtração por compensação ou de igualdade da adição

Outro método que pouco é utilizado no ensino básico é o ensino de subtração usando a técnica de igualdade de adições que baseia-se na propriedade de invariância do resto que nos afirma que se mantém a diferença quando adicionamos o mesmo número aos dois termos da subtração (SANTANA, 2016, p.33).

Primeiramente, segue um exemplo de subtração por compensação que pode ser encontrado em Santana (2016, p.33):

Exemplo 18. *Efetuar a diferença* $451 - 265$ *usando o método por compensação:*

Observe a ordem das unidades em que não podemos subtrair 5 de 1, então adicionamos 10 ao 1 do minuendo e o mesmo faremos ao 6 do subtraendo, temos que:

$$\begin{array}{rl} 451 & \leftarrow +10 \\ \underline{-265} & \\ \uparrow & \\ +10 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{cdu} & \\ 45_{11} & \text{minuendo} \\ \underline{-275} & \text{subtraendo} \\ 6 & \end{array}$$

“novamente não conseguiremos retirar 7 *de* 5*, ou seja,* 70 *de* 50*, logo adicionaremos* 100*, que corresponde a* 10 *dezenas ao* 5 *do minuendo e o mesmo faremos com o* 2 *do subtraendo”* (SANTANA, 2016, p.33). Assim, obtemos:

$$\begin{array}{r} +100 \\ \downarrow \\ 45_{11} \\ \underline{-275} \\ \uparrow\ 6 \\ +100 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 4 & {\scriptstyle 15} & {\scriptstyle 11} \\ -3 & 7 & 5 \\ \hline 1 & 8 & 6 \end{array}$$

Subtração por compensação usando a base seis

Analogamente, na base seis, teríamos $6^0, 6^1, 6^2, \ldots$, as respectivas ordens em vez de unidades, dezenas e centenas. Mas os procedimentos são os mesmos. Observe o exemplo abaixo.

Não podemos tirar 5 de 0, assim pelo método da compensação, acrescentamos 6 na primeira ordem do minuendo e 6 na segunda ordem do subtraendo, obtendo assim:

$$\begin{array}{r} (340)_6 \leftarrow \\ -(225)_6 \\ \hline \downarrow \\ +6 \end{array} \quad +6 \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{r} (34^{1}0)_6 \\ -(235)_6 \\ \hline (111)_6 \end{array}$$

Efetuando a operação acima na ordem das unidades, temos que $(10)_6 - (5)_6 = (1)_6$, na segunda ordem não temos problemas $(4)_6 - (3)_6 = (1)_6$ e assim, por diante. Até obtermos o resultado final.

2.3.3 Algoritmo da Multiplicação

A multiplicação é uma operação fundamental para realizar a divisão, por exemplo. Essa operação nada mais é que uma soma de parcelas iguais. Porém, as vezes os estudantes não tem essa compreensão e realizam o algoritmo sem esse raciocínio.

Além disso, ressaltamos aqui a necessidade dos professores apresentarem as justificativas de cada procedimento da multiplicação, como por exemplo porque "pular uma casa" ou "colocar zero" na ordem das unidades.

Dessa forma, propomos os exemplos abaixo, como uma sugestão para trabalhar esse algoritmo, que é de suma importância para o ensino e aprendizagem da matemática.

2.3.3.1 Algoritmo da multiplicação por decomposição

Representando os números na base decimal faremos um exemplo exibindo o que está por detrás de cada procedimento neste algoritmo.

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo 19. *Multiplique* $(125)_{10}$ *por* $(32)_{10}$. *Multiplicação em base dez*

Observe que isso é feito na base decimal e pode ser realizado também em outras bases, como por exemplo na base seis. Esse entendimento permite ao professor ensinar com profunda segurança o algoritmo da multiplicação.

Agora, usaremos a tabuada do quadro 3, elaborada considerando o sistema de numeração de base seis. Nessa tábua, temos todos os números representados no sistema de numeração base seis. Utilizando-a, podemos multiplicar sem dificuldades dois números quaisquer.

UM	C	D	U		
	1	2	5		
	×	3	2		
		1	0	→	2×5
		4	0	→	2×20
	2	0	0	→	2×100 ↘
	1	5	0	→	30×5
	6	0	0	→	30×20
3	0	0	0	→	30×100 →
4	0	0	0	→	

	1	2	5
	×	3	2
+	2	5	0
3	7	5	0
4	0	0	0

Dessa forma, a proposta aqui é trabalhar a multiplicação usando bases distintas da decimal. O método por decomposição pode ser usado em outras bases, conforme o exemplo abaixo:

Exemplo 20. *Efetue a multiplicação de* $(352)_6$ *por* $(45)_6$.

	4ª	3ª	2ª	1ª		
		3	5	2		
	×		4	5		
			1	4	→	5×2
		4	1	0	→	5×50
	2	3	0	0	→	5×300
		1	2	0	→	40×2
	3	2	0	0	→	40×50
2	0	0	0	0	→	40×300
3	0	4	4	4		→

↘			3	5	2
		×		4	5
	+	2	7	2	4
→	2	3	3	2	0
	3	0	4	4	4

2.3.3.2 Algoritmo convencional da multiplicação

Usando o algoritmo convencional faremos a seguinte multiplicação na base seis:

Exemplo 21. *Multiplique* $(352)_6$ *por* $(245)_6$.

Assim, temos na primeira ordem, $(5)_6 \times (2)_6 = (14)_6$. Reserva-se o $(4)_6$ e envia o $(1)_6$ para a ordem imediatamente superior, ou seja, acrescenta-se agrupamento na segunda ordem. Daí, $(5)_6 \times (5)_6 = (41)_6$ mais um agrupamento que veio da ordem anterior, teremos $(41)_6 + (1)_6 = (42)_6$. Repete-se o mesmo procedimento para todos as ordens subsequentes. Notamos então, que após todas as multiplicações, devemos somar os resultados, o que resulta $(145244)_6$.

Observe que regras são as mesmas utilizadas no sistema de numeração decimal, pois o algoritmo é o mesmo. Assim, as ordens e classes são subdivididas da mesma forma, mudando somente os agrupamentos (a base) que nesse caso é seis.

6^a ordem	5^a ordem	4^a ordem	3^a ordem	2^a ordem	1^a ordem
6^5	6^4	6^3	6^2	6^1	6^0
			1		
			3	1	
			4	1	
			(3	5	$2)_6$
	$\times$		(2	4	$5)_6$
		1			
	1	(2	7	2	$4)_6$
$+$	(2	3	3	$2)_6$	
(1	1	4	$4)_6$		
(1	4	5	2	4	$4)_6$

Fonte: autor

2.3.4 Algoritmo da Divisão

A divisão é a operação inversa da multiplicação. Para realizar o algoritmo dessa operação é necessário que o aluno tenha pré-requisitos bem estabelecidos, tais como: a subtração e a multiplicação.

Dessa forma, a operação de divisão pode ser a operação que os alunos mais sentem dificuldade em aprender. Conforme, Bittar e Freitas (2005, p.78) os alunos, às vezes, não compreendem o algoritmo, pois muitas vezes o algoritmo foi apresentado sem justificativa, simplesmente a partir do princípio fundamental da divisão, exigindo-se apenas que a criança faça o processo mais curto desde o início.

2.3.4.1 Algoritmo da divisão pelo método de divisões sucessivas

O método é conhecido por método americano ou divisão por estimativa, ele irá trabalhar a capacidade de estimarmos os possíveis resultados para o quociente. Iremos desenvolvendo aos poucos a divisão e as respectivas explicações que se fazem pertinentes (SANTANA, 2016, p.47).

Abaixo, faremos um exemplo mostrando como funciona esse método, lembrando que pode ser realizado em sistemas numéricos de base qualquer.

Exemplo 22. *(SANTANA, 2016, p.47) Efetuar a divisão de* 426 *por* 9*.*

$$
\begin{array}{rrrr|l}
{}^{3}4 & {}^{1}\cancel{2} & 6 & & \,9 \\ \cline{5-5}
 & -9 & 0 & & \,10 \\ \cline{1-3}
{}^{2}\cancel{3} & {}^{1}3 & 6 & & +20 \\
-1 & 8 & 0 & & \,10 \\ \cline{1-3}
{}^{0}\cancel{1} & {}^{1}5 & 6 & & \,\underline{\;\;7} \\
 & -9 & 0 & & \,47 \\ \cline{1-3}
 & 6 & 6 & & \\
 & -6 & 3 & & \\ \cline{1-3}
 & & 3 & &
\end{array}
$$

Esse método pode ser usado nas operações em bases não usuais. Veja o exemplo abaixo da divisão $(1000)_6 : (34)_6$

Segue um exemplo de divisão na base seis .

$$
\begin{array}{r|l}
(1000)_6 & (34)_6 \\ \cline{2-2}
-442 & 5 + 1 = (10)_6 \\ \cline{1-1}
0114 & \\
-54 & \\ \cline{1-1}
20 & \text{resto}
\end{array}
$$

2.3.4.2 Algoritmo convencional da divisão

O algoritmo convencional é o que mais costumamos usar para ensinar divisão no ensino básico. Para ensinar e compreender o algoritmo convencional da divisão é necessário entender o Princípio fundamental da divisão que diz: *"Numa divisão de dois números naturais, com o divisor diferente de zero, o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente somado com o resto"*(BITTAR; FREITAS, 2005, p.48). Ou seja, na divisão de D por d, teremos

$$D = q \times d + r$$

onde $D = dividendo$, $q = quociente$, $d = divisor, d \neq 0$, $r = resto.$

Segundo Fomin et al. (2012) a divisão também pode ser realizada em qualquer sistema de numeração.

Observe o quadro 4, que refere-se a tabuada na base 3, que utilizaremos para exemplificar a divisão abaixo.

Assim, o exemplo abaixo foi realizado com os números representados na base três.

Exemplo 23. *(FOMIN et al., 2012)Consideremos, por exemplo, o problema de divisão de* $(120101)_3$ *por* $(102)_3$*.*

Quadro 4 – Tabuada de multiplicação na base três$(10)_3$

$\times$	0	1	2	10
0	0	0	0	0
1	0	1	2	10
2	0	2	11	20
10	0	10	20	30

Fonte: (FOMIN et al., 2012)

$$
\begin{array}{cccccc|l}
(1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1)_3 & (102)_3 \\ \cline{7-7}
-1 & 0 & 2 & & & & 1101 \\ \cline{1-3}
0 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & -1 & 0 & 2 & & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & \\
 & & & -1 & 0 & 2 & \\ \cline{4-6}
 & & & 0 & 2 & 2 &
\end{array}
$$

Assim, o procedimento foi escolher do lado esquerdo da chave um número maior ou igual ao número da chave (analogamente ao que é feito na base 10). Sendo assim, escolhemos o número $(120)_3$ o qual é maior que o número da chave $(102)_3$. Escolhe-se o número que multiplicado pelo da chave o resultado seja menor ou igual ao escolhido do lado esquerdo. Em outras palavras, observamos para o dividendo e escolhemos, primeiro, $(120)_3$. Agora sim, podemos dividir por $(102)_3$. Caberá aqui a multiplicação. Sabemos que $(1 \cdot 102)_3 = (102)_3$, portanto cabem 1 parte igual a 102 em 120, ambos na base 3, posicionado embaixo do valor selecionado no dividendo, fazendo agora a subtração entre estes dois números, obtemos $(11)_3$. E assim, sucessivamente.

Para verificar o resultado, vamos escrever o dividendo, o divisor, o quociente e o resto no sistema decimal.

$(120101)_3 = 3^5 + 2 \times 3^4 + 3^2 + 1 = (415)_{10}$

$(102)_3 = 3^2 + 2 = (11)_{10}$

$(1101)_3 = 3^3 + 3^2 + 1 = (37)_{10}$

$(22)_3 = 2 \times 3 + 2 = (8)_{10}$

e notamos que

$$415 = 11 \times 37 + 8 \quad \text{e} \quad 8 < 11$$

Confirmando que a divisão está correta.

Exemplo 24. *Dividir* $(24243)_6$ *por* $(113)_6$.

$$
\begin{array}{rrrrrl|l}
(2 & 4 & 2 & 4 & 3)_6 & & (113)_6 \\
\cline{7-7}
-2 & 3 & 0 & & & & (211)_6 \\
\cline{1-3}
 & 1 & 2 & 4 & & & \\
 & -1 & 1 & 3 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 1 & 1 & 3 & & \\
 & & -1 & 1 & 3 & & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Vale lembrar que o importante não é memorizar regras, métodos, mas sim, atribuir significado a todos esses algoritmos que são rigorosamente ensinados no ensino básico.

2.3.5 Algoritmo da Raiz Quadrada

Esse algoritmo é apresentado aqui como uma curiosidade matemática, visto que não é mais utilizado devido a difusão do uso das calculadoras. Geralmente, o ensino da raiz quadrada começa nas séries iniciais do ensino fundamental, com números simples, de modo que o aluno possa resolver por exproximações sucessivas. Sendo assim, mostraremos que até a raiz quadrada podemos calcular em bases numéricas diferentes da decimal.

Apresentaremos o algoritmo da raiz quadrada (baseado no algoritmo de Heron) que é justificada, por meio de um caso particular. Cuja demonstração pode ser encontrada em (SILVA, 2016, p.24).

Se H é um quadrado perfeito formado por três algarismos, logo é a soma de x centenas + y dezenas + z unidades, tal que $0 \leq x, y, z \leq 9$.

Então

$$
\begin{aligned}
H &= (x10^2 + y10 + z)^2 \\
H &= (x10^2 + y10 + z) \times (x10^2 + y10 + z) \\
H &= (x10^2)^2 + (x10^2)y10 + (x10^2)z + (y10)x10^2 + (y10)y10 + \\
&\quad +(y10)z + z(x10^2) + z(y10) + z^2 \\
H &= 10^4x^2 + (2x10)(y10^2) + y(y10^2) + 2x10^2z + 2y10z + z^2 \\
H &= 10^4x^2 + 2x10(y10^2) + y(y10^2) + \left[2x10^2 + 2y10 + z\right] z \\
H &= 10^4x^2 + (2x10)(y10^2) + y(y10^2) + [(2x10 + 2y)10 + z]\, z \\
H &= 10^4x^2 + (2x10y)(y10^2) + [2(x10 + y)10z + z]\, z
\end{aligned}
$$

Tomando $A = x^2, B = (2x10 + y)y$ e $C = [2(x10 + y)10 + z]\, z$, temos

$$H = A10^4 + B10^2 + C$$

Este resultado justifica o algoritmo que descreveremos agora, com um exemplo.

Exemplo 25. [1]. *Calcular o valor da raiz quadrada de* $(1225)_{10}$.

- Começamos divindo o número 1225, da direita para a esquerda, em classes de dois algarismos, ou seja 25 e 12.

- Mentalmente, deve-se encontrar o número cujo quadrado seja o valor mais próximo da classe da esquerda, mas nunca superior. Nesse exemplo, o quadrado mais próximo de 12 é 9, logo 3^2. Então, o número desejado é 3.

- Colocamos o 3 à direita e o 9 abaixo do 12 e realizamos a diferença $12 - 9 = 3$.

$$\begin{array}{c|c} \sqrt{1225} & 3 \\ \cline{2-2} -9 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

- A direita da diferença escreve-se o próximo grupo de algarismos, ou seja 25 e embaixo do 3 escreve-se o seu dobro, ou seja 6

- Do resultado (325) separa-se o 5 e divide-se o número restante por 6, ou seja, $(32 \div 6)$. Obtemos o quociente 5 e o colocamos a direita do 6 do lado direito da chave.

$$\begin{array}{r|c} \sqrt{1225} & 3 \\ \cline{2-2} -9\ \ \ & 65 \\ \hline 325 & \end{array}$$

- Multiplica-se o valor obtido (65) pelo quociente (5), tal que $65 \times 5 = 325$. O produto obtido tem que ser menor ou igual ao número que se encontra a esquerda. Assim, efetua-se a subtração do número da esquerda pelo produto e aceita-se o 5 como o segundo número da raiz quadrada. Caso contrário, tem que se ir diminuindo o valor do quociente até encontrar um em que o produto seja inferior.

$$\begin{array}{r|c} \sqrt{1225} & 3 \\ \cline{2-2} -9\ \ \ & 65 \\ \hline 325 & \times 5 \\ \cline{2-2} -325 & 325 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Portanto, como o primeiro número separado foi o 3 e o segundo foi o 5, logo $\sqrt{1225} = 35$

Da mesma maneira, pode-se calcular a raiz quadrada de um número em outra base numérica. Veja o exemplo abaixo:

[1] exemplo encontrado no site https://docplayer.com.br/20965194-Algoritmo-da-raiz-quadrada.html

Exemplo 26. *Calcular da raiz quadrada de* $\sqrt{(1001)_2}$, $\sqrt{(3400)_7}$ *e* $\sqrt{(4104)_5}$

Solução 1. *Vejam que a solução segue o mesmo padrão da solução na base decimal.*

$$a)\quad \begin{array}{c|c} \sqrt{(1001)_2} & 11 \\ \cline{2-2} -01 & 101 \times 1 = 101 \\ \cline{1-1} 101 & \\ -101 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$b)\quad \begin{array}{c|c} \sqrt{(3400)_7} & 50 \\ \cline{2-2} -34 \Downarrow & 13 \times 0 = 0 \\ \cline{1-1} 0000 & \end{array}$$

$$c)\quad \begin{array}{c|c} \sqrt{(4104)_5} & 43 \\ \cline{2-2} -31 \Downarrow & 133 \times 3 = 1004 \\ \cline{1-1} 1004 & \\ -1004 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

2.4 Testes de divisibilidade em bases não usuais

É possível verificar se um número é divisível por outro sem efetuar a divisão utilizando os famosos critérios de divisibilidade. Na maioria das vezes, utilizar um teste de divisibilidade torna muito mais eficiente encontrar o resto de uma divisão, e saber, no caso particular em que o resto é zero, se um número é divisível por outro.

Na escola, o uso desses critérios faz com que o aluno adquira habilidade mental para realizar cálculos que serão úteis, por exemplo, para fazer a decomposição de um número em seus fatores primos. O cálculo de mínimo múltiplo comum e de máximo divisor comum entre outros são facilitados quando os alunos conhecem os critérios de divisibilidade do sistema que está usando.

Os critérios de divisibilidades na base decimal são bem conhecidos e proporciona uma ferramenta fundamental para aprender a efetuar cálculos sem fazer todo o processo de dividir, porém, conforme Fomin et al. (2012, p.185), seria interessante se os alunos pudessem formular e provar diversos testes de divisibilidade, usando o professor para auxiliá-los.

Vale a pena lembrar que os sistemas numéricos em bases não usuais são simplesmente maneiras diferentes de escrever números. Dessa forma, a divisibilidade de um número por outro não depende do sistema de numeração no qual eles estão escritos. Sendo assim, a mesma lógica usada para entender os critérios de divisibilidade na base decimal serão discutidos numa base b qualquer.

Para os professores é importante entender como isso acontece, por isso, será proposto neste capítulo o ensino de critérios de divisibilidade em outras bases numéricas, pois acreditamos que entender esses critérios em bases não convencionais pode contribuir para a aquisição de um conhecimento aprofundado dos critérios que usamos naturalmente no sistema de numeração decimal.

É necessário que os alunos desenvolvam habilidades mentais com os números para que ao longo de toda sua escolaridade possam adiquir capacidade de identificar a divisibilidade de um número por outro, sem efetuar a divisão. Dessa maneira, os alunos ganham autonomia, habilidades mentais e agilidade com os números.

A necessidade maior é que professores compreendam como esse critérios são construídos por meio das demonstrações abaixo. Seria interessante o professor construir critérios com os estudantes, pois a capacidade mental exigida para entender isso, pode contribuir para o desenvolvimento do racicíonio lógico, capacidade de cálculo mental e habilidades na contagem.

Assim, critérios de divisibilidade fazem parte do currículo escolar, sendo necessário em diversos contextos do ensino da matemática. Daí a importância dos critérios serem bem conhecidos pelos alunos e retomados sempre que possível no ensino básico.

Note que para descobrir se um número é divível por outro em bases numéricas não convencionais a situação é diferente e um pouco mais difícil. Por exemplo, como descobrir se $(123456654321)_7$ é divisível por 6?

Pretende-se, neste capítulo apresentar, alguns critérios de divisibilidade em uma base qualquer. Além disso, em particular, faremos um breve estudo sobre a paridade em uma base b qualquer.

Por fim, responder por meio dos exemplos e dos teoremas as seguinte perguntas: O que fazer para, de forma imediata, descobrir se um número natural é divisível por outro? E se mudarmos a base numérica de representação de um número, o que podemos dizer sobre os critérios de divisibilidade nessa base? Como descobrir a paridade de um número em uma base numérica qualquer?

2.4.1 Testes de divisibilidade na base decimal

Nessa seção, recordaremos os enunciados de alguns critérios de divisibilidade no sistema de numeração decimal.

Critério de divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é divisível por 3.

Critério de divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 se seu último algarismo da direita é 5 ou 0 (ou seja, se o número de unidades de primeira ordem é divisível por 5).

Critério de divisibilidade por 2

É análogo ao anterior: um número é divisível por 2 se o número de unidades de primeira ordem é divisível por 2.

Critério de divisibilidade por 9

É análogo ao critério de divisibilidade por 3: um número é divisível por 9 se a soma de seus algarismos é divisível por 9.

Critério de divisibilidade por 10: Um número é divisível por 10 se e somente se, o último algarismo for igual a *zero*.

Critério de divisibilidade por 11 : Um número é divisível por 11 quando a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par resulta em múltiplo de 11.

2.4.2 Testes de divisibilidade na base b

Os critérios descritos na seção anterior que usam a base decimal, são casos particulares de critérios que podem ser obtidos em uma base qualquer. Assim, quando mudamos a base numérica de representação de um número, também podemos enunciar os critérios de divisibilidade. Em geral, não podemos aplicar os mesmos critérios que usamos na base decimal.

Por exemplo, um número na base 12 é divisível por 11 quando a soma de seus algarismos for múltiplo de 11, diferentemente do critério por 11 na base decimal.

Observe que $(126)_8$ seria divisível por 3, se aplicássemos o mesmo critério que usamos na base decimal, pois temos que $1+2+6=9$, mas note que $(126)_8 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 64 + 16 + 6 = 86$, e o número 86 não é divisível por 3. Assim, os critérios de divisibilidade dependem da base numérica escolhida.

Portanto, essa seção tem como objetivo apresentar critérios de divisibilidade em bases não usuais. Porém, antes de enunciarmos os teoremas será necessário recordar alguns resultados sobre congruências.

Segundo Fomin et al. (2012, p.103) observamos que ao resolver muitos problemas sobre divisibilidade, trabalhamos na maioria das vezes, não com o número propriamente dito, mas com o resto da divisão de algum número fixo.

Definição 2.4.1. Sejam dois números inteiros a e b, diremos que *a divide b* e escrevemos $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$. Nesse caso, diremos também que b é divisível por a.

Exemplo 27. $5|10$, *pois* $10 = 5 \cdot 2$

$2|6$, *pois* $6 = 2 \cdot 3$

Definição 2.4.2. Dizemos que os inteiros a e b são congruentes módulo m se eles têm o mesmo resto quando divididos por m. Assim, escrevemos $a \equiv b \mod (m)$.

Exemplo 28. $9 \equiv 29 \mod (10)$, *pois* $9 = 0 \cdot 10 + 9$ *e* $29 = 2 \cdot 10 + 9$, *ou seja,* 9 *e* 29 *têm o mesmo resto na divisão por* 10.

Analogamente,

$1 \equiv 3 \mod (2)$,

$16 \equiv 9 \mod (7)$.

Segue da definição que:

A é divisível por $m \Leftrightarrow A \equiv 0 \mod (m)$.

A proposição abaixo será muito usada nas demonstrações dos teoremas de critérios de divisibilidade.

Proposição 2.4.1. Suponha $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$, tem-se que $a \equiv b \mod (m)$ se, e somente se, $m \mid a - b$

Demonstração. Se $a \equiv b \mod (m)$, seja r o resto comum da divisão de a ou b por m, então existem k_1 e k_2 inteiros tais que:

$$a = mk_1 + r, \quad b = mk_2 + r$$

Logo, $a - b = m(k_1 - k_2)$ é divisível por m.

Reciprocamente, se $a - b$ for divisível por m, dividimos a e b por m com resto

Temos que

$$a = mk_1 + r_1, \quad b = mk_2 + r_2$$

Então, $a - b = m(k_1 - k_2) + r_1 + r_2$ e, por hipótese, divisível por m. Portanto, $r_1 - r_2$ é divisível por m.

Como $| r_2 - r_1 |< m$, temos $r_1 = r_2$. Portanto, $a \equiv b \mod (m)$ e $m \mid a - b$. ∎

Exemplo 29. $7 \equiv -3 \mod (10)$, *pois* $10|7 - (-3)$

$2 \equiv 6 \mod (2)$, *pois* $2|6 - 2$

$16 \equiv 9 \mod (7)$, *pois* $|16 - 9$

Abaixo serão enunciados e demonstrados alguns critérios de divisibilidade em uma base qualquer, seguidos de aplicações e comparando com o que acontece no sistema de numeração decimal. Algumas demonstrações estão baseados em Rodrigues e Diniz (2015, p. 64-79) e Fomin et al. (2012, p.185).

Observamos ainda, que os teoremas enunciados a seguir são baseados nos conjuntos dos números naturais, tendo o zero como primeiro número natural.

Eles permitem determinar a divisibilidade por determinados números específicos em uma base numérica qualquer.

Seja N um número de k algarismos representado em sistema de numeração de base b, sendo a_0 o último algarismo (algarismo da unidade) e r o resto da divisão de N por b. Enunciaremos a seguinte proposição encontrada em Rodrigues e Diniz (2015, p.66).

Proposição 2.4.2. Sendo r o resto da divisão de N por b, $r < b$ e a_0 o algarismo das unidades de um número N natural, segue que as afirmações (i) e (ii) dadas abaixo são equivalentes:

(i) $N \equiv r \bmod b$

(ii) $r = a_0$

Demonstração. Do teorema 2.1.1, temos que n é um número natural, tal que

$$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n.$$

Seja r o resto da divisão de N por b. Dessa forma,

$$N \equiv r \mod b \Leftrightarrow a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots a_n b_n \equiv r \mod b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n\right) + a_0 \equiv r \mod b \Leftrightarrow$$

$$a_0 \equiv r \mod b \tag{2.3}$$

A congruência 2.3 deve-se ao fato de que $a_1 b, a_2 b^2, \ldots a_n b^n$ são todos múltiplos de b.

Como, por hipótese, $r < b$, $a_0 \equiv r \Leftrightarrow r = a_0$, portanto, $(i) \Leftrightarrow (ii)$

■

Segundo Rodrigues e Diniz (2015, p.66) a proposição 2.4.2 diz que o resto da divisão de um número n por b é o algarismo das unidades de n na base b.

Abaixo, enunciaremos um corolário que segue imediatamente da proposição 2.4.2.

Corolário 2.4.1. Um número é divisível pela base b do sistema de numeração se, e somente se, terminar em zero (último algarismo for igual a zero).

Demonstração. Considerando que um número N é divisível por b, segue que

$$b \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \mod b \Leftrightarrow a_0 = 0$$

■

O critério de divisibilidade por 10, que é base do sistema que usamos hoje se deve a esse corolário. Como já vimos anteriormente na seção 2.2 ao dividir por b, temos que o resto sempre será a ordem das unidades.

Em bases não usuais, como por exemplo no sistema de numeração de base 7, temos que todos os números da base 7 que terminam em zero são divisíveis por 7. Por exemplo, $(10)_7, (20)_7, (30)_7, (40)_7, (50)_7, (100)_7, (140)_7$.

Teorema 2.4.1. Seja d um divisor da base b de um sistema de numeração, então um número N é múltiplo de d se, e somente se, o último algarismo é múltiplo de d.

$d \mid b \Rightarrow d \mid N \Leftrightarrow d \mid a_0$

Demonstração. A proposição 2.4.2 garante que a_0 é o resto da divisão de N por b, assim $N = bq + a_0$, em que q é o quociente. Logo,

$$d \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod d \Leftrightarrow bq + a_0 \equiv 0 \bmod d$$

Como $d \mid b$, segue que $a_0 \equiv 0 \bmod d \Leftrightarrow d \mid a_0$ ■

Esse teorema implica em critérios de divisibilidade pelos divisores de uma base b qualquer. Ele explica os critérios de divisibilidade por 2 e 5 do sistema de numeração decimal, pois 2 e 5 são divisores de 10.

Por exemplo, no sistema senário(base 6) um número será divisível por 2 ou 3 se o algarismo das unidades terminar em múltiplo deles, pois são divisores da base. Exemplos: $(14)_6$ é divisível por 2, mas não por 3. Agora, $(13)_6$ é divisível por 3.

Teorema 2.4.2. Seja d um divisor da base b de um sistema de numeração, então um número N é divisível por d^k se, e somente se, os k últimos algarismos desse número formam, na ordem em que aparecem, um múltiplo de d^k.

Demonstração. Seja $N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n$

$$d^k \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod d^k \Leftrightarrow a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n \equiv 0 \bmod d^k \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{m} a_i b^i \equiv 0 \bmod d^k \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=k}^{m} a_i b^i + \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i \equiv 0 \bmod d^k$$

Como $d \mid b$, por hipótese, todos os termos de $\sum_{i=k}^{m} a_i b^i$ são divisíveis por d^k. Logo,

$$d^k \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i \equiv 0 \bmod d^k \Leftrightarrow d^k \mid \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i.$$

■

Esse teorema explica os critérios de divisibilidade por 4 e 8 no sistema de numeração de base decimal.

Segundo Rodrigues e Diniz (2015, p.69) *"esse teorema afirma que N será múltiplo da $k-$ésima potência de um divisor da base se, e somente se, o número representado pelos k últimos algarismos de N, na ordem em que aparecem, também for um múltiplo dessa potência".*

Note que $4 = 2^2$ e $8 = 2^3$, e 2 é divisor de 10. Na base decimal para saber se um número é divisível por 8 basta analisarmos seus três últimos algarismos, caso formem um número múltiplo de 8, então o número será múltiplo de 8. Por exemplo, o número 76.504 é divisível por 8, pois 504 é múltiplo de 8 ($504 = 8 \cdot 63 + 0$).

Em uma base nove, por exemplo, temos o número $(132)_9$ não é divisível por $4 = 2^2$, pois $(32)_9$ ao dividir por 4, obtemos 7 e resto igual a 1.

Conforme Rodrigues e Diniz (2015, p.69), no caso da base decimal, temos que :

> o grande mérito do teorema das potências não reside aí, e sim no fato de que nos revela que qualquer potência de 2 ou de 5, goza desta propriedade. Assim, por exemplo, um número só será múltiplo de $25 = 5^2$ se terminar em 00, 25, 50 ou 75, visto que esses são os únicos múltiplos de 25 que têm dois algarismos ou menos.

Teorema 2.4.3. Um número é divisível pelo antecessor da base, $b - 1$, de um sistema de numeração de base b se, e somente se, a soma dos algarismos que formam este número for um múltiplo de $b - 1$.

Demonstração. Seja

$$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n$$

De fato, $b \equiv 1 \bmod (b-1)$, logo $b^s \equiv 1 \bmod (b-1)$ para qualquer número natural s. Assim, $a^s b^s \equiv a^s mod(b-1)$ para todo s natural.

$$N = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0 b^0 \equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 \bmod (n-1).$$

■

Esse teorema explica o critério por 9 na base decimal, pois 9 é antecessor de 10.

Agora, podemos responder a pergunta que fizemos no início desse capítulo em que deveríamos descobrir se $(123456654321)_7$ é divisível por 6.

Conforme o teorema acima, basta somar os algarismos $1+2+3+4+5+6+6+5+4+3+2+1=(42)_{10}$, pois 6 é o antecessor da base 7, portanto, como a soma dos algarismos é igual a $(42)_{10}$, que é divisível por 6 segue que o número $(123456654321)_7$ é dívisível por 6.

Exemplo 30. *Qual a condição para que o número $(ABC)_6$ seja divisível por 5?*

Resposta: Deve-se notar que $(a+1)^n = ka+1$, para algum $k \in Z$ basta aplicar o teorema binomial encontrado em HEFEZ (2013, p.27). Então:

$$(a+1) \equiv 1 \text{ mod } (a)$$

logo,

$$(a+1)^n \equiv 1^n \text{ mod } (a)$$

$$A \cdot 6^2 + B \cdot 6 + C \equiv A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C \equiv A + B + C \text{ mod } (5),$$

Ou seja, se a soma dos algarismos $A+B+C$ for divisível por 5 o número $(ABC)_6$ será divisível por 5.

Teorema 2.4.4. A soma "alternada" (com sinais alternados) dos algarismos na representação de um número em base b é divisível por $b+1$ se, e somente se, o próprio número é divisível por $b+1$.

Demonstração. Seja b a base, $b+1$ o sucessor da base, sendo e $N \in \mathbb{N}$. Pelo teorema 2.1.1

$$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n$$

Observe que $b \equiv -1 \mod b+1$ implica que $b^s \equiv (-1)^s \mod b+1$ para todo s natural. Assim,$a^s b^s \equiv a^s(-1)^s \mod b+1$

$$a_0+a_1b+a_2b^2+a_3b^3+\ldots+a_nb^n \equiv a_0+a_1(-1)+a_2(-1)^2+\ldots+a_n(-1)^n \equiv a_0-a_1+a_2+\ldots+a_n(-1)^n$$

Portanto, n é múltiplo do sucessor da base se, e somente se, $\sum_{i=0}^{K}(-1)^i a_i$ for múltiplo de $b+1$. ∎

Esse teorema explica o critério por 11 na base dez. Por exemplo, $(979)_{10}$ é divisível por 11 se a soma "alternada" dos seus algarismos for divisível por 11. Logo, temos que $9 - 7 + 9 = 11$, que é divisível por 11. Assim, $(979)_{10}$ é divisível por 11.

Na base octal (base 8) o número $(1210)_8$ é divisível por 9, pois $1 - 2 + 1 - 0 = 0$, que é divisível por 9. E portanto, $(1210)_8$ é divisível por 9.

2.5 Critérios de divisibilidade no sistema duodecimal

Os critérios de divisibilidade podem ser desenvolvidos em qualquer base, o que permite verificar se um determinado número inteiro é divisível por outro, porém devemos observar a base em que o número está representado. Nessa seção pretende-se descrever alguns critérios de divisibilidade na base 12 .

critérios de divisibilidade por 6, 2, 3 e 4 na base 12

Seja A um número escrito no sistema de numeração duodecimal, então $A = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_{12}$. Podemos enunciar os seguintes critérios de divisibilidade na base 12, cuja demonstrações seguem imeditamente do teorema 2.4.1.

Corolário 2.5.1. Um número representado no sistema duodecimal é divisível por 6 se, e somente se, seu último algarismo é divisível por 6 (terminar em 0 ou 6).

Corolário 2.5.2. Um número escrito no sistema duodecimal é divisível por 2 se seu último algarismo for 0, 2, 4, 6, 8, ou A.

Corolário 2.5.3. Um número escrito no sistema duodecimal é divisível por 3 se seu último algarismo se terminar em 0, 3, 6 ou 9.;

Corolário 2.5.4. Um número escrito no sistema duodecimal é divisível por 4 se seu último algarismo terminar em 0, 4 ou 8.

Critério de divisibilidade por 8 na base 12

Corolário 2.5.5. Um número $A = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_{12}$ é divisível por 8 se o número $(a_1 a_0)_{12}$, formado por seus dois últimos algarismos, é divisível por 8.

Demonstração. Como 4 é divisor de 12, segue pelo teorema 2.4.2 que $a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1$ é divisível por $4^2 = 16$ e, portanto, divisível por 8.

Portanto, devemos analisar somente o número formado pelos seus dois últimos algarismos $(a_1 a_0)_{12}$ para verificar a divisibilidade por 8 na base 12. ■

Por exemplo, $(140)_{12}$ é divísível por 8, pois $(40)_{12}$ dividido por 8 é igual 6, pois $8 \cdot 6 = (40)_{12}$.

Critérios de divisibilidade por 9 na base 12

Corolário 2.5.6. Um número $A = (a_n a_{n-1}...a_1 a_0)_{12}$ é divisível por 9 se o número $(a_1 a_0)_{12}$ formado por seus dois últimos algarismos é divisível por 9.

Demonstração. É análogo ao anterior, pois $9 = 3^2$ ■

Critérios de divisibilidade por 11 na base 12

Corolário 2.5.7. Um número $A = (a_n a_{n-1}...a_1 a_0)_{12}$ é divisível por 11 se a soma dos seus algarismos, ou seja, $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ é divisível por 11.

Demonstração. Segue imediatamente do teorema 2.4.3, pois 11 é antecessor da base 12 ■

Sistema duodecimal ou decimal?

Quando mudamos a representação do número (a base), algumas propriedades também podem mudar, uma delas, é a representação das frações que mudam de acordo com a base que estamos trabalhando.

O sistema de base duodecimal é uma base que teve muita aceitação, conforme o capítulo 1. Assim, há uma discussão quanto a possibilidade do sistema duodecimal ser mais vantajoso que o sistema decimal.

Lima et al. (2001, p.69) vai dizer que *"o número 10 foi escolhido como base do sistema de numeração porque o homem tem dez dedos nas mãos e por isso acostumou-se a contar em dezenas"*.

O sistema de numeração de base dez é usado no mundo inteiro.

> Em geral, a base dez veio pra ficar, apesar de algumas inconveniências apontadas por certos perfeccionaistas. A principal acusação feita ao número 10, como base de um sistema de numeração, reside no fato de que ele possui apenas dois divisores 2 e 5, enquanto 12 possui os divisores 2, 3, 4 e 6 (LIMA et al., 2001, p.69)

Observa-se que se a base mais utilizada fosse 12, seriam necessários mais dois símbolos(A e B), para representar os números 10 e 11, mas, em compensação, as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ teriam, todas, representações finitas (LIMA et al., 2001, p.70)

Sendo assim, caso houvesse mudança da base decimal para duodecimal não teríamos tantas mudanças. A principal mudança que ocorreria seria na representação das frações, pois a base duodecimal tem mais divisores, e, assim, obteríamos mais frações com representações finitas[2].

Segundo Lima et al. (2001, p.70)

[2] Quando um número possui representação posicional finita? Apenas quando o número racional é igual à fração irredutível $\frac{p}{q}$, onde q possui apenas fatores primos que são fatores primos de b.

> De vez em quando algumas pessoas propõem que se adote 12 como a base do sistema de numeração e não a 10, mas uma tal proposta não tem a mínima possibilidade de ser adotada. A civilização já se condicionou ao sistema decimal. De duodecimal, bastam-nos os meses do ano, as horas do dia e as dúzias de ovos que compramos nomercado.(...) Quanto a questão de saber quais as consequências da adoção de uma base diferente de 10, posso assegurar tranquilamente que elas seriam de ordem prática ou social, mas não científica.

Lima et al. (2001, p.69) destaca ainda que *"as coisas práticas que mudariam além das "duodízimas" já mencionadas, seriam a tabuada e os chamados "critérios de divisibilidade"*.

Diante disso, mudar a base não terá tantas alterações, somente a representação do número que será expressa de uma maneira diferente e os algoritmos também seriam os mesmos que utilizamos na base decimal.

2.6 Paridade

De acordo com (FOMIN et al., 2012, p.5), paridade significa estabelecer se o número é par ou ímpar. Por ser um tema simples, estudantes devem conhecê-lo bem, pois é muito útil na solução de problemas.

Na base dez, é fácil distinguir um número com paridade par e um número com ímpar. Os pares são os números terminados em $0, 2, 4, 6, 8$ e os ímpares os terminados em $1, 3, 5, 7, 9$.

A paridade em bases não usuais, pode não ser tão "automática" para nós, por falta de familiaridade com elas. Observe o exemplo abaixo:

Exemplo 31. *Os números* $(23)_7$ *e de* $(13)_7$ *são pares?*

Resposta: Veja que transportando para a base decimal, $(23)_7 = 2 \times 7^1 + 3 \times 7^0 = (17)_{10}$, logo é ímpar, enquanto $(13)_7 = 1 \times 7^1 + 3 \times 7^0 = (10)_{10}$ e portanto, é par. Veja que na base 7 não é possível analisar apenas o último algarismo para estabelecer a paridade, pois os dois exemplos terminam em 3, mas a paridade é diferente.

Analisando o exemplo 28, deve-se encontrar uma maneira de descobrir a paridade de números em outras bases, sem ter que transpô-los para a base decimal. A seguir será enunciado e demonstrado uma condição (envolvendo a representação do número) que permite estabelecer um critério geral para analisar a paridade de um número em uma base b, retirado de Fomin et al. (2012, p.84).

Teorema 2.6.1. i) Se a base b for par, um número N é par, quando o último algarismo (a_0) das unidades for par.

ii) Se Caso b se ímpar, então um número N é par, quando a soma de todos os seus algarismos for par.

Demonstração. De fato, pelo teorema 2.1.1,

$$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \ldots + a_{n-1} b^{n-1} + a_n b^n$$

i) Se b é par, então todas as potências são divisíveis pela base exceto o último algarismo(algarismo da unidade). Assim,

$$N \equiv a_0 \mod 2$$

ii) Se b é ímpar $b \equiv 1 \mod 2$, então todas as parcelas deixam resto igual a 1 quando divididas pela base ímpar. Assim,

$$N \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \mod 2.$$

■

Exemplo 32. *Enuncie e prove uma condição envolvendo a representação do número que nos permita determinar se o número é par ou ímpar na base 3.*

resposta: Um número é par na base 3 se, e somente se, existe um número par de algarismos iguais a 1 na sua representação em base 3, ou seja, a soma de seus algarismos é par.

De fato, um número é igual a soma das potências de 3 multiplicado pelos algarismos, que podem ser $0, 1$ ou 2. As parcelas com algarismos 0 e 2 são pares e portanto, a paridade da soma depende do número de parcelas com algarismos iguais a 1.

Assim, para saber a paridade do número $(102012)_3$, basta somar os "1s", ou seja, $1 + 1 = 2$. portanto é par.

3 PROPOSTAS PARA O ENSINO BÁSICO

Neste capítulo proporemos algumas atividades/sugestões para formação continuada de professores e que podem, também, ser usadas nos cursos de licenciatura plena em matemática e/ou pedagogia. Além disso, acreditamos que algumas atividades podem ser utillizadas para trabalhar com os alunos no ensino básico.

O principal objetivo é ampliar o conhecimento do professor sobre números e operações no Brasil em que os índices relacionados a disciplina de matemática tem caído cada vez mais.

> o Saeb de 2017 mostrou que ao final do ensino médio, quando deixam a escola, sete a cada dez estudantes não aprendem nem mesmo o considerado básico em português. A mesma porcentagem se repete em matemática. O ensino médio concentra os piores resultados. A etapa mostra estagnação desde 2009 (TOKARNIA,).

A preocupação é constante com o ensino e aprendizagem da matemática. Diante disso, é necessário investir cada vez mais em formação continuada dos professores. Por esse motivo, deixaremos aqui uma contribuição para um curso de capacitação de professores envolvendo sistema de numeração, pois o objetivo é que o professor perceba a importância de justificar os procedimentos e algumas características que são intrínsecas aos algoritmos das operações fundamentais.

Os PCN's (1997, p.48) destacam a importância de trabalhos envolvendo as características do sistema de numeração decimal, principalmente por meio das análises das representações numéricas e dos procedimentos de cálculos em situações problemas.

É previsto ainda nos PCN's (1997, p.50) que devem ser desenvolvidos os seguinte conceitos e procedimentos:

- Reconhecimento de números no contexto diário;
- Organização em agrupamentos para facilitar a contagem e a comparação entre grandes coleções;
- Leitura, escrita, comparação e ordenação de notações numéricas pela compreensão das características do sistema de numeração decimal (base, valor posicional);
- Ler e escrever números usando o conhecimento sobre a escrita posicional.

Diante disso, faremos algumas sugestões de atividades que desenvolvam conceitos relacionados aos sistemas de numeração em uma base qualquer, pois acreditamos que trabalhar com números em diferentes representações pode contribuir para o aprendizado da matemática na base que usamos hoje. Esses conceitos devem ser claros para os professores que ensinam matemática.

Nesse contexto, esse capítulo visa proporcionar atividades que possam ser aplicadas em um curso de capacitação e/ou oficinas para a formação continuada de professores do ensino básico.

Por fim, apresentaremos sugestões de atividades para trabalhar os conceitos discutidos neste trabalho, ordenadas de acordo com os conteúdos dos capítulos 1 e 2.

3.1 História dos sistemas de numeração: Uma sugestão para o ensino de Matemática

Uma das propostas é trabalhar o conhecimento da evolução histórica de outros sistemas de numeração tanto para o ensino da matemática quanto em um eventual curso de capacitação, pois isso pode ajudar a compreender como funciona o sistema posicional indo-arábico que utilizamos hoje. Ao encontro do que diz (BITTAR; FREITAS, 2005, p.45)

> conhecer outros sistemas de numeração pode contribuir para a aquisição de sentido do sistema de numeração decimal. Realizar comparações entre os diversos sistemas de numeração pode auxiliar a compreensão de conceitos abstratos como valor posicional e a necessidade de um símbolo zero.

Assim, é de suma importância conhecer historicamente outros sistemas de numeração e, em especial a evolução do sistema de numeração posicional decimal.

Assim, acreditamos que a história dos sistemas de numeração deva ser de conhecimento dos estudantes e dos professores.

Conforme Bittar e Freitas (2005, p.45) dizem ainda:

> (...) como, por exemplo, um aluno compreenderá a importância do zero, se o aluno nunca vivenciou situações em que esse símbolo se faça necessário. Como o aluno entenderia o significado de valor posicional se um único sistema que ele conhece utiliza esse mesmo sistema sempre.

Acreditamos ainda, que estudar a história dos sistemas de numeração pode contribuir no entendimento do sistema de numeração que utilizamos atualmente de forma tão natural. Além disso, o ensino da matemática se torna interessante quando resgata-se o período histórico.

A história da matemática, pode contribuir para uma aprendizagem significativa dos algoritmos, regras e fórmulas ensinadas no ensino básico da matemática. Caso contrário, os alunos acreditam que a aprendizagem matemática se dá sempre através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos que não servem para nada.

Conforme (D'AMBROSIO, 1999)

> Ninguém contestará que o professor de matemática deve ter conhecimento de sua disciplina, mas a transmissão desse conhecimento através do ensino depende de sua compreensão de como esse conhecimento se originou, de quais as principais motivações para o seu desenvolvimento e quais as razões de sua presença nos currículos escolares.

Assim, é possível que o estudo da história da Matemática possa proporcionar muitos conceitos e trazer sentido a conteúdos matemáticos que são estudados hoje.

De acordo com PCN's (1997, p.67) *"o recurso à história da numeração e aos instrumentos como ábacos e calculadoras pode contribuir para um trabalho interessante com os números e, em especial, com o sistema de numeração"*.

Portanto, a história da matemática, é uma metodologia de ensino da matemática que devemos dar maior importância do ensino básico ao ensino superior.

3.2 Jogo do Nunca dez: Uma proposta para o ensino de bases numéricas

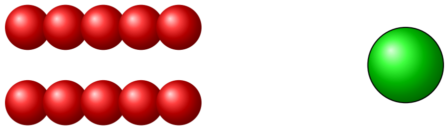
As atividades, apresentadas abaixo, referem-se a construção do conceito de base, valor posicional e agrupamentos. Além de utilizá-las em cursos de capacitação de professores elas podem também serem utilizadas no ensino da matemática e na educação básica.

As propostas abaixo tem como objetivo construir conceitos de maneira significativa das propriedades do sistema de numeração posicional em bases numéricas diversas, sempre com o objetivo de entender o que acontece no sistema de numeração decimal.

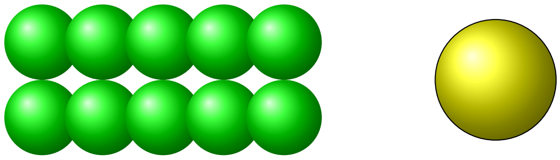
A atividade a seguir é um recurso didático em forma de jogo, denominado de "JOGO DO NUNCA DEZ", que pode ser encontrado em Bittar e Freitas (2005, p.53). Esse jogo favorece o entendimento sobre bases numéricas e as diferentes maneiras de escrever um número. Além disso, serve também para atribuir significado aos algoritmos das operações.

Esse jogo permite a discussão do conceito de base, recomenda-se trabalhar com materiais como tampa de garrafas, bolinhas coloridas, palitos ou canudinhos, permitindo que os alunos os agrupem de forma variada. É importante estimulá-los a tentar criar novas formas de contar e de agrupar.

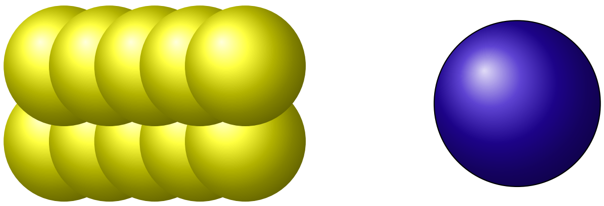
Atividade 3.2.1. O jogo do nunca dez tem esse nome porque sua regra é "nunca ter um monte de dez". Assim, ao se juntar bolinhas, por exemplo, cada vez que temos um monte de dez bolinhas vermelhas deve-se trocar por outra bolinha, de preferência maior e de outra cor, verde, por exemplo, que represente o grupo de bolinhas vermelhas.



Da mesma forma, quando se juntar dez bolinhas verdes, troca-se por outra bolinha, de preferência maior e de outra cor (amarela, por exemplo), que represente o grupo de bolinhas verdes,



E assim, cada vez que se juntar dez bolinhas de cada cor, vai se trocando por outra que represente o grupo de dez.

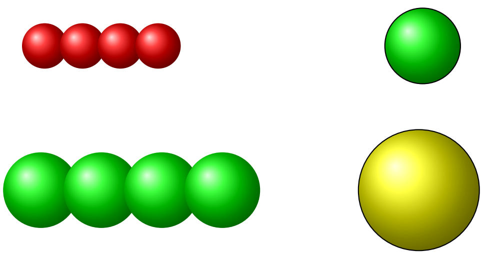


Legenda: unidade dezena centena unidade de milhar

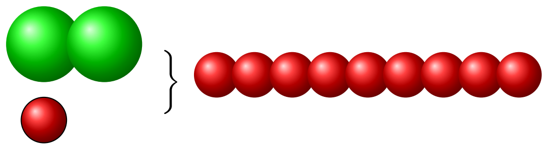
Nesse momento, o professor pode abordar as ordens, imediatamente superiores, no caso, da base dez (unidades, dezenas, centenas, unidade de milhar, etc.).

Esse jogo pode ser usado como “NUNCA 4”, “NUNCA 3” ou “NUNCA 2”, por exemplo, para promover a compreensão do conceito de base.

O jogo do “NUNCA 4” funciona do seguinte modo. Vamos agrupar o material formando grupos de, no máximo 3 elementos. Quando chegamos ao quarto elemento, trocamos o grupo de 4 por um outra peça que represente esse 4 elementos. Pode-se, por exemplo, pintar as tampas de garrafas de cores diferentes e, então, cada vez que tivermos 4 tampas vermelhas trocamos por uma verde (que representa, nesse caso, 4 tampas vermelhas). Quando tivermos 4 tampas verdes, trocamos por uma tampa amarela (ordens) e assim por diante.



Conforme Bittar e Freitas (2005) esse trabalho pode, e deve, ser acompanhado de uma escrita no quadro. Assim, no jogo do nunca 4, quando escrevemos 21, sabemos que 1 representa uma tampa vermelha e o 2 representa duas tampas verdes que, por sua vez representam 8 tampas vermelhas que foram trocadas pelas verdes. Observamos, então, que $(21)_4 = 9$.



Ainda em Bittar e Freitas (2005, p.54), a experiência tem mostrado que os alunos aprendem perfeitamente esse jogo e, assim, a ideia de agrupamento passa a ter significado para eles. Para realizá-lo, pode-se também fazer uso do material dourado.

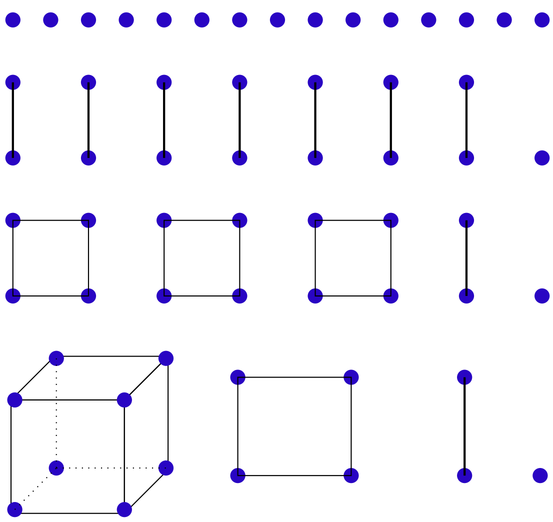
3.2.1 Recursos e materiais didáticos para o ensino de sistemas de numeração

Nessa seção apresentamos suugestões e alguns recursos didáticos que podem ser utilizados para o ensino do conceito da base, valor posicional, agrupamentos e das operações aritméticas. Podemos utilizá-los em vários contextos, em cursos de capacitação de professores e/ou no ensino e aprendizagem de matemática.

Atividade 3.2.2. (*autor*)Construir um sistema numérico de base dois.

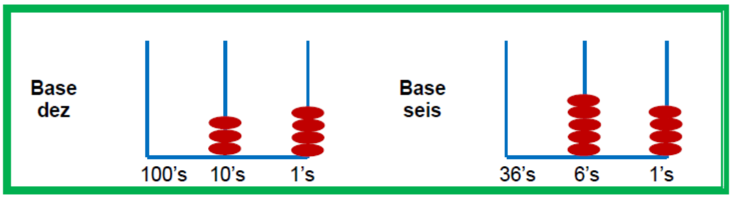
Resposta: A Solução foi apresentada no capítulo 1 como exemplo. Observe que essa atividade tem como objetivo trabalhar conceitos de base numérica, sistema posicional, algarismos, agrupamentos e trocas. Ainda nessa atividade podemos trabalhar conceitos de geometria, tais como: segmento, quadrado, cubo.

Materiais necessários: Lápis, régua e compasso. Pode ser construído ainda usando o software Geogebra.



Augusto et al. (2016, p.6) propõe confeccionar materiais e utilizá-los como recursos didáticos para o estudo de sistemas de numeração em uma base qualquer. Por exemplo, o ábaco e o material dourado que podem ser utilizados e construídos em um sistema numérico de uma base qualquer.

Figura 17 – Representação do número 34 no ábaco na dez e na base seis



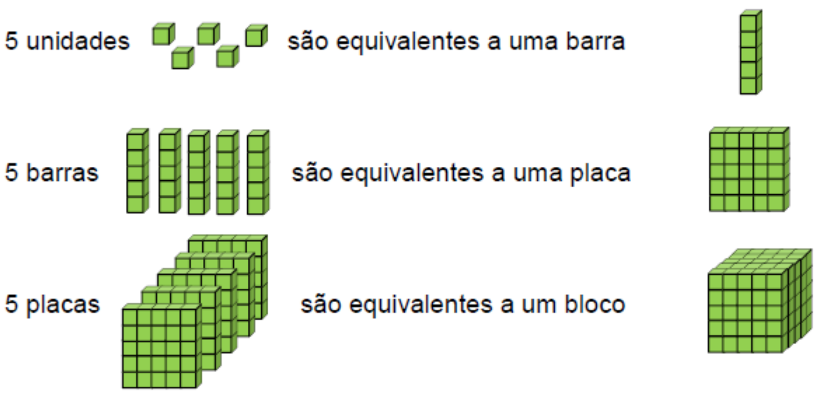
Fonte: (AUGUSTO et al., 2016)

Com esses recursos é possível desenvolver a ideia de base, valor posicional e as noções de agrupamentos.

Para ilustrar o conceito de agrupamento, utilizaremos o descrito em Augusto et al. (2016), que diz "Em base n, sempre que há n objetos iguais, eles são agrupados e o resultado é um objeto "maior" equivalente.

Veja abaixo, que na base cinco, quando 5 unidades (ou barras, etc) são reunidas elas são agrupadas e trocadas por uma barra (ou placa, etc)

Figura 18 – Material Dourado na Base Cinco



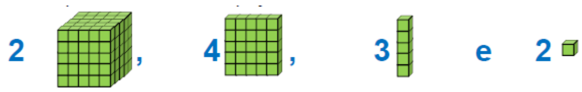
Fonte: (AUGUSTO et al., 2016)

Outro recurso importante para o ensino de matemática é o uso do material dourado que pode ser construído em qualquer base numérica. Observe o exemplo:

Esta quantidade é registrada por

$(2431)_5$ e se lê: "dois quatro três dois, base cinco".

Figura 19 – Sistema de numeração de base cinco



Fonte: (AUGUSTO et al., 2016)

Quantas unidades este numeral representa? Qual é o numeral equivalente na base dez?

A representação é 2432, na base 5. Para converter para decimal fazemos

$$2 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 2 \times 5^0 = 2 \times 125 + 4 \times 25 + 3 \times 5 + 5 =$$

$$250 + 100 + 15 + 2 = 367$$

3.3 Atividades: Sugestões para trabalhar as operações em bases não convencionais

Sugerimos que as atividades relacionadas abaixo sejam aplicadas em um curso de formação continuada de professores, pois como já dissemos, operar com números em representações diferentes da decimal, pode fazer com que o professor assuma a posição de aluno e passe a compreender as dificuldades que os alunos podem encontrar ao executar os algoritmos das operações básicas. Sendo assim, espera-se ainda que os professores vejam a importância de ter familiaridade com a tabuada na base decimal.

Segundo Eves (2004, p.44) a razão das dificuldades encontradas no ensino das operações elementares(adição, subtração, multiplicação e divisão) reside no fato da falta de familiaridade dos alunos com a tabuada.

Nesse sentido, as atividades abaixo visam induzir os professores a verificar como é efetuar cálculos sem conhecer previamente a tabuada das operações aritméticas da base que estão usando.

Atividade 3.3.1. Construa a tabuada da multiplicação na base cinco.

Nessa atividade podemos encontrar muitas contribuições para entender a tabuada na base 10.

Problemas, como o que será apresentado a seguir, podem ser mostrados aos professores com o objetivo de que sintam dificuldade com os cálculos em bases diferentes da base decimal devido a falta de familiaridade com essa forma de representação dos números. Assim, ao resolver esses problemas, acreditamos que talvez, os professores compreendam o

Quadro 5 – Tabuada de multiplicação na base cinco

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31
10	0	10	20	30	40

Fonte: autor

que está por detrás de cada algoritmo das operações básicas do nosso sistema de numeração decimal.

Atividade 3.3.2. Existe um sistema numérico para cada conjunto de igualdades a seguir que as tornam simultaneamente verdadeiras?

a) $3 + 4 = 10$ e $3 \cdot 4 = 15$

b) $2 + 3 = 5$ e $2 \cdot 3 = 11$

a) Percebemos, claramente, que $3 + 4 = 10$ refere-se a base 7, pois do lado esquerdo da igualdade temos a quantidade 7 e do lado direito esse algarismo está representado por 10 e a única base em que isso é possível é a 7.

   Na segunda equação, temos no lado esquerdo da igualdade $3 \cdot 4$. Essa multiplicação resulta na quantidade 12. De fato, na base 7 a quantidade 12 é representada pelos algarismos 15.

   Portanto, a base 7 é o sistema numérico das duas equações simultaneamente.

b) Percebemos a equação $2 + 3 = 5$ é possível para qualquer sistema numérico de base maior do que 5, pois os algarismos $2, 3$ e 5 pertencem aos conjuntos de bases maiores que 5.

   Na segunda equação, do lado esquerdo, temos que $2 \cdot 3$ resulta na quantidade 6 e a única base em que essa quantidade é representada pelo algarismo 11 é a base 5.

   Portanto, chegamos em um impasse, já que a primeira equação não tem solução na base 5 e a segunda equação tem solução apenas na base 5. Logo, não há base numérica que seja solução das duas equações simultaneamente.

Atividade 3.3.3. Multiplicação em base dez

O método por decomposição permite a compreensão dos procedimentos que realizamos no algoritmo de multiplicação. Observe que podemos utilizá-lo em bases não usuais, conforme foi mostrado no exemplo 19 do capítulo 2.

UM	C	D	U							
	1	2	5							
	$\times$	3	2							
		1	0	$\rightarrow$	2×5					
		4	0	$\rightarrow$	2×20					
	2	0	0	$\rightarrow$	2×100	$\searrow$		1	2	5
	1	5	0	$\rightarrow$	30×5			$\times$	3	2
	6	0	0	$\rightarrow$	30×20		$+$	2	5	0
3	0	0	0	$\rightarrow$	30×100	$\rightarrow$	3	7	5	0
4	0	0	0	$\rightarrow$			4	0	0	0

Esse entendimento possibilita o professor ensinar com profunda segurança o conceito que envolve a multiplicação.

O algoritmo utilizado é o mesmo que usamos na base decimal, as ordens e classes são subdivididas da mesma forma, mudando somente os agrupamentos (a base).

Mostrar essas semelhanças com a base decimal, fazendo comparações, e resolver operações em bases diversas talvez seja uma boa estratégia para ser abordada em um curso de capacitação de professores.

Problema 3.3.1. (SOUZA, 2013)Vamos supor que temos uma balança de dois pratos e pesos de 1kg, 2kg, 4kg e 8kg (uma peça para cada tipo). Quantos quilos esses pesos permite determinar utilizando as combinações possíveis?

Resposta: Pode-se resolver este problema usando a combinatória, isso seria muito mais rápido ($2^4 = 16$ considerando a opção de pesar zero), porém a ideia é mostrar uma solução baseada no sistema de numeração de base binária dos números.

Então, note que $8, 4, 2, 1$ são potências de 2. Assim, vamos usar a tabela a seguir para equilibrar os pesos e a seguir utilizarmos os pesos disponíveis de 1kg, 2kg, 4kg, 8kg.

Qtde	Pesos disponíveis				Qtde binária
	8	4	2	1	
1	□	□	□	▨	0001
2	□	□	▨	□	0010
3	□	□	▨	▨	0011
4	□	▨	□	□	0100
5	□	▨	□	▨	0101
6	□	▨	▨	□	0110
7	□	▨	▨	▨	0111
8	▨	□	□	□	1000
9	▨	□	□	▨	1001
10	▨	□	▨	□	1010
11	▨	□	▨	▨	1011
12	▨	▨	□	□	1100
13	▨	▨	□	▨	1101
14	▨	▨	▨	□	1110
15	▨	▨	▨	▨	1111

Veja que, pela solução binária, pode-se usar ou não o peso. Na linha 1, para pesar 1 kg, usamos apenas o peso de 1 kg. Na linha 6, usamos o de 4 e o de 2 e, assim sucessivamente. Portanto, percebe-se que se pode pesar até 15 kg utilizando as combinações de pesos dados.

Problema 3.3.2. A conta abaixo é possível?

$$11 \times 11 = 1001$$

Resposta: Se pensarmos que estes números estão em bases distintas da decimal isso é possível. Por tentantiva, consideramos que os números estão representados no sitema binário.

$$(11)_2 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 3 \Rightarrow (11)_2 \times (11)_2 = 3 \times 3 = 9$$

$$(1001)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 1 = 9$$

Portanto, é possível, porém na base 2.

Agora, algebricamente também temos uma solução. Considerando b a base temos que:

$(11)_b = 1b + 1$. Assim,$(11)_b \times (11)_b = (1b + 1)(1b + 1) = (b + 1)^2$

Por outro lado, $(1001)_b = 1 \cdot b^3 + 1$

Considerando a igualdade, podemos afirmar que

$(b+1)^2 = 1 \cdot b^3 + 1$

$b^2 + 2b + 1 = b^3 + 1$

$b^3 - b^2 - 2b = 0$

Assim, $b = 0$ ou $b^2 - b - 2 = 0$. Portanto, $b = 0$ ou $b = 2$ ou $b = -1$. Como b é a base, $b > 1$, então temos que $b = 2$ e, portanto, essa operação é possível somente no sistema binário.

Problema 3.3.3. (FOMIN et al., 2012) No quadro negro ficou, de maneira incompleta, uma adição em que uma parte das parcelas foi apagada.

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & \_\_ & 5 & \_\_ & \\ 1 & & 6 & 4 & 2 & + \\ \hline 4 & 2 & 4 & 2 & 3 & \end{array}$$

Em que sistema de numeração estão escritas as parcelas e a soma?

solução:

Podemos observar, claramente, que essa base deve ser maior do que 6, pois o maior algarismo presente nas parcelas é o número 6, então essa base é, no minímo, 7.

Supondo que a base seja 7, temos que:

Na primeira ordem, o resultado é 3, como já temos 2, basta somar $2 + 1 = 3$. Então a primeira lacuna pode ser 1.

Na segunda ordem, podemos somar $5 + 4 = 9$. Percebemos que na base 7 a quantidade nove é representada por 12. Então colocamos o 2 no resultado e enviamos 1 (um agrupamento de 7) para a ordem imediatamente posterior.

Na terceira ordem, temos o 6 e no resultado a quantidade 4. Notamos que na base 7 temos a representação 14 que corresponde a quantidade onze. Então, como já temos $6 + 1 = \textit{sete}$ e para onze faltam 4, logo a lacuna pode ser preenchida pelo algarismo 4. Reserva-se o 4 no resultado e envia o 1 para a ordem imediatamente superior.

Na quarta ordem, temos 3 em uma das parcelas e 2 no resultado. Notamos que, na base 7, temos a representação 12 que corresponde a quantidade nove. Como já temos $3 + 1 = 4$, para nove faltam 5. Logo, a lacuna pode ser preenchida pelo algarismo 5. Reserva-se o 2 e enviamos o 1 para a ordem imediatamente superior.

Finalmente, na quinta ordem, temos $2 + 1 + 1 = 4$.

$$\begin{array}{cccccc}
{\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & \\
2 & 3 & \overline{4} & 5 & \overline{1} & \\
1 & 5 & 6 & 4 & 2 & + \\
\hline
4 & 2 & 4 & 2 & 3 &
\end{array}$$

Portanto, a adição funcionou perfeitamente na base 7.

3.4 Prova dos nove: Uma aplicação dos critérios de divisibilidade

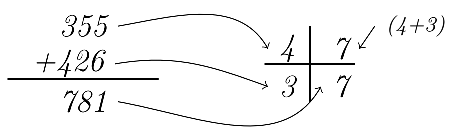
Segundo Rodrigues (2015) diz que:

> Na era do computador e das minicalculadoras, uma discussão sobre a prova dos noves pode parecer anacrônica e inútil. De fato, as gerações futuras dificilmente irão utilizá-las no seu dia-a-dia. No entanto, acreditamos que continuaremos sempre a ensinar operações aritméticas sem o uso de máquinas e o assunto "prova dos noves"pode servir para motivar o estudo de sistemas de numeração.

A prova dos nove foi usada durante muito tempo para conferir respostas. Hoje, com a difusão da calculadora já não se utiliza esse método no ensino, porém entender a prova dos nove pode ser rico em conceitos e pode ser um bom recurso didático para aprender divisibilidade.

Primeiramente explicaremos como funciona por meio dos exemplos a seguir.

Exemplo 33. *Como realizar a prova dos nove no caso da adição.*



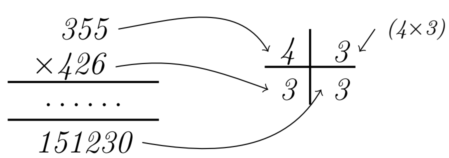
355, *"noves fora"* 4, *pois* $3+5+5=13$ *e* $13-9=4$

426, *"noves fora"* 3, *pois* $4+2+6=12$ *e* $12-9=3$ 781, *"noves fora"* 7, *pois* $7+8+1=16$ *e* $16-9=7$

Se o "noves fora" de $4+3$ *e o de* 781 *forem iguais a conta receberá o "selo de aprovação" da prova dos noves.*

$4+3=7$, *noves fora* 7; 781, *noves fora* 7. *Aprovado.*

Exemplo 34. *Como usar a prova dos nove na multiplicação.*



355, *"noves fora"* 4, *pois* $3 + 5 + 5 = 13$ *e* $13 - 9 = 4$

426, *"noves fora"* 3, *pois* $4 + 2 + 6 = 12$ *e* $12 - 9 = 3$

151230, *"noves fora"* 3, *pois* $1 + 5 + 1 + 2 + 3 + 0 = 12$ *e* $12 - 9 = 3$

Se o "noves fora" de 4×3 *e o de* 151230 *forem iguais, a conta receberá o "selo de aprovação" da prova dos noves.*

$4 \times 3 = 12$, *"noves fora"* 3*;* 151230, *"noves fora"* 3. *Aprovado.*

- **JUSTIFICATIVA**

Vamos justificar a prova no caso da multiplicação e o argumento é análogo para a adição.

Sejam dados dois números n_1 e n_2 , que divididos por 9 deixam restos, respectivamente, iguais a r_1 e r_2, Nessas condições, podemos escrever:

$$n_1 = 9q_1 + r_1; n_2 = 9q_2 + r_2$$

Segue-se, portanto, que:

$$n_1n_2 = 81q_1q_2 + 9q_1r_2 + 9q_2r_2 + r_1r_2 = 9Q + r_1r_2$$

A última igualdade nos permite concluir que n_1n_2 e r_1r_2, quando divididos por 9, deixam o mesmo resto. O princípio de funcionamento da prova dos noves fica, dessa maneira, completamente explicado. O que ela faz é substituir a operação $n_1 \times n_2$ por $r_1 \times r_2$, e verificar se, quando divididos por 9, eles deixam o mesmo resto. Se isso não ocorrer uma das duas (ou ambas) operações está errada. Dada a simplicidade da determinação de r_1 e r_2 e do produto $r_1 \times r_2$ (afinal os dois números são menores do que 9), é muito mais provável que o erro esteja na operação original.

Conforme (RODRIGUES, 2015) *"Não há nenhuma restrição teórica em utilizarmos, por exemplo, uma prova dos quinzes. A dificuldade é essencialmente de ordem prática pois, o resto da divisão de um número por 15 não é obtido tão simplesmente quanto o resto da divisão por 9".*

A prova é chamada "dos noves" porque a base do nosso sistema de numeração é 10 e para todo natural maior que zero, 10^n, dividido por 9 deixa o resto 1. Dessa maneira, poderíamos ter a prova dos 11 se nosso sistema de numeração fosse 12 ou prova dos 7, por exemplo.

3.5 Atividade envolvendo paridade em base numérica qualquer

Abaixo segue uma atividade que poderia ser aplicada em um curso de formação continuada (curso de capacitação) para professores do ensino básico. A ideia é induzir os estudantes do curso a conjecturar um critério geral para descobrir a paridade de um número em uma base qualquer.

Atividade 3.5.1. Descubra um procedimento pra verificar se um número é par ou ímpar, olhando para sua representação em base cinco, em base seis, em base n (AUGUSTO et al., 2016, p.34).

Na base seis, sendo 6 um número par. Temos que todas as potências de 6 com expoente 1 em diante, são números pares e, multiplicadas por qualquer outro número natural permanecem números pares. Portanto, o desenvolvimento do número em potências de 6 será, portanto, uma soma de números pares mais o último algarismo(algarismo das unidades).

Conclusão: Na base seis, se o dígito das unidades for par, o número será par e se esse dígito for ímpar, o número será ímpar.

"Assim, sendo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ números naturais entre 0 e 5, temos que $(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_6 = (\text{número} \times 6) + a_0 = \text{número par} + a_0$".

Na base cinco, todas as potências de 5 são ímpares. Assim, as potências de 5 deixam resto 1 quando divididas por 2, ou seja, todas as potências de 5 são iguais a um número par mais 1. Dessa forma, Na expansão do número em potências de 5, todas as parcelas serão, portanto, somas de números pares mais 1 vezes o dígito correspondente. O resultado será, portanto, a soma de um número par com a soma dos dígitos da escrita do número na base 5.

Conclusão: Na base cinco, o número será par ou ímpar conforme a soma dos seus dígitos seja par ou ímpar.

"Assim, seja $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ números naturais entre 0 e 4, então o número $(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_5 = (\text{número par} + 1) + a_{n-1}(\text{número par} + 1) + \ldots + a_2(\text{número par} + 1) + a_1(\text{número ímpar} + 1) + a_0 = (\text{número par}) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)$".

Observamos que os exemplos numéricos, pode nos levar a concluir, portanto que,

Um número escrito em base b, será par se, e somente se:

Conclusão: *"Se b for par, quando o algarismo das unidades for par e, se b for ímpar, quando a soma de todos os seus algarismos for par"*(AUGUSTO et al., 2016)

3.6 Reflexões acerca das propostas

Para os professores, acreditamos que o objetivo de um curso de capacitação não é ensinar o conteúdo propriamente dito, nem a precisão dos cálculos com os números em bases não convencionais, mas apresentar, estudar e praticar os algoritmos das operações fundamentais em outras bases diferentes da decimal, com o objetivo de ter um conhecimento aprofundado desse tema.

Sendo assim, é importante que a capacitação do professor propicie problemas que façam o professor vivenciar as mesmas dificuldades que os alunos do ensino básico possam ter. Por exemplo, ao trabalhar com bases numéricas não usuais, normalmente não temos a tabuada memorizada e, assim, a agilidade para resolver os cálculos é muito prejudicada.

Acreditamos assim, que praticar exercícios em bases não convencionais, contribui significativamente para "reaprender" conceitos e algoritmos realizados na base dez de forma "mecânica".

Ressaltamos aqui que os estudantes do curso precisam aprender:

- Conceito de sistema numérico(base numérica);
- Converter números de um sistema para o outro;
- Somar, subtrair, multiplicar e dividir em um sistema de base qualquer;
- Compreender e aplicar os critérios de divisibilidade.

O ensino de bases diferentes da decimal não é uma parte central no currículo escolar. Segundo a BNCC (2017), nos anos iniciais de ensino fundamental espera-se dos estudantes

> o desenvolvimento de habilidades no que se refere à leitura, escrita e ordenação dos números naturais e números racionais por meio da identificação e de características do sistema de numeração decimal, sobretudo o valor posicional dos algarismos (pg 266-267).

Enfim, apresentamos atividades que podem ser aplicadas em cursos de capacitação e/oficinas e têm como objetivo estabelecer relações com as possíveis dificuldades que os alunos possam ter na compreensão do nosso sistema de numeração, em especial dos algoritmos. Por isso, é necessário propiciar ao professor capacitação contínua para compreender como os alunos aprendem e quais dificuldades podem ser encontradas no ensino e aprendizagem da matemática.

4 Considerações Finais

Pensar em matemática remete muitos a um acumúlo de fórmulas, técnicas e algoritmos prontos. Porém, esse trabalho tentou apresentar que, por detrás de tantos algoritmos, existem também as justificativas, as quais permitem compreender os conceitos matemáticos envolvidos nas operações e nas propriedades aritméticas.

Assim, o conhecimento dos diferentes sistemas de numeração, constituem uma ferramenta importante para a compreensão do nosso sistema decimal e justifica os procedimentos adotados que usamos para resolver as operações aritméticas fundamentais.

Dessa forma, existem algumas propriedades na base decimal que têm seu equivalente em qualquer outra base. Podemos dizer que nossa base de numeração não precisava ser a *dez*. Mas, sem dúvida, o fato de possuirmos dez dedos das mãos influenciou nessa escolha.

Observamos, ainda, que a escolha da base duodecimal poderia facilitar apenas nas questões da representação finita ou infinita de uma fração, mas que não mudaria muita coisa, caso fosse a base escolhida.

Outro fator importante que identificamos ao trabalhar com bases não usuais é a necessidade de conhecer a tabuada para ter agilidade na resolução de um cálculo e, ainda, desenvolver habilidades mentais com os números.

Necessariamente, o professor deve conhecer o processo histórico de construção dos conceitos matemáticos, em especial dos sistemas de numeração de bases diferentes da decimal. Portanto, é indispensável e de grande utilidade para o professor o conhecimento sólido dos sistemas de numeração decimal e de sistemas em outras bases.

Diante disso, verificamos que o conhecimento matemático, sem dúvidas, precisa ser compreendido, ou melhor, estar consolidado pelo professor de matemática, para que possa ser ensinado.

Reconhecemos ainda que há necessidade de formação continuada para professores que proporcione uma atuação segura e criativa. Por isso, a sugestão é que criem oportunidades, como cursos de capacitação de professores.

Através desse breve estudo sobre bases não usuais esperamos que professores e alunos possam compreender a importância desses sistemas para o ensino e para a compreensão de algumas propriedades que usamos na base decimal de forma "automática", muitas vezes, sem entender o porquê.

Assim, é importante observar que as mesmas regras utilizadas no sistema decimal são válidas para as operações em diferentes sistemas de numeração posicionais.

Ainda, podemos concluir que seria importante usar o conteúdo de bases numéricas não usuais no ensino da matemática e em cursos de capacitação para professores que ensinam essa disciplina.

Diante do que foi estudado nesse trabalho, pode-se perceber que trabalhar com bases não-convencionais em curso de capacitação para professores, pode propiciar ao educador sentido aos algoritmos. Além disso, as atividades podem induzi-los a entenderem as difiuldades dos alunos, pois eles poderão sentir dificuldade em realizá-las devido a falta de familiaridade com a tabuada de bases diferentes da decimal. Às vezes ficamos restrito às propriedades do sistema decimal e fazemos tudo de forma automática sem a devida compreensão dos procedimentos.

Finalmente, a proposta apresentada neste trabalho, não é apenas desenvolver essas habilidades com os estudantes, mas também com os professores afim de aperfeiçoar seu conhecimento em relação aos sistemas de numeração.

Referências

AUGUSTO, A.; PALIS, G. de L. R.; MARINI, S. Atividades sobre sitema de nuneração - materiais para trabalhar em bases diversas: Projeto matemática - comunidade e universidade. *Departamento de Matemática e Neam (Núcleo de Estudo e Ação sobre o Menor*, PUC-RIO, Rio de Janeiro - R, n. 04, 2016. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/27470/27470.PDF>. 73, 74, 81

BITTAR, M.; FREITAS, J. L. M. d. *Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental.* [S.l.: s.n.], 2005. 27, 28, 43, 51, 52, 69, 70, 72

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo, SP: Universidade de São Paulo, USP, 1974. 24

CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve história.* [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2008. 20, 21

D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje. *Temas e Debates. SBEM. Ano II N*, v. 2, p. 15–19, 1989.

D'AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp*, p. 97–115, 1999. 70

EVES, H. *Introdução à história da matemática.* Editora da unicamp. Campinas - SP: Hygino H. Domingues, 2004. 17, 18, 33, 34, 38, 39, 43, 44, 74

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos.* Impa. Rio de Janeiro - RJ: Valéria de Magalhães Iório, 2012. 19, 37, 38, 52, 53, 56, 58, 60, 66, 78

FOMÍN, S. *Sistemas de numeracion.* Moscú: MIR- Moscú, 1975. 26

HEFEZ, A. *Elementos de aritmética.* [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. 31, 32, 34, 36, 38

HEFEZ, A. *Aritmética.* 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. 31, 63

IFRAH, G. *História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.* [S.l.]: Nova Fronteira, 1997. 15, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30

LIMA, E. L. et al. *Matemática e ensino.* [S.l.]: SBM, 2001. 65, 66

MARTÍN, M. *Los distintos sistemas de numeración.* Recuperado el, 2009. Disponível em: <https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_24/MARIA%20DEL%20CARMEN_%20CABRERA%20MARTIN_1.pdf>. Acesso em: 04 fev 2019. 29

OBMEP. *Um pouco sobre divisibilidade - Critérios de divisibilidade.* Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/teoria-dos-numeros-um-pouco-sobre-divisibilidade-parte-2/um-pouco-sobre-divisibilidade-criterios-de-divisibilidade/>. Acesso em: 14 jan 2019.

OLIVEIRA, R. *Os Gênios do Oriente Documentário dublado*: vídeo do youtube - 57:25 min. 2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=83bVWgU-7ik>. Acesso em: 20 fev 2018.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. da S. L. Causas das dificuldades de aprendizagem em matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio. *Revista Principia*, IFPB, Lages - SC, n. 38, 2018. Disponível em: <//http:periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/download/1612/806>.

PCN'S. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática/Secretaria de Educação Fundamental*. Brasilia-DF: MEC/SEF, 1997. Secretaria de Educação Fundamental. 42, 68, 70

PEDROZA, P. A. *Sistema de Numerações Antigos*. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática) — Universidade Estadual do Ceará, Quixadá - CE, 2010. 27

RODRIGUES, A. E. A.; DINIZ, H. A. Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino. *Ciência e Natura*, Universidade Federal de Santa Maria, v. 37, n. 3, 2015. Disponível em: <https://www.redalyc.org/html/4675/467547643049/>. Acesso em: 04 fev 2019. 41, 60, 62

RODRIGUES, F. W. *A prova dos nove*. 2015. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/14/3.htm>. 79, 80

SANTANA, G. d. S. Algoritmo utilizado para as quaro operações elementares. Universidade Federal de Goiás, 2016. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/6449>. Acesso em: 25 mar 2019. 46, 48, 51

SHINE, C. Princípio da inclusão-exclusão. contagem de pólya. *Polo Olímpico de Treinamento*, v. 05, p. 1–2, 2015.

SILVA, G. F. d. Algoritmo da raiz quadrada: uma contribuição a somar ao seu aprendizado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016. Disponível em: <http://monografias.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/2825/1/tcc%20em%20pdf%20atualizado.pdf>. Acesso em: 22 fev 2019. 54

SILVA, J. A. História da matemática. *MEC-SEED*, PARÁ, n. 13, p. 150–157, 2009. 23, 28

SOUZA, F. H. T. de. *Problemas envolvendo bases de numeração*: Programa de iniciação científica da obmep. Publicado em 19 de jun de 2013, 2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=nJ7D2USqMBs&list=PLrVGp617x0hC8WkPHtM3IjoOiiyJs-hHh&index=15>. Acesso em: 22 fev 2019. 23, 76

TOKARNIA, M. *Indicadores da Educação*. Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2018-09/mec-divulga-nesta-segunda-indice-de-qualidade-do-ensino-basico>. Acesso em: 20 abr 2019. 68