UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

*Cálculo de Áreas através do Teorema de Pick para o 8º ano do Ensino Fundamental*

Pedro Alberto da Cunha

MANAUS
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Pedro Alberto da Cunha

*Cálculo de Áreas através do Teorema de Pick para o 8º ano do Ensino Fundamental*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata

MANAUS
2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Cunha, Pedro Alberto da

C972c Cálculo de áreas do teorema de pick para o 8ºano do ensino fundamental / Pedro Alberto da Cunha. 2019

59 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Área. 2. Polígono Simples. 3. Teorema de Pick. 4. Malha quadriculada. I. Prata, Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Pedro Alberto da Cunha

Cálculo de Áreas através do Teorema de Pick para o 8º ano do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 27/04 de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata - UFAM
Presidente

Silvia D. de Souza

Profa. Dra. Sílvia Dias de Souza - UFAM
Membro

Jeanne Moreira de Sousa

Profa. Dra. Jeanne Moreira de Sousa - IFAM
Membro

Poder Executivo
Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Ata de Defesa Pública do Trabalho de Conclusão do Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT do aluno **Pedro Alberto da Cunha,** realizada no dia 27 de abril de 2019.

Às 10:00 horas do dia 27 de abril de 2019, no Auditório José Henrique Mesquita no Departamento de Matemática, Setor Norte, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amazonas, foi realizada a Defesa Pública do Trabalho de Conclusão do Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do aluno **Pedro Alberto da Cunha**, intitulada **"Cálculo de Áreas através do Teorema de Pick para o 8º ano do Ensino Fundamental".** Como parte final de seu trabalho para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. A Banca Examinadora instituída pela Portaria N° 047/2019 – ICE, constituiu-se dos seguintes professores: Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata (DM/UFAM) – Presidente; Drª. Sílvia Dias de Souza (DM/UFAM) – Membro; Dra. Jeanne Moreira de Sousa (IFAM) – Membro Externo. Após apresentação do trabalho, os examinadores fizeram as perguntas concernentes e consideraram o aluno APROVADO. Nada mais havendo a tratar, a reunião foi encerrada e a Banca Examinadora lavrou a presente ata que vai assinada por todos os membros.

Roberto Antonio Cordeiro Prata

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Universidade Federal do Amazonas - Presidente

Sílvia D. de Souza

Profª. Drª. Sílvia Dias de Souza
Universidade Federal do Amazonas – Membro

Jeanne Moreira de Sousa

Profª. Drª. Jeanne Moreira de Sousa
Instituto Federal do Amazonas - Membro Externo

# AGRADECIMENTOS

À Deus, que me deu forças para chegar até aqui, com certeza sem Ele nada disso teria acontecido;

Ao meu pai Manoel Cordovil da Cunha (in memorian) e a minha mãe Elcilene Alberto da Cunha, que mesmo ficando viúva, com muito esforço e dedicação criou seus quatro filhos, procurando dar a melhor educação que estava ao seu alcance. E também ao meu padrasto Elienir de Lima Sales que teve contribução significativa na minha formação acadêmica;

À minha esposa Marineide da Silva Ribeiro, pela sua imensa paciência e parceria nessa jornada, me auxiliando, e fazendo com que nossos dias fossem sempre os melhores, na sua dedicação com nosso filho, Pedro Davi, para que muitas das vezes eu tivesse que me ausentar no finais de semana e feriados para estudar. Amo vocês, minha família, pois são um Presente de Deus na minha vida;

Aos meus colegas de turma PROFMAT 2017, onde fiz grandes amizades, foram dois anos de muito estudo e dedicação, nos reunindo em grupo de estudo que nos ajudou a vencer os obstáculos encontrados. Com certeza sem esse grupo não teria conseguido alcançar esse êxito;

Aos meus professores, que foram sempre atenciosos, dando palavras de incentivo para que a turma pudesse superar obstáculos que apareciam no decorrer das etapas;

Ao meu orientador Professor Doutor Roberto Antonio Prata, minha imensa gratidão, meu respeito, minha admiração por sempre ter se mostrado disposto a me ajudar;

À CAPES pelo suporte financeiro.

# RESUMO

O objetivo principal desse trabalho é apresentar uma abordagem diferenciada do cálculo de áreas para alunos do 8º ano do ensino fundamental, que será realizado através do Teorema de Pick. Esse teorema se refere ao cálculo de áreas de polígonos simples com vértices nos pontos de uma malha quadriculada no plano, que permite calcular a área usando contagem, analisando os pontos do bordo e do interior do polígono. Será abordado um pouco da história do cálculo de áreas e do matemático George Pick, assim como a apresentação das fórmulas mais usuais do cálculo de áreas e demonstrações do Teorema de Pick. Realizamos atividades em duas turmas sobre áreas e uma aplicação do teorema utilizando mapas, que nos permite fazer um paralelo do método tradicional do cálculo de áreas com a proposta apresentada nesta pesquisa.

Palavras-chave: Área, Polígonos Simples, Teorema de Pick, Malha quadriculada.

# ABSTRACT

The main objective of this work is to present a differentiated approach to the calculation of areas for 8th grade elementary students, which will be carried out through the Theory of Pick. This theorem refers to the calculation of areas of simple polygons with vertices at the points of a grid squared in the plane, which allows to calculate the area using counting, analyzing the points of the edge and the interior of the polygon. A little of the history of area calculus and the mathematician George Pick will be discussed, as well as the presentation of the most usual formulas of calculating areas and demonstrations of the Pick Theorem. We perform activities in two classes on areas and an application of the theorem using maps, which allows us to parallel the traditional method of calculating areas with the proposal presented in this research.

Keywords: Area, Simple Polygons, Pick Theorem, Check Mesh.

# LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| $Pol$ | Polígono. |
| $=$ | Igual. |
| $\Rightarrow$ | Implica |
| $\equiv$ | Congruente. |
| $>$ | Maior. |
| $<$ | Menor. |
| $\cup$ | União. |
| $\overline{AB}$ | Segmento AB. |
| $AB$ | Medida do segmento AB. |
| $\triangle$ | Triângulo. |
| $S_{\triangle}$ | Área do triângulo. |
| $S_C$ | Área do Círculo. |
| $S_Q$ | Área do Quadrado. |
| $\blacksquare$ | Indica o fim de uma demonstração. |

# Lista de Figuras

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

Este trabalho foi realizado pela inquietação de ver muitos alunos não terem o interesse de aprender alguns conteúdos da disciplina de matemática. Percebe-se que a falta de motivação muitas das vezes está relacionada com o fato de não ser visto a aplicabilidade do conteúdo. Sabendo que o cálculo de áreas de figuras planas é de fundamental importância no ensino da Geometria podemos demonstrar diversas aplicações dessa área, na presente pesquisa, será apresentada a utilização do Teorema de Pick, que é uma forma de realiazarmos cálculos de áreas com a simples contagem de pontos, não sendo necessário, para isso, saber as medidas do lados dos polígonos envolvidos.

O cálculo de áreas de figuras planas é um assunto apresentado no ensino fundamental II com um conjunto de fórmulas prontas que exigem memorização dos alunos, assim como diversas atividades a serem resolvidas para a aplicação dessas fórmulas, como alternativa, será apresentado uma metodologia diferenciada para o ensino aprendizagem, de tal maneira, que façam com que o uso dessas fórmulas passem a ter sentido. Além disso, existem algumas relações matemáticas que também podem estar relacionadas ao cálculo de área e, normalmente, não são apresentadas pelos professores. Dessa maneira, podemos enriquecer as aulas de matemática com essas novas abordagens e mostrar diversas aplicações que podem ser feitas na Geometria e em outras áreas de conhecimentos.

Com base nesse contexto, na busca de alcançar os objetivos estabelecidos e para promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática indicados no PCN [10], foi proposto a prática de uma atividade interdisciplinar envolvendo a Geografia, usando os mapas para determinarmos o cálculo de áreas de regiões do estado brasileiro. Assim, oportunizando a interdisciplinaridade em outras disciplinas.

## 1.1 Estrutura da Dissertação

Além do capítulo introdutório, esta pesquisa está organizada da forma que segue. No capítulo 2, temos as considerações iniciais com a justificativa da pesquisa, um pouco da história do cálculo de áreas e de George Alexander Pick, o idealizador do Teorema de Pick. No capítulo 3, foram apresentadas as fórmulas mais usadas no ensino fundamental II e suas demonstrações, assim como aplicações e a demonstração do Teorema de Pick, que foi demonstrado de duas formas. No capítulo 4, discorremos sobre a metologia apresentada neste trabalho, que foi realizado em uma escola pública da rede estadual de ensino do Estado do Amazonas, e a sua avaliação. Por fim, no último capítulo, é apresentado as considerações finais da pesquisa que é a prática do processo de ensino e aprendizagem do estudo de áreas para o Ensino Fundamental II.

# Capítulo 2

# Considerações Iniciais

*...Ninguém ignora que a geometria deve ter se iniciado provavelmente em tempos muito remotos na antiguidade, a partir de origens muito modestas, depois cresceu gradualmente até alcançar a dimensão enorme que tem hoje...(EVES)*

## 2.1 Justificativa

É algo recorrente os professores de matemática ouvirem relatos sobre dificuldades de aprendizado no ensino da matemática. No caso presente, vamos apresentar uma proposta que possa facilitar o estudo em torno de uma parte da geometria. O PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) [10] é o documento de Matemática que pretende estimular a busca coletiva de soluções para o ensino dessa área.

Percebemos muitas das vezes que aquele ensino engessado sobre determinado assunto torna a aula entediante e atrai pouco o interesse dos alunos. Ainda conforme o PCN [10] de matemática para o ensino fundamental II a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas.

No sentido de tentarmos melhorar a compreensão de assuntos da área, haja vista que já existem diversos trabalhos sobre o tema, vamos fazer uma relação de aplicações de atividades na qual teremos a oportunidade de notar as devidas relevâncias na forma de como serão aplicadas.

Sabemos que a matemática está inserida em nosso cotidiano, e que ela deve ser trabalhada de maneira responsável para os alunos no ensino fundamental, de tal maneira que consigamos desempenhar um papel adequado na formação da capacidade intelectual de nossos alunos. Na colaboração e instigação do seu pensamento no instinto do raciocínio dedutivo e lógico, de tal forma que se possa perceber as situações diárias que se pode ser resolvido por meio do conhecimento matemático. De acordo com o PCN [10] quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado.

Segundo o PCN [10] um dos objetivos gerais de aprendizagem dos alunos para o ensino fundamental é fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente.

Verificando muitas vezes que para alguns alunos a apresentação de determinados assuntos gera apreensão e desconforto, se tratando de geometria percebemos que eles conseguem fazer algumas relações com o conteúdo apontado em seu cotidiano. Não ficando longe dos objetivos que o PCN [10] nos apresenta, perceberemos que o interesse é maior quando se é apresentado uma alternativa de solução fora daquela dita tradicional.

Ainda conforme as orientações do PCN [10] , após a conclusão do ensino fundamental II, os alunos devem ter adquiridos as seguintes habilidades:

- Fazer a composição e a decomposição de figuras planas e identificar que qualquer polígono pode ser decomposto a partir de figuras triangulares;
- Calcular a área de figuras desenhadas em malhas quadriculadas;
- Resolver situações-problemas que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução;
- Calcular a área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximação.

Baseado nesse contexto, apresentaremos um trabalho que possa ser comparado o processo de aprendizado da forma dita tradicional e a não tradicional, tendo como parte principal a apresentação de como utilizar o TEOREMA DE PICK no cálculo de áreas de figuras planas numa malha quadriculada. Temos também como alternativa a indicação para utilização de um software livre que possa ser um suporte auxiliar nesse aprendizado, o GEOPLANO ONLLINE, que pode acrescentar na facilitação de entendimento do assunto em questão.

## 2.2 Um Pouco da História Sobre o Cálculo de Áreas

Em nossa vida cotidiana encontramos diversos exemplos sobre o cálculo de áreas de figuras planas. Usamos esses conceitos, por exemplo, para saber quantos metros quadrados de cerâmicas podem ser usados no revestimento de um piso de um quarto, dentre outros.

A necessidade de determinar a área de uma figura geométrica é bem antiga. Conforme Eves [6], as primeiras considerações feitas a respeito da geometria são muito antigas tendo como origem a simples observação e a capacidade de reconhecer figuras, comparar formas e tamanhos. A noção de distância, sem dúvida, foi um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos.

Ainda, segundo Eves [6], não podemos estimar quantos séculos se passaram para que os homens fossem capazes de elevar a geometria ao status de ciência. Mas, diversos escritores que se ocuparam desta questão unanimemente concordam em que o vale do rio Nilo, no Egito antigo, foi o local onde a geometria subconsciente transformou-se em científica. Lintz [8] cita que, segundo Heródoto, a geometria nasceu do problema da área quando Sesóstris, rei do Egito, dividiu o país em quadrados de igual área que foram distribuídos entre a população e o valor dos impostos cobrados de cada um era proporcional à área cultivada. Mas quando o rio Nilo transbordava, parte das terras ficavam inaproveitáveis e, então, seus proprietários poderiam deduzir dos impostos a quantia proporcional à área inundada. Surge então a necessidade e o interesse em se comparar as várias áreas e se determinar métodos apropriados para o seu cálculo.

Sociedades avançadas se instalaram não apenas no leito do Rio Nilo, no Egito, como o rio Tigre e o Eufrates na Mesopotâmia, O Indo e Ganges na região centro-sul da Ásia e o Hwang Ho e Yangtzé na Ásia oriental. Eram sociedades conhecidas por suas habilidades em engenharia de drenagem de pântanos, irrigação, construção de obras de defesa contra inundações e construção de grandes edifícios e estruturas nas quais se exigiam muita geometria prática.

Ainda se tem documentos históricos que testificam os conhecimentos geométricos das antigas civilizações por meio dos papiros de Moscou (1850 a.C.) e Rhind (1650 a.C.), onde a geometria aparecia como instrumento na resolução de situações diária da vida do homem. Conforme Eves [6] dos 110 problemas dos papiros Moscou e Rhind, 26 são de geometria.

Por volta de 300 a.C., na Grécia antiga, Euclides produziu sua obra prima intitulada Os Elementos, onde a maior parte dessa obra faz referência à geometria, no entanto abordando também assuntos como teoria dos números e álgebra elementar ou geométrica. No livro I de Euclides temos as seguintes definições: "Superfície é o que só tem comprimento e largura"e "Superfície plana é a superfície que se ajusta igualmente com todas as linhas retas". Neste volume se tem essencialmente a área de figuras planas de polígonos planos.

Nesta obra a ideia de área está associada ao conceito de igualdade entre figuras, ou seja, equivalência. Isso é observado quando enuncia que triângulos com bases iguais, situados entre as mesmas paralelas são figuras iguais, ou seja, equivalentes. E da mesma forma paralelogramos com bases iguais situadas entre as mesmas paralelas também são figuras iguais. Percebe-se que o conceito de área de polígonos não está associado a valores numéricos.

Para Ávila [1] um outro equívoco não menos frequente é pensar que os fatos geométricos dos Elementos sejam expressos numericamente como o são para nós hoje. Para exemplificar, enquanto para nós a área de um triângulo é dada por uma fórmula exprimindo metade do produto da base pela altura, para Euclides a área de um triângulo é metade da área do paralelogramo que se obtém com a junção de dois triângulos iguais ao triângulo dado; a área do paralelogramo é igual à área de um retângulo de mesma base e mesma altura, e assim por diante.

Conforme Berlinghoff [3], os gregos não mediam áreas atribuindo-lhes números, atacavam a mensuração de área tentando construir um retângulo (ou quadrado) de mesma área que uma figura dada. Vemos que matemáticos árabes usam a álgebra para obter solução de problemas geométricos, e por outro lado temos os gregos fazendo com que qualquer problema de matemática tenha uma solução geométrica. Segundo Ivana [13] temos soluções geométricas de problemas algébricos com o método de aplicação de áreas.

O que vemos hoje são cálculos de áreas bem desenvolvidos, com exibição de métodos bem específicos para a sua realização. O que se tinha de resultados difíceis para serem compreendidos, hoje se torna mais prático com uso de ferramentas existentes, como exemplo, cálculo diferencial e integral, que permite o cálculo de curvas.

## 2.3 Um Pouco da História de George Alexander Pick

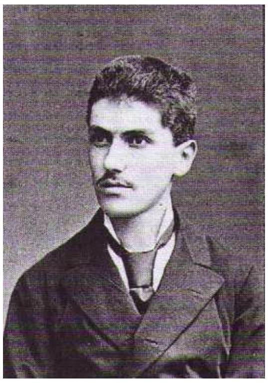


Figura 2.1: George Alexander Pick

Georg Alexander Pick nasceu em uma família judia em 10 de agosto de 1859, em Viena, Áustria e morreu em 26 de julho de 1942 em Thereslenstadt, Bhoemia, atual República Tcheca. Pick foi educado pelo seu pai até os 11 anos de idade, quando entrou no Leopoldstaedter Communal Gymnasium, permanecendo até o ano de 1875. No mesmo ano, fez exames e entrou para a universidade.

Entrou na Universidade de Viena em 1875, aos 16 anos. Estudou Matemática e Física e graduou-se em 1879 com uma qualificação que lhe permitiu ensinar essas duas disciplinas. Concluiu seu doutorado em 1880, sendo nomeado assistente de Ernest Mach na Universidade Karl- Ferdinand, em Praga. Em 1888, foi promovido a Professor Extraordinário de Matemática e, em 1892, foi nomeado Professor Ordinário (Titular) na Universidade Alemã de Praga. Em seus 67 artigos publicados trata sobre diversos temas como Álgebra Linear, Cálculo Integral, Análise Funcional, Geometria, Funções de Varáveis Complexas, Equações Diferenciais e Geometria Diferencial, sendo essas quatro últimas áreas responsáveis por mais da metade de suas publicações.

Seu trabalho foi extremamente amplo no campo da matemática, em sua gama de 67 artigos foram abordados muitos tópicos, tais como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculos de Integrais e Geometria. No entanto mais da metade de seus artigos estavam em funções de uma variável complexa, equações diferenciais e geometria diferencial. Termos como Matrizes Pick, Interpolação PickNevanlinna e o Lema Schwarz-Pick são usados até hoje. O seu artigo mais lembrado, no entanto é o Teorema de Pick - Pick's Theorem que apareceu no artigo de 8 páginas Geometrisches zur Zahlenlehre publicado em Praga em 1899.

Em 1911, participou do comitê que indicou Albert Einstein para uma cadeira de Física-Matemática na Universidade Alemã de Praga. Aposentou-se em 1927, sendo nomeado professor emérito e retornou à sua cidade natal, Viena. Pick tinha sido eleito como membro da Academia das Ciências e das Artes da República Tcheca, mas após os nazistas assumirem, ele foi excluído da Academia. Ele foi enviado para Theresienstadt em 13 de julho de 1942, morrendo duas semanas mais tarde aos 82 anos.

# Capítulo 3

# Área de Figuras Planas

Para os atuais parâmetros escolares brasileiro, prevalece o conceito de área como grandeza. Sabendo que uma superfície é uma porção do plano limitado por uma figura plana fechada, uma superfície significa obter um número que represente essa porção, comparada com outra fixada. Essa porção é chamada de área.

Conforme Pesco [11] a superfície de um polígono é a reunião do polígono com o seu interior.

A figura 3.1 mostra uma superfície retangular.

Figura 3.1: Superfície retangular

Área de uma superfície é um número real positivo associado a essa superfície. A área expressa a medida de uma superfície numa certa unidade. Vamos considerar como unidade a superfície de um quadrado de lado **u**.

Figura 3.2: Quadrado de lado u

Seja o retângulo de dimensão 5u e 3u.

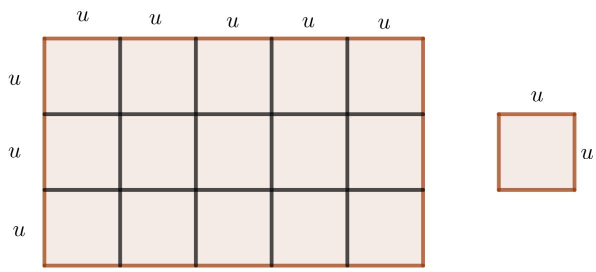



Figura 3.3: Retângulo de dimsensões 3 por 5

A área dessa superfície é igual a 15.

## 3.1 Superfícies congruentes

As superfícies de duas figuras congruentes são denominadas congruentes se têm a mesma área.

Na figura 3.4, os triângulos são congruentes e daí, $A(T_1) = A(T_2)$

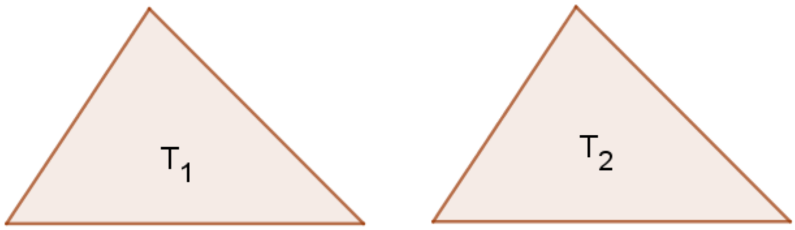
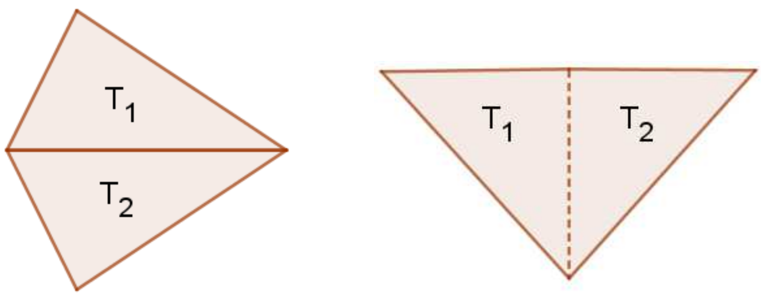



Figura 3.4: Triângulos congruentes

## 3.2 Superfícies Equivalentes

Duas superfícies são denominadas equivalentes se têm a mesma área. Assim, as superfícies dos polígonos *a* e *b* da figura 3.5 são equivalentes.




(a) (b)

Figura 3.5: Superfícies equivalentes

$$\begin{cases} A(fig.a) = A(T_1) + A(T_2) \\ A(fig.b) = A(T_1) + A(T_2) \end{cases} \Rightarrow A(fig.a) = A(fig.b)$$

Vamos precisar de dois postulados para o estudo de áreas de superfícies planas.

## 3.3 Postulados:

### 3.3.1 Postulado da Adição de Áreas

Se a superfície de uma figura plana $F$ é a reunião das superfícies das figuras $F_1$ e $F_2$ sem pontos interiores comuns, então $A(F) = A(F_1) + A(F_2)$

Na figura 3.6, a superfície F é a reunião das superfícies $F_1$ e $F_2$.

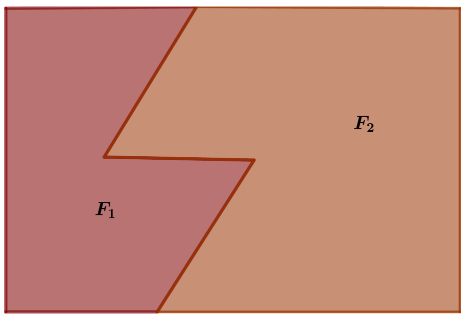



Figura 3.6: $A(F) = A(F_1) + A(F_2)$

### 3.3.2 Postulado da unidade de áreas

A área da superfície de um quadrado é o quadrado da medida do lado.

Na figura 3.7, o quadrado de lado $a$ tem área $a^2$.

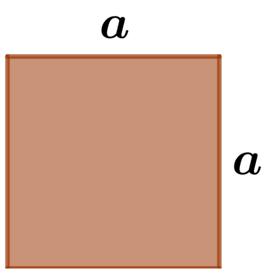



Figura 3.7: Quadrado de lado $a$

**Observações:**

1. Quando nos referirmos à área de um quadrado, de um triângulo, etc., estamos nos referindo à área da respectiva superfície.

2. Em um retângulo, dois lados adjacentes constituem a base e a altura e são denominados dimensões do retângulo.

## 3.4 Área de Uma Superfície Plana

### 3.4.1 Área de um retângulo

**Teorema 3.1.** *A área de um retângulo é o produto da base pela sua altura.*

**Demonstração: 1.**

*Considere um retângulo de base a, altura b e área $A_R$.*

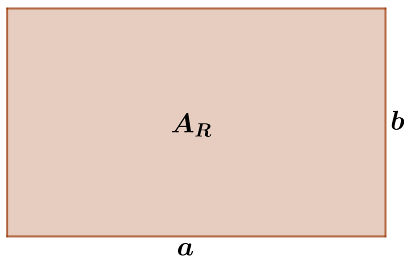



Figura 3.8: Retângulo de base *a* e altura *b*

*Vamos considerar os quadrados de lados a, b e a + b.*

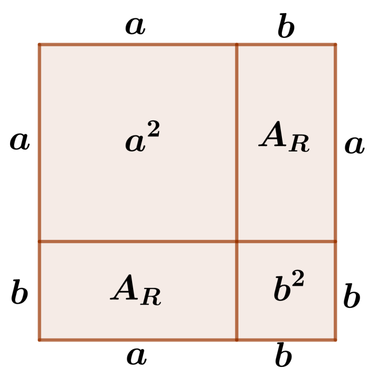



Figura 3.9: $2A_R + a^2 + b^2$

*Temos pelos postulados de áreas que:*

$$\begin{aligned} & a^2 + A_R + A_R + b^2 = (a+b)^2 \\ \Rightarrow \quad & a^2 + 2A_R + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \Rightarrow \quad & A_R = ab \end{aligned} \tag{3.1}$$

∎

**Teorema 3.2.** *Todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes às do paralelogramo.*

**Demonstração: 2.**

*Seja o paralelogramo ABCD da figura 3.10.*

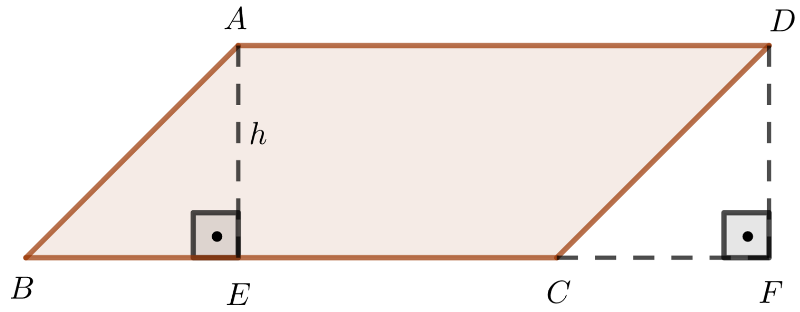



Figura 3.10: Paralelogramo ABCD

*Trace pelos vértices A e D as perpendiculares AE e DF à reta suporte do BC.*
*Vamos provar que $\triangle ABE \equiv \triangle DCF$.*
*De fato,*

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \ (lados\ opostos\ do\ paralelogramo) \\ \overline{AE} = \overline{DF} \ (altura\ do\ paralelogramo) \qquad Caso\ Especial \end{cases}$$

*Então a área do paralelogramo ABCD é equivalente à área do retângulo AEFD, já que as áreas são iguais.*

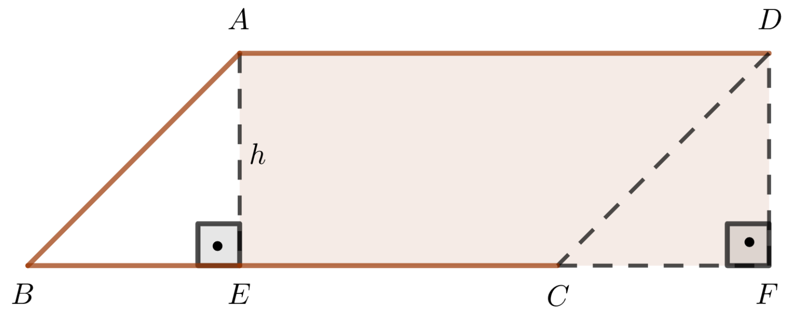



Figura 3.11: Retângulo AEFD

*Consequências: Denotando por b e h as medidas da base e altura comuns, vem:*

$$\begin{aligned} A_P &= A_R & \Rightarrow A_P = b.h \\ A_R &= b.h \ \ (Teorema\ 2.1) \end{aligned} \tag{3.2}$$

*Logo:*
*A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.* ■

### 3.4.2 Área de um triângulo

**Teorema 3.3.** *A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.*

**Demonstração: 3.**

*Considere o triângulo ABC de base b e altura h.*

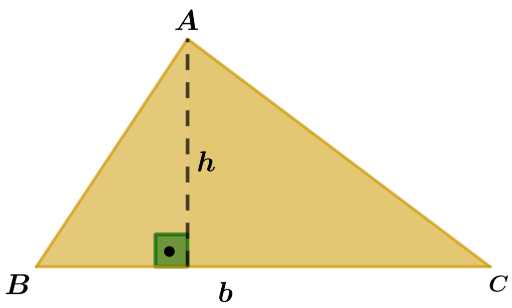



Figura 3.12: Triângulo ABC

*Trace AD e CD, respectivamente, paralelas aos lados BC e AB, daí temos o paralelogramo ABCD.*

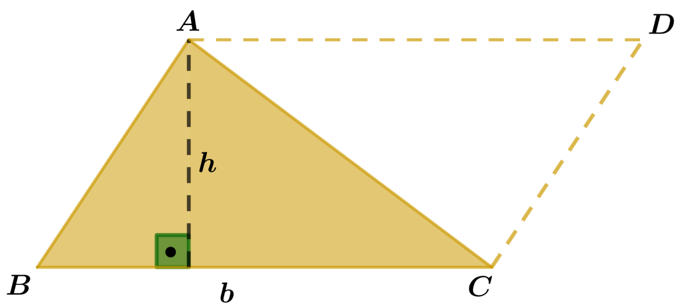



Figura 3.13: Paralelogramo

*Temos que* $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$*, pois*

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{BC} \\ \overline{AB} = \overline{CD} \qquad (LLL) \Rightarrow A_T \;= \dfrac{A_P}{2} = \dfrac{b.h}{2} \\ AC \quad comum \end{cases} \tag{3.3}$$

*já que* $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle CDA}$ ■

### 3.4.3 Área de um losango

**Teorema 3.4.** *A área de um losango é igual à metade do produto das diagonais.*

**Demonstração: 4.**

*Seja o losango ABCD de centro E cujas diagonais AC e BD medem, respectivamente, D e d.*

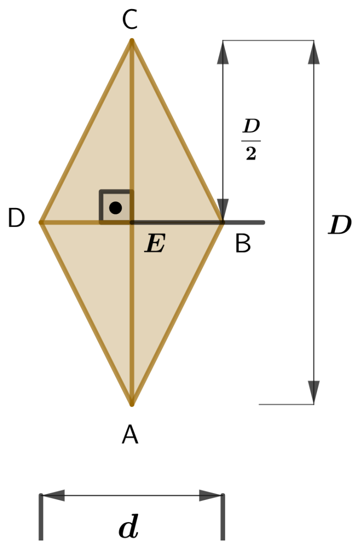



Figura 3.14: Losango ABCD

*A diagonal BD divide o losango em dois triângulos ABD e CDB.*
*Pelo postulado de adição de áreas vem:*

$$\begin{aligned} A_L &= A_{\triangle ABD} + A_{\triangle CDB} = \frac{d.\frac{D}{2}}{2} + \frac{d.\frac{D}{2}}{2} \\ \Rightarrow A_L &= \frac{Dd}{2} \\ \Rightarrow A_L &= \frac{D.d}{2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

■

### 3.4.4 Área de um trapézio

**Teorema 3.5.** *A área de um trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das bases.*

**Demonstração: 5.**

*Seja o trapézio ABCD de bases $b_1$ e $b_2$ e altura h.*

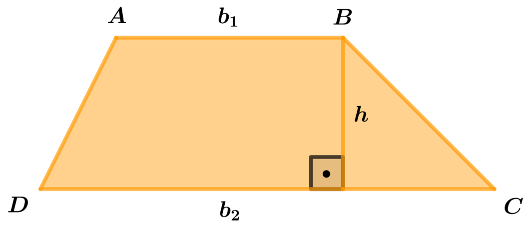



Figura 3.15: Trapézio ABCD

*Podemos dividir este trapézio em dois triângulos que são:* $\triangle ADC$ *e* $\triangle ABC$ *de mesma altura h.*

*Então*

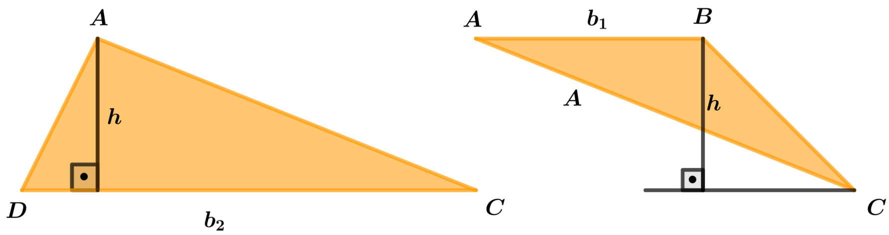



Figura 3.16: Divisão do Trapézio ABCD

$$A_{Trapézio} = \frac{b_2.h}{2} + \frac{b_1.h}{2} \Rightarrow A_{Trapézio} = \frac{(b_1 + b_2).h}{2} \tag{3.5}$$

■

### 3.4.5 Área de Um Polígono Regular

**Teorema 3.6.** *A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.*

**Demonstração: 6.**

*Considere o Polígono Regular sendo **n** o número de lados, **a** a medida do apótema, **l** a medida do lado poligono, e **p** o semiperímetro dos triângulos.*

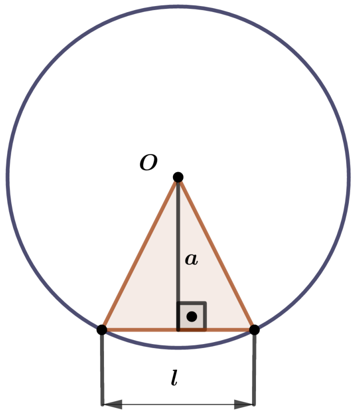



Figura 3.17: Polígono Regular

*Podemos decompor esse polígono em **n** triângulos de base **l** e altura **a**, então*

$$A_{Polgono} = n.\frac{l.a}{2}$$

*Como $nl = 2p$ (perímetro), então*

$$A_{Polígono} = \frac{2pa}{2} \Rightarrow A_{Polígono} = pa \tag{3.6}$$

■

### 3.4.6 Área de Um Círculo

**Teorema 3.7.** *A área de um círculo é o produto do número $\pi$ pelo quadrado do raio.*

**Demonstração: 7.**

*Pelo Teorema 3.6, temos que a área de um polígono regular é o produto da medida do semiperímetro pelo apótema, ou seja, $A_{Polígonoregular} = p.a.$*

*Seja um círculo de raio R, considere os polígonos regulares inscritos e os circunscritos nesse círculo. Com o crescimento do número de lados, as áreas dos polígonos aproximam da área do círculo, assim como os seus perímetros se aproximam do perímetro da circunferência e os apótemas se aproximam do raio do círculo.*

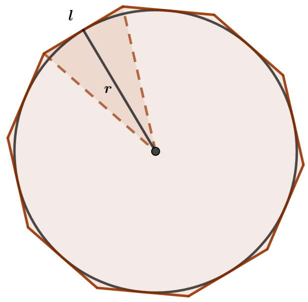



Figura 3.18: Círculo de raio *r* num polígono Regular de *n* lados

*Note que* $l_n \to 0$, $2p \to C$ *e* $a_n R$, *onde* $C$ *é o comprimento da circunferência. Daí, a área do círculo é:*

$$A_c = \pi.R.R = \pi R^2 \Rightarrow A_c = \pi R^2 \tag{3.7}$$

■

## 3.5 Teorema de Pick

Em 1900, o matemático austríaco Georg Alexander Pick publicou um artigo de oito páginas intitulado "Geometrisches zur Zahlenlehre" ["Resultados Geométricos sobre a Teoria dos Números"], Pick [12] não recebeu muita atenção. No entanto, quando o matemático polonês H. Steinhaus o publicou em 1969 no livro "Mathematical Snapshots" [16] foi descoberto e apreciado por sua simplicidade e elegância. A fórmula do teorema é utilizada para calcular a área de um polígono simples, cujos vértices são pontos de uma malha quadriculada, é uma fórmula simples, porém bastante interessante, pois possibilita o cálculo da área através da simples contagem de pontos, minimizando as dificuldades encontradas na resolução de problemas geométricos devido ao uso de inúmeras fórmulas.

**Teorema 3.8.** ***"A área de um polígono simples representado em uma malha quadriculada é dada por*** $A = I + \frac{B}{2} - 1$***, onde I é a quantidade de nós interiores do polígono e B é a quantidade de nós da borda do polígono".***

### 3.5.1 Definições e Resultados a Serem Considerados

É necessário algumas definições para o entendimento das demonstrações a cerca do teorema de Pick. Seguindo as ideias da demonstração de Lima [7] no livro intitulado Meu professor de Matemática, utilizaremos na demonstração os resultados e definições que se seguem:

**Definição 3.1.** *Uma rede no plano ou (malha quadriculada) é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1. Tomando um sistema de coordenadas cartesianas, com origem em um ponto da rede, um eixo na direção horizontal e outro na vertical, a rede pode ser descrita como o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas (m, n) são números inteiros (positivos, negativos ou zero).*

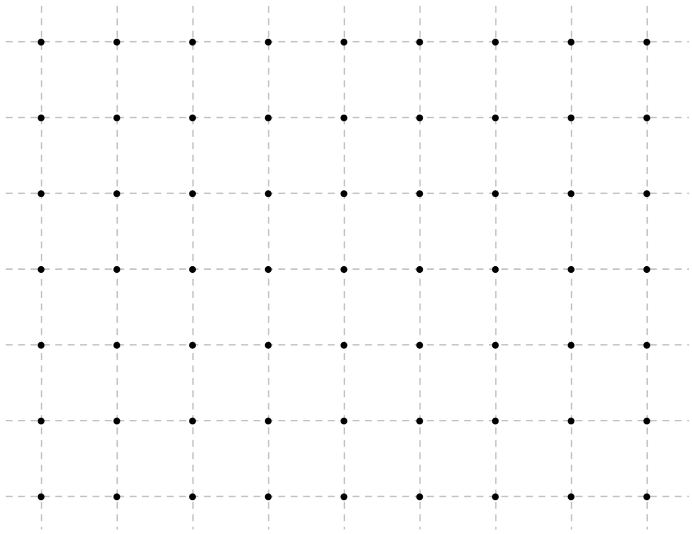
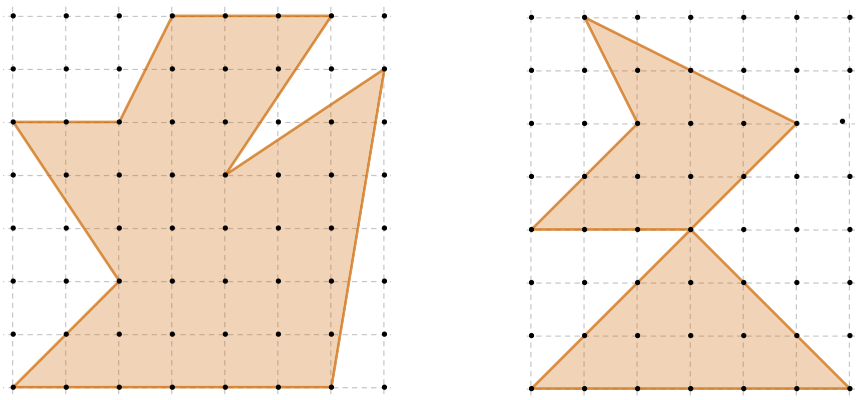


Figura 3.19: Malha Quadriculada

**Definição 3.2.** *Polígono Simples: polígono formado por uma poligonal fechada simples (sem inter secções entre suas arestas) e que não possui "buracos"em seu interior, ou seja, um polígono é simples se suas arestas não consecutivas, não se intersectam.*



(a) Polígono simples

(b) Polígono não simples

Figura 3.20: Polígono simples e não simples

**Definição 3.3.** *Nó: cada ponto de intersecção da malha, que representam os vértices de cada quadrado da malha;*

**Definição 3.4.** *Nós Internos (I): nós que fazem parte do interior da figura;*

**Definição 3.5.** *Nós da Borda (B): nós que fazem parte da borda que contorna a figura.*

A seguir teremos alguns exemplos de polígonos que podem ter suas áreas calculadas utilizando a fórmula de Pick e posteriormente serão apresentadas duas demonstrações da fórmula de Pick.

**Exemplo 3.1.** *A figura 3.21 mostra a área do polígono 1 aplicando a fórmula de Pick*

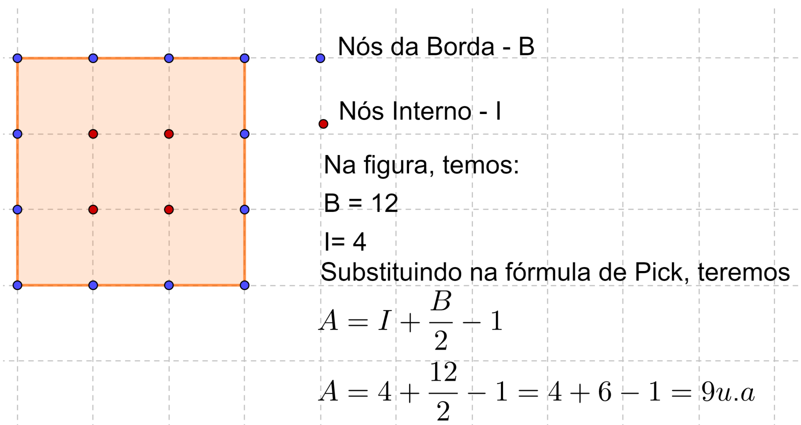



Figura 3.21: Calculando a área do polígono 1 utilizando a fórmula de Pick

**Exemplo 3.2.** *A figura 3.22 mostra a área do polígono 2 aplicando a fórmula de pick*

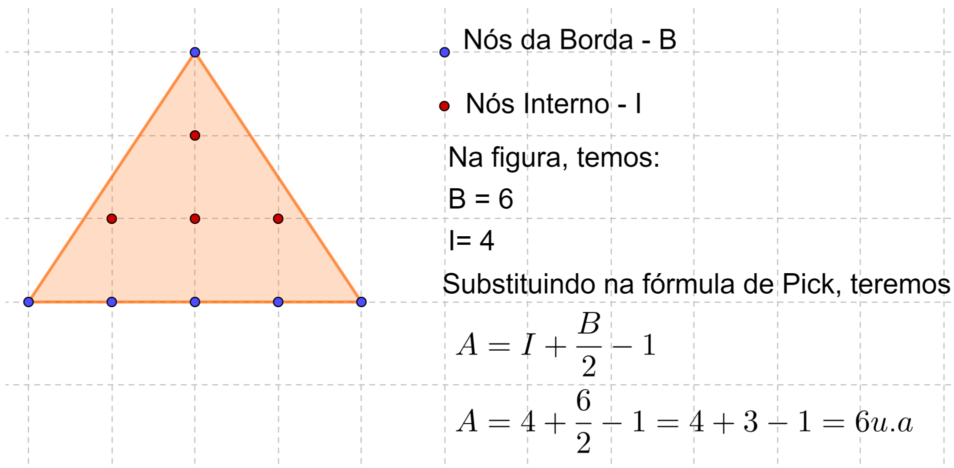



Figura 3.22: Calculando a área do polígono 2 utilizando a fórmula de Pick

**Exemplo 3.3.** *A figura 3.23 mostra a área do Polígono 3 aplicando a fórmula de pick*

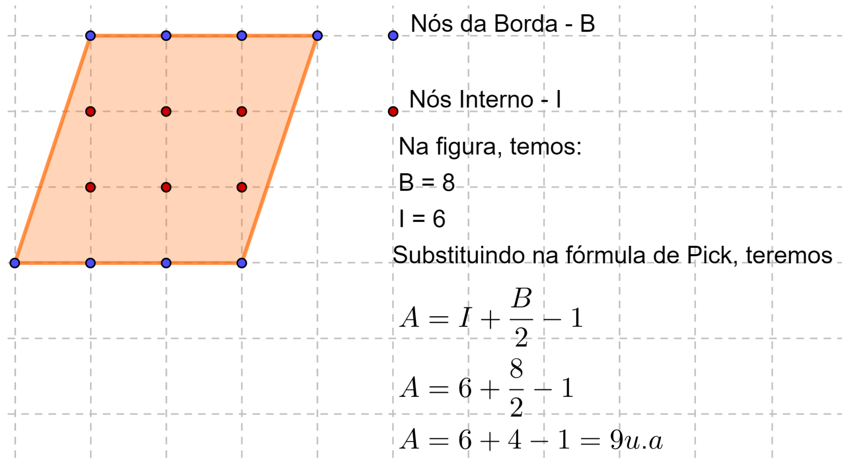



Figura 3.23: Calculando a área do polígono 3 utilizando a fórmula de Pick

**Exemplo 3.4.** *A figura 3.24 mostra a área do Polígono 4 aplicando a fórmula de pick*

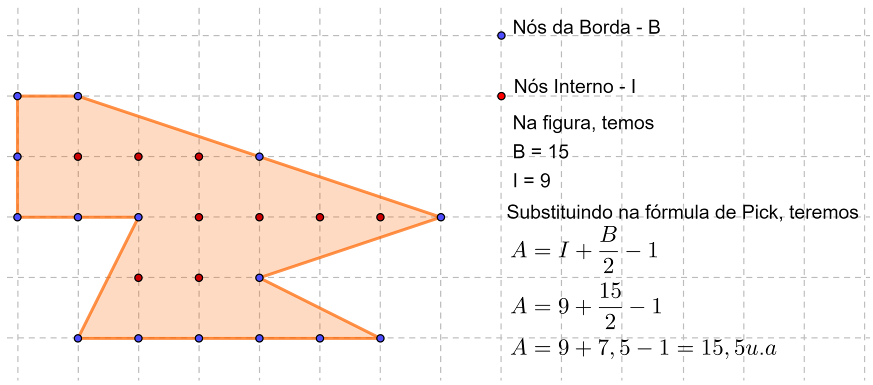
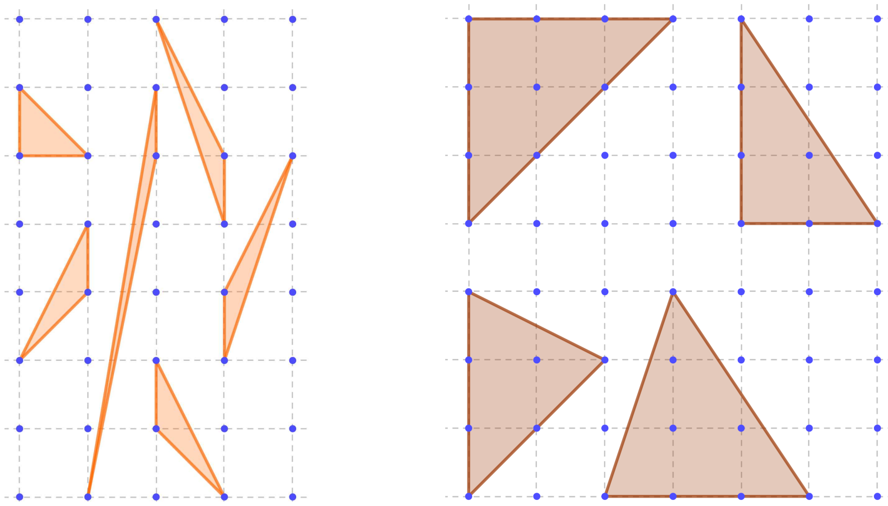



Figura 3.24: Calculando a área do polígono 4 utilizando a fórmula de Pick

Verificamos a resolução de áreas de polígonos que são simples e, por esse motivo, podem ter suas áreas facilmente calculadas, utilizando a fórmula de Pick. A grande vantagem no uso desta fórmula está na facilidade de calcular a área do polígono do exemplo 4, que não é um polígono regular e não tem nenhuma fórmula pré-definida pela geometria convencional, sem fazer a divisão em polígonos justapostos, que utilizariam diversas fórmulas e demandariam um tempo maior.

**Definição 3.6.** *Um triângulo é fundamental quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto (do bordo ou interior) sobre a malha de pontos*

Na figura abaixo 3.25 temos exemplos de triângulos que são e que não são fundamentais:



(a) Triângulos fundamentais (b) Triângulos não fundamentais

Figura 3.25: Triângulos fundamentais e não fundamentais

**Teorema 3.9.** *A área de um triângulo fundamental é igual a* $\dfrac{1}{2}$ .

**Demonstração: 8.**

*Sejam A(0,0) e B(m, n) as coordenadas (inteiras) dos dois vértices do triângulo fundamental ABC. Mostremos, inicialmente, que m e n são primos entre si. Com efeito, se d>1 fosse um divisor comum de m e n, o ponto P estaria na malha e no interior do segmento de reta AB (Veja Figura 3.26), logo ABC não seria fundamental.*

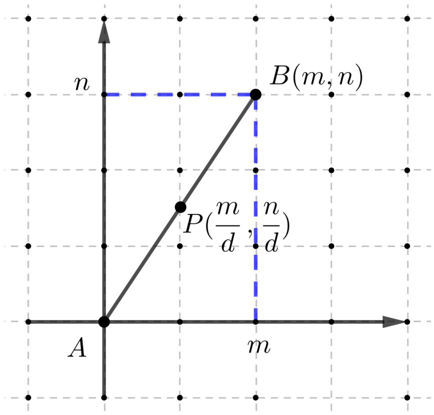



Figura 3.26: Eixo de coordenadas

*Suponhamos m, 0. A equação da reta que passa pelo ponto C e é paralela a AB é* $y = \frac{n}{m}x + b$, *onde b é a ordenada do ponto D(0, b) no qual a reta corta o eixo vertical. Todos os triângulos que têm AB como base e cujo terceiro vértice está sobre essa reta tem a mesma* *área que ABC. Em particular área ABC = área ABD =* $\frac{|bm|}{2}$*, pois* $\mid b \mid$ *é a medida da base e* $\mid m \mid$ *da altura de ABC. Resta-nos então provar que* $\mid b \mid = \frac{1}{|m|}$.

*Para isto consideremos, mais geralmente, a equação* $y = \frac{n}{m}x + \beta$ *de qualquer reta paralela a AB. Sabemos que* $\beta$ *é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo vertical. Se a reta passa por algum ponto da malha com coordenadas (s, t) então* $t = \frac{n}{m}s + \beta$*, donde*

$$\beta = t - \frac{n}{m}s = \frac{tm - sn}{m} \tag{3.8}$$

*Dentre estas retas, nenhuma está mais próxima da reta AB do que a que passa pelo ponto C, para a qual temos* $\beta = b$*. Logo* $\mid b \mid$ *é o menor valor positivo que* $\beta$ *pode assumir. Por outro lado, como **m** e **n** são primos entre si, o lema abaixo nos assegura que existem inteiros **s**, **t** tais que* $tm - sn = 1$*. Portanto* $\frac{1}{|m|}$ *é o menor valor positivo de* $\beta$*, donde* $\mid b \mid = \frac{1}{|m|}$.

*Para completar a demonstração, falta considerar o caso m = 0. Mas m = 0 obriga* $n = \pm 1$ *e ABC é um triângulo retângulo, metade de um dos quadrados da malha, logo sua área é* $\frac{1}{2}$.

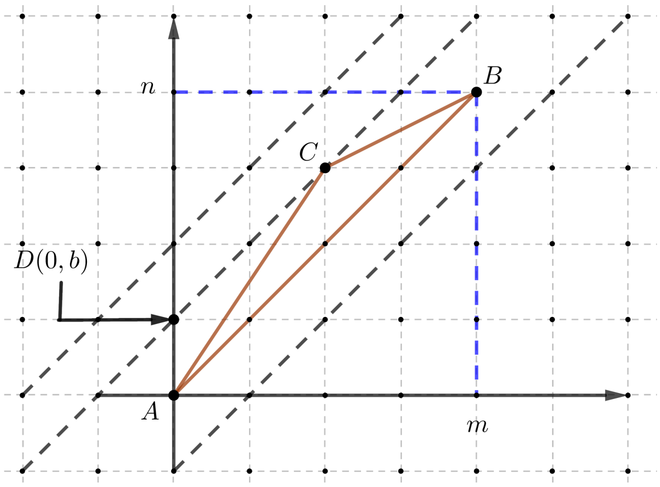



Figura 3.27: Eixo de coordenadas

### 3.5.2 Decomposição de Polígonos

**Teorema 3.10.** *(Decomposição de um polígono). Todo polígono de n lados pode ser decomposto como reunião de* $n - 2$ *triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.*

**Demonstração: 9.**

*Supondo, por absurdo, que existam polígonos para os quais o teorema não é verdadeiro, seja **n** o menor número natural tal que existe um polígono **P**, com **n** lados, o qual não pode ser decomposto conforme estipula o enunciado acima. Tomemos no plano um sistema de* *coordenadas cartesianas de modo que nenhum lado do polígono seja paralelo ao eixo das ordenadas. Seja* ***A*** *o ponto de maior abscissa no bordo do polígono* ***P****. Como nenhum lado de* ***P*** *é vertical.* ***A*** *deve ser um vértice. Sejam* ***B*** *e* ***C*** *os vértices adjacentes a* ***A****. Há duas possibilidades.*

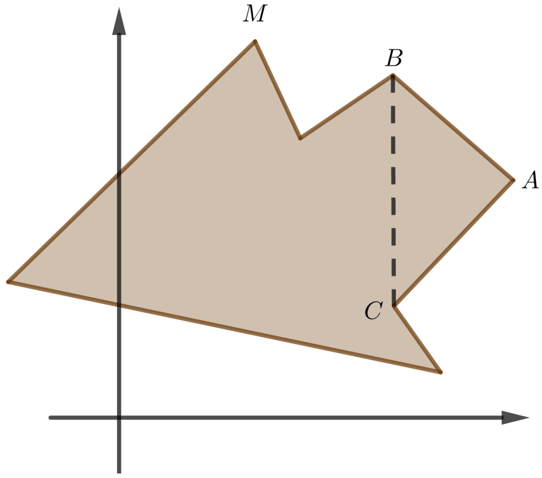



Figura 3.28: Primeira possibilidade

**Primeira Possibilidade**: O triângulo ABC não contém outros vértices de **P**, além de **A**, **B** e **C**. Nesse caso, o polígono **P'**, obtido de **P** quando se substituem os lados AB e AC por BC, tem $n-1$ lados. Como **n** é o menor número de lados para o qual o teorema é falso, **P'** pode ser decomposto em $n-3$ triângulos na forma do enunciado. Juntando o triângulo ABC a essa decomposição, vemos que o teorema é verdadeiro para **P**, o que é uma contradição.

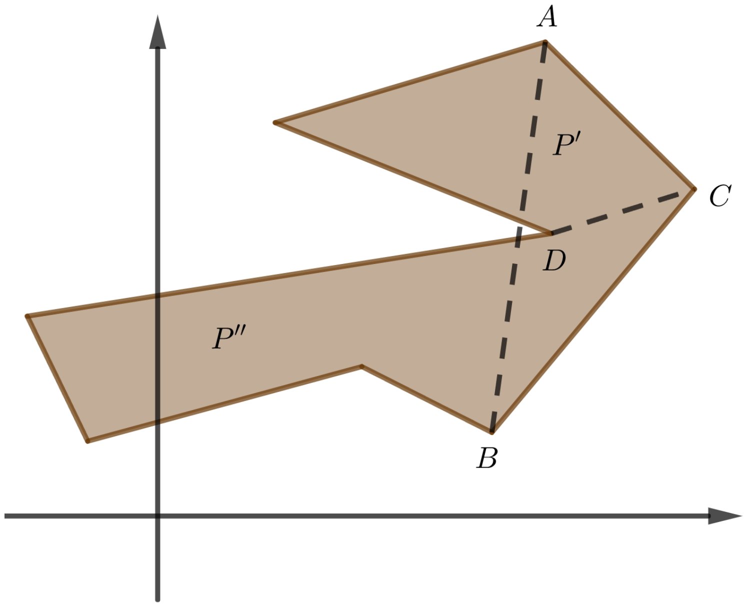



Figura 3.29: Segunda possibilidade

**Segunda Possibilidade**: O triângulo ABC contém, além de **A**, **B** e **C**, algum outro vértice do ponto **P**. Dentre esses, seja **D** o mais distante do lado BC. Então o segmento de reta AD decompõe **P** em dois polígonos **P'** e **P''** , o primeiro com **n'** e o segundo com **n'** lados, sendo $n + n'' = n + 2$. Como **n'** > 3 e **n''** > 3, vemos que **n'** e **n'** são ambos menores do que **n**. O teorema então vale para **P'** e **P''**, que podem ser decompostos, respectivamente, em $n' - 2$ e $n'' - 2$ triângulos, na forma do enunciado. Justapondo essas decomposições ao longo de AD, obtemos uma decomposição de **P** em $(n' - 2) + (n'' - 2) = n - 2$ triângulos, o que é uma contradição. ■

**Corolário 3.1.** *A soma dos ângulos internos de um polígono de **n** lados é igual a* $(n - 2)\pi$.

**Demonstração: 10.**

*Pelo Teorema 3.10, um polígono de **n** lados pode ser decomposto em* $n - 2$ *triângulos justapostos com vértices nos vértices do polígono, tendo em cada triângulo* $\pi$ *como soma dos ângulos internos. Logo, soma dos ângulos internos é dada por* $(n - 2)\pi$. ■

**Teorema 3.11.** *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma malha pode ser decompostos numa reunião de triângulos fundamentais.*

**Demonstração: 11.**

*Em vista do Teorema 3.10, basta considerar o caso em que o polígono dado é um triângulo ABC, que contém **n** pontos da rede (no interior ou no bordo). Se existir realmente algum ponto **P** da rede no interior do triângulo, traçamos segmentos de reta ligando esse ponto aos vértices **A**, **B** e **C** e, desse modo, decompomos ABC em três triângulos, cada um contendo um número < **n** de pontos da malha. Se houver pontos da rede sobre os lados de ABC , escolhemos um deles, digamos sobre AB, e o ligamos ao vértice **C** . Assim, decompomos ABC em 2 triângulos, cada um contendo um número < **n** de pontos da rede. Prosseguindo dessa maneira, com um número finito de etapas, chegaremos a uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais.*
■

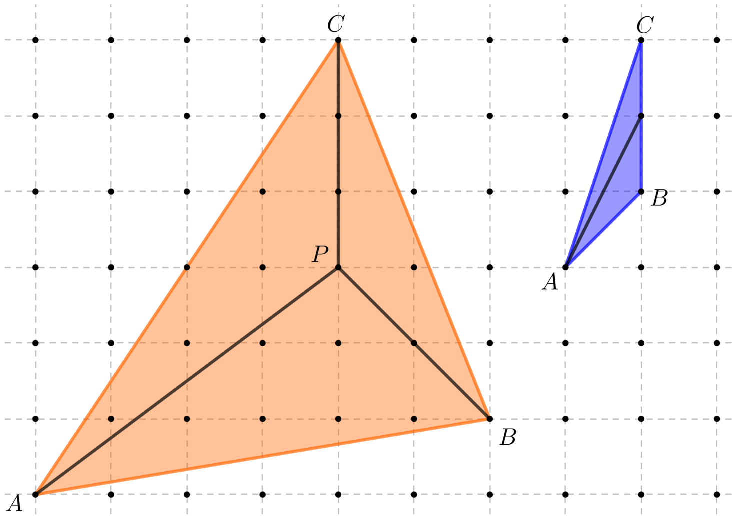



Figura 3.30: Triângulo ABC

## 3.6 Demonstração do Teorema de Pick

Existem diversas demonstrações desse teorema. No presente trabalho serão apresentadas duas delas: a primeira baseada no livro Meu professor de Matemática e outras histórias, de autoria de Elon Lages Lima; a segunda por meio do processo de justaposição.

### 3.6.1 Primeira Demonstração:

Para provar que $I + \frac{B}{2} - 1$ é a área do polígono **P**, basta mostrar que o número **T** de triângulos fundamentais da decomposição de P, conforme o Teorema3.11 é igual a $B + 2.I - 2$, pois a área de **P** é igual $\frac{T}{2}$, em virtude do Teorema 3.9

Para isso, vamos calcular a soma dos ângulos internos dos **T** triângulos fundamentais que compõem o polígono **P**. Podemos chegar a essa soma por dois caminhos.

O primeiro, se há T triângulos, a soma dos seus ângulos internos é igual a $T.\pi$.

O segundo consiste em calcular separadamente a soma $S_b$ dos ângulos que tem vértice no bordo e a soma $S_i$ dos ângulos cujos vértices estão no interior de **P**. Sejam **B'** o número de vértices de **P** e **B"** o número de pontos da malha que estão sobre o bordo de **P** mas não são vértices. Então $B = B' + B''$ . Evidentemente, $S_b$ é igual à soma $(B' - 2).\pi$ dos ângulos internos de **P** mais $B''.\pi$, pois os ângulos dos triângulos fundamentais, com vértice em cada um dos **B"** pontos do bordo de **P** que não são vértices de **P**, somam um ângulo raso, ou seja, $\pi$. Logo, $S_b = (B' - 2).\pi + B''.\pi = (B - 2).\pi$. Por outro lado, em cada ponto da malha interior a **P**, os ângulos que tem como vértice somam quatro retos, logo $S_i = 2.I.\pi$. Portanto $S_b + S_i = (B - 2 + 2.I).\pi$.

Lima [7] conclui comparando as duas contagens: $T.\pi = (B - 2 + 2I).\pi$, ou seja, $T = B + 2I - 2$. ■

### 3.6.2 Segunda Demonstração (por justaposição)

Nesta segunda demonstração do teorema de Pick, vamos mostrar, em primeiro lugar, que o segundo membro da fórmula de Pick - o que dá aquilo a que podemos chamar o **número de Pick** do polígono ***P***

Na demonstração por justaposição é necessário perceber que a área deve ser aditiva, isto é, se P é um polígono simples, **P** pode ser obtido justapondo polígonos simples $P_1$ e $P_2$ ao longo de pelo menos uma aresta.

### 3.6.3 Propriedade do Número de Pick: Aditividade

Segundo Rupolo [14] um número característico, que depende, do polígono P e o chamamos de número de Pick representando por $Pick(P) = I + \frac{B}{2} - 1$. Assim, se o número de Pick é a área de um polígono simples então ele é aditivo. Por exemplo, se um polígono **P** for composto pela justaposição de outros dois polígonos $P_1$ , $P_2$ , então:

$$Pick(P) = Pick(P_1) + Pick(P_2) \tag{3.9}$$

**Demonstração: 12.** *Considere os polígonos $P_1$ e $P_2$ , arbitrários, representados na Figura:*

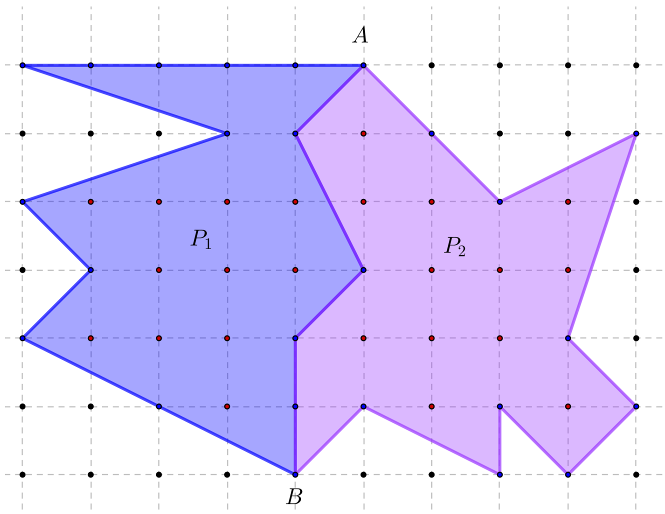



Figura 3.31: Polígonos $P_1$ e $P_2$

*Sejam $B_1$ os nós da borda e $I_1$ os nós interiores do polígono $P_1$ e $B_2$ os nós da borda e $I_2$ os nós interiores do polígono $P_2$. Justapondo os dois polígonos obtemos um polígono* ***P*** *com* ***B*** *nós da borda e* ***I*** *nós interiores.*

*Observe que, desta forma, temos* ***k*** *nós de contato entre $P_1$ e $P_2$, que antes eram pontos da borda, e que se tornaram nós interiores do polígono* ***P****. Assim, a quantidade de nós interiores de* ***P*** *será*

$$I = I_1 + I_2 + k \tag{3.10}$$

*Essa quantidade **k** de nós das bordas de $P_1$ e $P_2$ não serão contabilizadas como nós da borda de **P** pois se tornaram nós interiores. Temos então que a quantidade de nós da borda de $P_1$ que serão consideradas é $B_1 - k$, entre eles, **A** e **B**. A quantidade de nós da borda de $P_2$ que serão consideradas é $B_2 - k$, entre eles, **A** e **B**. Como os nós **A** e **B** foram considerados duas vezes, teremos então que a quantidade de nós da borda de **P** será dada por*

$$B = (B_1 - k) + (B_2 - K) - 2 = B_1 + B_2 - 2k - 2 \tag{3.11}$$

*Substituindo na fórmula de Pick, teremos:*

$$\begin{aligned} Pick(P) = I + \frac{B}{2} - 1 = I_1 + I_2 + k + \frac{(B_1 + B_2 - 2k - 2)}{2} - 1 &= \\ = \frac{(2I_1 + 2I_2 + 2k + B_1 + B_2 - 2k - 2 - 2)}{2} &= \\ = \frac{2I_1 + 2I_2 + B_1 + B_2 - 2 - 2}{2} &= \\ = \frac{2I_1 + B_1 - 2 + 2 + I_2 + B_2 - 2}{2} &= \\ = (I_1 + \frac{B_1}{2} - 1) + (I_2 + \frac{B_2}{2} - 1) &= \\ = Pick(P_1) + Pick(P_2) & \end{aligned} \tag{3.12}$$

■

Foi demonstrado que, justapondo-se dois polígonos simples, as respectivas áreas se adicionam. Sendo assim, por meio desta demonstração, um polígono **P** pode ser decomposto em polígonos justapostos mais simples, para os quais a Fórmula de Pick possa ser verificada. Como todo polígono pode ser formado por uma justaposição de triângulos, basta que se demonstre que a Fórmula de Pick seja válida para qualquer triângulo.

### 3.6.4 A Fórmula de Pick para triângulos.

Na figura 3.32 está representado o retângulo R, em que dois de seus lados são catetos de comprimento b e c do triângulo retângulo T, catetos esses, paralelos aos eixos coordenados.

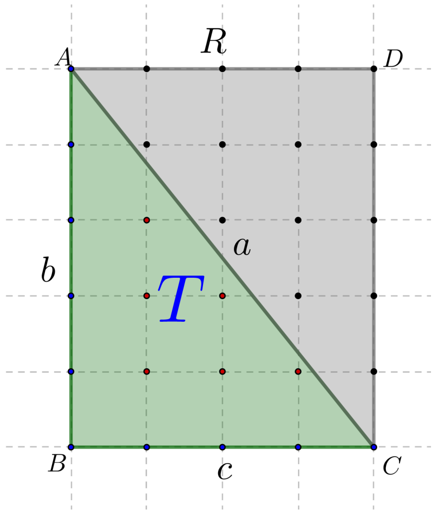



Figura 3.32: Triângulo Retângulo

Sendo B e I a quantidade de nós da borda e do interior do triângulo, respectivamente, sabendo que os nós interiores do retângulo R são dados por $(b-1).(c-1)$ e chamando de $P_h$ o número de pontos da hipotenusa, sem considerar os pontos que são vértices do triângulo, tem-se

$$I = \frac{1}{2}[(b-1).(c-1) - p_h] \ e \ B = b + c + p_h + 1 \tag{3.13}$$

Se a fórmula de Pick é dada por $S = I + \frac{b}{2} - 1$ substituindo as duas igualdades anteriores obtém-se

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}(b + c + p_h + 1) + \frac{1}{2}[(b-1).(c-1) - p_h] - 1 \\
S &= \frac{1}{2}(b + c + p_h + 1) + \frac{1}{2}(-b - c - p_h + 1 + bc) - 1 \\
S &= \frac{1}{2}(2 + bc) - 1 \\
S &= 1 + \frac{bc}{2} - 1 \\
S &= \frac{bc}{2}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

O que confirma o resultado que pode ser obtido com o cálculo usual da área de um triângulo, já que podemos tomar qualquer um dos catetos como base e o outro como altura do triângulo.

Portanto, a fórmula vale para triângulos retângulos cujos catetos são paralelos aos eixos coordenados.

Como todo retângulo R pode ser formado por dois triângulos retângulos, a fórmula de Pick vale também para todo retângulo.

Por outro lado, seja T um triângulo qualquer, pode-se formar um retângulo R, tal que $R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$ , onde $T_1$ , $T_2$ e $T_3$ sejam triângulos retângulos paralelos aos eixos.

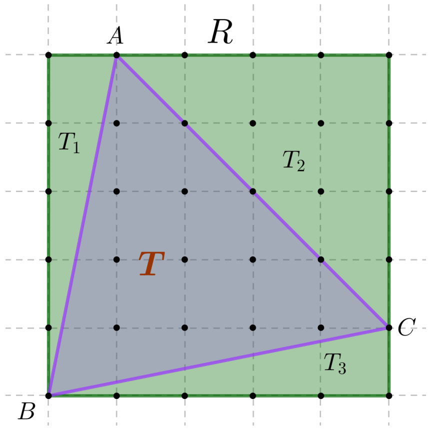



Figura 3.33: Triângulo qualquer

Portanto, se o teorema é válido para R , $T_1$, $T_2$ e $T_3$, ele vale também para o triângulo T, devido a Propriedade Aditiva da Fórmula de Pick e pela justaposição de polígonos demonstrada anteriormente.

## 3.7 Aplicações da Fórmula de Pick

Nesta seção será mostrado algumas aplicações da fórmula de pick. O geoplano serve como recurso de visualização de conceitos e propriedades relativos a conteúdos de geometria plana. Ele pode ser construído em madeira ou plástico, tem cravados pregos ou pinos que formam uma malha (reticulado) composta por linha e colunas, chamada de Geoplano quadrangular. Conforme Barros [2] o Geoplano entra como um excelente recurso, onde o professor pode fazer a construção do conhecimento, fazendo com que o aluno consiga trabalhar o mesmo conteúdo em diversos contextos, desenvolvendo assim o seu raciocínio, e não somente de forma mecânica onde decoram fórmulas e apenas sabem aplicá - las em problemas já conhecidos. De acordo com Sabatielo [15] "o geoplano é um modelo matemático que permite traduzir ou sugerir ideias matemáticas".

### 3.7.1 Geoplano online

O Geoplano online é uma ferramenta muito importante para o ensino de geometria plana. Aqui vamos apresentar uma versão gratuita que pode ser encontrada no endereço eletrônico http://www.mathplayground.com/geoboard.html.

Este recurso didático pode ser recomendado em situações envolvendo o cálculo de perímetro, área, figuras simétricas, arestas, vértices, construção de polígonos entre outras situações envolvendo Geometria Plana. Segundo Machado [9] :"o geoplano é um meio, uma ajuda didática, que oferece um apoio à representação mental e uma etapa para o caminho da abstração, proporcionando uma experiência geométrica e algébrica aos estudantes".

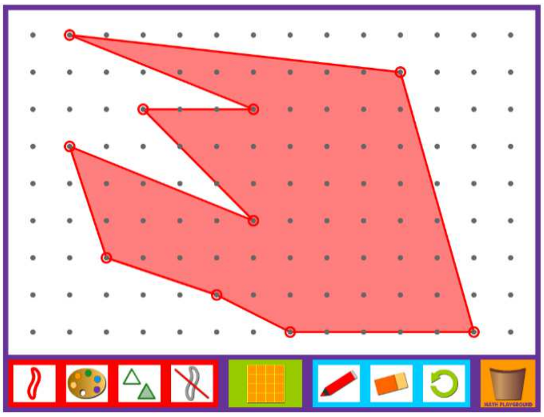


Figura 3.34: Geoplano online

A utilização do Geoplano online pode ser uma ferramenta que facilita o uso da fórmula de pick e como conseqüência uma melhor compreensão do cálculo da área de figuras planas.

### 3.7.2 Na Medicina

O acompanhamento e análise em áreas de pele lesionada ou comprometida de alguma forma, verificando diariamente o seu desenvolvimento e a evolução da lesão, sendo assim permitido saber qual o melhor medicamento para o tratamento e futuros exames a serem feitos.

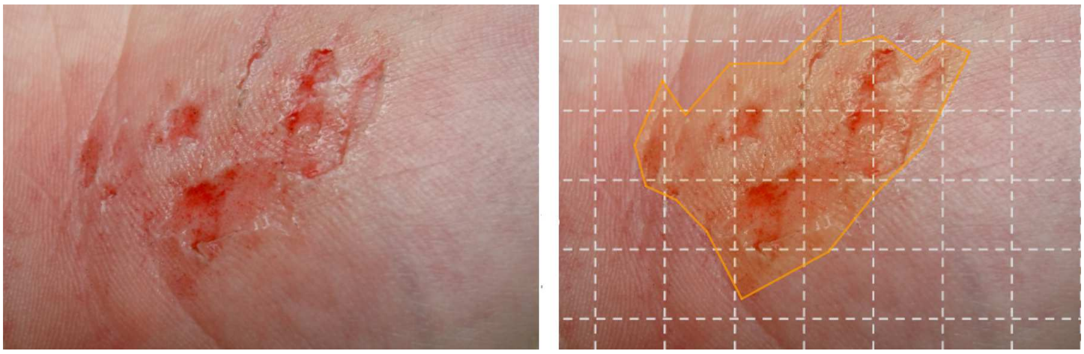


Figura 3.35: Pele lesionada

### 3.7.3 Na Geografia

Não podemos medir com precisão áreas de estados, cidades e regiões de terras. A partir de fotos de satélites, como por exemplo, na Figura 3.36, realiza-se o cálculo de área de regiões de queimadas e de devastações de forma a poder acompanhar e intervir na redução ou estagnação do evento.

Figura 3.36: Floresta amazônica desmatada

# Capítulo 4

# Metodologia Aplicada

A metodologia aplicada foi a pesquisa qualitativa, na modalidade investigação-ação. O presente trabalho fará a comparação de uma aula dita tradicional da não tradicional, de como os alunos se comportam com o aprendizado de um mesmo assunto, no caso, cálculo de figuras planas. Para Coutinho [4] na investigação-ação, é essencial que o professor explore reflexivamente sua prática, "contribuindo dessa forma não só para a resolução de problemas como também (e principalmente) para a planificação e introdução de alterações nessa mesma prática".

Este estudo foi realizado em duas turmas, com 40 alunos cada, do ensino fundamental, no final do 4° bimestre do ano de 2018, em uma escola da rede estadual de ensino do estado do Amazonas. Uma escola carente da zona norte da cidade de Manaus, com muitos problemas sociais assim como diversas que existem na nossa cidade, no qual percebemos que atinge de forma signifcante o ensino aprendizado dos nossos alunos.

Apesar do conteúdo não ser da série vigente, essas turmas foram escolhidas por apresentarem uma grande dificuldade em questões relacionadas a geometria plana. A atividade desenvolvida servirá como revisão e suporte para outros conteúdos que envolvam geometria plana. Dessa forma podemos rever não só a forma de ensino da área em estudo, como também em outros conteúdos da matemática.

Percebemos muitas das vezes que a matemática tem sido motivo de descontentamento por não conseguirem entender de forma plena e completa a matéria dada.

As turmas escolhidas serão aqui denominadas de turmas A e B. Para isso relembramos o cálculo de figuras planas usando as fórmulas conhecidas para esses cálculos. Nessa realização de cálculos foram apresentas e feitas em uma malha quadriculada, para que eles já pudessem ter uma ideia posterior da aplicação da fórmula de PICK. Na Turma B foi apresentado a fórmula de PICK, com um breve histórico, e ideia de aplicabilidade, para que os alunos pudessem analisar o material com propriedade e tivessem subsídios necessários na realização de atividades propostas.

Essas atividades foram feitas de forma simultânea, assim que acabasse o ciclo de atividade em uma turma, começaria na outra.

A ideia é perceber a importância da forma de como se abordar determinados assuntos de matemática, no caso presente, da geometria plana, e podendo se estender para outros assuntos da matemática.

Para D'Ambrósio [5], "O grande desafio que nós educadores matemáticos encontramos é tornar a matemática interessante, isto é, atrativa; relevante, isto é, útil; e atual, isto é, integrada no mundo de hoje".

## 4.1 Atividades Orientadas

### 4.1.1 Turma A

#### Aula 1

Foi feito a apresentação das fórmulas de figuras planas, sendo realizados alguns exemplos de aplicações dessas fórmulas. Depois foi solicitado aos alunos para que aplicassem as fórmulas no exercício que foi distribuído para a turma.

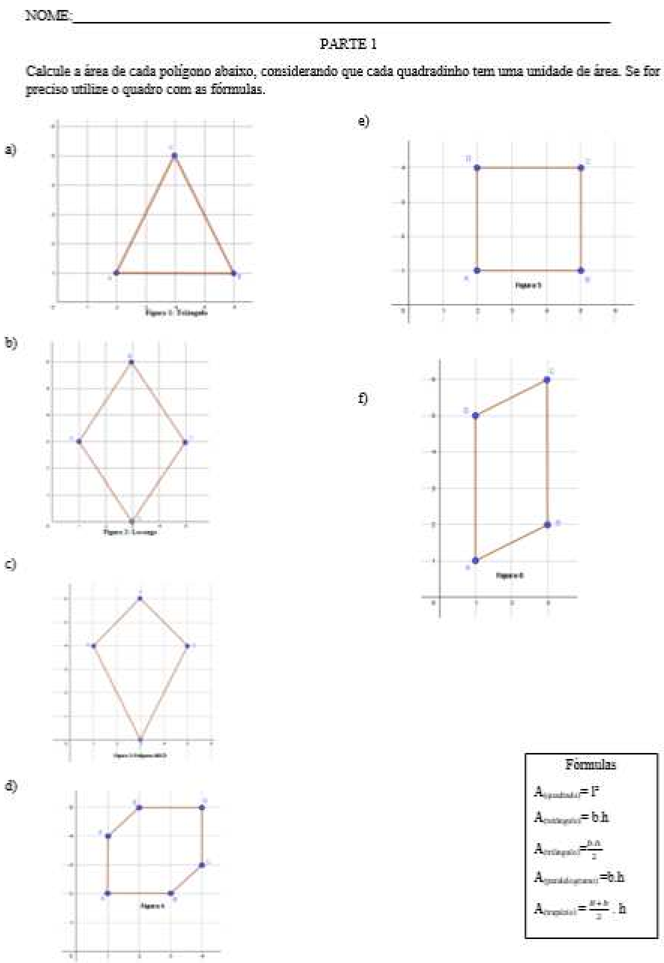



Figura 4.1: Exercício distribuído para turma

As atividades foram realizadas em dupla, onde poderiam consultar fórmulas do cálculo de áreas de algumas figuras planas. Notamos que algumas figuras foram logo reconhecidas e puderam fazer a associação imediata da figura com a fórmula correspondente para o cálculo de sua área.

A partir daí foi questionado se houve alguma dificuldade na realização dos cálculos das áreas dessas figuras. A resposta foi que na maioria das figuras não houve dificuldade, a não ser nas figuras dos itens c) e d), pois disseram que nenhuma fórmula daquelas apresentadas daria para ser aplicada nessas figuras. Também mencionaram que o quadro com as fórmulas os ajudou muito no desenvolvimento da atividade.

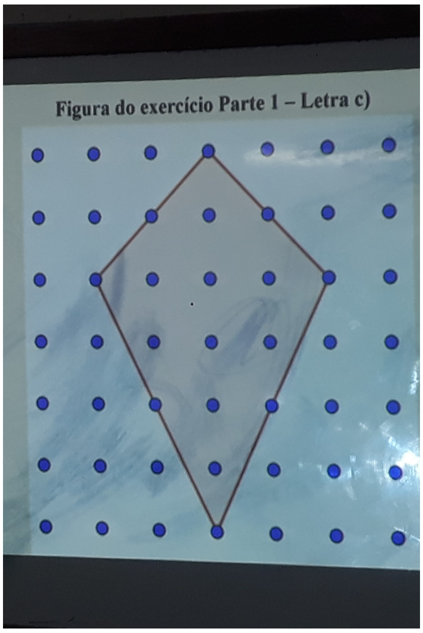



Figura 4.2: Polígono na malha quadriculada

Ao surgir a dúvida sobre como aplicar uma fórmula para se calcular a área da figura 4.2 aproveitou-se do momento para projetar a figura mencionada numa malha quadriculada, com o propósito dos alunos já se ambientarem com essa ideia.

Então foi perguntado, se apesar de não ter nenhuma fórmula apresentada para fazerem os cálculos dessas figuras dos itens c) e d) se eles tinham conseguido realizar essa parte da atividade.

A resposta de alguns foi que não conseguiram e outros disseram que "quebraram"a figura em outras partes e daí perceberam que podiam usar as fórmulas dadas, e que nos polígonos em questão tinha que ser usada mais de uma fórmula.

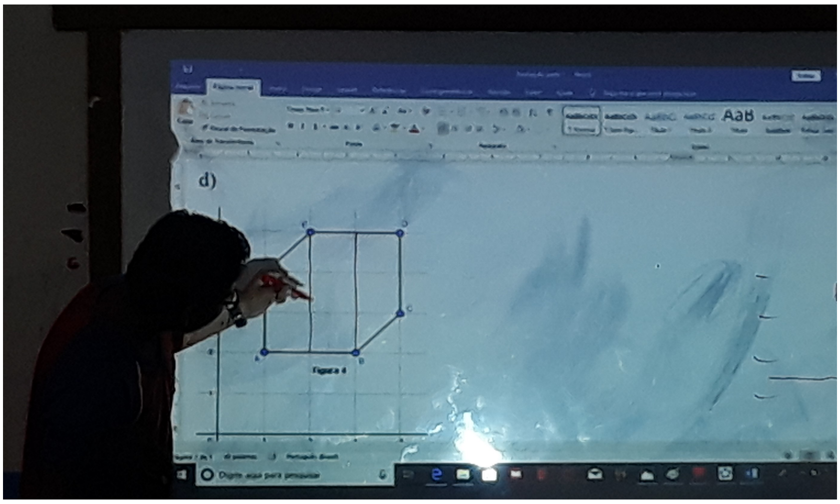


Figura 4.3: Aluno fazendo a decomposição do polígono do item d) do exercício

Depois de ouvir as justificativas dos alunos, foi aproveitado para dizer que essa "quebra"que eles fizeram é a decomposição de figuras planas, e que podemos fazer isso em diversas figuras.

Os alunos perguntaram se em figuras diferentes daquelas já conhecidas teria que sempre ser feito essa decomposição e se isso não poderia ficar mais complicado.

Foi dito para eles então que posteriormente seria apresentado um método alternativo que os auxiliariam em cálculos de figuras planas.

Daí foi mostrado a figura 4.4 onde ficaram muito curiosos de como seria feito o procedimento para a realização do cálculo da área dessa figura e se realmente teria algo mais simples que poderia ser aplicado, pois já haviam feito os exercícios anteriores, e na percepção deles poderia ficar muito pior para se calcular. Foi dito então, que na aula posterior seria apresentado tal procedimento.

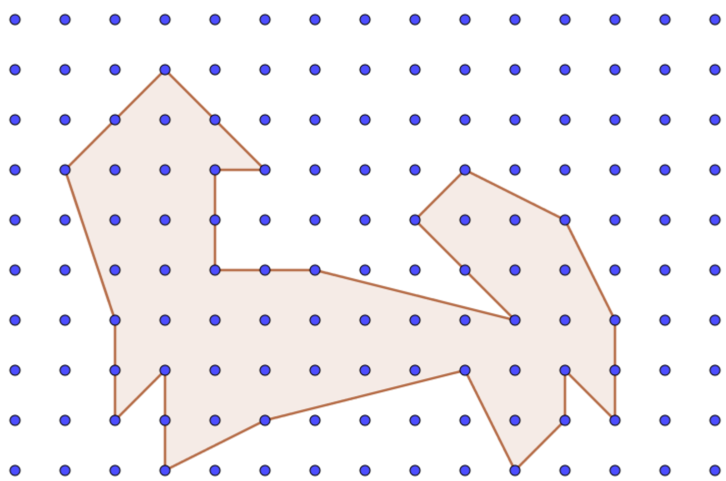


Figura 4.4: Polígono simples feito no geogebra

#### Aula 2

Foi realizado o mesmo procedimento já feito na turma B, a turma A também gostou muito da ideia de realizar o cálculo de várias polígono utilizando uma só fórmula. E perguntaram o porquê de não ter sido apresentado esse procedimentos antes, já que não precisariam de tantas fórmulas para usarem.

### 4.1.2 Turma B

#### Aula 1

Nessa primeira aula reforçamos de que o assunto a ser abordado serviria como revisão para turma, pois o conteúdo não estava no cronagrama de ensino na série. E que a intenção era trabalhar com mais detalhes este assunto de geometria plana.

Foi apresentado uma malha quadriculada para os alunos, e depois mostrada algumas figuras planas desenhadas nessa malha. A maioria dos alunos acharam interessante a malha quadriculada e as figuras ali desenhadas.

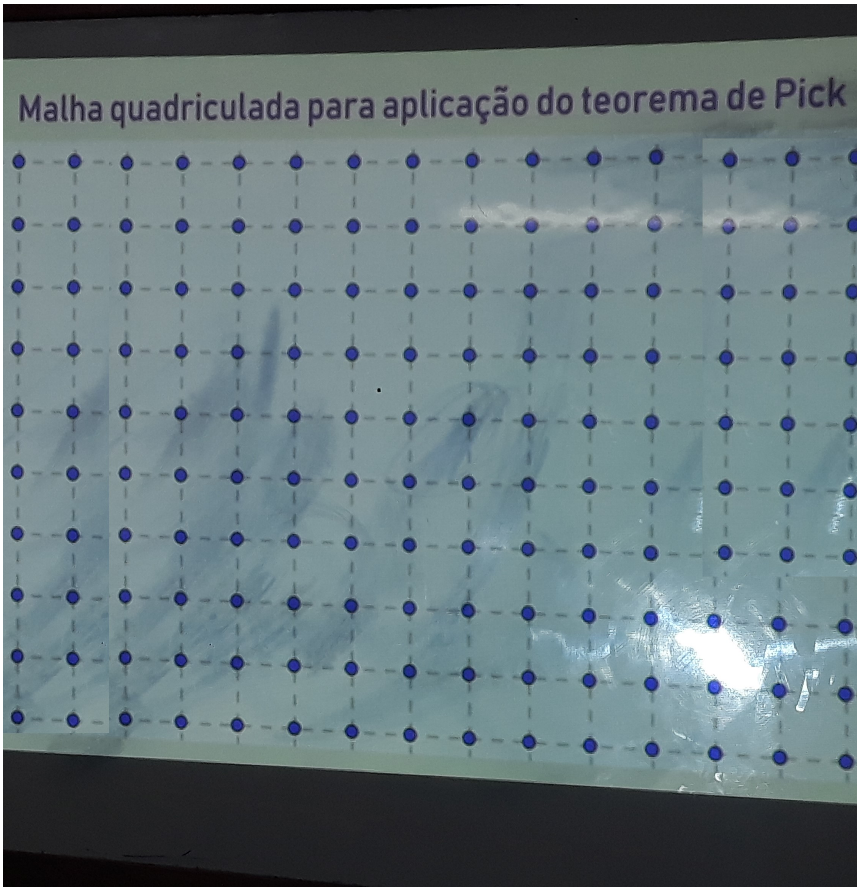



Figura 4.5: Malha quadriculada

Alguns polígonos desenhados no geogebra.

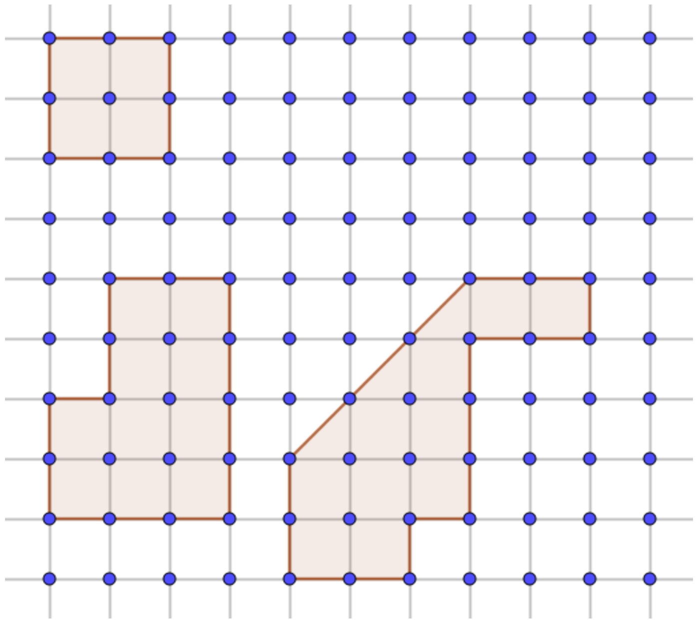


Figura 4.6: Alguns exemplos de figuras planas feitas no geogebra

Então foi aproveitado o momento para discorrer um pouco da história de George Alexander Pick. E também foi o momento para explicar como os matemáticos antigos faziam o cálculo de algumas figuras planas. Também foi mostrado algumas definições importantes tais como nós, nós da borda e nós internos, relacionados a malha apresentada e que isso serviria posteriormente para entender melhor o resultado do trabalho de George Alexander Pick.

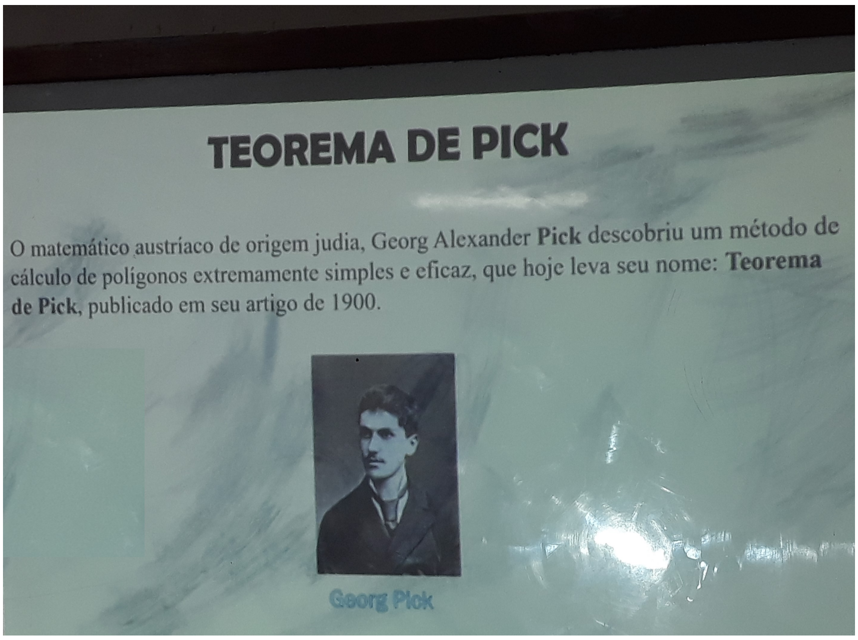



Figura 4.7: Um pouco da história de Pick

- Nós: será cada ponto de interseção da malha, que representa os vértices de cada quadrado da malha;
- Nós internos: **I** nós que fazem parte do interior da figura;
- Nós da borda: **B** nós que fazem parte do contorno da figura.

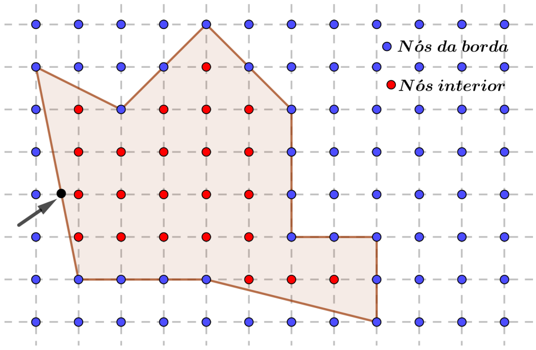



Figura 4.8: Nós na malha quadriculada

Além das defininções apresentadas, também foi orientado como fazer a contagem dos nós na figuras, e enfatizado o que não poderia ser contado como nó da borda e nem nó do interior da figura na malha. Na figura 4.8 a seta indica o que não pode ser contado como nó da figura na malha.

Posteriormente foi apresentado o Teorema de Pick.

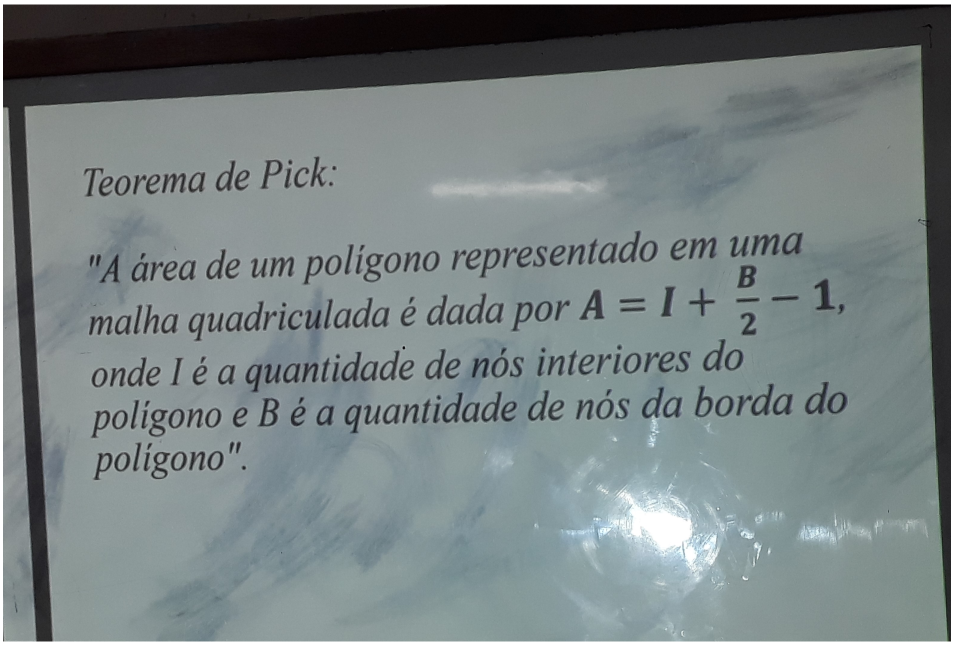



Figura 4.9: Teorema de Pick

*"A área de um polígono representado em uma malha quadriculada é B dada por* $A = I + \frac{B}{2} - 1$*, onde I é a quantidade de nós interiores do polígono e B é a quantidade de nós da borda do polígono".*

Ficaram muito entusiasmados com essa fórmula, começaram a perguntar se poderia ser usado para qualquer figura plana. Então foi esclarecido que só poderia ser usado para polígonos simples desenhados em malhas como aquelas apresentadas para eles, e cujos vértices coincidissem com os nós da malha quadriculada.

Aproveitou-se o momento para mostrar exemplos de polígonos simple e não simples.

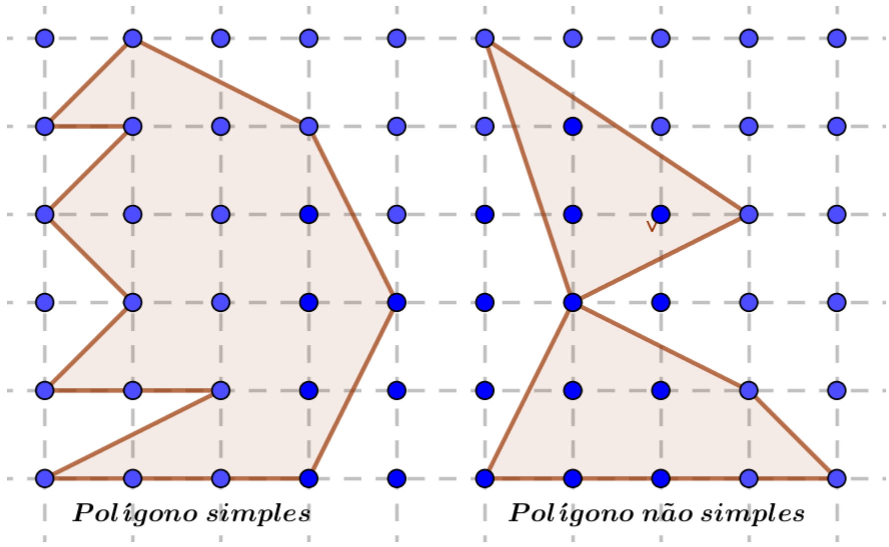
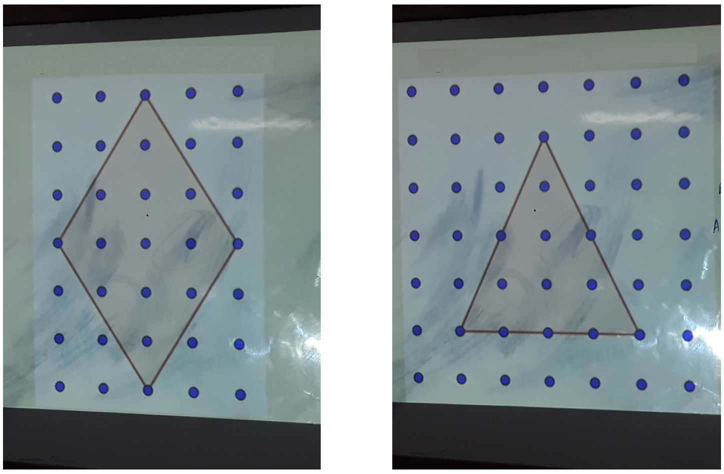



Figura 4.10: Polígonos simples e não simples

Logo depois foram projetadas algumas figuras para a aplicação da fórmula de PICK.



(a) (b)

Figura 4.11: Exemplos de polígonos na malha quadriculada

**Aula 2**

Foi apresentado o mesmo procedimento realizado na turma A, daí perceberam que teriam que saber mais de uma fórmula em alguns casos, e disseram que a fórmula de PICK era mais interessante, porque poderia ser usado em muitos casos.

## 4.2 Procedimentos realizados nas turmas A e B

**Aula 3**

Depois das turmas terem passado por esses procedimentos em relação ao cálculo de figuras planas, foi proposto uma outra atividade para as turmas fazerem. Agora já de conhecimento da fórmula de PICK, pediu-se para escolherem qual estratégia seria melhor para a realização dos cálculos na atividade a desenvolver.

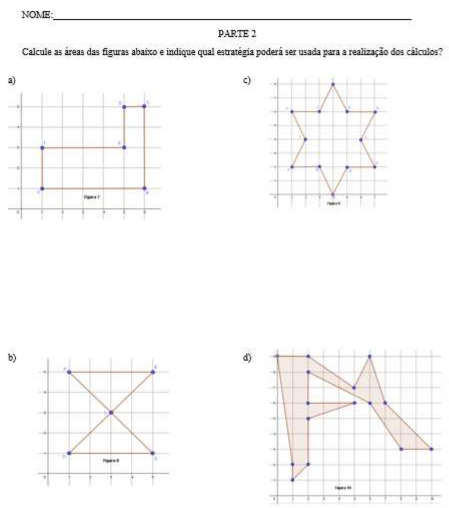
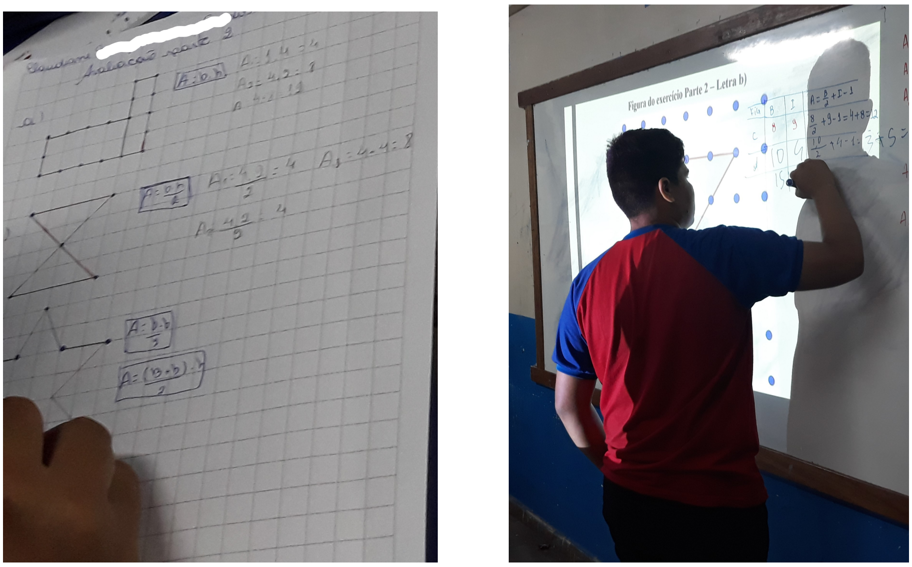



Figura 4.12: Atividade parte 2

De imediato disseram que poderiam usar a fórmula de PICK, outros disseram que daria também para fazer a decomposição das figuras e posteriormente aplicarem as fórmulas ultilizadas na atividade anterior. Então começaram a resolver a atividade proposta, a maioria preferiu aplicar mesmo foi a fórmula de PICK, e ficaram muito animados de como a figura do item d) pode ser resolvido com tal facilidade, pois seria muito complicado ter que decompor a figura de depois fazer a aplicação das fórmulas.

Essa atividade serviu para reforçar a ideia de que a fórmula de PICK pode ser utilizada apenas para polígonos simples. Os alunos notaram que os cálculos da figura do item b) no método de decomposição de figuras deu um valor e na fórmula de PICK deu outro.



(a) (b)

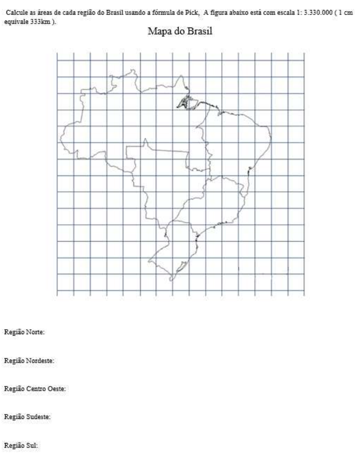
Figura 4.13: Exemplos de polígonos na malha quadriculada

**Aula 4 (Aplicação da fórmula de Pick)**

Foi realizado uma aplicação da fórmula de PICK para a calcular as regiões do estado brasileiro, usando o mapa do Brasil, essa atividade foi realizada em dupla. Muitos ficaram surpresos e diziam que seria muito difícil essa tarefa, e questionaram se seria encontrado um valor exato de cada região. Foi explicado que não, que seria uma valor aproximado, mas que é um resultado de grande valia, por exemplo, para o ramo da geografia.

Então foi apresentado alguns exemplos e começaram a mudar de ideia, perceberam a praticidade da fórmula de PICK e sua importância para aquele exercício.

Foi distribuido a atividade da figura 4.2


Calcule as áreas de cada região do Brasil usando a fórmula de Pick, A figura abaixo está com escala 1: 3.330.000 ( 1 cm equivale 333km ).

Mapa do Brasil

Região Norte:

Região Nordeste:

Região Centro Oeste:

Região Sudeste:

Região Sul:

Figura 4.14: Atividade parte 3

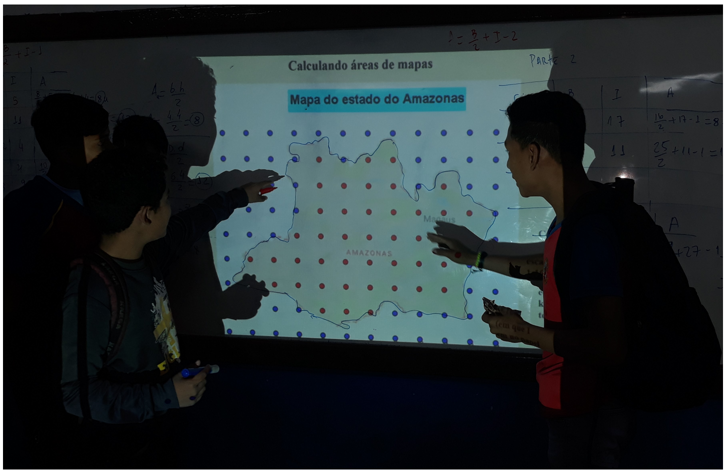



Figura 4.15: Alunos analisando como aplicar a fórmula de PICK no mapa dado

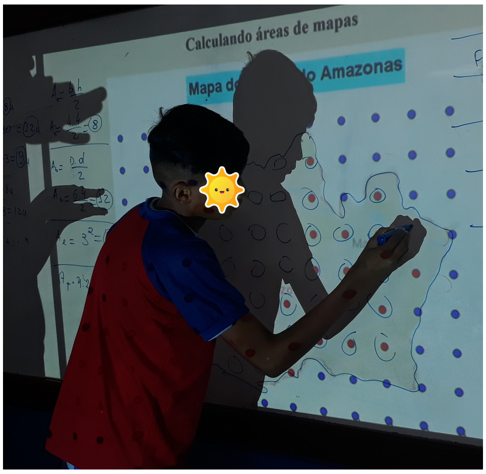



Figura 4.16: Aluno fazendo a contagem dos nós para aplicação da fórmula de pick

Muitos realizaram a atividade e perguntaram se o fato de aplicar a fórmula de PICK já teria acabado o exercício. Então foi explicado que faltava ser passado para o tamanho real, pois ali estava uma imagem em escala que para ser obter o valor real ou aproximado de cada região precisaria ser feito algumas contas a mais. Se a escala for 1:3.330.000 significa que cada 1cm corresponde a 333km, ou seja, cada quadrado da malha quadriculada possui área equivalente a $110.889km^2$ na escala dada. Assim, os alunos deveriam multiplicar o valor encontrado utilizando a fórmula de PICK pelo quadrado do valor da escala de seu mapa.

**Aula 5**

Foi pedido para que pesquisassem os valores de cada região do Brasil, então fizessem as devidas comparações de cada região. Perceberam que os resultados não eram iguais, então perguntaram o porquê de ter acontecido aquilo. Foi explicado que o cálculo é aproximado, que no entanto não deveriam ser descartados, pois tinha grande utilidade nos estudos de cálculo de áreas de grandes regiões.

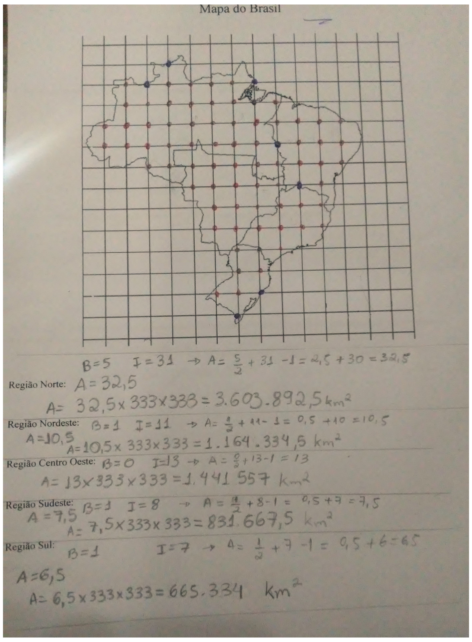



Figura 4.17: Atividade realizada por um aluno da turma

### Aula 6

Depois de realizada as etapas anteriores pedimos para os alunos realizarem mais uma atividade sobre área de figuras planas, mas agora obrigatoriamente eles teriam que usar os dois métodos já ensinados.

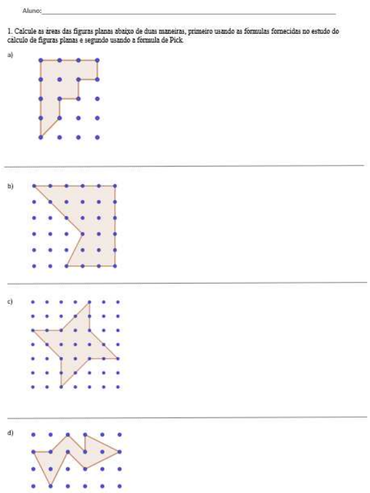



Figura 4.18: Atividade parte final

Essa atividade foi realizada com facilidade, tanto na aplição das fórmulas tradicionais de áreas de figuras planas como usando a fórmula de PICK. O interessante é que eles realizavam a tarefa e queriam ver com certeza que os resultados seriam iguais.

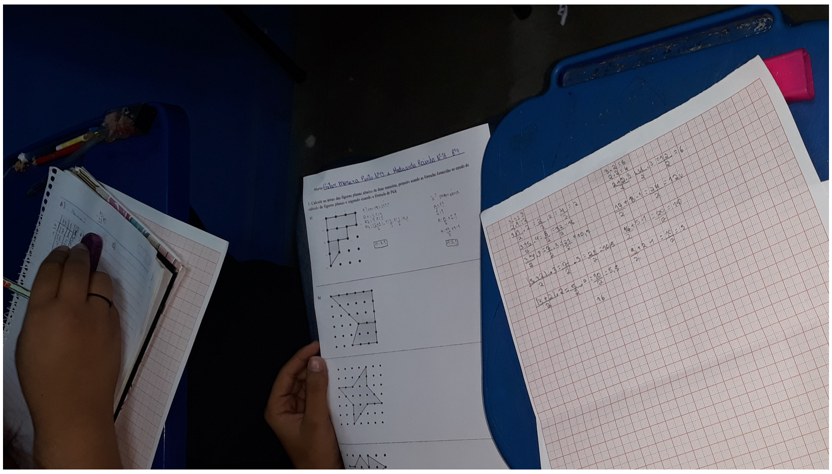


Figura 4.19: Aluno resolvendo a atividade usando as fórmulas tradicionais e a fórmula de pick

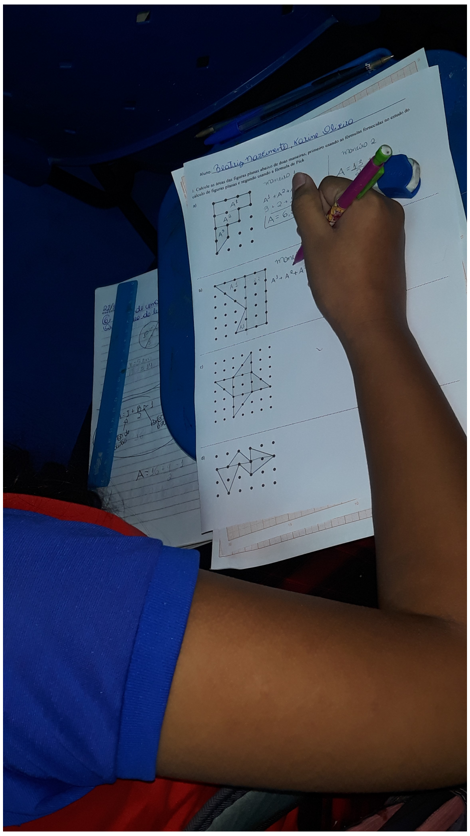


Figura 4.20: Aluno resolvendo a atividade usando as fórmulas tradicionais e a fórmula de pick

## 4.3 Avaliação da Metodologia

**Aula 6**

Foi realizado um questionário com três perguntas: Qual procedimento melhor de ser aplicado? Que relevância teve a atividade com o cálculo de áreas usando o mapa do Brasil? e Você achou a fórmula de PICK interessante?

Tivemos muitas respostas parecidas, mas o interessante foi notar que na turma A, na qual foi apresentado primeiro o uso das fórmulas tradicionais no cálculo de figuras planas, a maioria afirmou que teria sido melhor apresentar a fórmula de PICK, pois assim eles aprenderiam mais.

Abaixo exibiremos algumas respostas da pesquisa realizada.

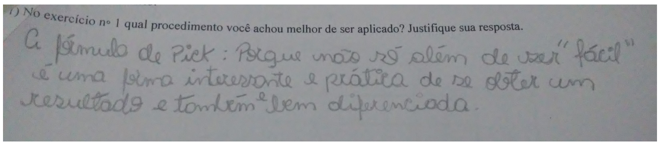

1) No exercício nº 1 qual procedimento você achou melhor de ser aplicado? Justifique sua resposta.
A fórmula de Pick: Porque não só além de ser "fácil" é uma forma interessante e prática de se obter um resultado e também é bem diferenciada.

Figura 4.21: Resposta sobre a metodogia aplicada nas turmas

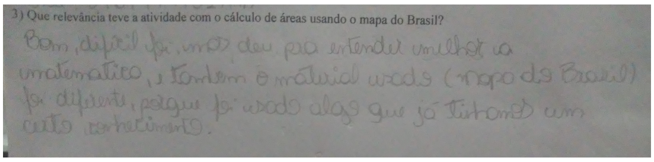

3) Que relevância teve a atividade com o cálculo de áreas usando o mapa do Brasil?
Bem, difícil foi, mas deu pra entender melhor a matemática, e também o material usado (mapa do Brasil) foi diferente, porque foi usado algo que já tínhamos um certo conhecimento.

Figura 4.22: Resposta sobre a metodogia aplicada nas turmas

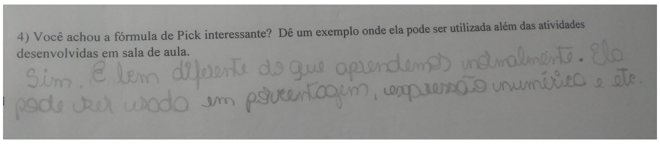

4) Você achou a fórmula de Pick interessante? Dê um exemplo onde ela pode ser utilizada além das atividades desenvolvidas em sala de aula.
Sim. É bem diferente do que aprendemos normalmente. Ela pode ser usada em porcentagem, expressão numérica e etc.

Figura 4.23: Resposta sobre a metodogia aplicada nas turmas

De modo geral, foi percebido que essa maneira de resolução sobre cálculo de áreas de figuras planas teve boa aceitação nas duas turmas.

Além das respostas exibidas anteriormente temos também as seguintes: "na fórmula de PICK não precisamos decorar muitas fórmulas", "as fórmulas tracionais são muitas, fica mais complicada para decorar", "as fórmulas tradicionais são mais chatas", "a fórmula de PICK é melhor porque é única", dentre outras respostas.

Sobre o cálculo de áreas das regiões do estado brasileiro afirmaram que iriam encontrar muitas dificuldades para realizar aqueles cálculos, pois só tinham em mente as fórmulas tradicionais das áreas de figuras planas, e que iam sugerir para o professor de geografia aquele método.

Relacionado a relevância disseram que foi muito estimulador para o aprendizado do ensino de geometria plana, e que iriam tentar aplicar a fórmula de PICK o máximo que eles pudessem no cotidiano deles. Houve um aluno que perguntou se a única aplicação seria em área de regiões de estados, então aproveitamos o momento pra mencionar que teria diversas aplicações e que também poderia ser usado na medicina no tratamento de lesões da pele, por exemplo.

# Capítulo 5

# Considerações Finais

No presente trabalho foi proposto uma abordagem diferenciada na área da geometria plana. Tendo como objetivo avaliar a importância de se criar abordagens inovadoras que facilitem o processo ensino-aprendizagem da Geometria, tendo como centro o cálculo de áreas de polígonos simples. Tivemos resultados bastantes positivos, sendo que o conteúdo não fazia parte da ementa da série, mas que serviu como revisão e para a fixação do conhecimento sobre geometria plana. Dessa forma tivemos um significativo envolvimento dos alunos nas atividades propostas, no qual observaram que poderia ter aplicabilidade no dia a dia.

Por meio das atividades realizadas, percebemos que os alunos aprenderam uma forma nova de solucionar problemas que envolvam áreas de polígonos simples desenhados numa malha quadriculada cujos vértices coincidem com os encontros das retas dessa malha, utilizando o Teorema de Pick, ficando evidente que quando os polígonos não são regulares, a metodologia pode ser aplicada com facilidade, pois nesses casos não há fórmulas específicas.

Foram encontrados algumas dificuldades relacionados à falta de pré-requisitos dos alunos, o que no início dificultou a resolução das atividades, haja visto que já foi mencionado que se trata de uma escola situada em uma comunidade carente da cidade de Manaus, e onde a escola sofre com a falta de estrutura, tanto física como nos recursos pedagógicos e didáticos.

Nessa percepção foi sugerido aos alunos o manuseio do geogebra online, uma ferramenta tecnológica que pode auxiliar no cálculo de figuras planas, e também por ser um software livre.

A fórmula de Pick foi apresentada para o cálculo de áreas de polígonos simples, juntamente com as fórmulas mais usuais para esses cálculos, dessa maneira ampliando o conhecimento de aprendizagem desse conteúdo. Contextualizando a aplicabilidade do teorema, podemos trazer a realidade dos alunos para a sala de aula, mostrando cálculos de áreas de figuras que sejam familiares a eles. Constatamos ainda que, a aplicação do Teorema de Pick tornou o ensino mais agradavél, e sendo assim favoreceu a aprendizagem.

É esperado assim, nessa proposta de aprendizagem, não apenas incentivar práticas pedagógicas diferenciadas e motivadoras mas também possibilitar discussões relacionadas ao ensino da Matemática. Nesse sentido desejamos contribuir para que se desperte no aluno uma grande admiração e compreensão do largo alcance da Matemática, estimulando seu interesse pela disciplina.

# Referências Bibliográficas


[1] ÁVILA, G. *Várias faces da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2007.

[2] BARROS, A.L.S. ; ROCHA, C. *O Uso do Geoplano como material didático nas aulas de Geometria*, vol. 8. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - ENEM, 2004.

[3] BERLINGHOFF, W. P. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. Willian P. Berlinghoff, Fernando Q. Gouveia; Tradução Elza Gomide e Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2008.

[4] COUTINHO, C. P., ET AL. *Investigação-acção: metodologia preferencial nas práticas educativas*. Instituto Superior Politécnico Gaya (ISPGaya), 2009.

[5] D AMBRÓSIO, U. *Desafios da Educação Matemática no novo milênio*. Educação Matemática em Revista, 2001.

[6] EVES, H. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: geometria*. Atual Editora, 1992.

[7] LIMA, E. L. D. *Medida e Forma em Geometria*. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[8] LINTZ, R. G. História de matemática–blumenau. *Ed. Da FURB* (1999).

[9] MACHADO, R. M. *Mini-curso-explorando o geoplano*, vol. 11. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em:< http://www.bienasbm.ufba.br M, 2006.

[10] PCN. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Ministério da educação*. Brasilía, 1997.

[11] PESCO, D. U. ; ARNAUT, R. G. T. *Geometria Básica*. 2.ed. - Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

[12] PICK, G. *Geometrisches zur Zahlenhre (Geometric results on number theory)*. Naturwissenschaft Zeitschrift Lotos, Prague, 1900.

[13] RODRIGUES, I. D. M. *Áreas de Figuras Planas e Teorema de Pick: Uma Abordagem Diferenciada Para Alunos do 6Â° ano do Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado - UFAM, 2014.

[14] RUPOLO, D. *Estudos Das Aplicações Do Método De Monte Carlo À Determinação Da Área De Figuras Planas Não-Regulares*. Trabalho de Conclusão de Curso].Universidade do Estado de Mato Grosso, Curso de Matemática, Departamento de Matemática, 2010.

[15] SABBATIELLO, E. *El Geoplano: Un recurso didáctico para la enseñanza dinámica de la geometría plana elemental-Su aplicación e utilización en la escuela primaria*. Edicciones G. ªD.Y.P., Buenos Aires, 1967.

[16] STEINHAUS, H. *Mathematical snapshots*. Courier Corporation, 1999.