UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JONES PAULINO DE SOUZA

ANÁLISE DE ERROS EM CÁLCULO:
METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO APLICADA COM ALUNOS DA UFOPA

SANTARÉM-PA
2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Setor de Processamento Técnico da Divisão de Biblioteca da UFOPACatalogação de Publicação na Fonte. UFOPA - Biblioteca Central Ruy Barata

Souza, Jones Paulino de.
   Análise de erros em cálculo: metodologia de investigação aplicada com alunos da UFOPA / Jones Paulino de Souza. - Santarém, 2019.
   87fl.

   Universidade Federal do Oeste do Pará, Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências da Educação, Mestrado em Matemática.
   Orientador: Mário Tanaka Filho.

   1. Erro. 2. Cálculo diferencial e integral. 3. Análise de erros. I. Tanaka Filho, Mário. II. Título.

UFOPA-Ruy Barata   CDD 23.ed. 515.33

Elaborado por Selma M. de Souza Duarte - CRB-2/1096

JONES PAULINO DE SOUZA

ANÁLISE DE ERROS EM CÁLCULO:
METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO APLICADA COM ALUNOS DA UFOPA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Oeste do Pará como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mário Tanaka Filho

SANTARÉM-PA
2019

JONES PAULINO DE SOUZA

ANÁLISE DE ERROS EM CÁLCULO:
METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO APLICADA COM ALUNOS DA UFOPA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Oeste do Pará como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em, 12 de abril de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Mário Tanaka Filho
Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA)

Prof. Dr. Edilan de Sant'Ana Quaresma
Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA)

Prof. Dr. Lenilson Moreira Araujo
Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA)

SANTARÉM-PA
2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao Deus Trino, Pai, Filho e Espírito Santo, a minha esposa, aos meus pais e aos meus filhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela graça concedida.

À minha esposa Nilcivane e aos meus filhos, Jéssica e Nícolas.

Aos meus pais, Pr. Jonas Melo de Souza (in memorian) e D. Maria José Paulino.

Aos meus irmãos e parentes.

Aos professores e colegas da turma Profmat 2016.

E a todos aqueles que, direta e indiretamente, me ajudaram nessa jornada.

“Eu descobri mais outra coisa neste mundo: nem sempre são os corredores mais velozes que ganham as corridas; nem sempre são os soldados mais valentes que ganham as batalhas. (...). Notei também que as pessoas mais capazes nem sempre alcançam altas posições. Tudo depende da sorte e da ocasião.”

Eclesiastes 9.11 (Bíblia Sagrada NTLH)

RESUMO

O trabalho aqui apresentado objetivou investigar os erros cometidos por acadêmicos do curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, de Licenciatura Integrada em Biologia e Química, e de professores em formação continuada do Profmat 2018 da UFOPA, na cidade de Santarém durante o segundo semestre letivo de 2018 na solução de um teste de Cálculo. A investigação baseou-se na análise dos erros de Cury (2007), uma metodologia de investigação que utiliza as três fases da análise de conteúdo de Bardin (2002): a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados. Seguindo essas fases, procurou-se classificar e analisar os erros cometidos por esse grupo de alunos, apresentar os resultados obtidos e discutir as possíveis dificuldades dos alunos em itens que seguem padrões de órgãos nacionais de elaboração. As respostas apresentadas no teste, as opiniões dadas nos questionários de alunos e professores envolvidos na pesquisa mostraram que as dificuldades de assimilação do Cálculo permanecem e relacionados a conhecimentos de matemática básica, como na simplificação de frações algébricas e na dificuldade de representar um problema algebricamente, assim como em conceitos básicos da disciplina (limites, derivadas e integrais). Desta forma, a análise de erros permitiu detectar, pelas respostas dadas no teste e nos questionários, as principais dificuldades dos alunos em Cálculo.

Palavras-chave: Erro, Cálculo Diferencial e Integral, Análise de Erros.

ABSTRACT

The present work aimed to investigate the errors committed by academics of the Integrated Degree in Mathematics and Physics, of Integrated Degree in Biology and Chemistry, and of professors in continuous formation of Profmat 2018 of UFOPA, in the city of Santarem during the second semester of 2018 in the solution of a Calculation test. The research was based on the analysis of the errors of Cury (2007), a research methodology that uses the three phases of the content analysis of Bardin (2002): the pre-analysis, the exploitation of the material and the treatment of the results. Following these phases, we tried to classify and analyze the errors committed by this group of students, present the results obtained and discuss the possible difficulties of students in items that follow the standards of national drafting bodies. The answers presented in the test, the opinions given in the questionnaires of students and teachers involved in the research showed that the difficulties of assimilation of the Calculus remain and related to knowledge of basic mathematics, as in the simplification of algebraic fractions and in the difficulty of representing a problem algebrically, as well as in basic concepts of the discipline (limits, derivatives and integrals). In this way, the analysis of errors allowed to detect, by the answers given in the test and in the questionnaires, the main difficulties of the students in Calculus.

Key-words: Error, Differential and Integral Calculus, Error Analysis.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

ADES – Avaliação Discente da Educação Superior

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CFI – Centro de Formação Interdisciplinar

CNE – Conselho Nacional de Educação

ENADE – Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

ICED – Instituto de Ciências da Educação

IME – Instituto de Matemática e Estatística

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Estatísticas Anísio Teixeira

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação

MEC – Ministério da Educação

PARFOR – Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica

PCE – Programa de Ciência Exatas

PPC – Projeto Pedagógico de Curso

PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROPPIT – Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação Tecnológica

PUCPR - Pontifícia Universidade Católica do Paraná

UFF – Universidade Federal Fluminense

UFOPA – Universidade Federal do Oeste do Pará

UFPA – Universidade Federal do Pará

UFRA – Universidade Federal Rural da Amazônia

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

USP – Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em Educação, de acordo com Feltes (2007), muitas vezes, o erro é visto como algo ruim, algo mau, algo a ser evitado e punido. Existem até aqueles que dizem que não se pode permitir que o erro aconteça. O que demonstra, com este tipo de pensamento, que escola está preocupada com o plano do fazer, da eficácia diante da transmissão e aquisição do conhecimento. No entanto para Morin apud Feltes (2007), o erro deve ser tratado como um problema, mas um problema de ordem primária, prioritário, sobre o qual cabe aos pesquisadores pensar sobre sua originalidade.

Sabe-se que a história da humanidade evoluiu através de erros. Ou seja, que no processo da construção do conhecimento, o mais importante não é corrigir incansavelmente os erros, comparando com o número de acertos, mas saber que existem aspectos a serem corrigidos, melhorados e outros que até devem ser mantidos, pois em muitas situações de sala de aula o que está certo aqui pode estar errado acolá.

De acordo com Cury (2007), o importante não é o acerto ou o erro em si, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem. Ou seja, procurar entender as formas como o aluno produziu a resposta, certa ou errada, pode contribuir para a construção de novos patamares de conhecimento, trazendo benefícios a alunos e professores.

Assim, a análise das respostas dos alunos, ao estudar os erros, procurando entender melhor sua causa, pode auxiliar os alunos em suas dificuldades, e os professores e o sistema de ensino na compreensão e diminuição das repetências e evasões escolares. Segundo Popper apud Cury (2014), "todos podemos aprender, e aprendemos, com nossos erros".

Em seu trabalho de pesquisa sobre Erros em Potenciação e Radiciação, Feltes (2007) verificou que os alunos têm dificuldade em compreender as definições e aplicar as propriedades, como também não sabem analisar seu erro quando o professor o destaca ou quando lhe questiona para que o aponte na resolução. Dando o parecer que o educando tem dificuldade de refletir sobre sua aprendizagem. Para Azevedo e Onuchic apud Feltes (2007), "a conseqüência desse processo é o surgimento de obstáculos à compreensão e a formalização de outros conteúdos matemáticos".

A motivação para este trabalho, em Análise de Erros, surgiu por sugestão do professor Dr. Mário Tanaka Filho e, desta forma, este autor se propôs a lançar investigações sobre o tema começando pelo livro da professora Helena Cury, "*Análise de Erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos*". Em seguida, para a base do projeto de pesquisa pretendeu-se tomar como problema de partida a seguinte indagação: “As dificuldades em potenciação dos alunos a serem pesquisados são as mesmas apresentadas pelos alunos pesquisados no trabalho da Professora Rejane Feltes sobre Erros em Potenciação? De modo mais específico, perguntou-se: A freqüência dos erros destacados na resolução de exercícios sobre potenciação pelos alunos de 8º e 9º anos tem um percentual muito diferente? A visão dos professores pesquisados com relação aos erros dos alunos nesses conteúdos e suas opiniões sobre as causas dos erros diferem muito dos dados que serão objeto desta pesquisa? A metodologia da análise de erros pode ser considerada uma ferramenta útil e necessária para o professor de Matemática nos dias atuais?

Como todo trabalho de pesquisa, este passou por várias transformações durante a sua construção. Inicialmente, a proposta era totalmente focada na análise e classificação de erros em Potenciação, e pretendia-se discutir algumas possibilidades de classificação de erros baseadas, principalmente, nas idéias de Feltes (2007). No entanto, após sugestão do professor orientador, foi proposto aplicar a análise de erros em questões envolvendo conteúdos da disciplina de Cálculo de função com uma variável. Ou seja, pretendeu-se utilizar a metodologia da análise de erros para se averiguar os tipos de erros cometidos por acadêmicos na solução de questões de Cálculo através de um teste avaliativo de conhecimentos de tópicos da disciplina. A intenção foi usar a Metodologia de Análise de Erros como metodologia de investigação que, segundo Costa (1988), “pode oferecer pistas ricas para o redimensionamento de uma prática pedagógica que seja mais comprometida com as nossas crianças brasileiras”, e porque não dizer “com os nossos alunos”.

Acrescenta-se a isso o fato observado em um levantamento sobre publicações (artigos, teses de mestrado e doutorado), que consta no artigo de Cury (2014), mapeando artigos publicados no Brasil referente a erros, dificuldades ou obstáculos no ensino ou aprendizagem de Matemática. Esse mapeamento está apresentado na Tabela 1 numa distribuição em períodos anuais.

Tabela 1 – Distribuição de artigos publicados por ano referente a erros, e dificuldades ou obstáculos no ensino ou aprendizagem de Matemática

Ano	Nº	%
1991 – 1995	6	2
1996 – 2000	14	4
2001 – 2005	12	3
2006 – 2010	144	39
2011 – 2014	194	52
Total	370	100

Fonte: (CURY, 2014)

Nele nota-se que, a partir de 2006, o número de publicações sobre erros, dificuldades ou obstáculos já representava mais da metade dos artigos publicados, e que o número de artigos publicados nessa temática, após esse período, só tem crescido.

Isso mostra uma preocupação crescente de pesquisadores com o estado atual do ensino e da aprendizagem de Matemática. No entanto, de acordo com essa pesquisa, o percentual de artigos que tratam do conteúdo relacionado a Funções e Cálculo representa apenas 10% das linhas de pesquisas. Veja a Tabela 2:

Tabela 2 – Distribuição de artigos publicados por conteúdo matemático abordado

Conteúdo	Nº	%
Aritmética e Álgebra	89	24
Funções e Cálculo	37	10
Geometria e Trigonometria	49	13
Probabilidade e Estatística	41	11
Variado	154	42
Total	370	100

Fonte: (CURY, 2014)

A importância de se abordar esse tema na dissertação desse mestrado está em que o Cálculo é uma das disciplinas básicas nos cursos superiores na área de Ciências Exatas. Nesses cursos, o Cálculo é uma das disciplinas tradicionais e que tem preservado sua estrutura original, sendo que, alguns casos, o seu ensino tem sido explorado com os mais variados recursos didáticos: livros, calculadoras gráficas, computadores, vídeos, artigos, materiais concretos, entre outros. Alguns professores se utilizam desses recursos em suas aulas com o objetivo de levar o aluno a ter a atitude de questionar, de procurar por diversos tipos de representações (numérica, gráfica e analítica) de um problema, e ter a capacidade de apresentar argumentos diferentes durante a execução de uma atividade. Contudo, o que se observa é que alguns erros continuam freqüentes entre os alunos quando da solução de derivadas e integrais (MARIANI, 2005).

Esta dissertação, portanto, tem como objetivo classificar e analisar os erros cometidos por um grupo de alunos em questões que envolvam tópicos de Cálculo, apresentar os resultados obtidos dessa análise, e discutir as possíveis dificuldades dos alunos no assunto da matemática em destaque. Para essa discussão, dividiu-se este trabalho em cinco seções observando os seguintes pontos: a introdução na qual se faz um breve relato sobre o tratamento do erro em educação, da análise de erros e sua utilidade e da intenção da pesquisa.

Na segunda seção é apresentada a fundamentação teórica da pesquisa sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, tópicos da análise de conteúdo, a utilidade e as pesquisas em análise de erros em matemática, e os cuidados na elaboração de itens para uma boa verificação da aprendizagem de uma determinada habilidade e/ou competência.

Na seção três descrevem-se os aspectos metodológicos da dissertação, quais sejam: abordagem da pesquisa, o público alvo, os objetivos, os instrumentos de coleta de dados e a descrição dos procedimentos executados.

A quarta seção aborda o uso da análise de erros, baseada na metodologia da análise de conteúdo, nos itens respondidos pelos acadêmicos, a categoria de erros utilizada, e a análise dos resultados da pesquisa.

Na quinta e última seção é apresentada as considerações finais sobre esse trabalho, considerando as dificuldades de sua realização, as reflexões feitas, o aprendizado obtido pelo pesquisador, a relação com outros trabalhos já realizados, além dos possíveis desdobramentos para futuras pesquisas.

Pretende-se com este trabalho levar estudantes e professores a refletir sobre suas dificuldades, questionar seus raciocínios, para desenvolver atitudes críticas, importantes para a vida acadêmica, para o convívio social e para enfrentar os problemas do cotidiano.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Compreender as causas dos erros, parafraseando Feltes (2007), é algo que deve fazer parte da realidade de uma comunidade acadêmica. Assim, estudar os erros e entender suas causas em detalhes, pode auxiliar os alunos em suas dificuldades, os professores e o sistema de ensino, na compreensão e diminuição das repetências e evasões escolares. Pois, segundo Popper apud Cury (2014), "todos podemos aprender, e aprendemos, com nossos erros". Com esse entendimento, apresenta-se nesta seção a fundamentação teórica dos temas chaves desse trabalho com base nas fontes citadas a seguir e em outras em menor proporção: o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, com base nos trabalhos dos pesquisadores Ms. Marcos Raad e Dr. Wanderley Rezende; a metodologia de análise de conteúdo, baseado na pesquisa do Professor Roque Moraes e no livro de Lawrence Bardin; a Análise de Erros segundo o livro da professora Dra. Helena Noronha Cury[1]; e a elaboração de itens conforme o guia do Inep sobre elaboração de itens.

2.1 Relato Histórico do Ensino de Cálculo

O Cálculo, para Rezende (2003), em sua pesquisa baseada no livro de Morris Kline e nas investigações de Machado, se constituiu efetivamente como um domínio próprio do conhecimento matemático no século XVII. E diz que historicamente:

> "antes desse século o Calculo foi geometria, foi aritmética, foi filosofia natural, mas não foi propriamente Cálculo Diferencial e Integral; e, depois do século XVIII, ele se confunde com o surgimento da Análise, momento em que os matemáticos estão mais preocupados com as questões relativas à fundamentação dos conceitos básicos do que com os problemas e métodos analíticos que de certa forma o constituíram." (REZENDE, 2003)

Morris Kline apud Rezende (2003) diz que o Cálculo é "a criação matemática mais importante" do século XVII tanto para o desenvolvimento das ciências naturais quanto da própria Matemática. Rezende metaforiza que "se a Geometria e a Aritmética representam a base, isto é, os pés, do corpo do conhecimento matemático, o Cálculo representa a sua 'espinha dorsal". E afirma que "historicamente o Cálculo tomou emprestado da Geometria e da Aritmética, assim como da Física, alguns conceitos e problemas fundamentais e desenvolveu novos instrumentos para solucioná-los, retornando sempre aos "conceitos envolvidos', em um nível superior de significação."

[1] Helena Noronha Cury – Professora do Centro Universitário Franciscano no curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

Rezende indaga: “Que problemas motivaram a construção das idéias e dos conceitos básicos do Cálculo?” E Morris Kline apud Rezende (2003) responde: quatro são as classes de problemas: os relacionados a movimentos (determinação de trajetórias e de velocidades instantâneas); os de determinação de tangentes a várias curvas; os de máximos e mínimos; os de comprimentos de curvas e de áreas e volumes de figuras limitadas. Já Machado apud Rezende (2003) os enquadra em duas categorias: o problema da variabilidade e o problema da unidade na multiplicidade. Dizendo que o que motivou essencialmente a construção da noção de derivada foi o problema da variabilidade.

Assim, afirma Rezende (2003), para o cálculo de velocidades instantâneas, de tangentes, de valores máximos e mínimos de funções reais, e para a solução de outros problemas do âmbito do cálculo diferencial, um instrumento fundamental é a derivada. E para os problemas de categoria “unidade na multiplicidade”, como cálculo de comprimentos, de áreas e de volumes de configurações curvilíneas, a noção de integral é o instrumento a ser utilizado. Ressaltando que nesse processo de clarificação e fundamentação das idéias básicas do Cálculo teve um papel fundamental o desenvolvimento do conceito de função, do conceito de número; a operação de limites; as séries infinitas e a noção de infinito.

Segundo Rezende (2003), os conceitos fundamentais do Cálculo são a diferenciação e a integração. Ou seja, os problemas de “variabilidade’ e “multiplicidade” só se resolveram completamente através da construção das operações de diferenciação e integração, e da relação estabelecida entre elas através do Teorema Fundamental do Cálculo, que levou, no século XVII, o Cálculo a se efetivar como domínio do conhecimento matemático. De acordo este pesquisador foi Torricelli quem o descobriu, James Gregory quem fez a primeira demonstração, e foi com Newton e Leibniz que o teorema funcionou como elo fundamental entre o Cálculo Diferencial e o Integral.

2.1.1 A cultura de ensino do Cálculo

O matemático Euler, por volta de 1750, de acordo com Alvarenga et all (2016), já demonstrava uma preocupação com a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, quando escreveu um texto de “pré-cálculo”, enfatizando a idéia de função. Mostrando que não só ele, mas os matemáticos da época tinham consciência que não seria tão simples enfrentar diretamente os conteúdos de Cálculo. Ainda de acordo com este pesquisador, há uma insatisfação com a aprendizagem e o ensino de Cálculo, tanto a nível nacional como em outros países. Pagani e Allevato apud Alvarenga et all (2016) diz que há uma dificuldade nacional, como também internacional nesse processo de ensino-aprendizagem da disciplina, pontuando o trabalho de Rasmussen, Marrongellee e Borba (2014).

A causa dessas dificuldades, para alguns professores, é a falta de base matemática dos alunos quando chegam à universidade. Em seu trabalho sobre a natureza epistemológica, a gênese e o desenvolvimento dos conteúdos ao longo da história da ciência Rezende afirma:

> acreditamos que grande parte das dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo é essencialmente de natureza epistemológica. Pode-se dizer ainda mais: as raízes do problema estão além dos métodos e das técnicas, sendo inclusive anteriores ao próprio espaço-tempo local do ensino de Cálculo (REZENDE, 2003).

Barufi apud Raad (2012) notou que, ao analisar os livros de Cálculo utilizados entre os anos 1945 a 1997, os alunos não tinham o hábito de estudar Cálculo por livros. Os livros eram bons, mas pouco servia aos estudantes. Ensejando com isso que na cultura do ensino de Cálculo não existe o elemento estudar pelo livro, com isso Raad afirma que

> não podemos creditar aos livros as dificuldades que surgem para os alunos durante o processo de aprendizagem do Cálculo. Dessa forma, as dificuldades dos alunos na compreensão do CDI, devem-se a causas epistemológicas, ou então a fatores didáticos, ou a elementos desconhecidos pelo meio acadêmico. (RAAD, 2012)

Em sua pesquisa, Raad (2012) identifica como elementos de cultura do ensino de Cálculo o rigor, os pré-requisitos, as aplicações da matemática, a sequência didática função-limite-derivada-integral, a ênfase no treinamento e a reprovação. Ou seja, esses componentes fizeram (e fazem) parte do processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina, o que pode ser confirmado com as considerações feitas sobre cada um desses elementos:

- Reprovação: a disciplina tinha naquela década um elevado índice de repetência. O que não é diferente em nossos dias. Uma das saídas para baixar esse índice pode ter sido o aumento do número de aulas por semana, de quatro para seis;
- Rigor: no curso de Cálculo há uma preocupação com o formalismo. Ou seja, os aspectos formais no Cálculo surgem como existência, unicidade, aspectos topológicos e análise de convergências.
- Pré-requisitos: conhecimentos de matemática básica. A falta desses pré-requisitos leva a reprovação nos cursos de Cálculo, já que seu ensino é linear, ou seja, um conhecimento não é aprendido bem porque o conteúdo que o antecedeu também não foi assimilado corretamente.
- Aplicações da matemática: pela história deveria ser cheio de aplicações, pois o mesmo foi criado, em grande medida, para resolver problemas de movimento no século XVII. Existem atualmente textos enriquecidos com

exemplos e aplicações espetaculares onde a utilização de sistemas algébricos torna-se essencial para seu desenvolvimento.

- A sequência didática função-limite-derivada-integral: faz parte da maneira de se ensinar de Cálculo começar o estudo com função, depois limites e, em seguida, a abordagem do ramo diferencial e integral do cálculo. Ou seja, um pré-requisito essencial para o ensino de Cálculo é o estudo de função.
- Ênfase no treinamento: a adoção de livros americanos, a partir de 1960, reforçou a parte operacional e a manipulação das técnicas para a cultura de ensino de Cálculo. As repetições de exercícios permanecem até os dias atuais a ponto de muitos professores dizerem que o aluno deve saber derivar e integrar bem, sendo que isso só ocorre pelo excesso de exercícios.

Um dos motivos para o fracasso no ensino de Cálculo se deve a massificação do ensino superior, afirma Rezende (2003) e, para comprovar, aponta os dados estatísticos de não-aprovação da Escola Politécnica da USP, de 1990 a 1995, que é de 20% a 75%, e do IME que estava entre 45% e 55%, e na UFF, que se encontrava em torno de 45% a 95%. Mostra, com isso, a dimensão exata da gravidade do problema do ensino de Cálculo, enfatizando que tal situação não é apenas daquelas faculdades, mas também de outras universidades brasileiras[2] como a USP e até de países considerados desenvolvidos, conforme David Tall[3] apud Rezende (2003).

Afirma Rezende (2003) que “o ensino de Cálculo está em crise, em estado latente, dissimulado por algumas ações paliativas, apesar da evidência catastrófica dos seus resultados finais”. Segundo este pesquisador é preciso que essa crise se torne uma catástrofe no sentido positivo de Thom, autor da “Teoria das Catástrofes”, para que uma solução desse problema dê um salto qualitativo, e isso só será possível rompendo-se algumas barreiras “normais” do ensino de Cálculo.

Diante desses índices educacionais, concorda-se com Raad (2012) que “é necessário refletir sobre como a cultura do ensino de Cálculo se insere nos espaços públicos e privados de ensino superior sob diferentes matizes”.

Cabral apud Rezende (2003) afirma que “um aluno “normal” (“real”) não tem, em geral, a perspicácia necessária para discernir as reais causas de seus problemas de aprendizagem em relação a um curso de Cálculo, quanto mais para ter “propósitos” em

[2] Os índices de desempenho dos alunos das turmas pesquisadas encontram-se na seção 3.4.
[3] David Orme Tall (nascido em 15 de maio de 1941) é Professor emérito em Pensamento Matemático na Universidade de Warwick, Inglaterra. Pesquisador em Educação Matemática, com vários artigos e livros publicados sobre o tema citado.

relação a esta disciplina”, assim como os professores carecem de lucidez para enfrentar a problemática do ensino de Cálculo.

As soluções “normalmente” apontadas, de acordo com Rezende (2003), são: a produção de listas de exercícios, para que o aluno possa fazer seu treinamento; o uso de computadores em trabalhos complementares ou mesmo em atividades na sala de aula, como se “modernidade” fosse condição suficiente para a solução dos problemas de aprendizagem; a realização de cursos “preparatórios” para um curso inicial de Cálculo (Cálculo Zero, Pré-Cálculo, Matemática Básica); evitar manipulações algébricas exacerbadas, para amenizar os problemas de “base” em prol da avaliação da parte específica do Cálculo.

O pesquisador Wanderley Rezende (2003) afirma que já existiram movimentos que visavam reformar o ensino de Cálculo, como o conhecido Cálculo Reformado, dos anos 80, e atualmente existe um número crescente de trabalhos nesse sentido que são apresentados nos ENEM’s – Encontros Nacionais de Educação Matemática. As sugestões de mudanças na sequência do conteúdo programático apontam a construção das noções básicas de Cálculo a partir da noção de infinitesimal, e uma reflexão de natureza epistemológica do próprio Cálculo e do seu ensino. Karly Alvarenga et all (2016) nota que

> investigações são oportunas, como a análise dos livros didáticos adotados, os principais erros cometidos pelos estudantes, os obstáculos cognitivos, didáticos e epistemológicos e os mitos matemáticos que podem permear essa cultura que, às vezes, leva à crença equivocada de que “passar em cálculo é para poucos”. (ALVARENGA, DORR e VIEIRA, 2016)

Ou seja, conhecendo-se os elementos que permeiam essa disciplina pode-se gerar um impacto reflexivo em seu planejamento: a melhor forma de ministrar tais conteúdos é essa que tem sido realizada?

2.2 Análise de Conteúdo

Analisar os erros dos alunos em um teste de Cálculo com uma variável, independente das teorias que fundamentam as pesquisas e da forma como as respostas são apresentadas, é analisar o conteúdo da produção matemática do aluno e, neste caso, está se empregando uma metodologia de análise de dados conhecida como análise de conteúdo. Esse método vem sendo empregado por pesquisadores em várias áreas do conhecimento como a Educação, em circunstâncias investigativas em que os participantes expressam suas opiniões, percepções, crenças, sentimentos e idéias (CURY, 2007).

Essa pesquisa é uma análise de conteúdo pelo que se propôs fazer na mesma: o uso de instrumentos de verificação como o questionário de percepção do teste pelos alunos, o questionário de opinião dos docentes, e o teste de conhecimentos dos alunos em Cálculo; além de observar a instituição de ensino e a grade curricular da disciplina nos cursos das turmas pesquisadas. Assim, nesta seção pretende-se responder as seguintes indagações: “O que significa análise de conteúdo?”; “Que parâmetros são utilizados nessa metodologia para trabalhar os dados de uma pesquisa?”; “Conforme os objetivos da pesquisa proposta, que tipo de abordagem em análise de conteúdo é mais adequado utilizar?”

Dentre os autores pesquisados, têm-se as seguintes definições para análise de conteúdo:

> “A análise de conteúdo é um conjunto de técnicas de análise das comunicações. É um método muito empírico que depende do tipo de “fala” a que se dedica e do tipo de interpretação que se pretende como objetivo, com algumas regras de base, muitas vezes intransponíveis.” (BARDIN, 2002).

> “A análise de conteúdo é uma técnica para ler e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos. Constitui-se de uma metodologia de pesquisa usada para descrever e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos e textos. É uma ferramenta marcada por uma grande variedade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto, qual seja a comunicação.” (MORAES, 1999).

De acordo com as definições acima, a matéria-prima da análise de conteúdo constitui-se de qualquer material oriundo de comunicação verbal ou não-verbal. Ela procura tratar os dados brutos que chegam provenientes das mais diversas fontes para facilitar o trabalho de compreensão, interpretação e inferência. Essa metodologia conduz a descrições sistemáticas, qualitativas ou quantitativas, e ajuda a reinterpretar as mensagens para atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum. De acordo com Moraes (1999), em qualquer de suas abordagens, a análise de conteúdo fornece informações complementares ao leitor crítico de uma mensagem, seja ele lingüista, psicólogo, sociólogo, educador, crítico literário, historiador ou outro profissional.

Esse tipo de investigação recomenda observar o processo como o produto, considerando tanto o emissor como o receptor. Assim, para se entender o texto é indispensável compreender contexto, se observar o conteúdo explícito, o autor, o destinatário e as formas de codificação e transmissão da mensagem.

Essa reconstrução do contexto, segundo Moraes (1999), tem os seus limites, pois não é possível incluir todas as condições que coexistem, precedem ou sucedem a mensagem, no tempo e no espaço. Essa delimitação, portanto, vai depender do pesquisador, da disciplina e dos objetivos propostos para a investigação, além da natureza dos materiais sob análise.

Uma pesquisa utilizando a análise de conteúdo necessita fundamentar-se numa explicitação clara de seus objetivos e, neste caso, pode assumir dois rumos diferentes: uma abordagem quantitativa ou uma abordagem qualitativa. Na primeira, os objetivos são definidos de antemão de modo bastante preciso e na segunda, os mesmos podem ser construídos durante o processo, ou seja, os objetivos poderão surgir à medida que a investigação avança. De qualquer forma, numa análise de conteúdo, uma clara explicitação de objetivos ajuda a delimitar os dados efetivamente significativos para uma determinada pesquisa, pois, dependendo dos objetivos propostos, os métodos e técnicas de análise variam.

2.2.1 A metodologia da Análise de Conteúdo

Ao tratar das mensagens, o analista infere (deduz de maneira lógica) conhecimentos sobre o emissor da mensagem ou sobre o seu meio. Nesse processo de análise faz-se de início a descrição (a enumeração); depois a inferência (que procura responder a dois problemas: quais as causas? E quais os efeitos possíveis?) de modo explícito e controlado, e em seguida a interpretação (a significação).

Esse processo de tratamento da mensagem divide-se em diferentes fases a análise de conteúdo que, segundo Bardin (2002), organizam-se em torno de três pólos cronológicos, e conforme Moraes (1999) perfazem cinco etapas: a pré-análise; a exploração do material; e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. Desse modo, seguindo o entendimento do Dr. Roque Moraes, as cinco etapas podem ser descritas como segue:

1 – Pré-análise – consiste em: fazer a escolha dos documentos identificando as diferentes amostras de informação, separando aquelas que estejam de acordo os objetivos da pesquisa (delimitação do corpus – conjunto de produções textuais sobre o qual o pesquisador se debruça); e iniciar o processo de codificação dos materiais de modo a identificá-lo de forma rápida;

2 – Unitarização – consiste em: reler de forma cuidadosa os materiais objetivando definir a “unidade de análise” pelo pesquisador, que podem ser palavras, frases ou mesmo documentos; reler todos os materiais e identificar as diferentes mensagens dividindo-as em elementos menores, identificados por um código que especifica a unidade da amostra; isolar cada uma das unidades de análise, de modo a compreendê-las fora do contexto original em que se encontravam (corpus); definir as unidades de contexto que servirão de referência para a análise, fixando os limites contextuais de interpretação de cada unidade;

3 – Categorização – é uma operação de classificação dos elementos de uma mensagem seguindo determinados critérios. Consiste em agrupar dados considerando a parte comum existente entre eles, o que pode ser feito cortando, fotocopiando ou escaneando as respostas que receberam um mesmo código. Dessa forma, constroem-se relações entre as

unidades, com a compreensão do que se tem em comum e de como podem ser re-agrupadas, formando categorias que, em análise de conteúdo recomenda-se em um número reduzido, para produzir uma redução dos dados de uma comunicação.

4 – Tratamento dos resultados – é o momento de expressar os significados captados e intuídos nas mensagens analisadas. O que, numa abordagem quantitativa, envolverá a organização de tabelas e quadros, onde se apresentem as categorias, suas freqüências absolutas e percentuais e, numa abordagem qualitativa, a produção, para cada categoria, de um texto síntese que expresse as unidades de análise (corpus);

5 – Interpretação – de acordo com Moraes (1999), constitui um passo imprescindível em toda a análise de conteúdo. É o momento de procurar compreender, seja de forma quantitativa (inferência) ou qualitativa (interpretação) o conteúdo da mensagem. Inferindo, procura-se estender as conclusões de um grupo menor para toda uma população. E interpretando, o movimento de esforço do analista está em busca de compreender os conteúdos manifestos pelos autores, bem como os ocultos consciente ou inconscientemente. Com essa compreensão, discorre Cury (2007), é possível utilizar os resultados, para responder às questões da pesquisa ou propor estratégias de ensino para ajudar os alunos a vencerem as dificuldades apresentadas.

A análise de conteúdo de mensagens, segundo Bardin (2002), é aplicável a todas as formas de comunicação, seja qual for a natureza do seu suporte. Possui duas funções: uma função heurística, que aumenta a propensão à descoberta; e uma função de "administração da prova", uma espécie de análise sistemática para verificar se o sentido das hipóteses levantadas se confirma ou não. Conforme esse autor, a análise de conteúdo possibilita diferentes modos de conduzir o processo de pesquisa. Em relação ao tipo de conteúdo a ser investigado, procura-se explorar o conteúdo manifesto prendendo-se ao que é dito (fazer uma exploração objetiva) ou o latente captando o sentido implícito (fazer uma análise subjetiva).

2.3 Análise de Erros

Em Educação muitas vezes, segundo Feltes (2007), o erro é visto como algo ruim, algo mau, algo a ser evitado e punido. A escola parece se preocupar apenas com o plano do fazer, da eficácia diante da transmissão e aquisição do conhecimento. Existem até aqueles que dizem que não se pode permitir que o erro aconteça. No entanto, sabe-se que a história da humanidade evoluiu através de erros. Ou seja, em muitos momentos no processo da construção do conhecimento, o mais importante não é corrigir incansavelmente os erros, comparando com o número de acertos, mas saber que existem aspectos a serem corrigidos, melhorados e outros que até devem ser mantidos, pois em muitas situações de sala de aula o que está certo aqui pode estar errado acolá.

Segundo Brosseau apud Cury (2007), “o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, mas o efeito de um conhecimento anterior, que agora se constitui um obstáculo.” Isso, disse ele, referindo-se aos erros que são baseados em um conhecimento prévio que não foi adequadamente generalizado ou transposto para uma nova situação. Como exemplo, ele usa um erro muito comum em que o aluno considera que a raiz quadrada de uma soma é soma das raízes quadrada das parcelas, partindo da idéia de que a raiz quadrada de um produto é o produto das raízes quadradas dos fatores. Ou seja, este conhecimento prévio se torna um obstáculo para a construção de um novo conhecimento, daí esse autor considerar o obstáculo um conhecimento. Assim, diante de uma nova situação, em que o aluno precisa construir um novo conhecimento, ele tem dificuldades de abandonar o conhecimento anterior, que era eficaz em certas situações e que agora não se mostra mais assim.

Para Morin apud Feltes (2007) o erro pode ser tratado como um problema, mas um problema de ordem primária, prioritário, sobre o qual cabe aos pesquisadores pensar sobre sua originalidade. A compreensão das causas dos erros, conforme Feltes (2007), deve estar ligada a realidade de uma comunidade escolar. Assim, o estudo de erros, um entendimento melhor de suas causas, pode auxiliar os alunos em suas dificuldades e os professores (e o sistema de ensino) na compreensão e diminuição das repetências e evasões escolares. Ou seja, “todos podemos aprender, e aprendemos, com nossos erros”, Popper apud Cury (2014).

Para Cury (2007):

> a análise de erros é uma abordagem de pesquisa – com fundamentações teóricas variadas, objetivos distintos e participação de todos os níveis de ensino nas amostras -, mas também é uma metodologia de ensino, podendo ser empregada quando se detecta dificuldades na aprendizagem dos alunos e se quer explorá-las em sala de aula.

Para Costa (1988), “a analise do erro pode oferecer pistas ricas para o redimensionamento de uma prática pedagógica que seja mais comprometida com as nossas crianças brasileiras”. Ou seja, um erro corrigido pelo aluno pode ser mais proveitoso para ele, para o professor e para todo o grupo de estudantes, do que um acerto imediato. O aluno que corrige um erro e o entende pode mudar sua aprendizagem. A análise de erros, portanto, tem como objetivo, de acordo com Cury (2007), o estudo das relações entre o conhecimento matemático, o professor e os alunos, relações estas que se estabelecem em um determinado contexto sociocultural.

As pesquisas envolvendo Análise de Erros vêm se consolidando ao longo do tempo, é uma tendência em Educação Matemática. Segundo pesquisa feita pela Dra. Helena Cury (2014)[4] observa-se, que a partir de 2006, ocorreu um aumento de publicações sobre erros, dificuldades ou obstáculos, sendo que no último período, o número de artigos relacionados aos temas já representava mais da metade dos totais de artigos publicados. Isso mostra que pesquisadores e professores tem se preocupado com analise de erros de produções de alunos em Matemática, procurando, muitas vezes, avaliar os alunos como um todo. Feltes (2007) destaca que muitos educadores, ao corrigir os testes, aproveitam os erros que mais se destacaram e fazem uma retomada de conteúdos com uma revisão a partir desse ponto; outros partem dos erros encontrados e constroem com seus alunos estratégias de validação ou não, impulsionando para a construção de hipóteses e discussões, com a finalidade em construir, por meio deles, o ensino e a aprendizagem.

De acordo o pesquisador Barichello (2008) existem três grandes correntes dentro das pesquisas sobre análise de erros que podem ser sintetizadas em três palavras: ensino, aprendizagem e atividade.

A corrente de pesquisa que são os primeiros trabalhos nessa área é a que envolve o ensino e tem influência das escolas behavioristas e de processamento de informações. Dentro dessa corrente, “os erros eram vistos de maneira unicamente negativa, como defeitos do processo educativo que deveriam ser eliminados através de estratégias de ensino mais eficientes.” (BARICHELLO, 2008). Essas pesquisas tinham como intenção identificar, catalogar e classificar erros para, em seguida, determinar estratégias de ensino que mudassem os resultados para melhor. E os objetivos desses trabalhos eram apenas listar as técnicas errôneas, determinar a distribuição de freqüências dessas técnicas, analisar as dificuldades específicas, classificar e agrupar erros.

A outra corrente, aprendizagem, uma fase posterior a do ensino, segundo Barichello (2008), começa nos anos 80 e se utiliza da análise dos erros para compreender o pensamento matemático do aluno e a maneira como ele aprende. Nela a análise não está no produto do pensamento matemático, mas no processo como um todo. A ênfase das pesquisas dessa corrente é dada à aprendizagem ao invés de ao ensino. O foco normalmente recai sobre o pensamento matemático do aluno, e a análise passa progressivamente do produto desse pensamento para o processo como um todo.

[4] Veja a Tabela 1 sobre a distribuição dos artigos que investigam erros, dificuldades ou obstáculos no ensino e aprendizagem de Matemática, publicados no período de 1991 a 2014.

A terceira corrente (atividade) surge a partir da constatação de que “os estudantes nunca foram encorajados a tirar vantagens desses erros como oportunidades de aprendizagem de matemática, embora professores e pesquisadores já tenham reconhecido a importância de análise de erros para diagnose e remediação” (BORASI apud (BARICHELLO, 2008)). Nessa corrente, os alunos são convidados a tirar proveito de seus erros e, a partir deles, questionar e construir seu conhecimento matemático. Ou seja, nessa corrente a Análise de Erros passa a ser vista como uma estratégia didática para o professor de Matemática.

2.3.1 Relato da evolução das pesquisas em Análise de Erros

Um dos pioneiros da análise de erros foi Jacques Hadamard, que, de acordo com Cury (2007), aproveitou as idéias de Henri Poincaré, publicadas em 1908, e de outros da sua época, para mostrar, em 1945, a importância da Psicologia no entendimento dos processos de criação e descoberta dos matemáticos, contribuindo, assim, para as idéias sobre os processos de aprendizagem. Vadim Andreevich Krutetskii foi outro pioneiro na pesquisa sobre a produção dos alunos, destacando em seu trabalho sobre *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren* em 1976, que, qualquer que sejam seus objetivos, é mais importante se analisar o processo e não apenas o produto (a resposta final de um exercício ou a alternativa assinalada em um teste de múltipla escolha). O mesmo aponta que a melhor maneira de aproveitar os erros, para questionar os estudantes e auxiliá-los a (re) construir seu conhecimento, é fazer a análise qualitativa das respostas dos alunos, com uma discussão aprofundada sobre as dificuldades por eles apresentadas. Além desses, segundo Cury (2007), tem-se o trabalho de Allen Newel e Herbert Simon sobre análise de protocolos verbais na solução de problemas de 1972, que objetivou mostrar que os erros cometidos pelos solucionadores de problemas, podem ser detectados aproveitando-se o “pensar em voz alta” e a possibilidade de unitarizar o corpo de informações registradas.

Outra pesquisadora que merece destaque na análise de erros nos anos 80 e 90, segundo Cury (2007), é Raffaella Borasi. No final do século XX, durante a reforma da Matemática escolar nos Estados Unidos, Borasi sugeriu aos professores abandonar a simples transmissão de conhecimentos e tentar, com experiências em sala de aula, encorajar os alunos a explorar e verbalizar suas idéias, raciocinar e argumentar. Raffaella afirma que se a ênfase da avaliação dos estudantes se desloca do produto para o processo, há a possibilidade de que os erros cometidos venham a ser discutidos e possam ser fonte de novas aprendizagens. Apresenta seu quadro sobre a “taxionomia de usos dos erros como trampolins para a pesquisa" refletindo as diversas formas de se trabalhar com análise de erros que, dependendo do objetivo da aprendizagem, pode ser feita para remediação, descoberta ou pesquisa.

Outros trabalhos destacados por Cury (2007) são: um artigo clássico da análise de erros, em 1979, de Radatz, que faz um levantamento de classificações sobre erros; a visão piagetiana do erro de Bessot, de 1980; a concepção construtivista do erro evidenciada por Borasi em 1989; o estudo de Gómez, em 1995, sobre métodos de cálculo e de teorias explicativas sobre erros (nesse trabalho foram aplicados testes de cálculo mental sobre noções de Aritmética a alunos de licenciatura, analisados os erros, e classificadas as respostas para discutir com os discentes); o trabalho de Pochulu de 2004, onde se conclui que a correção sistemática dos erros não favorece sua eliminação, propondo a criação de estratégias em sala de aula em que os erros possam ser discutidos; a pesquisa de Del Puerto e colaboradores de 2006, que utilizaram o modelo de classificação de Radatz para analisar os erros dos alunos finalistas do ensino médio em um teste, sugerindo ao final que uma "biblioteca de erros típicos" deveria ser construída para ajudar o professor a planejar atividades que auxiliem os alunos em suas dificuldades; a dissertação de mestrado da própria Cury de 1988, em que são aplicadas três questões a alunos de um curso de licenciatura em Matemática, analisado os erros cometidos e elaborado hipóteses sobre suas causas; a aplicação de um questionário de Valentino e Grando, em 2004, com problemas de Álgebra Elementar a um aluno de um curso de Licenciatura em Matemática, descrevendo as respostas e as classificando de acordo com as tendências do ensino de álgebra; a aplicação de cinco problemas por Utsumi, em 2000, a alunos de ensino fundamental, que emprega o pensar em voz alta e a análise de protocolos característicos da abordagem do processamento da informação, e analisa com detalhes as produções escritas dos estudantes.

Já sobre erros e conteúdos de Cálculo, a professora Helena Cury menciona o trabalho de Esteley e Villarreal de 1996, com alunos de cursos de Agronomia ao resolver problemas sobre funções, limites e continuidade, onde os erros foram categorizados, cada categoria apresentada em porcentagens e exemplificadas; a pesquisa de Bin Ali de 1996, que estudou os passos empregados por estudantes na resolução de exercícios de derivação ou integração, apresentando as soluções mais comuns em quadros; o trabalho de Balbino de Cabral, em 1999, que discute as dificuldades de um estudante ao calcular uma integral definida, relatando o diálogo entre professor e aluno em uma aula de recuperação paralela; a pesquisa de Milani de 2002, que transcreve e analisa encontros realizados com um grupo de alunos de Cálculo I para entender as dificuldades e os conflitos encontrados por esses estudantes ao trabalharem os conceitos de Cálculo segundo a abordagem infinitesimal. Em todos seus levantamentos feitos nessa pesquisa envolvendo os conceitos básicos do Cálculo (funções, limites, derivadas e integrais) e relacionados à análise de produções escritas de estudantes de Matemática, a Dra. Cury notou que as mesmas destacam sempre dificuldades nos cálculos e no esboço de gráficos.

Nota-se, portanto, que a análise das produções escritas dos alunos vem sendo realizada sob diferentes enfoques e sob os pressupostos teóricos que predominam conforme a época e o local em que foram desenvolvidas. Diante de todas estas pesquisas, no entanto, Cury (2007) aponta que a maior dificuldade com que se deparam os pesquisadores está relacionada à falta de atividades que desafiem o aluno a querer modificar sua atitude em relação aquele erro. Para ela é necessário compreender o que o aluno “sabe”, ou melhor, como determinado conhecimento, estabelecido em certo momento de sua história de vida, está funcionando como obstáculo para a superação da dificuldade e o que suas respostas “decoradas” estão encobrindo em termos de não-conhecimento.

2.3.2 Modelos de categorização de erros em Matemática

Entre aqueles que procuraram categorizar erros em Matemática temos: Weiner, Glück, Kuzmitskaya, Radatz e Movshovitz-Hadar et al.

O trabalho de Rico apud Filho (2012) aponta Weiner, no período entre guerras, como o fundador da investigação didática orientada para o estudo de erros tratando de estabelecer padrões que explicassem os equívocos individuais em todas as matérias e para todos os grupos de idades escolares. O mesmo agrupou os erros em cinco categorias: erros familiares, erros persistentes, erros por similaridade, erros mistos e erros devido a situações emocionais.

Rico apud Filho (2012) aponta que Glück buscou identificar os tipos de erros com a seguinte classificação: confusão de sinais em operações, erros de aproximação nas operações, falta de conclusão dos problemas ou resoluções parciais, partes das operações corretas e erro de transcrição.

Kuzmitskaya foi outro pesquisador que, segundo Rico apud Filho (2012), se preocupou em identificar diferentes tipos de erros, estabelecendo as seguintes categorias: erros por insuficiência de memória de curto prazo, erros por falta de compreensão tanto dos enunciados quanto das condições de desenvolvimento dos problemas, erros por insuficiência de regras verbais para realização dos cálculos e erros por uso incorreto das operações matemáticas.

Ainda de acordo com a pesquisa de Filho (2012), destacam-se os trabalhos de Radatz de 1979 e de Movshovitz-Hadar et al., em 1987. Radatz classifica os erros a partir dos procedimentos do aluno em cinco categorias:

a) erros devido à dificuldade na linguagem: referem-se à utilização de conceitos e símbolos matemáticos e a passagem da linguagem corrente para matemática;

b) erros devido a dificuldades para obter informação espacial (dificuldade em obter informação a partir de representações gráficas): que aparecem na representação espacial de uma situação matemática ou um problema geométrico;

c) erros devido a uma aprendizagem deficiente de fatos, habilidades e conceitos prévios (deficiência de pré-requisitos): são os cometidos por deficiência na manipulação de algoritmos, fatos básicos, procedimentos, símbolos e conceitos matemáticos;

d) erros devido a associações incorretas ou rigidez de raciocínio: são causados pela falta de flexibilidade no pensamento para adaptar-se a novas situações; compreendem os erros de associação, de interferência e de assimilação;

e) erros devidos à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes: produzidos por aplicação de regras ou estratégias semelhantes em diferentes conteúdos.

No trabalho desenvolvido em 1987 por Movshovitz-Hadar et al.1987, os autores propuseram uma classificação dos erros em termos de sua manifestação operacional, de modo a contribuir com professores e instituições na prevenção e superação de dificuldades e obstáculos no processo de ensino. Os erros foram classificados por esses pesquisadores nas seguintes categorias: uso errado dos dados, linguagem mal interpretada, inferência lógica inválida, definição ou teorema distorcido, solução não verificada e erros técnicos. Tem-se a seguir parte da descrição tomada de Movshovitz-Hadar et al. apud (FILHO, 2012):

> Uso errado dos dados – esta categoria inclui erros que podem estar relacionados a alguma discrepância entre os dados apresentados no item/problema e como os alunos os trataram.
>
> Linguagem mal interpretada – esta categoria inclui erros matemáticos que lidam com uma tradução incorreta de fatos matemáticos descritos em uma linguagem, possivelmente simbólicos.
>
> Inferência lógica inválida – em geral, esta categoria inclui erros que lidam com o raciocínio falacioso e não com um conteúdo específico, ou seja, novas informações invalidamente retiradas de uma determinada parte de informação ou de alguma outra anteriormente inferida.
>
> Definição ou teorema distorcido – esta categoria inclui erros que lidam com uma distorção de um princípio específico e identificável, uma regra, um teorema ou uma definição.
>
> Solução não verificada – a principal característica dos erros nesta categoria é que cada passo na realização da atividade é correto; no entanto, o resultado final não é a solução do problema proposto.

> Erros técnicos - esta categoria inclui erros relacionados à execução de algoritmos, de procedimentos passo a passo.

O Quadro 1 apresenta o esquema da tipologia de erros do modelo proposto por Movshovitz-Hadar et al. apud Filho (2012), referentes a erros relacionados por procedimentos. As categorias do modelo são identificadas pelas letras A, B, C, D, E, F.

Quadro 1 – Tipos de erros – Classificação segundo Movshovitz-Hadar et al.

Tipos de erros relacionados por procedimentos Movshovitz-Hadar et al.					
Uso errado dos dados (A)	Linguagem mal interpretada (B)	Inferência lógica inválida (C)	Definição do teorema distorcido (D)	Solução não verificada (E)	Erros técnicos (E)

Fonte: Dissertação de (FILHO, 2012)

Já Socas apud Filho (2012) aponta que os erros têm origens diferentes e podem ser vistos como resultado da presença de um processo cognitivo inadequado e não apenas como conseqüência de uma falha de conhecimentos específicos ou de uma distração. Esse autor agrupa os erros de aprendizagem em Matemática em três categorias: erros com origem num obstáculo; erros com origem na ausência de significado; e erros com origem em atitudes afetivas e emocionais face à Matemática.

Já a pesquisadora Heloísa Carvalho (2016), utilizou a seguinte classificação para os tipos de erros em Matemática:

Erro tipo 01: neste caso o aluno não apresenta o conhecimento específico da disciplina Cálculo. Nesta categoria, entram, por exemplo, erros do tipo: não utiliza corretamente as técnicas de derivação; não reconhece o limite de uma função nem relaciona limites laterais com continuidade de funções.

Erro tipo 02: refere-se a erros que o aluno comete por falta de conhecimentos básicos. O aluno, por exemplo, não domina as técnicas de fatoração, não aplica corretamente as propriedades de potências, não interpreta os gráficos de funções elementares.

Erro tipo 03: nesta categoria foram considerados os erros cometidos por distração do aluno. Por exemplo, copiar um número diferente do enunciado, errar resultados de contas de somar, subtrair, multiplicar e dividir.

Para Ramos (2013), ao centrar-se na análise dos erros, o professor poderá focar sua atenção nos tipos e formas dos erros que o aluno cometeu. O professor poderá criar categorias de erros para depois utilizá-los no processo ensino-aprendizagem. A importância de analisar os erros e categorizá-los está em que

> diferentes tipos de erros exigem diferentes ações do professor, a primeira coisa a fazer é o professor aprender a identificá-los, distinguir qual a natureza de cada um deles, bem como que ações realizarem para que sejam superados. (SILVA; BURIASCO apud (RAMOS, 2013))

2.4 A Elaboração de Itens

Em sala de aula, para avaliar o processo de aprendizagem de seus alunos individualmente, os professores podem e devem utilizar diversos instrumentos: trabalhos em grupo ou individuais, testes ou provas com questões de múltipla escolha ou questões abertas, dramatizações, observação, relatórios, entre outros. Esses instrumentos apresentam características diferentes, mas tem em comum o fato de que, por meio deles, é possível avaliar a particularidade sobre o progresso de cada aluno e, ao final do período letivo, atribuir-lhes uma nota que varia de 0 a 100 pontos (CAED, 2008).

Corrigir os erros cometidos pelos alunos é uma tarefa habitual de um professor de Matemática, no entanto, a forma com que se elabora a prova e com quais objetivos se está corrigindo estes erros podem ser fatores determinantes de fracasso ou de sucesso do aluno Cury apud Mariani (2005). Pensando nisso, nesta pesquisa, que se propôs analisar as respostas dadas pelos respondentes a questões de Cálculo com vistas a verificar os erros cometidos pelos mesmos, procurou-se ter o cuidado de propor questões que estimulem o interesse e o bom desempenho de quem os responde. Entre esses itens, os que apresentam tais características, são os que estão de acordo com padrões de órgãos nacionais como o INEP.

Conforme Guia INEP (2010), item consiste na unidade básica de um instrumento de coleta de dados, que pode ser uma prova, um questionário etc.. Nos testes educacionais, o item pode ser considerado sinônimo de questão, termo mais popular e utilizado com freqüência nas escolas. Os itens podem ser de dois tipos: de resposta livre e de resposta orientada ou objetivo. Um único teste pode conter itens de ambos os tipos ou apenas de um deles. Segundo Vianna apud Guia INEP (2010), os especialistas reconhecem que os instrumentos de medida educacional, sejam eles objetivos ou não, podem ser utilizados, indistintamente, para medir os mesmos aspectos do desempenho acadêmico.

Em relação aos itens objetivos, os mesmos permitem verificar tanto comportamentos simples, de memorização ou reconhecimento, como comportamentos mais complexos, envolvendo compreensão, aplicação, análise, síntese e avaliação. As principais vantagens em se utilizar itens objetivos estão, segundo Anastasi apud Guia INEP (2010), a facilidade, a rapidez e a objetividade da correção, além de permitirem uma cobertura mais completa do conteúdo. Esses tipos de itens mostram-se menos vulneráveis aos erros de julgamento na atribuição dos escores, sendo especialmente recomendáveis nos casos em que os grupos a serem avaliados são grandes, bem como quando há grande pressão para a divulgação dos resultados, conforme Vianna apud Guia INEP (2010). Dentre os itens objetivos, destacam-se os de múltipla escolha, definidos como aqueles que permitem ao participante do teste escolher a resposta entre várias alternativas, das quais apenas uma é correta, destaca Bradfield & Moredock apud Guia INEP (2010).

De acordo com o Guia INEP (2010), a elaboração de um bom item objetivo de múltipla escolha, deve seguir as diretrizes que contemplam apenas uma habilidade da Matriz de Referência elaborada pelo Ministério da Educação. Essa matriz é um conjunto de descritores construído por uma comissão de especialistas designada pelo INEP para subsidiar a elaboração da prova (mas não elabora a prova). Essa matriz apresenta, com clareza, as habilidades acadêmicas, as competências profissionais, os conteúdos mais relevantes que possam evidenciar as habilidades e competências possíveis de serem avaliadas através de provas educacionais, facilidade e complexidade das questões, dentre outras.

Portanto, conforme Guia INEP (2010), o item de resposta objetiva deve evitar a indução ao erro e apresentar, através de contextualização, uma situação-problema, e conter três partes:

1. Texto-base: é usado para estimular o estudante a mobilizar recursos cognitivos para solucionar a situação-problema proposta. O estímulo pode conter um texto, uma imagem ou outros recursos.

2. Enunciado: pode ser dado sob a forma de complementação ou de interrogação. Ele tem que ser preciso e precisa estar totalmente ligado à habilidade que se pretende avaliar.

3. Alternativas: são apresentadas, geralmente, na forma de cinco opções, sendo somente uma correta, que é o gabarito. As alternativas que não contemplam a resposta são chamadas de distratores.

Os distratores indicam as alternativas incorretas à resolução da situação-problema proposta. As respostas dessas alternativas devem parecer corretas para aqueles participantes do teste que não desenvolveram a habilidade em questão. (Haladyna apud (GUIA-INEP, 2010)). Conforme o Guia INEP (2010), para a elaboração do distrator devem-se utilizar erros comuns observados em situações de ensino-aprendizagem, tomando o cuidado de não torná-lo uma opção que leve a uma “pegadinha”, ou seja, induza o aluno ao erro.

Desse modo, assim como o texto-base e o enunciado necessitam de um esmero em sua elaboração, os distratores também devem ser muito bem elaborados. Não sendo recomendável incluir erros comuns ou alternativas absurdas, para não induzir a escolha da opção correta. A qualidade dos distratores é validada com justificativas, nas quais é explicado o raciocínio que o aluno segue na falta de um conhecimento ou habilidade, confirmando a necessidade de retomada do assunto. Essas justificativas são grandes aliadas das intervenções pedagógicas, porque esclarecem quais lacunas de aprendizado estão ligadas a cada alternativa. Assim, conforme a taxa de marcação de cada alternativa, o professor pode analisar que pontos devem ser reforçados durante as aulas.

O teste é um instrumento de medida muito utilizado que apresenta itens, o qual não se restringe apenas à verificação da aprendizagem escolar, mas aplica-se a diversas modalidades como os processos seletivos (vestibulares e concursos públicos), os exames de certificação escolar (exames supletivos), certificação profissional e ocupacional (exames da OAB, exames de suficiência), as avaliações de sistema (ENEM, ENADE). Toda essa avaliação utiliza-se de itens em testes como seu principal instrumento para avaliar os conhecimentos e saberes necessários ao perfil avaliado (FERNANDES, 2015). Para esta pesquisa, propôs-se utilizar como um dos instrumentos de coleta de dados um teste com itens objetivos de múltipla escolha sobre o conteúdo de Cálculo, devido às vantagens mencionadas acima. E, dos três itens inseridos no teste, dois foram extraídos da prova do ENADE[5] 2017 de Matemática, pois obedecem as recomendações do Guia INEP para elaboração de itens.

[5] O ENADE é um exame em larga escala aplicado a alunos ingressantes e concluintes de uma mesma área, aleatoriamente selecionados. Tem como um dos objetivos principais do medir a mudança que ocorre no desempenho dos estudantes avaliados em dois momentos: no ingresso e na conclusão do curso (teste – intervenção – reteste), buscando avaliar o processo e não apenas o produto (BRITO, 2008)

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Essa seção descreve o procedimento metodológico para a realização da pesquisa, bem como os instrumentos utilizados para a coleta das informações, destaca aspectos da instituição na qual ocorreu a pesquisa e o perfil quantitativo de alunos e professores participantes da pesquisa.

A motivação para este trabalho, em Análise de Erros, surgiu por sugestão do professor Mário Tanaka Filho e, desta forma, este autor se propôs a lançar investigações sobre o tema começando pelo livro da professora Helena Cury, "*Análise de Erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos".* Inicialmente, a proposta era totalmente focada na análise e classificação de erros em Potenciação e pretendia-se discutir algumas possibilidades de classificação de erros baseadas, principalmente, nas idéias de Feltes (2007). Após orientação, propôs-se aplicar a análise de erros em questões envolvendo conteúdos da disciplina de Cálculo de função com uma variável. Ou seja, pretendeu-se utilizar a metodologia da análise de erros para se averiguar os tipos de erros cometidos por acadêmicos na solução de questões de Cálculo através de um teste avaliativo de conhecimentos de tópicos da disciplina. A intenção foi usar a Metodologia de Análise de Erros como metodologia de investigação que, segundo Costa (1988), "pode oferecer pistas ricas para o redimensionamento de uma prática pedagógica que seja mais comprometida com as nossas crianças brasileiras", e porque não dizer "com os nossos alunos".

Os alunos, alvos desta pesquisa, foram estudantes do curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, de Licenciatura Integrada em Biologia e Química, e de professores em formação continuada do Profmat 2018 da UFOPA, na cidade de Santarém durante o segundo semestre letivo de 2018. A investigação abrangeu também quatro professores que lecionam disciplinas da Matemática, para saber suas opiniões sobre a ocorrência de erros dos alunos em provas de avaliação de conhecimentos de Cálculo. O interesse, com isso, era propor uma discussão sobre as possibilidades de uso da análise de erros no ensino de Cálculo de modo a contribuir com a aprendizagem dessa disciplina. Ou seja, responder a seguinte indagação: "Que contribuição a análise dos erros, cometidos por alunos dos cursos citados, em questões de Cálculo pode trazer para o processo de ensino dessa disciplina?"

Esta dissertação, portanto, objetivou investigar os erros cometidos por acadêmicos do curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, de Licenciatura Integrada em Biologia e Química, e de professores em formação continuada do Profmat 2018 da UFOPA, na cidade de Santarém durante o segundo semestre letivo de 2018 na solução de um teste de

Cálculo, apresentar os resultados obtidos dessa análise, e discutir as possíveis dificuldades dos alunos no assunto da matemática em destaque.

A presente pesquisa, neste caso, tem um caráter quantitativo-qualitativo e foi realizada segundo a metodologia de análise de conteúdo dos erros, seguindo as três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Tem um caráter quantitativo, pois, segundo Gerhardt e Silveira (2009): focaliza uma quantidade pequena de conceitos; inicia com idéias preconcebidas do modo pelo qual os conceitos estão relacionados; utiliza procedimentos estruturados e instrumentos formais para coleta de dados; coleta os dados mediante condições de controle; enfatiza a objetividade, na coleta e análise dos dados; e analisa os dados numéricos através de procedimentos estatísticos. E um caráter qualitativo devido o desenvolvimento da pesquisa ser imprevisível; o conhecimento do pesquisador, parcial e limitado; e o objetivo da amostra ser de produzir informações aprofundadas e ilustrativas.

Quanto à natureza é uma pesquisa aplicada, pois objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos. E quanto aos objetivos, pode ser classificada como uma pesquisa exploratória que, segundo Gil apud Gerhardt e Silveira (2009), pretende proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Além de envolver: um levantamento bibliográfico; opinião das pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado; e a análise de exemplos que estimulem a compreensão.

E quanto aos procedimentos, é uma pesquisa *ex-post-facto*, pois “tem por objetivo investigar possíveis relações de causa e efeito entre um determinado fato identificado pelo pesquisador e um fenômeno que ocorre posteriormente. A principal característica deste tipo de pesquisa é o fato de os dados serem coletados após a ocorrência dos eventos” (GERHARDT e SILVEIRA, 2009). O evento ocorrido neste caso é o erro do aluno ao resolver um determinado item.

A metodologia de análise dos dados desse trabalho procurou seguir as etapas indicadas em Bardin (2002): pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Num primeiro momento, as respostas coletadas (questionários e testes de conhecimento) foram organizadas conforme a turmas, separadas de acordo com o item e identificadas conforme a turma e o aluno, e algumas fotocopiadas, como preparo para gerar o corpus. Para a formação de corpus, fez-se a correção de cada item, quantificando o número de acertos, de erros e de questões em branco. Após a correção dos itens, fez-se uma nova triagem, separando os itens corretos ou deixados em branco dos itens incorretos. Então, passou-se a analisar os itens respondidos incorretamente.

Como eram itens objetivos de múltipla escolha, quantificou-se com que freqüência os distratores de cada item foram escolhidos, separando-se aqueles que tinham algo escrito no rascunho daqueles que não tinham. Dessa forma, o corpus da análise se constituiu dos itens com distratores marcados contendo algo escrito no rascunho. A categorização das respostas não seguiu produções cientificas já existentes na literatura e nem matrizes de referências, foram estipulada pelo autor da pesquisa. A classificação dos erros baseou-se em uma categoria pré-estabelecida na fase de exploração do material.

Na fase de tratamento dos resultados, as categorias de respostas foram descritas por meio de quadros de freqüências absolutas e percentuais, além de figuras contendo o que fora escrito pelo aluno no rascunho visando dar significado à classificação com elementos do próprio corpus. Após a categorização das respostas e classificação dos erros, elaboraram-se sínteses para uma análise melhor fazendo-se comparação com os resultados dos trabalhos de outros autores.

3.1 Instrumentos de investigação

Para a finalidade desta pesquisa, utilizaram-se como instrumentos de coleta de dados um questionário sobre o perfil dos alunos e sua percepção do teste, um questionário de opinião para os professores sobre erros na disciplina e um teste avaliativo para os alunos contendo três itens da disciplina Cálculo com uma variável.

O questionário de perfil e percepção do teste para os alunos teve como objetivos: identificar que curso estava fazendo; em que turno estudava; que idade tinha; em que tipo de escola cursou o Ensino Básico; o que achou das questões do teste (já que se estava utilizando itens com múltipla escolha segundo o ‘padrão de elaboração de itens’): o grau de dificuldade, a quantidade de informações para resolvê-lo, a dificuldade em resolvê-las, o estudo e a aprendizado do conteúdo do item; e saber em quais temas de Cálculo tem mais dificuldades. As perguntas de opinião sobre os itens do teste foram extraídas de uma prova do Enade 2017. O questionário foi aplicado ao mesmo tempo em fora aplicado o teste.

O questionário de opinião para os professores visou indagar: o tempo de exercício da profissão; as principais dificuldades dos alunos relativos à disciplina; que tipos de erros (A, B ou C, conforme classe proposta no trabalho) são mais freqüentes nas avaliações de Cálculo; e a que atribui essa freqüência.

Na construção do teste de conhecimentos de Cálculo teve como objetivos: avaliar o que aluno sabe sobre limites de uma fração algébrica quando tende para um valor fixo; se o mesmo sabe aplicar as regras de derivação em situações de máximo e mínimo; e se sabe relacionar integral e área de regiões determinada por uma função no plano cartesiano. Para construir esse teste procurou-se seguir as diretrizes colocadas na seção 2.4 sobre a elaboração de itens. Seguindo essas diretrizes, decidiu-se extrair dois itens objetivos do ENADE 2017 de Matemática e um item que foi adaptado de um livro de Cálculo[6].

O questionário de opinião para os professores, o questionário de perfil e percepção do teste para os alunos e o teste propriamente dito de Cálculo constam nos anexos A, B e C desse trabalho, respectivamente. As análises dos gabaritos e dos distratores, o número de participantes da pesquisa, relatos da aplicação e outros detalhes estão presentes na seção 4 que trata da análise dos dados.

3.2 A instituição pesquisada

A UFOPA, de acordo com o site Institucional (2018), foi criada pela Lei nº 12.085, de 05 de novembro de 2009. É uma instituição federal de ensino superior com sede num dos pontos mais estratégicos da Amazônia, no município de Santarém, a terceira maior cidade paraense, mundialmente conhecida por suas belezas naturais, com destaque para o encontro das águas dos rios Tapajós e Amazonas. A criação da UFOPA fez parte do programa de expansão das universidades federais e foi fruto de um acordo de cooperação técnica firmado entre o Ministério da Educação (MEC) e a Universidade Federal do Pará (UFPA), no qual se prevê a ampliação do ensino superior na região amazônica. A UFOPA surgiu da incorporação do Campus de Santarém da UFPA e da Unidade Descentralizada Tapajós da Universidade Federal Rural da Amazônia (UFRA), assimilando também outras unidades da UFPA e da UFRA para a formação dos campi de Alenquer, Itaituba, Juruti, Monte Alegre, Óbidos e Oriximiná. Em Santarém, a UFOPA mantém suas atividades em quatro unidades: Unidade Rondon, localizada no bairro Caranazal; Unidade Tapajós, no bairro Salé; Unidade Amazônia, no bairro Fátima; e Unidade PROPPIT, no bairro Aparecida.

De acordo com o projeto pedagógico institucional PCE (2015), a UFOPA organiza-se em institutos temáticos e em um Centro de Formação Interdisciplinar (CFI), destinados a produzir ensino, pesquisa e extensão com forte apelo amazônico. Organizados em programas,

---

[6] *Cálculo – vol. 1, livro de James Stewart, ano 2001, p. 110*

os institutos são responsáveis pela oferta de mais de 30 cursos de graduação, além de cursos de pós-graduação lato e stricto sensu. Cabe ao Instituto de Ciências da Educação (ICED) a formação de profissionais da educação, agregando todos os cursos da graduação e pós-graduação que propiciam a formação de professores.

Existem[7] na UFOPA, 44 cursos de graduação com alunos vinculados, sendo 19 bacharelados específicos, 04 licenciaturas integradas, 10 licenciaturas, 06 bacharelados interdisciplinares e 05 licenciaturas do Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica (PARFOR). Além disso, estão em andamento os cursos de Biologia, Matemática, Sistemas de Informação, Direito, Geografia, Pedagogia e Letras, todos eles oriundos da UFPA, e o curso de Engenharia Florestal, oriundo da UFRA. O acesso aos cursos oferecidos pela UFOPA dá-se pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Estão também em funcionamento na UFOPA cursos de especialização, cursos de mestrado e cursos de doutorado.

Tendo como missão institucional “socializar e produzir conhecimentos, contribuindo para a cidadania, inovação e desenvolvimento na Amazônia”, a UFOPA procura ser referência na formação interdisciplinar para integrar sociedade, natureza e desenvolvimento, tendo como princípios norteadores a responsabilidade social, a pertinência, a relevância científica, artística e social, a justiça e equidade, a inovação e internacionalização e interatividade.

3.3 Os cursos dos alunos pesquisados

A Licenciatura Integrada em Matemática e Física é um curso oferecido no município de Santarém no Campus Rondon na modalidade presencial sob o regime semestral de matrícula e nos turnos matutino e noturno. Possui uma carga horária total de duração de 3890 horas, distribuídos em 10 semestres letivos (cinco anos), podendo o discente cursá-lo em, no mínimo, nove e, no máximo, quinze semestres.

O curso tem como objetivo geral formar professores de Matemática e Física com domínio dos conhecimentos específicos em Matemática e Física e habilidades para ensinar essas disciplinas na região amazônica, respeitando as peculiaridades regionais, visando contribuir com o desenvolvimento da educação básica na região.

---

[7] Existiam até a data de defesa desta dissertação 12/04/2019, conforme o portal Institucional da Universidade.

Conforme o PPC (2015) deste curso, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral com Funções de uma Variável deve ser ministrada no 4º semestre letivo, com carga horária de 90 horas, distribuídas em 75 horas-aula teóricas e 15 horas-aula de prática de ensino, observando-se o limite de 20% da carga horária total para atividades semipresenciais ou tutoriais. Dos professores disponíveis, têm-se doze credenciados a ministrar essa disciplina neste curso.

Conforme a ementa do curso, os conteúdos a serem ministrados na disciplina Cálculo Diferencial e Integral com funções de uma variável são: Limite e Continuidade; Derivada; Regras de Derivação; Derivada das funções elementares; Primitivas; 1º Teorema fundamental do Cálculo; Técnicas de Primitivação; Aplicação da derivada; Cálculo de área e integral de Riemann; Técnicas de Integração; 2º Teorema fundamental do Cálculo; Aplicações da Integral Definida; Integrais Impróprias. Com esses conteúdos objetiva-se fornecer ao aluno ferramentas que lhe permitam resolver problemas de convergência de séries, de cálculo de áreas e de sólidos de revolução, de máximos e mínimos, esboçar gráficos de funções e deduções de fórmulas variadas.

A Licenciatura Integrada em Biologia e Química é um curso oferecido no campus de Santarém na Unidade Rondon na modalidade presencial sob o regime semestral de matrícula e nos turnos matutino e vespertino. Possui uma carga horária total de duração de 5960 horas, distribuídos em 12 semestres letivos (6 anos), podendo o discente cursá-lo em, no mínimo, oito e, no máximo, quatorze semestres.

Conforme o PCN (2017), o Curso de Licenciatura Integrada em Biologia e Química da UFOPA têm como objetivo formar profissionais com título de Licenciado, com competências e habilidades tais que o torne apto a lecionar aulas com conhecimentos nas áreas de Ciências, Biologia e Química para o nível fundamental e médio, atendendo às Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de maneira que possam suprir a demanda por profissionais atentos às carências locais e regionais; buscando soluções para integrar o desenvolvimento educacional com a qualidade de vida, a inovação tecnológica e a conservação dos recursos ambientais para a atual e as futuras gerações na região amazônica, em especial no oeste do Estado do Pará.

Conforme o PPC (2017) deste curso, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I deve ser ministrada no 3º semestre letivo, com carga horária de 60 horas, distribuídas em 60 horas-aula teóricas. Dos professores disponíveis, têm-se quatro credenciados a ministrar essa disciplina neste curso. Conforme a ementa do curso, os conteúdos a serem ministrados na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I são: Sistemas Numéricos: os números naturais, inteiros, racionais, irracionais, imaginários, complexos, axiomas de corpo e ordem, representação dos números reais na reta real. Noções de Álgebra: classificação das funções algébricas, redução de termos semelhantes, fatoração. Desigualdades e Valor Absoluto: Intervalos, desigualdades numéricas, absolutas, racionais, irracionais. Desigualdades lineares e quadráticas; Valor absoluto. Sistema de Coordenadas Retangulares e Gráfico de Equações. Funções: definição, domínio e imagem, tipos de funções: biunívoca, polinômicas reais, racionais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, operações com funções. Limite e Continuidade: noção intuitiva de limite; definição de limite; limite de uma função; Teoremas; Limites Laterais, Infinitos, no Infinito; Continuidade de uma função em um número, Continuidade de uma função composta, Continuidade de um Intervalo, Continuidade das funções trigonométricas. Teorema do confronto. Derivação: Introdução - A reta tangente e a Derivada; Derivada de uma função, derivada das principais funções. Derivabilidade e Continuidade, Regras de derivação, Função Derivada e Derivada de ordem superior, a regra da Cadeia, Derivação Implícita. Aplicações das derivadas.

O PROFMAT[8] é um programa semipresencial de pós-graduação *stricto sensu* para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica realizado por Instituições de Ensino Superior associadas em uma Rede Nacional. Na UFOPA, o Mestrado Profissional em Matemática é oferecido no campus de Santarém na Unidade Rondon. Possui uma duração de, no mínimo, 04 semestres letivos, podendo o discente cursá-lo em, no mínimo, dois e, no máximo, 06 semestres.

O curso tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada e relevante ao exercício da docência na Educação Básica, visando dar ao egresso a qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática.

Conforme a matriz curricular deste curso, a disciplina Fundamentos de Cálculo é uma disciplina eletiva e deve ser ministrada no 3º semestre letivo em atividades semipresenciais. Os conteúdos a serem ministrados na disciplina Fundamentos de Cálculo são: Limite e Continuidade; Derivada; Regras de Derivação; Derivada das funções elementares; Primitivas; 1º Teorema fundamental do Cálculo; Técnicas de Primitivação; Aplicação da derivada; Cálculo de área e integral de Riemann; Técnicas de Integração; 2º Teorema fundamental do Cálculo; Aplicações da Integral Definida; Integrais Impróprias.

[8] (Profmat-SBM- Regimento, 2016)

3.4 Os alunos e os professores pesquisados

A aplicação do questionário aos alunos ocorreu simultaneamente à aplicação do teste de conhecimentos. Os acadêmicos das turmas participantes já haviam cursado a disciplina Cálculo com função de uma variável ou Cálculo I em semestres anteriores. Dos estudantes que aceitaram participar da pesquisa, 56 responderam o questionário: 24 das turmas de Matemática e Física (anos 2014, 2015 e 2016), 24 das turmas de Biologia e Química (anos 2014 e 2015) e 08 da turma Profmat 2018[9]. Os dados sobre os perfis levantados estão dispostos nos Quadro 2 e 3, onde FA é a frequência absoluta e FR é a frequência relativa.

Quadro 2 – Turno das turmas e Faixa etária dos alunos

Turno da turma	FA	FR	Faixa Etária	FA	FR
Manhã	22	39%	De 18 a 22 anos	17	30%
Tarde	16	29%	De 23 a 28 anos	21	38%
Noite	18	32%	Mais de 28 anos	18	32%

Fonte: Dados da Pesquisa

Quadro 3 – Dados sobre os perfis de alunos

Tipo de Escola que cursou o Ensino Básico	FA	FR
Pública	46	82%
Particular e Pública	8	14%
Particular	2	4%

Fonte: Dados da Pesquisa

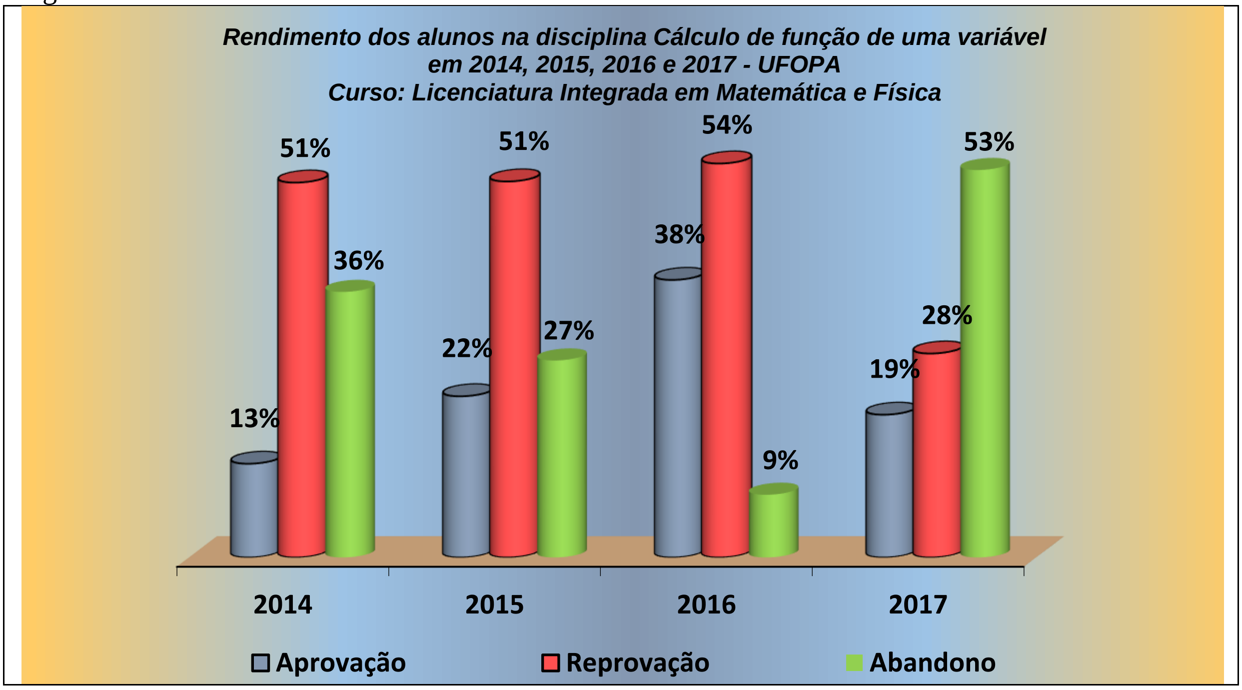
O que se destaca nesses dados: 70% dos alunos têm mais de 22 anos de idade; 68% têm suas turmas funcionando durante o dia; e que a maioria dos alunos cursou o seu ensino Básico em escola pública ou em escola particular e pública, 90%.

Além desses dados, fez-se o levantamento junto a Gestão Acadêmica da Universidade sobre os índices de desempenho dos alunos dessas turmas em Cálculo de função de uma variável ou em Cálculo I no período de 2014 a 2017. Os dados obtidos foram dispostos em dois gráficos com os percentuais destacados nas Figuras 1 e 2.

---

[9] Os alunos do Profmat participaram deste levantamento, pois, em suas graduações cursaram a disciplina Cálculo Diferencial Integral e, no período da realização do teste os mesmos ainda não tinham cursado essa disciplina no Profmat.

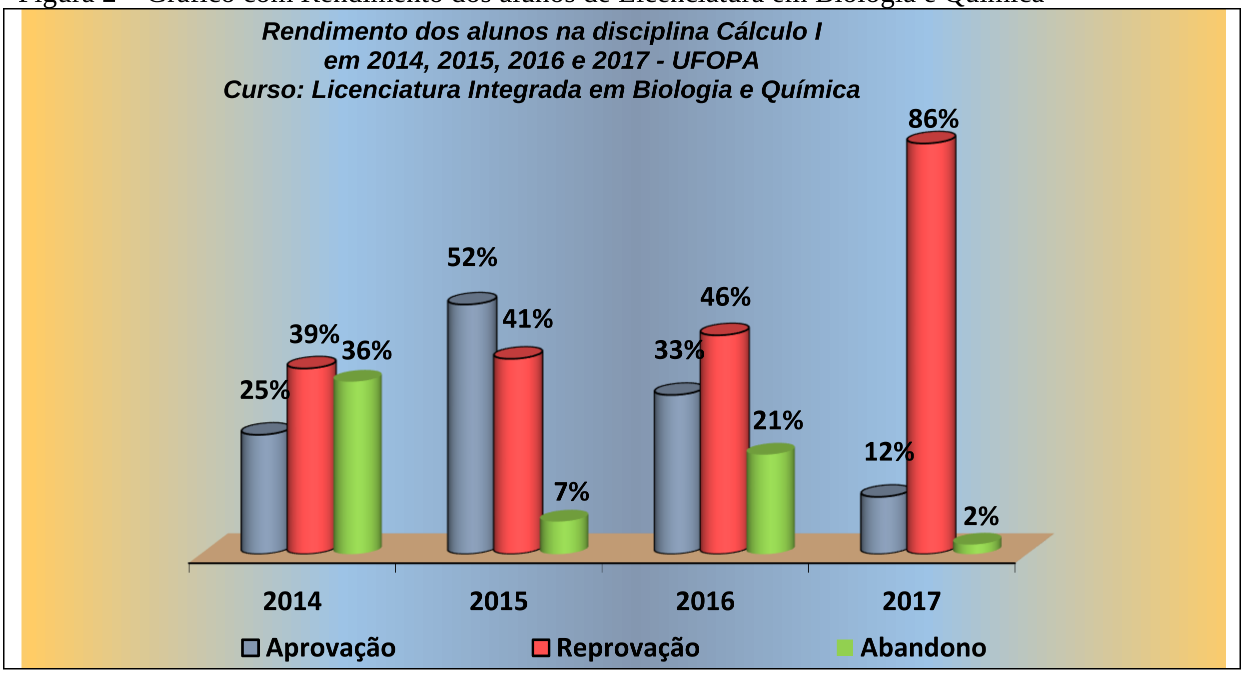
Figura 1 – Gráfico com Rendimento dos alunos de Licenciatura em Matemática e Física



Fonte: Dados da GA-ICED-UFOPA

Observando as informações dispostas na Figura 1, nota-se que os índices de aprovação em Cálculo com função de uma variável nas turmas de Licenciatura Integrada em Matemática e Física foram em média 23%, sendo que o maior índice foi alcançado em 2016, 38%. O que mostra que a reprovação e o abandono nessa disciplina ainda são grandes. Em 2017, o índice de abandono ultrapassou os 50%, e nos anos anteriores, em média, 52% dos alunos das turmas reprovaram na disciplina.

Figura 2 – Gráfico com Rendimento dos alunos de Licenciatura em Biologia e Química



Fonte: Dados da GA-ICED-UFOPA

As turmas de Licenciatura Integrada em Biologia e Química dos anos mencionados também não tiveram números expressivos para os índices de aprovação. Com exceção do ano de 2015 que atingiu 52%, a média de aprovação do período ficou em 30,5%, tendo o seu pior resultado em 2017 com 12% de aprovação. Para essas turmas, a reprovação é um fator que preocupa, já que seu índice subiu 120,5%, entre 2014 e 2017. Diante desses dados fica a indagação: o que está se fazendo para melhorar o rendimento acadêmico em Cálculo nesses cursos?

Os professores selecionados para responder o questionário foram aqueles que lecionam disciplinas relacionadas à Matemática. E o número de professores que respondeu o questionário de cinco docentes: quatro com doutorado e dois com mestrado. Quatro deles com até quinze anos de serviço no ensino superior e um com mais de vinte e cinco anos.

4 TRATAMENTO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta seção se descrevem como foram tratadas as respostas dadas pelos alunos aos itens propostos no teste de Cálculo, as opiniões dadas nos questionários aplicados a alunos e professores.

No processo de análise dos erros cometidos por alunos em itens de Cálculo de funções com uma variável procurou-se seguir as etapas da metodologia da análise de erros tomando como base a análise de conteúdo proposta por Bardin (2002): pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Para descrever essas etapas no tratamento dos dados desta pesquisa, dividiu-se esta seção nos seguintes tópicos: coleta e organização dos dados, codificação e categorização dos dados, apresentação dos dados e análise dos dados

Na descrição de cada uma dessas partes, relata-se como ocorreu a aplicação do teste de conhecimentos sobre Cálculo aos alunos, a observação das respostas, a seleção das respostas a serem analisadas e a categorização das mesmas seguindo as etapas descritas acima e análise dos resultados obtidos.

4.1 Coleta e Organização dos dados

A aplicação do teste de conhecimentos sobre Cálculo para os alunos de cada turma representou a fase de coleta de informações. Pode-se incluir ai também, mas como parte da análise que ajuda a entender o porquê da freqüência dos erros, a aplicação do questionário de percepção do teste pelo aluno e do questionário de opinião dos professores[10] sobre a freqüência dos erros cometidos pelos alunos. Esta coleta ocorreu em períodos diferentes conforme a disponibilidade de tempo de cada turma, devido o horário de aula que cada professor consentiu para aplicá-lo, sem prejuízo para o seu plano de aula.

Para a aplicação do teste foi estipulado um tempo de 90 minutos para os alunos responderem as três questões de Cálculo. Conforme a disponibilidade de horário de cada turma, a aplicação ocorreu em dias variados: Turma de Licenciatura Integrada de Matemática e Física 2016 – dia 05/09/18 das 8:45h às 9:45h com 06 participantes (três de cada sexo); turma de Mestrado Profissional Profmat 2018 – dia 21/09/18 das 8:25h às 9:25h com 08 participantes (apenas um do sexo feminino); Turma de Licenciatura Integrada de Biologia e

[10] Os dados sobre o perfil de alunos e professores constam nas seções 3.4 e 3.5. Os resultados e análise da aplicação dos questionários aos alunos sobre a percepção do teste e da opinião dos professores sobre os tipos de erros estão nas seções 4.3.4 e 4.3.5, respectivamente.

Química 2015 – dia 14/11/18 das 15:00h às 16:00h com 16 participantes (sendo quatro do sexo masculino); Turma de Licenciatura Integrada de Biologia e Química 2014 – dia 20/11/18 das 10:20h às 11:20h com 08 participantes (sendo três do sexo masculino); Turma de Licenciatura Integrada de Matemática e Física 2015 – dia 26/11/18 das 20:20h às 21:20h com 20 participantes (sendo quatro do sexo feminino); Turma de Licenciatura Integrada de Matemática e Física 2014 – dia 29/11/18 das 19:15h às 20:15h com 06 participantes (sendo duas do sexo feminino). O teste, portanto, foi aplicado a 64 alunos, onde 08 eram de Mestrado, 32 de graduação em Matemática e Física e 24 de graduação em Biologia e Química.

Feito a aplicação do teste, seguindo os pressupostos estabelecidos por Cury (2007), passou-se a organizar os dados referentes às respostas dadas aos três itens. Antes, para facilitar a identificação dos itens respondidos por um aluno de determinada turma utilizou-se de um código constituído de letra maiúscula e número, de forma a distinguir se um aluno é de uma turma ou de outra e dessa forma arquivar ordenadamente essas informações para posterior consulta. Por exemplo: o aluno M101 é o aluno 01 da turma de Licenciatura Integrada de Matemática e Física 2014; o aluno B403 é o aluno 03 da turma de Licenciatura Integrada de Biologia e Química de 2014. Os códigos das turmas ficaram assim estabelecidos:

Quadro 4 – Código de identificação das turmas pesquisadas

Código de Identificação	Turma a ser identificada
M1	Licenciatura Integrada em Matemática e Física 2014
M2	Licenciatura Integrada em Matemática e Física 2015
M3	Licenciatura Integrada em Matemática e Física 2016
B4	Licenciatura Integrada em Biologia e Química 2014
B5	Licenciatura Integrada em Biologia e Química 2015
P6	Mestrado Profissional em Matemática 2018

Fonte: Dados da Pesquisa

Passou-se, então, a organizar as respostas de tal maneira a formar o corpus no qual se debruçaria a análise. Como os itens de cada teste estavam dispostos em folhas individuais, separaram-se os mesmos uns dos outros em três blocos conforme sua ordem no teste: Q1, Q2 e Q3. Em seguida, organizaram-se os itens em respondidos corretamente, respondidos incorretamente e em branco, quantificando-os conforme essa classificação. Essa etapa, segundo Bardin (2002), constitui o primeiro contato com os documentos a serem analisados. É a etapa denominada por ele de “leitura flutuante” sobre as respostas apresentadas pelos alunos com a finalidade de verificar as respostas incorretas que apareceram em cada item.

Tomando-se os itens respondidos incorretamente, verificaram-se quais deles tinham algo escrito no rascunho que justificasse a escolha daquela alternativa como resposta.

Quantificou-se esse levantamento conforme a alternativa escolhida e a existência de registro ou não. Ao observar os itens com distratores marcados, notou-se que nem todos os alunos escreveram algo no rascunho que justificasse a sua opção de resposta. Sendo assim, buscou-se verificar quantos e quais alunos fizeram algo em seu rascunho que justificassem suas respostas. Essas respostas incorretas com algo escrito no rascunho constituíram o corpus da pesquisa, e foram arquivadas conforme as identificações estabelecidas. Apenas algumas foram fotocopiadas e colocadas no trabalho para ilustrar a análise feita dos cálculos que explicam o raciocínio do aluno para chegar à resposta.

4.2 Codificação e Categorização dos dados

Na fase de tratamento dos resultados, foi feito o estabelecimento das categorias de respostas e a classificação dos erros ocorridos. Observando os critérios dos autores já citados na seção 2.3.2, buscou-se uma classificação adequada à análise dos itens do teste proposto aos estudantes, aos resultados esperados dentro do grupo selecionado na pesquisa para tipificar os erros encontrados. Assim optou-se por utilizar uma classificação já desenvolvida em um contexto de investigação, a classificação de erros proposta pela pesquisadora Heloísa Carvalho (CARVALHO, 2016). Para esta pesquisa, essa classificação foi modificada trocando-se o algarismo por uma letra maiúscula, e é a seguinte:

<u>Erro Classe A</u>: são erros que o aluno apresenta por desconhecimento de conteúdo específico de Cálculo. Ou seja, erros referentes às seguintes categorias de respostas: o aluno não calculou o limite da expressão dada; não soube aplicar o principio da derivada 1ª, não soube estabelecer a relação integral e área de regiões delimitadas por uma função e não considerou que a integral do gráfico localizada abaixo do eixo x é negativa.

<u>Erro Classe B</u>: refere-se aos erros cometidos por falta de conhecimentos básicos de matemática. Incluem-se nessa classe, Por exemplo, as categorias de respostas: o aluno realizou procedimentos algébricos inadequados para simplificar a fração algébrica; o estudante não soube simplificar a fração algébrica; não soube equacionar o problema.

<u>Erro Classe C</u>: são aqueles cometidos por distração do aluno como, por exemplo, copiar um número diferente do enunciado e errar resultados de uma conta de somar.

O Quadro 5 apresenta o esquema de classificação de erros utilizada neste trabalho para identificação e tipificação dos erros cometidos pelos acadêmicos no teste de Cálculo proposto. No esquema, as classes de erros foram identificadas por uma letra maiúscula.

Quadro 5 – Classificação de erros utilizada

Classificação de erros relacionados ao conteúdo de Cálculo no teste proposto		
Erros cometidos por falta de conhecimentos específicos de Cálculo (Classe A)	Erros cometidos por falta de conhecimentos matemáticos básicos (Classe B)	Erros cometidos por distração (Classe C)

Fonte: (CARVALHO, 2016)

Como o teste era constituído de itens de múltipla escolha com um gabarito e com três a quatro distratores, estabeleceram-se as classes[11] de erros que a marcação de um distrator poderia representar, no entanto, para fazer a quantificação dos tipos de erro, estabeleceram-se primeiramente as categorias de respostas que surgiram durante a análise das produções dos alunos nos rascunhos de cada item. Como o distrator é uma alternativa que parece correta para os participantes do teste que não desenvolveram a habilidade em questão (Haladyna apud (GUIA-INEP, 2010)), escreveu-se as possíveis resoluções que os justificassem e a resolução do gabarito.

4.3 Apresentação e Análise dos Dados

Após as fases de organização e codificação dos dados, nas quais os itens foram separados e quantificados em "corretos", "incorretos" e "em branco", nesta seção é feita a apresentação desses dados e o registro de suas freqüências em quadros e tabelas de freqüência absoluta e relativa, bem como a utilização de exemplos de respostas retirados do próprio corpus como apoio a análise dos erros cometidos pelos alunos ao responderem o teste proposto.

O teste de Cálculo era constituído de três itens que envolviam conteúdos já estudados no ensino básico e em semestres anteriores dos cursos pesquisados. No primeiro item requeria-se a simplificação de uma fração algébrica e o uso da definição de limites. No segundo, a aplicação da definição de derivada de 1ª e 2ª ordem na determinação da área mínima de um terreno e no terceiro, o uso da relação entre integral definida e a área de regiões delimitada por uma função entre dois pontos no plano cartesiano. Nas próximas seções serão descritos com detalhes essa análise das respostas a cada item.

[11] Essas categorias serão apresentadas nas seções 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3 sobre Análises dos erros ocorridos em cada item.

4.3.1 Análise do item 01

O item 01, apresentada na Figura 3, representa um item objetivo com duas afirmativas. A afirmativa I estabelece uma igualdade entre uma fração algébrica com um binômio, e a de número II, estabelece uma igualdade entre o limite de uma fração algébrica quando a variável tende ao valor numérico dois e o limite de um binômio quando a variável tende ao mesmo valor numérico. Este item exige que o aluno saiba a definição de limites, bem como a condição de simplificação de fatores do numerador pelo binômio do denominador da fração algébrica dada. E que o aluno saiba fatorar a expressão algébrica do numerador de modo a permitir a simplificação da fração pela divisão dos fatores semelhantes. Considera-se, portanto, que as habilidades/competências necessárias para resolução desse item são: saber fatorar expressões algébricas, saber simplificar frações algébricas, saber estabelecer a condição de existência de uma fração algébrica e utilizar a definição de limites.

Figura 3 – Item 01 do teste avaliativo de Cálculo

Questão 01 --

Um dos problemas detectados nas investigações sobre erros dos alunos em Cálculo Diferencial e Integral foi o não reconhecimento de padrões em uma expressão algébrica, de forma que fosse possível fatorá-la. ... Linchevski e Livneh (1999) consideram ser necessário que os alunos desenvolvam uma percepção da estrutura, que lhes permitam ser capazes de manipular tais expressões com flexibilidade. Hoch e Dreyfus (2004) consideram que "percepção da estrutura" pode ser descrita como: [...] uma coleção de habilidades. Essas habilidades incluem ver uma expressão ou sentença algébrica como uma entidade, reconhecer uma expressão ou sentença algébrica como uma estrutura previamente encontrada, dividir uma entidade em sub-estruturas, reconhecer conexões mútuas entre estruturas, reconhecer qual manipulação é possível e [...] qual é útil para realizar. (p. 51)

TEXTO DO ARTIGO DE HELENA N. CURY E BEATRIZ KONZEN, CLASSIFICAÇÃO E ANÁLISE DE ERROS EM ÁLGEBRA, P. 02.(COM ADAPTAÇÕES).

Pelo que foi exposto e do conhecimento algébrico adquirido, analise as igualdades I e II a seguir:

I. $\dfrac{x^2+x-6}{x-2} = x+3$ II. $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+x-6}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}(x+3)$

Pela análise feita, pode-se afirmar que:

(A) Apenas a igualdade I está correta (B) Apenas a igualdade II está correta

(C) Ambas as igualdades estão corretas (D) Ambas as igualdades estão incorretas

Fonte: (STEWART, 2001)

Nota: O enunciado do item foi adaptado para um item objetivo de múltipla escolha.

O que se esperava na resolução deste item, é que o estudante reconhecesse que apenas igualdade II é verdadeira, pois a de número I só é verdadeira quando estabelecido a condição de que a variável deve ser diferente do valor numérico 2. E que a afirmativa II é verdadeira, porque se trata do cálculo de limite de uma fração algébrica quando a variável tende a dois, não atingindo, portanto, esse valor. Dessa forma, a alternativa correta é a letra B.

Em detalhes, esse item trata do cálculo do limite de uma fração algébrica quando x tende a 2 e não quando $x = 2$, valor que torna a expressão do denominador igual a zero, o que leva a uma indeterminação. Portanto, apenas a igualdade do item II é válida, pois, para que o item I seja verdadeiro era preciso está escrito a condição $x \neq 2$. Ou seja, ainda que o aluno fatore corretamente a expressão do numerador e em seguida se cancele o fator $(x - 2)$ com o do denominador, isso só será verdadeiro quando se impõe a condição $x \neq 2$. Os distratores deste item são as opções A, C e D, e os possíveis caminhos que levaram a serem escolhidos são descritos a seguir.

Ao considerar a opção (A) como correta, o estudante está considerando que a afirmativa II é falsa. Neste, ele pode estar deduzindo que na afirmativa II, ao calcular o limite da fração algébrica quando a variável x tende a 2, que o denominador fique nulo, obtendo uma indeterminação. Considerando-se, nesse caso, que o mesmo não fatore o numerador para simplificar a fração algébrica, e que, ao calcular o limite no segundo membro da igualdade, o limite do binômio dê outro resultado.

O aluno que é levado a marcar a opção (C) está desconsiderando a condição para simplificar a fração algébrica da afirmativa I, ou seja, de que x tem que ser diferente de 2. Além de considerar correta a afirmativa II. Ao marcar a opção (D) correta, o estudante pode está levando em conta o que já fora dito no parágrafo sobre o distrator A sobre a afirmativa II e, que a afirmativa I só é verdadeira se for colocado a condição $x \neq 2$, para que o denominador não se anule.

Diante do exposto, as classes de erros que poderiam ocorrer para se chegar aos distratores da questão 01 apresentados foram estabelecidos no Quadro 6:

Quadro 6 – Classes de erros nos distratores do item 01

Classe de Erro	Distratores do item 01		
	Alternativa A	Alternativa C	Alternativa D
A	X		X
B		X	
C	X	X	X

Fonte: Dados da Pesquisa

Estabelecido as classes de erros possíveis para cada distrator, quantificou-se a freqüência com que os mesmos foram escolhidos como resposta para a questão e, assim, obteve-se o Quadro 7 com a freqüência relativa de marcação de cada distrator pelos alunos que responderam o item 01.

Quadro 7 – Freqüência de escolha dos distratores do item 01

Distrator Marcado	FR	Comentários
Alternativa A	37%	Distrator que considerava que apenas a igualdade I estava correta.
Alternativa C	52%	Esse distrator afirmava que as duas igualdades estavam corretas.
Alternativa D	11%	Aqui se afirmava que ambas as igualdades estavam incorretas.

Fonte: Dados da Pesquisa

Por este quadro é possível afirmar que a possibilidade de ocorrer erros tipo B e C é um pouco maior que a de ocorrer do tipo A, já que a alternativa C foi a mais escolhida, enquanto que a opção D teve o menor percentual de escolhas. Ou seja, entre afirmar que as duas estão corretas ou que ambas estão erradas, melhor escolher a primeira opção. Esses números mostram que 37% dos alunos não aprenderam a definição de limites já que não concordaram que a afirmativa II estivesse correta ao escolher a alternativa A.

Observado a freqüência de marcação de cada distrator, verificaram-se quantos e quais alunos fizeram algo em seu rascunho que justificassem suas respostas. O resultado está Quadro 8 no qual nota-se que, para aqueles que afirmaram que as duas igualdades estavam incorretas não souberam justificar o que estava errado nas duas igualdades.

Quadro 8 – Número de distratores com ou sem rascunho do item 01

Escreveu no rascunho?	Distratores do Item 01		
	Alternativa A	Alternativa C	Alternativa D
Sim	12	18	02
Não	05	06	03

Fonte: Dados da Pesquisa

A análise então se debruçou nas respostas com rascunho para se identificar que classe de erro ocorreu para levar o estudante a escolher tal distrator. Foram analisadas todas as trinta respostas com rascunho e, conforme a resposta dada chegou-se ao seguinte Quadro 9 com as categorias de respostas identificadas por códigos e suas freqüências:

Quadro 9 – Categoria de respostas do item 01

Código	Distratores do Item 01 com rascunho	FA	FR
Q1.1	Não soube calcular o limite da expressão dada.	14	25%
Q1.2	Não observou a condição para dividir o numerador pelo denominador da fração algébrica.	26	46%
Q1.3	Realizou procedimentos algébricos inadequados para simplificar a fração algébrica.	5	9%
Q1.4	Não simplificou a fração algébrica.	2	4%
Q1.5	Fez procedimento de resolução de uma equação em vez de simplificar a fração algébrica.	4	7%
Q1.6	Não considerou a divisão 0/0 como uma indeterminação.	2	4%
Q1.7	Lapso, distração ou esquecimento.	4	7%

Fonte: Dados da Pesquisa

As categorias foram agrupadas de acordo com as classes de erros pré-estabelecidas:

Quadro 10 – Classes de erros do item 01

Classe	Código da Categoria de Resposta	FA	FR
A	Q1.1	14	25%
B	Q1.2, Q1.3, Q1.4, Q1.5	37	65%
C	Q1.6, Q1.7	6	11%

Fonte: Dados da Pesquisa

Pelo exposto no Quadro 10, nota-se que os erros classe C ocorreram em menor quantidade e que os do tipo A não foram tão acentuados, o que era esperado. Já que nesse caso, a maioria dos erros está em considerar a afirmativa I verdadeira sem a condição $x \neq 2$. Não há erro em afirmar que a igualdade II era verdadeira, caso contrário, teríamos um erro que demonstra falta de conhecimento sobre limites.

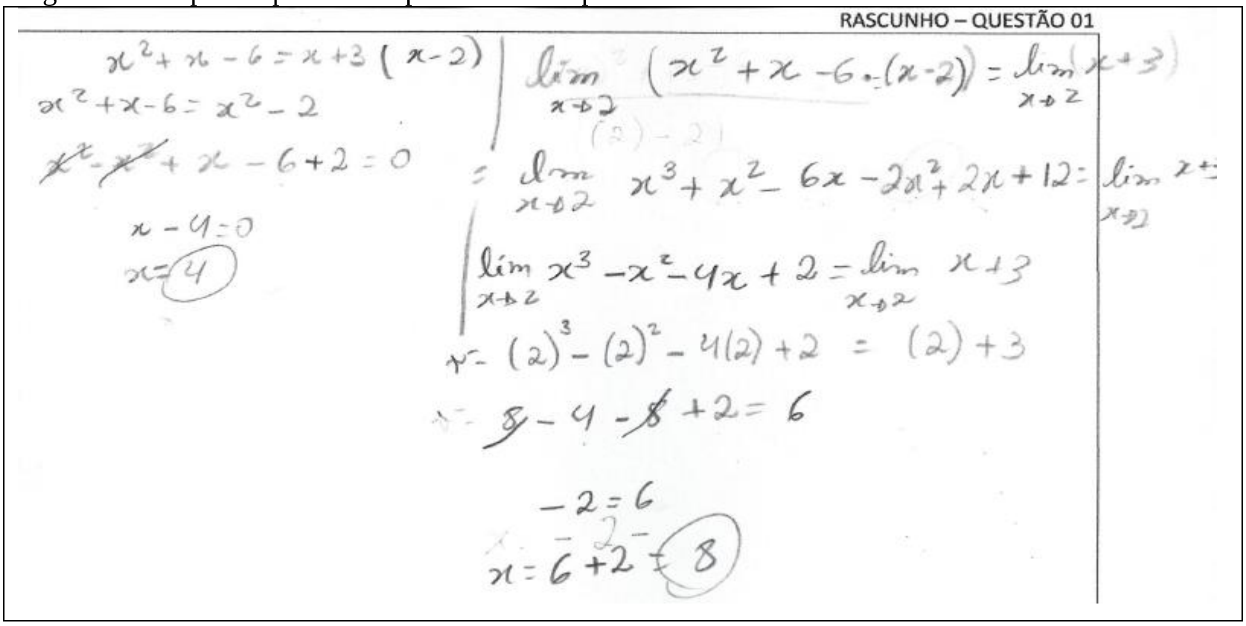
Quadro 11 – Freqüência dos tipos de erros na solução do item 01

Classe de Erro	FR	Comentários
A	25%	Os alunos cometeram esse tipo de erro por não demonstrarem conhecimento sobre limites.
B	65%	Os alunos que erraram e rascunharam suas respostas, tiveram erros de matemática básica, principalmente por não se lembrar da condição $x \neq 2$.
C	11%	Alguns estudantes, por lapsos, escreveram incorretamente suas respostas, tal como $2 + 3 = 6$.

Fonte: Dados da Pesquisa

Já os erros classe B foram notados em 65% de todas as respostas analisadas. Como o item requeria conhecimentos de matemática básica, como fatorar uma expressão algébrica, simplificar uma fração algébrica e lembrar a condição para tal simplificação, os alunos que não os expressaram adequadamente, cometeram esse tipo de erro. Em termos de freqüência relativa, distribuída no Quadro 11, os erros de classe A e classe C tiveram um percentual de 25% e 11%, respectivamente, índice muito menor que os de classe B. Os erros de classe C, que apareceram em menor proporção e compreendem problemas relacionados à distração no momento de resolver a questão, podem ser mais bem percebidos utilizando como exemplo a resposta do aluno B509 e apresentada na Figura 4.

Figura 4 – Resposta apresentada para o item 01 pelo estudante B509

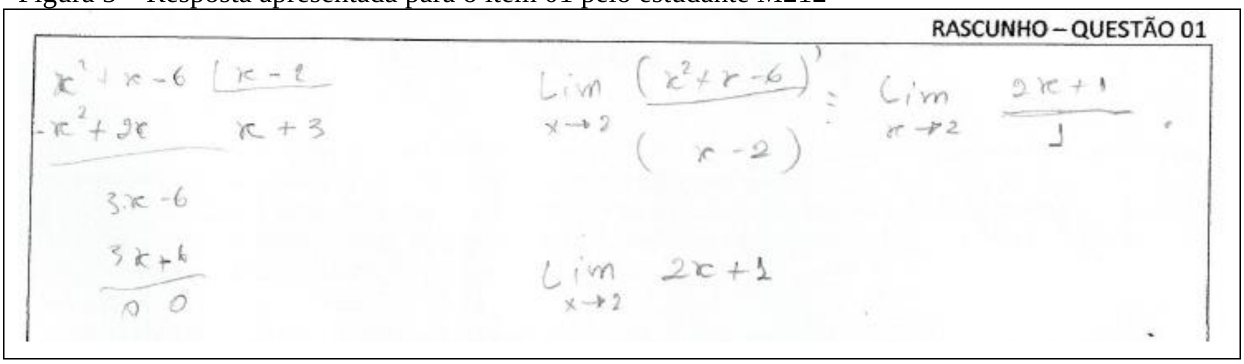


Fonte: Dados da Pesquisa

Este aluno realizou procedimentos algébricos incorretos, tanto na primeira quanto na segunda igualdade. Tomando a 1ª igualdade, efetuou erradamente o produto entre os dois binômios, além de considerar em seguida a situação como a resolução de uma equação. Um equívoco. Na 2ª igualdade, por distração, realizou um produto, em vez de uma divisão entre os termos da fração algébrica dada. No terceiro passo, escreveu 2 em vez de 12, outro erro por distração. E, no quinto passo, escreveu como resultado de $8 - 4 - 8 + 2$, 6, que ele escreveu como resultado também de $(2) + 3$, mais um equívoco. Ao final da resolução o respondente marca a opção A como correta.

Já os erros classe A, com uma ocorrência de 25%, podem ser exemplificado com a resposta do aluno M212 descrita na Figura 5.

Figura 5 – Resposta apresentada para o item 01 pelo estudante M212



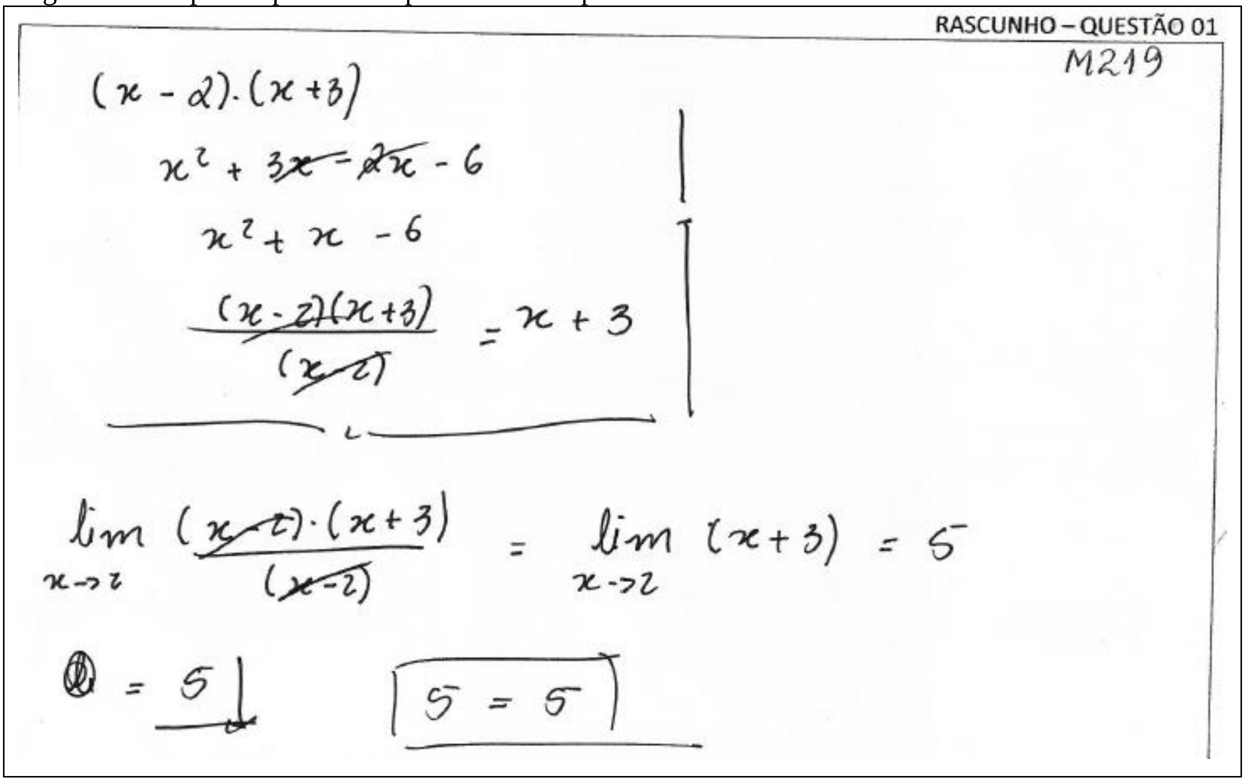
Fonte: Dados da Pesquisa

O aluno considerou que apenas a 1ª igualdade estava correta e demonstrou que a igualdade II não era verdadeira. Ao calcular o limite da fração algébrica, ele derivou tanto o trinômio quanto o binômio da mesma, obtendo a expressão $\lim_{x \to 2} 2x + 1$, o que dá uma expressão diferente da segunda parte da igualdade estabelecida, $\lim\limits_{x \to 2} x + 3$. O mesmo marcou o distrator A como correto.

Isso demonstra um conhecimento equivocado do aluno M212 sobre limites, interpretando-o como um caso de derivação. Considerando as demais respostas, observou-se que os erros relacionados a conhecimento de matemática básica foram os que mais ocorreram e, entre estes, foi o esquecimento ou não lembrança da condição $x \neq 2$ para validar a afirmativa I, além de outros equívocos realizados durante os procedimentos algébricos de simplificação da fração algébrica.

O erro mais ocorrido nas respostas dos alunos foi o de fazer os procedimentos algébricos corretamente na simplificação dos termos da fração algébrica, mas não lembrar a condição que a valida, $x \neq 2$. Veja na Figura 6 o que escreveu o aluno M219 em seu rascunho e que o levou a concluir que a opção correta era o distrator C, o qual afirma que as duas igualdades são verdadeiras:

Figura 6 – Resposta apresentada para o item 01 pelo estudante M219



Fonte: Dados da Pesquisa

4.3.2 Análise do item 02

Na Figura 7 está apresentado o item 02, cujo enunciado apresenta uma situação-problema envolvendo um loteamento retangular, sendo que o mesmo é ilustrado por duas figuras retangulares concêntricas com a demarcação na parte superior do retângulo maior de que suas dimensões horizontais foram prolongadas $3m$ à esquerda e $3m$ à direita em relação às dimensões de mesma direção do retângulo menor. De modo análogo, apresenta-se a demarcação, no lado esquerdo do retângulo maior, que suas dimensões verticais superam as dimensões, de mesma direção do retângulo menor, $2m$ acima e $2m$ abaixo. Mostrando assim uma superfície rachurada entre as dimensões dos dois retângulos. O enunciado do item pede que o respondente encontre a área mínima de todo este terreno, dados a diferença entre as dimensões dos dois retângulos e área disponível para construção, representada pelo retângulo menor, que é de $600m^2$.

Esse item exige do estudante as seguintes habilidades/competências necessárias para resolução do mesmo: saber resolver problemas, saber operar com expressões algébricas, saber calcular o valor numérico de uma expressão algébrica, saber resolver equação quadrática, saber as regras de derivação e saber aplicar o significado da derivada primeira de uma função na situação dada. Além disso, que o aluno saiba que igualando a derivada primeira à zero, estará se encontrando os pontos críticos da função, ou seja, o ponto de máximo ou mínimo local conforme o domínio.

Para encontrar a alternativa correta deste item, esperava-se que o aluno, considerando o comprimento y e a largura x do retângulo menor, escrevesse que a relação entre as duas dimensões é dada pelo produto $x.y = 600m^2$. E que as medidas do comprimento e da largura do retângulo maior seriam nesse caso $y + 6$ e $x + 4$, respectivamente. Estabelecesse, em seguida, que a área $A(x)$ do retângulo maior, em função da largura x, é dada pela expressão $A(x) = 6.(x + 104 + 400/x)$.

Após esse passo, observasse o que fora aprendido em Cálculo sobre a derivada primeira, já que o item pede a área mínima. Ou seja, que para calcular a área mínima devem-se encontrar os pontos críticos da função, no domínio dado, através do cálculo do valor numérico da variável x que anula a derivada primeira. O aluno, fazendo corretamente o processo de resolução da equação e de derivação, encontraria o valor numérico é $x = 20$ e a área mínima $A(20) = 864m^2$. Assim, a alternativa correta é a letra D.[12]

[12] Para maiores detalhes da resolução deste item 02 leia o Apêndice A no final da dissertação.

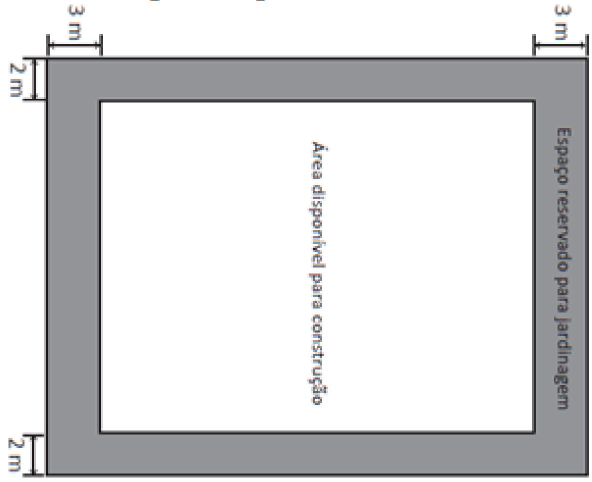
Figura 7 – Item 02 do teste avaliativo de Cálculo

Questão 02 --

Relaciona-se crescimento e decrescimento do gráfico de função com o sinal da derivada. Os máximos e mínimos locais acontecem exatamente quando há mudança de sinal de f'(x). Mais precisamente, temos o chamado Teste da derivada primeira. Outro instrumento para determinar se o ponto crítico x=c é máximo local ou mínimo local é a derivada segunda de f, se f é diferenciável em um intervalo aberto I, e c∈I é tal que f'(c) = 0 e f''(c) existe.

Texto de um livro de Fundamentos de Cálculo (ProfMat MA22, 2012, Unid 14 p. 8,10)

Uma construtora, com o objetivo de valorizar as áreas verdes, apresentou um projeto de loteamento, com terrenos retangulares, onde cada residência construída terá um jardim ao seu redor. Em cada terreno deverão ser reservados 3 metros na frente, 3 metros no fundo de 2 metros em cada lateral para jardinagem, conforme ilustra a figura a seguir.



Considerando-se que área disponível para construção será de 600m², a área mínima do terreno que atende às especificações exigidas pela construtora será de

(A) 606 m² (B) 610 m² (C) 726 m² (D) 864 m² (E) 924 m²

Fonte: Prova do ENADE 2017 Matemática Licenciatura
Nota: Questão 13, p 17

Os distratores desta questão são as opções A, B, C e E. Os possíveis raciocínios para suas escolhas podem ser assim descritos: ao considerar a opção A como correta, o estudante pode estar considerando que a área mínima é igual à área de um retângulo formado pelas dimensões dadas na figura $(3x2)$, que é igual a $6m^2$, mais o tamanho da superfície do retângulo reservada para construção, $600m^2$, ou seja, $606m^2$.

Marcando a alternativa B, o aluno deve estar supondo que a área mínima é soma dimensões dadas na figura mais a área disponível para construção, ou seja, $3+3+2+2+600=610m^2$. Considerando a opção C correta, o estudante pode estar levando em conta que as dimensões do terreno são: $x+3$ de largura e $y+2=\frac{600}{x}+2$ de comprimento. E seguindo os passos da solução do gabarito chega à conclusão que a área mínima é $726m^2$.

Para chegar a resposta E, é possível que o aluno, ao seguir corretamente os passos iniciais do gabarito, no passo em que se calcula a área mínima, $A_{mín}=A(x)\big|_{x=20}=6.(20+104+\frac{400}{20})=6.144=864m^2$, por distração, em vez de escrever que o resultado da expressão entre parentes é 144, escreva 154, ou seja, que a área mínima é $A_{mín} = 6.(20+104+\frac{400}{20}) = 6.154 = 924m^2$.

As possíveis classes de erro que podem ocorrem para se chegar a esses distratores são apresentadas no Quadro 12 e, no Quadro 13, a freqüência percentual de escolha de cada distrator pelos alunos que responderam o item.

Quadro 12 – Classes de erros nos distratores do item 02

Classe de Erro	Distratores do Item 02			
	Alternativa A	Alternativa B	Alternativa C	Alternativa E
A	X	X	X	X
B		X		X
C	X	X	X	

Fonte: Dados da Pesquisa

Quadro 13 – Freqüência de escolha dos distratores do item 02

Distrator marcado	Freqüência Relativa	Comentários
Alternativa A	14%	Distrator que considerava que a área mínima do terreno era $606\ m^2$.
Alternativa B	48%	Esse distrator afirmava que a área mínima do terreno era $610\ m^2$.
Alternativa C	28%	Aqui se afirmava que a área mínima do terreno era $726\ m^2$.
Alternativa E	10%	Essa opção afirmava que a área mínima do terreno era de $924\ m^2$.

Fonte: Dados da Pesquisa

Observando-se esses dados, nota-se que o distrator que teve o maior percentual de escolha foi o da alternativa B, quase 50%. O que mostra que quase a metade dos estudantes somou as dimensões dadas com a medida da área reservada para construção. Mas para se perceber melhor quais tipos de erros mais ocorreram nestas marcações, separaram-se os itens com alternativas marcadas com algo escrito no rascunho dos que não tinham.

O Quadro 14 apresenta o número desses distratores marcados com rascunho. Pelo que se observa neste quadro quase todos os alunos que escolheram a alternativa B não apresentaram nenhum rascunho, o que demonstra que eles fizeram o que fora descrito anteriormente: somou as dimensões dadas com a medida da área reservada para construção. Para demais escolhas, a diferença entre o número respostas com rascunho comparado com aquelas sem rascunho, não foi tão expressivo.

Quadro 14 – Número de distratores com ou sem rascunho do item 02

Escreveu no rascunho?	Distratores do Item 02			
	Alternativa A	Alternativa B	Alternativa C	Alternativa E
Sim	02	02	03	02
Não	02	12	05	01

Fonte: Dados da Pesquisa

Com base nas respostas com rascunho, buscou-se identificar as categorias de respostas que levaram a erros e o estudante a escolher tais distratores, chegando-se ao Quadro 15 com as seguintes categorias:

Quadro 15 – Categoria de respostas do item 02

Código	Categoria de respostas	FA	FR
Q2.1	Não soube aplicar o principio da derivada 1ª.	1	6%
Q2.2	Não soube equacionar o problema.	5	31%
Q2.3	Não soube estabelecer uma relação de dependência entre as dimensões do terreno.	2	13%
Q2.4	Considerou a área para jardinagem como produto ou somas das dimensões 2m e 3m.	4	25%
Q2.5	Utilizou dimensões não dadas para solucionar o problema.	3	19%
Q2.6	Distração e substituição inadequadas de variáveis.	1	6%

Fonte: Dados da Pesquisa

Ficaram então estabelecidas as seis categorias de respostas com tendência a erros, e foram agrupadas nas classes de erros pré-estabelecidas, e assim:

Quadro 16 – Classes de erros do item 02

Classe	Código da Categoria de Resposta	FA	FR
A	Q2.1	1	6%
B	Q2.2, Q2.3	7	44%
C	Q2.4, Q2.5, Q2.6	8	50%

Fonte: Dados da Pesquisa

Com base nesses dados tem-se a seguinte distribuição das classes de erros nas soluções analisadas do item 02 do teste de Cálculo e que é apresentada no Quadro 17 em suas freqüências relativas.

Quadro 17 – Freqüência das classes de erros na solução do item 02

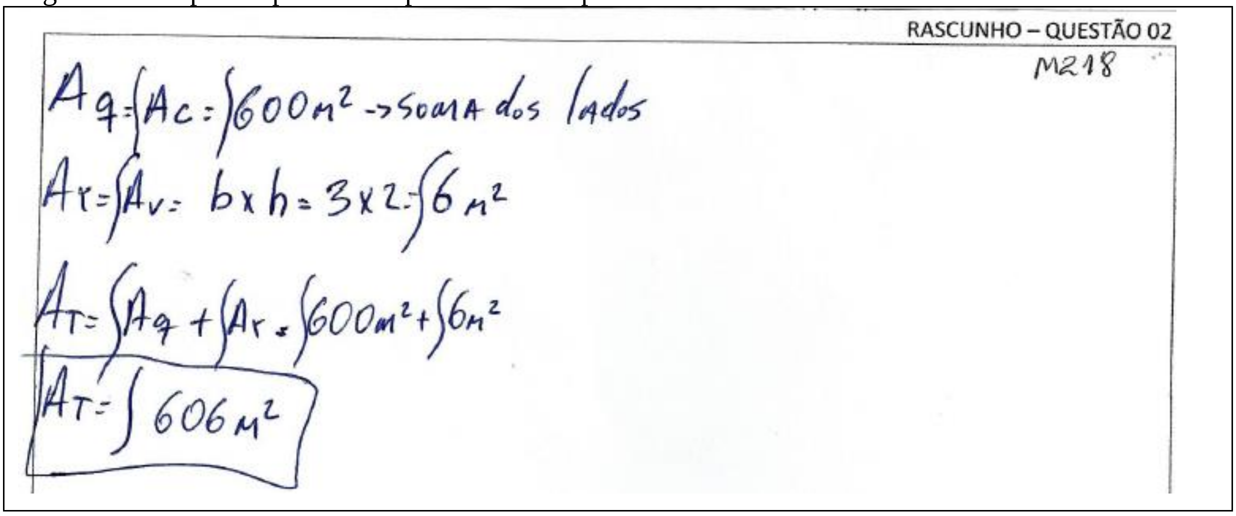
Classe de Erro	FR	Comentários
A	6%	Um aluno apenas desenvolveu bem os procedimentos equacionais, mas não soube aplicar as regras de derivação.
B	44%	Muitos apresentaram erros como não saber expressar algebricamente a situação e equacioná-la.
C	50%	Uns não se atentaram para a área destinada ao jardim e outro fez substituições equivocadas das dimensões da área reservada para construção.

Fonte: Dados da Pesquisa

Pelo que se observa nos quadros, apenas um aluno apresentou em sua resposta erro de classe A, mas isso ocorreu porque não soube aplicar as regras de derivação e nem o princípio da derivada primeira no problema. Isso é explicado pelo fato de a maioria dos que apresentaram resposta não conseguirem nem montar a equação que representasse o problema para, assim, aplicar os princípios da derivada primeira. Desatenção aos dados do problema e a dificuldade em interpretar a situação para equacioná-la para, em seguida, utilizar os conhecimentos de Cálculo, impossibilitaram outros a chegarem à solução da questão.

Assim os erros de classe C foram os que mais apareceram e compreendem a momentos de desatenção as informações dadas no item. Parece que alguns alunos não se aperceberam do que seria a área reservada ao jardim, não atentaram para o tamanho da superfície, suas dimensões. Tal dificuldade pode ser mais bem percebida na resposta apresentada pelo aluno M218 na Figura 8, o que o levou a marcar o distrator (A).

Figura 8 – Resposta apresentada para o item 02 pelo estudante M218

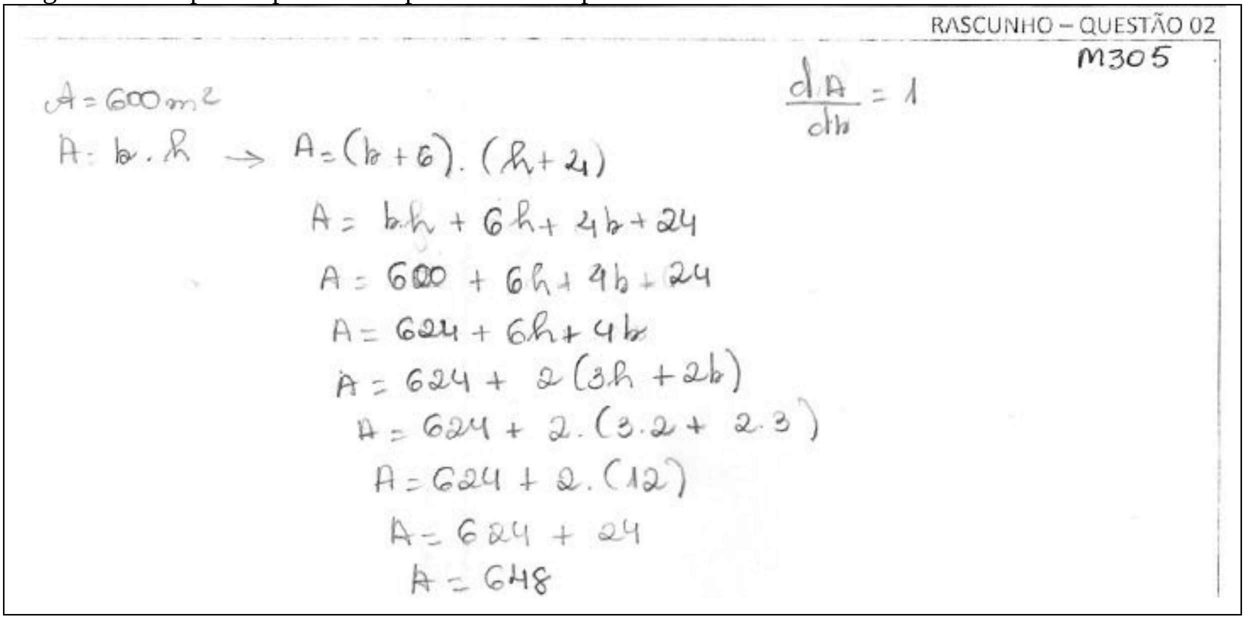


Fonte: Dados da Pesquisa

Em sua resposta, o aluno considerou que a área mínima (A_T) é equivalente a soma das áreas das seguintes superfícies: superfície reservada para construção (A_q) e da superfície reservada para jardinagem (A_v). No entanto, ele colocou a área reservada para o jardim como equivalente ao produto das dimensões $3m$ e $2m$ dadas na figura. Um equívoco, uma falta de percepção por parte do aluno das dimensões do jardim. Um erro classe C, pois não atentou a este fato e, também erro de classe B, pois se trata da falta de habilidade na resolução de problemas, no caso sobre áreas.

Os erros de classe B que também ocorreram foram devido aos alunos não saberem escrever algebricamente a situação problema enunciada e equacionar o problema para que, em seguida, aplicasse as regras de derivação e o princípio da derivada primeira que soluciona, de modo mais simples, a questão. Foi o que escreveu o aluno M305 como justificativa para a resposta. Ele considerou acertadamente que área total do terreno é dada por $A = (b + 6)(h + 4)$, tomando b e h como as dimensões da superfície reservada para construção. Aplicou corretamente a propriedade distributiva, mas substituiu equivocadamente as dimensões b e h por 3 e 2, respectivamente. Observa-se erro de classe C e erro de classe B. O primeiro, pela substituição desatenta de h por 2 e de b por 3 e o segundo, por não estabelecer uma relação entre as dimensões b e h. E com o resultado obtido, o aluno marcou o distrator (C).

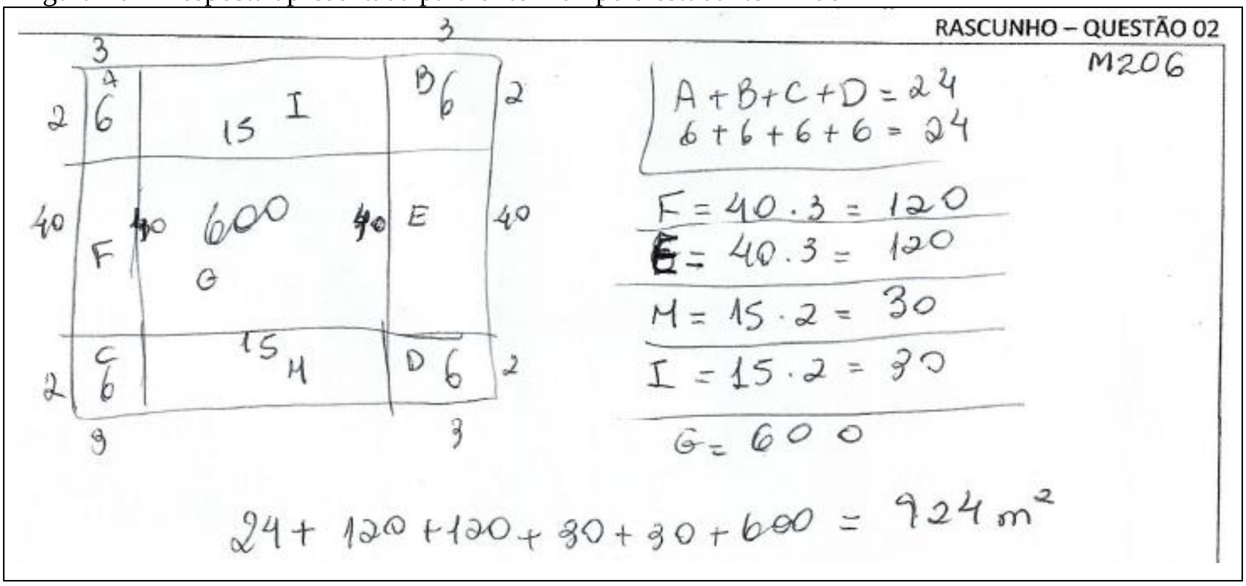
Figura 9 – Resposta apresentada para o item 02 pelo estudante M305



Fonte: Dados da Pesquisa

Outro erro que chamou atenção foi o do ocorrido na resposta do aluno M206, colocada na Figura 10 e que o levou a marcar o distrator (E).

Figura 10 – Resposta apresentada para o item 02 pelo estudante M206



Fonte: Dados da Pesquisa

O aluno dividiu a figura do terreno em nove superfícies: quatro com dimensões $2x3$, duas com dimensões $2x15$, duas com dimensões $40x3$ e uma com dimensões $40x15$. Obteve, portanto, quatro áreas de $6m^2$, duas de $30m^2$, duas de $120m^2$ e uma de $600m^2$. Nota-se que ele considerou que a superfície reservada para construção, de área $600m^2$, teria as dimensões $40m\ e\ 15m$, um equívoco, pois essas medidas não foram dadas no problema. Por fim, o aluno somou as áreas obtidas, obtendo a resposta contida no distrator E. O aluno cometeu erro de classe C, pois não atentou que no problema não fora dado nenhuma dimensão da superfície reservada a construção e que o que se pedia era a área mínima.

4.3.3 Análise do item 03

Está apresentado na Figura 11 o item de número 03, um item objetivo com três afirmativas.

Figura 11 – Item 03 do teste avaliativo de Cálculo

Questão 03 --

Os fatos que relacionam a integral definida e áreas de regiões têm como um dos pontos o seguinte: Se $f:[a,b]\to R$ é uma função contínua tal que $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$ então o limite $\int_a^b f(x)dx$ é a área da região determinada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas verticais $x=a$ e $x=b$.

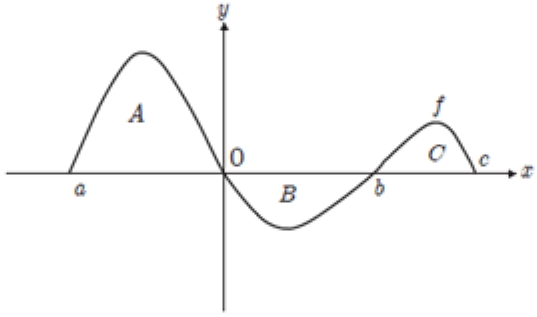
Texto encontrado em um livro de Fundamentos de Cálculo (ProfMat MA22, 2012, Unid 17 p.18)

Considere $f:[a,c]\to R$ uma função contínua e $b\in(a,c)$, conforme ilustra o gráfico abaixo. Represente por:

A a área da região limitada pela reta de equação $y=0$ e pela curva $\{(x,f(x));x\in[a,0]\}$;

B a área da região limitada pela reta de equação $y=0$ e pela curva $\{(x,f(x));x\in[0,b]\}$;

C a área da região limitada pela reta de equação $y=0$ e pela curva $\{(x,f(x));x\in[b,c]\}$;



Sabendo-se que $A=5$, $B=3$ e $C=2$, avalie as afirmações a seguir.

I. $\int_a^0 f(x)dx=5$

II. $\int_0^b f(x)dx=3$

III. $\int_a^c f(x)dx=4$

É correto o que se afirma em

(A) I, apenas. (B) II, apenas. (C) I e III, apenas. (D) II e III, apenas. (E) I, II e III.

Fonte: Prova do ENADE 2017 Matemática Licenciatura
Nota: Questão 09, p. 16

No enunciado do item é dado o gráfico de uma função $f(x)dx$ definida no intervalo $[a,c]$, onde as abscissas 0 e b pertencem a este intervalo, e com $b>0$. Neste gráfico aparecem três curvas: a primeira situada acima do eixo x, representando a área A, com concavidade voltada para baixo, delimitada por $y=0$ e a função $(x,f(x))$ para $a<x<0$; a segunda, situada abaixo do eixo x, representando a área B, e delimitada por $y = 0$ e a função $(x, f(x))$ para $0 < x < b$, com concavidade voltada para cima; e a terceira, delimitada por $y = 0$ e a função $(x, f(x))$ para $b < x < c$, com concavidade voltada para baixo e representando a área C. A instrução diz que os valores das áreas A, B e C são, respectivamente, 5, 3 e 2. E pede para que se avaliem as afirmativas I, II e III.

A afirmativa I diz que $\int_a^0 f(x)dx = 5$, a de número II que $\int_0^b f(x)dx = 3$ e a afirmativa III, que $\int_b^c f(x)dx = 4$. Para responder este item, é exigido que o estudante saiba a definição de integral de Riemann associando-a ao valor da área da curva $f(x)dx$ delimitada pela reta $y = 0$ e x pertencente ao intervalo dado. E mais ainda, que a integral da curva abaixo do eixo x é negativa e que a integral de uma função $f(x)dx$ em um intervalo que contem outros intervalos menores é igual à soma das integrais em cada um desses intervalos dessa função.

As habilidades/competências necessárias para a solução desse item são: usar a definição de integral de Riemann, saber que a integral de uma curva abaixo do eixo x é negativa, e saber que a integral do intervalo $[a, c]$ é igual a soma das integrais dos intervalos $[a, 0], [0, b]\ e\ [b, c]$. Neste item esperava-se que o respondente reconhecesse que apenas a afirmativa I e III são verdadeiras, ou seja, que a alternativa correta é a letra C.

De fato, pela definição de integral de Riemann, a área delimitada pela curva em cada intervalo do gráfico é igual à integral da função que representa a curva nesse intervalo. Partindo dessa definição tem-se que a integral de $f(x)dx$ nos intervalos $[a, 0], [0, b]\ e\ [b, c]$ seriam, respectivamente, iguais a $5, -3\ e\ 2$. Como a integral de $f(x)dx$ no intervalo $[a, c]$ é igual a soma das áreas, tem-se que o seu resultado é obtido soma $5 + (-3) + 2$, o que dá 4.[13]

As opções A, B, D e E são os distratores deste item e os possíveis raciocínios que levam os alunos a escolhê-los são descritos a seguir. Marcando esta alternativa A, o aluno diz que a afirmativa III está errada supondo que a integral definida é a soma das áreas A, B e C em módulo, e que a integral da afirmativa II também está errada, pois deve ser o oposto do valor da área B.

Ao considerar a opção B como correta, o estudante pode estar considerando que: a integral da afirmativa I deve ser negativa, pois os valores de x nesse intervalo são negativos; que a integral definida no intervalo $[a, c]$ é igual a soma das áreas A, B e C em módulo, o que torna a afirmativa III falsa; e que apenas a afirmativa II está correta, pois os valores de x nesse intervalo são positivos.

[13] Os fatos que justificam essa resposta estão no Apêndice B sobre a relação entre integral e áreas de regiões.

Para chegar a D como resposta certa, é possível que o aluno entendesse de modo correto que $\int_a^c f(x)dx = A - B + C = 5 - 3 + 2 = 4$, mas equivocadamente, que a afirmativa II está correta por considerar que a função está definida no intervalo $x > 0$, e que afirmativa I está errada, pois a função está definida no intervalo em que $x < 0$. Considerando a opção E correta, o estudante deve está levando em conta que $\int_a^c f(x)dx = A - B + C = 5 - 3 + 2 = 4$, mas que a integral da afirmativa II não deve ser o oposto do valor da área B.

No Quadro 18 são apresentadas as possíveis classes de erro que podem ocorrer para que o aluno assinale algum desses distratores.

Quadro 18 – Tipos de erros nos distratores do item 03

Classe de Erro	Distratores do Item 03			
	Alternativa A	Alternativa B	Alternativa D	Alternativa E
A	X	X	X	X
B		X		X
C	X	X	X	

Fonte: Dados da Pesquisa

Pela análise do quadro havia grande possibilidade de ocorrer erros de classe A, já que em todas as alternativas requeriam-se conhecimentos relacionados ao Cálculo propriamente dito. Quantificando-se as escolhas dos distratores desse item, obteve-se o seguinte quadro com o percentual de freqüência dessas escolhas pelos alunos:

Quadro 19 – Freqüência de escolha dos distratores do item 03

Distrator marcado	FR	Comentários
Alternativa A	21%	Distrator que considerava que a integral I estava correta.
Alternativa B	26%	Esse distrator afirmava que apenas a integral II estava correta.
Alternativa D	18%	Aqui se afirmava que apenas as integrais II e III estavam corretas.
Alternativa E	35%	Nessa opção afirmava-se que todas as integrais estavam corretas.

Fonte: Dados da Pesquisa

Nota-se que a alternativa E foi a mais escolhida, pois concordava que todas as afirmativas eram verdadeiras. Entre concordar que um das afirmações é falso e que todas são verdadeiras, é melhor escolher a segunda opção. Enquanto que a alternativa D foi escolhida por um menor número de respondentes. Era um distrator que negava a veracidade da afirmativa I. O distrator B, que afirmava que apenas a integral II era verdadeira, teve um percentual de 26% enquanto que a afirmativa A, que considerava as integrais II e III falsas, teve um percentual um pouco menor, 21%

Observado essa freqüência, analisaram-se as produções dos alunos em que havia algo escrito em seus rascunhos que justificassem suas respostas. Separaram-se então os itens marcados com rascunho dos itens marcados sem rascunho e chegou-se ao seguinte quadro com a distribuição dessas informações referentes ao item 03:

Quadro 20 – Número de distratores com ou sem rascunho do item 03

Escreveu no rascunho?	Distratores do Item 03			
	Alternativa A	Alternativa B	Alternativa D	Alternativa E
Sim	03	05	03	07
Não	04	04	03	05

Fonte: Dados da Pesquisa

Nota-se que a metade dos estudantes que escolheram esses distratores não apresentou nenhuma justificativa para a marcação dos mesmos, mostrando um desconhecimento do assunto. Buscou-se então a descobrir as categorias de respostas que levaram os alunos a cometerem erros e escolherem esses distratores.

Quadro 21 – Categoria de respostas do item 03

Código	Categoria de respostas	FA	FR
Q3.1	Não soube estabelecer a relação integral e área de regiões delimitadas por uma função.	4	17%
Q3.2	Não considerou que a integral do gráfico localizada abaixo do eixo x é negativa.	12	50%
Q3.3	Considerou a medida da área como extremidade dos intervalos reais.	1	4%
Q3.4	Desatenção.	7	29%

Fonte: Dados da Pesquisa

As respostas com rascunho foram analisadas e chegou-se ao Quadro 21 com as quatro categorias descritas e que foram agrupadas nas classes de erros pré-estabelecidas da forma que segue no Quadro 22:

Quadro 22 – Classes de erros do item 03

Classe	Código da Categoria de Resposta	FA	FR
A	Q3.1, Q3.2	16	67%
B	Q3.3	1	4%
C	Q3.4	7	29%

Fonte: Dados da Pesquisa

Observa-se que houve apenas um erro de classe B, pois nesse caso o item não envolvia procedimentos de matemática básica, mas da relação entre integral definida e área de uma região no plano cartesiano delimitada por função em dado intervalo.

Quadro 23 – Freqüência dos tipos de erros na solução do item 03

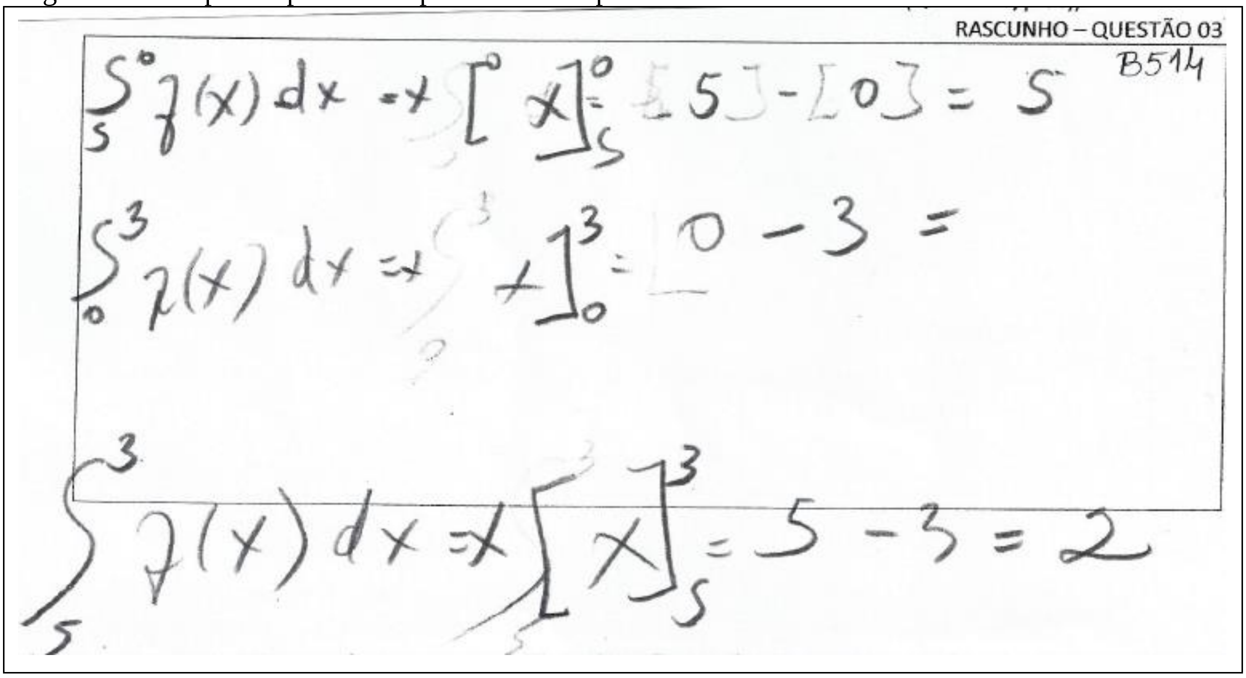
Classe de Erro	FR	Comentários
A	67%	Os alunos demonstraram não saber que a integral de uma função com valores negativos é negativa.
B	4%	Como a questão não apresentava conteúdo de Matemática Básica, praticamente não ocorreu nenhum desse tipo.
C	29%	Ocorrido em algumas respostas, como não atentar para os extremos da integral da afirmativa III.

Fonte: Dados da Pesquisa

Com base nesse levantamento, obteve-se o percentual dos tipos de erros ocorridos na solução do item 03 do teste de Cálculo o qual está distribuído no Quadro 23.

Nota-se que as classes de erros mais freqüentes foram os de classe A, que compreendem conhecimento a respeito de integrais e área de uma região do plano delimitado por uma função. Já os erros de classe C foram percebidos algumas respostas que mostram, por exemplo, a desatenção de alunos aos extremos da integral III. Tal dificuldade pode ser mais bem percebida na resposta do aluno B514 apresentada na Figura 12.

Figura 12 – Resposta apresentada para o item 03 pelo estudante B514

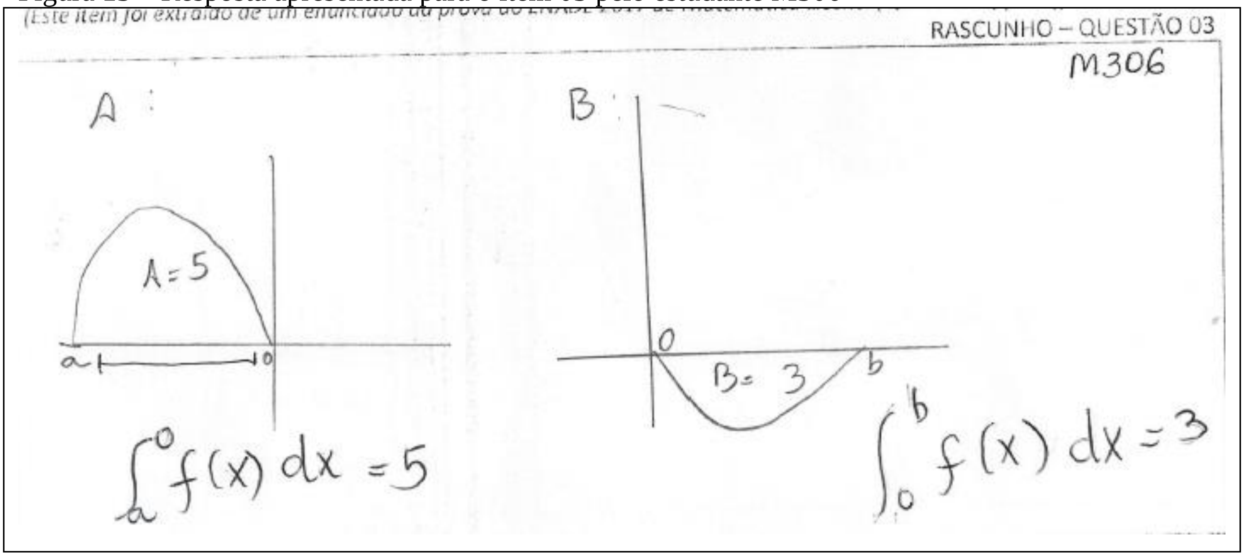


Fonte: Dados da Pesquisa

O erro apresentado nesse caso, classificado como de classe C, deu-se pela desatenção do respondente em colocar valores para as abscissas a, b e c; e em estabelecer que o valor da integral da função no intervalo $[3,5]$ é igual à soma dos valores das integrais nos intervalos $[0,3]$ e $[0,5]$, que foram escritos erradamente. Com base nessa resolução concluiu que a integral I vale 5, a integral II vale -3 e a integral III vale 2 e que, portanto, a resposta correta é a opção A.

Agora observe a resposta do aluno M306 na Figura 13. O aluno M306 assinalou a alternativa D como correta, cuja afirmação era que apenas as integrais II e III estavam corretas. No entanto, o aluno desenhou num plano cartesiano a região A e abaixo escreveu que a integral I é igual a 5; desenhou em outro plano a região B e abaixo escreveu que a integral II é igual a 3; e em outro plano fez o desenho da região C e ao lado escreveu que a integral III é igual a 2. Apresentou, portanto, erro classe A e erro classe C, pois não lembrou que a integral da região do gráfico abaixo do eixo x é negativa e se, marcou que não era negativa, por que concordou que a afirmativa III estava certa, já que representa a soma das integrais?

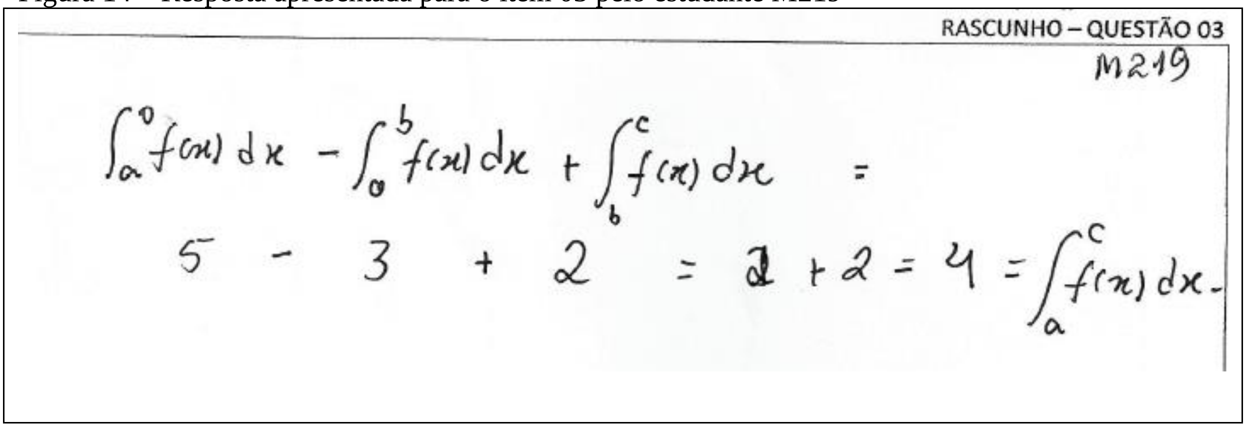
Figura 13 – Resposta apresentada para o item 03 pelo estudante M306



Fonte: Dados da Pesquisa

A resposta do aluno M219 mostra que a integral da função no intervalo $[a, c]$ é igual a soma da integral de f em $[a, 0]$ com a integral de f em $[b, c]$, menos a integral de f em $[0, b]$. Equivalendo dizer que: $5 - 3 + 2 = 2 + 2 = 4$. Entretanto, não lembrou o fato de que a integral no intervalo $[0, b]$ deveria ser negativa. Erro de classe A pelo desconhecimento ou por não lembrar que a integral de uma função nesse intervalo dado no gráfico é negativa.

Figura 14 – Resposta apresentada para o item 03 pelo estudante M219



Fonte: Dados da Pesquisa

Esses foram alguns exemplos de respostas encontradas que mostram os erros cometidos pelos alunos ao responderem os itens do teste de Cálculo proposto.

4.3.4 Opinião dos alunos sobre os itens do teste

Apresentam-se nesta seção a opinião dos alunos que responderam ao teste as quais foram obtidas pelas perguntas colocadas no questionário proposto para os alunos.

Os alunos foram indagados a respeito do grau de dificuldade dos itens do teste que responderam e se as informações/instruções fornecidas para a resolução das questões foram suficientes para resolvê-las, e o resultado foi o seguinte expressado nos quadros a seguir:

Quadro 24 – Opinião dos alunos sobre o grau de dificuldade do teste de Cálculo

Opções de respostas	FA	FR
Fácil	05	9%
Médio	19	34%
Difícil	18	32%
Muito Difícil	14	25%

Fonte: Dados da Pesquisa

Diante dos dados exposto nos Quadros 24 e 25, nota-se que os alunos que responderam ao teste de Cálculo em sua maioria, 57%, acharam difícil ou muito difícil os itens do teste, mesmo que grande parte concorda-se que as informações/instruções fornecidas para respondê-lo foram suficientes para respondê-lo e, até excessivas, 84%.

Quadro 25 – Opinião dos alunos sobre as informações/instruções para resolução do teste

Opções de respostas	FA	FR
Sim, até excessivas	25	43%
Sim, em todas elas	24	41%
Sim, somente em algumas	05	9%
Não, em nenhuma delas	04	7%

Fonte: Dados da Pesquisa

O Quadro 26 mostra o quantitativo de respostas sobre a sétima pergunta: “Você se deparou com alguma dificuldade ao responder o teste. Qual?”. E o resultado foi o seguinte:

Quadro 26 – Opinião dos alunos sobre as dificuldades encontradas no teste

Opções de respostas	FA	FR
Desconhecimento do conteúdo	25	40%
Forma diferente de abordagem do conteúdo	24	39%
Falta de motivação para fazer o teste	05	9%
Não tive qualquer tipo de dificuldade para responder o teste	04	7%

Fonte: Dados da Pesquisa

As respostas dadas a pergunta oito do questionário, na qual os participantes da pesquisa tiveram que responder se havia estudado e aprendido os conteúdos envolvidos nos itens do teste, estão dispostas no Quadro 27. O que chama atenção nesse quadro é que 79% desses alunos afirmaram que: não estudou a maioria dos conteúdos contidos no teste ou estudou e não os aprendeu, embora os alunos que responderam a esse questionário foram aqueles que já cursaram Cálculo I ou Cálculo com funções de uma variável.

Quadro 27 – Opinião dos alunos sobre a aprendizagem dos conteúdos de Cálculo nos itens

Opções de respostas	FA	FR
Não estudou ainda a maioria desses conteúdos	04	7%
Estudou alguns desses conteúdos, mas não os aprendeu	19	35%
Estudou a maioria desses conteúdos, mas não os aprendeu	20	37%
Estudou e aprendeu muitos desses conteúdos	10	19%
Estudou e aprendeu todos esses conteúdos	01	2%

Fonte: Dados da Pesquisa

As respostas destes dois quadros explicam em parte as opiniões dadas nos Quadros 24 e 25, pois afirmaram que os fatores que dificultaram esses alunos responderem ao teste foi o desconhecimento do conteúdo, 40%, e a forma diferente de abordagem do conteúdo, 39%. Diante dessa dificuldade apresentada, fica a indagação: os professores de graduação estão levando seus alunos a responderem itens elaborados segundo as regras padrão de elaboração de itens?

Quadro 28 – Opinião dos alunos sobre os temas de Cálculo que apresentam dificuldades

Opções de respostas	Freqüência Absoluta	Freqüência Relativa
Matemática Básica	15	18%
Limites	15	18%
Derivada	18	22%
Integral	22	27%
Outros temas	12	15%

Fonte: Dados da Pesquisa

E por fim os participantes foram indagados sobre a que temas do Cálculo está relacionada às suas principais dificuldades, e o que responderam está no Quadro 28. Nota-se que as dificuldades estão bem distribuídas, com um maior percentual para o tema integral seguido de derivada, mas persistindo ainda dificuldades relacionadas à Matemática básica. Esses dados apresentados pelo questionário refletem o que os índices de desempenho dos alunos dessas turmas em Cálculo de função de uma variável e em Cálculo I mostram no período de 2014 a 2017.

4.3.5 Opinião dos professores sobre erros em Cálculo

Nesta seção descrevem-se as opiniões dos professores aos quais foi proposto o questionário com as perguntas direcionadas.

Observando as respostas dadas pelos docentes em relação à pergunta sobre a que temas estão relacionadas às principais dificuldades dos alunos de graduação e pós-graduação na disciplina Cálculo de função com uma variável todos foi unânimes em afirmar: Matemática

Básica. Com relação à pergunta aberta: “a que você atribui a freqüência desses tipos de erros?”, responderam conforme os comentários contidos no Quadro 29.

Quadro 29 – Causas das freqüências dos tipos de erros segundo os professores pesquisados

Professor	Freqüência do tipo de erro	Comentários
P1	Tipo B: 60%	Ensino Básico ruim.
P2	Tipo A: 90%	Má formação do 2º grau (atual Ensino Médio)
P3	Tipo B: 70%	Falta-lhes conhecimento sobre Matemática Básica. A academia os trata como se os conhecimentos do Ensino Médio estivessem todos sido apropriados por eles. Mesmo com disciplinas que deveriam prepará-los para o Cálculo, ainda sim a falta desses conhecimentos permanece.
P4	Tipo B: 50%	Professores mal preparados ou desmotivados nas disciplinas de matemáticas anteriores (a partir da 2ª série), em relação ao tipo B. Problemas de ordem pessoal em todos os tipos de erros. Professores mal preparados ou com abordagem incorreta em relação ao tipo A. Desmotivação do aluno em todos os tipos.
P5	Tipo B: 50%	Os erros do tipo C ocorrem, a meu ver, principalmente pelo fato de o aluno não está habituado a resolver problemas com complexidade algébrica que o Cálculo exige. Considerando que as manipulações são constantes a partir do 7° ano do Ensino Fundamental, e tornam-se ainda mais freqüentes no Ensino Médio, a meu ver, os erros do tipo B se devem a aprovação quase automática dos discentes sem esses tenham reais condições de serem aprovados. O que faz com que os discentes deixem de buscar realmente entender o significado da linguagem algébrica na modelagem e resolução de problemas. Vejo a ocorrência dos erros do tipo A como uma conseqüência direta dos erros do tipo B, em outras palavras, vejo que alguns dedicam tanto esforço mental no processo de manipulação algébrica que não sobra “espaço” para o significado geométrico dos principais elementos do Cálculo.

Fonte: Dados da Pesquisa

Pelas respostas dos professores pesquisados, nota-se que, segundo eles, a causa mais freqüente para os erros cometidos pelos alunos em atividades avaliativas da disciplina Cálculo é a falta de conhecimentos de Matemática Básica. Um professor afirmou: “Vejo a ocorrência dos erros do tipo A como uma conseqüência direta dos erros do tipo B, em outras palavras, vejo que alguns dedicam tanto esforço mental no processo de manipulação algébrica que não sobra “espaço” para o significado geométrico dos principais elementos do Cálculo. Mas um deles destacou que, umas das causas é a má preparação de professores que ensinam a Matemática Básica, bem como a incorreta abordagem do Cálculo de alguns professores no Ensino Superior.

E a respeito da pergunta “Pela sua experiência no Magistério Superior, nas avaliações de Cálculo dos alunos, que tipos de erros são mais freqüentes?”, quatro responderam que os mais freqüentes são erros do tipo B (relacionados à Matemática Básica) e um a erros do tipo A (relacionados ao conhecimento de Cálculo). Além disso, estipularam uma freqüência para esses erros: quatro disseram que os erros do tipo B ficam em torno de 50% a 70%, enquanto que um afirmou que os erros do tipo A tem uma freqüência de 90%.

4.3.6 Análise dos resultados do teste

Esta seção apresenta os dados consolidados do teste como um todo, juntando o quantitativo dos tipos de erros ocorridos na solução de cada item.

A Tabela 3 apresenta o número e a percentagem de itens que foram deixados em branco, bem como daqueles que respondidos correta e incorretamente pelos acadêmicos ao resolver o teste avaliativo de Cálculo.

Tabela 3 – Freqüência de itens corretos, incorretos e em branco no teste de Cálculo

Item	Corretos		Incorretos		Em branco	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
01	12	19%	46	72%	6	9%
02	21	33%	29	45%	14	22%
03	19	30%	34	53%	11	17%

Fonte: Dados da Pesquisa

Observando os dados da Tabela 3, nota-se que o índice de respostas incorretas ou deixadas em branco é muito maior que o percentual de acertos. Para o item 01: 81% de incorretos ou em branco contra 19% de corretos; para o item 02: 67% contra 33%; e para o item 03: 70% contra 30%. Os dados da tabela mostram também que os itens 02 e 03 tiveram índices parecidos de acertos, 33% e 30% respectivamente. Já o item 01 foi o que apresentou o menor índice de respostas em branco, porém o maior índice de respostas incorretas.

Esse resultado confirma a dificuldade informada no questionário por esses alunos, quando 57% acharam difícil ou muito difícil os itens do teste e 79% afirmaram o desconhecimento do conteúdo ou a forma diferente de abordagem do conteúdo dificultou responderem o teste. Acrescenta-se ainda o fato de que 79% desses alunos afirmaram que não estudou a maioria dos conteúdos contidos no teste ou estudou e não os aprendeu.

Na Tabela 4 apresenta-se o número e a percentagem de itens corretos, incorretos e em branco do teste de Cálculo proposto, por curso das turmas pesquisadas.

Tabela 4 – Distribuição de itens corretos, incorretos e em branco por curso

Turmas	Corretos		Incorretos		Em branco	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
LIMF	23	24%	62	65%	11	11%
LIBQ	14	19%	40	56%	18	25%
Profmat	15	63%	7	29%	2	8%

Fonte: Dados da Pesquisa

Pelos levantamentos, os alunos das turmas que mais erraram foram os de Licenciatura Integrada em Matemática e Física (LIMF), 65%, e os alunos que mais deixaram os itens em branco foram os de Licenciatura Integrada em Biologia, 25%, e Química (LIBQ) e os discentes que mais acertaram foram os do Profmat, 63%.

Com base nas análises particulares das respostas incorretas em cada item do teste, averiguaram-se os erros cometidos no teste como um todo. O levantamento é apresentado na Tabela 5 com o número de erros de cada tipo por item e o total dos mesmos.

Tabela 5 – Número de erros de cada tipo por item ocorrido na solução do teste de Cálculo

Classe de Erro	Item						Total	
	01		02		03			
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
A	14	25%	1	6%	16	67%	31	32%
B	37	65%	7	44%	1	4%	45	46%
C	6	11%	8	50%	7	29%	21	22%

Fonte: Dados da Pesquisa

Por essa tabela, é possível verificar que os erros dos tipos B, relacionados a conhecimentos de matemática básica, foram os que mais ocorreram, sendo que, em sua maioria, no item 01 e praticamente não detectado na solução do item 03. Os erros do tipo A foram os que ficaram em segundo lugar de ocorrência, com apenas um caso ocorrido na solução do item 02 e com maior ocorrência na solução do item 03. A pouca ocorrência dos erros tipo A na solução do item 02 explica-se pelo fato de que os alunos não souberam equacionar o problema para então aplicar conhecimentos de Cálculo na solução. Já os erros do tipo C tiveram ocorrências pouco relevantes, mas com uma freqüência persistente nas respostas de todos os itens, sejam aqueles que envolveram procedimentos algébricos, ou nos que envolveram a passagem da linguagem natural para a matemática e ou nos equívocos das marcações das respostas do item 03.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho desenvolvido nesta pesquisa permitiu utilizar a análise de erros como metodologia de investigação, possibilitando perceber em que conteúdo da matemática os alunos apresentam dificuldades. As respostas apresentadas no teste, as opiniões dadas nos questionários por alunos e professores neste estudo mostraram que as dificuldades de assimilação dos temas da disciplina Cálculo permanecem relacionadas principalmente a conhecimentos de matemática básica. Fato também observado em outras pesquisas, como a da Cury (2007) envolvendo os conceitos básicos do Cálculo (funções, limites, derivadas e integrais) e relacionados à análise de produções escritas de estudantes de Matemática. Também Rios e Vieira (2016), em sua análise dos erros cometidos por alunos em vários tipos de questões apresentadas por eles, mostrou que as dificuldades mais sérias estão relacionadas com conteúdos de ensino básico, especialmente com problemas que vêm do oitavo e nono anos do ensino fundamental, e relacionados a conteúdos de álgebra. Sobre o resultado de avaliações em Cálculo Lachini comenta que:

> A análise de provas e de exercícios resolvidos mostra um déficit lingüístico por parte do aluno que chega à universidade; mal alfabetizados em matemática, muitos alunos têm dificuldade em perguntar, apresentar dúvidas ou defender soluções encontradas. Tal déficit, por certo, pode explicar a ausência de dialogo, mediado pelo conteúdo de CDI, entre professores e alunos. (LACHINI apud (RIOS e VIEIRA, 2016))

Essas dificuldades apresentadas pelos alunos durante o processo de aprendizagem do Cálculo não podem ser creditadas, como afirmou o professor Marcos Raad, aos livros, pois a prática da leitura do livro de Cálculo não faz parte da rotina de muitos estudantes. Com isso observa que as dificuldades dos alunos na compreensão do Cálculo se devem a causas epistemológicas, ou então a fatores didáticos, ou a elementos não conhecidos no meio acadêmico (RAAD, 2012).

A realização desta pesquisa representou para este autor o desafio de conciliar o seu trabalho de lecionar matemática básica na escola com o trabalho de pesquisar na universidade sobre uma disciplina de nível superior na qual não está acostumado a ensinar. Permitiu perceber a importância do Cálculo tanto para o desenvolvimento das ciências naturais quanto da própria Matemática. No entanto, essa mesma importância contrasta com o fracasso do seu ensino nas universidades, conforme os números apresentados neste trabalho, bem como em outras pesquisas, tais como a de Rezende (2003). Os índices de aprovação em cálculo continuam muito baixos, mostrando que o processo de ensino aprendizagem nos cursos de graduação pesquisados apresenta problemas que precisam ser abordados. E como se observou anteriormente, uma das principais causas é falta de conhecimentos de matemática básica por parte dos alunos, além de uma prática docente na academia que não possibilita um efetivo aprendizado por parte do aluno. Isso mostra que educação básica de Matemática apresenta problemas de aprendizagem, principalmente na escola pública, já que praticamente 90% dos alunos participantes cursaram o Ensino Básico em escola administrada pelo setor público, conforme números apresentados na seção 3.4.

Em relação ao uso da metodologia da Análise de Erros, o trabalho mais temeroso foi o de classificar os erros contidos nas respostas dos alunos de modo adequado a categoria pré-estabelecida, pois, ao se classificar um erro em certa categoria de respostas poderia se deixar de observar algum aspecto relacionado à outra categoria. Assim, enquadrar uma resposta errada em uma determinada categoria específica poderia confundir sua classificação com outra e de se observar determinadas situações que não se enquadrassem perfeitamente nas classificações descritas.

Outro desafio foi de avaliar com distratores, observando-se o que fora escrito para justificar a preferência do aluno por determinado distrator. A avaliação feita aqui pode não ter abarcado outros elementos que podem influenciar no ato de resolver questões de conhecimentos matemáticos. Além disso, percebeu-se o cuidado que se deve ter em elaborar itens de múltipla escolha com o objetivo de se investigar adequadamente o que o aluno aprendeu e em que assuntos da matemática apresentam dificuldades. Por isso, nesta pesquisa, os itens escolhidos estavam de acordo com padrões de órgãos nacionais como o INEP. Pois a forma com que se elabora a prova e com que objetivos se corrige os erros podem ser fatores determinantes de fracasso ou de sucesso do aluno (Cury apud (MARIANI, 2005)).

A Análise de Erros utilizada como metodologia de ensino, em produções escritas dos alunos, lembra as atitudes de alguns professores nas correções das avaliações de seus alunos no ensino básico, quando costumam corrigir essas provas e, ao entregá-las a seus alunos, mostram os erros cometidos e pede para que eles respondam novamente o item. Um tipo de análise de erros informal praticada por esses professores. No entanto, até que ponto esse tipo de metodologia é possível de se utilizar no dia a dia do ensino superior e ensino básico brasileiro durante o processo de ensino aprendizagem?

Ao buscar subsídios teóricos para fundamentar esta pesquisa descobriu que, em países como Portugal existe essa prática docente, onde os erros são apontados pelo professor ao aluno para que o mesmo corrija-o procurando outro caminho para solucionar determinado problema. É segundo Dias e Santos (2013) a oportunidade ao aluno tem de melhorar o trabalho produzido, potencializando a componente reguladora da avaliação. Essa oportunidade é dada com o objetivo de que o aluno seja ele próprio capaz de fazer a sua autocorreção, sendo para isso necessário compreender o erro para criar condições para ultrapassá-lo. Segundo Santos apud Dias e Santos (2013), quando o próprio aluno consegue identificar o erro e corrigi-lo, acontece aprendizagem.

Neste trabalho utilizou-se apenas uma face da Análise de Erros, a face investigativa, devido à limitação de tempo, ação e recursos deste autor. No entanto, como foi colocado na seção 2.3, existe uma corrente na Análise de Erros em que os alunos são convidados a tirar proveito de seus erros e, a partir deles, questionar e construir seu conhecimento matemático. Ou seja, uma corrente em que a Análise de Erros passa a ser vista como uma estratégia didática para o professor de Matemática. Neste caso, segundo Cury apud Mariani (2005), para que o uso da análise de erros seja relevante é preciso seguir algumas premissas básicas e, entre elas respeitar o aluno, devolvendo a ele a análise feita e discutindo os resultados, com o objetivo de explorar suas próprias potencialidades.

O estudo e a aplicação da Análise de Erros como investigação trouxe a prática docente deste autor um olhar mais cuidadoso com a produção escrita dos seus alunos objetivando verificar em que temas o aluno apresenta dificuldades ou não-conhecimento. Essa percepção, segundo o que foi exposto na seção 2.3, pode nortear uma intervenção, seja ela pela retomada do conteúdo utilizando outras atividades, seja ela pelo uso de avaliação imediata e contínua do desempenho dos estudantes, ou por uma reflexão junto com o aluno sobre seus erros e os erros de seus colegas. É um processo positivo por uma parte e dificultoso por outra. Positivo para os alunos, que são avaliados a cada tarefa realizada, e não apenas nas provas do final do bimestre (ou semestre). E positivo para os professores que tem a oportunidade de acompanhar o processo de aprendizado de seus alunos. No entanto, tem a sua parte negativa devido a algumas circunstâncias que dificultam realizá-la no âmbito na rede pública de ensino a nível fundamental II e ensino médio: excesso de carga horária do professor; número de alunos por turma; falta de material didático como papel para imprimir os testes; além de outros.

A idéia do pesquisador N. B. Pinto resume o que fora dito:

> “a idéia de que o erro, quando observado com maior rigor, pode fornecer elementos que possibilitem ao professor refletir sobre sua maneira de ensinar, o que lhe permite criar novos direcionamentos para suas ações pedagógicas.” (Pinto apud (ETCHEVERRIA e SANTOS, 2016))

Assim, é importante fazer com que o aluno possa ter outra chance com aquele conteúdo que ainda não compreendeu. Principalmente porque a ênfase do ensino deixa de ser a quantidade de conteúdo que deve ser ensinada e passa a ser a qualidade de aprendizagem dos alunos quanto ao conteúdo ensinado.

BIBLIOGRAFIA

ALVARENGA, K. B.; DORR, R. C.; VIEIRA, V. D. O Ensino e a Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: Características e Interseções no Centro-Oeste Brasileiro. **REBES - Rev Brasileira de Ensino Superior**, Goiânia, v. Único, n. Única, p. 46-57, Out-Dez 2016. ISSN ISSN 2447-3944.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70 Ltda, 2002. 229 p.

BARICHELLO, L. Análise de Resoluções de Problemas de Cálculo Diferencial em um Ambiente de Interação Escrita, Rio Claro, p. 127 pág, 2008. Dissertação de Mestrado.

BRITO, M. R. F. D. Habilidades, competências e desempenho de futuros professores de Matemática em um exame em larga escala: um estudo a partir do perfil e dos resultados do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE). **Série Estudos - Periódico do Mestrado em Educação da UCDB**, Campo Grande, jul/dez 2008. 39-49.

CAED. **Guia de Elaboração de Itens**. Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, p. 120. 2008.

CARVALHO, H. D. A. **A Análise dos Erros dos Alunos em Cálculo como Estratégia de Ensino**. Pontifícia Universidade Católica. Rio de Janeiro, p. 75. 2016. (CDD:510).

COSTA, D. A. F. **A Análise do Erro como Caminho de Descoberta do Pensamento da Criança**. [S.l.]: AMAE Educando, v. 21, 1988.

CURY, H. N. **Análise de Erros:** O Que Podemos Aprender com As Respostas dos Alunos. 1ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 116 p p.

CURY, H. N. Um Mapeamento de Artigos de Educação Matemática que apresentam as palavras "Erros", "Dificuldades" ou "Obstáculos". **Educação Matemática em Revista - RS**, v. 2, n. 15, p. 63 a 71, 2014.

DIAS, P.; SANTOS, L. **Práticas avaliativas para a promoção da autorregulação da aprendizageme matemática: O feedback escrito em relatórios escritos em duas fases**. Universidade de Lisboa. Lisboa, p. 1-28. 2013.

ETCHEVERRIA, T. C.; SANTOS, W. F. Análise de Erros no Conceito de Função: Uma Possibilidade de Aprendizagem. **ReviSeM**, n. 1, p. 1-18, 2016.

FELTES, R. Z. **Análise de Erros em Potenciação e Radiciação:** Um Estudo com Alunos de Ensino Fundamental e Médio. 1ª. ed. Porto Alegre: PUC- RS, v. único, 2007.

FERNANDES, I. S. **Manual de orientações para a Elaboração de itens**. Faculdade Kennedy. Belo Horizonte, p. 12. 2015.

FILHO, A. D. P. Análise de Erros Produzidos por Estudantes de um Curso de Engenharia Civil na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, Canoas, p. 118, 2012. Dissertação de Mestrado.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, v. 2, 2009.

GUIA-INEP. **Guia de Elaboração e Revisão de Itens**. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Brasilia, p. 20. 2010.

INSTITUCIONAL UFOPA. **UFOPA**, 28 Março 2018. Disponivel em: <http://www.ufopa.edu.br/ufopa/institucional/sobre-a-ufopa/historico-e-localizacao/>. Acesso em: 16 Julho 2018.

MARIANI, V. C. Análise de Erros em Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos de Engenharia. **XXXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**, Campina Grande, 12 a 15 Setembro 2005. 10.

MORAES, R. Análise de Conteúdo. **Revista Educação**, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-22, 1999.

NETO, A. C. M. **Fundamentos de Cálculo**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, v. Único, 2012.

PCE-ICED. **PPC de Lic Int em Matemática e Física**. UFOPA. Santarém, p. 172. 2015.

PCN-ICED. **PPC de Lic Int em Biologia e Química**. UFOPA. Santarém, p. 111. 2017.

PROFMAT-SBM- Regimento. **Profmat-SBM**, 2016. Disponivel em: <http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento/>. Acesso em: 04 Janeiro 2019.

RAAD, M. R. História do Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: a Existência de uma Cultura, Juiz de Fora, v. 1, p. 1-129, Maio 2012. Dissertação de Mestrado.

RAMOS, M. L. P. D. Detecção, Identificação e Retificação: As Três Fase no Tratamento e na Correção dos Erros. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, Curitiba, p. 1-14, Julho 2013.

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica, São Paulo, v. 1, p. 1-468, Maio 2003. Tese de Doutorado.

RIOS, P. P. S.; VIEIRA, A. R. L. Reflexões a partir do erro nas avalições de Cálculo diferencial e integral. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades**, São Paulo, 13 a 17 Julho 2016. 1-18.

STEWART, J. **Cálculo I**. 4ª Edição. ed. São Paulo: Cengage Learning, v. I, 2001.

ANEXO A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

QUESTIONÁRIO AOS PROFESSORES

Caro (a) professor (a),
Este questionário tem como objetivo levantar dados para uma pesquisa que está sendo realizada sobre os erros mais freqüentes nas avaliações da Disciplina Cálculo com uma variável.
As informações concedidas por vossa senhoria serão de fundamental importância para as análises que serão realizadas posteriormente, as quais servirão de suporte para a construção do perfil dos professores dessa disciplina nos cursos observados.
Não é necessário colocar a sua identificação pessoal.
Desde já agradecemos sua inestimável colaboração.

DADOS PESSOAIS:
1- Qual a sua formação?
R:____
____
2- Qual o seu tempo de serviço como professor em Ensino Superior?
( ) de 0 a 5 anos ( ) de 6 a 10 anos ( ) de 11 a 15 anos
( ) de 16 a 20 anos ( ) de 21 a 25 anos ( ) de 26 a 30 anos
3- Você leciona Cálculo com uma variável?
( ) Não ( ) Sim. Há quanto tempo?_______________________________
4- Em sua opinião, as principais dificuldades dos alunos de graduação ou pós-graduação na disciplina de Cálculo com uma variável está relacionada a que temas abaixo relacionados?
( ) Matemática Básica ( ) Limites ( )Derivadas ( )Integral
( ) Outros temas:____
5- Neste trabalho para identificar e classificar os erros cometidos pelos acadêmicos no teste envolvendo conteúdos de Cálculo com uma variável utilizou-se a seguinte classificação:
- Erro tipo A: são erros que o aluno apresenta por desconhecimento de conteúdo específico de Cálculo. Ou seja, erros do tipo: não utiliza corretamente as técnicas de derivação ou não reconhece o limite de uma função.
- Erro tipo B: refere-se aos erros cometidos por falta de conhecimentos básicos de matemática. Por exemplo: o aluno não domina as técnicas de fatoração de uma expressão algébrica, não aplica corretamente a propriedade de distributiva.
- Erro tipo C: são aqueles cometidos por distração do aluno como, por exemplo, copiar um número diferente do enunciado, errar resultados de uma conta de somar.

A) Pela sua experiência no Magistério Superior, nas avaliações de Cálculo dos alunos, que tipos de erros são mais freqüentes?
( ) Erros tipo A ( ) Erros tipo B ( ) Erros tipo C ( ) Todos os tipos

B) Conforme a sua experiência no Magistério Superior, nas avaliações de Cálculo dos alunos, qual a freqüência (%) dos tipos de erros mencionados?
Erros tipo A ____ Erros tipo B ____ Erros tipo C ____

6- Em sua opinião, a que você atribui a freqüência desses tipos de erros?
R:____
____
____

ANEXO B – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

QUESTIONÁRIO DO PERFIL DO ALUNO E DE PERCEPÇÃO DO TESTE

Caro (a) aluno (a),
Este questionário tem como objetivo levantar sua opinião sobre a qualidade e a adequação do teste que você acabou de realizar, bem como dados para uma pesquisa que está sendo realizada sobre os erros mais freqüentes nas avaliações da Disciplina Cálculo com uma variável.
As informações concedidas por vossa senhoria serão de fundamental importância para as análises que serão realizadas posteriormente, as quais servirão de suporte para a construção do perfil dos alunos dessa disciplina nos cursos observados.
Não é necessário colocar a sua identificação pessoal.
Desde já agradecemos sua inestimável colaboração.

1- Qual o seu Curso?R: ____
2- Em que turno você estuda? ( )Manhã ( )Tarde ( )Noite
3- Em que faixa de idade você se encontra?
( ) Menos de 18 anos ( ) De 18 a 22 anos ( ) De 23 a 28 anos ( ) Mais de 28 anos
4- Você cursou o Ensino Básico (Fundamental e Médio) em que de tipo de escola?
( )Pública ( )Particular ( )Particular e pública.

5- Qual o grau de dificuldade deste teste?
( )Muito fácil ( )Fácil ( )Médio ( )Difícil ( )Muito difícil

6- As informações/instruções fornecidas para a resolução das questões foram suficientes para resolvê-las?
( )Sim, até excessivas ( )Sim, em todas elas ( )Sim, na maioria delas
( )Sim, somente em algumas ( )Não, em nenhuma delas.

7- Você se deparou com alguma dificuldade ao responder o teste. Qual?
( )Desconhecimento do conteúdo.
( )Forma diferente de abordagem do conteúdo.
( )Espaço insuficiente para responder às questões
( )Falta de motivação para fazer o teste
( )Não tive qualquer tipo de dificuldade para responder o teste.

8- Considerando apenas as questões do teste, você percebeu que
( )não estudou ainda a maioria desses conteúdos
( )estudou alguns desses conteúdos, mas não os aprendeu.
( )estudou a maioria desses conteúdos, mas não os aprendeu.
( )estudou e aprendeu muitos desses conteúdos.
( )estudou e aprendeu todos esses conteúdos.

9- Em sua opinião, suas principais dificuldades relacionadas a disciplina de Cálculo com uma variável está relacionada a que temas abaixo relacionados?
( ) Matemática Básica ( ) Limites ( )Derivadas ( )Integral
( ) Outros temas:____
____

ANEXO C – TESTE DE CÁLCULO APLICADO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

TESTE DE CONHECIMENTOS EM CÁLCULO

Caro (a) aluno (a),
Este teste tem como objetivo levantar dados para uma pesquisa que está sendo realizada sobre o desempenho de alunos na resolução de itens da Disciplina Cálculo com uma variável.
As respostas dadas a esses itens serão de fundamental importância para as análises que serão realizadas posteriormente, as quais servirão de suporte para se verificar os erros mais freqüentes nas avaliações de Cálculo. Solicitamos sua colaboração no sentido de resolver as questões abaixo.
Sua identidade será preservada.
Desde já agradecemos sua inestimável colaboração.

Questão 01 --

Um dos problemas detectados nas investigações sobre erros dos alunos em Cálculo Diferencial e Integral foi o não reconhecimento de padrões em uma expressão algébrica, de forma que fosse possível fatorá-la. ... Linchevski e Livneh (1999) consideram ser necessário que os alunos desenvolvam uma percepção da estrutura, que lhes permitam ser capazes de manipular tais expressões com flexibilidade. Hoch e Dreyfus (2004) consideram que "percepção da estrutura" pode ser descrita como: [...] uma coleção de habilidades. Essas habilidades incluem ver uma expressão ou sentença algébrica como uma entidade, reconhecer uma expressão ou sentença algébrica como uma estrutura previamente encontrada, dividir uma entidade em sub-estruturas, reconhecer conexões mútuas entre estruturas, reconhecer qual manipulação é possível e [...] qual é útil para realizar. (p. 51)

TEXTO DO ARTIGO DE HELENA N. CURY E BEATRIZ KONZEN, CLASSIFICAÇÃO E ANÁLISE DE ERROS EM ÁLGEBRA, P. 02.(COM ADAPTAÇÕES).

Pelo que foi exposto e do conhecimento algébrico adquirido, analise as igualdades I e II a seguir:

I. $\dfrac{x^2+x-6}{x-2} = x+3$ II. $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+x-6}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}(x+3)$

Pela análise feita, pode-se afirmar que:
(A) Apenas a igualdade I está correta (B) Apenas a igualdade II está correta
(C) Ambas as igualdades estão corretas (D) Ambas as igualdades estão incorretas

(Item de um livro de Cálculo (Stewart, 2001, p. 110) e foi extraído de um artigo sobre Análise de Erros como Metodologia de Investigação cujo enunciado foi adaptado.)

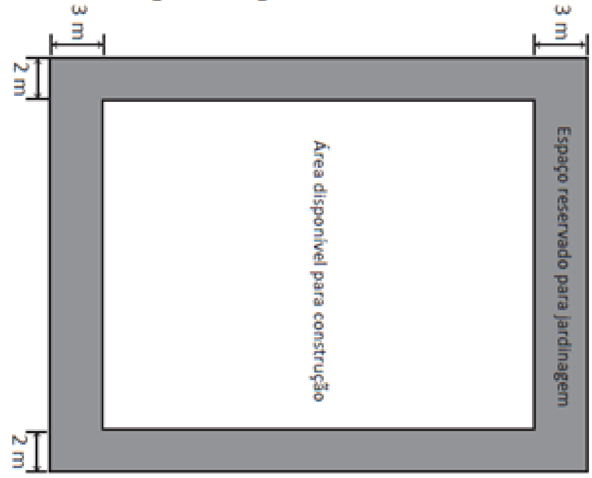
RASCUNHO – QUESTÃO 01

Questão 02 --

Relaciona-se crescimento e decrescimento do gráfico de função com o sinal da derivada. Os máximos e mínimos locais acontecem exatamente quando há mudança de sinal de f'(x). Mais precisamente, temos o chamado Teste da derivada primeira. Outro instrumento para determinar se o ponto crítico x=c é máximo local ou mínimo local é a derivada segunda de f, se f é diferenciável em um intervalo aberto I, e c∈I é tal que f'(c) = 0 e f''(c) existe.

Texto de um livro de Fundamentos de Cálculo (ProfMat MA22, 2012, Unid 14 p. 8,10)

Uma construtora, com o objetivo de valorizar as áreas verdes, apresentou um projeto de loteamento, com terrenos retangulares, onde cada residência construída terá um jardim ao seu redor. Em cada terreno deverão ser reservados 3 metros na frente, 3 metros no fundo de 2 metros em cada lateral para jardinagem, conforme ilustra a figura a seguir.



Considerando-se que área disponível para construção será de 600m², a área mínima do terreno que atende às especificações exigidas pela construtora será de

(A) 606 m²   (B) 610 m²   (C) 726 m²   (D) 864 m²   (E) 924 m²

(Item extraído de uma prova do ENADE 2017 Matemática Licenciatura (Questão 13, p. 17)).

RASCUNHO – QUESTÃO 02

Questão 03 ---

Os fatos que relacionam a integral definida e áreas de regiões têm como um dos pontos o seguinte: Se $f:[a,b]\to R$ é uma função contínua tal que $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$ então o limite $\int_a^b f(x)dx$ é a área da região determinada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas verticais $x=a$ e $x=b$.

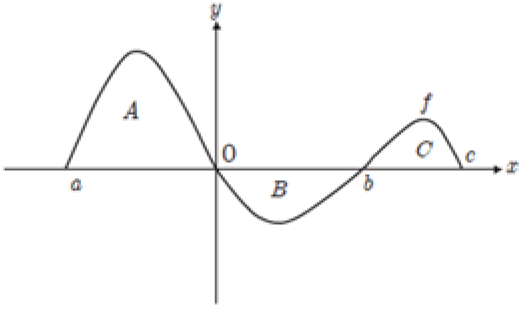
Texto encontrado em um livro de Fundamentos de Cálculo (ProfMat MA22, 2012, Unid 17 p.18)

Considere $f:[a,c]\to R$ uma função contínua e $b\in(a,c)$, conforme ilustra o gráfico abaixo. Represente por:

A a área da região limitada pela reta de equação $y=0$ e pela curva $\{(x,f(x));x\in[a,0]\}$;

B a área da região limitada pela reta de equação $y=0$ e pela curva $\{(x,f(x));x\in[0,b]\}$;

C a área da região limitada pela reta de equação $y=0$ e pela curva $\{(x,f(x));x\in[b,c]\}$;



Sabendo-se que $A=5$, $B=3$ e $C=2$, avalie as afirmações a seguir.

I. $\int_a^0 f(x)dx=5$

II. $\int_0^b f(x)dx=3$

III. $\int_a^c f(x)dx=4$

É correto o que se afirma em

(A) I, apenas. (B) II, apenas. (C) I e III, apenas. (D) II e III, apenas. (E) I, II e III.

(Este item foi extraído de um enunciado da prova do ENADE 2017 de Matemática Licenc. (Questão 09, p. 16)).

RASCUNHO – QUESTÃO 03

ANEXO D – DADOS DE DESEMPENHO ACADÊMICO EM CÁLCULO

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO - ICED
GESTÃO ACADÊMICA

Disciplina: Calculo de Função de uma Variável

Matemática e Física	Aprovados	Reprovados	Abandono	Total
2014	6	24	17	47
2015	9	21	11	41
2016	31	44	7	82
2017	7	10	19	36
Biologia e Química	Aprovados	Reprovados	Abandono	Total
2014	9	14	13	36
2015	23	18	3	44
2016	16	22	10	48
2017	6	43	1	50

Fonte: SIGA A

Santarém/PA, 26 de novembro de 2018.

Ladia Rufino dos Santos
Assistente em Administração/UFOPA
SIAPE: 2179083

APÊNDICE A – DETALHES DA RESOLUÇÃO DO ITEM 02

Como a área disponível para a construção é $600m^2$, tomando que essa área tem largura x e comprimento y, então se pode escrever y em função de x da seguinte forma $x.y = 600 \to y = \frac{600}{x}\,(i)$. Já as dimensões do terreno, levando em conta o espaço reservado para jardinagem, ficam: $x + 4$ de largura e $y + 6 = \frac{600}{x} + 6$ de comprimento. Dessa forma, a área total do terreno é dada por: $A(x) = (x+4).(\frac{600}{x} + 6) \to A(x) = 6.(x + 104 + \frac{400}{x})$. Como se quer determinar a área mínima do terreno, necessário se faz encontrar o ponto de mínimo desta última função, ou seja, determinar o valor de x que torna $A(x)$ mínimo. Para se solucionar essa situação de modo fácil, usa-se o princípio da derivada primeira, encontram-se os pontos críticos da função e analisa-se o sinal da mesma nesses pontos.

Ou seja, como a função é em essência racional, então é $A(x)$ é derivável em todo o seu domínio. Logo os pontos críticos são somente aqueles nos quais a derivada se anula. Dessa forma tem-se que $A'(x) = 6.(1 - \frac{400}{x^2}) \to A'(x) = \frac{6}{x^2}.(x^2 - 400)$. E para encontrar os pontos críticos, deve-se resolver a equação $A'(x) = 0 \to \frac{6}{x^2}.(x^2 - 400) = 0$. O que significa que $x^2 - 400 = 0 \to x = \pm 20$. Como x deve ser positivo (pois é medida de comprimento), então $x = 20$ é o ponto crítico procurado e, para confirmar se é ponto de mínimo, analisa-se o sinal da derivada primeira de $A(x)$ em torno de $x = 20$.

Analisando-se adequadamente o sinal de $A'(x)$, chega-se a conclusão que $x = 20$ é um ponto de mínimo local e é o único que satisfaz o problema nas condições dadas. Portanto, a área mínima do terreno que atende às especificações exigidas pela construtora é:

$A_{mín} = A(x)\big|_{x=20} = 6.(20 + 104 + \frac{400}{20}) = 6.144 = 864m^2$, que é a alternativa D.

APÊNDICE B – RELAÇÃO ENTRE INTEGRAL E ÁREA DE REGIÕES

Conforme (NETO, 2012) no livro Fundamentos de Cálculo, os fatos que relacionam a integral definida e áreas de regiões são os seguintes:

(a) Se $f:[a,c]\to R$ é uma função contínua tal que $f(x)\geq 0$, para todo $x\in[a,c]$ então o limite $\int_a^b f(x)dx$ é a área da região determinada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$.

(b) Em geral, se $f:[a,c]\to R$ é uma função contínua, então $\int_a^b f(x)dx$ é a soma das áreas orientadas das regiões determinadas pelo eixo Ox e pelo gráfico de f, entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$. Isto é, as regiões que ficam abaixo do eixo Ox contribuem com os valores negativos de suas áreas enquanto que as regiões que ficam acima do eixo contribuem com os valores positivos de suas áreas.

Então, de acordo com o exposto acima e os dados da questão, pode-se afirmar que $\int_a^0 f(x)dx = 5$ e que $\int_a^c f(x)dx = A - B + C = 5 - 3 + 2 = 4$ validando, portanto, a resposta.