UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ALEXANDRE MICHEL DA SILVA CARRILLO

A MATEMÁTICA E A MÚSICA: o ensino de conceitos de probabilidade através de uma contextualização com a composição musical

JUAZEIRO – BA

2019

ALEXANDRE MICHEL DA SILVA CARRILLO

A MATEMÁTICA E A MÚSICA: o ensino de conceitos de probabilidade através de uma contextualização com a composição musical

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo José Pereira.

JUAZEIRO – Bahia

2019

Carrillo, Alexandre Michel da Silva
C317m A matemática e a música: o ensino de conceitos de probabilidade através de uma contextualização com a composição musical / Alexandre Michel da Silva Carrillo. -- Juazeiro, 2019.
xi, 102f. : il. ; 29 cm.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro-BA, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Paulo José Pereira.

1. Matemática – ensino e aprendizagem. Métodos de ensino. I. Título. II. Pereira, Paulo José. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Márcio Pataro. CRB 5 – 1369.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

Alexandre Michel da Silva Carrillo

A MATEMÁTICA E A MÚSICA: o ensino de conceitos de probabilidade através de uma contextualização com a composição musical

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovada em: 31 de maio de 2019.

Banca Examinadora

Paulo J. Pereira

Prof. Dr. Paulo José Pereira, PROFMAT/UNIVASF

Lino Marcos da Sl

Prof. Dr. Lino Marcos da Silva, PROFMAT/UNIVASF

Janedalva Pontes Gondim

Profa. Dra. Janedalva Pontes Gondim, CARTES/UNIVASF

Dedico este trabalho à minha avó Edite, *“in memorian”*, e à minha mãe Ana Maria, que me ensinaram os valores do amor, da educação e da fé.

AGRADECIMENTOS

Ao Deus autor da vida, que ilumina e permite cada passo da minha trajetória. Que o Senhor seja eternamente louvado!

À minha filha, Anna Júlia, e minha esposa, Marlise, que me trouxeram alegria nos momentos de cansaço e suportaram minhas ausências para que eu conseguisse completar esta etapa da minha vida. Amo vocês.

À minha mãe, Ana Maria, e minha prima-irmã, Geysa, que sempre motivaram e compartilharam minhas lutas e vitórias. Sem vocês nada disto seria possível.

Ao Prof. Dr. Paulo José Pereira, que sempre solicito, comprometido e paciente, orientou este trabalho.

A todos os colegas de curso, em especial Antonio e Fredson, companheiros de estudo e de estrada que dividiram experiências, lutas e alegrias durante todo esse período de estudos. Que as amizades construídas perdurem por toda vida!

Aos professores e ao administrativo do PROFMAT/UNIVASF por proporcionar um curso de excelência.

Ao músico Valdir Rocha que gentilmente participou e contribuiu na pesquisa de campo realizada neste trabalho.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro[1] no desenvolvimento da pesquisa.

Por fim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho.

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

Frente aos resultados das avaliações oficiais realizadas nas últimas décadas, pelo MEC e por instituições internacionais, fica evidente a necessidade da busca por novas estratégias de ensino da Matemática. O presente trabalho investigou as contribuições de uma abordagem contextualizada no ensino de conceitos da Teoria das Probabilidades, usando a relação desta parte da matemática com a música, mais particularmente em processos de composição musical. O estudo caracteriza-se como exploratório-descritivo apresentando descrições tanto qualitativas quanto quantitativas. Para tanto, foi realizada uma pesquisa de campo por meio de uma oficina interdisciplinar numa escola pública da cidade de Mairi - BA, com o propósito de observar e avaliar as motivações, a participação e as aprendizagens dos estudantes perante a esta proposta metodológica. Na oficina os alunos exploraram conceitos musicais e ferramentas de composição algorítmica, que utilizam a estocástica e as Cadeias de Markov como princípio para a escolha de elementos musicais utilizados na composição. Mesmo que os estudos sobre Cadeias de Markov não sejam habitualmente realizados no Ensino Médio, a aplicação prática da probabilidade condicional, obtida das transições de acordes, permite e credencia sua utilização neste nível de ensino. Também foi aplicado um questionário a professores de matemática, com diferentes níveis de conhecimento musical, analisando a aceitação em relação às atividades sugeridas que utilizam a abordagem de ensino apresentada neste estudo. Os questionários aplicados e as observações relatadas na pesquisa mostraram que a proposta estimulou e melhorou a aprendizagem dos estudantes, principalmente naqueles que já possuíam alguma motivação em relação à música. Porém a exigência de estudos sobre conhecimentos musicais afasta os docentes, que não possuem experiência nesta área, da adoção desta estratégia de ensino de probabilidade. Contudo tendo em vista os resultados positivos alcançados, é possível concluir que conceitos de probabilidade podem ser ensinados com eficácia usando uma contextualização com a música e que a proposta é viável e vale o esforço dos professores.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Probabilidade. Música. Cadeias de Markov. Contextualização.

ABSTRACT

In view of the results of the official evaluations carried out in the last decades, by the MEC and by international institutions, the need for the search for new mathematical teaching strategies is evident. The present work investigated the contributions of a contextualized approach in teaching concepts of Probability Theory, using the relation of this part of mathematics to music, more particularly in processes of musical composition. The study is characterized as exploratory-descriptive, presenting both qualitative and quantitative descriptions. In order to do so, a field research was carried out through an interdisciplinary workshop at a public school in the city of Mairi - BA, with the purpose of observing and evaluating the motivations, participation and learning of the students in relation to this methodological proposal. In the workshop the students explored musical concepts and algorithmic composition tools, which use stochastics and Markov Chains as a principle for the choice of musical elements used in composition. Even though studies on Markov Chains are not usually performed in High School, the practical application of conditional probability, obtained from chord transitions, allows and accredits their use at this level of education. A questionnaire was also applied to teachers of mathematics, with different levels of musical knowledge, analyzing the acceptance in relation to the suggested activities that use the teaching approach presented in this study. The questionnaires applied and the observations reported in the research showed that the proposal stimulated and improved student learning, especially in those who already had some motivation regarding music. However, the requirement of studies on musical knowledge distances teachers, who do not have experience in this area, from adopting this strategy of teaching probability. However, in view of the positive results achieved, it is possible to conclude that concepts of probability can be taught effectively using contextualization with music and that the proposal is feasible and worth the effort of teachers.

Keywords: Teaching Mathematics. Probability. Music. Markov Chains. Contextualization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os resultados das avaliações oficiais realizadas pelo MEC e de instituições internacionais, como o PISA, apontam uma situação preocupante em relação à aprendizagem de matemática no ensino médio brasileiro. Sobre a avaliação citada, a Assessoria de Comunicação Social do MEC (BRASIL, 2016) informou que com base nos resultados de 2015, em matemática, o país apresentou a primeira queda desde 2003, início da série histórica da avaliação, e constatou que sete em cada dez alunos brasileiros, com idade entre 15 e 16 anos, estão abaixo do nível básico de conhecimento. Diversos pesquisadores vêm reunido esforços na busca por alternativas metodológicas que permitam a melhoria dos processos de ensino-aprendizagem da matemática na educação básica. Um dos caminhos apontados é a contextualização do saber, que segundo Pais (2001, p. 27), é uma das mais importantes noções pedagógicas que deve ocupar um lugar de maior destaque na análise didática. Fonseca (1995, p. 46) destaca a importância deste aspecto na busca por estratégias de ensino da matemática quando afirma que:

> “As linhas de frente da Educação Matemática têm hoje um cuidado crescente com o aspecto sociocultural da abordagem Matemática. Defendem a necessidade de contextualizar o conhecimento matemático a ser transmitido, buscar suas origens, acompanhar sua evolução, explicitar sua finalidade ou seu papel na interpretação e na transformação da realidade do aluno. É claro que não se quer negar a importância da compreensão, nem tampouco desprezar a aquisição de técnicas, mas busca-se ampliar a repercussão que o aprendizado daquele conhecimento possa ter na vida social, nas opções, na produção e nos projetos de quem aprende.”

Nos documentos oficiais que referenciam a educação no Brasil é possível encontrar reflexos desta visão. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000, p. 43) dizem que para a organização de uma Base Nacional Comum, na escolha de tópicos e temas em Matemática:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Desta forma, a proposta de currículo definida nas Orientações Curriculares do Estado da Bahia (BAHIA, 2015, p. 11) baseia-se nos PCNEM (BRASIL, 2000) e nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica (BRASIL, 2013) que trazem como tripé metodológico a contextualização, a interdisciplinaridade e a transversalidade.

Porém, para Barbosa (2004, p. 2), a utilização do termo “contextualização” tem sido indevida, já que todas atividades da matemática escolar pertencem a um determinado contexto que pode ser o da matemática pura, da semirrealidade ou da realidade. O mesmo autor ainda defende a necessidade de a matemática escolar incluir situações com referências na realidade, pois estas geram a possibilidade dos alunos se envolverem em discussões sobre o papel da matemática na sociedade.

Segundo relatos de vários estudantes e também pela minha experiência pedagógica, entre os diversos temas da matemática do ensino médio, a Probabilidade é um dos conteúdos que provocam maior dificuldade de aprendizado devido à complexidade na interpretação dos seus problemas e a abordagem mecanizada que transforma o estudo da probabilidade no Ensino Médio em apenas problemas de contagem. Nesse cenário há, tanto por parte dos docentes quanto dos discentes, uma rejeição pelo estudo de seus conceitos e teorias. Este fato é constatado por Rezende e Ferreira (2011, p. 2-3) ao destacar que “o ensino de Probabilidade na escola básica, quando acontece, ainda se dá, muitas vezes, vinculado a fórmulas e associações com situações conhecidas e repetidas, quase sempre fora da realidade do aluno, o que provoca desinteresse por parte deste.”

No contexto da realidade, muitas são as tentativas de relacionar temas que despertem o interesse dos estudantes e que façam relação com a matemática, permitindo assim que a aprendizagem se efetive. Um tema que pode ser abordado para introduzir conceitos matemáticos é a música. A música é uma arte que vem provocando nos seres humanos, grande fascínio ao longo da história. Sua relação com a matemática pode não ser tão evidente aos leigos em teoria musical, bem como aos desconhecedores da história da matemática, todavia:

> A regularidade ou complexidade das vibrações, as relações tonais em melodias e harmonias, o ritmo e a variedade de formas e estruturas musicais, a análise e síntese do som, ou a composição e execução musicais assistidas por computador conduzem-nos a modernas reinterpretações da tradição pitagórica segundo a qual a música seria a “ciência do número aplicada aos sons”. (RODRIGUES, 1999, p.1).

Ainda segundo Rodrigues existem muitas similaridades entre a matemática e música, que foram estudadas por diversos filósofos e matemáticos como Pitágoras, Kepler, Mersenne, Fourier, entre outros. A utilização dos conhecimentos e das experiências desenvolvidas por estes estudiosos podem auxiliar no desenvolvimento de metodologias de ensino que atraiam a atenção da juventude, visto que desde os tempos mais antigos a musicalidade desperta grande atração e curiosidade na humanidade.

> Para alguns alunos é a partir talvez da beleza da música, da alegria proporcionada pela beleza musical, tão frequentemente presente em suas vidas em outra forma, que chegarão a sentir a beleza na literatura, o misto de beleza e verdade existente na matemática, o misto de beleza e eficácia que há nas ciências e nas técnicas. (SNYDER apud CAMPOS, 2009, p. 15).

A busca por novas metodologias que contribuam para o ensino-aprendizagem do saber matemático, em virtude das dificuldades experimentadas no exercício da prática docente no Ensino Médio em escolas públicas do Estado da Bahia, aliada à experiência como músico amador e autodidata, fez emergir o questionamento: De que forma os conceitos de probabilidade podem ser ensinados/aprendidos a partir do ensino dos elementos da composição musical no Ensino Médio? Diante desta indagação, pensando na beleza da música e nos aspectos emocionais que ela proporciona, o presente estudo tem como objetivo geral analisar as contribuições de uma contextualização com a música para a introdução de conceitos relativos à Teoria das Probabilidades para alunos do Ensino Médio. Nesse sentido, assume-se que:

> ... contextualizar consiste em apresentar o conteúdo por meio de uma situação problematizadora, capaz de dar sentido aos conhecimentos a serem aprendidos e que proporcione o resgate dos conhecimentos prévios, criando, dessa forma, um contexto que dará significado ao conteúdo, isto é, que os conduza à sua compreensão. (PAULA, 2017, p. 84).

A escolha do tema surge, também, do desejo de aproveitar o momento do projeto Festival Anual da Canção Estudantil (Face), proposto pela Secretaria de Educação do Estado da Bahia (SEC/BA), para propiciar vivências enriquecedoras e produtivas sobre a música, que devido à ausência de professores desta área do conhecimento, vem sido pouco explorada no ambiente escolar. Assim, este trabalho buscou fazer uso deste cenário para dar significado aos conhecimentos matemáticos explorando a composição musical como escolha de múltiplas possibilidades, o que permite uma relação com conceitos da teoria das probabilidades.

A relação da probabilidade com música, mais propriamente com a composição musical, não é muito explorada no Ensino Médio, pois envolvem conhecimentos sobre conceitos da teoria musical e partes mais avançadas da Teoria das Probabilidades, como matrizes de transição de probabilidades e Cadeias de Markov, que não são comumente trabalhadas neste nível de ensino, mas são base para os processos de construção de algoritmos que permitem computadores comporem músicas de forma automatizada. Porém, buscamos exemplificar esta aplicação de forma simplificada para que seja possível a compreensão de tais conceitos pelos estudantes.

Desta forma, podemos elencar como objetivos específicos deste trabalho:

- ✓ Explorar a relação entre o ensino de probabilidade com o ensino da composição musical;
- ✓ Investigar se as motivações e a afetividade em relação à música podem contribuir na aprendizagem de conceitos matemáticos e de composição musical;
- ✓ Apresentar possibilidades de ensino de conceitos da teoria das probabilidades por meio de uma contextualização com a composição musical para docentes de matemática;
- ✓ Examinar a aceitação dos profissionais de educação em relação a abordagem contextualizada proposta neste trabalho;
- ✓ Avaliar as contribuições de uma oficina sobre conceitos das teorias da probabilidade contextualizada com a composição musical.

Na busca por atingir tais objetivos, o presente trabalho foi estruturado da seguinte maneira: a seção 2, destaca a relação da matemática com música, apresentando o histórico do desenvolvimento comum destas duas artes, em seguida introduz alguns conceitos fundamentais da música, tais como notas musicais, escala, acordes e campo harmônico; e por fim evidencia a utilização da matemática em alguns métodos de composição; na seção 3, apresenta-se o referencial teórico sobre a teoria da probabilidade abordando os conceitos iniciais e outros mais avançados que são utilizados em alguns métodos de composição musical e nas atividades relatadas na pesquisa; já a seção 4, revisa a literatura buscando como os conceitos da teoria probabilística são utilizados para fins musicais e quais os trabalhos relacionados ao ensino-aprendizagem de matemática que abordam a probabilidade como fundamento para a composição musical; na seção 5, a metodologia e procedimentos adotados na pesquisa são descritos; na seção 6, é feita a análise e discussão dos resultados; por fim na seção 7 consta as considerações finais, abordando os objetivos alcançados e possibilidades de atividades futuras.

2 A MATEMÁTICA E A MÚSICA

Segundo Goulart (2011, p 1-2) a definição de música encontrada no dicionário Houaiss (2011, p. 655) diz que ela é “a arte de combinar os sons de forma rítmica, melódica e harmoniosa", ou seja, pode ser interpretada como “som organizado”. Tal organização pode seguir regras rigorosas na combinação dos sons ou seguir poucas regras, também pode realizar a combinação previamente à execução ou de forma improvisada, no momento do ato. Considerando como conjunto {sons} e seu subconjunto {música}, é possível montar modelos estatísticos que evoluem junto com a música, e a partir deles fazer previsões sobre como a música vai continuar. A composição musical pode ser entendida como processo criativo de expressão artística, porém em alguns casos, pode ser produto de raciocínios lógicos ou ainda procedimentos mecânicos, isto é, um procedimento com algoritmo como de um programa de computador. Alguns destes processos algorítmicos têm por finalidade encontrar padrões e tendências de composição que mais agradem o público alvo da composição.

Para Bordini (2016, p.108):

> Compor é pensar com sons (notas). Encontrar uma lógica, um padrão, um princípio, sejam quais forem, em um sistema musical, é pensar por suas próprias leis. Essa lógica pode derivar do próprio sistema musical, de um modelo extramusical ou do ideário do compositor, por analogia ou metáfora, mormente de ambas.

Ainda segundo o mesmo autor, o “pensamento musical criativo está inexoravelmente interligado à notação musical”. Assim, para entendermos as relações matemáticas dentro da composição musical será imprescindível investigar como elas foram determinadas e como os estudos de sua sistemática foram desenvolvidos no decorrer da história, bem como construir uma base teórica mínima sobre a notação musical.

2.1 UM BREVE HISTÓRICO

Assim como a música, muitos consideram a matemática uma arte, e este pensamento pode ser justificado se buscarmos as origens da palavra que dá nome está ciência exata. Segundo Leão (2016) a palavra “Matemática” tem origem no termo grego μαθηματική τέχνη, que pode ser traduzido como “a arte das coisas que são aprendidas”. Com o passar do tempo, o termo grego μαθηματική τέχνη, perdeu o τέχνη (arte) e, então, o adjetivo μαθηματική ficou representando o atual substantivo "matemática". Ainda falando da Grécia, muito se credita a Pitágoras os primórdios dos estudos das relações matemáticas existentes na música. Rodrigues (1999, p. 1), matemático e professor catedrático na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, afirma que na História da civilização europeia, desde a antiguidade clássica até ao século das luzes, os aspectos eruditos da música foram sempre considerados uma das disciplinas das matemáticas aplicadas. Atribui-se à Escola Pitagórica a descoberta das frações da corda que geravam notas consonantes no *Monocórdio*.

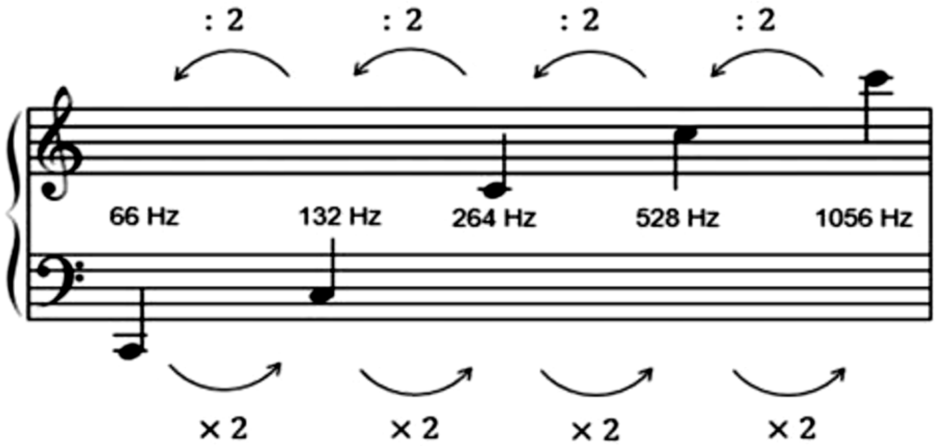
> O monocórdio é descrito historicamente como sendo um instrumento formado por uma corda esticada sobre uma base de madeira, cujas extremidades estariam presas em duas pontes suspensas. Sobre a corda correria uma terceira ponte, móvel, que possibilitaria cortar a corda em duas partes nos pontos desejáveis. Sob a corda, na madeira, inseriam-se marcações numéricas. A palavra grega *kanōn*, que pode designar também monocórdio, indicaria especificamente essas medidas ou instruções para a divisão da corda, ou seja, a régua de marcação, enquanto a palavra monocórdio deveria ser utilizada para designar de forma geral o instrumento. (BROMBERG, 2016, p. 3).

Pelo estudo do monocórdio chegou-se à conclusão de que dividindo a corda em sua metade e fazendo-a vibrar teremos um som que se comparado com o provocado pela vibração da corda inteira, soarão quase que iguais, porém com alturas diferentes. Assim com a razão de 1/2 da corda obtemos um intervalo de oitava, e tais notas recebem os mesmos nomes, ou seja, se tal corda estiver afinada em Dó quando dividirmos ela ao meio ele resultará em um Dó uma oitava acima. Outras proporções da corda foram observadas, visto que seus sons combinados com o da corda solta soavam agravelmente, são elas a fração de 2/3 da corda que representa um intervalo de quinta e a de 3/4 que representa um intervalo de quarta. E foi através do intervalo de quinta que foram obtidas todas as notas da escala pitagórica.

> Para a Escola de Pitágoras, a harmonia dos sons estava em correspondência directa com a aritmética das proporções: o produto de 2/3 (fracção associada à quinta) por 3/4 (fracção associada à quarta) dá a fracção 1/2 associada à oitava; a sua divisão (subtracção de intervalos) está associada à fracção 8/9 = (2/3):(3/4) que representa um tom, i.e., a diferença de uma quinta e de uma quarta. Analogamente, se obtém que uma oitava é composta por duas quartas e um tom (1/2 = 3/4 x 3/4 x 8/9). (RODRIGUES, 1999, p. 17).

Pensando a nota musical como a frequência das vibrações que determinam seu som, obteremos a frequência de uma oitava dobrando a medida registrada na nota original, sendo assim, pelas relações de Pitágoras, dividindo a corda ao meio sua frequência vai ter o dobro da frequência da corda inteira. Logo a frequência de um tom (nota musical) é inversamente proporcional ao comprimento da corda. "Assim, por exemplo, dado um dó com frequência 66 Hz, para obter um dó uma oitava acima, multiplica-se por dois a sua frequência, obtendo-se um dó de frequência 132 Hz" (BRITO, 2016, p. 1).

Figura 1 - Intervalos de oitava a partir de um dó de 66 Hz



Fonte: Correio do Minho (BRITO, 2016, p. 36)

Esta relação se deve à constatação de que o número de vibrações é inversamente proporcional ao tamanho das cordas observadas nos experimentos de Pitágoras. Desta forma, como a fração de 2/3 representa um intervalo de quinta, obteremos a medida da frequência de uma quinta justa multiplicando 3/2, à medida da frequência da nota original.

Pelo estudo destas relações chegou-se a uma escala de doze notas, observando os seguintes princípios:

I. Seja f_n $(com\, n \in \mathbb{N})$ uma frequência de uma nota musical.

II. Dada a frequência f_0 como nota original, as frequências das notas da escala devem ser do tipo $f_n = k \cdot f_0\, (com\, 1 \leq k < 2)$, ou seja, a notas precisam estar entre a nota original e a sua oitava.

III. Obteremos um intervalo de quinta fazendo $f_1 = \frac{3}{2} \cdot f_0 = 1{,}5 \cdot f_0$.

IV. Da mesma forma, teremos a quinta de f_1 fazendo

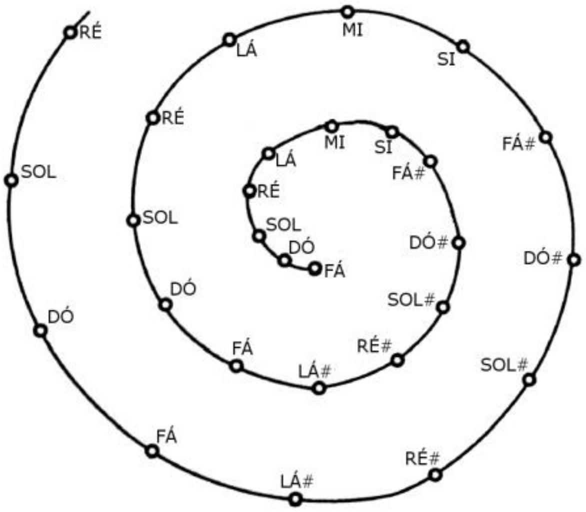
$$f_2 = \frac{3}{2} \cdot f_1 = \frac{9}{4} \cdot f_0 = 2{,}25 \cdot f_0.$$

V. Mas como queremos formar uma escala dentro de uma mesma oitava devemos obter a nota equivalente reduzindo uma oitava, logo

$$f_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot f_0 = \frac{9}{8} \cdot f_0 = 1{,}125 \cdot f_0.$$

Repetindo este processo mais algumas vezes foi possível obter a relação $f_{12} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} \cdot f_0$ que equivale a 12 quintas e a redução de 7 oitavas, este resultado se aproxima bastante de retornar à frequência inicial, o que completaria o ciclo, porém existe uma pequena diferença na afinação que era percebida aos ouvidos e que influiria negativamente na transposição de melodias e na afinação e construção de instrumentos musicais. Assim, o ciclo pitagórico de quintas não se fecha, podendo ser representado por uma espiral conforme a Figura 2. De acordo do Rodrigues (1999, p. 22) esta diferença, a chamada *coma pitagórica*, está essencialmente relacionada com a impossibilidade, encontrada já pelos gregos, de medir a diagonal do quadrado através de uma fração exata do seu lado e, portanto, também com a irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Esta falta de conhecimento sobre os números irracionais fez com que este problema fosse resolvido apenas na Renascença após a descoberta do logaritmo. Sendo que em 1722, o músico alemão Johann Sebastian Bach (1685-1750) lançou a obra *"O Cravo bem temperado"* aproveitando os trabalhos de Andréas Werckmeiste (1645-1706) que instituiu a temperamento igual entre as notas da escala. Devido a Bach, o sistema temperado é conhecido e utilizado pela maior parte dos músicos contemporâneos. Assim, é possível representar matematicamente a sequência das frequências das doze notas de uma oitava na escala temperada da seguinte maneira $f, \sqrt[12]{2}f, \sqrt[12]{2^2}f, \ldots, \sqrt[12]{2^{11}}f$.

Figura 2 - Ciclo de Quintas Pitagórico



Fonte: https://laboratoriodeluthieria.wordpress.com/2015/07/02/temperamento-a-musica-atraves-dos-numeros/. Acesso em: 06 out 2018

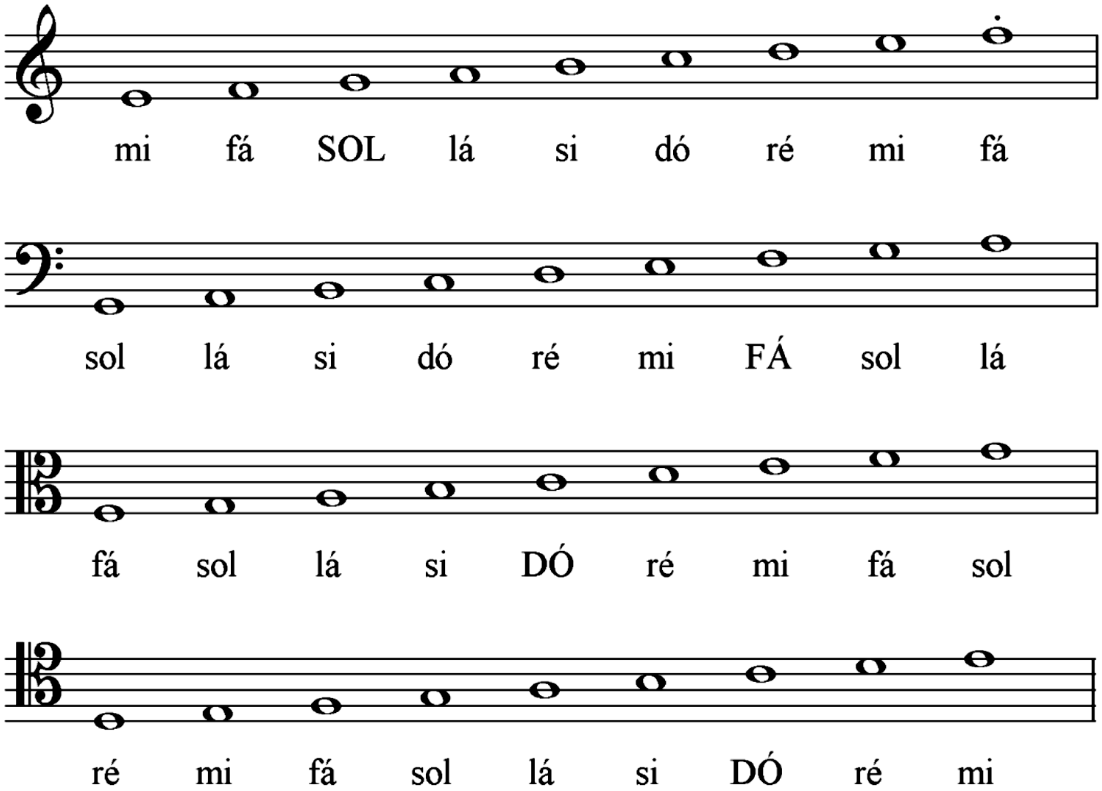
2.2 NOÇÕES BÁSICAS DE TEORIA MUSICAL

Como a matemática e música possuem uma linguagem universal, é preciso uma ambientação nas definições, notações e conceitos da teoria musical para a compreensão dos processos envolvidos na composição musical e entender suas relações matemáticas. Na música os sons são representados pelas notas musicais que recebem nomes específicos, bem como símbolos que as identificam graficamente, além de indicar a altura e duração do som.

De acordo com Carvalho (2013, p. 6), as notas são denominadas por Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, e também podem ser identificadas pelas letras maiúsculas C, D, E, F, G, A, B, respectivamente. Neste trabalho será considerada a equivalência das classes de notas, ou seja, quando nos referimos a alguma nota não será considerada a sua altura. Logo, uma nota Dó com altura mais aguda e uma nota Dó mais grave pertencem à mesma classe de equivalência das notas.

A pauta musical (ou pentagrama) consiste em cinco linhas horizontais, paralelas e equidistantes. Elas são numeradas de baixo para cima (1ª linha até 5ª linha), assim como os espaços formados entre as linhas (1º ao 4º espaço). Para identificarmos as notas, o pentagrama deve ter alguns símbolos para que o músico faça a leitura completa de todas as informações da partitura. Um destes símbolos é a clave que determina os nomes das notas. A clave é um símbolo que indica qual altura musical será representada por cada linha ou espaço. Existem três claves: a clave de sol, a clave de fá e a clave de dó. Colocadas no início de cada pentagrama, identificam uma posição do pentagrama (uma linha) com um determinado som, e depois todas as outras posições ficam determinadas por relatividade (através da sequência Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si e Dó). Os símbolos que representam as alturas musicais (as notas) podem ser colocados tanto sobre as linhas quanto sobre os espaços. Quanto mais para cima a posição da nota na pauta, mais agudo o som que representa. Na Figura 3 temos exemplos de notação nas claves mais comuns:

Figura 3 - Pentagramas



Fonte: Gusmão (2012, p. 4)

As figuras rítmicas indicam a duração proporcional dos sons e silêncios. Neste trabalho as notas não serão diferenciadas pela duração. Tradicionalmente, a música é medida através de intervalos regulares de tempo (pulsos) que são agrupados em ciclos de mesma duração. Estes grupos se chamam compassos, e os pulsos são chamados de tempos. Duas notas musicais consecutivas não possuem sempre a mesma relação de altura entre si.

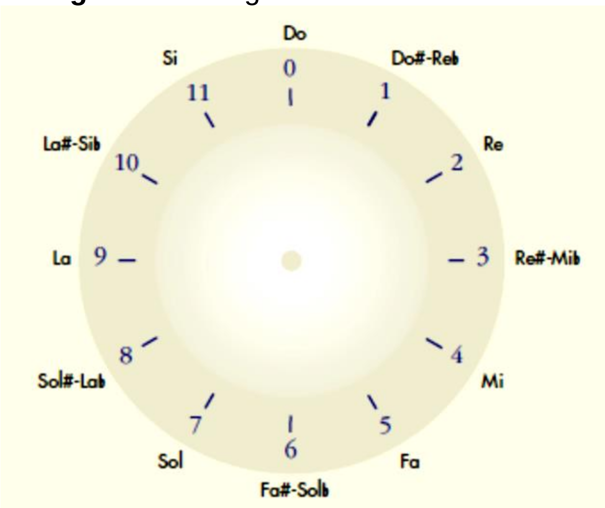
A menor distância entre sons possível no sistema musical ocidental é chamada de semitom ou meio-tom. O intervalo compreendido por dois semitons sucessivos é chamado tom. O sistema musical ocidental, também conhecido como sistema temperado, é composto de doze notas musicais diferentes, sendo que sete notas são naturais e cinco são acidentadas. Entre duas notas naturais existem quase sempre uma nota acidentada, com exceção entre o Mi e o Fá, Si e o Dó. Se a distância entre dó e ré, por exemplo, é de um tom, isso significa que existe outra altura musical entre elas. Podemos representar estas novas alturas obtidas a partir das notas naturais, com acréscimo de certos sinais gráficos: os sustenidos (♯) e os bemóis (♭). Os primeiros acrescentam meio-tom à altura da nota em que estão aplicados e os segundos diminuem em meio-tom a altura da nota em que estão aplicados. Duas notas que possuem o mesmo som (como por exemplo, Dó e Si# ou Ré# e Mi♭), mas estão escritas de maneira diferente, são chamadas de notas enarmônicas. Chamamos de escala cromática a sequência de doze semitons consecutivos.

Figura 4 - Exemplo de uma escala cromática

Fonte: Carvalho (2013, p. 9)

Existem outras escalas dentro da teoria musical, porém no sistema temperado (ou sistema ocidental) todas são derivações da escala cromática citada acima. Em outras culturas existem sistemas que possuem mais de doze notas, entre os antigos, há o indiano, utilizado nas composições de ragas, com 22 notas, mas o mais utilizado em todo mundo é este sistema que tem por base a escala cromática.

Figura 5 - Relógio cromático de 12 tons



Fonte: Rodrigues (1999, p. 22)

Uma escala é uma série de notas consecutivas que fornece o material para a construção de um trecho musical ou de uma peça inteira. Embora exista uma quantidade enorme de diferentes escalas, as mais importantes para o estudo da música tonal são as escalas maiores e menores.

O que define uma escala maior é a distribuição de tons e semitons entre as notas que a compõe. Por exemplo, uma série de notas que comece e termine na nota dó, e que utilize somente as notas naturais (sem acidentes), forma a escala de dó maior. Isto se deve à seguinte distribuição de tons e semitons:

Figura 6 - Escala de dó maior

Fonte: Carvalho (2013, p. 8)

A sequência T-T-ST-T-T-T-ST define, portanto, as escalas maiores. A nota inicial desta sequência é considerada a geradora da escala e, portanto, confere o nome da escala. Por exemplo, a escala de lá maior consiste na sequência de notas de lá a lá, seguindo a configuração T-T-ST-T-T-T-ST.

Tabela 1 - Escalas maiores

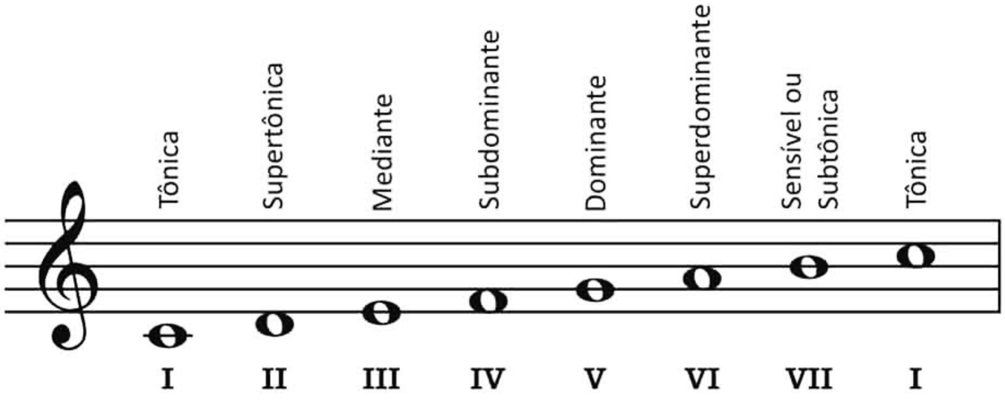
ESCALA	NOTAS							
C maior	C	D	E	F	G	A	B	C
Db maior	Db	Eb	F	Gb	Ab	Bb	C	Db
D maior	D	E	F#	G	A	B	C#	D
Eb maior	Eb	F	G	Ab	Bb	C	D	Eb
E maior	E	F#	G#	A	B	C#	D#	E
F maior	F	G	A	Bb	C	D	E	F
Gb maior	Gb	Ab	Bb	Cb	Db	Eb	F	Gb
G maior	G	A	B	C	D	E	F#	G
Ab maior	Ab	Bb	C	Db	Eb	F	G	Ab
A maior	A	B	C#	D	E	F#	G#	A
Bb maior	Bb	C	D	Eb	F	G	A	Bb
B maior	B	C#	D#	E	F#	G#	A#	B

Fonte: http://www.descomplicandoamusica.com/escala-de-do-maior. Acesso em: 06 out. 2018

Às notas que compõe a escala são designados números, chamados graus, correspondentes à sua posição na escala. Costumamos escrever estes graus com numerais romanos. Os graus da escala recebem denominações específicas:

I- Tônica
II- Supertônica
III- Mediante
IV- Subdominante
V- Dominante
VI- Submediante
VII- Sensível

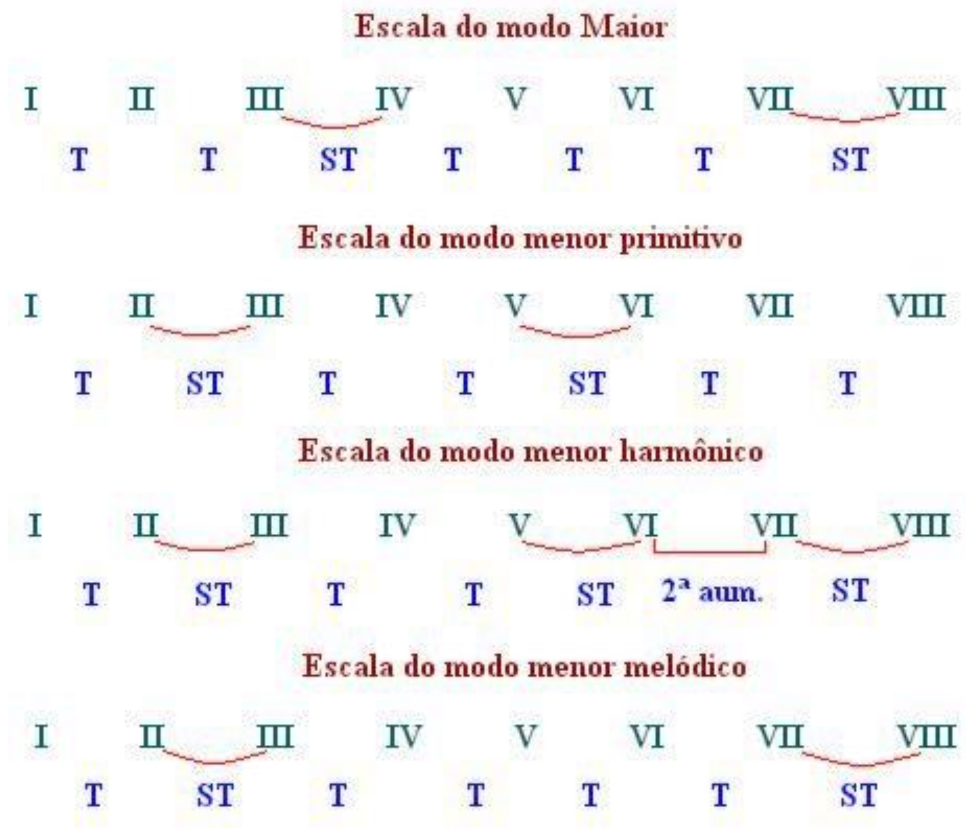
Figura 7 - Graus da escala de dó maior



Fonte: https://blog.opus3ensinomusical.com.br/escala-maior. Acesso em: 10 out. 2018

Além das escalas maiores existem outras como a escala menor natural (também chamada de primitiva), a escala harmônica e a escala menor melódica. As escalas menores, assim como as maiores, se caracterizam por configurações específicas de tons e semitons. A Figura 8 especifica estas configurações, sendo que o intervalo de 2ª aumentada presente na escala do modo menor harmônico equivale a um tom e meio.

Figura 8 - Intervalos entre os graus nas escalas dos modos maior e menores



Fonte: https://sites.google.com/site/musicaeteoria/informacoes-gerais-sobre-escalas-graus-modais-graus-tonais-entre-outros. Acesso em: 10 out. 2018

Tabela 2 - Escalas menores naturais

ESCALA	NOTAS							
C menor	C	D	Eb	F	G	Ab	Bb	C
Db menor	Db	Eb	Fb (E)	Gb	Ab	Bbb (A)	Cb	Db
D menor	D	E	F	G	A	Bb	C	D
Eb menor	Eb	F	Gb	Ab	Bb	Cb (B)	Db	Eb
E menor	E	F#	G	A	B	C	D	E
F menor	F	G	Ab	Bb	C	Db	Eb	F
Gb menor	Gb	Ab	Bbb (A)	Cb (B)	Db	Ebb (D)	Fb (E)	Gb
G menor	G	A	Bb	C	D	Eb	F	G
Ab menor	Ab	Bb	Cb (B)	Db	Eb	Fb (E)	Gb	Ab
A menor	A	B	C	D	E	F	G	A
Bb menor	Bb	C	Db	Eb	F	Gb	Ab	Bb
B menor	B	C#	D	E	F#	G	A	B

Fonte: http://www.descomplicandoamusica.com/escala-menor-natural. Acesso em: 10 out. 2018.

A música popular ocidental tem por referência o sistema de composição tonal, ou simplesmente *sistema tonal*, em que a tônica de uma escala determina o tom central da música e os seus graus orbitam dentro da melodia e harmonia.

Podemos definir a música composta por três principais elementos:

Ritmo: sucessão regular de tempos fortes e fracos cuja função é estruturar uma obra musical.

Harmonia: combinação de sons simultâneos, emitidos no mesmo tempo, onde sua base é a tonalidade; e como princípio organizador a estrutura do acorde.

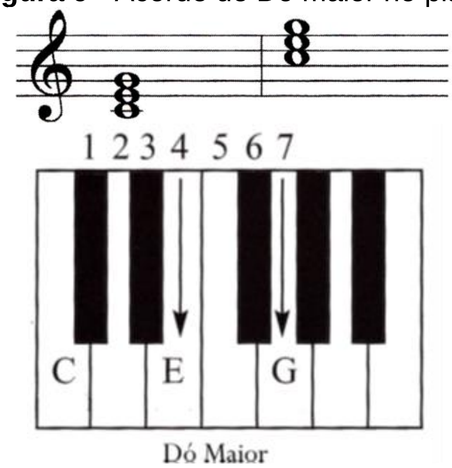
Melodia: sucessão ascendente e descendente de sons a intervalos e alturas variáveis, formando frases; é adornada pela harmonia e acentuada pelo ritmo, embora possa ser compreendida isoladamente.

Nas atividades pedagógicas propostas na oficina utilizada para esta investigação está incluso um jogo que utiliza a probabilidade para a composição da harmonia de uma música popular, portanto se faz necessário definir o conceito de acorde e campo harmônico para fundamentar este trabalho.

Segundo Wright (2009, p. 31) a primeira harmonia na música ocidental consistiu de oitavas paralelas, quartas e quintas. Ao longo dos séculos, uma rica variedade de padrões harmônicos e clichês evoluíram. O bloco de construção harmônico básico é o acorde, que é uma coleção de notas, geralmente três ou mais, que soam simultaneamente. Os tipos de acordes são determinados pelos intervalos entre as notas no acorde. Na música Ocidental, é comum utilizar acordes construídos de consecutivos intervalos de terça, isto é, cada nota do acorde está afastada por um intervalo de terça das outras. As *tríades* são acordes que consistem em três notas e são a forma mais comum de acorde utilizado na música. Este tipo de acorde tornou-se a unidade básica da harmonia Ocidental. Apesar de existirem mais tipos de acordes, como as tétrades, para simplificar o entendimento por parte de leitores leigos em teoria musical, neste trabalho será utilizado apenas tríades maiores, menores e diminutas para a construção das harmonias.

O primeiro tipo acorde que é preciso considerar é a *tríade maior*, que consiste de uma nota que soa simultaneamente com as notas que se encontram um intervalo de terça e um quinto acima da nota dada, ou seja, serão todas as notas de grau I, III e V da escala maior. Logo, pode-se contar os semitons entre as notas para montar uma tríade maior, utilizando esta fórmula: Tônica + 4 semitons + 3 semitons.

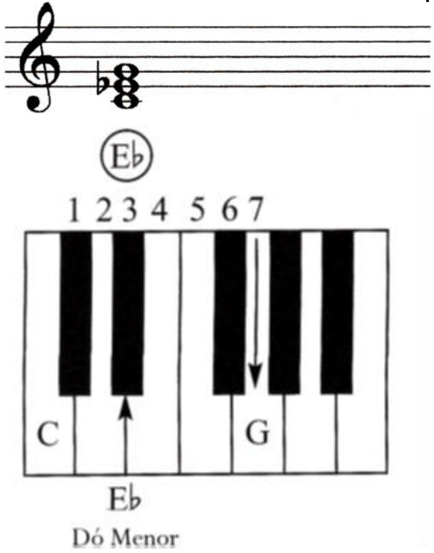
Figura 9 - Acorde de Dó maior no piano



Fonte: Teoria Musical Fundamental - www.academiamusical.com.pt

Uma *tríade menor* é feita de uma tônica, e as notas nos intervalos de uma terça menor acima da tônica e de uma quinta perfeita acima da tônica, sendo possível contar os semitons entre as notas para montar um acorde menor, utilizando esta formula: Tônica + 3 semitons + 4 semitons.

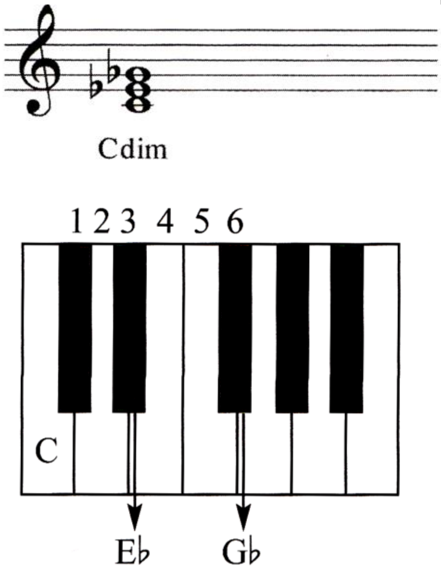
Figura 10 - Acorde de Dó menor no piano



Fonte: Teoria Musical Fundamental - www.academiamusical.com.pt

Já uma *tríade diminuta* é uma sequência de dois intervalos com três semitons de distância entre cada nota, ou seja, um intervalo de terça menor acima da tônica e um de quinta diminuta da tônica. Desta forma, um acorde diminuto tem a fórmula: Tônica + 3 semitons + 3 semitons.

Figura 11 - Acorde de Dó diminuto no piano



Fonte: Teoria Musical Fundamental - www.academiamusical.com.pt

Para representar um acorde (tríade) maior usa-se a somente letra correspondente a sua nota tônica (Ex.: Dó maior → C), mas se o acorde for menor acrescente-se à letra correspondente a tônica a letra minúscula *m* (Ex.: Dó menor → Cm). Já o acorde (tríade) diminuto pode receber como acréscimo °, *dim* ou m5- (Ex.:

Dó diminuto → C°, Cdim ou Cm5-). A estas nomenclaturas chamamos de cifras dos acordes.

Pode-se definir *campo harmônico* como um conjunto de acordes formados por notas de uma mesma escala musical. Logo, numa escala com sete notas, podemos formar sete tríades diferentes, pois cada nota da escala será a tônica de um acorde. Por exemplo, usando a escala de Dó maior natural (Tabela 1), escolhida por não haver acidentes em sua formação, facilitando assim o entendimento, construiremos os acordes do campo harmônico de Dó maior natural da seguinte maneira.

Tabela 3 - Formação do Campo Harmônico de Dó maior

Formação	**Notas do Acorde**	**Fórmula**	**Cifra**
I-III-V	C-E-G	Tônica + 4 semitons+ 3 semitons	C
II-IV-VI	D-F-A	Tônica + 3 semitons + 4 semitons	Dm
III-V-VII	E-G-B	Tônica + 3 semitons + 4 semitons	Em
IV-VI-I	F-A-C	Tônica + 4 semitons+ 3 semitons	F
V-VII-II	G-B-D	Tônica + 4 semitons+ 3 semitons	G
VI-I-III	A-C-E	Tônica + 3 semitons + 4 semitons	Am
VII-II-III	B-D-F	Tônica + 3 semitons + 3 semitons	B°

Fonte: Próprio autor.

Repetindo este processo em todas as escalas (maiores e menores), respeitando a quantidade de semitons dos intervalos, obteremos os campos harmônicos com acordes que melhor se harmonizam com as melodias construídas dentro de cada escala correspondente.

Tabela 4 - Campos harmônicos das escalas maiores

Campo Harmônico - Escala Maior							
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Maior	menor	menor	Maior	Maior	menor	dim	Maior
C	Dm	Em	F	G	Am	B°	C
C#	D#m	Fm	F#	G#	A#m	C°	C#
D	Em	F#m	G	A	Bm	C#°	D
D#	Fm	Gm	G#	A#	Cm	D°	D#
E	F#m	G#m	A	B	C#m	D#°	E
F	Gm	Am	A#	C	Dm	E°	F
F#	G#m	A#m	B	C#	D#m	F°	F#
G	Am	Bm	C	D	Em	F#°	G
G#	A#m	Cm	C#	D#	Fm	G°	G#
A	Bm	C#m	D	E	F#m	G#°	A
A#	Cm	Dm	D#	F	Gm	A°	A#
B	C#m	D#m	E	F#	G#m	A#°	B

Fonte: http://www.brunoagora.com/2012/10/como-construir-um-campo-harmonico.html. Acesso em: 15 out. 2018

Tabela 5 - Campos harmônicos das escalas menores harmônicas

Campo Harmônico - Escala Menor Harmônico							
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
menor	dim	Maior	menor	menor	Maior	Maior	menor
Cm	D°	D#	Fm	Gm	G#	B	Cm
C#m	D#°	E	F#m	G#m	A	C	C#m
Dm	E°	F	Gm	Am	A#	C#	Dm
D#m	F°	F#	G#m	A#m	B	D	D#m
Em	F#°	G	Am	Bm	C	D#	Em
Fm	G°	G#	A#m	Cm	C#	E	Fm
F#m	G#°	A	Bm	C#m	D	F	F#m
Gm	A°	A#	Cm	Dm	D#	F#	Gm
G#m	A#°	B	C#m	D#m	E	G	G#m
Am	B°	C	Dm	Em	F	G#	Am
A#m	C°	C#	D#m	Fm	F#	A	A#m
Bm	C#°	D	Em	F#m	G	A#	Bm

Fonte: http://www.brunoagora.com/2012/10/como-construir-um-campo-harmonico.html. Acesso em: 15 out. 2018

Logo, as composições podem ser consideradas combinações destas possibilidades musicais que podem ser organizadas por meio da criatividade, fazendo uso da aleatoriedade ou de algoritmos que produzam ou reproduzam padrões que permitam um maior ou menor grau de agradabilidade nas músicas.

2.3 A MATEMÁTICA NA COMPOSIÇÃO MUSICAL

Os conceitos apresentados até aqui permitem entender melhor os processos de composição musical comumente utilizados na música popular, onde a tônica determina em quais campos harmônicos e em quais escalas orbitaram a harmonia e a melodia da música. “Os princípios que regulam o sistema tonal têm sido bastante estudados desde há muito e ainda hoje se renovam em teorias que tentam compreendê-los melhor” (TYMOCZKO apud BORDINI, 2015, p. 108). Outros estudos buscaram fugir deste sistema e constituíram novas formas de composição nomeadas de atonais algumas determinaram outras perspectivas nas relações da matemática com a música. Esta fuga do sistema tradicional de composição fundamenta um novo período dentro da história desta arte, inaugurando a chamada *música moderna*. Dentre os novos métodos de composição deste período destacam-se:

- **Serialismo** – criado por Arnold Schönberg (1874-1951) marca o rompimento com as normas tradicionais da música tonal. Segundo Pires Fortes (2009, p. 138) a regra básica do serialismo dodecafônico “é que uma série de doze notas deve ser executada sem que nenhuma delas se repita, para que só então possa ser iniciada uma nova série”. O resultado são melodias altamente complexas desprovidas de um ponto de referência, não havendo a hierarquia de uma nota especifica como existe no sistema tonal. Segundo Brito (2016, p. 1) este sistema, que influenciou muitos compositores do século XX como Anton Webern, Alban Berg e Igor Strawinsky, baseia-se numa estrutura matemática em que são aplicadas técnicas da teoria de grupos.

- **Música Aleatória (ou Indeterminada)** – tendo como seu principal nome o norte-americano John Cage (1912-1992), surge buscando proporcionar múltiplas possibilidade de interpretação. Esse método de composição, eclodido em 1950, utiliza o acaso como princípio construtivo. Segundo Albet (1979, p. 128) “o acaso numa obra pode ser incorporado ao nível do compositor ou ao nível do intérprete. Parte da obra pode depender da execução do intérprete e assim conseguir formas abertas de música aleatória em que a interpretação é diferente”.
- **Música Estocástica** – criado pelo engenheiro, arquiteto e compositor – nascido na Romênia, de ascendência grega e naturalizado francês – Iannis Xenakis (1922-2001) este método composicional utiliza como ferramentas conceitos matemáticos como cálculos combinatórios, probabilidade, Cadeias de Markov, teoria dos jogos, teoria dos conjuntos, entre outros.

> Achorripsis é uma obra de Xenakis que foi realizada de acordo com o método da *música estocástica*, conforme a teoria que o próprio compositor definiu em seu artigo “La crise de la musique sérielle”. O compositor usa modelos estatísticos com o intuito de gerar dados e informações que, num segundo momento, são transformados em música, sempre havendo uma liberdade intuitiva nesta tarefa. Estes modelos estatísticos estão presentes tanto no processo de formalização da obra, como na definição dos pontos de ataque das notas dos instrumentos, na duração e altura das notas, e na duração e extensão dos *glissandi* dos instrumentos de arco. (ROSSETTI, 2010, p. 6)

- **Composição Algorítmica** – é a criação de música com auxílio de um algoritmo. O algoritmo é base fundamental da programação de computadores. Se trata de um conjunto de passos, regras lógicas e/ou operações necessários para realização de determinada tarefa. Na história existem registros de experiências de conjuntos lógicos de regras para composição musical, antes mesmo da invenção do computador, como os *Musikaliche Würfelspiele,* traduzidos do alemão como “jogos de dados musicais”, que eram bastante comuns no século XVIII. Um dos

> mais famosos destes jogos é atribuído ao grande compositor da primeira escola de Viena, Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791). Segundo Tafarello e Souza (2014, p. 1) o jogo consiste, como o próprio nome diz, de um sorteio realizado com dados e o cruzamento de informações entre as duas tabelas. Com o advento do computador novos algoritmos foram pensados para composição musical através de recursos tecnológicos. O trabalho de Lejaren Hiller (1924-1994) e Leonard Isacsson (1925-) da Universidade de Illinois, na década de 50, com o computador ILLIAC é o trabalho pioneiro mais conhecido em música de computador. O programa utilizado gerou notas pseudoaleatoriamente por meio de cadeias de Markov. As notas geradas foram testadas por meio de regras composicionais heurísticas de harmonia clássica e contraponto (MANTARAS; ARCOS, 2002, p. 44).

A combinação de possibilidades, a utilização de jogos para buscar a aleatoriedade, a utilização das Cadeias de Markov destacam a relação destes modelos de composição com a teoria das probabilidades. A seguir, serão expostos alguns conceitos que permitirão melhor entender esta relação e embasarão a atividade pedagógica realizada para o presente estudo.

3 TEORIA DA PROBABILIDADE

3.1 CONCEITOS INICIAIS

Andrei Andreyevich Markov[2] (1856–1922), matemático russo, realizou seus primeiros trabalhos sobre teoria e análise de números, frações contínuas, limites de integrais, teoria de aproximação e convergência de séries, mas é particularmente lembrado por seu estudo das chamadas cadeias de Markov, ramo da teoria da probabilidade que faz parte da teoria dos processos estocásticos.

Nesta seção, serão definidos alguns conceitos da Teoria das Probabilidades que nos permitirão entender o que são e como podem ser utilizadas as Cadeias de Markov na composição musical. A definição de Cadeias de Markov, em geral, não é trabalhada no ensino médio, porém tentaremos dar uma visão simplificada visando o melhor entendimento dos estudantes.

Segundo Morgado et al. (2001, p.119), a Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que determina e desenvolve "modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios". O mesmo autor (2015, p. 136), define experimentos aleatórios como aqueles que repetidos sob as mesmas condições produzem geralmente resultados diferentes.

Definição 3.1.1. O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório será chamado *espaço amostral* e denotado por Ω. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado evento. Um evento A ao qual atribuímos uma probabilidade será chamado evento aleatório.

Assumindo $n(\Omega)$ como o número de elementos do espaço amostral Ω, temos como exemplos de experimentos aleatórios:

- resultado do lançamento de um dado;

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad n(\Omega_1) = 6$$

- soma do resultado do lançamento de dois dados;

$$\Omega_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \quad n(\Omega_2) = 11$$

[2] Biografia pode ser acessada em http://www.ugr.es/~eaznar/markov.htm. Acesso em 15 out. de 2018.

- escolha de uma nota musical qualquer;

$$\Omega_3 = \{C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#, A, A\#, B\}, \quad n(\Omega_3) = 12$$

O jogo com dados, usado nos dois primeiros exemplos, está diretamente ligado à história da Teoria das Probabilidades. Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 211-212) indicam que os primeiros registros da origem deste campo da matemática é encontrada em correspondências entre dois matemáticos franceses, Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre Fermat (1601-1665), que em 1654 discutem a respeito de um problema proposto por Chevalier de Méré, um rico nobre francês com gosto pelo jogo. Apesar de Girolamo Cardano (1501-1570) ter reconhecido e explorado princípios referentes ao tema um século antes, o seu livro, *Liber de Ludo Aleae* (Manual sobre Jogos de Azar), só foi publicado nove anos após a dupla de matemáticos franceses terem resolvido o problema do Chevalier.

Definição 3.1.2. *Probabilidade* é uma função que associa a cada evento A, de um espaço amostral Ω, um número real $P(A)$ de forma que:

i. Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
ii. $P(\Omega) = 1$.
iii. Para cada sequência de eventos mutuamente exclusivos $A_1, A_2, \ldots$ (ou seja, eventos para os quais $A_i \cap A_j = \emptyset$; quando $i \neq j$), tem-se:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

ou ainda:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Ainda Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 212) afirmam que, em seu livro, Cardano, reconheceu um princípio relacionado ao que conhecemos hoje por Lei dos Grandes Números e que este princípio pode ser simplificado na seguinte afirmação:

> Se um jogo (ou outra experiência) com *n* resultados igualmente prováveis for repetido um grande número de vezes, então o número real de vezes que cada resultado efetivamente ocorre tenderá a ser próximo de $\frac{1}{n}$. Quanto mais vezes o jogo for jogado, mais perto o resultado virá ficar dessa razão.

Definição 3.1.3. Seja um experimento aleatório com espaço amostral Ω formado por $n(\Omega)$ elementos e um evento $A \subset \Omega$ formado por $n(A)$ elementos, então:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Esta é a chamada definição *clássica* de probabilidade que se refere a subconjuntos unitários equiprováveis. Assim, se existem n elementos em um espaço amostral e queremos que todos os eventos unitários tenham a mesma probabilidade, devemos atribuir a cada evento unitário a probabilidade $\frac{1}{n}$.

De fato, pelo item iii da definição 3.1.2, se $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ e $A \subset \Omega$, então

$$P(A) = P(\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_m\})$$

$$= P(\{x_1\}) + P(\{x_2\}) + \cdots + P(\{x_m\})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m\ vezes} = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Segundo Magalhães (2006, p. 11), uma outra definição, denominada *frequentista* ou *estatística*, considera o limite de frequências relativas como o valor da probabilidade. Para tal, seja n_A o número de ocorrências de A em n repetições independentes do experimento em questão. Assim,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}.$$

Proposição 3.1.1. Se A e B são eventos de Ω, e $\bar{A}$ é o evento complementar de A, ou seja, $\bar{A} = \Omega - A$, então:

i. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
ii. $P(\emptyset) = 0$
iii. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
iv. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
v. Se $B \subset A$ então $P(A) \geq P(B)$

Demonstração:

i. De ii e iii da definição 3.1.2 temos que

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

Portanto, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

ii. Sabemos que $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ e que $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, logo

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset).$$

Daí, $P(\emptyset) = 0$.

iii. Dados dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral. Pode-se escrever

$$A = (A - B) \cup (A \cap B),$$

sendo que $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, logo

$$P(A) = P((A - B) \cup (A \cap B)) = P(A - B) + P(A \cap B),$$

Segue daí que, $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iv. Sabendo que $A \cup B = (A - B) \cup B$ e que $(A - B) \cap B = \emptyset$, temos que

$$P(A \cup B) = P((A - B) \cup B) = P(A - B) + P(B),$$

De iii segue que

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

v. Se $B \subset A$ então $A \cap B = B$, segue de iii que

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) = P(A - B) + P(B) \geq P(B),$$

pois pelo item i da definição 3.1.2 temos que $P(A - B) \geq 0$.

Definição 3.1.4. Sejam dois eventos A e B de um espaço amostral Ω, a probabilidade de B ocorrer condicionada a A ter ocorrido é indicada por $P(B|A)$ (lida como "probabilidade de B dado A", ou ainda, "probabilidade de B condicionada a A"). Esta probabilidade é chamada de *probabilidade condicional* onde:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, com\ P(A) \neq 0$$

A partir do conceito de probabilidade condicional é possível obter a expressão denominada de *teorema da multiplicação*:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Pode-se estender este teorema para a casos com mais de dois eventos, por exemplo:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)P(C|A \cap B) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

Generalizando temos a seguinte proposição.

Proposição 3.1.2. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos quaisquer de um espaço amostral Ω, com $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) > 0$ a probabilidade da interseção desses eventos é dada por

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Demonstração: Por hipótese, todos os condicionamentos do lado direito são feitos em eventos com probabilidade positiva, pois todos eles contêm $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Seguindo pelo o método da indução finita, verificamos que para $n = 2$, pela definição 3.1.4, temos

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$$

pois $P(A_1) > 0$.

Supondo a propriedade válida para $n = k$, ou seja,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

Temos que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P\big((A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \cap A_{k+1}\big)$$
$$= P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \cdot P(A_{k+1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k).$$

Pela hipótese de indução,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \cdot P(A_{k+1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k)$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1})$$
$$\cdot P(A_{k+1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k).$$

Logo, a validade de $n = k$ implica na validade de $n = k + 1$. Portanto, pelo princípio da indução finita, a proposição é válida para todo $n \geq 2$.

Definição 3.1.5. Sejam dois *eventos independentes* A e B, ou seja, o resultado de ocorrer A não está associado ao de ocorrer B. Assim, se A e B são independentes temos que $P(B|A) = P(B)$, e da mesma forma temos $P(A|B) = P(A)$.

Proposição 3.1.3. Se A e B são eventos independentes, a probabilidade de que ocorram os dois eventos $(A \cap B)$ é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Demonstração: Pelo teorema da multiplicação, temos que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Mas como A e B são independentes temos, $P(B|A) = P(B)$ ou $P(A|B) = P(A)$, substituindo na equação do teorema temos

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

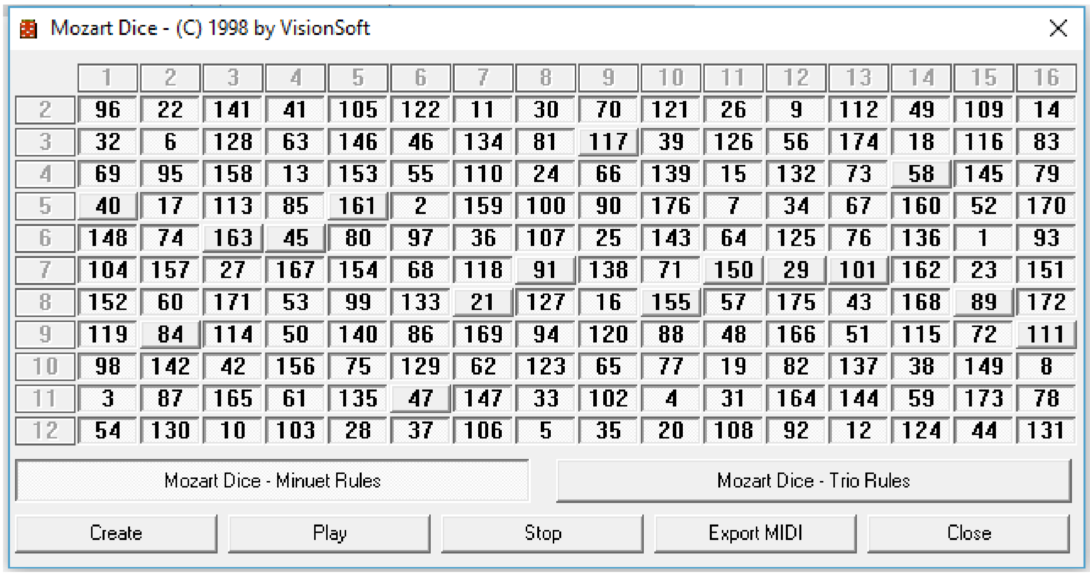
A definição de independência pode ser estendida a três ou mais eventos. Desta forma, para o caso geral, se os eventos A_i com $i = 1, 2, \dots, n$ são independentes temos

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Exemplo 3.1.1: No *Jogo de Dados Musicais de Mozart* utiliza-se a probabilidade de eventos independentes para calcular a chance de sortear duas músicas iguais.[3] Para fazer uma composição com o jogo são lançados dois dados e o trabalho resultante é uma valsa. Uma valsa consiste em um minueto e um trio. Logo, o jogo é formado por duas tabelas:

- a primeira (Figura 12) que associa cada resultado do lançamento de dois dados a uma variedade de 16 compassos diferentes (no total de $11 \times 16 = 176$ compassos), compostos de forma a se combinarem quando tocados em sequência, formando o *Minueto*.

Figura 12 - Software que simula o Jogo de Dados Mozart[4] (Tabela do Minueto)



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Fonte: Próprio autor.

- a segunda (Figura 13) que associa cada resultado do lançamento de um dado a outra variedade de 16 compassos (o que totaliza $6 \times 16 = 96$ compassos), formando uma sequência de compassos denominada *Trio*

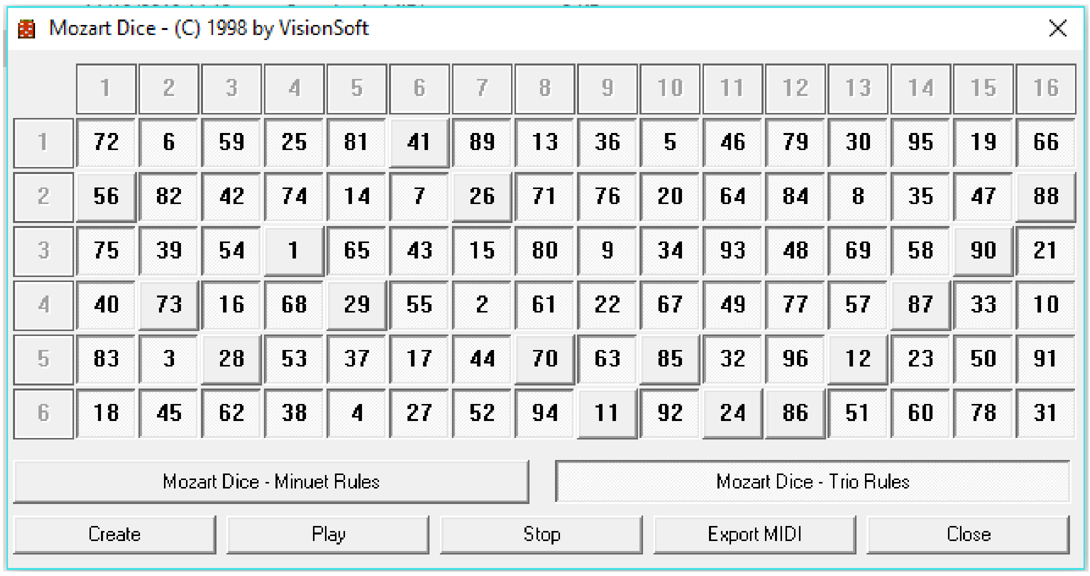
---

[3] Exemplo adaptado do vídeo *O Jogo de Dados de Mozart* da coleção *M³ Matemática Multimídia* desenvolvidos pela Unicamp com financiamento do FNDE, SED, MCT e MEC. Conteúdo com autoria de Adolfo Maia e Jônatas Manzolli.

[4] Software: Mozart Dice, © 1998 por VisionSoft, escrito por S. Goodwin, livremente distribuível, mas com todos os direitos autorais retidos. Disponível em: http://www.amaranthpublishing.com/mozart.zip. Acesso em: 10 out. 2018.

que deve ser tocada simultaneamente ao minueto, combinando perfeitamente.

Figura 13 - Software que simula o Jogo de Dados Mozart (Tabela do Trio)



Fonte: Próprio autor.

Se sortearmos os 16 compassos de um minueto e os 16 compassos do trio e verificando que o sorteio de cada compasso é um evento independente teremos:

Tabela 6 - Probabilidade de sortear os mesmos compassos no Jogo de Dados Mozart

Parte da Valsa	**Cálculo da probabilidade**
Para o minueto:	$\underbrace{\frac{1}{11}}_{1^{\underline{o}}\ compasso} \times \underbrace{\frac{1}{11}}_{2^{\underline{o}}\ compasso} \times \ldots \times \underbrace{\frac{1}{11}}_{16^{\underline{o}}\ compasso}$
Para o trio:	$\underbrace{\frac{1}{6}}_{1^{\underline{o}}\ compasso} \times \underbrace{\frac{1}{6}}_{2^{\underline{o}}\ compasso} \times \ldots \times \underbrace{\frac{1}{6}}_{16^{\underline{o}}\ compasso}$

Fonte: Próprio autor.

Assim a probabilidade, $P(M)$, de que o mesmo minueto seja sorteado é de $\left(\frac{1}{11}\right)^{16}$ e a probabilidade, $P(T)$, de que um mesmo trio seja sorteado é de $\left(\frac{1}{6}\right)^{16}$. Mas como sortear o minueto e o trio são eventos independentes, a probabilidade de sortear mesma valsa, com o mesmo minueto e mesmo trio, $P(M \cap T)$, será de:

$$P(M \cap T) = P(M) \cdot P(T) = \left(\frac{1}{11}\right)^{16} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{16} = \frac{1}{66^{16}} \cong \frac{1}{1{,}3 \times 10^{29}}$$

Ou seja, a chance de repetirmos uma valsa é muitíssimo pequena, quase nula. Para se ter uma ideia, sabendo que cada composição tem aproximadamente 30 segundos, se quisermos tocar todas as possibilidades de composição uma atrás da outra ininterruptamente seriam necessários $(11^{16} \cdot 6^{16}) \cdot 30/(60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365) \cong 1{,}23 \times 10^{23}$ anos para esgotar todas as possibilidades sem repeti-las.

Exemplo 3.1.2: No jogo de dados de Mozart, os 16 lançamentos do par de dados são eventos independentes. Se as 16 somas resultassem em (2, 4, 11, 6, 7, 6, 11, 8, 3, 5, 4, 8, 2, 12, 10, 7), qual a probabilidade da ocorrência desta sequência?[5]

Para responder a esta pergunta é preciso analisar o espaço amostral dos resultados possíveis no lançamento de dois dados.

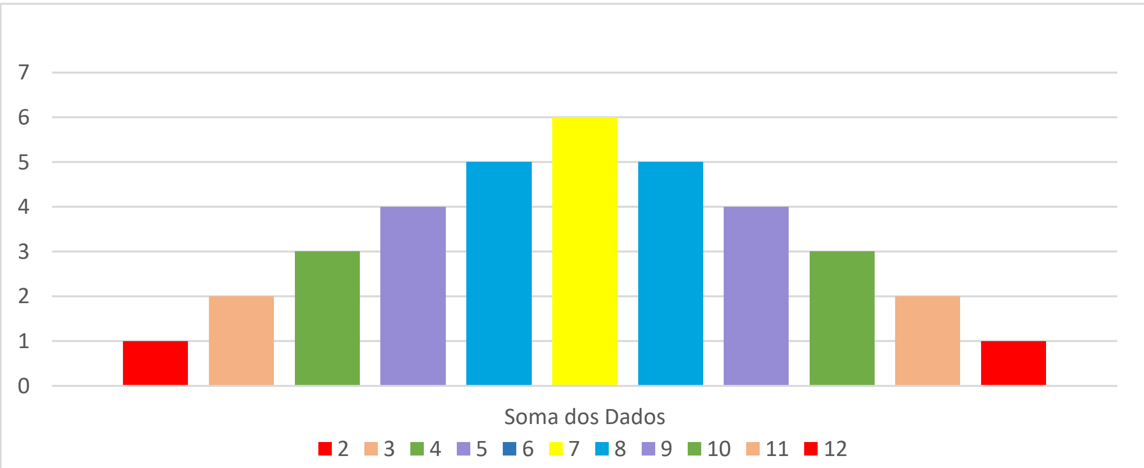
Tabela 7 - Possíveis resultados e soma no lançamento de dois dados

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Fonte: GARCÍA, SALAMANCA e MORA (2013, p. 676)

Figura 14 - Distribuição de probabilidades da soma de dois dados



Fonte: GARCÍA, SALAMANCA e MORA (2013, p. 676, tradução nossa)

[5] Exemplo adaptado da oficina *El Juego de Dados de Mozart: Un Recurso Didáctico para la Enseñanza-Aprendizaje de la Probabilidad*, realizada por Yeimy Rodriguez García *et al.* no VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, realizado en Montevideo en setiembre de 2013.

O número total de pares (i, j), com i e j inteiro positivos compreendidos entre 1 a 6, é 36 e geram 11 resultado possíveis de soma. Os resultados das somas, apesar de serem eventos independentes, não são todos igualmente prováveis. Para o resultado 2, a probabilidade é de $\frac{1}{36}$; para o resultado 3, a probabilidade é de $\frac{2}{36}$; para o resultado 4, a probabilidade é de $\frac{3}{36}$; para o resultado 5, a probabilidade é $\frac{4}{36}$; para o resultado 6, a probabilidade é $\frac{5}{36}$; para o resultado 7, a probabilidade é $\frac{6}{36}$; para o resultado 8, a probabilidade é $\frac{5}{36}$; para o resultado 9, a probabilidade é $\frac{4}{36}$; para o resultado o resultado 10, a probabilidade é $\frac{3}{36}$; para o resultado 11, a probabilidade é $\frac{2}{36}$; para o resultado 12, a probabilidade é de $\frac{1}{36}$. Logo, chamando de $P(E)$ a probabilidade de que, nos 16 lançamentos, as somas resultem na sequência (2, 4, 11, 6, 7, 6, 11, 8, 3, 5, 4, 8, 2, 12, 10, 7) e de $P(n)$ a probabilidade da soma ser o número n, com $n \in \mathbb{N}$ e $2 \leq n \leq 12$, temos:

$$P(E) = P(2) \cdot P(4) \cdot P(11) \cdot P(6) \cdot P(7) \cdot P(6) \cdot P(11) \cdot P(8) \cdot P(3) \cdot P(5) \cdot P(4) \cdot P(8) \cdot P(2) \cdot P(12) \cdot P(10) \cdot P(7)$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{3}{36} \cdot \frac{2}{36} \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{6}{36} \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{2}{36} \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{2}{36} \cdot \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{36} \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{3}{36} \cdot \frac{6}{36} \cong \frac{1}{4{,}09 \times 10^{17}}.$$

Portanto, a probabilidade de se sortear, especificamente, a sequência (2, 4, 11, 6, 7, 6, 11, 8, 3, 5, 4, 8, 2, 12, 10, 7) é de aproximadamente $\frac{1}{4{,}09 \times 10^{17}} \cong 2{,}44 \times 10^{-18}$, que é um valor ínfimo. Desta forma, podemos afirmar que a probabilidade de repetição de desse resultado neste jogo é quase zero, reforçando os resultados obtidos no exemplo 3.1.1.

Quando um experimento aleatório é realizado, muitas vezes associa-se uma função do resultado e não no resultado em si. Isso acontece quando jogamos dois dados, como nos exemplos 3.1.1 e 3.1.2, e estamos interessados na soma dos resultados, e não em seus valores individuais. “Isto é, podemos estar interessados em saber se a soma dos dados é igual 7, mas podemos não estar preocupados em saber se o resultado real foi (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) ou (6,1). [...] Essas grandezas de interesse, ou, mais formalmente, essas funções reais definidas no espaço amostral, são conhecidas como *variáveis aleatórias*.” (ROSS, 2010, p. 151).

Definição 3.1.6. Uma variável aleatória X é uma função que associa um número real $X(\omega)$ a cada resultado ω no espaço amostral de um experimento aleatório, ou seja,

$$\begin{aligned} X\colon \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

com $\omega \in \Omega$ e $X(\omega) = x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1.3: Considere o experimento de jogar dois dados. Ω pode ser descrito pelos 36 pontos mostrados na Tabela 7. $\Omega = \{(i,j);\ i = 1, \dots, 6\ e\ j = 1, \dots, 6\}$. Várias variáveis aleatórias podem ser definidas, por exemplo, assumindo X como a soma das faces viradas para cima; então $X(\omega) = i + j$ com $\omega = (i,j)$. Do mesmo modo, tomando Y como valor absoluto da diferença entre as faces voltadas para cima, então $Y(\omega) = |i - j|$ com $\omega = (i,j)$. X e Y são claramente variáveis aleatórias pois X pode assumir os valores 2, 3, ..., 12 e Y pode assumir os valores 0, 1, ..., 5, que são números reais.[6]

Definição 3.1.7. Sendo X uma variável aleatória, sua *função de distribuição acumulada* é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega\,;\ X(\omega) \leq x\})$$

com x percorrendo todos os reais.

Segundo Magalhães (2006, p. 65) o conhecimento da função de distribuição acumulada (o termo “acumulada” é omitido por alguns autores) pode permite obter qualquer informação sobre a variável. Já Mood, Graybill e Boes (1974, p.55, tradução nossa) afirmam que uma função de distribuição acumulada é exclusivamente definida para cada variável aleatória e que, se for conhecida, pode ser usada para encontrar probabilidades de eventos definidos em termos de sua variável aleatória correspondente, sendo que diferentes variáveis aleatórias podem ter a mesma função de distribuição cumulativa.

Uma variável aleatória X é dita *discreta* se assume um número finito ou infinito enumerável de valores. Caso contrário, diremos que X é uma variável aleatória *contínua*.

[6] Exemplo retirado do livro *Introduction to the theory of statistics* (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974, p. 54, tradução nossa)

Como o valor de uma variável aleatória é determinado pelo resultado de um experimento, é possível atribuir probabilidades aos possíveis valores da variável aleatória.

Definição 3.1.8. Se X é uma variável aleatória discreta definimos a *função de probabilidade* como a função que a cada valor de X associa a sua correspondente probabilidade. Isto é, sendo X uma variável com valores $x_1, x_2, \ldots$, temos para $i = 1, 2, \ldots$,

$$p(x_i) = P(X = x_i) = P(\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) = x_i\}).$$

Exemplo 3.1.4: Sejam X e Y duas variáveis aleatórias definidas da seguinte forma: $X(\omega) = i + j$ e $Y(\omega) = máx\{i, j\}$ com $\omega \in \Omega$ e $\Omega = \{(i, j);\ i = 1, \ldots, 6\ e\ j = 1, \ldots, 6\}$. O espaço amostra é formado por 36 resultados equiprováveis. Então:

(i). Para X tem-se:

$$p(2) = P(X = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$p(3) = P(X = 3) = P(\{(2,1),(1,2)\}) = \frac{2}{36}$$

$$p(4) = P(X = 4) = P(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}) = \frac{3}{36}$$

$$p(5) = P(X = 5) = P(\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}) = \frac{4}{36}$$

$$p(6) = P(X = 6) = P(\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}) = \frac{5}{36}$$

$$p(7) = P(X = 7) = P(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) = \frac{6}{36}$$

$$p(8) = P(X = 8) = P(\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}) = \frac{5}{36}$$

$$p(9) = P(X = 9) = P(\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}) = \frac{4}{36}$$

$$p(10) = P(X = 10) = P(\{(4,6),(5,5),(6,4)\}) = \frac{3}{36}$$

$$p(11) = P(X = 11) = P(\{(5,6),(6,5)\}) = \frac{2}{36}$$

$p(12) = P(X = 12) = P(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}$

(ii). Para Y tem-se:

$p(1) = P(Y = 1) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$

$p(2) = P(Y = 2) = P(\{(2,1),(2,2),(1,2)\}) = \frac{3}{36}$

$p(3) = P(Y = 3) = P(\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1)\}) = \frac{5}{36}$

$p(4) = P(Y = 4) = P(\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,3),(4,2),(4,1)\}) = \frac{7}{36}$

$p(5) = P(Y = 5) = P(\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(5,4),(5,3),(5,2),(5,1)\}) = \frac{9}{36}$

$p(6) = P(Y = 6)$

$= P(\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)\}) = \frac{11}{36}$

Para Magalhães e Lima (2002, p. 165) renda, salário, tempo de duração de um equipamento, comprimento de uma peça, área atingida por certa praga agrícola são exemplos de quantidades que podem ser modeladas por variáveis aleatórias contínuas. O comportamento probabilístico de uma variável aleatória contínua será descrito pela sua função densidade de probabilidade.

Definição 3.1.9. Quando X é uma variável aleatória continua, existe uma função f, não negativa tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Tal função é chamada *função de densidade de probabilidade* de X. Se $X \in A \subset \mathbb{R}$, definimos $P(A) = \int_A f(x)dx$, onde a integral indica a área sob a função f definida em A.

Desta forma, para calcular probabilidades, temos que se $A = [a, b]$,

$$P(A) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Note que $P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)dx = 0$. Isto é, quando tratamos de variáveis aleatórias contínuas, a probabilidade de ocorrência de um valor específico é sempre zero, para qualquer valor real. Por consequência, se X é contínua, então

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

3.2 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS E CADEIAS DE MARKOV

Os processos estocásticos geralmente são representados por sistemas em que o seu estado muda ao longo tempo. Estas mudanças estão sujeitas a um certo grau de imprevisibilidade ou ao elemento do acaso no experimento, mas elas estão associadas à distribuições de probabilidade. Diversos fenômenos reais se enquadram neste modelo de sistema como: variação na atividade de bolsa de valores, variações na qualidade dos produtos de uma fábrica, variação diária no tamanho de estoque de uma determinada companhia, mutações genéticas, análise e composição musical, entre outros.

Definição 3.2.1. Um *processo estocástico* é definido como uma família de variáveis aleatórias $\{X_t;\ t \in \mathbb{T}\}$, definidas num espaço amostral Ω, com $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$, onde $\mathbb{T}$ será chamado *espaço de parâmetros*. Aos valores que X_t pode assumir no processo são chamados de *estados* e ao seu conjunto E de *espaço de estados*.

O parâmetro t frequentemente é interpretado como tempo. Quando $\mathbb{T}$ é enumerável diremos que o processo estocástico correspondente é a parâmetro, ou a tempo, *discreto* (ex. $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$). Do mesmo modo, se $\mathbb{T}$ for um intervalo, o processo será a parâmetro, ou a tempo, *contínuo* (ex. $\mathbb{T}\ = [0, +\infty)$).

Se o espaço de estados E é enumerável diremos que o processo estocástico é de estados discretos, caso contrário será de estados contínuos. Um processo estocástico de espaços discretos também é chamado de “*cadeia*”.

Definição 3.2.2. Um processo estocástico discreto $\{X_n;\ n = 0, 1, 2, \dots\}$, de espaço de estados E é uma *“Cadeia de Markov”* se a probabilidade condicional satisfazer

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = (X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}.$$

Sendo assim, a probabilidade de X_{n+1} não dependente de $X_0, \dots, X_{n-1}$, mas sim, está condicionada apenas a X_n, ou seja, para conhecermos os estados do futuro só precisamos conhecer os estados do presente. Logo, podemos dizer que processos definidos como as Cadeias de Markov têm a propriedade de perda de memória.

Sem perda de generalidade, assuma $E = \{1, 2, \dots, M\}$ o espaço de estados de uma cadeia de Markov. De acordo com Ross (2010, p. 496), os valores de $p_{ij} = (X_{n+1} = j | X_n = i)$, com i e j pertencentes a E, são chamados de probabilidades de transição da cadeia e satisfazem (i). $p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in E$

(ii). $\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1, \ \ \forall i \in E$

As probabilidades de transição podem ser dispostas em uma matriz quadrada de ordem M e que será chamada *matriz de probabilidades de transição* ou *matriz estocástica* e representada por P.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix}.$$

Uma maneira conveniente de representar a matriz de probabilidades de transição é através da seguinte tabela:

Tabela 8 - Tabela das probabilidades de transição

Estados	**1**	**2**	...	$\boldsymbol{M}$
1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1M}
2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2M}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{M}$	p_{M1}	p_{M2}	...	p_{MM}

Fonte: Próprio autor.

Ou seja, na matriz de probabilidade de transição cada linha representa um estado presente i, cada coluna representa um estado futuro j, cada elemento p_{ij} representa a probabilidade de o processo transitar do estado i para o estado j. Além disso, tem-se que toda probabilidade de transição é não negativa e que a soma de todos os elementos em qualquer linha da matriz de transição sempre terá resultado 1.

Exemplo 3.2.1: Silva Neto (2006, p. 71-72) apresenta um exemplo de fácil entendimento do processo de construção de uma matriz de probabilidades de transição, tomando por base o conceito de evento sonoro, utilizado por Xenakis.

Considere a seguinte sequência representado por apenas dois eventos sonoros A e B:

$$ABABBBABAABABABABBBBABAABABBAABABBABAAABABBABBABBA$$

As frequências das transições seriam:

- 17 vezes da transição $A \rightarrow B$ e 6 vezes da transição $A \rightarrow A$, perfazendo um total de 23 vezes que A transita para um outro evento;
- 17 vezes da transição $B \rightarrow A$ e 10 vezes da transição $B \rightarrow B$, perfazendo um total de 27 vezes que B transita para um outro evento.

Determinando as probabilidades de transição:

$$p_{AA} = \frac{6}{23} = 0.26 = 26\%; \qquad p_{AB} = \frac{17}{23} = 0.74 = 74\%$$

$$p_{BA} = \frac{17}{27} = 0.63 = 63\%; \qquad p_{BB} = \frac{10}{27} = 0.37 = 37\%$$

Logo, sua respectiva matriz de probabilidade de transição será:

Tabela 9: Exemplo de tabela de probabilidades de transição

Estados	A	B
A	0.26	0.74
B	0.63	0.37

Fonte: Silva Neto (2006, p. 72, adaptada pelo autor)

A evolução de uma cadeia de Markov é determinada pela matriz de transição P e os estudos sobre elas em parte são reduzidas ao estudo das suas propriedades algébricas.

Definição 3.2.3. Uma matriz da forma

$$(p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_k)$$

é dita um *vetor de probabilidade* quando

$$p_i \geq 0, \quad \forall i = 1,2,\dots,k \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Desta forma, pode-se dizer que cada linha de uma matriz de probabilidades de transição é um vetor de probabilidade.

Definição 3.2.4. Uma matriz de transição P é dita *regular* quando existe $n \in \mathbb{N}$, tal que P^n tem todas as entradas estritamente positivas. Uma cadeia de Markov que é regida por uma matriz de transição regular é chamada de *Cadeia de Markov Regular*.

Teorema 3.2.1. Seja $P = (p_{ij})$ uma matriz de transição de uma cadeia de Markov regular com k estados, ou seja,

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

onde $p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{ik} = 1$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$, então

$$\lim_{n \to \infty} P^n = Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{pmatrix}$$

onde os q_i são números não negativos tais que $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$.

Ou ainda, de acordo com Boldrini (1980, p. 18), se a matriz P das probabilidades de transição do tipo $k \times k$ é regular, então as potências P^n aproximam-se de uma matriz Q, no sentido de que cada elemento de P^n aproxima-se do elemento de posição correspondente em Q. Além disso, todas as linhas de Q são iguais, sendo dadas por um vetor de probabilidade $q = (q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k)$.

Sobre o teorema do limite das potências de P, Oliveira (2014, p. 39) apresenta um exemplo, o qual foi adaptado e descrito abaixo.

Exemplo 3.2.2: Considere a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observando que P atende as condições para ser uma matriz de probabilidades de transição, utilizando o programa GNU Octave 2018 é possível verificar que a mesma é regular e determinar o limite das potências. De fato,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.16667 & 0.00000 & 0.33333 & 0.50000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.16667 & 0.66667 & 0.16667 \\ 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.50000 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$P^6 = \begin{pmatrix} 0.240741 & 0.046296 & 0.333333 & 0.379630 \\ 0.083333 & 0.111111 & 0.611111 & 0.194444 \\ 0.111111 & 0.101852 & 0.546296 & 0.240741 \\ 0.305556 & 0.027778 & 0.222222 & 0.444444 \end{pmatrix}.$$

Pelo resultado de P^6, que possui todos os elementos não nulos, é possível afirmar que P é regular. Seguindo os cálculos das potências obtemos:

$$P^{50} = \begin{pmatrix} 0{,}200019 & 0.066659 & 0.399968 & 0.333354 \\ 0.199944 & 0.066689 & 0.400094 & 0.333273 \\ 0.199961 & 0.066682 & 0.400066 & 0.333291 \\ 0.200047 & 0.066648 & 0.399921 & 0.333384 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$P^{75} = \begin{pmatrix} 0.200000 & 0.066667 & 0.400000 & 0.333333 \\ 0.200001 & 0.066666 & 0.399999 & 0.333334 \\ 0.200000 & 0.066666 & 0.399999 & 0.333334 \\ 0.199999 & 0.066667 & 0.400001 & 0.333333 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$P^{100} = \begin{pmatrix} 0.200000 & 0.066667 & 0.400000 & 0.333333 \\ 0.200000 & 0.066667 & 0.400000 & 0.333333 \\ 0.200000 & 0.066667 & 0.400000 & 0.333333 \\ 0.200000 & 0.066667 & 0.400000 & 0.333333 \end{pmatrix}.$$

De forma intuitiva, pode-se concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/15 & 2/5 & 1/3 \\ 1/5 & 1/15 & 2/5 & 1/3 \\ 1/5 & 1/15 & 2/5 & 1/3 \\ 1/5 & 1/15 & 2/5 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.2.2. Se P é uma matriz de transição regular e x é um vetor de probabilidade qualquer, então

$$\lim_{n\to\infty} xP^n = (q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k) = q.$$

Assim, para uma cadeia de Markov regular, o sistema sempre acaba convergido para um vetor-estado q fixo. O vetor q é chamado *vetor de estado estacionário* da cadeia de Markov regular.

Segundo Anton e Rorres (2001, p. 394) uma técnica eficiente para calcular o vetor de estado estacionário q de sistemas com muitos estados é simplesmente calcular xP^n para algum n grande. Logo, no exemplo 3.2.2 calculando o produto do vetor probabilidade $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ com a matriz Q, que será o resultado de P^n com n suficientemente grande, será obtido o vetor de estado estacionário $q = (1/5 \quad 1/15 \quad 2/5 \quad 1/3)$.

Outra maneira de calcular o vetor de estado estacionário é utilizar o seguinte teorema.

Teorema 3.2.3. O Vetor de estado estacionário q de uma matriz de transição regular P é o único vetor de probabilidade que satisfaz a equação $qP = q$.

Os teoremas 3.2.2 e 3.2.3 apresentados nesta seção, segundo Boldrini (1980, p. 19), permitem fazer previsão e análise de cadeias de Markov regulares, encontrando a probabilidade de cada estado a longo prazo. As demonstrações de tais teoremas envolvem conceitos de álgebra linear que ultrapassam o objetivo deste trabalho. Por este motivo, foi exposto apenas uma noção intuitiva para referenciar alguns resultados apresentados nas próximas seções. Para maior aprofundamento sobre assunto, recomenda-se consultar as fontes citadas no texto ou outros trabalhos relacionados com a convergência de matrizes estocásticas[7].

[7] SILVA, F. B.; ROTA, I. S. Convergência de matrizes estocásticas regulares. C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 8, p. 4-14, dez. 2016. Edição Iniciação Científica. DOI: 10.21167/cqdvol8201623169664fbsisr0414. Disponível em: http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/

4 MÚSICA E PROBABILIDADE

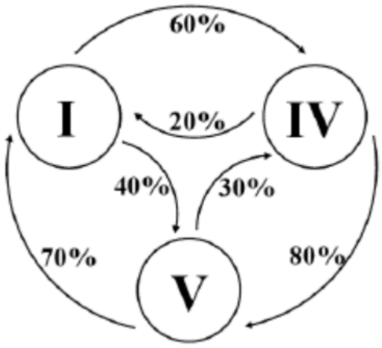
4.1 A MÚSICA E AS CADEIAS DE MARKOV

As cadeias de Markov são processos estocásticos que propiciam confiabilidade na previsão de comportamento de certos fenômenos, fazendo com que este recurso seja bastante utilizado na modelagem de diversas situações, como processos de produção, controle de epidemias ou pragas de lavouras, entre outras. Mas, como as cadeias de Markov podem ser aplicadas na música?

Sobre isto, Kaliakatsos-Papakostas, Epitropakis e Vrahatis (2011, p. 335, tradução nossa) afirmam que cada melodia monofônica pode ser pensada como uma sequência de eventos musicais discretos e, portanto, ser representada como um modelo discreto de cadeia de Markov. Neste caso, pode-se considerar como espaço de estados um conjunto de notas (graus de uma determina escala) ou de acordes (graus de um campo harmônico) ou de outros aspectos musicais (valores rítmicos, etc.). Por exemplo, para formular uma melodia monofônica temos que assumir que qualquer nota única na melodia depende apenas de sua nota anterior. Assim, é possível a construir uma matriz de probabilidade de transição composta por cada probabilidade de transição de um estado para outro, ou seja, as probabilidades de transição de uma nota para a seguinte dentro da melodia.

Seguindo o mesmo princípio, Kiefer e Riehl (2016, p. 17) utilizam como exemplo uma progressão de acordes, que é o movimento de um acorde para outro em um campo harmônico de uma escala musical. Considerando os graus de uma escala maior temos a sequência I, ii, iii, IV, V, vi e vii°, onde um algarismo romano em letras maiúsculas indica um acorde maior, enquanto um algarismo romano em letras minúsculas indica um acorde menor e um sobrescrito ° indica acorde diminuto. As progressões I-IV-V-I e I-V-vi-IV são muito utilizadas na música popular, e por esta razão, Kiefer e Riehl, apresentam a análise de uma suposta peça musical, que contenha os acordes da primeira progressão. As probabilidades de mudança de um acorde para outro, provenientes desta análise, estão representadas no diagrama apresentado na Figura 15, que exemplifica a representação gráfica de uma cadeia de Markov.

Figura 15 - Diagrama de Transição de Acordes



Fonte: Kiefer e Riehl (2016, p. 17)

Tal situação pode ser representada matematicamente com a seguinte matriz de transição:

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0 & 0.80 \\ 0.70 & 0.30 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

A análise da matriz de transição desta cadeia de Markov revela que o estado estacionário é

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} \\ (0.322 & 0.305 & 0.373). \end{array}$$

Ou seja, a longo prazo, espera-se que 32,2% das transições de acordes progridam para os acordes I, 30,5% para os acordes IV e 37,3% para os acordes V.

Sobre as possíveis aplicações das cadeias de Markov na música, Galla-Pecynska (2015, p. 27, tradução nossa) afirma que elas são usadas principalmente na classificação, na predição e na composição. Na classificação é utilizada como método para análise das características de composição de um determinado autor ou reconhecimento do estilo de uma composição de determinado período. Utilizando método semelhante ao descrito no exemplo anterior, Kiefer e Riehl (2016, p. 17) analisaram progressões de acordes dos diferentes períodos musicais escolhendo composições de Palestrina, Bach, Mozart e Beethoven. A partir dos dados coletados por eles, e por outros pesquisadores, foram montadas as matrizes de transição onde as probabilidades dos acordes das colunas sejam obtidas de forma que o acorde da linha seja o imediatamente anterior. Na primeira linha da matriz de Bach Minor, por exemplo, o .41 significa que há 41% de chance de que qualquer acorde I seja seguido por um acorde V, conforme apresentado na Figura 16.

Figura 16 - Matrizes de transição de acordes para Palestrina, Bach, Mozart e Beethoven

Bach Minor	*I*	*ii*	*iii*	*IV*	*V*	*vi*	*vii°*
I	0	.18	.01	.20	.41	.09	.12
ii	.01	0	.03	0	.89	0	.07
iii	.06	.06	0	.25	.19	.31	.13
IV	.22	.14	0	0	.48	0	.15
V	.80	0	.02	.06	0	.10	.02
vi	.03	.54	.03	.14	.19	0	.08
vii°	.81	0	.01	.03	.15	0	0

Bach Major	*I*	*ii*	*iii*	*IV*	*V*	*vi*	*vii°*
I	0	.15	.01	.28	.41	.09	.06
ii	.01	0	0	0	.71	.01	.25
iii	.03	.03	0	.52	.06	.32	.03
IV	.22	.13	0	0	.39	.02	.23
V	.82	.01	0	.07	0	.09	0
vi	.15	.29	.05	.11	.32	0	.09
vii°	.91	0	.01	.02	.04	.03	0

Mozart Minor	*I*	*ii*	*iii*	*IV*	*V*	*vi*	*vii°*
I	0	.08	0	.07	.68	.06	.11
ii	.37	0	0	0	.46	0	.17
iii	0	0	0	1	0	0	0
IV	.42	.10	0	0	.39	0	.09
V	.82	0	0	.05	0	.07	.05
vi	.14	.51	0	.16	.05	0	.14
vii°	.76	.01	0	0	.23	0	0

Mozart Major	*I*	*ii*	*iii*	*IV*	*V*	*vi*	*vii°*
I	0	.13	0	.15	.62	.05	.05
ii	.49	0	.01	0	.40	.01	.09
iii	.67	0	0	0	0	.33	0
IV	.64	.14	0	0	.15	0	.07
V	.94	0	0	.01	0	.04	.01
vi	.11	.51	0	.14	.20	0	.04
vii°	.82	0	.01	.01	.16	0	0

Palestrina	*I*	*ii*	*iii*	*IV*	*V*	*vi*	*vii°*
I	0	.15	.13	.28	.14	.22	.08
ii	.08	0	.15	.13	.28	.14	.22
iii	.22	.08	0	.15	.13	.28	.14
IV	.14	.22	.08	0	.15	.13	.28
V	.28	.14	.22	.08	0	.15	.13
vi	.13	.28	.14	.22	.08	0	.15
vii°	.15	.13	.28	.14	.22	.08	0

Beethoven	*I*	*ii*	*iii*	*IV*	*V*	*vi*	*vii°*
I	0	.10	.01	.13	.52	.02	.22
ii	.06	0	.02	0	.87	0	.05
iii	0	0	0	0	.67	.33	0
IV	.33	.03	.07	0	.40	.03	.13
V	.56	.22	.01	.04	0	.07	.11
vi	.06	.44	0	.06	.11	0	.33
vii°	.80	0	0	.03	.17	0	0

Fonte: Kiefer e Riehl (2016, p. 19)

A partir da análise das matrizes apresentadas na Figura 16 foram encontrados os vetores de estados estacionários, que indicam as probabilidades de progressão para cada acorde, de acordo com a Figura 17.

Figura 17 - Estados estacionários de acordes para Palestrina, Bach, Mozart e Beethoven

	I	ii	iii	IV	V	vi	vii°
Bach Minor	.333	.109	.015	.010	.306	.063	.075
Bach Major	.344	.089	.016	.131	.273	.067	.080
Mozart Minor	.400	.066	0	.056	.345	.049	.084
Mozart Major	.435	.086	.001	.073	.330	.037	.038
Palestrina	.143	.143	.143	.143	.143	.143	.143
Beethoven	.317	.120	.012	.060	.328	.034	.130

Fonte: Kiefer e Riehl (2016, p. 20)

Outros trabalhos sobre de classificação musical utilizando cadeias de Markov podem ser citados, como o de Correa (2012) ou o de Kaliakatsos-Papakostas, Epitropakis e Vrahatis (2011). Porém, o exemplo de Kiefer e Riehl (2016) é o que possui mais similaridades com os conceitos utilizados na proposta de atividade pedagógica que será descrita nas próximas seções.

Ainda segundo Galla-Pecynska (2015, p. 27, tradução nossa), na predição, as cadeias de Markov são utilizadas para criar novas sequência de eventos baseadas em uma teoria de análise-síntese. Primeiro, analisa-se sequências de amostra, generalizando a partir dos resultados, em seguida a síntese é usada para criar novas estruturas da mesma classe que o grupo original de amostras. O trabalho de Berget (2017) é um exemplo deste tipo de aplicação. Nele a autora utiliza modelos ocultos de Markov para previsão de acordes musicais. Sua ideia é capturar regularidades na música usando métodos estatísticos de aprendizagem e, assim, a partir da análise da melodia prever progressões de acordes musicais a serem utilizadas em seu acompanhamento. Utilizando melodias músicas populares (canções de natal, de ninar, etc.) da Noruega (nacionalidade da autora), Berget utilizou quatro modelos para previsão de acordes, todos baseados em modelos ocultos de Markov, sendo que o modelo de melhor desempenho obteve uma pontuação de 70% ao usar o LOOCV (leave-one-out-cross-validation), que é uma técnica para avaliar a capacidade de generalização de um modelo. A representação apresentada na Figura 18 mostra a utilização do método melhor ranqueado comparando os acordes originais (em preto) e os acordes previstos com a utilização do método (em azul), sendo claro que o desempenho foi bastante satisfatório.

Figura 18 - Representação da partitura de "Silent Night" mostrando os acordes previstos obtidos a partir de em modelo oculto de Markov junto com os acordes corretos.

Fonte: Berget (2017, p. 43)

Na composição, como foi visto na seção 2.3, as cadeias de Markov foram utilizadas nas experiências musicais do compositor Iannis Xenakis e música computacional, trazendo à evidência a composição algorítmica.

4.2 COMPOSIÇÃO ALGORÍTMICA

A definição de algoritmo[8] é, para a matemática, uma sequência finita de instruções não ambíguas utilizadas para resolver um problema ou fazer um cálculo. Já, para a informática, é um conjunto de regras e operações bem definidas e não ambíguas, que, aplicadas a um conjunto de dados e num número finito de etapas, conduzem à solução de um problema. Segundo Nierhaus (2009 apud MARCHINI, 2016, p. 15), a composição algorítmica pode ser definida como a "composição utilizando métodos formais". Dentro da área da computação, essa técnica é geralmente associada à composição automatizada, realizada por um computador, com ou sem a intervenção de um usuário externo.

Como foi exemplificado anteriormente (no jogo de dados de Mozart), a utilização de algoritmos na composição musical já acontecia antes mesmo do advento dos computadores, mas foi a partir da popularização destes que se iniciou a busca por algum tipo de inteligência artificial que fosse capaz de produzir obras musicais comparadas as produzidas pela criatividade humana. Segundo Basseto (2000, p. 39) a Composição Algorítmica pode ser entendida como a "produção automática ou parcialmente automatizada de material musical por sistemas computacionais". O mesmo autor ainda afirma que os sistemas de composição algorítmica podem ser classificados em três tipos básicos:

- *sistemas de composição automática* – cujo produto musical é um material inédito, é fornecido ao sistema somente regras e diretrizes básicas, porém sem a utilização de fragmentos musicais prévios;
- *sistemas de improvisação automática* – é semelhante ao anterior quanto ao fornecimento de regras de manipulação e parâmetros, porém utiliza o processamento de material musical previamente fornecido;
- *assistentes de composição inteligentes* – é uma ferramenta de auxílio à composição, que executa algumas das tarefas inerentes do compositor

[8] ALGORITMO. In: Dicionário Priberam da Língua Portuguesa [on-line], 2008-2013. Disponível em: <https://dicionario.priberam.org/algoritmo> Acesso em: 25 nov. 2018.

> humano, tendo seus resultados parciais avaliados e possivelmente reinterpretados por ele.

Os dois últimos tipos apresentados obtém resultados mais próximos dos gerados no processo de composição tradicional, todavia várias pesquisas foram desenvolvidas buscando um sistema totalmente automatizado, que vêm contribuindo em trabalhos ligados ao desenvolvimento de sistemas de inteligência artificial. Marchini (2016, p. 15) afirma que, nas últimas décadas, muitos trabalhos relacionados à composição algorítmica foram realizados com objetivos diversos, como composição de peças musicais imitando um determinado estilo ou criação de improviso em tempo real para peças de Jazz, sendo possível encontrar a utilização de técnicas que vão desde Cadeias de Markov simples até sistemas com regras complexas ou algoritmos evolutivos.

Sobre a composição algorítmica, ainda é possível fazer uma classificação quanto a natureza do processo de seleção dos elementos musicais utilizados na busca pela composição desejada, uma vez que "a quantidade de soluções musicalmente válidas é virtualmente infinita, da mesma forma que a quantidade de elementos musicais inválidos também o é." (BASSETO, 2000, p. 41).

> A questão em torno de ações criativas por parte da máquina pode ser tomada do ponto de vista da inclusão da imprevisibilidade inerente ao algoritmo de escolha. Segundo esse princípio, o algoritmo composicional seria não-determinístico em sua natureza, incluindo no processo de escolha uma característica de *sorteio*, ou seja, baseado em elementos estocásticos. Evidentemente, pode-se retomar a discussão pela impossibilidade teórica, que os sistemas computacionais apresentam, de produzirem seleções completamente aleatórias. No entanto, o uso de métodos numéricos pode produzir sequências numéricas chamadas pseudoaleatórias. Sistemas que incluem esse tipo de sorteio ou acaso em suas decisões composicionais são chamados estocásticos, diferindo dos demais, que não incluem a imprevisibilidade no processo de seleção, os quais são chamados determinísticos. (BASSETO, 2000, p. 42).

O mesmo autor ainda afirma que é possível "modelar um sistema de composição estocástico partindo-se de um sistema determinístico", para tanto é comum a utilização do conceito de cadeia de Markov para definir o processo de escolha dos parâmetros musicais a partir das respectivas densidades de probabilidade associadas. É possível perceber nas obras de Hiller, Cage e Xenakis que a cadeia de Markov foi uma das primeiras estratégias utilizadas na composição algorítmica com recursos computacionais. Como exemplos atuais da utilização deste recurso podemos citar o trabalho de Elowsson e Friberg (2012), pesquisadores suecos, que propuseram uma ferramenta de composição algorítmica de música popular e o trabalho de Feijão (2004), que desenvolveu um algoritmo de composição e performance em tempo real de solos de jazz, criado e inspirado no estilo bebop. Segundo Papadopoulos e Wiggins (1999, p. 110), as cadeias de Markov são amplamente utilizadas para composição algorítmica devido a sua baixa complexidade, fazendo que sejam boas opções para aplicações de tempo real.

É possível encontrar nas lojas virtuais de aplicativos para smartphones muitos aplicativos que seguem os modelos de sistema apresentados, principalmente utilizando assistentes de composição interativos, alguns em versões para livre utilização e outros com algumas funcionalidades liberadas mediante a compra de licença. É a esta grande variedade de ferramentas, aliada ao fato da popularização dos smartphones na sociedade atual, principalmente entre a juventude, que se deve a escolha desta tecnologia para gerar os resultados na simulação do processo de composição algorítmica proposta na oficina aplicada no experimento que será relatado posteriormente neste trabalho.

4.3 TRABALHOS EDUCACIONAIS CORRELATOS

Durante a revisão da literatura existente sobre a relação da probabilidade com a música, ficou evidente que a maior parte dos trabalhos relacionados a este tema estão voltados para a área de Ciências da Computação e a área de Música, entretanto são poucos os registros que utilizam tal contexto na área da educação matemática, principalmente no Brasil, o que ressalta ainda mais importância da exploração do tema debatido na presente investigação.

O Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra (DMUC) e a Delegação Centro da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM-C) organizam conjuntamente um conjunto de palestras e oficinas destinadas a alunos dos ensinos Básico e Secundário (o equivalente ao fundamental II e ensino médio no Brasil) com o objetivo de divulgar a matemática.[9] Dentre tais atividades a professora doutora Ana Cristina Rosa e a doutoranda Marina Ferreira são responsáveis pela oficina “Melodias Matemáticas” onde abordam o histórico da utilização das probabilidades na composição musical (em particular, o jogo musical de Mozart e a obra de Iannis

[9] Fonte: https://www.uc.pt/fctuc/dmat/divulgacao/oficinas_palestras

Xenakis), introduzem conceitos da teoria das probabilidades tais probabilidade condicional e cadeias de Markov e realização de atividades práticas de criação de trechos musicais com auxílio de um software de computador, introduzindo as probabilidades de transição das notas e escolhendo outros parâmetros musicais.

Outro trabalho cujo tema se relaciona com o estudado é o artigo "***El Juego de Dados de Mozart: Un Recurso Didáctico para la Enseñanza-Aprendizaje de la Probabilidad***" (O Jogo de Dados de Mozart: Um Recurso Didático para o Ensino-Aprendizagem de Probabilidade, tradução nossa) de Garcia, Salamanca e Mora (2013) que propõe a utilização do "Jogo de Dados de Mozart", com a ajuda de também um software de computador, como recurso inovador para o ensino de conceitos básicos de probabilidade. Ao contrário do software usado na oficina do DMUC, programas que simulam o jogo apresentado no artigo são facilmente encontrados na rede mundial de computadores para serem baixados e livremente utilizados, respeitados os direitos autorais, como foi exemplificado nas Figuras 12 e 13 da seção 3.1 deste texto.

No Brasil, o material do projeto *M³ Matemática Multimídia*, desenvolvido pelo Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp, disponibiliza dois vídeos e, juntamente com estes, duas propostas de atividades que contemplam justamente a relação da probabilidade com a música. Tal projeto conta com 379 recursos educacionais entre experimentos, vídeos, softwares e áudios, licenciados sob uma licença Creative Commons sendo permitido copiar, distribuir, exibir, executar a obra e criar obras derivadas, mas não sendo permitido o uso comercial ou o relicenciamento sobre uma licença mais restritiva. Eles abordam análise de dados e probabilidade, geometria e medidas ou números e funções, que são os grupos de conteúdos de matemática previstos nos programas curriculares de ensino médio no Brasil. No vídeo "O Jogo de Dados de Mozart" dois personagens, Luís e seu professor Luciano, discutem e calculam a probabilidade de sortear a mesma música duas vezes. No desenrolar da história, Luís e Luciano exploram conceitos como Princípio Fundamental da Contagem e Probabilidade de Eventos Independentes. No portal, junto com o vídeo é apresentada uma proposta de atividade onde se formam grupos de alunos e cada componente do grupo "compõe" uma pequena sequência de sons (motivos ou temas musicais) com um instrumento trazido por solicitação prévia. Em seguida se preenche uma tabela (matriz-partitura) através do jogo de dados escolhendo em cada compasso quantos e quais alunos tocarão seu tema.

Tabela 10 - Exemplo de matriz-partitura de uma peça

	1	1	2	3	3	2	2	2	1	3
A1				X		X			X	
A2	X			X		X		X		X
A3		X	X							X
A4			X		X		X	X		
A5					XX		X			
A6				X						X

Fonte: UNICAMP. **M³ Matemática Multimídia:** O Jogo de Dados de Mozart - guia do professor. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1122

No exemplo da Tabela 10, os A1, A2, ..., A6 representam os alunos de um grupo e os números da primeira linha representam quantos alunos tocarão o tema no compasso indicado. O X indica qual aluno tocará seu tema e o duplo XX, na 5ª coluna, significa que o resultado 5 saiu em dois dos três dados. O guia do professor, que acompanha o vídeo, sugere ainda propor novas regras de composição aos estudantes, ou até incentivar que os mesmos as inventem e realizem os cálculos para determinar o número de peças possíveis de serem compostas com a restrição inventada, por exemplo: “se um aluno tocou, ele não poderá tocar de novo até que todos os outros toquem também”.

O segundo vídeo do projeto, que aborda a relação da probabilidade com a música, tem o nome de “Música quase por acaso” e conta a história de um jovem músico iniciante que recebe a tarefa de compor músicas com temas de matemática e recebe a ajuda de um experiente músico que lhe apresenta os conceitos de probabilidade de transição e de cadeias de Markov para auxiliar em sua tarefa. Novamente, usando um jogo de dados ele adaptou a matriz de probabilidade de transição de acordes para criar sequências com as características mais comuns na música popular. O guia do professor que acompanha este vídeo sugere explorar os conceitos musicais básicos e também antes da atividade abordar o conceito de frequência e escalas temperadas relacionando com a função seno.

Tabela 11 - Tabela (matriz) de probabilidade de transição de acordes

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7
II	0	0	0	1/7	6/7	0	0
III	0	0	0	0	1/7	6/7	0
IV	1/7	0	0	0	6/7	0	0
V	6/7	0	0	0	1/7	0	0
VI	0	6/7	0	0	1/7	0	0
VII	6/7	0	0	0	1/7	0	0

Fonte: UNICAMP. **M³ Matemática Multimídia:** Música quase por acaso - guia do professor. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1135

Ainda de acordo com o guia do professor (UNICAMP), considerando os graus de um campo harmônico maior, na Tabela 11, a primeira coluna indica os graus dos possíveis acordes de um certo momento e a primeira linha os graus dos possíveis acordes do próximo momento. Os números de uma linha indicam a probabilidade de passar de um acorde para outro de acordo com estudo estatístico em músicas populares. Tal tabela é possível por existir um padrão nas músicas populares, onde de acordo com a tonalidade muitos compositores mantêm certas combinações de acordes que soam de forma mais agradável que outras. Este padrão se repete com grande frequência na música ocidental.

Os trabalhos citados aqui foram utilizados como referência para preparação das atividades da oficina usada para a coleta de dados e que será relatada na seção 5.2.

5 METODOLOGIA

5.1 ASPECTOS DA PESQUISA

Segundo Freire (2002, p.14) a pesquisa é inerente a prática da docência, quando afirma que “não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino”. Com este pensamento, este trabalho foi desenvolvido buscando avaliar as contribuições de uma abordagem contextualizada com a música para o ensino-aprendizagem de conceitos da Teoria das Probabilidades. Para tanto foi realizada a oficina “Matemática e Música: as relações matemáticas na composição musical” com alunos do ensino médio, de uma escola pública da rede estadual de ensino na cidade de Mairi-BA, que se inscreveram voluntariamente.

Esta pesquisa foi pensada para ser aplicada durante a preparação para o projeto Festival Anual da Canção Estudantil (Face) da Secretaria de Educação do Estado da Bahia (SEC/BA) que é realizado desde 2008 nas escolas da rede estadual de ensino. O Face tem como foco “a criação de canções e da realização de festivais, em distintas fases (escolares, territoriais e estadual), afim de promover a participação e o envolvimento dos distintos sujeitos (estudantes, professores, diretores, coordenadores e técnicos) comprometidos com os processos educacionais” (BAHIA, 2018). Na etapa escolar deste projeto é realizada uma oficina visando oferecer aos estudantes noções elementares sobre o reino da música para que estes possam expressar a sua inventividade. Foi pensando em aproveitar este momento educativo, e a minha pequena experiência como músico autodidata, que surgiu a motivação para buscar novas estratégias pedagógicas que permitissem introduzir conceitos matemáticos de forma contextualizada e interdisciplinar, relacionando-os mais particularmente à composição musical, com destaque para a relação uso da probabilidade para composição de harmonias.

As motivações apresentadas se aliam a obrigatoriedade do ensino de música na educação básica estabelecida pela lei 11769/08 (BRASIL, 2008) e ao grande interesse por parte de alguns estudantes sobre temas relacionados esta arte. Para tanto, o público alvo da investigação foram alunos do 2º ano ensino médio, visto que a probabilidade está dentro da programação de conteúdos a serem trabalhados em matemática deste nível de ensino, além daqueles que participariam da composição de músicas para o festival ou se sentissem motivados pelo tema. Assim, os sujeitos dessa investigação foram 30 estudantes sendo 5 do 1º ano, 22 do 2º ano e 3 do 3º ano. A oficina aconteceu no dia 21 de setembro de 2018 com duração de 6 horas.

As atividades propostas na oficina foram baseadas no material publicado no projeto M³ Matemática Multimídia, já citado na seção 4.3, e sendo adaptadas à realidade dos estudantes e da instituição que não dispunha de laboratório de informática. Sabendo que a maior parte dos estudantes não possuíam instrumentos musicais e/ou habilidades de um instrumentista, foram utilizados aplicativos gratuitos disponíveis para celular com o objetivo de exemplificar mecanismos de composição algorítmica e facilitar as atividades de composição baseada em modelos matemáticos proposta na oficina realizada para a pesquisa. Tais aplicativos foram baixados previamente pelos estudantes, mediante solicitação realizada no momento da inscrição.

> “A adoção de modelos matemáticos no ensino, seja na forma de apresentação, seja no processo de criação, dimensionados de forma adequada à realidade das comunidades escolares, incorporando novas tecnologias, sem deixar de preservar identidades culturais, é um meio que propicia ao aluno atingir melhor desempenho, tornando-o um dos principais agentes da mudança. Ao participar de um trabalho com modelagem ou modelação, no qual o conteúdo não é dissociado da realidade, pois há conexão entre o que se aprendeu e o que se executou, acreditamos que alunos e professores tornar-se-ão mais entusiastas com a possibilidade de transformar a escola, ainda que de forma lenta e gradual, para que ela venha a exercer o papel que lhe cabe na preparação do indivíduo para atuar no meio circundante.” (BIEMBENGUT & HEIN, 2011, p.125)

Para Marconi e Lakatos (2003, p. 163) a escolha dos métodos e as técnicas a serem empregados na pesquisa científica está diretamente relacionada com o problema a ser estudado, dependendo da natureza dos fenômenos, do objeto de pesquisa, dos recursos financeiros, da equipe humana e de quaisquer outros elementos que possam surgir durante o percurso de investigação. As autoras ainda afirmam que nas investigações, geralmente, são utilizados mais um método, ou mais uma técnica, combinados. Desta forma, a presente pesquisa assumindo a característica exploratória-descritiva adotou como procedimentos técnicos o estudo de campo.

Segundo Gil (2008, p. 27), a pesquisa exploratória é usada especialmente quando o tema escolhido foi pouco explorado objetivando “desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores.” O mesmo Gil (2002, p. 41) ainda afirma que, para este tipo investigação, são geralmente empregadas técnicas que envolvem levantamento bibliográfico, entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado e análise de exemplos que "estimulem a compreensão".

Marconi e Lakatos (2003, p. 188) definem os estudos exploratório-descritivos combinados como:

> ... estudos exploratórios que têm por objetivo descrever completamente determinado fenômeno, como, por exemplo, o estudo de um caso para o qual são realizadas análises empíricas e teóricas. Podem ser encontradas tanto descrições quantitativas e/ou qualitativas quanto acumulação de informações detalhadas como as obtidas por intermédio da observação participante. Dá-se precedência ao caráter representativo sistemático e, em consequência, os procedimentos de amostragem são flexíveis;

Desta forma, foi realizada a revisão da bibliografia disponível sobre a utilização da probabilidade na composição musical e sobre exemplos de experiências de ensino de probabilidade utilizando uma contextualização com a música. Este levantamento bibliográfico propiciou adaptação das experiências relatadas em trabalhos anteriores para a construção da oficina aplicada para pesquisa de campo. Os dados coletados para este estudo foram obtidos por observações de forma direta e participante, realizadas pelo autor/pesquisador durantes as atividades realizadas pelos alunos na oficina e dois questionários aplicados aos participantes, sendo um como diagnóstico prévio, preenchido no momento da inscrição para a oficina (APÊNDICE A) e um segundo como avaliação do percurso e dos conhecimentos adquiridos (APÊNDICE B).

Também foi realizada uma entrevista não-estruturada com um músico profissional convidado para participar da oficina, através de uma apresentação musical e como observador. Segundo Gil (2008, p. 111), a entrevista informal "só se distingue da simples conversação porque tem como objetivo básico a coleta de dados". O mesmo autor, afirma que este tipo de entrevista é recomendado em estudos exploratórios, que visam "oferecer visão aproximativa do problema pesquisado" recorrendo a informantes-chaves, que podem ser especialistas no tema em estudo, bem como líderes formais ou informais. Marconi e Lakatos (2003, p. 197) nomeiam a entrevista informal como "não dirigida" destacando que nesta modalidade o entrevistado tem total liberdade podendo expressar suas opiniões e sentimentos sobre o tema.

Ainda foi aplicado um questionário para professores de matemática de Ensino Médio, aos quais foram apresentadas as duas propostas de atividades e vídeos da *M³ Matemática Multimídia* da Unicamp que subsidiaram a oficina mostrando, uma aplicação do ensino de conceitos de probabilidade contextualizada com a composição musical. Para tanto, foi utilizada uma plataforma online e gratuita que permite criar questionários e acompanhar as respostas. Responderam ao questionário 7 professores de matemática que cursam o PROFMAT na UNIVASF ou que atuam na rede pública estadual da Bahia, que o receberam por meio de link enviado por meio de um aplicativo de mensagens.

5.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA OFICINA

A oficina pensada e executada neste estudo segue o pressuposto da interdisciplinaridade que, segundo Luck (2005, p. 64):

> [...] é o processo que envolve a integração e engajamento de educadores, num trabalho conjunto, de interação das disciplinas do currículo escolar entre si com a realidade, de modo a superar a fragmentação do ensino, objetivando a formação integral dos alunos, a fim de que possam exercer criticamente a cidadania, mediante uma visão global de mundo e serem capazes de enfrentar os problemas complexos, amplos e globais da realidade atual.

Como o objetivo da pesquisa é verificar as contribuições do ensino da probabilidade por meio de uma contextualização com a composição musical, é preciso ter um olhar especial sobre relações entre as competências matemática e musical. É neste sentido que Campos (2009) defende a utilização dos aspectos afetivos nas relações e atividades didáticas envolvendo matemática e música, apoiando-se nos trabalhos de Henri Wallon e outros teóricos da educação.

Neste sentido, Campos (2009, p. 21) afirma que:

> A diferenciação entre o que é afetivo e o que é cognitivo se mantém de modo que as aquisições de cada uma repercutem sobre a outra. Nessa trajetória, a afetividade reflui para dar espaço à intensa atividade cognitiva assim que a maturação põe em ação o equipamento sensório-motor necessário à exploração da realidade. A história da construção da pessoa será constituída por uma sucessão de momentos afetivos ou cognitivos, não paralelos, mas integrados. Para melhorar a afetividade a pessoa depende de conquistas realizadas no plano da inteligência e vice-versa.

Assim, o afeto pode influenciar em que ritmo e como acontece a construção do conhecimento, visto que estimula a estruturação cognitiva de forma que as pessoas aprendem com mais facilidade quando estão inseridos em um ambiente acolhedor. De acordo com Wallon (apud. ALMEIDA, 2005, p. 51), “a afetividade e a inteligência constituem um par inseparável na evolução psíquica, pois ambas têm funções bem definidas e, quando integradas, permitem à criança atingir níveis de evolução cada vez mais elevados".

Desta forma, a oficina descrita a seguir busca explorar a relação afetiva dos estudantes que possuem o desejo de conhecer mais sobre as práticas musicais e, desta maneira, introduzir conceitos matemáticos atrelados a estes conhecimentos. Assim, os objetivos específicos desta oficina foram:

- ✓ Introduzir conceitos básicos de teoria musical;
- ✓ Observar exemplos da utilização da probabilidade na música;
- ✓ Introduzir conceitos da teoria das probabilidades (probabilidade de eventos independentes, probabilidade condicional, cadeias de Markov);
- ✓ Aplicar métodos de composição algorítmica com o auxílio de recursos tecnológicos;
- ✓ Explorar os elementos musicais e os recursos tecnológicos de forma a produzir composição executável;
- ✓ Provocar nos estudantes um sentimento de inserção no mundo musical e realização com as composições produzidas.

1ª ETAPA: MOTIVAÇÃO E CONVERSA COM UM MÚSICO

Após apresentação da proposta, aconteceu um momento de ambientação com o tema, por meio de uma apresentação de um músico que gentilmente concordou em executar algumas músicas de sua autoria e outras como releitura. Em seguida, o convidado participou de uma breve roda de conversa sobre a importância da matemática no trabalho do músico onde os estudantes puderam fazer perguntas, despertando assim a curiosidade e criando um ambiente agradável e propício à aprendizagem. Os temas abordados foram: a presença da matemática na teoria musical; o trabalho do compositor e como criar composições inéditas; o mundo da música na atualidade (recursos tecnológicos para criação e divulgação do trabalho); entre outras curiosidades oriundas dos questionamentos dos alunos.

Aproveitando este momento, foi realizada em seguida uma introdução à história da relação da matemática com a música destacando a importância de Pitágoras para a construção do sistema musical ocidental, utilizado na maior parte das culturas incluindo a nossa. A partir do histórico da escala pitagórica e do surgimento posterior da escala temperada foram introduzidos também alguns conceitos da teoria musical, tais como: partes da música (melodia, harmonia e ritmo), compasso, notas musicais, escalas, acordes, campos harmônicos. Estes conhecimentos serviram embasar os trabalhos realizados nas etapas seguintes da oficina.

2ª ETAPA: O JOGO DE DADOS DE MOZART

Com o auxílio de um projetor foram mostrados vídeos (baixados previamente da internet) com pequenos trechos da obra do compositor Iannis Xenakis, exemplificando a música estocástica, além de duas músicas compostas por computador. Introduzido o conceito de composição algorítmica foi apresentado vídeo "O Jogo de Dados de Mozart" (ver seção 4.3), e em seguida foi mostrado o programa de computador que simula virtualmente o jogo e apresenta os áudios dos minuetos compostos, conforme apresentado nas Figuras 12 e 13.

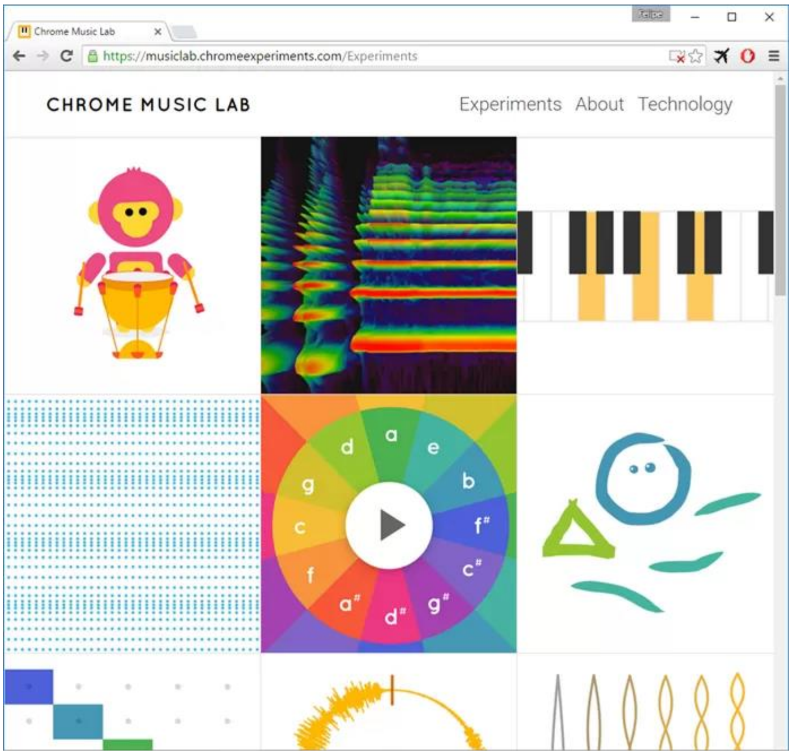
Após permitir que alguns estudantes interessados explorassem o jogo no computador, lançou-se aos participantes o questionamento, aqui discutido no Exemplo 3.1.2: *No jogo de dados de Mozart, os 16 lançamentos do par de dados são eventos independentes. Se as 16 somas resultassem em (2, 4, 11, 6, 7, 6, 11, 8, 3, 5, 4, 8, 2, 12, 10, 7), qual a probabilidade da ocorrência desta sequência?* Foi solicitado aos estudantes, que em grupos de 6 componentes pensassem por um breve período no problema e que formulassem hipóteses de como poderia ser determinada a solução. Desta forma, foi possível identificar os conhecimentos sobre probabilidade foram compreendidos pelos participantes, ao mesmo tempo, à medida que as intervenções do professor aconteceram reforçou-se os conceitos de probabilidade de eventos independentes introduzido no vídeo.

Em seguida, foi apresentado o *Chrome Music Lab*[10] para os estudantes, que exploraram os experimentos disponíveis através do computador conectado ao projetor e também por meio do smartphone daqueles participantes que possuíam acesso à internet. Utilizando os experimentos Rhythm, Melody Maker e Song Maker, que possuem configuração que se assemelha em alguns aspectos ao jogo de dados de Mozart, os alunos foram convidados a tentar determinar o número de possiblidades

[10] O Chrome Music Lab é um site, desenvolvido pela Google, que disponibiliza experiências divertidas e práticas de aprendizado de música. Os experimentos são todos construídos com tecnologia da Web livremente acessível e podem ser acessados em: https://musiclab.chromeexperiments.com/. Fonte: Google

de composições, e assim também a probabilidade de execução repetida em caso de sorteio dos parâmetros.

Figura 19 - Chrome Music Lab - experimento do Google que ajuda a aprender música



Fonte: https://www.techtudo.com.br/dicas-e-tutoriais/noticia/2016/03/chrome-music-lab-ensina-musica-de-forma-divertida-e-viciante.html. Acesso em: 10 dez. 2018

3ª ETAPA: UTILIZAÇÃO DA CADEIA DE MARKOV

Nesta etapa, após reforçar os conceitos de acorde e de campo harmônico, foi apresentado o vídeo "*4 Chords*"[11] do grupo australiano *The Axis of Awesome* que está disponível na internet e mostra, de maneira divertida, que várias músicas conhecidas utilizam a mesma sequência de 4 acordes. O exemplo do vídeo mostra que a música segue padrões que são mais agradáveis aos ouvidos e que são repetidos em diversas composições populares. Desta forma, foi explanado que estudos estatísticos sobre as características musicais vêm permitindo entender melhor os processos de composição musical, além das características de um determinado compositor ou mesmo, de uma série de compositores de um determinado período histórico ou de determinado estilo musical. Tais estudos associados à utilização de modelos matemáticos possibilitam a construção de algoritmos que permitem sistemas

[11] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=oOlDewpCfZQ Acesso em: 10 dez. 2018

computacionais de composição semiautomatizados ou, até mesmo, totalmente automatizados.

Foi exibido em seguida, o vídeo “Música quase por acaso”, já mencionado na *seção 4.3,* que apresenta uma possibilidade de utilização de uma matriz de probabilidade de transição para realizar composições de sequências de acordes. Os modelos matemáticos apresentados no vídeo, serviram para introduzir os conceitos de probabilidade condicional e cadeias de Markov. Após definir os conceitos mencionados, utilizou-se a sequência de dois eventos sonoros, nomeados *A* e *B*, apresentada no exemplo 3.2.1. Neste exemplo, é realizada a contagem das transições dos eventos e por fim, o cálculo das probabilidades de transição e organização dos resultados numa tabela.

Na atividade posterior, foram apresentadas algumas progressões de acordes muito comuns, que foram utilizadas em músicas bastante conhecidas mundialmente. As progressões de acordes utilizadas estão listadas na Tabela 12 seguidas dos nomes de músicas que as utilizam. Todas elas foram transpostas para o tom de C maior para facilitar a compreensão.

Tabela 12 - Progressões de acordes e músicas que as utilizam

Progressão	Música Exemplo
I – V – vi – IV (C – G – Am – F)	With Or Without You – U2
I – IV – V – I (C – F – G – C)	Lay Down Sally – Eric Clapton
I – vi – IV – V (C – Am – F – G)	Stand By Me – Ben E. King
I – IV – ii – V (C – F – Dm – G)	Run Around – Blues Traveller
I – IV – I – V (C – F – C – G)	Brown Eyed Girl – Van Morrison
I – iii – IV – V (C – Em – F – G)	The Weight – The Band
I – ii – iii – IV – V (C – Dm – Em – F – G(x4))	Like A Rolling Stone – Bob Dylan
I – V- vi – iii (C – G – Am – Em) **IV – I – ii – V (F – C – Dm – G)**	Pachelbel’s Canon – Johan Pachelbel

Fonte: http://daniloyoshio.com.br/2018/04/09/progressoes-de-acordes-mais-comuns/ (adaptada pelo autor) Acesso em: 10 set. 2018.

Baseando-se nesta lista, foi construída uma tabela de probabilidades de transição semelhante ao exemplo anterior. Para tal construção, foram feitas algumas considerações com a finalidade de não permitir ambiguidades: em cada progressão a nota final seria seguida da primeira, visto que em geral a sequência se repete; na segunda progressão, como o último acorde é o mesmo que aparece em primeiro, logo não foi contabilizado como transição; já na penúltima progressão foi desconsiderada a repetição do acorde G indicado por x4 e na última, apesar de apresentada dividida, a progressão corresponde a uma sequência única de oito acordes. As probabilidades condicionais determinadas pelas transições dos acordes foram determinadas e tabuladas pelo professor em conjunto e estão representadas na Tabela 13.

Tabela 13 - Tabela de probabilidade de transição na lista de progressões de acordes

	C	Dm	Em	F	G	Am
C	**0**	**1/5**	**1/10**	**3/10**	**3/10**	**1/10**
Dm	**0**	**0**	**1/3**	**0**	**2/3**	**0**
Em	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
F	**3/8**	**1/8**	**0**	**0**	**½**	**0**
G	**7/9**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2/9**
Am	**0**	**0**	**1/3**	**2/3**	**0**	**0**

Fonte: Próprio autor

Para melhor compreender o processo para determinar esta tabela, o resultado da linha do C e da coluna do G significa que das dez vezes que apareceu o acorde de C (Dó maior) em três o acorde seguinte foi G (Sol maior), ou seja, a probabilidade de transição de G sabendo que o acorde anterior foi C é de:

$$P(X_{n+1} = G|X_n = C) = p_{CG} = \frac{3}{10}.$$

Tendo vista que a Tabela 10, apresentada no vídeo, corresponde a um estudo estatístico mais elaborado, a mesma foi utilizada para o seguimento das atividades. Seguindo o guia do professor, que é disponibilizado no portal da *M³ Matemática Multimídia*, que para tornar a tabela de probabilidade de transição mais operacional, faz alterações no sentido de transformá-la em uma matriz do tipo acumulada (Tabela 14), somando cada probabilidade de transição às probabilidades anteriores a ela na linha da tabela. Para que os valores que apareçam na tabela sejam os resultados possíveis na soma dos valores obtidos no lançamento de dois dados, multiplica-se os valores por 12 fazendo os devidos arredondamentos (Tabela 15).

Tabela 14 - Tabela das probabilidades de transição do tipo acumulada

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	7/7
II	0	0	0	1/7	7/7	0	0
III	0	0	0	0	1/7	7/7	0
IV	1/7	0	0	0	7/7	0	0
V	6/7	0	0	0	7/7	0	0
VI	0	6/7	0	0	7/7	0	0
VII	6/7	0	0	0	7/7	0	0

Fonte: UNICAMP. **M³ Matemática Multimídia:** Música quase por acaso – vídeo. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1135

Tabela 15 - Matriz de probabilidade acumulada adaptada para o jogo

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	2	3	5	7	9	10	12
II	0	0	0	2	12	0	0
III	0	0	0	0	2	12	0
IV	2	0	0	0	12	0	0
V	10	0	0	0	12	0	0
VI	0	10	0	0	12	0	0
VII	10	0	0	0	12	0	0

Fonte: UNICAMP. **M³ Matemática Multimídia:** Música quase por acaso – vídeo. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1135

Organizados em grupos de 6 componentes, os estudantes compuseram uma sequência de 10 acordes seguindo o modelo de jogo proposto no vídeo, usando dois dados. Seguindo as orientações apresentadas, com algumas adaptações feitas pelo professor, foi solicitado aos estudantes escolher uma tonalidade e o grau do acorde que seria o ponto de partida, utilizando a tabela dos campos harmônicos das escalas maiores, conforme apresentado na Tabela 4**,** e para determinar o acorde seguinte foram obedecidos os seguintes passos:

1. Anotar a tonalidade escolhida e a cifra do acorde do campo harmônico que será o ponto de partida;
2. Lançar os dois dados e obter o resultado da soma;

3. Na Tabela 15, localizar na linha do grau do acorde de saída o valor mais próximo superiormente do resultado obtido com os dados;
4. Anotar a cifra do acorde correspondente ao grau indicado na coluna do valor obtido no passo anterior;
5. Repetir o procedimento utilizando o acorde encontrado no passo anterior como ponto de partida até que se complete o número de acordes determinado.

Sabendo, pelo questionário de diagnóstico, que a maior parte dos estudantes não tocavam nenhum instrumento que pudesse executar a sequência de acordes compostas, foi solicitado previamente que os inscritos baixassem em seus smartphones o aplicativo *Chordbot Lite* que permite criar e executar progressões de acordes de forma fácil e rápida. O recurso está disponível livremente nas lojas de aplicativo das plataformas mais utilizadas nos smartphones e sua utilização, para este trabalho, foi gentilmente permitida pelo desenvolvedor Lars Careliusson (2018) através de contato por e-mail.

Durante o trabalho de composição foi explicado aos alunos que outros parâmetros poderiam ser escolhidos para diferenciar as composições, como ritmo, duração dos acordes, entre outros. Porém para demonstração nesta atividade foram mantidos os parâmetros padrões. Após todos os grupos apresentarem suas composições, os estudantes responderam o questionário de avaliação individualmente.

Figura 20 - Execução da atividade de composição de sequências de acordes na oficina

Fonte: Próprio autor

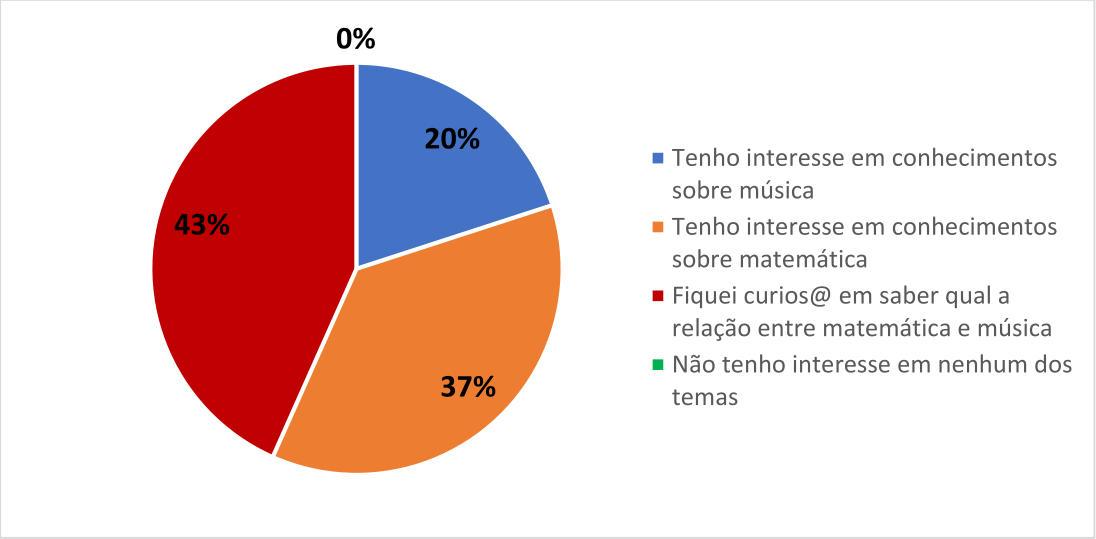
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO DE DIAGNÓSTICO

O questionário de diagnóstico proporcionou conhecer as características e motivações do público da oficina. Para tanto foram observados sobre os estudantes inscritos: a motivação para a inscrição na oficina; a relação pessoal com a música (níveis de conhecimento e interesse); a relação pessoal com a matemática; a relação da matemática com a música; conhecimento e experiência com Probabilidade.

Sobre as motivações para a inscrição na oficina, os resultados apresentados no gráfico da Figura 21 demonstraram que a música desperta grande interesse e curiosidade nos alunos, visto que 63% das motivações relacionavam a participação ao interesse por conhecimentos musicais ou por conhecimento da relação da matemática com a música. Logo, uma abordagem utilizando a interdisciplinaridade entre música e a matemática pode contribuir para facilitar a aproximação dos estudantes com o conhecimento matemático.

Figura 21 - Motivações dos estudantes para inscrição na oficina



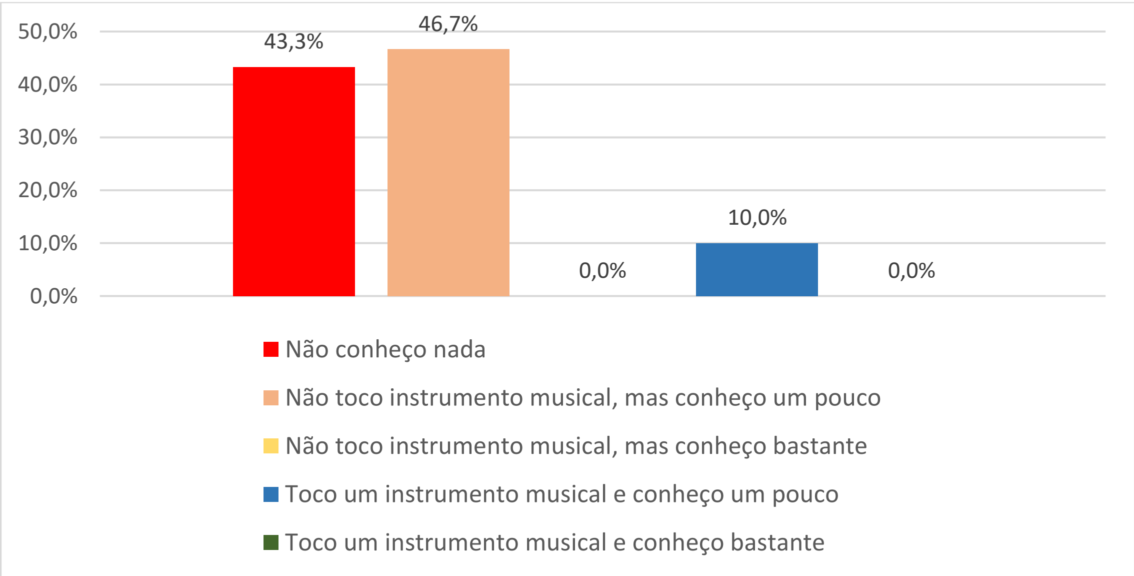
Fonte: Próprio autor

As duas perguntas seguintes do questionário buscaram identificar a relação dos participantes com a música. Para tanto, foi investigado o nível de conhecimento dos estudantes sobre teoria musical e o nível de interesse em relação à música.

Silva (2014, p.11), destaca que, apesar do ensino de música ter se tornado conteúdo obrigatório na educação básica pela Lei nº 11.769/08, “ainda permanece em nossa sociedade, a discussão acerca da importância e do lugar deste conhecimento no currículo escolar.” Apesar da constatação da autora, é evidente que a maior parte das propostas curriculares das escolas públicas brasileiras não contemplam a educação musical como deveria acontecer. O pouco ou inexistente conhecimento sobre teoria musical em 90% dos participantes da oficina, apontado no gráfico da Figura 22, exemplificam como a música não está inserida no contexto escolar de forma efetiva, mesmo que neste caso 60% do público observado gostaria de aprender a tocar algum instrumento musical, como mostra o gráfico da Figura 23. Tendo em vista a deficiência dos estudantes com relação aos conceitos básicos de teoria musical, necessários a este trabalho, foi realizado um nivelamento introdutório sobre tais conhecimentos.

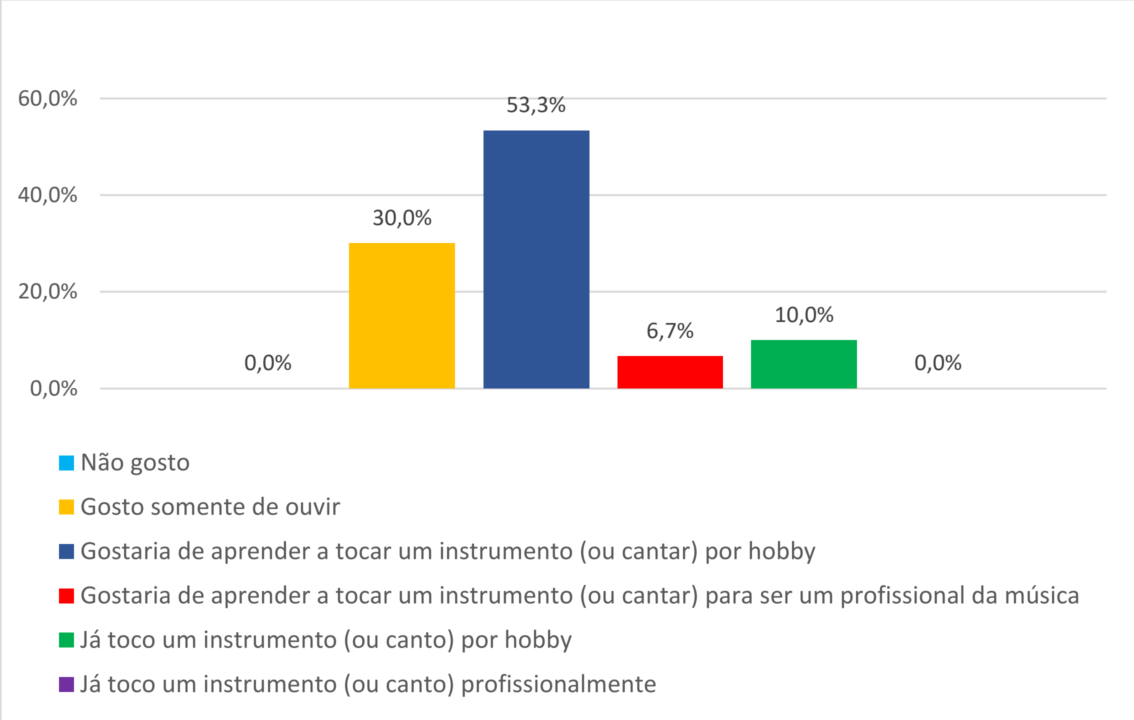
Assim como na escola investigada, é de senso comum que a música exerce grande fascínio na juventude o que justifica a existência de público interessado por música na maioria das instituições de ensino. Porém, ainda existem poucas iniciativas que possibilitem tanto o ensino da música nas escolas públicas quanto a sua utilização como catalizador da aprendizagem de outras áreas do conhecimento de forma interdisciplinar. Neste sentido, Silva, Araújo e Jesus (2016, p. 2), ao investigar o “uso da música como recurso pedagógico nas aulas de matemática”, afirmam que “não significa que a música se torne o único recurso de ensino, mas que de alguma forma possa facilitá-lo, pois o educando convive com ela desde muito pequeno.”

Figura 22 - Nível de conhecimento sobre teoria musical dos participantes da oficina



Fonte: Próprio autor

Figura 23 - Nível de interesse dos participantes da oficina em relação à música



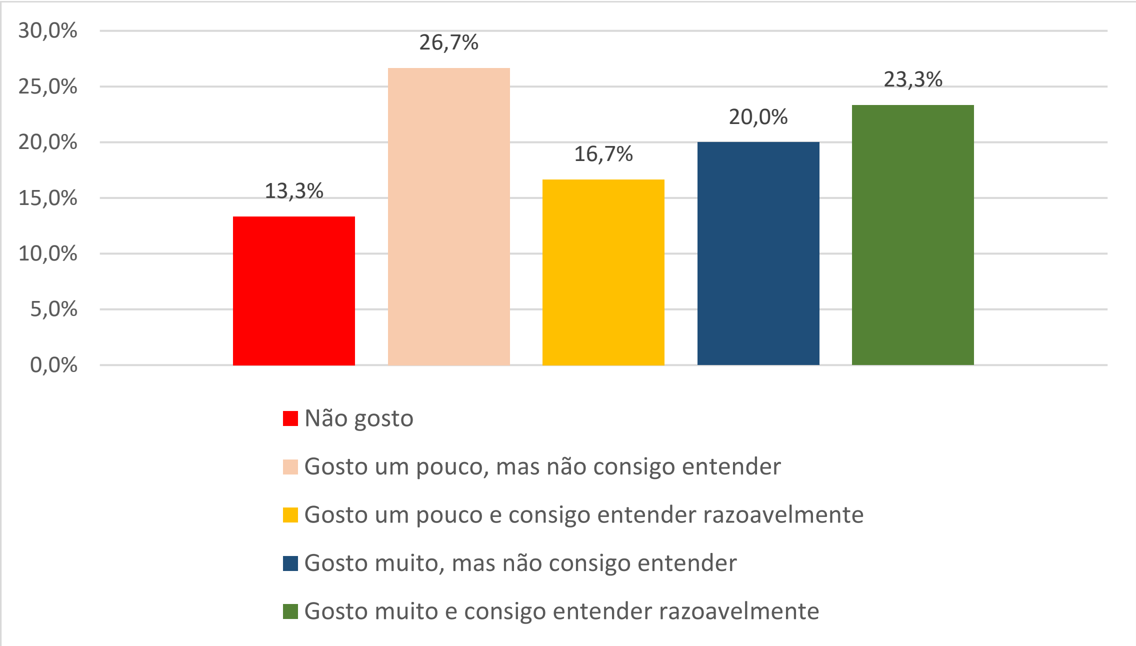
Fonte: Próprio autor

Ainda analisando os motivos para a utilização da música como estratégia de ensino da matemática, foram investigadas nas questões seguintes a relação pessoal dos estudantes com a matemática e se o fato de um assunto de matemática estar relacionado à música faria com que aumentasse nele o interesse pelo conteúdo. Os resultados, apresentados no gráfico da Figura 24, apontaram que 60% dos alunos não gostam de matemática ou relatam não conseguir aprender os conteúdos, o que demonstra as dificuldades enfrentadas pelos professores frente a relação dos estudantes com a disciplina. Campos (2009, p.15-16), observando a relação da afetividade com a aprendizagem da matemática, destaca que:

> Esse distanciamento ou repúdio que alguns alunos sentem pela matemática atrapalha o entendimento, a compreensão dos conceitos e contribui para a perda da motivação. Quanto mais longe do cotidiano e da prática na abordagem de alguns assuntos da matemática, mais difícil se torna o entendimento dos alunos.
>
> Observamos também que há uma grande afetividade nas situações didático-pedagógicas envolvendo atividades musicais. A música cria um ambiente livre de tensões, facilita a sociabilização, cria um ambiente escolar mais abrangente e favorece o desenvolvimento afetivo.

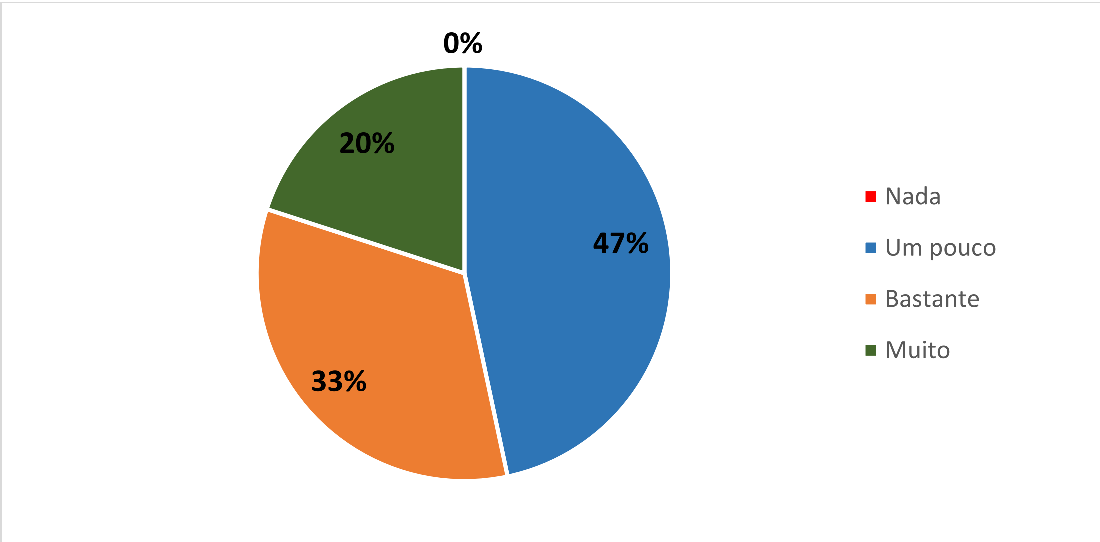
O gráfico da Figura 25 reforça a observação relatada por Campos, quando mostra que o interesse por um assunto de matemática aumentaria bastante ou muito para mais de 50% dos participantes da oficina, se o mesmo conteúdo estiver relacionado com a música.

Figura 24 - Nível de interesse dos participantes da oficina em relação à matemática



Fonte: Próprio autor

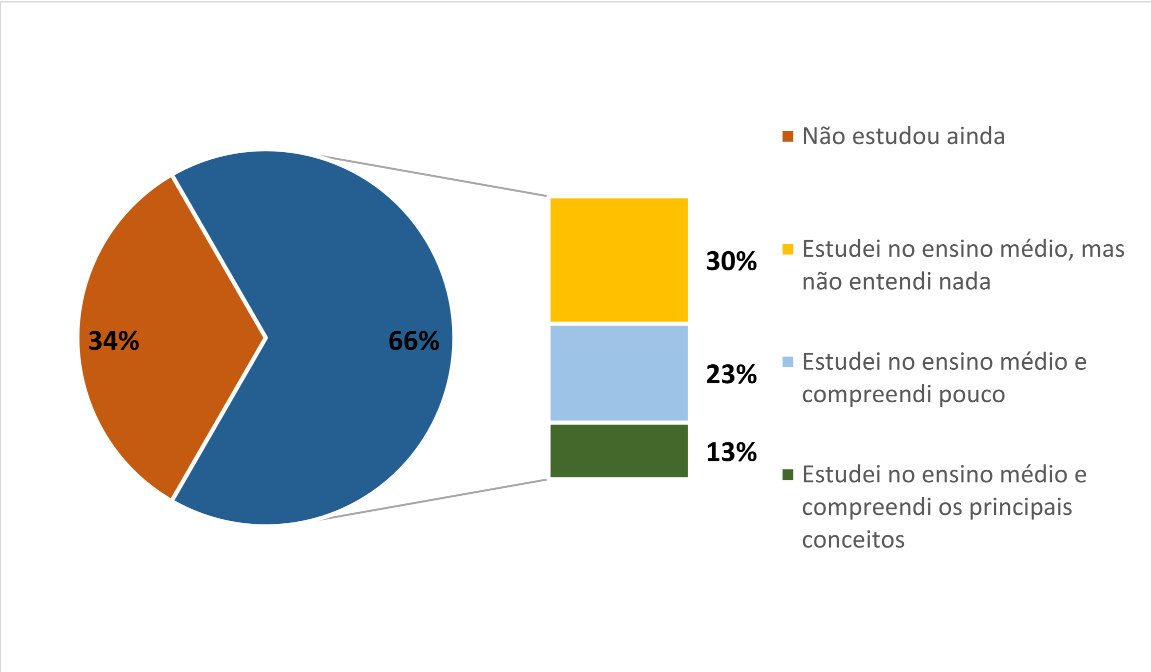
Figura 25 - Nível de interesse por assunto de matemática relacionado à música



Fonte: Próprio autor

A coleta de dados revelou que 53% dos participantes inscritos, estudaram os conceitos básicos de probabilidade, porém compreenderam pouco ou nada, como mostra o gráfico da Figura 26. O resultado reforça a ideia de que o modelo habitual de ensino não vem cumprindo seus objetivos. Desta forma, ao aplicar a proposta metodológica de ensino da probabilidade utilizando conhecimentos de teoria musical, tornou-se necessário desenvolver uma avaliação para verificar se a aprendizagem dos conceitos trabalhos foi ou não efetivada de forma integral ou parcial.

Figura 26 - Nível de conhecimento dos participantes sobre probabilidade



Fonte: Próprio autor

6.2 ANÁLISE DA OFICINA

A primeira etapa da oficina cumpriu o objetivo de motivar os estudantes e ambientá-los no trabalho do músico interprete e compositor. Com a participação do músico profissional Valdir Rocha[12] que foi convidado para apresentar algumas composições instrumentais de sua autoria, despertou-se a curiosidade dos alunos sobre quais os processos que envolvem a criação de uma obra inédita. Esta curiosidade foi demonstrada nos questionamentos dos participantes, direcionados ao músico, que surgiram no momento de conversa proposto na sequência da atividade.

Pelo observado na sequência, com a introdução de conceitos musicais, a compreensão de alguns aspectos da música não é tão simples para aqueles que não possuem uma vivência prática com instrumentos musicais ou outros conhecimentos prévios. A relação histórica e as noções mais simplificadas, ainda despertaram interesse inicial, porém apesar de 60% dos alunos apontarem interesse aprender a

---

[12] Guitarrista, Produtor Musical, Compositor e Professor de Música baiano. Compôs a música *Labuta Nordestina* que mescla o Rock instrumental à música popular nordestina e regional. Fonte: https://www.youtube.com/channel/UC2bhAJtIXyZyxJxXjmWV8Nw Acesso em: 18 abr. 2019.

tocar um instrumento, como visto na Figura 23, não foi demonstrado o mesmo interesse quanto aos conhecimentos de teoria musical introduzidos pela maioria. Os questionamentos e a participação foram maiores daqueles que já possuíam algum conhecimento em relação à música.

Keback (2012, p. 99) afirma que “a interação coletiva é um espaço rico de mobilização de esquemas de significação e de coordenação de ações progressivas”. Tal pensamento se sustenta ao perceber que, mesmo com as dificuldades de compreensão dos conceitos musicais, as atividades seguintes forma desenvolvidas sem problemas, devido a interação dos estudantes que já tocavam instrumentos musicais com os demais, juntamente com as intervenções do professor formador e do músico convidado, contribuindo para a aquisição das habilidades necessárias para a execução, principalmente na notação em cifra dos acordes.

Na segunda etapa, foram introduzidos os conceitos básicos de probabilidade. A abordagem com a utilização do jogo de dados Mozart como exemplo propiciou uma maior interação dos estudantes com o assunto. Alguns estudantes, que já haviam estudado o assunto anteriormente, associaram a questão da probabilidade de repetição da música com o exemplo da chance de acertar na loteria, muito utilizado na abordagem convencional do ensino deste conteúdo no ensino médio.

Para a resolução do problema, os estudantes inicialmente tentaram resolver usando a tabela do jogo, sem considerar a probabilidade do resultado dos dados. Entretanto, após intervenção do professor, perceberam que a questão considerava uma sequência de resultados do lançamento de dois dados. Assim, após visualização dos possíveis resultados e das somas no lançamento de dois dados, de forma similar ao apresentado na Tabela 7, os envolvidos conseguiram encontrar a solução. Esta situação mostra que, neste tipo de atividade, é necessário que o professor tenha cautela para incentivar os estudantes a analisarem o problema sob vários aspectos, evitando uma abordagem mecanizada de simples aplicação de fórmulas.

A exploração do programa do jogo de dados de Mozart e das experiências interativas do Chrome Music Lab nesta atividade permitiu a utilização da dimensão lúdica, destas ferramentas, para “desenvolver o raciocínio lógico e estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas, visando a melhoria da aprendizagem dos conceitos matemáticos”, como defendido por Moura (2006, p. 73). O mesmo autor ainda defende que:

> A aprendizagem da Matemática depende de uma grande variedade de fatores o que torna o seu ensino bastante complexo. [...] Desta forma, os professores de matemática devem concentrar-se em aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, organização, concentração, atenção, raciocínio lógico-dedutivo e sentido cooperativo, aumentando a socialização e as interações pessoais. (MOURA, 2006, p. 73).

A terceira etapa foi a que mais dependeu de notação musical, gerando dificuldades para aqueles que não possuíam conhecimento prévio, mas os estudantes demonstraram ter compreendido o conceito de cadeia de Markov e probabilidade de transição, o que foi observado pela participação durante a construção da tabela de probabilidade de transição da lista de progressões de acordes.

Outro ponto positivo desta atividade foi a utilização do smartphone como ferramenta para execução das composições feitas, o que atraiu ainda mais a atenção dos alunos e permitiu uma participação maior daqueles que não tocam algum instrumento musical, precisando somente de algumas orientações quanto à notação e às configurações do aplicativo. Observação que se reafirma na fala do músico Valdir Rocha convidado como observador, ao ser questionado sobre quais as suas impressões sobre a oficina:

> *"- É muito bom ver a juventude interessada em conhecer mais sobre a música. Antigamente, o jovem tinha interesse em aprender a tocar um instrumento pra sentar na praça tocar umas músicas com os amigos. Hoje, essa garotada só quer interagir pelo celular.*
>
> *- Se na minha época tivessem aulas de matemática como estas, com certeza atrairia muito minha atenção pelo meu interesse pessoal pela música. Quando eu estudava no Ensino Médio, eu já tocava e o que eu sei da relação da matemática com a música é da minha curiosidade e da prática. Hoje eu sei que o processo para compor é muito mais trabalhoso. Não é como esse joguinho legal no celular. Mas essa galera de hoje gosta é disso aí. Pelo menos dá uma noção inicial." (Valdir Rocha, 2018, entrevista ao autor)*

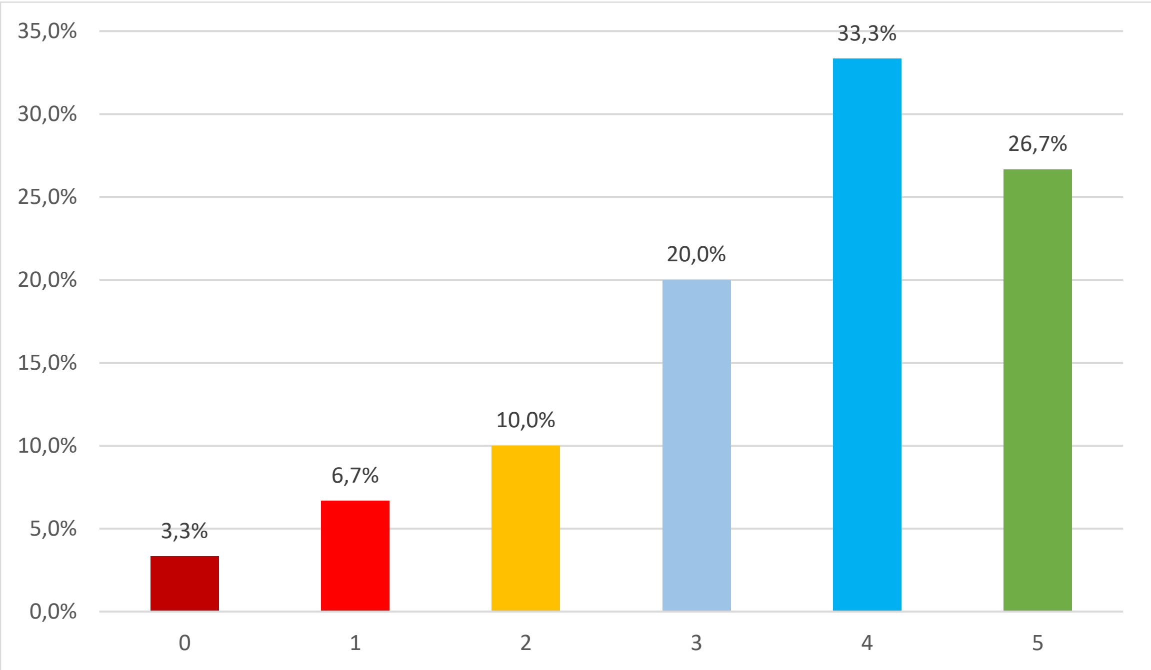
O músico também observou que alguns dos conceitos musicais empregados na atividade são desconhecidos da maior parte dos estudantes e até mesmo dos professores que não tenham contato, pelos mesmo como iniciante, com instrumentos musicais o que obrigará ao professor, que adotar esta abordagem, a estudar a parte teórica da música sobre notas, acordes e campo harmônico ou então recorrer ao auxílio especializado de um musicista durante a preparação e execução da atividade.

Ao findar as atividades da oficina, foi aplicado um questionário de avaliação (APÊNDICE B) onde a primeira questão investigou o nível de satisfação dos estudantes perante as atividades realizadas oficina, sendo que 93,3% dos participantes indicaram nível 4 ou 5 numa escala de 0 a 5. Já na segunda questão, os resultados demonstram que 63,3% consideraram boa (nível 4 ou 5) e 33,3% consideram regular (nível 2 ou 3) a compreensão dos conceitos de teoria musical apresentados, o que é um bom resultado considerando que o foco principal era a aprendizagem da parte matemática e que 90% dos inscritos afirmaram ter pouco ou nenhum conhecimento de música, conforme observado na Figura 22.

No que diz respeito à motivação, 70% dos estudantes indicaram que atividades realizadas na oficina lhe motivaram para o estudo de probabilidade positivamente ao optarem pelos níveis 4 ou 5, o que reforça a hipótese de que atividades contextualizadas com a música podem contribuir para esta finalidade.

As questões seguintes do questionário, visam avaliar a aprendizagem dos participantes em relação aos conceitos de teoria das probabilidades envolvidos nas atividades desenvolvidas. Considerando uma autoavaliação dos estudantes em relação à compreensão destes conceitos, o gráfico da Figura 27 aponta que 60% dos envolvidos afirmam ter compreendido tudo, ou quase tudo, em relação aos conceitos de teoria das probabilidades apresentados. Resultado que pode ser comparado com o diagnóstico que, conforme a Figura 26, revelou que 53% dos estudantes já haviam estudado probabilidade, mas haviam compreendido pouco ou nada do assunto.

Figura 27 - Nível de compreensão dos participantes em relação aos conceitos de teoria das probabilidades trabalhados na oficina

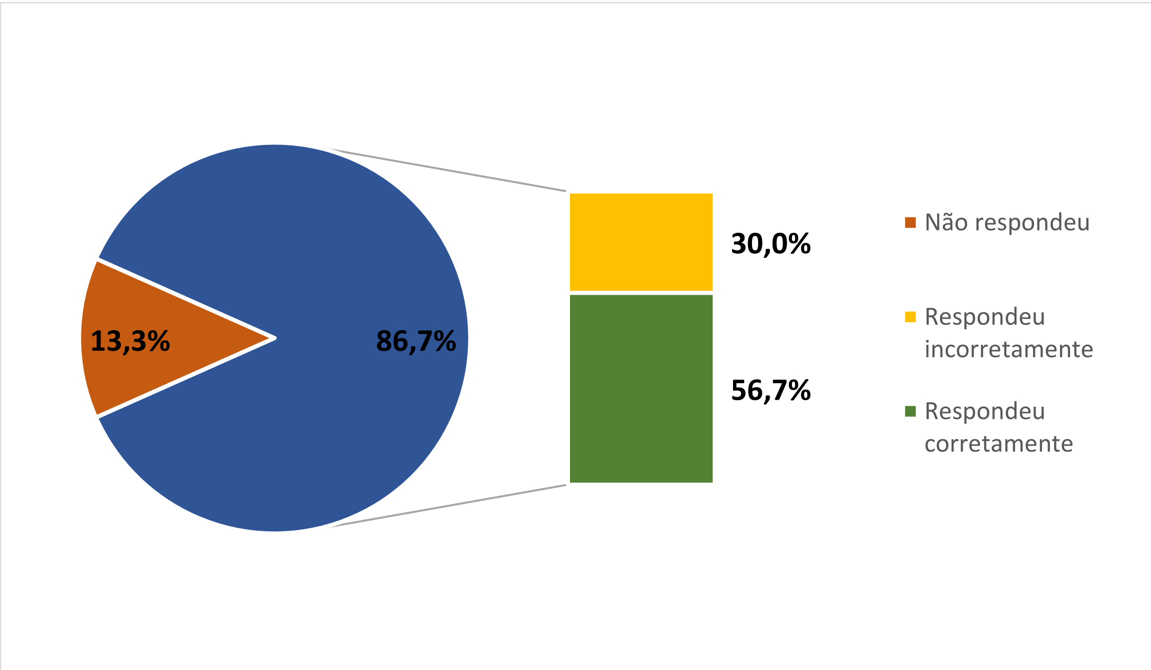


Fonte: Próprio autor

A questão 5 apresentou alguns problemas de aplicação dos conhecimentos trabalhados no decorrer da oficina, divididos em: a) questão envolvendo definição de probabilidade; b) questão envolvendo probabilidade condicional (na forma de probabilidade de transição); e c) questão envolvendo matriz de probabilidade de transição (cadeia de Markov).

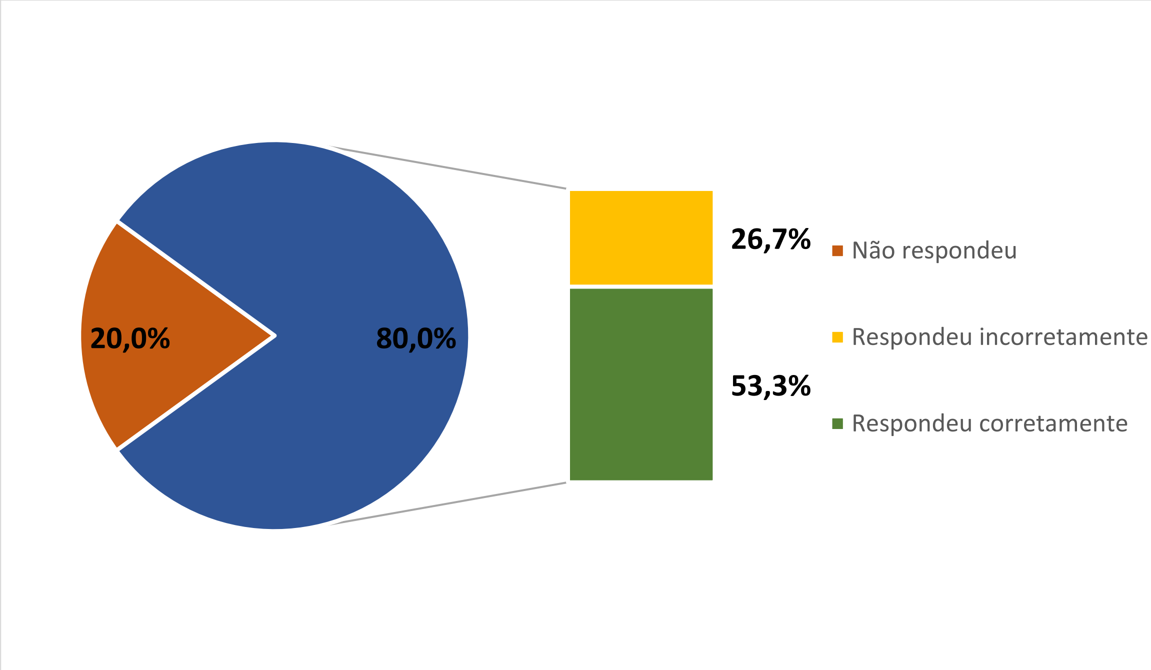
Os resultados apontados nos gráficos das Figuras 28, 29 e 30, demonstram que as atividades contextualizadas com música contribuíram para a aprendizagem de alguns conceitos da teoria das probabilidades. Vale ressaltar que, mesmo envolvendo conceitos mais avançados como cadeias de Markov, que geralmente não são trabalhados no ensino médio, houve a compreensão da sua concepção, visto que foi apresentada de forma simplificada e contextualizada. Considerando que a questão 5-c exigia uma quantidade maior de cálculos, aliado ao fato de que após o período de trabalho na oficina os estudantes já se apressavam em terminar a atividade, é aceitável que o número de respostas totalmente corretas tenha diminuído. Porém a quantidade de respostas parcialmente corretas indica que a ideia de matriz de probabilidade de transição foi compreendida. É importante destacar que o questionário de avaliação foi respondido de forma individual e sem qualquer intervenção do professor.

Figura 28 - Desempenho dos participantes na questão 5-a



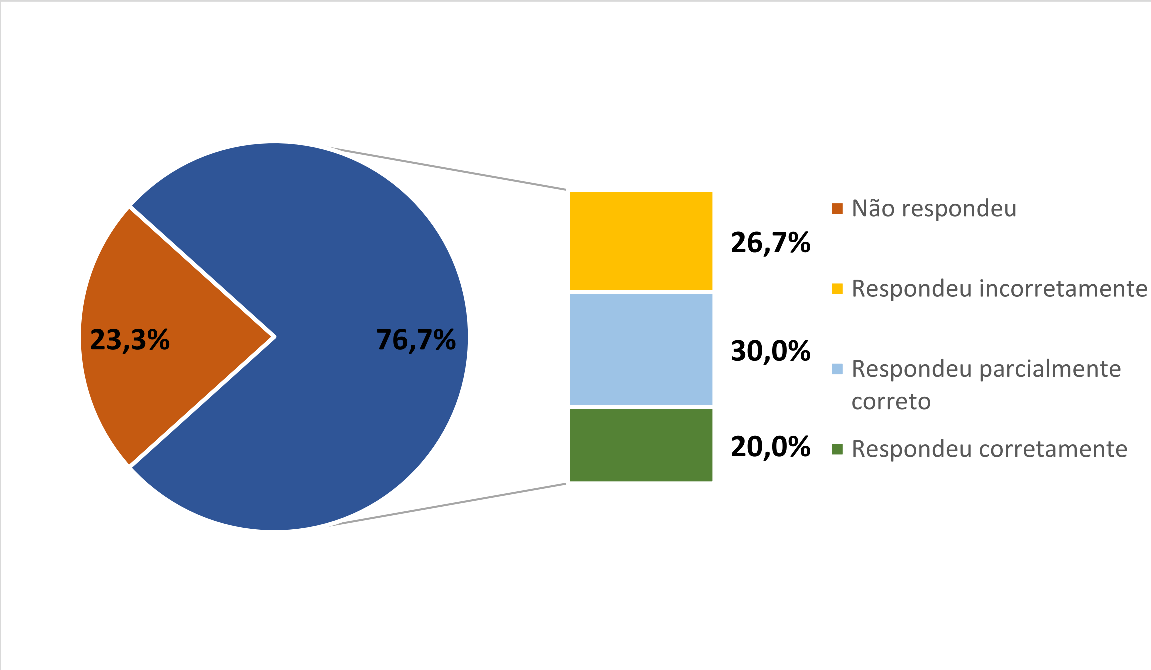
Fonte: Próprio autor

Figura 29 - Desempenho dos participantes na questão 5-b



Fonte: Próprio autor

Figura 30 - Desempenho dos participantes na questão 5-c



Fonte: Próprio autor

O questionário de avaliação confirmou as contribuições da contextualização da matemática com a música em relação à satisfação, à motivação e à aprendizagem, o que vem a corroborar com Campos (2009, p. 121) que, ao analisar oficinas interdisciplinares de matemática e música, afirmou que o “cenário afetivo que a música proporcionou tornou a matemática mais lúdica, trazendo benefícios no entendimento de conceitos que eram vistos somente de maneira simbólica e teórica".

6.3 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO DOS PROFESSORES

Com o propósito de investigar como professores de ensino médio se comportariam frente a tais metodologias de ensino de probabilidade por meio de uma contextualização com a música, foi enviado um questionário para docentes que atuam neste nível de ensino por meio de um aplicativo de mensagens. Responderam ao questionário 3 professores que atuam em duas escolas da rede estadual da Bahia nas cidades de Mairi e Várzea da Roça e 4 alunos do PROFMAT, ofertado pela UNIVASF, que estão em efetiva regência, seja na rede pública ou na privada.

Dentre os entrevistados foi verificado, através das questões, que todos são graduados e que 6 são pós-graduados em matemática. Com relação aos conhecimentos de teoria musical, 3 professores responderam que não possuem nenhum, os quais chamaremos de ***A***, ***B*** e ***C***; 3 responderam estar em nível iniciante, a estes denominaremos ***D***, ***E*** e ***F***; e um respondeu estar em nível intermediário, o qual chamaremos de ***G***.

No questionário, foi disponibilizado os vídeos "*O Jogo de Dados de Mozart*" e "*Música quase por acaso*", além dos links para que os respondentes baixassem o guia do professor de cada conteúdo através do portal M³ Matemática Multimídia (ver seção 4.3, p. 57-59). Em cada um dos vídeos foi apresentada a seguinte questão: "*Você utilizaria ou adaptaria a atividade acima para o ensino de probabilidade no Ensino Médio? (Destaque os motivos da sua resposta, potencialidades e pontos negativos da atividade).*"

Sobre o vídeo o "*Jogo de Dados de Mozart*" tivemos as seguintes respostas:

Tabela 16 - Respostas dos professores sobre o vídeo "O Jogo de Dados de Mozart"

Professor	Resposta
A	*Usaria. É uma alternativa interessante para o ensino de probabilidade, por se tratar de um conteúdo complexo.* *Como muitos alunos gostam de música, inclusive praticando algum instrumento musical, usar essa abordagem contribui tanto para o ensino de probabilidade, como auxilia o aluno na sua diversão com a música.*
B	*Não. Acho que tem formas mais interessantes para ensinar esse conteúdo no Ensino Médio.*

C	*A atividade é interessante, dá pra aproximar o aluno da matemática utilizando a música, mas teríamos que ter recursos e o domínio dos elementos da música para levar tal atividade para sala de aula. Na minha realidade, não teria como fazer.*
D	*Sim, porém precisaria inicialmente compreender melhor os conceitos musicais.*
E	*Sim, usaria, mas não adaptaria, pois achei a proposta ideal inclusive para se trabalhar conceitos de potência.*
F	*Sim. Como motivação, no início do assunto, ao passar apenas algumas relações simples da música com a probabilidade e como reforço e motivação do assunto ao mostrar, com mais ênfase, a aplicação da probabilidade na música. Como pontos negativos pode-se destacar a exigência de certo tempo para os alunos entenderem melhor essa conexão na prática da Matemática com a música, bem como da necessidade de um professor com algum conhecimento de música para um maior sucesso das aulas.*
G	*Sim. Utilizaria seguindo da mesma forma apresentada.*

Fonte: Próprio autor

De acordo com as respostas apresentadas na Tabela 16, apenas os professores ***B*** e ***C*** indicaram que não utilizariam este método, sendo que ***C*** ressaltou que a atividade seria interessante para os estudantes, mas a falta de domínio em elementos da teoria musical não lhe permitia utilizar este recurso. Dentre os professores que afirmaram que utilizariam a metodologia apresentada também houve aqueles que destacaram a necessidade se preparar e conhecer melhor os conceitos musicais.

Avaliando o vídeo “Música quase por acaso” os professores entrevistados responderam da seguinte maneira:

Tabela 17 - Respostas dos professores sobre o vídeo "Música quase por acaso"

Professor	Resposta
A	*Não, pois para usar esse vídeo ou essa abordagem necessita de um conhecimento maior do professor com a música, para que ele possa alcançar seu objetivo, que é transmitir com segurança esse conteúdo para que haja aprendizado significativo.*
B	*Não. Acho que a atividade é muito complicada para quem não tem um bom conhecimento de música.*
C	*Não. Assim como na atividade anterior, os recursos disponíveis, bem como a falta de conhecimento do professor em música, fazem a diferença para a realização da atividade.*
D	*Sim, mas pelo mesmo motivo precisaria inicialmente compreender melhor alguns conceitos musicais.*
E	*Sim, mas não dessa forma, pois é muito complexo os entenderem o uso de notas musicais, já que a maioria não entende, mas poderia adaptar de maneira que os alunos compreendessem a relação entre probabilidade e razão.*
F	*Sim. Como motivação ao conteúdo de probabilidade. Por outro lado, destaco a exigência de que o professor tenha conhecimentos, pelo menos*

	básicos, acerca de acordes e melodias para tornar as aulas de probabilidade ainda mais atrativas.
G	*Sim. Superinteressante principalmente se a turma tivesse contato com partitura para poder relacionar os conceitos de combinatória e probabilidade com a música.*

Fonte: Próprio autor

Sobre a abordagem proposta no segundo vídeo, nas respostas expostas na Tabela 17, os professores ***A***, ***B*** e ***C*** afirmam que não fariam uso da mesma, tendo como principais motivos a complexidade e a falta de conhecimento de conceitos musicais. Por outro lado, os outros quatro professores consultados responderam que utilizariam este método, porém mais uma vez alertando sobre a necessidade preparação e estudo devido aos elementos musicais da atividade.

É possível verificar, com a análise das respostas, que a utilização da música para contextualizar o ensino de matemática e mais particularmente de probabilidade encontra resistência devido à falta de conhecimento das partes mais específicas da música por parte dos docentes. Vale observar, que as negativas em relação as propostas apresentadas aconteceram justamente daqueles professores que indicaram não ter conhecimento sobre teoria musical. O trabalho com oficinas interdisciplinares neste caso pode ser um caminho, visto que pode envolver outros professores especializados na preparação e execução da proposta didática.

Por fim, os professores consultados responderam à seguinte questão: *"Com base na sua opinião e experiência no ensino da matemática responda: Uma abordagem contextualizada com a música (como as apresentadas acima) pode contribuir para a aprendizagem, e/ou estimulo ao estudo, de conceitos de probabilidade por parte de estudantes de ensino médio? Indique o(s) motivo(s) de sua resposta"*.

As respostas a esta questão estão apresentadas na tabela abaixo:

Tabela 18 - Respostas sobre o ensino de probabilidade contextualizada com a música

Professor	Resposta
A	*Sim. Contextualizar o conteúdo sempre contribui para uma melhor aprendizagem. Já que está sendo estimulada outra área do cérebro do aluno. Quanto maior o número de áreas estimuladas, maior a chance de aprendizagem de um conteúdo.*
B	*Acho que sim, mas somente se o aluno gostar de música.*
C	*Tendo os recursos necessários e o conhecimento de notas musicais pelo professor, como mencionados anteriormente, acredito que a contextualização da música na matemática aproxima os alunos da disciplina*

	de forma prazerosa, de modo a perceberem como a matemática se faz presente no cotidiano e quanta sensibilidade há nela. E seria mais prazeroso aprender probabilidade com música.
D	*Sim. Compreender algumas aplicações pode fazer da matemática um conteúdo mais atraente.*
E	*Sim, desde que a escola disponibilizasse de recursos para o uso da mesma.*
F	*Sim, pois pode incentivá-los na busca pelo próprio entendimento e reforço do assunto probabilidade.*
G	*Com certeza e que de preferência ele tenha conhecimento com leitura de partitura para que no momento de jogar ele possa também executar as peças originadas da atividade.*

Fonte: Próprio autor

Alguns professores destacaram a necessidade da disponibilização dos recursos necessários para realização das atividades. Sobre este aspecto Campos (2009, p. 122) observa que, na realização de atividades interdisciplinares de matemática e música:

> *Outra dificuldade que também podemos destacar é a respeito do uso de materiais que não são acessíveis à maioria das pessoas. Materiais como violão e teclado não são encontrados facilmente em escolas, além de que, quem for manuseá-los, deverá saber um pouco a respeito do funcionamento desses instrumentos. O uso de softwares também pode trazer algumas dificuldades para professores e alunos durante a realização das atividades. Percebemos que esses recursos poderiam ser utilizados com mais cuidado, dedicando maior tempo na explicação de como funcionam e de como são utilizados.*

Contudo a utilização de uma abordagem contextualizada com música para o ensino de probabilidade, defendida neste trabalho, é considerada válida e pode trazer benefícios à aprendizagem dos estudantes de acordo com todos os docentes que responderam este questionário. Destaca-se também, nas respostas dos professores ***A***, ***C*** e ***D***, que tal estratégia pode ser atraente e prazerosa aos estudantes, estimulando a participação e a aprendizagem.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo proporcionou a apresentação de possibilidades de utilização de uma contextualização com a música para o auxílio do ensino de conceitos de probabilidade e para tanto, investigou-se as relações da música com a teoria das probabilidades e as experiências já realizadas no campo pedagógico. Além disso, afim de explorar as potencialidades desta abordagem, foi realizada uma oficina interdisciplinar, observando em campo as motivações e as aprendizagens dos estudantes, bem como as considerações de profissionais de música e da educação matemática frente as propostas metodológicas apresentadas.

Na primeira parte da pesquisa foi possível verificar que são inúmeras as relações matemáticas existentes no campo musical, o que está historicamente evidenciado nas primeiras experiências de Pitágoras, nos estudos das frequências sonoras que determinam as notas, ou até mesmo, na formalização das notações e dos conceitos da teoria musical presentes no sistema ocidental de composição. No entanto, é na área de composição que se encontram as principais aplicações da teoria das probabilidades na música. Como vimos, ao longo deste estudo, foi possível perceber a presença desta relação pela utilização do acaso nos jogos de dados musicais do século XVIII, pelos métodos de compositores modernos e contemporâneos, como Iannis Xenakis e John Cage, e pela música computacional. Desta forma, com esta proposta de ensino da matemática é possível dialogar com outras disciplinas abordando os períodos históricos da arte e a evolução da tecnologia.

Ainda sobre a investigação da relação da probabilidade com a música, foi possível observar a importância das Cadeias de Markov para a realização de trabalhos de análise de características musicais de um compositor, ou de uma série de compositores de um determinado estilo ou período, e ainda para construção de sistemas de composição automática ou semiautomática que geram músicas inéditas utilizando os parâmetros musicais analisados nos trabalhos citados. Estes trabalhos têm sido de fundamental importância para o desenvolvimento de sistemas de inteligência artificial, com máquinas que podem aprender através da análise de variáveis de situações observadas. A abordagem deste tema é uma possibilidade relevante para ser discutida em sala de aula em virtude do reconhecimento do mundo tecnológico em que vivemos na atualidade. Isto justifica o estudo das Cadeias de

Markov nesta atividade voltada ao Ensino Médio, mesmo que este conteúdo não seja habitualmente aplicado neste nível de ensino, e abre caminho para estudos posteriores sobre a algoritmos e produção de produção de softwares.

No campo educacional, ficou evidente que existem poucos trabalhos que envolvam a probabilidade associada a elementos musicais. Principalmente a nível nacional, esta abordagem é pouco explorada sendo mais utilizada na área de ciências da computação. O que justifica ainda mais exploração da temática neste trabalho e em estudos futuros, visto que é de senso comum que a música e a tecnologia são fortes atrativos para a juventude, e que é necessário buscar novos métodos para o ensino da matemática frente às dificuldades apontadas por Pacheco e Andreis (2017) e destacadas pelos resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica[13] (Saeb).

Durante a realização da pesquisa de campo foi nítido que as motivações pessoais dos estudantes em relação à música contribuíram no estímulo à participação nas atividades e que estas refletiram positivamente na aprendizagem dos estudantes com relação aos conhecimentos matemáticos envolvidos. Estes resultados corroboram com Campos (2009), que defende a utilização de oficinas interdisciplinares de matemática e música utilizando a afetividade e o estímulo das múltiplas inteligências como catalisador da aprendizagem, e também com Barbosa (2004) e Santos e Oliveira (2015), que defendem a contextualização na educação matemática.

Apesar dos bons resultados alcançados com a experiência didática vivenciada na oficina, é importante destacar que a exigência de conhecimentos ligados à teoria musical provoca uma diminuição da aceitação dos profissionais de educação com relação a esta proposta de ensino da matemática. Esta observação é evidenciada no resultado do questionário aplicado aos professores. Contudo, a utilização de recursos tecnológicos como softwares de computador, ou mesmo aplicativos de celular, permite que a aplicação seja possível mesmo para aqueles que não tenham adquirido habilidades para tocar instrumentos musicais, sendo necessário apenas dedicar algum tem de estudo e preparação. O trabalho interdisciplinar com adesão de outros profissionais da área de música e/ou artes pode enriquecer a proposta, trazendo uma nova visão sobre os conteúdos matemáticos e não matemáticos abordados podendo

[13] Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb>. Acesso em: 28 abr. 2019.

inclusive inserir ou criar novos métodos que potencializem o processo ensino-aprendizagem nas duas áreas do conhecimento. Tais observações, ressaltam a necessidade de um professor de música dentro das instituições de ensino, visto que este campo não deve ser utilizado apenas como ferramenta didática, mas ser reconhecido como produtor de conhecimento.

Outro aspecto relevante, é que o tempo destinado para a oficina se mostrou pequeno frente a quantidade de conhecimentos e de experiências enriquecedoras vivenciadas nesta atividade. Para novos estudos, ou mesmo para adoção desta abordagem na prática pedagógica, recomenda-se estender a sequência didática para mais encontros e etapas, a fim de colher mais dados relevantes sobre as contribuições da contextualização com composição musical para o ensino da matemática, bem como permitir que os estudantes possam explorar melhor os métodos de composição e ampliar o entendimento sobre os conceitos matemáticos empregados.

Contudo, diante tudo que foi observado e exposto, é possível afirmar que a abordagem utilizando a contextualização com a música contribui para o ensino-aprendizagem de conceitos de Teoria das Probabilidades visto que aproveita um campo que estimula a curiosidade e exerce o fascínio nos estudantes para motivar o envolvimento dos mesmos na construção do conhecimento matemático. Outra contribuição é que, as atividades práticas, utilizadas nesta abordagem, permitem a manipulação de elementos musicais e desta forma, além de estimular a participação, dão finalidade aos conteúdos matemáticos empregados tornando a aprendizagem prazerosa e significativa.

Espera-se que a pesquisa, aqui apresentada, possa subsidiar o trabalho pedagógico de professores do Ensino Médio e que possa inspirar novos estudos sobre a exploração pedagógica da relação da probabilidade com música, que como vimos ainda foi pouco explorada para fins educacionais. Como sugestão, nas Cadeias de Markov existem outros conteúdos inseridos que podem ser abordados em trabalhos futuros como, por exemplo, matrizes e teoria básica de grafos. Desta forma pretende-se futuramente fazer um estudo mais profundo a respeito da composição algorítmica para conhecer outras relações matemáticas que possam ser aproveitadas no ensino médio, ou até mesmo, desenvolver softwares ou aplicativos que possam ser utilizados em sala de aula para auxiliar o ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos por meio de jogos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações.** Tradução Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ALBET, M. **A música contemporânea.** Rio de Janeiro: Salvat, 1979. (Col. Biblioteca Salvat de grandes temas).

ALMEIDA, A. R. S. **A emoção na sala de aula.** 5. ed. Campinas: Papirus, 2005.

ALVES, R.; DELGADO, C. **Processos estocásticos.** Porto: 1997. (Publicação didática). Universidade do Porto. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/71434>. Acesso em 19 out. 2018

ATUNCAR, G. S. **Conceitos básicos de processos estocásticos**. Notas de Aula. UFMG. Belo Horizonte, 2011. Disponível em: <http://www.est.ufmg.br/portal/arquivos/rts/Ap2011.pdf>. Acesso em 14 nov. 2018

BAHIA (estado). Secretaria de Educação do Estado da Bahia, Superintendência de Políticas para a Educação Básica. **Orientações curriculares estaduais para o ensino médio: Área de Matemática.** Salvador: 2015.

BAHIA (estado). Secretaria de Educação do Estado da Bahia, Superintendência de Políticas para a Educação Básica. **Síntese do Face.** Salvador: 2018. Disponível em:<http://escolas.educacao.ba.gov.br/sites/default/files/private/midiateca/documentos/2018/sintese-do-face-2018.pdf>. Acesso em 01 jul. 2018

BARBOSA, J. C. **A "contextualização" e a Modelagem na educação matemática do ensino médio.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife. **Anais...** Recife: SBEM, 2004. 1 CD-ROM.

BASSETO, B. A. **Um sistema de composição musical automatizada, baseado em gramáticas sensíveis ao contexto, implementado com formalismos adaptativos.** 2000. 143 f. Dissertação (Mestre em Engenharia) - Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

BERGET, G. **Using Hidden Markov Models for Musical Chord Prediction.** 2017. Dissertação (Mestrado em Física e Matemática) - Norwegian University of Science and Technology, Department of Mathematical Sciences, Trondheim, 2017. Disponível em: <https://brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/2457835>. Acesso em 12 nov. 2018.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. **A matemática através dos tempos:** um guia prático e rápido para professores e entusiastas. Tradução Elza F. Gomide e Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher,2010.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino.** 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BOLDRINI, J. L., et al. **Álgebra Linear.** 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BORDINI, R. **Composição:** análise e síntese, sistemas, princípios e técnicas. Arteriais - Revista do Programa de Pós-Gradução em Artes, v. 1, p. 107-115, IFPA: 2015.

BRASIL. **Lei Nº 11.769**, de 18 de agosto de 2008. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, Lei de Diretrizes e Bases da Educação, para dispor sobre a obrigatoriedade do ensino da música na educação básica. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/2008/lei-11769-18-agosto-2008-579455-publicacaooriginal-102349-pl.html>. Acesso em 05 nov. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação, Assessoria de Comunicação Social. **Avaliação internacional**: Resultado do Pisa de 2015 é tragédia para o futuro dos jovens brasileiros, afirma ministro. 2016. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=42741>. Acesso em 05 nov. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Conselho Nacional da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**/ Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. – Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. 542 p.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: Ministério da Educação. 2000

BRITO, I. Matemática e Música. **Correio do Minho,** Braga, 05 fev. 2016. (artigo de Ciência da responsabilidade dos docentes e investigadores da Escola de Ciências da Universidade do Minho) Disponível em: <https://www.ecum.uminho.pt/pt/Media/Paginas/Rubrica-Ciencia.aspx>. Acesso em 28 set. 2018.

BROMBERG, C. **O Monocórdio na complexa relação entre Aritmética, Geometria e Física na Música.** In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA, 2016, Florianópolis. **Anais eletrônicos...** Florianópolis: SBHC, 2016. Disponível em: <https://www.15snhct.sbhc.org.br/resources/anais/12/1472480954_ARQUIVO_OMonocordio.pdf> . Acesso em: 16 ago. 2018.

CAMPOS, G. P. da S. **Matemática e Música:** práticas pedagógicas em oficinas Interdisciplinares. 2009, 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2009.

CARELIUSSON, L. (sem assunto) [mensagem pessoal]. Mensagem recebida por < xandecarrillo@gmail.com > em 07 jul. 2018.

CARVALHO, J. G. **A Matemática na composição musical.** 2013. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Florianópolis, Florianópolis, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/105450>. Acesso em: 02 fev. 2018.

CORREA, D. C. **Inteligência artificial aplicada à análise de gêneros musicais.** 2012. 175 f. Tese (Doutorado em Física Aplicada) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/76/76132/tde-05032013-090334/pt-br.php> Acesso em: 18 nov. 2018.

ELOWSSON, A.; FRIBERG, A. **Algorithmic Composition of Popular Music.** In: 12th International Conference on Music Perception and Cognition and the 8th Triennial Conference of the European Society for the Cognitive Sciences of Music, 2012, Thessaloniki, Grecia. **Anais eletrônicos...** Thessaloniki: Emilios Cambouropoulos, Costas Tsourgas, Panayotis Mavromatis, Costas Pastiadis (editores), 2012, p. 276-285. Disponível em: <http://icmpc-escom2012.web.auth.gr/proceedings.html> Acesso em: 17 fev. 2019.

FEIJÃO, P. C. **Um algoritmo de criação de improvisos com harmonia de jazz.** 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

FONSECA, M. C. F. R. Por que ensinar Matemática. **Revista Presença Pedagógica.** Belo Horizonte, v.1, n.6, mar/abril, 1995.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** Saberes Necessários à Prática Educativa. 25. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

GALLA-PECYNSKA, M. J. **Stochastic processes and probability theory in music.** 2015. Dissertação (Mestrado em Música) - University of York, York, 2015. Disponível em: <http://etheses.whiterose.ac.uk/13286/>. Acesso em: 28 out. 2018

GARCIA, Y. R.; SALAMANCA, P. R.; MORA, D. C. **El Juego de Dados de Mozart: Un Recurso Didáctico para la Enseñanza-Aprendizaje de la Probabilidad.** In: Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, 7.,2013, Montevideo (Uruguai). **Atas eletrônicas...** Montevideo, URU, FISEM: 2013. Disponível em: <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/paginas/t.html>. Acesso em: 12 out. 2018.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Org.) **Métodos de Pesquisa.** 1. ed. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil - UAB/UFRGS e SEAD/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

______. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GOULART, A. J. H. **"Música baseada em sons", conjuntos e teoria da informação.** 2011. Texto escrito para a disciplina: A música baseada em sons. Universidade de São Paulo. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~ag/balde/ag_cmu5190.pdf>. Acesso em: 22 out. 2017.

GUSMÃO, P. **Teoria Elementar da Música:** Teoria e percepção musical. Santa Maria/RS: Universidade Federal de Santa Maria, 2012. 30p.

INSTITUTO ANTÔNIO HOUAISS. **Dicionário Houaiss Conciso.** São Paulo: Moderna, 2011.

KALIAKATSOS-PAPAKOSTAS, M. A.; EPITROPAKIS, M. G.; VRAHATIS, M. N. Weighted Markov Chain model for musical composer identification. In: Di Chio C. et al. (eds) **Applications of Evolutionary Computation**. EvoApplications 2011. Lecture Notes in Computer Science, vol 6625, p. 334-343. Springer, Berlin, Heidelberg. Disponível em: <http://www.epitropakis.co.uk/publications>. Acesso em: 03 nov. 2018.

KEBACH, Patrícia. Processos de interação social em ambientes de educação musical. In: BEYER, Esther; KEBACH, Patrícia (Org.). **Pedagogia da música:** experiências de apreciação musical. 2. ed. Porto Alegre: Mediação, 2012.

KIEFER, P.; RIEHL, M. Markov Chains of Chord Progressions. **Mathematics Exchange,** Muncie: Ball State University, Fall 2016, v. 10, n. 1, p. 16-21. ISSN 1550-1736.

LEÃO, A. F. **O ressurgimento das Essências, a convicção dos Elos.** (Slides da Palestra) Degustação de Teoremas. Juazeiro: UNIVASF, 2016. Disponível em: <http://portais.univasf.edu.br/profmat/extensao/programas-e-acoes-de-extensao/Degustao1_Aroldo.pdf>

LUCK, H. **Pedagogia Interdisciplinar**: fundamentos teórico-metodológicos. 13. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2005.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias.** 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2006. 428p.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. de. **Noções de Probabilidade e Estatística.** 4. ed. São Paulo: EDUSP, 2002. 392p.

MANTARAS, R. L. de; ARCOS, J. AI and music, from composition to expressive performance**. AI magazine**, Palo Alto, v. 23, n. 3, p. 43-57, set. 2002. Disponível em: <https://aaai.org/ojs/index.php/aimagazine/issue/view/148> Acesso em: 06 out. 2018

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARCHINI, M. **Minstrel:** Composição Algorítmica para Leigos em Música. 2016. 74f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciência da Computação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Informática, Porto Alegre, 2016. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/147613#> Acesso em: 01 dez. 2018

MOOD, A. M.; GRAYBILL, E. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics.** 3. ed. New York: Mcgraw-Hill, 1974. 564 p. (McGraw-Hill series in probability and statistics)

MORGADO, A. C. de O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: SBM, 2001.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MOURA, M. O. A séria busca no jogo: do lúdico na matemática. In: KISHIMOTO, T. M. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.** 9. ed. São Paulo: Cortez, 2006.p.73-87.

OLIVEIRA, J. C. F. **Noções de Grafos Dirigidos, Cadeias de Markov e as Buscas do Google.** 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristovão, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=817> Acesso em: 15 nov. 2018.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. da S. L. Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. **Revista Principia - Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB**, [S.l.], n. 38, p. 105-119, fev. 2018. ISSN 2447-9187. Disponível em: <http://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/view/1612/806>. Acesso em: 28 abr. 2019.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autentica, 2001.

PAPADOPOULOS, G.; WIGGINS, G. (1999). **AI Methods for Algorithmic Composition:** A Survey, a Critical View and Future Prospects. In: AISB'99 Symposium on Musical Creativity, 1999, Edinburgh. **Anais eletrônicos...** Brighton: SSAISB, 1999, p. 110-117. Disponível em:

<https://www.aisb.org.uk/publications/proceedings/aisb1999/AISB99_Music.pdf> Acesso em: 16 fev. 2019

PAULA, A. P. M. et al. Contextualização e o Ensino de Matemática: uma análise das questões de matemática do vestibular da UEPA. **Boletim Online de Educação Matemática**, Joinville, v.5. n.9, p. 81-100, ago./dez. 2017. Disponível em: <http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/9312>. Acesso em: 18 dez. 2018.

PIRES FORTES, F. Combinatória e pensamento simbólico musical em Leibniz. **O que nos faz pensar**, [S.l.], v. 18, n. 25, p. 125-140, ago. 2009. ISSN 0104-6675. Disponível em: <http://oquenosfazpensar.fil.puc-rio.br/index.php/oqnfp/article/view/277>. Acesso em: 27 sep. 2018.

REZENDE, F. M. C.; FERREIRA, A. C. **O Ensino de Probabilidade na Educação Básica:** Análise da Produção de um Grupo de Estudos de Professores de Matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15, 2011, Campina Grande (Paraíba), **Anais…**, 2011. Disponível em: <http://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/1275/1/EVENTO_EnsinoProbabilidadeEducação.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2018.

RODRIGUES, J, F. **A matemática e a música.** Universidade do Porto, Jornal Interdisciplinar de Matemática. 1999. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus_99.pdf>. Acesso em: 22 out. 2017.

ROSS, S. **Probabilidade:** um curso moderno com aplicações. Tradução Alberto Resende De Conti. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010. 608 p.

ROSSETTI, D. **Elementos da Música Estocástica em Achorripsis de Iannis Xenakis.** In: CONGRESSO DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO EM MÚSICA, 20, 2010, Florianópolis, **Anais eletrônicos...** Florianópolis: ANPPOM, 2010, p. 94-100. Disponível em: <http://antigo.anppom.com.br/anais/anaiscongresso_anppom_2010/ANAIS_do_CONGRESSO_ANPPON_2010.pdf>. Acesso em: 01 out 2018.

SANTOS, A. O.; OLIVEIRA, G. S. Contextualização no ensino-aprendizagem da matemática: princípios e práticas. **Revista Educação em Rede: formação e prática docente**, [S.l.], v. 4, n. 5, jul. 2015. ISSN 2316-8919. Disponível em: <http://ojs.cesuca.edu.br/index.php/educacaoemrede/article/view/819>. Acesso em: 28 abr. 2019.

SILVA, H. L. O ensino de Música no ensino médio: Reflexões a partir do projeto PIBID música UEMG. **Revista Nupeart**, Florianópolis: UDESC/CEART, v. 12, p. 10-21, 2014. ISSN 2358-0925. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5965/2358092512122014010> Acesso em: 16 mar. 2019.

SILVA, M. A. B. da; ARAÚJO, D. O. de; JESUS, L. F. de. **Uso da música como recurso pedagógico nas aulas de matemática.** In: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2016, Campina Grande, **Anais...** Campina Grande: Realize, v. 1, 2016, ISSN 2317-0042. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/epbem/anais.php> Acesso em: 16 mar. 2019.

SILVA NETO, L. da. **Rizómata:** uma introdução às raízes da música de Iannis Xenakis. 2006. Dissertação (Mestrado em Artes) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/27/27140/tde-05072009-183519/pt-br.php> Acesso em: 31 jan. 2018.

TAFFARELLO, T. M.; SOUZA, L. G. S. **Per(cor)so (2013) para septeto de cordas e regente obbligato de Tadeu Taffarello:** Ein Musikaliches Würfelspiel em tempo real. In: CONGRESSO DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO EM MÚSICA, 24, 2014, São Paulo, 2014, **Anais eletrônicos...** São Paulo: ANPPOM, 2014. Disponível em: <http://www.anppom.com.br/congressos/index.php/24anppom/SaoPaulo2014/paper/view/2614>. Acesso em: 29 set. 2017

UNICAMP. **M³ Matemática Multimídia:** Música quase por acaso – guia do professor. (online) Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1135> Acesso em: 01 dez. 2017

______. **M³ Matemática Multimídia:** O Jogo de Dados de Mozart – guia do professor. (online) Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1122> Acesso em: 01 dez. 2017

WRIGHT, D. **Mathematics and Music.** (Mathematical World, v. 28). Providence: American Mathematical Society, 2009, 161 p.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DE DIAGNÓSTICO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF
Mestrando: Alexandre Michel da Silva Carrillo
Orientador: Dr. Paulo José Pereira

QUESTIONÁRIO DE DIAGNÓSTICO

Este questionário faz parte de uma proposta de investigação referente a minha dissertação de mestrado, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). O mesmo tem como objetivo a coleta de informações sobre o processo de ensino-aprendizagem de matemática utilizando contextualização com a música. Esperamos que os resultados da mesma subsidiem o planejamento de novas práticas pedagógicas que possibilitem melhores resultados para o ensino da matemática na Educação Básica. Nesse sentido, a sua colaboração, respondendo este questionário, será de grande valia para o sucesso desta pesquisa. Informamos que suas respostas serão utilizadas exclusivamente para os fins da pesquisa e que os dados do colaborador serão mantidos no mais absoluto sigilo.

1- Qual o ano você estuda?

( ) 1º Ano ( ) 2º Ano ( ) 3º Ano

2- O que levou você a se inscrever nesta oficina?

( ) Tenho interesse em conhecimentos sobre música
( ) Tenho interesse em conhecimentos sobre matemática
( ) Fiquei curioso(a) em saber qual a relação entre matemática e música
( ) Não tenho interesse em nenhum dos temas (outros motivos)

3- Qual seu nível de conhecimento sobre teoria musical?

( ) Não conheço nada
( ) Não toco instrumento musical, mas conheço um pouco
( ) Não toco instrumento musical, mas conheço bastante
( ) Toco um instrumento musical e conheço um pouco
( ) Toco um instrumento musical e conheço bastante

4- Qual o seu nível de interesse em relação à música?

( ) Não gosto
( ) Gosto somente de ouvir
( ) Gostaria de aprender a tocar um instrumento (ou cantar) por hobby
( ) Gostaria de aprender a tocar um instrumento (ou cantar) para ser um profissional da música
( ) Já toco um instrumento (ou canto) por hobby
( ) Já toco um instrumento (ou canto) profissionalmente

5- Qual o seu nível de interesse por matemática?

( ) Não gosto
( ) Gosto um pouco, mas não consigo entender
( ) Gosto um pouco e consigo entender razoavelmente
( ) Gosto muito, mas não consigo entender
( ) Gosto muito e consigo entender razoavelmente

6- Quais desses assuntos de matemática você acha que tem relação com música? (Pode marcar mais de uma)

( ) Função
( ) Fração
( ) Análise Combinatória
( ) Probabilidade
( ) Estatística
( ) Geometria Espacial
( ) Proporcionalidade
( ) Matrizes
( ) Geometria Analítica

7- O fato de um assunto de matemática estar relacionado à música faria com você aumentasse o interesse por ele?

( ) Nada ( ) Um pouco ( ) Bastante ( ) Muito

8- Em seus estudos de matemática, seja na escola ou por interesse próprio, você já estudou sobre Probabilidade?

( ) Sim
( ) Não

9- Qual o seu nível de conhecimento sobre a Teoria das Probabilidades?

( ) Nunca ouvi falar
( ) Já ouvi falar, mas não estudei ainda
( ) Estudei no ensino médio, mas não entendi nada
( ) Estudei no ensino médio e compreendi pouco
( ) Estudei no ensino médio e compreendi os principais conceitos
( ) Não estudei no ensino médio, mas estudei em outras situações

10- Você dá permissão para uso das informações coletadas neste questionário e durante a oficina, bem como imagens e áudios para utilização exclusiva na pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ofertado pela UNIVASF, realizado pelo Professor Alexandre Michel da Silva Carrillo e o orientado pelo Prof. Dr. Paulo José Pereira?

( ) Sim
( ) Não

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF
Mestrando: Alexandre Michel da Silva Carrillo
Orientador: Dr. Paulo José Pereira

QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO

1- Numa escala de 0 a 5, onde o 0 (zero) indica NÃO GOSTEI DE NADA e o 5 indica GOSTEI MUITO, avalie a sua satisfação quanto as atividades realizadas na oficina?

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

2- Numa escala de 0 a 5, onde o 0 (zero) indica NÃO ENTENDI NADA e o 5 indica COMPREENDI TUDO, avalie a sua compreensão dos conceitos da teoria musical apresentados nas atividades realizadas na oficina?

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

3- Numa escala de 0 a 5, onde o 0 (zero) indica NÃO ME MOTIVOU EM NADA e o 5 indica ME MOTIVOU MUITO, avalie como as atividades realizadas na oficina lhe motivaram para o estudo de probabilidade?

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

4- Numa escala de 0 a 5, onde o 0 (zero) indica NÃO ENTENDI NADA e o 5 indica COMPREENDI TUDO, avalie a sua compreensão dos conceitos da teoria das probabilidades apresentados nas atividades realizadas na oficina?

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

5- Considere a sequência de notas da melodia da música “Parabéns pra você” a seguir:

DÓ-DÓ-RÉ-DÓ-FÁ-MI

DÓ-DÓ-RÉ-DÓ-SOL-FÁ

LÁ-LÁ-DÓ-LÁ-FÁ-MI-RÉ

LÁ-LÁ-SOL-FÁ-SOL-FÁ

Aplicando os conhecimentos obtidos durante a oficina, e sabendo que após a última nota da sequência retorna-se a nota inicial, você seria capaz de:

a) Responder a seguinte questão:

“Se um músico deseja tocar todas as notas da sequência apresentada acima, porém iniciando de uma nota aleatória qualquer, qual a probabilidade de o músico iniciar na nota DÓ?”

( ) Sim

( ) Não

Se sua resposta foi “Sim” indique a resposta da questão: ______

b) Determinar probabilidade de, escolhendo uma nota RÉ da sequência, ela ter a nota DÓ como antecessora?

( ) Sim

( ) Não

Se sua resposta foi “Sim” indique a probabilidade encontrada: ______

c) Preencher a seguinte tabela com as respectivas probabilidades de transição das notas para esta melodia?

( ) Sim

( ) Não

	DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ
DÓ						
RÉ						
MI						
FÁ						
SOL						
LÁ						

Se sua resposta foi “Sim” preencha a tabela.

Gabarito da questão 5:

a) **7/25**

b) **2/3**

c)

	DO	RE	MI	FÁ	SOL	LÁ
DO	**2/7**	**2/7**	**0**	**1/7**	**1/7**	**1/7**
RE	**2/3**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1/3**
MI	**1/2**	**1/2**	**0**	**0**	**0**	**0**
FA	**1/5**	**0**	**2/5**	**0**	**1/5**	**1/5**
SOL	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
LÁ	**1/5**	**0**	**0**	**1/5**	**1/5**	**2/5**