



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cristian Reis da Luz

**Bilhares em curvas constituídas
por arcos elípticos**

Ouro Preto

2019

CRISTIAN REIS DA LUZ

Bilhares em curvas constituídas por arcos elípticos

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto-MG, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira
Co-Orientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza.

**Ouro Preto
2019**

CRISTIAN REIS DA LUZ

Bilhares em curvas constituídas por arcos elípticos

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto-MG, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Data de apresentação: 25 / 04 /2019

Resultado: APROVADO

Banca Examinadora:

Nome do professor orientador	Prof. Dr.	Geraldo C. G. Ferreira
nome do professor co-orientador	Prof. Dr.	Gil Fidelix de Souza
nome do professor da banca	Prof. Dr.	José Eloy Ottoni
nome do professor da banca	Prof. Dr.	Juliano Soares Amaral Dias

DEDICATÓRIA: Dedico este trabalho a todos que incentivaram nesta etapa de minha vida, de forma especial minha esposa, Lorraine, por entender as ausências, meus filhos Henrique e Helena que apesar da inocência e sem compreender, tiveram que ficar longe do colo, à minha família que tanto amo: pais, irmãos, sobrinho. A todos vocês: Obrigado por fazer parte da minha história.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida.

À minha esposa Lorraine Kelly, ao meu filho Henrique Reis e à minha filha Helena. Meus amores, minha inspiração!

Aos meus pais Marilza Bigão e José Reis, aos meus irmãos Ruan e Camila, minha cunhada Aline, meu cunhado Juninho, que sempre me incentivam e compreendem minhas ausências.

Também agradeço pela total colaboração dos professores Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira e Dr. Gil Fidelix de Souza que não mediram esforços para a realização deste trabalho.

Aos colegas de sala, que em um incentivo mútuo e uma colaboração sempre presente, me impulsionaram para chegar aqui.

Com todo carinho e respeito digo a todos vocês o meu muito OBRIGADO!

Resumo

Elipses são curvas que aparecem com frequência no nosso dia-a-dia. Por exemplo, quando você quer cortar fatias não-circulares de um salame, é comum que utilize certa inclinação na faca em relação ao plano; as fatias obtidas usando esse procedimento têm a forma de uma elipse. Por outro lado, se quiser observar a órbita dos planetas ao redor do Sol, notará, como o fez J. Kepler no início do século 17, que eles se movem segundo elipses com o Sol localizado em um dos focos.

Entre as inúmeras aplicações da elipse, talvez a mais curiosa de todas se deva a Lewis Carroll, autor de "Alice no País das Maravilhas", que imaginou uma mesa de bilhar cuja parede lateral fosse elíptica, e não retangular. Na mesa de Carroll, colocando uma bola em um dos focos da elipse e atirando-a para uma direção qualquer com força suficiente, ela sempre irá acertar uma bola colocada no outro foco da mesa.

Em geral, se supormos que a bola se mova sem atrito mostra-se que a trajetória percorrida pela bola pode ser classificada em três tipos: Sempre passa pelos focos, sempre passa exterior aos segmentos unindo os focos, sempre passa interior ao segmento unindo os focos. Fixado um polígono convexo de K lados, esticamos um laço de comprimento L ao redor deste até um ponto P e movemos este ponto ao redor do polígono. Este procedimento é denominado "construção do jardineiro", ou "método das cordas". Obviamente a curva obtida por essa construção será constituída por arcos de elipse.

Estudaremos algumas propriedades destas curvas em função do parâmetro L e mostraremos que também neste caso a influência dos focos não pode ser ignorada e nos permitirá classificar as trajetórias em três tipos, sendo estas: Focais, exterior e interior.

Palavras-chave: Seções, Cônicas, Bilhar Elíptica, GeoGebra, construções, propriedades das cônicas.

Abstract

Ellipses are curves that appear frequently in our days. For example, when you want to cut non-circular slices of a salami, it's common to use a certain inclination in the knife in relation to the plane; the slices obtained using this procedure have the shape of an ellipse. On the other side, if you want to observe the orbit of the planets around the Sun, you'll notice, as did J. Kepler at the beginning 17th century, they move by ellipses with the Sun located in one of the outbreaks.

Among the many applications of the ellipse, perhaps the most curious of all is Lewis Carroll, author of "Alice in Wonderland," who imagined a billiard table whose side wall was elliptical rather than rectangular. At Carroll's table, placing a ball in one of the foci of the ellipse and throwing it in any direction with sufficient force, it will always hit a ball placed in the other focus of the table.

In general, supposing that the ball moves without friction, it's shown that the trajectory traversed by the ball can be classified into three types: Always passes through the foci, always passes outside the segments joining the foci, always passes inside the segment joining the foci. Fixed a convex polygon of K sides, we stretch a loop of length L around this to a point P and move this point around the polygon. This procedure is called "Construction of the gardener", or "method of the ropes". Obviously the curve obtained by this construction will consist of ellipse arcs.

We will study some properties of these curves in function of the parameter L and we will show also in this case the influence of the foci cannot be ignored and will allow us to classify the trajectories into three types, these being: Focal, exterior and interior.

Keywords: Sections, Conics, Elliptical Billiards, GeoGebra, Constructions, Properties of Conics.

Conteúdo

1 Caracterização de uma elipse	11
1.1 Terminologia	13
1.1.1 Definições iniciais	13
1.2 Forma canônica da elipse	14
1.3 Translação dos eixos coordenados	17
1.4 Forma canônica da elipse transladada	18
2 Equação geral do segundo grau em \mathbb{R}^2	21
2.1 Rotação dos eixos coordenados	21
2.2 Forma Quadrática	24
2.3 Equação geral do segundo grau em \mathbb{R}^2	29
3 Princípio de reflexão das elipses	34
3.1 Reta tangente a uma elipse	34
3.2 Princípio de reflexão das elipses	37
3.3 Reta normal a elipse em um ponto	41
4 Bilhar Elíptico	43
4.1 Bilhar Elíptico	44
4.1.1 A bola passa sobre um dos focos	44
4.1.2 As reflexões não intersectam os focos F_1 e F_2	47
5 Curvas constituídas por arcos de elipses	56
5.1 Construção do Jardineiro: Curvas constituídas por arcos de elipses a partir de um hexágono regular	57
5.2 Família de Curvas especiais	57
5.2.1 Processo para construção de curvas por um polígono regular de n lados	59
5.2.2 Um exemplo de bilhar hexagonal	71
5.2.3 Algumas propriedades análogas do bilhar elíptico e do bilhar constituído por arcos de elipses a partir de um hexágono regular pela construção de cordas	75
6 Conclusão	86
Referências Bibliográficas	88

Lista de Figuras

1.1	Interseção de um cone e um plano: Elipse	11
1.2	Lugar geométrico	12
1.3	Experiência prática	12
1.4	Construção do Jardineiro	13
1.5	Elipse: seus vértices, focos e centro	13
1.6	Forma canônica 1 de uma elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$	15
1.7	Forma canônica 2 de uma elipse: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, a > b$	15
1.8	Elipse degenerada - Interseção do cone com um plano é um ponto.	17
1.9	Translação dos eixos coordenados	18
1.10	Elipse trasladada - eixo maior paralelo ao eixo OX	20
1.11	Elipse trasladada - eixo maior paralelo ao eixo OY	20
2.1	Ângulo θ entre os eixos OX e $O\bar{X}$	21
2.2	$P = (x, y)_{OXY} = (\bar{x}, \bar{y})_{O\bar{X}\bar{Y}}$	22
2.3	Sistemas ortogonais OXY e $O\bar{X}\bar{Y}$	29
3.1	P é o ponto de tangência de r e a elipse ε	36
3.2	Princípio de Reflexão das Elipses	37
3.3	Princípio de Reflexão das Elipses	38
3.4	Princípio de Reflexão das Elipses	40
3.5	Reta normal a elipse em um ponto	42
4.1	Ângulo de reflexão é congruente ao ângulo de incidência	43
4.2	Bilhar elíptico - bola passando pelos focos	44
4.3	Trajatória que converge para o eixo maior da elipse	45
4.4	Trajatória que converge para o eixo maior da elipse	45
4.5	Trajatória que converge para o eixo maior da elipse	46
4.6	Bissetriz de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e de $\widehat{F_1P_1F_2}$	47
4.7	Ângulos formados pela Bissetriz de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e ângulos de incidência e reflexão da trajetória de uma bola de bilhar	48
4.8	Ângulos $\widehat{P_0P_1F_1}$ e $\widehat{F_2P_1P_2}$	48
4.9	Ângulos $\widehat{P_0P_1F_1}$ e $\widehat{F_2P_1P_2}$	48
4.10	$\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ intersectam $\overline{F_1F_2}$ - Bissetrizes $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ coincidem.	49
4.11	$\overline{P_0P_1}$ intersecta $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{P_1P_2}$ não intersecta - Bissetrizes $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ não podem coincidir.	50
4.12	$\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_2P_3}$ não intersectam $\overline{F_1F_2}$ - Bissetrizes $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ coincidem.	50
4.13	$\overline{P_0P_1}$ não intersecta $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{P_1P_2}$ intersecta - Bissetrizes $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ não podem coincidir.	50

4.14 Nova cáustica: elipse - bola passando fora do segmento que une os focos.- Imagem retirada de [5]	51
4.15 Bilhar elíptico - bola passando fora do segmento que une os focos	51
4.16 Cáustica gerada: elipse	52
4.17 Bilhar elíptico - bola passando nos vértices	53
4.18 Nova cáustica: hipérbole - bola passando entre o segmento que une os focos. - Imagem retirada de [5]	53
4.19 Bilhar elíptico - bola passando entre o segmento que une os focos.	54
4.20 Cáustica gerada: hipérbole	55
5.1 Construção do Jardineiro	56
5.2 Construção do Jardineiro para obter uma curva constituída por arcos de elipses a partir de um hexágono regular.	57
5.3 Polígonos regulares gerando novos polígonos regulares "estrelados".	58
5.4 Construção da curva de cordas de n lados e uma curva de cordas construído por um eneágono	59
5.5 Construção de curva de cordas de n lados	64
5.6 Bilhar pela <i>Construção do Jardineiro</i> construído por um hexágono regular	71
5.7 Bilhar de corda hexagonal - arco $\widehat{24}$	72
5.8 Bilhar de corda hexagonal - arco $\widehat{13}$	72
5.9 Interseção dos arcos $\widehat{13}$ e $\widehat{24}$	73
5.10 Trajetória do bilhar em uma linha de apoio de K	77
5.11 Trajetória do bilhar cruzando K	78
5.12 Trajetória do bilhar não cruzando K	78
5.13 Trajetória do bilhar em uma linha de K	79
5.14 Bilhar hexagonal	79
5.15 Trajetória aproximada do triângulo $S_1S_5S_3$	81
5.16 Trajetória que se torna indistinguível ao traçado do triângulo $S_1S_5S_3$ e as sequências $\{s_i\}$; $\{\rho_i\}$ e $\{\alpha_i\}$	82

1 Caracterização de uma elipse

Abrimos este capítulo definindo uma elipse como o conjunto dos pontos P no plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante, ou seja, se $dist(F_1, F_2) = 2c$ então a elipse é o conjunto dos pontos P tais que

$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 2a,$$

em que $a > c$. [13]

Em geometria, uma elipse é um tipo de seção cônica: se uma superfície cônica é cortada por um plano que não passa pela base e que não intercepte as duas folhas do cone, a interseção entre o cone e o plano é uma elipse.

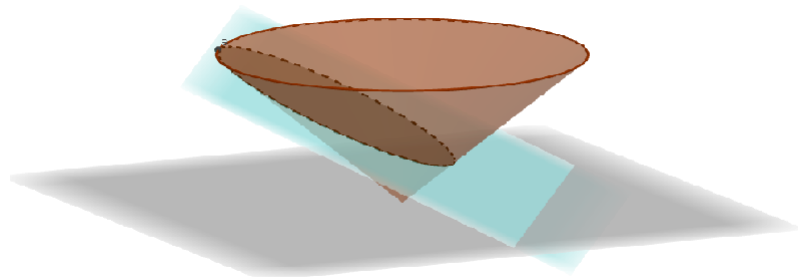


Figura 1.1: Interseção de um cone e um plano: Elipse

Além disso, podemos usufruir do conceito de *lugar geométrico* (L.G.) a partir da seguinte definição:

Definição 1.0.1. Dada uma propriedade \mathcal{P} relativa a pontos do plano, o **lugar geométrico** dos pontos que possuem a propriedade \mathcal{P} é o subconjunto \mathcal{L} do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

1. Todo ponto de \mathcal{L} possui a propriedade \mathcal{P} .
2. Todo ponto do plano que possui a propriedade \mathcal{P} pertence a \mathcal{L} .

Em outras palavras \mathcal{L} é o Lugar Geométrico da propriedade \mathcal{P} se \mathcal{L} for constituído exatamente pelos pontos do plano que têm a propriedade \mathcal{P} , nem mais nem menos. [3]

Existem vários lugares geométricos, temos como exemplo: a circunferência, que é um caso particular da elipse, a mediatriz, a bissetriz, a paralela e o arco-capaz.

Neste sentido, sendo dois pontos fixos no plano, F_1 e F_2 , a elipse é o Lugar Geométrico dos pontos P no plano cujas distâncias somadas de P a F_1 e de P a F_2 é sempre constante.

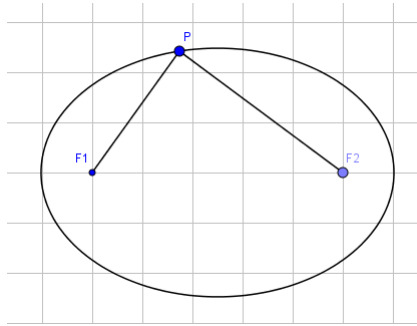


Figura 1.2: Lugar geométrico

Para colaborar, imagine que você amarre cada ponta de um barbante resistente em dois pregos; fixe completamente os dois pregos em locais distintos de numa superfície. Depois com a ponta do lápis estique o próprio barbante com a ponta do lápis e desenhe na superfície. A medida que você vai percorrendo, o contorno gerado é uma Elipse.

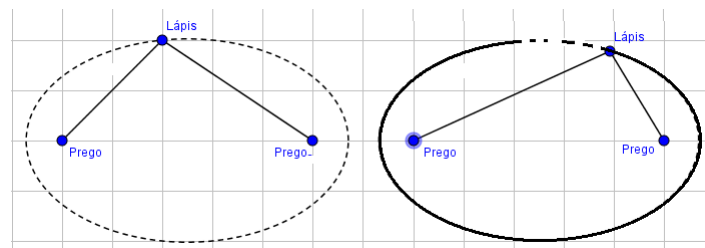


Figura 1.3: Experiência prática

O processo apresentado anteriormente é exatamente o mesmo que chamamos da *Construção do Jardineiro* para elaboração de uma elipse. Essa construção consiste em afixar duas hastes verticais no chão, a cada uma das hastes atar as extremidades de uma corda com comprimento superior à distância entre as hastes e com um prego afixado a uma madeira e encostado à corda ir traçando a elipse no chão, mantendo sempre a corda esticada.

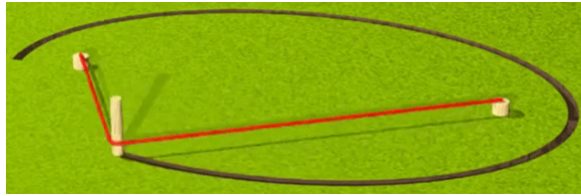


Figura 1.4: Construção do Jardineiro

Imagem retirada de <http://www.atractor.pt/geral/temp/ConstrucoesConicas.html>

De acordo com a definição de elipse os pontos P , F_1 e F_2 devem manter sempre a seguinte relação: $PF_1 + PF_2 = \text{constante positiva}$.

PF_1 é a distância do ponto P a F_1 e PF_2 é a distância do ponto P a F_2 . Por conveniência chamaremos $PF_1 + PF_2 = 2a$ com $a > 0$.

A seguir serão apresentadas terminologias para uma elipse.

1.1 Terminologia

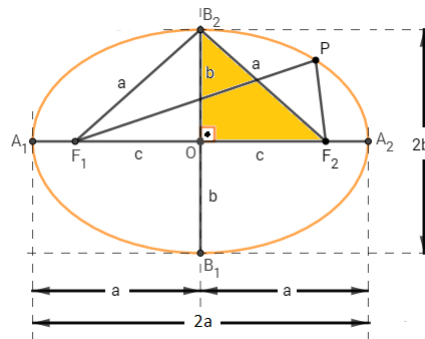


Figura 1.5: Elipse: seus vértices, focos e centro

1.1.1 Definições iniciais

Ao longo desse estudo usaremos de forma natural alguns termos utilizando-se das definições abaixo:

Definição 1.1.1.

1. Os pontos F_1 e F_2 são focos da elipse.
2. A interseção da elipse com a reta que contém os focos consiste exatamente em dois pontos, A_1 e A_2 , chamados de vértices da elipse.

3. O segmento $\overline{A_1A_2}$ de comprimento $2a$ e que contém os focos é o eixo maior da elipse.
4. O centro O da elipse é o ponto médio do eixo maior $\overline{A_1A_2}$ e também do segmento $\overline{F_1F_2}$.
5. O segmento $\overline{F_1F_2}$ é a distância focal de comprimento $2c$.
6. O segmento perpendicular ao eixo maior e que passa pelo centro O é o eixo menor da elipse.
7. O eixo menor da elipse é o segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$.
8. A elipse intersecta o eixo menor em exatamente dois pontos, B_1 e B_2 , denominados vértices da elipse sobre o eixo menor.
9. O número a é a distância do centro aos vértices sobre o eixo maior, b é a distância do centro aos vértices sobre o eixo menor e c é a distância do centro aos focos.
10. O número $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade da elipse, sendo que $0 \leq e < 1$.

Assim, podemos definir uma elipse ε de focos F_1 e F_2 como o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$, em suma

$$\varepsilon = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

Observação 1.1.1. Como o triângulo $F_1B_1F_2$ é isósceles e pela definição da elipse $B_2F_1 = B_2F_2 = a$ e ainda o triângulo F_2OB_2 é retângulo em O , temos pelo teorema de Pitágoras que $b^2 = a^2 - c^2$.

Utilizaremos nas próximas seções e capítulos da terminologia e definições apresentadas anteriormente. Iniciaremos exibindo a forma canônica da elipse.

1.2 Forma canônica da elipse

Nesta seção estudaremos a equação chamada forma canônica da elipse, ou seja, a forma mais simples de escrevê-la.

A elipse em sua forma canônica é caracterizada por estar centrada na origem do plano cartesiano, sendo os eixos desse plano coincidentes com o eixo maior e o eixo menor da elipse.

Proposição 1.2.1. Formas canônicas da elipse

Dizemos que a equação da elipse está na forma canônica se:

1. a equação da elipse cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

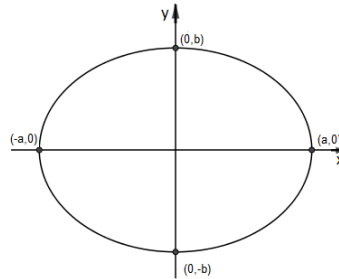


Figura 1.6: Forma canônica 1 de uma elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$

2. ou se a equação da elipse cujos focos são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ é

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

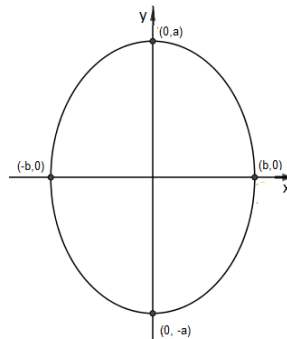


Figura 1.7: Forma canônica 2 de uma elipse: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, a > b$

Demonstração. Em ambos os casos $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Provando o item 1 e trocando x por y obtemos o resultado do item 2, portanto basta provar o item 1 de nossa proposição.

Vamos provar que se $P = (x, y)$ pertence a elipse, então ele satisfaz a proposição e deixamos para o leitor, a demonstração da recíproca.

A elipse é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$$

ou seja,

$$F_1P + F_2P = 2a$$

Que neste caso é

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\end{aligned}$$

Como ambos os lados da igualdade são maiores ou iguais a zero, podemos elevar ambos lados ao quadrado e teremos:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

Simplificando o resultado, obtemos:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Como $a^2 > cx$, elevamos novamente ambos lados da igualdade ao quadrado e simplificando, obtemos:

$$\begin{aligned}a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)\end{aligned}$$

Como $a > c$, então $a^2 - c^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ e dividir a equação anterior por $a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$, obtendo assim:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

□

De forma geral, uma cônica no plano é definida como o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ que satisfazem a equação geral do 2º grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

em que A, B, C, D, E e F são números reais, com A, B e C não simultaneamente nulos. Esta equação geral será melhor explicitada no capítulo 2 deste estudo, mas adiantamos que a elipse é considerada uma **cônica não degenerada**.

Uma cônica é considerada degenerada quando a equação geral $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se decompõe no produto de dois fatores lineares, neste caso, se resumindo a um

ponto, ou uma reta ou ainda um par de retas concorrentes.

Lembrando que se uma superfície cônica é cortada por um plano que não passa pela base e que não intercepte as duas folhas do cone, a interseção entre o cone e o plano é uma elipse, então a elipse será degenerada, ou seja, um ponto, se esse plano passar pelo vértice do cone.

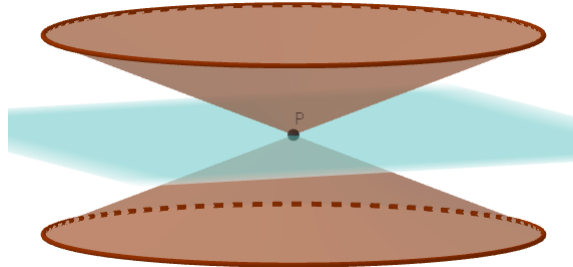


Figura 1.8: Elipse degenerada - Interseção do cone com um plano é um ponto.

Nesta seção tratamos da forma canônica da elipse, ou seja, a elipse caracterizada com o centro na origem do plano cartesiano e seus eixos coincidentes com os eixos do mesmo plano. Na sequência veremos como funciona a translação dos eixos coordenados e posteriormente será apresentada a equação da elipse transladada.

1.3 Translação dos eixos coordenados

Uma translação é um deslocamento de figuras do plano, nos sentidos horizontal e/ou vertical. Em geral, a translação é utilizada para simplificar equações.

Usualmente para uma translação definimos um novo sistema cartesiano de forma que a figura a ser estudada, neste novo sistema, tenha uma equação mais simples. Na prática definimos o novo sistema cartesiano de modo que sua origem coincida com um ponto desejado. No nosso caso, estamos interessados que esse ponto seja o centro de uma elipse.

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais, sendo O a origem desse sistema. Consideremos $\bar{O} = (x_0, y_0)$ um ponto do plano OXY e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ o sistema cujos eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm o mesmo sentido destes eixos, respectivamente e $\bar{O} = (x_0, y_0)$ a origem desse novo sistema ortogonal. Designamos por (\bar{x}, \bar{y}) as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ e por (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY .

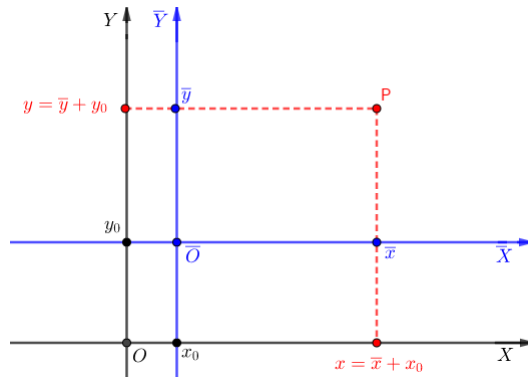


Figura 1.9: Translação dos eixos coordenados

Sabemos que se $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$ são os vetores unitários na direção e sentido, respectivamente, dos eixos OX e OY (e portanto, dos eixos \overline{OX} e \overline{OY}), temos que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \\ \overrightarrow{O'P} &= \bar{x}\vec{e}_1 + \bar{y}\vec{e}_2 \\ \overrightarrow{OO'} &= x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2\end{aligned}$$

Como

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P},$$

Obtemos que:

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2) + (\bar{x}\vec{e}_1 + \bar{y}\vec{e}_2) = (\bar{x} + x_0)\vec{e}_1 + (\bar{y} + y_0)\vec{e}_2.$$

Logo, as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY e $\overline{OX'Y'}$ são relacionadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0 \end{cases}$$

Como mencionado anteriormente, na próxima seção veremos a forma canônica da elipse transladada.

1.4 Forma canônica da elipse transladada

Considerando uma translação dos eixos coordenados, vamos obter a equação de uma elipse ε cujo eixo maior é horizontal ou vertical.

Seja \overline{OXY} o sistema de eixos ortogonais que foi obtido pela translação do sistema OXY , cuja nova origem é $\overline{O} = (x_0, y_0)$.

Mostraremos a forma canônica da elipse com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo OX : Sendo $\overline{O} = (x_0, y_0)$ o centro, $l: y = y_0$ o eixo maior e $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ os focos da elipse, um ponto $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertence à elipse se e somente se

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

ou seja,

$$\Leftrightarrow d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) + d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) = 2a$$

$$\Leftrightarrow d((\bar{x}, \bar{y}), (-c, 0)) + d((\bar{x}, \bar{y}), (c, 0)) = 2a$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{a^2} + \frac{(\bar{y} - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Então, a forma canônica da equação da elipse ε com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo maior paralelo ao eixo OX é:

$$\varepsilon: \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{a^2} + \frac{(\bar{y} - y_0)^2}{b^2} = 1, \text{ onde } b^2 = a^2 - c^2$$

Os elementos desta elipse são:

- eixo maior: $l: y = y_0$;
- eixo menor: $l': x = x_0$;
- focos: $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$;
- vértices sobre o eixo maior: $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$;
- vértices sobre o eixo menor: $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$.

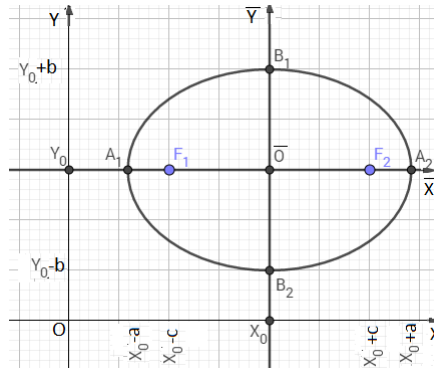


Figura 1.10: Elipse transladada - eixo maior paralelo ao eixo OX

De forma análoga, verifica-se que **a forma canônica da equação da elipse ε com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo maior paralelo ao eixo OY é:**

$$\varepsilon: \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{b^2} + \frac{(\bar{y} - y_0)^2}{a^2} = 1, \text{ onde } b^2 = a^2 - c^2.$$

Os elementos desta elipse são:

- eixo maior: $l: x = x_0$;
- eixo menor: $l': y = y_0$;
- focos: $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c)$;
- vértices sobre o eixo maior: $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$;
- vértices sobre o eixo menor: $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$.

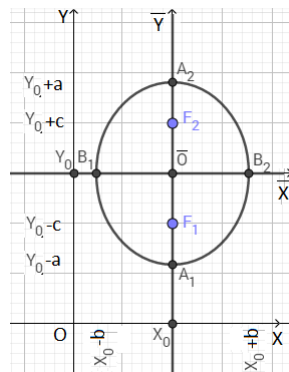


Figura 1.11: Elipse transladada - eixo maior paralelo ao eixo OY

Neste capítulo caracterizamos e definimos uma elipse, mostramos sua forma canônica e fizemos sua translação, além de apresentarmos a *Construção do Jardineiro* para uma elipse. Dois outros resultados importantes serão exibidos no próximo capítulo, a saber: a rotação dos eixos coordenados do plano cartesiano e a equação geral do segundo grau em \mathbb{R}^2 para uma elipse.

2 Equação geral do segundo grau em \mathbb{R}^2

Neste capítulo apresentaremos a equação geral do segundo grau em \mathbb{R}^2 de uma elipse, mas antes, da mesma forma que no capítulo anterior foi explanado sobre translação dos eixos coordenados do plano cartesiano, na próxima seção será exposto sobre a rotação dos eixos coordenados no plano, de um ângulo θ , em torno da origem do sistema. Através de uma rotação podemos fazer com que os eixos da elipse fiquem paralelos aos eixos cartesianos e, desta forma, simplificamos suas equações.

2.1 Rotação dos eixos coordenados

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais. Dado $\theta \in [0, 2\pi)$, seja $O\bar{X}\bar{Y}$ o sistema obtido girando os eixos OX e OY de ângulo θ no sentido positivo (que vai de OX para OY) em torno da origem O . Então:

$$\vec{v}_1 = (\cos \theta, \text{sen } \theta) \quad e$$

$$\vec{v}_2 = (-\text{sen } \theta, \cos \theta)$$

são os vetores unitários na direção e no sentido dos eixos $O\bar{X}$ e $O\bar{Y}$, respectivamente.

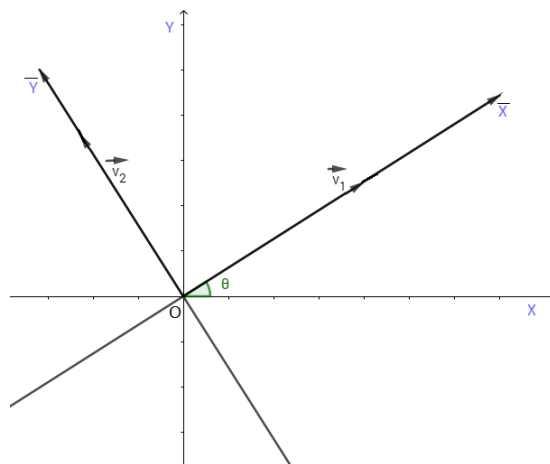


Figura 2.1: Ângulo θ entre os eixos OX e $O\bar{X}$

Considere um ponto P do plano. Como os vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são ortonormais ($\implies \vec{v}_1$ e \vec{v}_2 não são múltiplos), existem números reais \bar{x} e \bar{y} de modo que

$$\vec{OP} = \bar{x}\vec{v}_1 + \bar{y}\vec{v}_2.$$

Consequentemente, (\bar{x}, \bar{y}) são coordenadas do ponto P com respeito ao sistema $O\bar{X}\bar{Y}$, pois:

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\vec{v}_1} \vec{OP} &= \bar{x}\vec{v}_1 & e \\ \text{Proj}_{\vec{v}_2} \vec{OP} &= \bar{y}\vec{v}_2. \end{aligned}$$

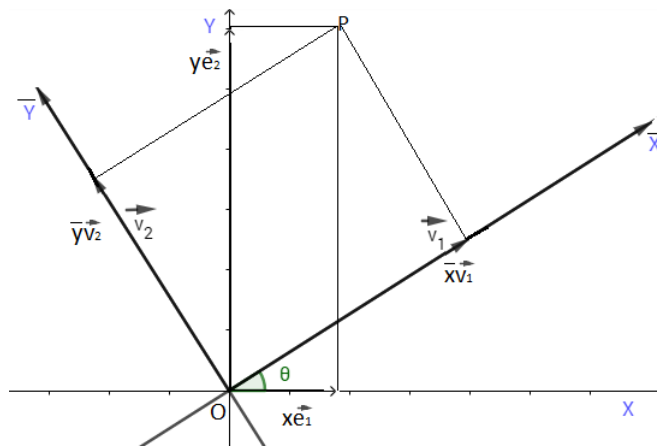


Figura 2.2: $P = (x, y)_{OXY} = (\bar{x}, \bar{y})_{O\bar{X}\bar{Y}}$

Sejam (x, y) as coordenadas do ponto P em relação ao sistema OXY , isto é, $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, onde $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$ são os vetores unitários na mesma direção e no mesmo sentido dos eixos OX e OY , respectivamente.

Então, como $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \bar{x}\vec{v}_1 + \bar{y}\vec{v}_2$, obtemos, fazendo o produto interno¹ de ambos os termos da identidade por \vec{e}_1 , e depois por \vec{e}_2 , que

$$\begin{cases} x = \bar{x}\langle \vec{v}_1, \vec{e}_1 \rangle + \bar{y}\langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle \\ y = \bar{x}\langle \vec{v}_1, \vec{e}_2 \rangle + \bar{y}\langle \vec{v}_2, \vec{e}_2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} x = \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta \\ y = \bar{x}\sin\theta + \bar{y}\cos\theta \end{cases} \quad (2.1)$$

¹Representaremos o produto interno por $\langle \cdot \rangle$ e definiremos o produto interno (ou produto escalar) entre dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{w} = (x_2, y_2)$, como sendo o número:

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

O resultado é um número real ligado ao tamanho de cada um desses vetores \vec{u} e \vec{w} e ao ângulo formado por eles. [13]

Por outro lado, fazendo o produto interno dos termos da identidade $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \bar{x}\vec{v}_1 + \bar{y}\vec{v}_2$ por \vec{v}_1 , e em seguida por \vec{v}_2 , temos que

$$\begin{cases} \bar{x} = x\langle\vec{e}_1, \vec{v}_1\rangle + y\langle\vec{e}_2, \vec{v}_1\rangle \\ \bar{y} = x\langle\vec{e}_1, \vec{v}_2\rangle + y\langle\vec{e}_2, \vec{v}_2\rangle \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{x} = x\cos\theta + y\sin\theta \\ \bar{y} = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \quad (2.2)$$

Os sistemas (2.1) e (2.2) podem ser escritos na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (x, y) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad e \\ (\bar{x}, \bar{y}) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Identificamos que $B^t B = B B^t = I$, onde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade do tipo 2×2 , onde B^t é a **transposta** da matriz B , ou seja, as colunas da matriz B^t são as linhas da matriz B . Então, a matriz de passagem do sistema OXY para o sistema $O\bar{X}\bar{Y}$ tem a propriedade de que sua transposta é também sua inversa. As matrizes com esta propriedade são chamadas **matrizes ortogonais**.

A matriz $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é a **matriz de passagem** das coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) para as coordenadas (x, y) e, por sua vez, $B^t = B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é a **matriz de passagem** das coordenadas (x, y) para as coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) .

Verifique que a primeira e segunda colunas da matriz B são as coordenadas dos vetores \vec{v}_1 e o \vec{v}_2 no sistema OXY , respectivamente, e a primeira e a segunda colunas da matriz B^t são as coordenadas dos vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 no sistema $O\bar{X}\bar{Y}$, respectivamente.

De fato, como $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \bar{x}\vec{v}_1 + \bar{y}\vec{v}_2$, daí, pelas equações (2.1) e (2.2) finalmente temos:

$$\vec{v}_1 = \cos\theta.\vec{e}_1 + \sin\theta.\vec{e}_2, \quad \vec{v}_2 = -\sin\theta.\vec{e}_1 + \cos\theta.\vec{e}_2 \quad (2.3)$$

$$\vec{e}_1 = \cos\theta.\vec{v}_1 - \sin\theta.\vec{v}_2, \quad \vec{e}_2 = \sin\theta.\vec{v}_1 + \cos\theta.\vec{v}_2 \quad (2.4)$$

Finalizamos essa seção depois de tratarmos da rotação dos eixos coordenados no plano cartesiano OXY , de um ângulo θ , em torno da origem do sistema, resultado esse que posteriormente será importante para encontrarmos a equação geral do segundo grau em \mathbb{R}^2 de uma elipse.

2.2 Forma Quadrática

A forma quadrática $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ no sistema de eixos ortogonais OXY , pode ser reescrita nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} em um sistema $O\bar{X}\bar{Y}$ na forma $f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2$, que será demonstrada ao longo desta seção, para tanto iniciamos com um lema:

Lema 2.2.1. Dada uma forma quadrática $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, associamos uma **matriz** a f do tipo 2×2 :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix},$$

em que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \langle \mathcal{A}(x, y), (x, y) \rangle.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(x, y), (x, y) \rangle &= \left\langle \left(Ax + \left(\frac{B}{2} \right) y, \left(\frac{B}{2} \right) x + Cy \right), (x, y) \right\rangle \\ &= Ax^2 + \left(\frac{B}{2} \right) yx + \left(\frac{B}{2} \right) xy + Cy^2 \\ &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 = f(x, y). \end{aligned}$$

□

Uma matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ real do tipo 2×2 é **simétrica** se $a_{12} = a_{21}$. Observe que a matriz de qualquer forma quadrática é simétrica.

Antes de provar o próximo teorema, enunciaremos a seguinte proposição que será útil na demonstração:

Proposição 2.2.1. Sejam $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ uma matriz real do tipo 2×2 e $\mathcal{B}^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$ sua matriz transposta.

Então,

$$\langle \mathcal{B}\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \mathcal{B}^t \vec{v} \rangle,$$

para quaisquer vetores $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (z, w)$ em \mathbb{R}^2 .

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}\vec{u}, \vec{v} \rangle &= \langle (b_{11}x + b_{12}y, b_{21}x + b_{22}y), (z, w) \rangle \\ &= b_{11}xz + b_{12}yz + b_{21}xw + b_{22}yw \\ &= x(b_{11}z + b_{21}w) + y(b_{12}z + b_{22}w) \\ &= \langle (x, y), (b_{11}z + b_{21}w, b_{12}z + b_{22}w) \rangle = \langle \vec{u}, \mathcal{B}^t \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$

□

Também é preciso lembrar que o produto de duas matrizes do tipo 2×2 , $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ e $\mathcal{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$ é a matriz $\mathcal{M}\mathcal{N}$ do tipo 2×2 dada abaixo:

$$\mathcal{M}\mathcal{N} = \begin{pmatrix} m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21} & m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22} \\ m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21} & m_{21}n_{12} + m_{22}n_{22} \end{pmatrix}.$$

Assim, o ij -ésimo elemento da matriz produto $\mathcal{M}\mathcal{N}$ é o produto interno do i -ésimo vetor linha, (m_{i1}, m_{i2}) , da matriz \mathcal{M} pelo j -ésimo vetor coluna, (n_{1j}, n_{2j}) , da matriz \mathcal{N} .

Observação 2.2.1. Como é fácil verificar, o produto de matrizes é associativo, isto é, $(\mathcal{M}\mathcal{N})\mathcal{Q} = \mathcal{M}(\mathcal{N}\mathcal{Q})$, quaisquer que sejam as matrizes \mathcal{M} , \mathcal{N} e \mathcal{Q} do tipo 2×2 .

Se $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ e $\mathcal{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$ são duas matrizes do tipo 2×2 e $\vec{u} = (x, y)$ é um vetor, então

$$\mathcal{M}\mathcal{N}(x, y) = \mathcal{M}(\mathcal{N}(x, y)).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\mathcal{N}(x,y)) &= \\
&= \mathcal{M}(n_{11}x + n_{12}y, n_{21}x + n_{22}y) \\
&= (m_{11}(n_{11}x + n_{12}y) + m_{12}(n_{21}x + n_{22}y), (m_{21}(n_{11}x + n_{12}y) + m_{22}(n_{21}x + n_{22}y))) \\
&= ((m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21})x + (m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22})y, (m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21})x + (m_{21}n_{12} + m_{22}n_{22})y) \\
&= (\mathcal{M}\mathcal{N})(x,y).
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.1. Seja $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}$ uma matriz simétrica real do tipo 2×2 .

1. As raízes λ_1 e λ_2 do polinômio característico² de \mathcal{A} são reais. Isto é, a matriz \mathcal{A} tem dois autovalores λ_1 e λ_2 , que têm **multiplicidade um** se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, **multiplicidade dois**, se $\lambda_1 = \lambda_2$.
2. Existe um par de autovalores \vec{u}_1 e \vec{u}_2 **ortonormais** relativos aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente.
3. Se $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ é a matriz do tipo 2×2 cuja primeira coluna é formada pelas coordenadas do vetor $\vec{u}_1 = (a_1, b_1)$ e a segunda, pelas coordenadas do vetor $\vec{u}_2 = (a_2, b_2)$, então

$$\mathcal{B}^t \mathcal{A} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Demonstração. 1. O polinômio característico da matriz \mathcal{A} é

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - A & \frac{-B}{2} \\ \frac{-B}{2} & \lambda - C \end{pmatrix} = (\lambda - A)(\lambda - C) - \frac{B^2}{4} \\
&= \lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - \frac{B^2}{4}.
\end{aligned}$$

²Definimos o Polinômio característico de uma matriz $A_{n \times n}$ como o polinômio dado por $\det[\lambda I - A]$ em que \det é o determinante e I é a matriz identidade $n \times n$. [13]

Como o discriminante da equação $p(\lambda) = 0$,

$$\begin{aligned}\Delta &= (A+C)^2 - 4\left(AC - \frac{B^2}{4}\right) = A^2 + 2AC + C^2 - 4AC + B^2 \\ &= (A-C)^2 + B^2,\end{aligned}$$

é não negativo, suas raízes λ_1 e λ_2 são reais.

2. Se $\Delta = 0$, temos que $A = C$ e $B = 0$ e portanto $\lambda = A = C$ é a única raiz de $p(\lambda) = 0$.

Neste caso, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ e $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ são autovetores ortonormais relativos ao autovalor λ de multiplicidade dois.

Se $\Delta > 0$, a equação $p(\lambda)$ tem duas raízes reais λ_1 e λ_2 distintas. Sejam \vec{u}_1 e \vec{u}_2 vetores não nulos tais que $\mathcal{A}\vec{u}_1 = \lambda_1\vec{u}_1$ e $\mathcal{A}\vec{u}_2 = \lambda_2\vec{u}_2$, isto é, \vec{u}_1 e \vec{u}_2 são autovetores não nulos correspondentes aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente. Podemos supor, que \vec{u}_1 e \vec{u}_2 são vetores unitários (isto é, $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$). Além disso, o vetor \vec{u}_1 é ortogonal ao vetor \vec{u}_2 . De fato, pela proposição 2.2.1,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle &= \langle \vec{u}_1, \mathcal{A}\vec{u}_2 \rangle \implies \langle \lambda_1\vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \lambda_2\vec{u}_2 \rangle \\ &\implies \lambda_1\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \lambda_2\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle \\ &\implies (\lambda_1 - \lambda_2)\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2) \\ &\implies \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0.\end{aligned}$$

3. Como

$$\mathcal{A}\vec{u}_1 = \left(Aa_1 + \frac{B}{2}b_1, \frac{B}{2}a_1 + Cb_1 \right) = (\lambda_1 a_1, \lambda_1 b_1)$$

e

$$\mathcal{A}\vec{u}_2 = \left(Aa_2 + \frac{B}{2}b_2, \frac{B}{2}a_2 + Cb_2 \right) = (\lambda_2 a_2, \lambda_2 b_2),$$

segue que

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 \end{pmatrix},$$

onde $\vec{u}_1 = (a_1, b_1)$ e $\vec{u}_2 = (a_2, b_2)$. E, sendo $\|\vec{u}_1\|^2 = a_1^2 + b_1^2 = 1$, $\|\vec{u}_2\|^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$ e $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$, obtemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^t \mathcal{A} \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1(a_1^2 + b_1^2) & \lambda_2(a_1 a_2 + b_1 b_2) \\ \lambda_1(a_1 a_2 + b_1 b_2) & \lambda_2(a_2^2 + b_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Observação 2.2.2. Note que $B = 0 \iff \vec{e}_1 = (1, 0)$ (ou $\vec{e}_2 = (0, 1)$) é um autovetor da matriz \mathcal{A} . Neste caso, A e C são os autovalores e $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ são autovetores relativos aos autovalores A e C da matriz \mathcal{A} , respectivamente.

Seja $\theta \in [0, 2\pi)$ o ângulo que o vetor \vec{u}_1 faz com o eixo OX no sentido positivo, isto é, $\vec{u}_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$. Tomemos $\vec{u}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$, obtido de \vec{u}_1 por uma rotação positiva de $\frac{\pi}{2}$.

Seja $O\bar{X}\bar{Y}$ o sistema cujos eixos $O\bar{X}$ e $O\bar{Y}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , respectivamente.

Assim, na seção 2.0.1, verificamos que

$$(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix},$$

então a forma quadrática $f(x, y) = \langle \mathcal{A}(x, y), (x, y) \rangle$, nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} do sistema $O\bar{X}\bar{Y}$, é dada por:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \langle \mathcal{A}(\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y})), \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y}) \rangle.$$

Sabendo, pela observação 2.2.1, que

$$(\mathcal{B}^t \mathcal{A} \mathcal{B})(x, y) = \mathcal{B}^t(\mathcal{A} \mathcal{B}(x, y)) = \mathcal{B}^t(\mathcal{A}(\mathcal{B}(x, y))),$$

concluimos, pela Proposição 2.2.1 e pelo Teorema 2.2.1 que

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= \langle \mathcal{B}^t(\mathcal{A}(\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y}))), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle \\ &= \langle (\mathcal{B}^t \mathcal{A} \mathcal{B})(\bar{x}, \bar{y}), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle \\ &= \langle (\lambda_1 \bar{x}, \lambda_2 \bar{y}), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2. \end{aligned}$$

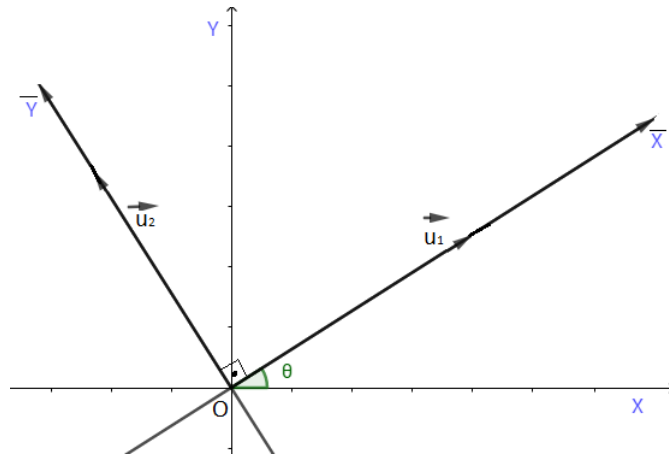


Figura 2.3: Sistemas ortogonais OXY e $O\bar{X}\bar{Y}$

Finalmente apresentaremos na próxima seção a equação geral do segundo grau em \mathbb{R}^2 e quando que ela representa uma elipse.

2.3 Equação geral do segundo grau em \mathbb{R}^2

Nas variáveis x e y , vamos considerar a equação geral do segundo grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

A equação acima é da curva de nível zero da função quadrática

$$\begin{aligned} f(x,y) &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \\ &= \langle \mathcal{A}(x,y), (x,y) \rangle + \langle (D,E), (x,y) \rangle + F. \end{aligned}$$

O sistema $O\bar{X}\bar{Y}$ de eixos ortogonais cujos eixos $O\bar{X}$ e $O\bar{Y}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido dos autovetores \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , respectivamente relativos aos autovalores, λ_1 e λ_2 da matriz

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}.$$

Pela observação 2.2, temos que a função quadrática f , nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} , assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \langle (D, E), (\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{y})) \rangle + F \\ \implies f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \langle \mathcal{B}'(D, E), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle + F \\ \implies f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + F, \end{aligned}$$

onde $\bar{D} = \langle (D, E), \vec{u}_1 \rangle$ e $\bar{E} = \langle (D, E), \vec{u}_2 \rangle$, isto é,

$$(\bar{D}, \bar{E}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}.$$

A proposição a seguir nos mostra, dada uma equação quadrática, quando que ela representará uma elipse.

Proposição 2.3.1. *Se os coeficientes A e C da equação quadrática $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ têm o mesmo sinal, então a equação representa uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados ou uma elipse degenerada, ou seja, representa um ponto ou o conjunto vazio.*

Demonstração. Dividindo $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ por AC , temos:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = -\frac{F}{AC}.$$

Ao completarmos os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} &= -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2}. \\ \implies \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} &= \frac{C^2D^2 + ACE^2 - 4AC^2F}{4A^2C^3} = \frac{M}{4A^2C^3} \end{aligned}$$

onde $M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AC^2F$.

- Se $M = 0$, então a equação representa o ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, pois A e C têm o mesmo sinal.
- Se $M \neq 0$, podemos escrever a equação na forma:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4ACC^2}} = 1.$$

- Se $M > 0$, como $AC > 0$, a equação anterior representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados e centro no ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$.
- Se $M < 0$, como $AC > 0$, a equação representa o conjunto vazio, uma vez que $\frac{M}{4A^2C^2} < 0$ e $\frac{M}{4ACC^2} < 0$.

□

Pela proposição 2.3.1, a equação $\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + F = 0$ é a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} e representa uma elipse ou uma elipse degenerada se $\lambda_1\lambda_2 > 0$.

Os eixos $O\bar{X}$ e $O\bar{Y}$ são os eixos principais da elipse representada pela equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Estes eixos são paralelos ao eixo maior e ao eixo menor da cônica.

O número real $I = B^2 - 4AC$, conhecido como **indicador** da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, estabelece se a equação representa uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, degeneradas ou não, antes de reduzirmos a equação à sua forma canônica $\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + F = 0$.

De fato, como $\det \mathcal{A} = \det \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} = AC - \frac{B^2}{4}$, então $I = -4\det(\mathcal{A})$.

Sabemos ainda que $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B}^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, daí $\det(\mathcal{B}) = \det(\mathcal{B}^t) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Segue que, $I = -4\lambda_1\lambda_2$, pois pelo teorema 2.2.1 e observação 2.3 abaixo,

$$\det(\mathcal{A}) = \det(\mathcal{B}^t)\det(\mathcal{A})\det(\mathcal{B}) = \det(\mathcal{B}^t\mathcal{A}\mathcal{B}) \implies \det(\mathcal{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2.$$

Temos então, que a equação geral $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma elipse, degenerada ou não, se $I < 0$.

Observação 2.3.1. Se $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ e $\mathcal{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$ são duas matrizes reais do tipo 2×2 , então $\det(\mathcal{M}\mathcal{N}) = (\det(\mathcal{M}))(\det(\mathcal{N}))$.

De fato temos,

$$\begin{aligned}
 \det(\mathcal{M}\mathcal{N}) &= (m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21})(m_{21}n_{12} + m_{22}n_{22}) - (m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22})(m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21}) \\
 &= m_{11}m_{21}n_{11}n_{12} + m_{11}m_{22}n_{11}n_{22} + m_{12}m_{21}n_{21}n_{12} + m_{12}m_{22}n_{21}n_{22} \\
 &\quad - m_{11}m_{21}n_{12}n_{11} - m_{11}m_{22}n_{12}n_{21} - m_{12}m_{21}n_{22}n_{11} - m_{12}m_{22}n_{22}n_{21} \\
 &= m_{11}m_{22}n_{11}n_{22} - m_{11}m_{22}n_{12}n_{21} + m_{12}m_{21}n_{21}n_{12} - m_{12}m_{21}n_{22}n_{11} \\
 &= m_{11}m_{22}(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}) - m_{12}m_{21}(n_{22}n_{11} - n_{12}n_{21}) \\
 &= (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}) \\
 &= (\det(\mathcal{M}))(\det(\mathcal{N})).
 \end{aligned}$$

$\implies \det(\mathcal{M}\mathcal{N}Q) = (\det(\mathcal{M}))(\det(\mathcal{N}))(\det(Q))$, quaisquer que sejam as matrizes \mathcal{M} , \mathcal{N} e Q , pois

$$\det(\mathcal{M}\mathcal{N}Q) = (\det(\mathcal{M}\mathcal{N}))(\det(Q)) = (\det(\mathcal{M}))(\det(\mathcal{N}))(\det(Q)).$$

Observação 2.3.2. Dada a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ quando $B \neq 0$, e reordenando os autovalores λ_1 e λ_2 (se necessário), podemos supor que $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Em função dos coeficientes A , B e C da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, vamos mostrar como determinar o ângulo θ de rotação dos eixos coordenados OXY no sentido anti-horário.

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
 \implies &\begin{pmatrix} A \cos \theta + \left(\frac{B}{2}\right) \sin \theta & \left(\frac{B}{2}\right) \cos \theta + C \sin \theta \\ -A \sin \theta + \left(\frac{B}{2}\right) \cos \theta & \left(-\frac{B}{2}\right) \sin \theta + C \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
 \implies &(A \cos \theta + \left(\frac{B}{2}\right) \sin \theta)(-\sin \theta) + \left(\left(\frac{B}{2}\right) \cos \theta + C \sin \theta\right) \cos \theta = 0 \\
 \implies &-A \cos \theta \sin \theta - \left(\frac{B}{2}\right) \sin^2 \theta + \left(\frac{B}{2}\right) \cos^2 \theta + C \sin \theta \cos \theta = 0 \\
 \implies &\left(\frac{B}{2}\right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (C - A) \sin \theta \cos \theta = 0 \\
 \implies &B \cos 2\theta + (C - A) \sin 2\theta = 0
 \end{aligned}$$

Então, quando $B \neq 0$,

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \text{ se } A = C \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C}, \text{ se } A \neq C.$$

sendo $1 + \operatorname{tg}^2(2\theta) = \sec^2(2\theta)$, temos:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta)}}, \text{ se } \frac{B}{A-C} > 0 \\ \cos 2\theta &= -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta)}}, \text{ se } \frac{B}{A-C} < 0 \end{aligned}$$

pois, como $2\theta \in (0, \pi)$, $\cos 2\theta$ e $\operatorname{tg} 2\theta$ têm o mesmo sinal.

Assim, conhecendo $\cos 2\theta$, podemos determinar o ângulo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, por meio das relações trigonométricas:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}.$$

Para exemplificar, considere a equação da elipse $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 - 144 = 0$, em que $A = 31$, $B = 10\sqrt{3}$ e $C = 21$, então $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{10\sqrt{3}}{31-21} = \sqrt{3} > 0$.

Daí $\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta)}} = \frac{1}{2}$ e finalmente:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Então é possível concluir que o ângulo de rotação dos eixos coordenados OXY no sentido anti-horário da elipse $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 - 144 = 0$ é de $\frac{\pi}{6}$.

Com este exemplo finalizamos esse capítulo e trataremos no próximo de um importante resultado sobre o princípio de reflexão das elipses.

3 Princípio de reflexão das elipses

Neste capítulo trataremos de um dos princípios mais importantes das elipses, o da reflexão.

São diversas aplicações para o Princípio da Reflexão, entre elas podemos citar o de salas construídas com paredes no formato de semi-elipsóides, em que um sussuro emitido num foco é audível no outro, mesmo inaudível em outros pontos. São as "galerias de sussuros", encontradas nos EUA, em museus de ciência, em alguns castelos europeus e em paredes na Catedral de Brasília e no aeroporto de Santos Dumond no Rio de Janeiro.

Na área da saúde encontramos utilização nas lanternas odontológicas que são usados refletores elípticos para focar a luz em um ponto específico da arcada dentária do paciente. Uma outra aplicação é a Litotripsia corpórea por ondas de choque, que é um tratamento para destruir pedras nos rins, via um refletor elíptico, sem danos ao tecido vizinho, com um emissor de ondas sonoras de alta intensidade num foco e a pedra no outro, assim evita-se a cirurgia, com recuperação mais rápida do paciente.

Antes mesmo de tratarmos do Princípio de Reflexão das elipses, será necessário, na próxima seção, falarmos da reta tangente a uma elipse e mostrarmos que o ponto de tangência entre a reta e a elipse é único.

3.1 Reta tangente a uma elipse

Reconhecemos que uma reta pode ser exterior, secante ou tangente a uma elipse. A proposição a seguir trata exatamente de uma reta tangente a uma elipse em que o ponto de tangência entre os elementos é único. O resultado nos trará elementos para as próximas seções e capítulos. Vejamos:

Proposição 3.1.1. *Uma reta r é **tangente** a uma elipse ε num ponto $P \in \varepsilon$ só neste ponto, ou seja, $r \cap \varepsilon = \{P\}$. A equação da reta tangente à elipse $\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em $P = (x_0, y_0) \in \varepsilon$ é $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.*

Demonstração. Vamos considerar a equação da reta tangente r_t dada por $y - y_0 = m_t(x - x_0)$, onde $(x_0, y_0) \in r_t$ e m_t é a inclinação desta reta tangente.

Sabemos que a inclinação m_t é dada por $m_t = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{dy}{dx}$

Consideremos ainda a reta r_t que passa por um ponto $P = (x_0, y_0) \in \varepsilon$, sendo $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} =$

1, então calculando $m_t = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} &= 0 \\ m_t = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} &= -\frac{b^2 x_0}{y_0 a^2} \end{aligned}$$

Substituindo m_t em r_t obtemos:

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{y_0 a^2} (x - x_0)$$

Multiplicando a igualdade por $y_0 a^2$:

$$a^2 y y_0 - a^2 y_0^2 = -b^2 x x_0 + b^2 x_0^2$$

Reorganizado a igualdade:

$$a^2 y y_0 + b^2 x x_0 = a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2$$

Como $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ e portanto $a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 = a^2 b^2$, podemos reescrever a equação anterior como:

$$a^2 y y_0 + b^2 x x_0 = a^2 b^2$$

Finalmente, dividindo a expressão por $a^2 b^2$, temos:

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

Ainda falta mostrar que o ponto P de tangência é único. Por construção (vide figura 3.1), seja r a bissetriz interna do ângulo $F_2 P F_2'$ e fazendo-se $P F_2 = P F_2'$, obtemos que:

$$\begin{aligned} P F_1 + P F_2 &= 2a \\ P F_1 + P F_2' &= 2a \end{aligned}$$

Então,

$$F_1F_2' = 2a.$$

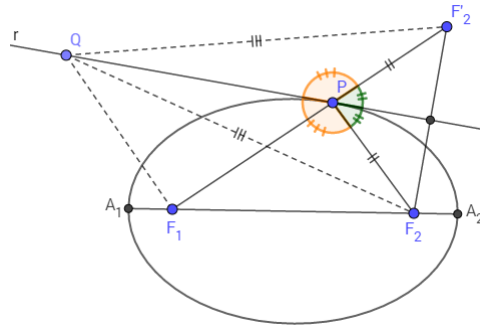


Figura 3.1: P é o ponto de tangência de r e a elipse ε

Por absurdo, considere um ponto $Q \neq P$ pertencente à reta r e tangente a elipse ε . Como $\triangle QPF_2 = \triangle QPF_2'$ (caso LAL), obtemos que

$$QF_2 = QF_2'.$$

Sabemos que a soma das medidas de dois lados de um triângulo é sempre maior que a medida do terceiro. Assim, no $\triangle QF_1F_2'$, temos:

$$QF_1 + QF_2' > F_1F_2' = 2a$$

Como por construção $QF_2 = QF_2'$, temos que

$$QF_1 + QF_2 > 2a$$

Daí podemos afirmar que Q não pertence ao lugar geométrico da elipse, portanto o único ponto de r pertencente à elipse é P , o que indica que r será tangente à elipse em P .

O ponto P é chamado **ponto de tangência** da reta r com ε . □

Finalmente, com os resultados dessa seção, apresentaremos a seguir o princípio de reflexão das elipses.

3.2 Princípio de reflexão das elipses

O princípio de reflexão das elipses vai além das aplicações apresentadas no início deste capítulo e será de suma importância para o estudo de um bilhar elíptico que será explorado no capítulo 4. Iniciamos essa seção com a seguinte proposição:

Proposição 3.2.1. *Seja P um ponto da elipse ε de focos F_1 e F_2 . Os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ formam ângulos iguais com a reta tangente a ε em P .*

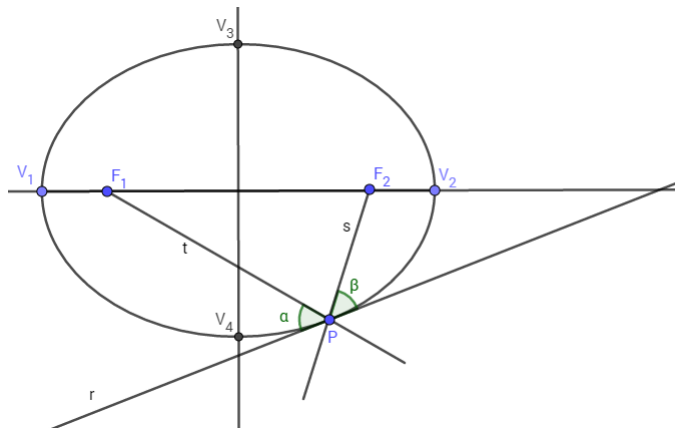


Figura 3.2: Princípio de Reflexão das Elipses

Demonstração. Independente da posição da elipse no plano, transladada e/ou rotacionada em relação aos eixos coordenados, a demonstração é análoga. Por isso, vamos considerar apenas o caso da elipse com centro $(0,0)$ e vértices nos eixos OX e OY .

É possível observar que a proposição é imediata para alguns pontos triviais: Nos pontos $P = V_1(-a,0)$ e $P = V_2(a,0)$, temos que $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, já nos pontos $P = V_3(0,b)$ e $P = V_4(0,-b)$ o triângulo F_1PF_2 é isósceles de base F_1F_2 , sendo $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$. Pela geometria da figura do triângulo isósceles em questão, obtemos que $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}$.

Consideremos os demais casos:

- **Caso 1:** $x_0 \neq c, x_0 \neq -c$

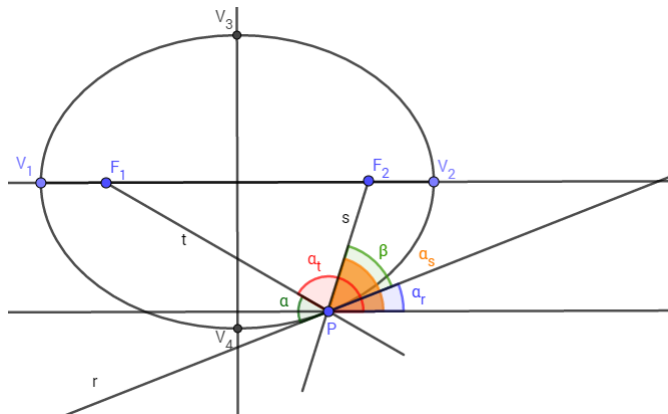


Figura 3.3: Princípio de Reflexão das Elipses

Sejam t a reta que passa nos pontos $P(x_0, y_0)$ e $F_1(-c, 0)$, e α_t sua inclinação. Temos então que seu coeficiente angular é dado por

$$m_t = \frac{y_0}{x_0 + c}$$

Considere r a reta tangente à elipse no ponto P e sua inclinação m_r . Pela proposição 3.1.1 seu coeficiente angular obtido é:

$$m_r = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

Daí pela figura 3.3 observamos que $\pi - \alpha = \alpha_t - \alpha_r$, isto é, $\alpha = \pi + \alpha_r - \alpha_t$, ou seja, $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha_r - \alpha_t)$.

$$\operatorname{tg}(\alpha_r - \alpha_t) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_t}{1 + \operatorname{tg} \alpha_r \operatorname{tg} \alpha_t}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_r - m_t}{1 + m_r m_t}$$

$$= \frac{\frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0} - \frac{y_0}{x_0 + c}}{1 + \left(\frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0}\right) \left(\frac{y_0}{x_0 + c}\right)}$$

$$= \left[-\frac{b^2 x_0^2 + c b^2 x_0 + a^2 y_0^2}{a^2 y_0 (x_0 + c)} \right] \left[\frac{a^2 (x_0 + c)}{a^2 (x_0 + c) - b^2 x_0} \right]$$

Como $a^2y_0^2 + b^2x_0^2 = a^2b^2$ e $b^2 = a^2 - c^2$, temos:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}\alpha &= -\frac{a^2b^2 + cb^2x_0}{y_0[a^2(x_0 + c) - b^2x_0]} \\
 &= -\frac{b^2(a^2 + cx_0)}{y_0[a^2x_0 + a^2c - (a^2 - c^2)x_0]} \\
 &= -\frac{b^2(a^2 + cx_0)}{y_0[a^2c + c^2x_0]} \\
 &= -\frac{b^2}{y_0c}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

A reta s que passa nos pontos $P(x_0, y_0)$ e $F_2(c, 0)$ tem inclinação α_s e coeficiente angular

$$m_s = \frac{y_0}{x_0 - c}$$

Pela geometria da figura 3.3 temos que $\beta = \alpha_s - \alpha_r$, então:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}\beta &= \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r} \\
 &= \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} - \frac{-b^2x_0}{a^2y_0}}{1 + \left(\frac{y_0}{x_0 - c}\right) \left(\frac{-b^2x_0}{a^2y_0}\right)} \\
 &= \left[\frac{a^2y_0^2 - cb^2x_0 + b^2x_0^2}{a^2y_0(x_0 - c)} \right] \left[\frac{a^2(x_0 - c)}{a^2(x_0 - c) - b^2x_0} \right]
 \end{aligned}$$

Como $a^2y_0^2 + b^2x_0^2 = a^2b^2$ e $b^2 = a^2 - c^2$, temos:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}\beta &= \frac{a^2b^2 - cb^2x_0}{y_0[a^2(x_0 - c) - b^2x_0]} \\
 &= \frac{b^2(a^2 - cx_0)}{y_0[a^2x_0 - a^2c - (a^2 - c^2)x_0]} \\
 &= \frac{b^2(a^2 - cx_0)}{-cy_0[a^2 - cx_0]}
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{b^2}{y_0 c}. \quad (3.2)$$

Como (3.1) = (3.2), ou seja, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, concluímos que $\alpha = \beta$.

- **Caso 2:** $x_0 = c, x_0 = -c$

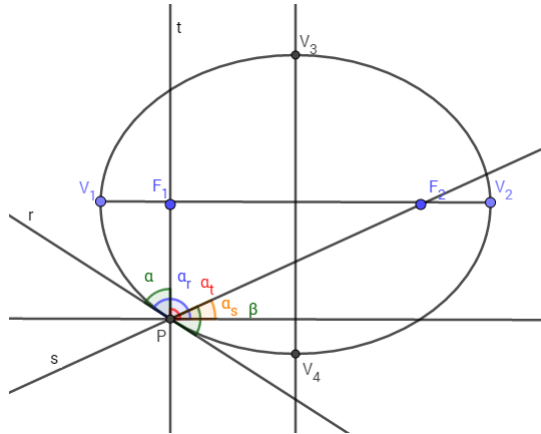


Figura 3.4: Princípio de Reflexão das Elipses

Vamos demonstrar para $x_0 = -c$, pois para $x_0 = c$ é análogo. Considerando então $x_0 = -c$, temos que $y_0 = \frac{b^2}{a}$ e reta t vertical. De fato pela proposição 3.1.1 e se $P = (c, y_0)$, obteremos:

$$\begin{aligned} a^2 y_0^2 + b^2 c^2 &= a^2 b^2 \\ a^2 y_0^2 &= a^2 b^2 - b^2 c^2 \\ a^2 y_0^2 &= b^2 (a^2 - c^2) \\ y_0^2 &= \frac{b^4}{a^2} \\ y_0 &= \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Nesta situação $\alpha = \alpha_r - \frac{\pi}{2}$ e

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{m_r} = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} = \frac{a^2 b^2}{b^2 (-c) a} = -\frac{a}{c}. \quad (3.3)$$

Pela geometria da figura 3.4, temos que $\beta = \pi - \alpha_r + \alpha_s$, e $m_s = -\frac{y_0}{2c} = -\frac{b^2}{2ac}$ daí:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}\beta &= \operatorname{tg}(\alpha_s - \alpha_r) = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r} \\
 &= \frac{-\frac{b^2}{2ac} - \frac{c}{a}}{1 + \left(\frac{-b^2}{2ac}\right)\left(\frac{c}{a}\right)} \\
 &= \left[\frac{-ab^2 - 2ac^2}{2a^2c}\right] \left[\frac{2a^2c}{2a^2c - b^2c}\right] \\
 &= \frac{-a(b^2 + 2c^2)}{c(2a^2 - b^2)} \\
 &= \frac{-a(a^2 - c^2 + 2c^2)}{c(2a^2 - a^2 + c^2)} \\
 &= -\frac{a}{c} \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

As equações 3.3 e 3.4 são iguais, então $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, isto é, $\alpha = \beta$.

□

Portanto, conforme demonstrado anteriormente, concluímos que dado um ponto P da elipse ε de focos F_1 e F_2 , os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ formam ângulos iguais com a reta tangente a ε no ponto P .

Na próxima seção, finalizaremos o capítulo com a demonstração de uma proposição sobre a reta normal a uma elipse em um ponto.

3.3 Reta normal a elipse em um ponto

Dada a definição da reta normal como a perpendicular à reta tangente no ponto de tangência e com base nos resultados da seção anterior asseguramos a proposição seguinte com sua respectiva demonstração:

Proposição 3.3.1. *A reta normal a elipse ε em um ponto P é a bissetriz interna do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$.*

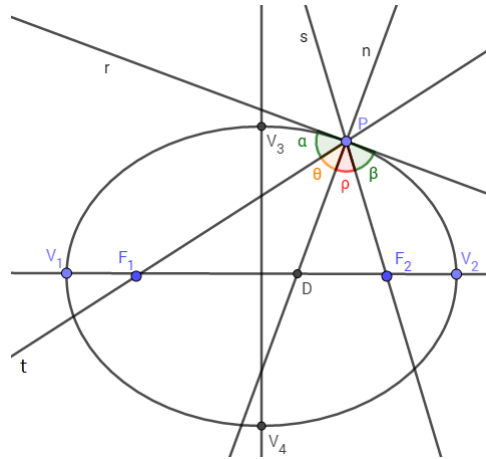


Figura 3.5: Reta normal a elipse em um ponto

Demonstração. Este resultado é consequência da proposição 3.2.1. De fato, dado P um ponto da elipse ε de focos F_1 e F_2 . Os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ formam ângulos congruentes com a reta tangente a ε em P . A reta normal n que passa por P formam os ângulos $\alpha + \theta$ e $\beta + \rho$ que são congruentes e iguais a $\frac{\pi}{2}$, além disso, $\alpha = \beta$ conforme proposição 3.2.1:

$$\begin{aligned}\alpha + \theta &= \beta + \rho \\ \theta &= \rho\end{aligned}$$

□

Os conceitos e resultados até agora discutidos servirão de base para os próximos capítulos. Na sequência, falaremos de um bilhar elíptico e de algumas de suas propriedades e finalmente no capítulo 5 utilizaremos da "Construção do Jardineiro" apresentado no capítulo inicial para tratar de curvas constituídas por arcos de elipses.

4 Bilhar Elíptico

Antes mesmo de tratarmos de um bilhar elíptico, é importante ressaltar a definição de um bilhar:

Definição 4.0.1. *Um bilhar plano é o sistema dinâmico que descreve o movimento (dinâmica) de uma partícula pontual de massa m (às vezes também chamada de bola de bilhar). Isto ocorre no interior de um conjunto compacto e convexo, cuja fronteira é uma curva regular ou uma reunião finita de curvas regulares. No interior da curva o movimento é uniforme (velocidade constante) e a reflexão na fronteira da curva é elástica, ou seja, é obedecida a seguinte regra da óptica geométrica: o ângulo de incidência é igual ao ângulo refletido.[16]*

Podemos considerar que o bilhar é um jogo desenvolvido em uma mesa plana com a utilização de tacos e bolas com o objetivo de acertar as bolas em caçapas.

No caso de um bilhar matemático, vamos considerar a mesa plana construída no formato de uma curva fechada e que o jogo é realizado com apenas uma bola. Podemos ainda considerar, matematicamente, a bola como um ponto e sua trajetória sobre a mesa por um segmento de reta. Quando a trajetória da bola atinge a borda da mesa, a bola é refletida com o ângulo de reflexão congruente ao ângulo de incidência.

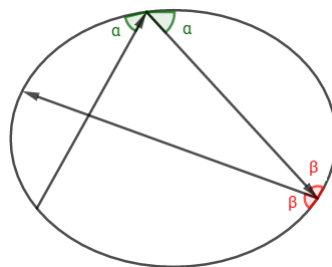


Figura 4.1: Ângulo de reflexão é congruente ao ângulo de incidência

No caso especial de um bilhar elíptico, a obtenção de resultados analíticos será tratado nesse capítulo, destacando e caracterizando suas peculiaridades dinâmicas.

4.1 Bilhar Elíptico

Vamos considerar um bilhar elíptico, como o próprio nome diz, no formato de uma elipse e que possui uma única caçapa em um dos focos da elipse.

Se considerarmos o ponto inicial da bola no foco contrário ao foco da caçapa, independentemente da direção em que se jogue a bola acertando a borda da mesa da elipse e considerando uma força suficiente, a bola será encaçapada, fato justificado pelas propriedades refletora e bisetora das elipses demonstradas pelas proposições 3.2.1 e 3.3.1.

Concebendo ainda um bilhar elíptico, porém sem caçapa, vamos separar e analisar o percurso descrito pela bola na mesa após a tacada, desconsiderando o atrito. Sejam F_1 e F_2 os focos da elipse, a análise será separada em 3 situações, ou seja, a bola passando:

1. sobre um dos focos;
2. pelo segmento $\overline{F_1F_2}$;
3. fora do segmento $\overline{F_1F_2}$.

4.1.1 A bola passa sobre um dos focos

Se após realizada a tacada a bola passar por um dos focos, já vimos pelas propriedades demonstradas nas proposições 3.2.1 e 3.3.1 que a bola será refletida para o outro foco. Se desprezarmos a resistência e considerarmos um sistema dinâmico, ela continuará passando por um foco e refletindo no outro alternadamente.

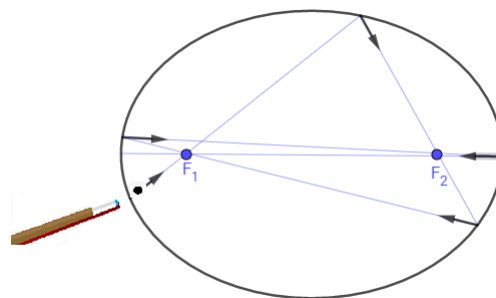


Figura 4.2: Bilhar elíptico - bola passando pelos focos

Proposição 4.1.1. *Toda trajetória passando pelos focos F_1 ou F_2 converge para o eixo maior da elipse.*

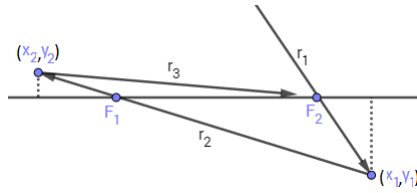


Figura 4.3: Trajetória que converge para o eixo maior da elipse

Demonstração. Se a bola está sobre o eixo maior da elipse e é tacada na direção dos focos, o eixo maior é uma trajetória periódica, ou seja, pela propriedade de reflexão da elipse, a bola vai e volta entre seus vértices sobre esse eixo. Isso significa, sem perda de generalidade, que se supormos que o foco $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$ como mostra a figura 4.3 e fixarmos uma trajetória do bilhar que passa por $(f, 0)$ e denotarmos por r_1 a reta que a contém, então se o coeficiente angular m_1 da reta r_1 é igual a zero, não temos nada a provar.

Vamos então considerar o caso em que a bola está fora do eixo maior da elipse e é arremessada em direção a um dos focos.

Inicialmente vamos considerar a figura abaixo para a demonstração:

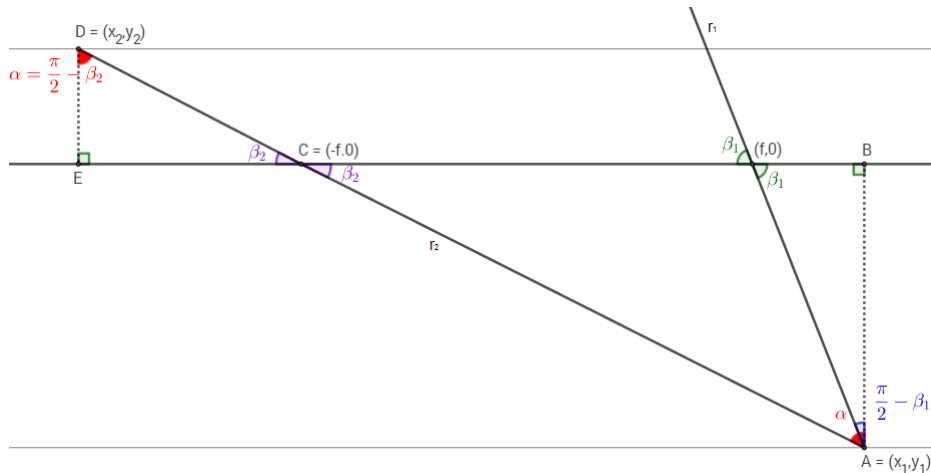


Figura 4.4: Trajetória que converge para o eixo maior da elipse

Suponhamos então que a reta r_1 tenha coeficiente angular $m_1 < 0$. Seja (x_1, y_1) o ponto de colisão que r_1 faz com a elipse. Note que $x_1 > f, y_1 < 0$, e ainda, $-tg\beta_1 = m_1 = \frac{y_1}{x_1 - f}$. Considere r_2 a outra reta que contém a trajetória consecutiva após a colisão. Denotemos o ponto da próxima colisão por (x_2, y_2) . Observe também que $x_2 < -f, y_2 > 0 > y_1$ e $-tg\beta_2 =$

$m_2 = \frac{y_2}{x_2 + f}$, podemos concluir que $m_1 < m_2 < 0$, uma vez que os triângulos ABC e DEC são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo e pela construção temos:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} - \beta_2 &> \frac{\pi}{2} - \beta_1 \\ \pi - \beta_2 &> \pi - \beta_1\end{aligned}$$

Como a tangente é uma função crescente, temos que:

$$\begin{aligned}tg(\pi - \beta_2) &> tg(\pi - \beta_1) \\ -tg\beta_2 &> -tg\beta_1 \\ m_2 &> m_1\end{aligned}$$

Para uma terceira colisão consideremos a figura:

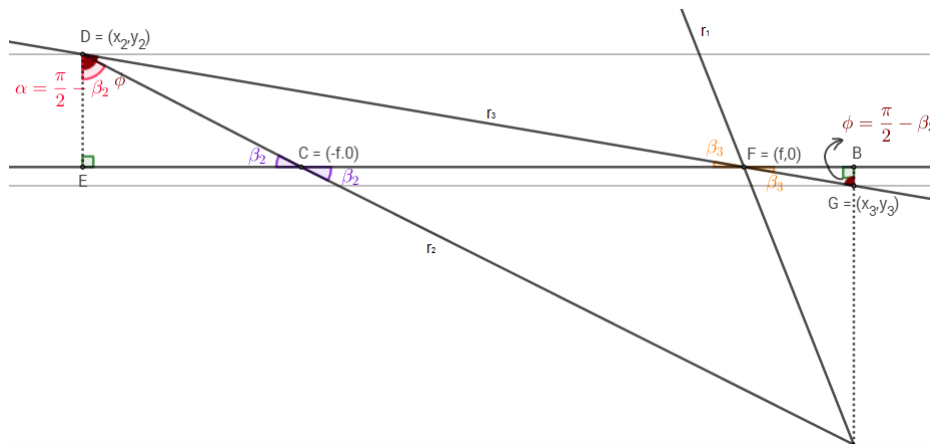


Figura 4.5: Trajetória que converge para o eixo maior da elipse

Uma outra reta r_3 cujo ponto de colisão consecutivo é (x_3, y_3) tem como coeficiente angular $-tg\beta_3 = m_3 = \frac{y_3}{x_3 - f}$ e satisfaz $x_3 > x_2$ e $y_3 < y_2$ assim $m_1 < m_2 < m_3 < 0$, pois os triângulos DEF e GBF são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo e pela construção temos:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} - \beta_3 &> \frac{\pi}{2} - \beta_2 \\ \pi - \beta_3 &> \pi - \beta_2\end{aligned}$$

Como a tangente é uma função crescente, temos que:

$$\begin{aligned}tg(\pi - \beta_3) &> tg(\pi - \beta_2) \\ -tg\beta_3 &> -tg\beta_2 \\ m_3 &> m_2\end{aligned}$$

Continuando esse processo, obtemos uma sequência crescente e limitada superiormente $m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_j < 0$, logo tal sequência (m_j) , $j \in \mathbb{N}$, possui limite. Se o limite dessa sequência é diferente de zero, as trajetórias que passam pelo foco tendem para uma trajetória periódica que não é o eixo maior nem o eixo menor da elipse. Porém, pela monotonicidade da sequência (m_j) , $j \in \mathbb{N}$, os ângulos de reflexão que as trajetórias fazem com a elipse após consecutivas colisões, são diferentes, como podem ser vistas também nas construções das figuras 4.4 e 4.5. Isso contradiz o fato da trajetória ser periódica.

Para o caso em que a reta r_1 tenha coeficiente angular $m_1 > 0$, após a primeira colisão, os coeficientes angulares $m_j, j \in \mathbb{N}$ serão todos $m_j < 0$ e o caso recairá no mesmo demonstrado anteriormente. \square

4.1.2 As reflexões não intersectam os focos F_1 e F_2

Antes de tratarmos dos dois outros casos, ou seja, quando a bola não passa sobre um dos focos, precisaremos do seguinte lema:

Lema 4.1.1. *Sejam $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ segmentos consecutivos de mesma trajetória do bilhar elíptico com focos F_1 e F_2 . Então, os ângulos $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ têm a mesma bissetriz interna.*

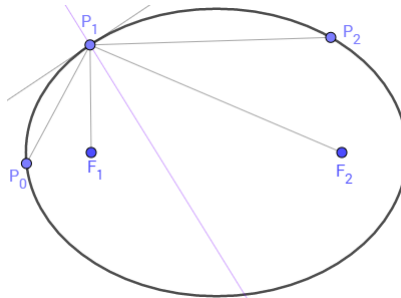


Figura 4.6: Bissetriz de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e de $\widehat{F_1P_1F_2}$

Demonstração. Pela propriedade de reflexão de um bilhar, quando a trajetória da bola atinge a borda da mesa, a bola é refletida com o ângulo de reflexão congruente ao ângulo de incidência (vide figura 4.1), então os ângulos que $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ fazem com a reta tangente à elipse no ponto P_1 são congruentes. Dado que P_0, P_1 e P_2 não são colineares, o ângulo que $\overline{P_0P_1}$ faz com a bissetriz interna de $P_0P_1P_2$ é congruente ao ângulo que $\overline{P_1P_2}$ faz com a mesma bissetriz.

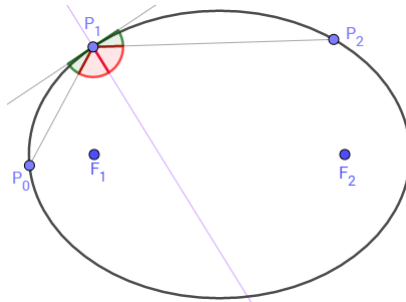


Figura 4.7: Ângulos formados pela Bissetriz de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e ângulos de incidência e reflexão da trajetória de uma bola de bilhar

Conforme a figura a seguir, sejam $\theta = \widehat{P_0P_1F_1}$ e $\alpha = \widehat{F_2P_1P_2}$:

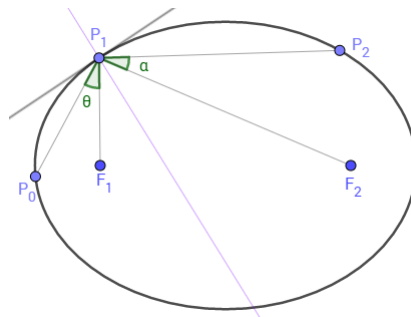


Figura 4.8: Ângulos $\widehat{P_0P_1F_1}$ e $\widehat{F_2P_1P_2}$

Queremos mostrar que se $\theta = \alpha$ então a bissetriz interna dos ângulos $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ coincidem.

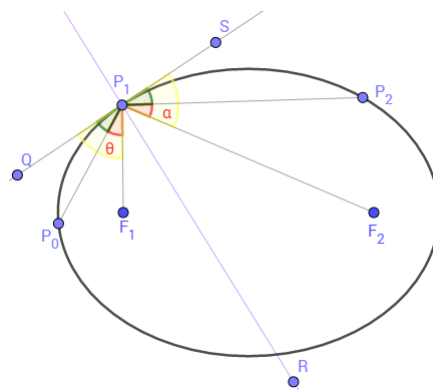


Figura 4.9: Ângulos $\widehat{P_0P_1F_1}$ e $\widehat{F_2P_1P_2}$

De fato, por construção e observando a figura 4.9 temos,

$$\widehat{QP_1P_0} + \theta + \widehat{F_1P_1R} = \widehat{SP_1P_2} + \alpha + \widehat{F_2P_1R}$$

Pela propriedade de reflexão do bilhar, sabemos que

$$\widehat{QP_1P_0} \cong \widehat{SP_1P_2}$$

E pela proposição 3.2.1:

$$\widehat{F_1P_1R} \cong \widehat{F_2P_1R}$$

Assim obtemos $\theta = \alpha$ e concluímos que a reta $\overline{P_1R}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{P_0P_1P_2}$.

Portanto, as bissetrizes internas de $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ coincidem. \square

Com posse do lema 4.1.1 podemos então apresentar a proposição:

Proposição 4.1.2. *Se a trajetória do bilhar cruza o segmento $\overline{F_1F_2}$, que une os dois focos, então ela reflete na borda da elipse e cruza o segmento novamente. Da mesma forma, se a trajetória cruza o eixo maior fora do segmento $\overline{F_1F_2}$ digamos à esquerda de F_1 , então, após colidir com a borda da elipse cruzará o eixo maior à direita de F_2 .*

Demonstração. Sejam $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ segmentos consecutivos da mesma trajetória, segue pelo lema 4.1.1 que $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ tem a mesma bissetriz interna. Logo, se $\overline{P_0P_1}$ intersecta $\overline{F_1F_2}$, então $\overline{P_1P_2}$ também intersecta $\overline{F_1F_2}$, e se $\overline{P_0P_1}$ não intersecta $\overline{F_1F_2}$, então $\overline{P_1P_2}$ também não vai intersectar $\overline{F_1F_2}$.

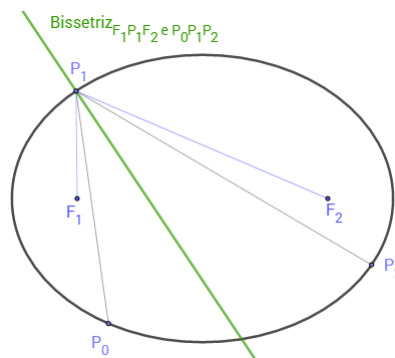


Figura 4.10: $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ intersectam $\overline{F_1F_2}$ - Bissetrizes $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ coincidem.

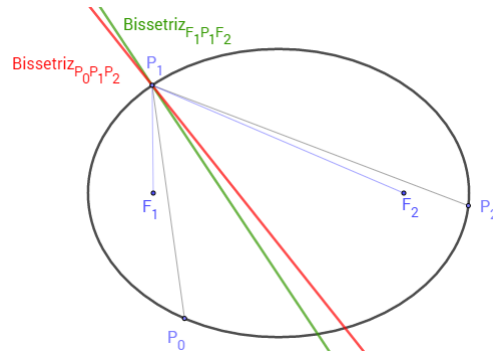


Figura 4.11: $\overline{P_0P_1}$ intersecta $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{P_1P_2}$ não intersecta - Bissetrizes $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ não podem coincidir.

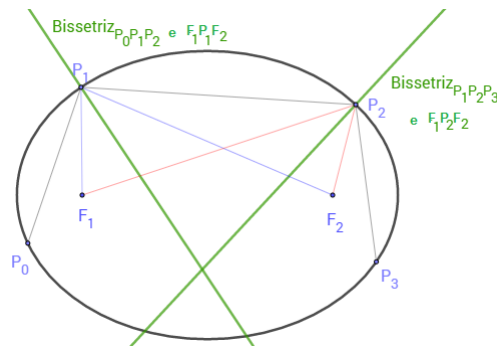


Figura 4.12: $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_2P_3}$ não intersectam $\overline{F_1F_2}$ - Bissetrizes $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ coincidem.

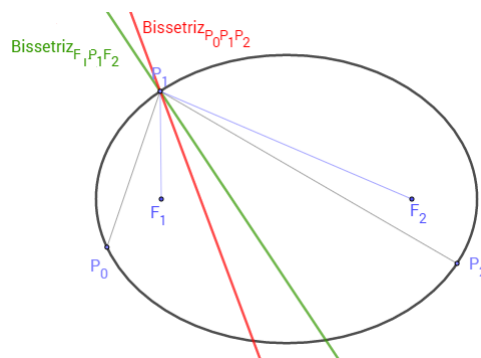


Figura 4.13: $\overline{P_0P_1}$ não intersecta $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{P_1P_2}$ intersecta - Bissetrizes $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2}$ não podem coincidir.

Por indução sobre n , sendo $P_0; P_1; \dots; P_n$ os pontos em que a trajetória colide com a borda da elipse, prova-se que se um dos segmentos da trajetória intersecta $\overline{F_1F_2}$ então os restantes também o intersectam.

Analogamente se prova que se um dos seus segmentos não intersecta $\overline{F_1F_2}$ então nenhum dos restantes intersecta $\overline{F_1F_2}$. \square

Um interessante e surpreendente resultado quando a bola passa fora do segmento $\overline{F_1F_2}$ é apresentado na sequência a partir da subsequente proposição:

Proposição 4.1.3. *Se em um bilhar elíptico a bola passa fora do segmento $\overline{F_1F_2}$, então todas as reflexões serão tangentes a uma elipse com os mesmos focos F_1 e F_2 da elipse original.*

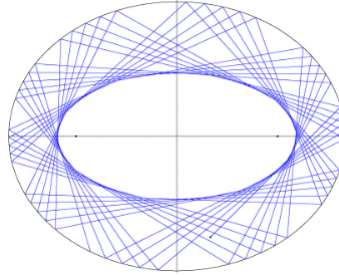


Figura 4.14: Nova cáustica: elipse - bola passando fora do segmento que une os focos.- Imagem retirada de [5]

Demonstração. Consideremos $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ segmentos consecutivos de uma trajetória de bilhar. Suponha que $\overline{P_0P_1}$ não cruza o segmento $\overline{F_1F_2}$.

Segue-se do lema 4.1.1, que os ângulos $\widehat{P_0P_1F_1}$ e $\widehat{P_2P_1F_2}$ são congruentes. Antes de continuarmos a demonstração, vejamos a figura:

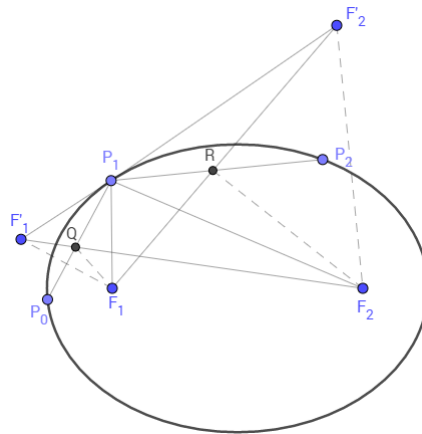


Figura 4.15: Bilhar elíptico - bola passando fora do segmento que une os focos

Considere o simétrico¹ de F_1 em relação ao segmento $\overline{P_0P_1}$ como F'_1 e o simétrico de F_2 em relação ao segmento $\overline{P_1P_2}$ como F'_2 e então façamos: $Q = \overline{F'_1F_2} \cap \overline{P_0P_1}$, $R = \overline{F'_2F_1} \cap \overline{P_1P_2}$. Cogitemos agora a elipse com os focos F_1 e F_2 que é tangente a $\overline{P_0P_1}$ no ponto Q . Da mesma

¹O ponto P' chama-se simétrico de P em relação à reta r quando r é mediatriz do segmento PP' , ou seja, a distância entre P' e r é igual a distância entre P e r . [9]

forma uma elipse com focos F_1 e F_2 tangente a $\overline{P_1P_2}$ no ponto R .

Queremos mostrar, pela definição de elipse, que essas duas elipses coincidem ou, equivalentemente, que $F_1'Q + QF_2 = F_1Q + QF_2 = F_1R + RF_2 = F_1R + RF_2' = F_1R + RF_2' = F_1F_2' = F_1F_2'$.

Note que os triângulos $F_1'P_1F_2$ e $F_1P_1F_2'$ são congruentes (Caso LAL), uma vez que por construção $F_1'P_1 = F_1P_1$, $F_2P_1 = F_2'P_1$ e os ângulos $\widehat{F_1'P_1F_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2'}$ são congruentes, de fato:

$$\begin{aligned}\widehat{F_1'P_1F_2} &= \widehat{F_1'P_1P_0} + \widehat{P_0P_1F_1} + \widehat{F_1P_1F_2} \\ &\text{e} \\ \widehat{F_1P_1F_2'} &= \widehat{F_1P_1F_2} + \widehat{F_2P_1P_2} + \widehat{P_2P_1F_2'}\end{aligned}$$

Por construção os ângulos $\widehat{P_0P_1F_1} \cong \widehat{F_1'P_1P_0}$ e $\widehat{F_2P_1P_2} \cong \widehat{P_2P_1F_2'}$, então podemos reescrever:

$$\begin{aligned}\widehat{F_1'P_1F_2} &= 2 \cdot \widehat{P_0P_1F_1} + \widehat{F_1P_1F_2} \\ &\text{e} \\ \widehat{F_1P_1F_2'} &= \widehat{F_1P_1F_2} + 2 \cdot \widehat{F_2P_1P_2}\end{aligned}$$

Como pelo lema 4.1.1, $\widehat{P_0P_1F_1} \cong \widehat{F_2P_1P_2}$, concluímos que $\widehat{F_1'P_1F_2} \cong \widehat{F_1P_1F_2'}$.

Daí $F_1'F_2 = F_1F_2'$.

Será análogo, por indução, se considerarmos os segmentos consecutivos $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_2P_3}$ até os segmentos consecutivos $\overline{P_{n-2}P_{n-1}}$ e $\overline{P_{n-1}P_n}$. Por esse motivo segue o resultado. \square

A figura abaixo mostra o resultado: a elipse (em azul) que é gerada após as reflexões da trajetória da bola do bilhar passando fora do segmento $\overline{F_1F_2}$ da elipse original. Observa-se que ambas elipses possuem os mesmos focos F_1 e F_2 .

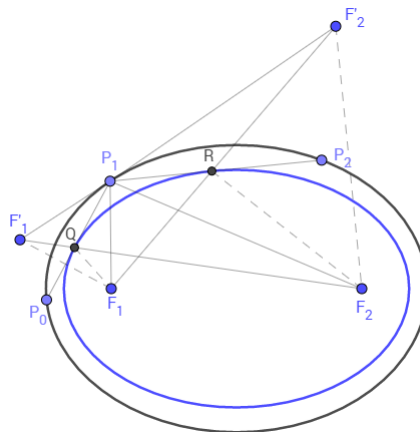


Figura 4.16: Cáustica gerada: elipse

Observação 4.1.1. Um caso particular para a proposição 4.1.3 é um caso periódico conforme figura 4.17, ou seja, a bola sai de um vértice de um dos eixos e vai para o vértice do outro eixo da elipse.

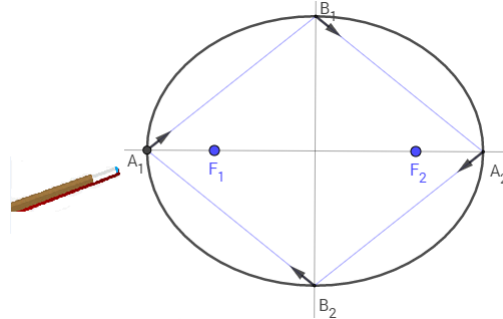


Figura 4.17: Bilhar elíptico - bola passando nos vértices

Assim como na proposição 4.1.3 verificamos um interessante resultado quando a bola passa fora do segmento $\overline{F_1F_2}$, apresentaremos da mesma forma a proposição quando a bola tem sua trajetória passando pelo segmento $\overline{F_1F_2}$

Proposição 4.1.4. Se em um bilhar elíptico a bola passa entre o segmento $\overline{F_1F_2}$, então todas as reflexões serão tangentes a uma hipérbole² de mesmos focos que a mesa do bilhar.

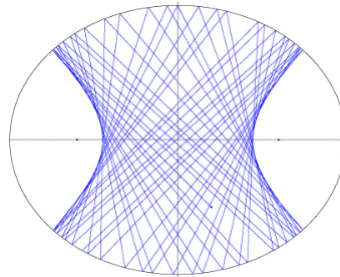


Figura 4.18: Nova cáustica: hipérbole - bola passando entre o segmento que une os focos. - Imagem retirada de [5]

Demonstração. Consideremos $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ segmentos consecutivos de uma trajetória de bilhar. Suponha que $\overline{P_0P_1}$ cruza o segmento $\overline{F_1F_2}$.

Segue-se do lema 4.1.1, que os ângulos $\widehat{P_0P_1F_1}$ e $\widehat{P_2P_1F_2}$ são congruentes. Vejamos a figura que nos auxiliará na demonstração:

²A hipérbole é o conjunto dos pontos P no plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante, ou seja, se $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$, então a hipérbole é o conjunto dos pontos P tais que $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a$, em que $a < c$. [13]

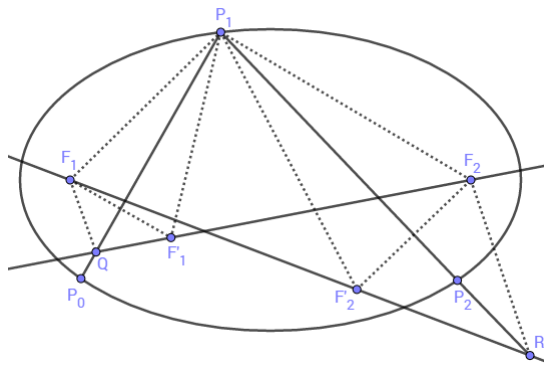


Figura 4.19: Bilhar elíptico - bola passando entre o segmento que une os focos.

Considere o simétrico de F_1 em relação ao segmento $\overline{P_0P_1}$ como F_1' e o simétrico de F_2 em relação ao segmento $\overline{P_1P_2}$ como F_2' e então façamos: $Q = \overrightarrow{F_2F_1'} \cap \overrightarrow{P_0P_1}$, $R = \overrightarrow{F_1F_2'} \cap \overrightarrow{P_1P_2}$. Cogitemos a hipérbole com os focos F_1 e F_2 . Sejam uma hipérbole tangente em $\overline{P_0P_1}$ no ponto Q e uma tangente a $\overline{P_1P_2}$ no ponto R .

Queremos mostrar, pela definição de hipérbole, que essas duas hipérboles coincidem ou, equivalentemente, que $|QF_2 - F_1'Q| = |QF_2 - F_1Q| = |F_1R - RF_2| = |F_1R - RF_2'|$, que se resume a $F_1'F_2 = F_2F_1$.

Note que os triângulos $F_1'P_1F_2$ e $F_1P_1F_2'$ são congruentes (Caso LAL), uma vez que por construção $F_1'P_1 = F_1P_1$, $F_2P_1 = F_2'P_1$ e os ângulos $\widehat{F_1'P_1F_2}$ e $\widehat{F_1P_1F_2'}$ são congruentes, de fato:

$$\begin{aligned} \widehat{F_1'P_1F_2} &= \widehat{F_1'P_1F_2'} + \widehat{F_2'P_1P_2} + \widehat{P_2P_1F_2} \\ &\text{e} \\ \widehat{F_1P_1F_2'} &= \widehat{F_1P_1P_0} + \widehat{P_0P_1F_1'} + \widehat{F_1'P_1F_2'} \end{aligned}$$

Por construção os ângulos $\widehat{P_0P_1F_1'} \cong \widehat{F_1P_1P_0}$ e $\widehat{F_2'P_1P_2} \cong \widehat{P_2P_1F_2}$, então podemos reescrever:

$$\begin{aligned} \widehat{F_1'P_1F_2} &= 2 \cdot \widehat{P_2P_1F_2} + \widehat{F_1'P_1F_2'} \\ &\text{e} \\ \widehat{F_1P_1F_2'} &= \widehat{F_1'P_1F_2'} + 2 \cdot \widehat{F_1P_1P_0} \end{aligned}$$

Como pelo lema 4.1.1, $\widehat{F_1P_0P_1} \cong \widehat{P_2P_1F_2}$, concluímos que $\widehat{F_1'P_1F_2} \cong \widehat{F_1P_1F_2'}$. Daí $F_1'F_2 = F_1F_2'$, o que nos interessa, pois:

$$\begin{aligned} |QF_2 - F_1'Q| &= |QF_2 - F_1Q| = |F_1'F_2| \quad \text{e} \\ |F_1R - RF_2| &= |F_1R - RF_2'| = |F_1F_2'|. \end{aligned}$$

Além disso, será análogo, por indução, se considerarmos os segmentos consecutivos $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_2P_3}$ até os segmentos consecutivos $\overline{P_{n-2}P_{n-1}}$ e $\overline{P_{n-1}P_n}$. Por esse motivo segue o resultado. \square

A figura 4.20 mostra o resultado: a hipérbole que é gerada após as reflexões da trajetória da bola do bilhar passando entre o segmento $\overline{F_1F_2}$ da elipse. Observa-se que a elipse e a hipérbole possuem os mesmos focos F_1 e F_2 .

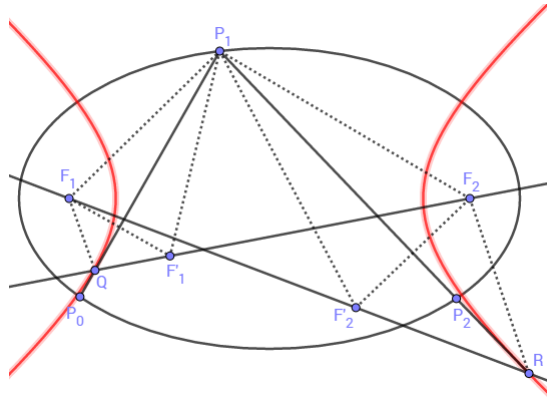


Figura 4.20: Cáustica gerada: hipérbole

Observação 4.1.2. *Um caso particular para a proposição 4.1.4 é quando a bola está no centro da elipse e é tacada em direção a um dos vértices do eixo menor, a bola fará reflexões sempre nesse eixo, gerando uma cônica degenerada.*

Desta forma, finalizamos esse capítulo e trabalharemos no último uma nova classe de bilhares: as constituídas por arcos de elipses.

A ideia é exatamente utilizar da *Construção do Jardineiro* para essa nova classe de bilhares, de forma mais específica, do bilhar constituído por arcos de elipses a partir de um hexágono regular.

Finalmente, com o estudo feito até aqui, chegaremos a algumas propriedades análogas do bilhar elíptico com o novo bilhar.

5 Curvas constituídas por arcos de elipses

Neste capítulo estamos interessados no estudo do movimento de uma bola dentro de uma mesa de bilhar¹ plana limitada por uma curva. Esta mesa de bilhar pertence a uma família de curvas que pode ser obtida por um processo conhecido como *A Construção do Jardineiro* ou método de cordas.

O bilhar elíptico que trabalhamos no capítulo anterior é, naturalmente, membro desta família de curvas. Por isso, não é de surpreender que o nosso bilhar hexagonal de cordas partilhe muitas propriedades básicas com o bilhar elíptico.

Antes de iniciarmos, vamos relembrar conforme descrito no capítulo 1, como se utiliza da *Construção do Jardineiro* para obtenção de uma elipse: Essa construção consiste em afixar duas hastes verticais no chão, a cada uma delas prender as extremidades de uma corda com comprimento superior à distância entre as hastes e enconstar algum objeto (capaz de fazer uma marcação) à corda, mantendo-a sempre esticada e assim ir traçando a elipse.

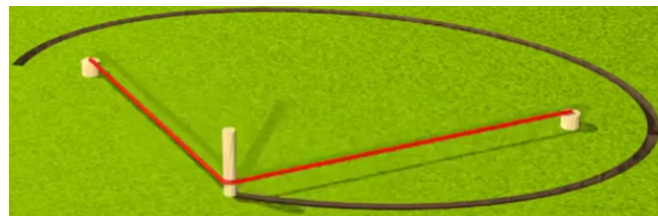


Figura 5.1: Construção do Jardineiro

Imagem retirada de <https://makeagif.com/i/2OcLbw>

Em suma, vamos considerar o movimento de um ponto dentro de uma mesa de bilhar plana delimitada por uma curva convexa fechada. Este ponto irá sempre mover ao longo de uma linha reta até atingir o limite onde é refletido de acordo com a propriedade de bilhar: o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

¹Conforme definição 4.0.1 do capítulo anterior, vamos considerar um bilhar plano como um modelo matemático construído no formato de uma curva fechada, onde uma partícula (bola) se move livremente sobre a mesa por segmentos de retas, sofrendo colisões elásticas na fronteira da curva, ou seja, é obedecida a regra da óptica geométrica: o ângulo de incidência da partícula no momento da colisão com a fronteira da curva é igual ao ângulo refletido.

5.1 Construção do Jardineiro: Curvas constituídas por arcos de elipses a partir de um hexágono regular

A fim de obtermos uma fronteira suficientemente suave, como descrito anteriormente, usaremos como método a *Construção do Jardineiro*: de forma geral, escolhemos um polígono convexo K de n lados e então envolvemos o polígono com um laço de corda inelástica de comprimento l . Esticando a corda até um ponto P e movendo este ponto P obteremos arcos elípticos.

Para o caso $n = 6$, k é um hexágono regular. O movimento do ponto P supra citado "cria" uma curva composta por arcos de elipses. Para este caso especial, do estudo de curvas constituídas por arcos de elipses a partir de um hexágono regular, mostraremos que muitas propriedades aplicadas partilham com as do bilhar elíptico.

Ao variar o comprimento l da corda inelástica obtém-se uma família de curvas, no entanto, apenas um determinado valor especial de l que determinará a suavidade da fronteira, o que será demonstrado posteriormente.

Então, por este caso particular queremos obter uma descrição de todas as trajetórias como a partícula pontual (bola de bilhar) salta elasticamente das paredes.

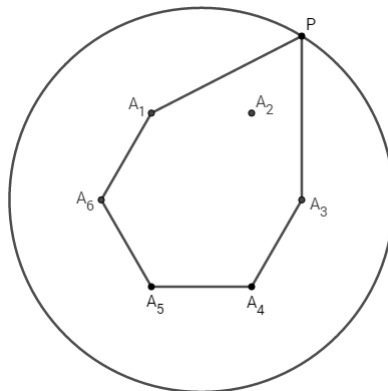


Figura 5.2: Construção do Jardineiro para obter uma curva constituída por arcos de elipses a partir de um hexágono regular.

5.2 Família de Curvas especiais

Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ com domínio $U \subset \mathbb{R}$ que possui, em cada ponto de U , todas as derivadas parciais de ordem k , as quais são funções contínuas em U , chama-se de uma *função de classe C^k* [8].

A curva obtida pela *Construção do Jardineiro* para triângulos equiláteros, independentemente do tamanho l da corda usada, é de classe C^1 [7]. Em geral, isso também é verdade para todas as outras curvas obtidas a partir de polígonos regulares pela *Construção do Jardineiro*. No entanto, com uma escolha adequada do comprimento da corda l podemos construir curvas com maior regularidade, no nosso caso, curvas de classe C^2 .

Nesse sentido, vamos primeiro descrever a configuração e também a estratégia por trás do processo de construção de uma família inteira de curvas suaves. Para começar, selecionamos \mathbf{K} como qualquer polígono convexo regular de n lados ($n > 4$). Assim, estamos excluindo o triângulo equilátero e também o quadrado.

Um dos motivos para a escolha de n é porque precisamos ser capazes de "estrelar" \mathbf{K} , pois um polígono "estrelado"² pode ser derivado de um polígono regular adicionando triângulos isósceles congruentes a todos os seus lados, acrescenta-se que a "estrela" criada tem a característica de iniciar em um vértice do polígono e sua construção termina quando o vértice de onde se partiu seja atingido novamente (a "estrela" tem uma trajetória periódica). Importante ainda ressaltar que os vértices da "estrela" serão "pontos de cola" entre dois arcos de elipses, que chamaremos posteriormente de G_j .

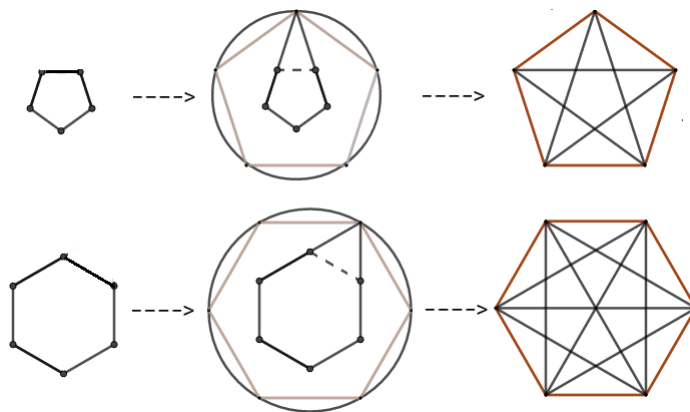


Figura 5.3: Polígonos regulares gerando novos polígonos regulares "estrelados".

Ao invés de adicionarmos todos os triângulos isósceles aos lados do polígono \mathbf{K} , consideramos somado apenas um desses triângulos. O perímetro deste polígono resultante é um valor especial procurado para o comprimento de corda. Posteriormente encontraremos uma expressão para esse comprimento desejado.

²Dizemos que um conjunto $w \subset \mathbb{R}^2$ é *estrelado* com respeito a um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ se para todo $x \in w$ o segmento de reta que liga x_0 a x está contido em w . [4]

O processo de estrelação de um polígono consiste na construção das retas suporte dos segmentos correspondentes a cada um de seus lados, ou seja, no traçado do prolongamento destes. Se tais retas se intersectam em outros pontos além dos vértices do polígono, então ele possui estrelações, e estes grupos de pontos são os vértices de uma estrelação. [11]

5.2.1 Processo para construção de curvas por um polígono regular de n lados

Para construirmos curvas por um polígono regular de n lados, fixaremos dois vértices F_1 e F_2 e determinaremos os demais vértices F_j pelo processo de rotação do vetor $\overrightarrow{F_1F_2}$ e daí faremos a translação do segmento $\overline{F_1F_2}$ que foi rotacionado.

Lema 5.2.1. Consideremos um polígono regular com vértices $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ com comprimento lateral igual a 2 unidades de comprimento. Seja $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$, as demais coordenadas dos vértices em termos do ângulo interno α do polígono podem ser dadas fazendo a rotação do vetor $\overrightarrow{F_1F_2}$ por um ângulo $(\pi - \alpha)$ e a partir da rotação, consideramos o segmento $\overline{F_1F_2}$ e fazemos sua translação.

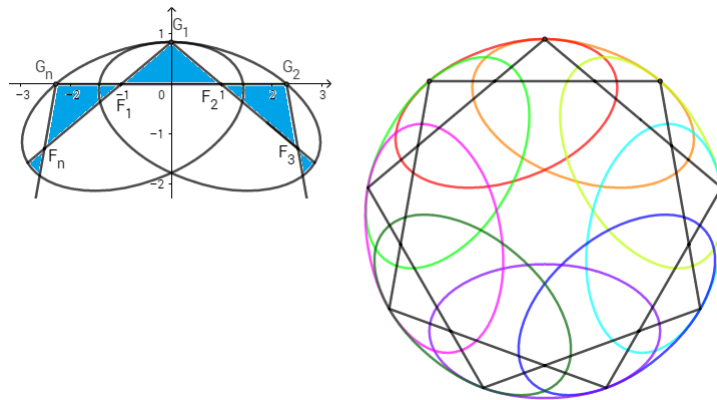


Figura 5.4: Construção da curva de cordas de n lados e uma curva de cordas construído por um eneágono

Demonstração. Nas seções 2.1 e 1.3 vimos os processos para fazer a translação e rotação respectivamente.

Para a rotação por um ângulo α no sentido anti horário, a **matriz de passagem** das coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) para as coordenadas (x, y) é dada por:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Inicialmente faremos a rotação por um ângulo de $(\pi - \alpha)$ do vetor $\overrightarrow{F_1F_2}$ no sentido horário (os sinais dos elementos que envolvem seno devem ser alterados na matriz de passagem, devido ao sentido de rotação, uma vez que $\text{sen } \alpha = -\text{sen}(-\alpha)$). Sabemos ainda que $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ e $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha$, portanto a matriz de passagem será a matriz:

$$\begin{pmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

E a rotação de $\overrightarrow{F_1 F_2} = (2, 0)$ será dada por:

$$\begin{pmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Fazendo a translação do segmento obtido de tal forma o que originalmente era F_1 coincida com F_2 , obtemos as coordenadas de F_3 :

$$F_3 = \begin{pmatrix} -2 \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Para obtermos F_4 , procederemos da mesma forma, faremos a rotação de $\overrightarrow{F_2 F_3}$ pelo mesmo ângulo $(\pi - \alpha)$ e posteriormente a translação do segmento, ou seja, o que originalmente era F_2 será origem do vetor $\overrightarrow{F_3 F_4}$:

$$\begin{aligned} F_4 &= \begin{pmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 2 \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 - 2 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha \\ -2 \sin \alpha + 4 \cos \alpha \sin \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Repetindo o processo para encontrarmos as coordenadas de F_5 , obtemos:

$$\begin{aligned} F_5 &= \begin{pmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 + 4 \cos^2 \alpha \\ 4 \cos \alpha \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 - 2 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha \\ -2 \sin \alpha + 4 \cos \alpha \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 \cos^3 \alpha + 4 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha - 1 \\ -8 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha \sin \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

E para encontrarmos F_6 , temos:

$$\begin{aligned} F_6 &= \begin{pmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \cos^3 \alpha + 6 \cos \alpha \\ -8 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \cos^3 \alpha + 4 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha - 1 \\ -8 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 \cos^4 \alpha - 8 \cos^3 \alpha - 12 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha + 1 \\ 16 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 8 \cos^2 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para encontrarmos F_n faremos a rotação do vetor $\overrightarrow{F_2 F_1}$ pelo mesmo ângulo $(\pi - \alpha)$, e para facilitar os cálculos, faremos desta vez a rotação no sentido anti horário, portanto a matriz de passagem será a matriz:

$$\begin{pmatrix} -\cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

E a rotação de $\overrightarrow{F_2 F_1} = (-2, 0)$ será dada por:

$$\begin{pmatrix} -\cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha \\ -2 \operatorname{sen} \alpha \end{pmatrix}$$

Fazendo a translação do segmento obtido de tal forma que F_2 seja a origem do vetor $\overrightarrow{F_1 F_n}$, obtemos as coordenadas de F_n :

$$F_n = \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha \\ -2 \operatorname{sen} \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2 \cos \alpha \\ -2 \operatorname{sen} \alpha \end{pmatrix}$$

Em resumo, temos:

$$F_1 = (-1, 0)$$

$$F_2 = (1, 0)$$

$$F_3 = (1 - 2 \cos \alpha, -2 \operatorname{sen} \alpha)$$

$$F_4 = (-1 - 2 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha, -2 \operatorname{sen} \alpha + 4 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha)$$

$$F_5 = (-8 \cos^3 \alpha + 4 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha - 1, -8 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha)$$

$$F_6 = (16 \cos^4 \alpha - 8 \cos^3 \alpha - 12 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha + 1, 16 \cos^3 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 8 \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 4 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha)$$

⋮

$$F_n = (-1 + 2 \cos \alpha, -2 \operatorname{sen} \alpha)$$

Usando os mesmos critérios para a montagem da matriz de passagem e suas características (a sua matriz inversa é igual à sua transposta) e dados $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$, poderíamos também calcular $F_3, F_4, F_5, \dots, F_n$ por:

$$F_j = \begin{pmatrix} -\cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}^{j-2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + F_{j-1}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } 3 \leq j \leq n$$

Vamos omitir esta demonstração por indução, pois de certa forma a ideia é a mesma da que foi calculada anteriormente. \square

Seguindo a construção, vamos adicionar triângulos isósceles para cada lado do polígono, o triângulo de base $\overline{F_1F_2}$ terá um vértice G_1 , o de base $\overline{F_2F_3}$, o vértice G_2 e assim sucessivamente até o triângulo de base $\overline{F_nF_1}$ terá um vértice G_n .

Como dissemos na seção anterior, os vértices G_j são exatamente os vértices das "estrelas" construídas a partir de um polígono regular, e são o "ponto de cola" entre dois arcos de elipse. Evidenciaremos ao longo desse capítulo que a trajetória $G_1G_2G_3\dots G_n$ é periódica.

Fixados F_1 e F_2 , vamos determinar todos G_j a partir do processo de rotação de vetores e translação de segmentos. Usaremos os G_j para provarmos o seguinte lema:

Lema 5.2.2. *A expressão para o comprimento específico l da corda para a construção de arcos de elipses é dado pela expressão:*

$$l = 2(n-1)d + 2d = 2(n-1)d - \frac{2d}{\cos \alpha}$$

$$l = 2(n-1)d - \frac{2d}{\cos\left(\frac{n-2}{n}\pi\right)},$$

onde d é o comprimento de cada um dos lados congruentes dos triângulos isósceles de base $\overline{F_{j-1}F_j}$, α é o ângulo interno do polígono regular e n o número de lados desse polígono.

Demonstração. A abscissa de G_1 é 0, pois é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ e sua ordenada é $-\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, uma vez que pela construção $\overline{G_1F_2}$ é hipotenusa do triângulo G_1OF_2 e o ângulo $\widehat{G_1F_2O} = (\pi - \alpha)$, daí

$$\text{tg}(\pi - \alpha) = \frac{y}{1} = \frac{\text{sen}(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = -\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}.$$

Assim, considerando o vetor $\overrightarrow{OG_1} = \left(0, -\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}\right)$, vamos fazer a rotação desse vetor obtendo o segmento $\overline{OG_1}$, do qual faremos a translação devida para encontrarmos G_2 .

O processo é o mesmo que fizemos para encontrar F_3, F_4, \dots , ou seja, faremos uma rotação no sentido horário de um ângulo $(\pi - \alpha)$ e para a translação usaremos o ponto médio de $\overline{F_2F_3}$ para encontrarmos G_2 :

$$G_2 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ -\text{sen } \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos \alpha \\ -\text{sen } \alpha \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} \\ \text{sen} \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos \alpha \\ -\text{sen} \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos repetir o processo para encontrarmos G_3, G_4, \dots . Para determinarmos G_n faremos cálculos semelhantes aos que foram utilizados para encontrar F_n , queremos dizer que conceberemos a rotação por um ângulo $(\pi - \alpha)$ no sentido anti horário do vetor $\overrightarrow{OG_1}$ e do segmento gerado $\overline{OG_1}$ fazemos a translação pelo ponto médio de $\overline{F_n F_1}$:

$$\begin{aligned} G_n &= \begin{pmatrix} -\cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 + \cos \alpha \\ -\text{sen} \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} \\ \text{sen} \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 + \cos \alpha \\ -\text{sen} \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Enfim, temos:

$$G_1 = \left(0, -\frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha}\right)$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

⋮

$$G_n = \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Onde cada um dos lados congruentes do triângulo isósceles $F_1 F_2 G_1$ tem comprimento $d = |F_1 G_1| = |F_2 G_1| = \frac{1}{\cos(\pi - \alpha)} = -\frac{1}{\cos \alpha}$.

Na figura 5.2 e do lado esquerdo da figura 5.4 temos uma visualização do que calculamos. Finalmente, a expressão para o comprimento específico l da corda que estávamos procurando é dado pela expressão:

$$l = 2(n-1) + 2d = 2(n-1) - \frac{2}{\cos \alpha}$$

$$l = 2(n-1) - \frac{2}{\cos\left(\frac{n-2}{n}\pi\right)}$$

□

Na parte direita da figura 5.4, ilustramos o resultado do processo de construção descrito acima para o caso quando \mathbf{K} é um eneágono regular. Para algum polígono \mathbf{K} e um tamanho de corda específico acharemos uma curva de classe C^2 [7], para tanto enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 5.2.1. *A generalização da construção do jardineiro com um comprimento de corda*

$$l = 2(n-1) - \frac{2}{\cos\left(\frac{n-2}{n}\pi\right)} = 2(n-1) + 2d$$

fornece uma família de curvas (uma para cada polígono de n -lados ($n \geq 5$)) que são globalmente de classe C^2 .

Demonstração. Considere as elipses ε_1 com focos F_1 e F_3 e ε_n com focos F_n e F_2 , onde a soma das distâncias dos dois focos é dada por $l - 2(n-2) = 2(n-1) + 2d - 2(n-2) = 2 + 2d$, pois o comprimento da parte da corda que está em contato com os n -lados é $2(n-2)$.

As elipses ε_1 e ε_n são, naturalmente, curvas fechadas muito suaves e precisamos apenas verificar se a equação de ε_1 , sua primeira e segunda derivadas tem o mesmo valor da equação, da primeira e segunda derivadas de ε_n quando $x = 0$, garantindo assim a continuidade de C^2 , conforme figura abaixo:

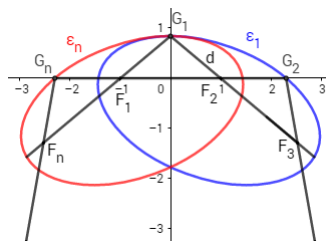


Figura 5.5: Construção de curva de cordas de n lados

Seja $P(x, y)$ um ponto arbitrário, lembrando que $d = -\frac{1}{\cos \alpha}$, então para a elipse ε_1 temos a equação:

$$|F_1P| + |F_3P| = 2 - \frac{2}{\cos \alpha}$$

ou

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1+2\cos \alpha)^2 + (y+2\sin \alpha)^2} = 2 - \frac{2}{\cos \alpha}$$

De forma análoga, para a elipse ε_n temos a equação:

$$|F_nP| + |F_2P| = 2 - \frac{2}{\cos \alpha}$$

ou

$$\sqrt{(x+1-2\cos \alpha)^2 + (y+2\sin \alpha)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 - \frac{2}{\cos \alpha}$$

Ao trazer todos os termos do lado direito para o lado esquerdo das equações de ε_1 e de ε_n temos as equações:

$$e_1(x,y) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1+2\cos \alpha)^2 + (y+2\sin \alpha)^2} - 2 + \frac{2}{\cos \alpha} = 0 \quad e$$

$$e_n(x,y) = \sqrt{(x+1-2\cos \alpha)^2 + (y+2\sin \alpha)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} - 2 + \frac{2}{\cos \alpha} = 0.$$

Observe que uma vez que $e_n(x,y) = e_1(-x,y)$, então os valores das funções de ambas as elipses são iguais quando $x = 0$.

Utilizaremos do processo de diferenciação implícita e substituição e mostraremos que o ponto de interseção comum às duas elipses é o ponto $G_1 = \left[0, -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right]$, onde a primeira derivada é igual a 0 e a segunda derivada é $\frac{\cos \alpha \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{(1 - 2 \cos \alpha)}$.

Consideremos a equação de ε_1 :

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1+2\cos \alpha)^2 + (y+2\sin \alpha)^2} = 2 - \frac{2}{\cos \alpha}$$

Derivando implicitamente a equação, obtemos:

$$\frac{2(x+1) + 2y.y'}{2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} + \frac{2(x-1+2\cos \alpha) + 2(y+2\sin \alpha).y'}{2\sqrt{(x-1+2\cos \alpha)^2 + (y+2\sin \alpha)^2}} = 0$$

$$\frac{(x+1) + y.y'}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} + \frac{(x-1+2\cos \alpha) + (y+2\sin \alpha).y'}{\sqrt{(x-1+2\cos \alpha)^2 + (y+2\sin \alpha)^2}} = 0$$

Substituindo $G_1 = \left[0, -\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}\right]$:

$$\frac{1 + \left(-\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}\right) y'}{\sqrt{1 + \left(-\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}\right)^2}} + \frac{-1 + 2 \cos \alpha + \left(-\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + 2 \text{sen } \alpha\right) y'}{\sqrt{(-1 + 2 \cos \alpha)^2 + \left(-\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + 2 \text{sen } \alpha\right)^2}} = 0$$

Desenvolvendo os cálculos da equação acima:

$$\frac{1 + \left(-\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}\right) y'}{\sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}} + \frac{-1 + 2 \cos \alpha + \left(-\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + 2 \text{sen } \alpha\right) y'}{\sqrt{(-1 + 2 \cos \alpha)^2 + \left(\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) (-1 + 2 \cos \alpha)^2}} = 0$$

Lembrando que $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ e $\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$:

$$\frac{1 + \left(-\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}\right) y'}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}} + \frac{-1 + 2 \cos \alpha + \left(-\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + 2 \text{sen } \alpha\right) y'}{\sqrt{\sec^2 \alpha (-1 + 2 \cos \alpha)^2}} = 0$$

Assim conseguimos reduzir a equação para:

$$\frac{1 + \left(-\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}\right) y'}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}} + \frac{-1 + 2 \cos \alpha + \left(-\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + 2 \text{sen } \alpha\right) y'}{\sqrt{\frac{(1 - 2 \cos \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}}} = 0$$

Sabendo que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $\cos \alpha < 0$ e $\text{sen } \alpha > 0$. Podemos então reescrever a equação como:

$$\left[1 - \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \cdot y'\right] \cdot |\cos \alpha| + \left[(-1 + 2 \cos \alpha) + \left(-\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + 2 \text{sen } \alpha\right) y'\right] \cdot \frac{|\cos \alpha|}{1 - 2 \cos \alpha} = 0$$

$$|\cos \alpha| + \text{sen } \alpha \cdot y' - |\cos \alpha| + \frac{\text{sen } \alpha - 2 \cos \alpha \text{sen } \alpha}{1 - 2 \cos \alpha} y' = 0$$

$$2 \text{sen } \alpha \cdot y' = 0$$

Finalmente, concluímos que $y' = 0$.

Consideremos agora a equação de ϵ_n :

$$\sqrt{(x+1-2\cos\alpha)^2 + (y+2\operatorname{sen}\alpha)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 - \frac{2}{\cos\alpha}$$

A derivada implícita da equação acima é dada por:

$$\frac{2(x+1-2\cos\alpha) + 2(y+2\operatorname{sen}\alpha)y'}{2\sqrt{(x+1-2\cos\alpha)^2 + (y+2\operatorname{sen}\alpha)^2}} + \frac{2(x-1) + 2y.y'}{2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$$

$$\frac{(x+1-2\cos\alpha) + (y+2\operatorname{sen}\alpha)y'}{\sqrt{(x+1-2\cos\alpha)^2 + (y+2\operatorname{sen}\alpha)^2}} + \frac{(x-1) + y.y'}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$$

Ao substituímos $G_1 = \left[0, -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right]$, obtemos:

$$\frac{(1-2\cos\alpha) + \left(-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + 2\operatorname{sen}\alpha\right)y'}{\sqrt{(1-2\cos\alpha)^2 + \left(-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + 2\operatorname{sen}\alpha\right)^2}} + \frac{-1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.y'}{\sqrt{1 + \left(-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}} = 0$$

Desenvolvendo os cálculos:

$$\frac{(1-2\cos\alpha) + \left(-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + 2\operatorname{sen}\alpha\right)y'}{\sqrt{(-1+2\cos\alpha)^2 + \left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)(-1+2\cos\alpha)^2}} + \frac{-1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.y'}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = 0$$

Lembrando mais uma vez que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$:

$$\frac{(1-2\cos\alpha) + \left(-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + 2\operatorname{sen}\alpha\right)y'}{\sqrt{\sec^2\alpha(-1+2\cos\alpha)^2}} + \frac{-1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.y'}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}} = 0$$

Finalmente podemos reduzir a equação:

$$\frac{(1-2\cos\alpha) + \left(-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + 2\operatorname{sen}\alpha\right)y'}{\sqrt{\frac{(1-2\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}} + \frac{-1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.y'}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}} = 0$$

Lembrando que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $\cos \alpha < 0$ e $\sin \alpha > 0$. Podemos então reescrever a equação como:

$$\left[(1 - 2 \cos \alpha) + \left(-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 \sin \alpha \right) y' \right] \cdot \frac{|\cos \alpha|}{1 - 2 \cos \alpha} + \left[-1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot y' \right] \cdot |\cos \alpha| = 0$$

$$|\cos \alpha| + \frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha}{1 - 2 \cos \alpha} y' - |\cos \alpha| + \sin \alpha \cdot y' = 0$$

$$2 \sin \alpha \cdot y' = 0$$

Daí, temos que $y' = 0$. Portanto, concluímos que as derivadas primeira de ε_1 e ε_n são iguais no ponto $G_1 = \left(0, -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)$ e valem 0.

Para finalizar essa demonstração, faremos as derivadas de segunda ordem de ε_1 e ε_n no ponto $G_1 = \left(0, -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)$ e mostraremos que são iguais e valem $\frac{\cos \alpha \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{(1 - 2 \cos \alpha)}$.

Dada a equação de ε_1 : $\frac{(x+1) + y \cdot y'}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} + \frac{(x-1 + 2 \cos \alpha) + (y + 2 \sin \alpha) \cdot y'}{\sqrt{(x-1 + 2 \cos \alpha)^2 + (y + 2 \sin \alpha)^2}} = 0$, a derivada segunda de ε_1 será calculada utilizando-se da derivação implícita e das regras da cadeia e quociente:

$$\begin{aligned} & \frac{[1 + (y')^2 + yy''] \sqrt{(x+1)^2 + y^2} - (x+1 + yy') \left[\frac{x+1 + yy'}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \right]}{(x+1)^2 + y^2} + \\ & + \frac{[1 + (y')^2 + yy'' + 2 \sin \alpha y''] \sqrt{(x-1 + 2 \cos \alpha)^2 + (y + 2 \sin \alpha)^2}}{(x-1 + 2 \cos \alpha)^2 + (y + 2 \sin \alpha)^2} + \\ & - \frac{[x-1 + 2 \cos \alpha + (y + 2 \sin \alpha) y'] \left[\frac{x-1 + 2 \cos \alpha + (y + 2 \sin \alpha) y'}{\sqrt{(x-1 + 2 \cos \alpha)^2 + (y + 2 \sin \alpha)^2}} \right]}{(x-1 + 2 \cos \alpha)^2 + (y + 2 \sin \alpha)^2} = 0 \end{aligned}$$

Lembrando mais uma vez que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, e portanto $\cos \alpha < 0$ e $\sin \alpha > 0$ e substituindo $y' = 0$ e (x, y) por $G_1 = \left(0, -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)$, encontramos:

$$\frac{\left(1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} y'' \right) \frac{1}{|\cos \alpha|} - |\cos \alpha|}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} + \frac{\left[1 + y'' (-\sin \alpha) \left(\frac{1 - 2 \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) \right] \left(\frac{1 - 2 \cos \alpha}{|\cos \alpha|} \right)}{\frac{(1 - 2 \cos \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}} +$$

$$-\frac{(-1+2\cos\alpha)(-1+2\cos\alpha)\frac{|\cos\alpha|}{(1-2\cos\alpha)}}{\frac{(1-2\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} = 0$$

Ao desenvolvermos os cálculos:

$$\left(-\frac{1}{\cos\alpha} + \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}y''\right)\cos^2\alpha + \left[\frac{1-2\cos\alpha}{|\cos\alpha|} + \sin\alpha\left(\frac{1-2\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 y'' + (1-2\cos\alpha)\cos\alpha\right]\frac{\cos^2\alpha}{(1-2\cos\alpha)^2} = 0$$

E assim, temos que:

$$-\cos\alpha + \cos^3\alpha + (\sin\alpha)y'' - \frac{\cos\alpha}{1-2\cos\alpha} + (\sin\alpha)y'' + \frac{\cos^3\alpha}{1-2\cos\alpha} = 0$$

Então, podemos reescrever a equação como:

$$\begin{aligned}(2\sin\alpha)y'' &= \frac{\cos\alpha - \cos^3\alpha}{1-2\cos\alpha} + \cos\alpha - \cos^3\alpha \\ y'' &= \frac{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)}{2\sin\alpha} \left(\frac{1}{1-2\cos\alpha} + 1\right) \\ &= \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2} \cdot \left(\frac{2-2\cos\alpha}{1-2\cos\alpha}\right) \\ &= \frac{\cos\alpha\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{(1-2\cos\alpha)}\end{aligned}$$

Dada a primeira devida de ε_n : $\frac{(x+1-2\cos\alpha) + (y+2\sin\alpha)y'}{\sqrt{(x+1-2\cos\alpha)^2 + (y+2\sin\alpha)^2}} + \frac{(x-1) + y.y'}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$, calcularemos a sua derivada segunda de forma análoga a derivada de segunda ordem de ε_1 .

$$\begin{aligned}&\frac{[1 + (y')^2 + yy'' + 2\sin\alpha y'']\sqrt{(x+1-2\cos\alpha)^2 + (y+2\sin\alpha)^2}}{(x+1-2\cos\alpha)^2 + (y+2\sin\alpha)^2} + \\ &-\frac{[x+1-2\cos\alpha + (y+2\sin\alpha)y']\left[\frac{x+1-2\cos\alpha + (y+2\sin\alpha)y'}{\sqrt{(x+1-2\cos\alpha)^2 + (y+2\sin\alpha)^2}}\right]}{(x+1-2\cos\alpha)^2 + (y+2\sin\alpha)^2} + \\ &+\frac{[1 + (y')^2 + yy'']\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - (x-1 + yy')\left[\frac{x-1 + yy'}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}\right]}{(x+1)^2 + y^2} = 0\end{aligned}$$

Sendo $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, e portanto $\cos \alpha < 0$ e $\sin \alpha > 0$ e substituindo $y' = 0$ e (x, y) por $G_1 = \left(0, -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[1 + y''(-\sin \alpha) \left(\frac{1 - 2 \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) \right] \left(\frac{1 - 2 \cos \alpha}{|\cos \alpha|} \right) + \\ & \frac{(1 - 2 \cos \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{(1 - 2 \cos \alpha)(1 - 2 \cos \alpha) \frac{|\cos \alpha|}{(1 - 2 \cos \alpha)} + \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} y'' \right) \frac{1}{|\cos \alpha|} - |\cos \alpha|}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 0 \end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1 - 2 \cos \alpha}{|\cos \alpha|} + \sin \alpha \left(\frac{1 - 2 \cos \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 y'' + (1 - 2 \cos \alpha) \cos \alpha \right] \frac{\cos^2 \alpha}{(1 - 2 \cos \alpha)^2} + \\ & + \left(-\frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} y'' \right) \cos^2 \alpha = 0 \end{aligned}$$

E então, obtemos:

$$-\frac{\cos \alpha}{1 - 2 \cos \alpha} + (\sin \alpha) y'' + \frac{\cos^3 \alpha}{1 - 2 \cos \alpha} - \cos \alpha + \cos^3 \alpha + (\sin \alpha) y'' = 0$$

Reescrevendo a equação, teremos:

$$\begin{aligned} (2 \sin \alpha) y'' &= \frac{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}{1 - 2 \cos \alpha} + \cos \alpha - \cos^3 \alpha \\ y'' &= \frac{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{2 \sin \alpha} \left(\frac{1}{1 - 2 \cos \alpha} + 1 \right) \\ &= \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{2} \cdot \left(\frac{2 - 2 \cos \alpha}{1 - 2 \cos \alpha} \right) \\ &= \frac{\cos \alpha \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{(1 - 2 \cos \alpha)} \end{aligned}$$

Desse modo verificamos que as derivadas de segunda ordem de ε_1 e ε_n são iguais no ponto $G_1 = \left(0, -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)$ e valem $\frac{\cos \alpha \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{(1 - 2 \cos \alpha)}$. \square

Algumas consequências imediatas desse processo para construção de curvas por um polígono regular de n lados incluem:

1. Ao contrário do caso geral, temos que nos preocupar com apenas um tipo de elipse: a construída com tamanho de corda l .
2. A curva fechada que obtemos é uma união de n -arcos elípticos de classe C^2 .

Pela *Construção do Jardineiro*, na próxima seção, construiremos um bilhar constituído por arcos de elipses a partir de um hexágono regular e posteriormente verificaremos algumas propriedades análogas dele com as do bilhar elíptico.

5.2.2 Um exemplo de bilhar hexagonal

Dentre as curvas constituídas por arcos de elipses, vamos considerar aquela que é formada por um polígono K tal que K é um hexágono regular com lado de comprimento 2 e com vértices $F_1 = (-1, \sqrt{3})$, $F_2 = (1, \sqrt{3})$, $F_3 = (2, 0)$, $F_4 = (1, -\sqrt{3})$, $F_5 = (-1, -\sqrt{3})$ e $F_6 = (-2, 0)$.

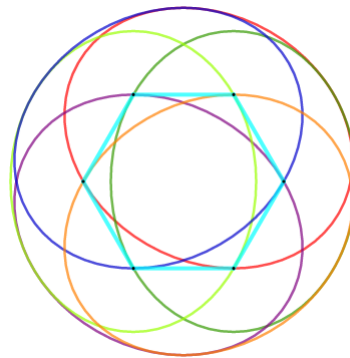


Figura 5.6: Bilhar pela *Construção do Jardineiro* construído por um hexágono regular

Como $n = 6$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ e $d = -\frac{1}{\cos \alpha} = 2$, então o comprimento l da corda é dado por:

$$l = 2(n - 1) + 2d = 14$$

Cada um dos seis arcos elípticos usa um único par de focos F_i, F_j , onde i e j são ambos pares ou ambos ímpares. Denotaremos \widehat{ij} para um arco focado em F_i, F_j .

A equação para o arco $\widehat{24}$ é:

$$\frac{(x-1)^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Observe que o centro da elipse é o ponto médio de F_2 e F_4 e o eixo maior é $2a = 6$ e portanto, $a = 3$. Sendo $2c$ a distância de F_2F_4 , teremos que $d_{F_2F_4} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$, assim $c = \sqrt{3}$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, sendo $2a$ o eixo maior, $2b$, o eixo menor e $2c$ a distância focal,

obteremos que $b = \sqrt{6}$. Contemple na figura 5.7 que o eixo maior é uma translação do eixo vertical, o que justifica a equação para o arco $\widehat{24}$.

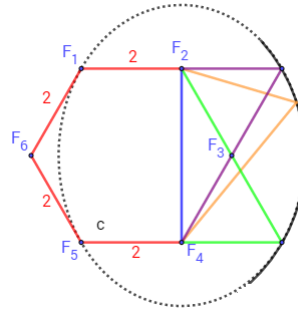


Figura 5.7: Biliar de corda hexagonal - arco $\widehat{24}$

Vamos mostrar que a equação para o arco $\widehat{13}$ da figura 5.8 é dada por $11y^2 + 2\sqrt{3}xy - 12\sqrt{3}y + 9x^2 - 12x = 60$.

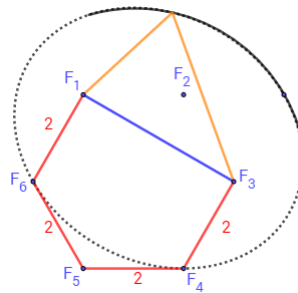


Figura 5.8: Biliar de corda hexagonal - arco $\widehat{13}$

Sabemos que a soma das distâncias de um ponto da elipse aos focos é igual a $2a$, ou seja:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} &= 6 \\ \sqrt{(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2} &= 6 - \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 &= 36 - 12\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ 6x - 2\sqrt{3}y - 36 &= -12\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\ 36x^2 - 24\sqrt{3}xy - 432x + 12y^2 + 144\sqrt{3}y + 1296 &= 144(x^2 - 4x + 4 + y^2) \\ -132y^2 - 24\sqrt{3}xy + 144\sqrt{3}y - 108x^2 + 144x &= -720 \quad : (-12) \\ 11y^2 + 2\sqrt{3}xy - 12\sqrt{3}y + 9x^2 - 12x &= 60 \end{aligned}$$

A interseção dos arcos $\widehat{13}$ e $\widehat{24}$ é mostrada na figura 5.9

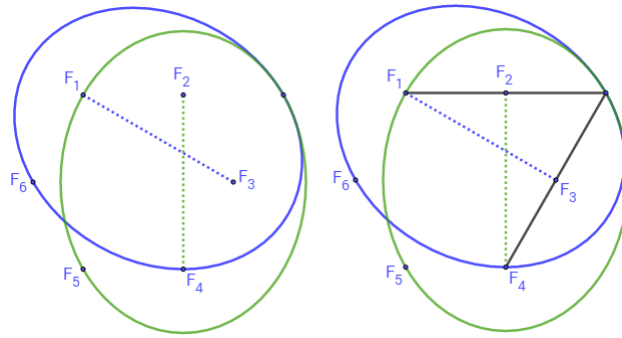


Figura 5.9: Interseção dos arcos $\widehat{13}$ e $\widehat{24}$

Analisamos que a interseção dos arcos é em $y = \sqrt{3}$, daí:

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)^2}{6} + \frac{y^2}{9} &= 1 \\ \frac{(x-1)^2}{6} + \frac{3}{9} &= 1 \\ \frac{(x-1)^2}{6} &= 1 - \frac{1}{3} \\ (x-1)^2 &= 4 \\ x-1 &= 2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Verificamos na equação do arco $\widehat{13}$, que o ponto de interseção é exatamente $(3, \sqrt{3})$, pois ao substituirmos esse ponto, mostramos a identidade:

$$\begin{aligned} 11y^2 + 2\sqrt{3}xy - 12\sqrt{3}y + 9x^2 - 12x &= 60 \\ 11 \cdot 3 + 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} - 12\sqrt{3}^2 + 9 \cdot 9 - 12 \cdot 3 &= \\ 33 + 18 - 36 + 81 - 36 &= \\ 132 - 72 &= 60 \end{aligned}$$

Apesar de já termos verificado durante a demonstração para um polígono qualquer, vamos mostrar que para o exemplo as derivadas de primeira e segunda ordens de ambas equações coincidem no ponto de interseção, garantindo assim a continuidade de classe C^2 .

Inicialmente consideremos a equação $\frac{(x-1)^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$, ao derivarmos implicitamente e

substituímos o ponto $(3, \sqrt{3})$ obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{2(x-1)}{6} + \frac{2y}{9} \cdot y' &= 0 \\ y' &= \frac{9}{2y} \cdot \frac{-x+1}{3} \\ &= \frac{3(-x+1)}{2y} \\ &= \frac{3(-3+1)}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{3}} \\ &= -\sqrt{3}\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para a equação $11y^2 + 2\sqrt{3}xy - 12\sqrt{3}y + 9x^2 - 12x = 60$, teremos:

$$22y \cdot y' + 2\sqrt{3}y + 2\sqrt{3}xy' - 12\sqrt{3}y' + 18x - 12 = 0$$

Reorganizando a equação:

$$\begin{aligned}y'(22y + 2\sqrt{3}x - 12\sqrt{3}) &= -2\sqrt{3}y - 18x + 12 \\ y' &= \frac{-2\sqrt{3}y - 18x + 12}{(22y + 2\sqrt{3}x - 12\sqrt{3})} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}^2 - 18 \cdot 3 + 12}{(22\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 3 - 12\sqrt{3})} \\ &= \frac{-6 - 54 + 12}{16\sqrt{3}} \\ &= \frac{-48}{16\sqrt{3}} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{3}} \\ &= -\sqrt{3}\end{aligned}$$

Assim, concluímos que as derivadas primeiras de $\frac{(x-1)^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$ e de $11y^2 + 2\sqrt{3}xy - 12\sqrt{3}y + 9x^2 - 12x = 60$ são iguais no ponto $(3, \sqrt{3})$ e vale $-\sqrt{3}$.

Discorrendo as derivadas segundas de $y' = \frac{3(-x+1)}{2y}$ e de $y' = \frac{-2\sqrt{3}^2 - 18 \cdot 3 + 12}{(22\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 3 - 12\sqrt{3})}$,

e substituindo o ponto $(3, \sqrt{3})$ e $y' = -\sqrt{3}$ alcançaremos:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{-6y - (-3x + 3)2y'}{4y^2} \\ &= \frac{-6\sqrt{3} + 6.3.(-\sqrt{3}) - 6.(-\sqrt{3})}{4.3} \\ &= \frac{-3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

De forma similar:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(-2\sqrt{3}y' - 18).(22y + 2\sqrt{3}x - 12\sqrt{3}) - (-2\sqrt{3}y - 18x + 12)(22y' + 2\sqrt{3})}{(22y + 2\sqrt{3}x - 12\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{[-2\sqrt{3}.(-\sqrt{3}) - 18].(22.\sqrt{3} + 2\sqrt{3}.3 - 12\sqrt{3}) - (-2\sqrt{3}^2 - 18.3 + 12)[22.(-\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}]}{(22.\sqrt{3} + 2\sqrt{3}.3 - 12\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{-12.16\sqrt{3} - (-6 - 42)(-20\sqrt{3})}{(16\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{48(-4\sqrt{3} - 20\sqrt{3})}{256.3} \\ &= \frac{-24\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{-3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que os arcos $\widehat{13}$ e $\widehat{24}$ obtido a partir de polígono K tal que K é um hexágono regular com lado de comprimento 2 e com vértices $F_1 = (-1, \sqrt{3})$, $F_2 = (1, \sqrt{3})$, $F_3 = (2, 0)$, $F_4 = (1, -\sqrt{3})$, $F_5 = (-1, -\sqrt{3})$ e $F_6 = (-2, 0)$ são, naturalmente, curvas suaves e as equações de ambos arcos, suas primeiras e segundas derivadas tem o mesmo valor no ponto $(3, \sqrt{3})$, garantindo assim a continuidade de C^2 .

5.2.3 Algumas propriedades análogas do bilhar elíptico e do bilhar constituído por arcos de elipses a partir de um hexágono regular pela construção de cordas

Nessa seção avaliaremos algumas propriedades análogas do bilhar elíptico com o de cordas (método do jardineiro). Uma das propriedades do bilhar elíptico é o resultado que nos diz essencialmente que podemos agrupar a trajetória em três famílias. A trajetória dentro de um bilhar elíptico pode ser:

- a trajetória focal, que passa sempre pelos dois focos alternadamente.
- a trajetória interior, que intercepta sempre o segmento fechado entre os focos.
- a trajetória exterior, que nunca intercepta o segmento entre dois focos.

De um modo completamente análogo ao do bilhar elíptico, para o bilhar hexagonal temos também famílias de trajetórias focal, interno e a exterior. Uma vez que pela construção pelo método de jardineiro temos a união de arcos de elipses, fazendo assim com que a analogia das propriedades seja possível.

Teorema 5.2.2. *Considere uma trajetória proveniente do ponto P_0 dentro de um bilhar de corda hexagonal K com vértices $P_1; P_2; \dots; P_n$:*

- i) *Se o segmento $\overline{P_0P_1}$ da trajetória do bilhar passar por um vértice de K , então cada segmento $\overline{P_iP_{i+1}}$ passará por um vértice de K .*
- ii) *Se o segmento $\overline{P_0P_1}$ de uma trajetória do bilhar cruzar o hexágono K , então todos os segmentos $\overline{P_iP_{i+1}}$ irão cruzá-los.*
- iii) *Se o segmento $\overline{P_0P_1}$ não cruza o hexágono K , então nenhum segmento $\overline{P_iP_{i+1}}$ irá cruzá-lo.*

Demonstração. i) Existem duas linhas extremas de apoio em cada vértice e qualquer segmento ("raio") que se encontra no ângulo formando por eles é também uma linha suporte de K . Assim, para começar, sem perda de generalidade, consideraremos o segmento ("raio") de um bilhar que se encontra no ângulo formando pelos dois extremos das linhas de sustentação do vértice F_2 e que terá necessariamente um ponto extremo no arco $\widehat{24}$ e o outro no arco $\widehat{26}$. Se o ponto no arco $\widehat{24}$ é escolhido como o ponto inicial P_0 , então uma linha saindo de P_0 e atravessando o vértice F_2 irá cruzar o arco $\widehat{26}$ em algum ponto P_1 . Devido à propriedade reflexiva das elipses, um "raio" deixando um foco, refletirá do arco atingido e passará através do segundo foco, nesse caso, deixando o foco F_2 , refletirá do arco $\widehat{26}$ e passará através do segundo foco F_6 e atingirá o arco $\widehat{46}$ em algum ponto P_2 . Então, teremos novamente pela propriedade reflexiva das elipses, um "raio" (através de P_2 e F_4) que se encontra em um ângulo formado pelas duas linhas extremas de apoio para o vértice F_4 que refletirá do arco $\widehat{46}$ passando pelo foco F_4 e atingirá novamente o arco $\widehat{24}$. Isso significa que a trajetória do bilhar permanece.

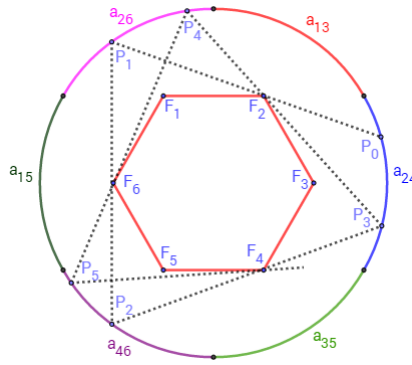


Figura 5.10: Trajetória do bilhar em uma linha de apoio de K

ii) Consideremos agora o ângulo formado por duas linhas suportes de K através de um ponto P_0 no arco $\widehat{24}$. Uma delas passando por F_2 e a outra por F_4 . Devido a isso, elas são linhas de suporte do segmento fechado F_2F_4 que é o segmento entre os dois focos da elipse correspondentes ao arco $\widehat{24}$.

Agora vamos considerar a emissão de "raios" de P_0 aqueles estritamente dentro e aqueles estritamente fora do ângulo convexo $\widehat{F_2P_0F_4}$. Os "raios" estritamente dentro do ângulo convexo $\widehat{F_2P_0F_4}$ irão cruzar o interior de K e o segmento F_2F_4 , enquanto os "raios" estritamente fora do ângulo convexo $\widehat{F_2P_0F_4}$ não irão cruzar o interior de K e nem o segmento $\overline{F_2F_4}$. No primeiro caso obteremos um segmento $\overline{P_0P_1}$ onde P_1 é algum ponto que pertence ao arco $\widehat{j; j+2}$. Levando em consideração o inverso da trajetória, ou seja, que começa no ponto P_1 e termina no ponto P_0 , é natural que intercepta o interior de K , mas então ele tem que cruzar o interior de $\overline{F_jF_{j+2}}$. Por isso a trajetória original intercepta este segmento e tem que fazê-lo novamente após a reflexão com o limite do arco. Isso implica que em seguida, o segmento refletido da trajetória também intercepta o interior de K .

A demonstração acima é similar a proposição 4.1.2 demonstrada no capítulo anterior, ou seja, sejam $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ segmentos consecutivos da mesma trajetória, segue pelo lema 4.1.1 que $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_2P_1F_4}$ tem a mesma bissetriz. Logo, se $\overline{P_0P_1}$ intersecta $\overline{F_2F_4}$, então $\overline{P_1P_2}$ também intersecta $\overline{F_2F_4}$.

Por indução sobre n , sendo $P_0; P_1; \dots; P_n$ os pontos em que a trajetória colide com a borda dos arcos de elipse, prova-se que se um dos segmentos da trajetória intersecta $\overline{F_2F_4}$ então os restantes também o intersectam.

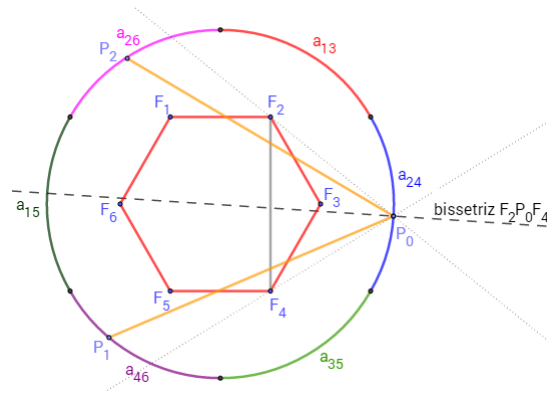


Figura 5.11: Trajetória do bilhar cruzando K

iii) Ao considerarmos, sem perda de generalidade, um segmento ("raio") $\overline{P_0P_1}$ com sua origem em P_0 saindo do arco $\widehat{13}$ e atingindo o arco $\widehat{24}$ no ponto P_1 de tal forma que P_0P_1 cruza o eixo maior do arco $\widehat{24}$ fora do segmento F_2F_4 , é inerente perceber que o segmento não interceptará o interior de K . Pela proposição 4.1.2, ou seja, sejam $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_1P_2}$ segmentos consecutivos da mesma trajetória, segue pelo lema 4.1.1 que $\widehat{P_0P_1P_2}$ e $\widehat{F_2P_1F_4}$ tem a mesma bissetriz. Logo, se $\overline{P_0P_1}$ não intersecta $\overline{F_2F_4}$, então $\overline{P_1P_2}$ também não vai intersectar $\overline{F_2F_4}$.

Por indução sobre n , sendo $P_0; P_1; \dots; P_n$ os pontos em que a trajetória colide com a borda dos arcos de $\widehat{j; j+2}$ e levando em consideração a proposição 4.1.2 e o lema 4.1.1, prova-se que se um dos segmentos da trajetória não intersecta K então os restantes também não o intersectam.

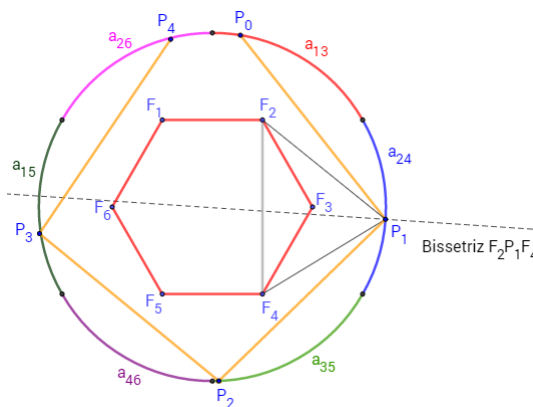


Figura 5.12: Trajetória do bilhar não cruzando K

□

Outro resultado importante para o bilhar dentro de uma elipse indica que uma trajetória de bilhar através dos focos converge para o eixo maior da elipse. Na prática, isto significa que qualquer órbita focal se torna rapidamente indistinguível a um traço repetido no eixo principal

da elipse.

Considerando que uma órbita focal no caso da elipse converge para a órbita "ida e volta" (eixo principal da elipse), no caso do bilhar de cordas hexagonal converge para qualquer um dos triângulos equiláteros formados por três vértices do hexágono.

Isso é o mesmo que dizer, que se considerarmos o caso extremo do item i , em que $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ estão na interseção de dois arcos, o segmento ("raio") passará por dois focos, cada foco de uma elipse distinta, atingirá a interseção de outros dois arcos no ponto P_1 e pela propriedade reflexiva das elipses, o "raio" saindo de P_1 atingirá dois outros focos de elipses distintas, porém referente as elipses dos dois focos iniciais (na figura 5.13: F_3 e F_2, F_1 e F_6 respectivamente). Repetindo o processo, pela construção, encontraremos a trajetória que será um triângulo equilátero. Isso também significa que a trajetória do bilhar permanece.

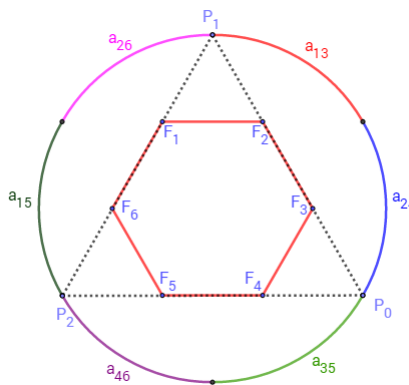


Figura 5.13: Trajetória do bilhar em uma linha de K

De toda forma, antes de declarar o resultado em termos mais precisos, precisamos de um resultado auxiliar que fornece limites para os tamanhos dos ângulos entre raios de entrada e saída em órbitas focais, o que será mostrado a partir do teorema a seguir.

Teorema 5.2.3. *Para uma órbita focal do bilhar hexagonal, o ângulo entre os segmentos de entrada e saída é limitado ao intervalo de $60^\circ \leq \theta \leq 70,53^\circ$.*

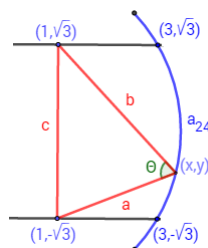


Figura 5.14: Bilhar hexagonal

Demonstração. Devido a simetria presente no bilhar, podemos restringir nossa atenção a um determinado arco, neste caso trabalharemos com o arco $\widehat{24}$.

Anteriormente verificamos que a equação da elipse que determina esse arco é dada por $\frac{(x-1)^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$. Consideremos um ponto (x,y) que pertence ao arco $\widehat{24}$ conforme figura 5.14. Os focos $F_2 = (1, \sqrt{3})$ e $F_4 = (1, -\sqrt{3})$ formam o segmento c . Do F_2 ao ponto (x,y) temos o segmento b e do F_4 ao mesmo ponto (x,y) formamos o segmento a . Chamamos de θ o ângulo formado pelos segmentos b e a (segmentos de entrada e saída da órbita focal do bilhar hexagonal). Pela lei dos cossenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta,$$

sendo $c = \sqrt{(1-1)^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{12}$, e portanto:

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - 12}{2ab},$$

Sendo $a = \sqrt{(x-1)^2 + (y + \sqrt{3})^2}$ e $b = \sqrt{(x-1)^2 + (y - \sqrt{3})^2}$, ao substituirmos na equação anterior obtemos:

$$\cos \theta = \frac{(x-1)^2 + (y + \sqrt{3})^2 + (x-1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 - 12}{2\sqrt{(x-1)^2 + (y + \sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y - \sqrt{3})^2}}$$

Da equação da elipse $\frac{(x-1)^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$, dispomos que $(x-1)^2 = 6 - \frac{2y^2}{3}$. Fazendo uma nova substituição na equação de $\cos \theta$:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{12 - \frac{4y^2}{3} + (y + \sqrt{3})^2 + (y - \sqrt{3})^2 - 12}{2\sqrt{\left[6 - \frac{2y^2}{3} + (y + \sqrt{3})^2\right] \cdot \left[6 - \frac{2y^2}{3} + (y - \sqrt{3})^2\right]}} \\ &= \frac{-\frac{4y^2}{3} + 2y^2 + 6}{2\sqrt{\left(6 - \frac{2y^2}{3} + y^2 + 2y\sqrt{3} + 3\right)\left(6 - \frac{2y^2}{3} + y^2 - 2y\sqrt{3} + 3\right)}} \\ &= \frac{2y^2 + 18}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{\left(\frac{27 + y^2 + 6y\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{27 + y^2 - 6y\sqrt{3}}{3}\right)}}{3} \\ &= \frac{y^2 + 9}{\sqrt{729 + 54y^2 + y^4 - 108y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y^2 + 9}{\sqrt{(27 - y^2)^2}} \\
&= \frac{y^2 + 9}{|27 - y^2|}
\end{aligned}$$

Como $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$ e pela simetria de $-\sqrt{3} \leq y \leq 0$ e $0 \leq y \leq \sqrt{3}$, o menor valor do $\cos \theta$ será quando $y = 0$ e o maior quando $y = -\sqrt{3}$ ou $y = \sqrt{3}$, ou seja, $\frac{1}{3} \leq \cos \theta \leq \frac{1}{2}$, de modo que $60^\circ \leq \theta \leq 70,53^\circ$. \square

Sem perda de generalidade, vamos escolher três rebotes consecutivos. Os vértices escolhidos para este triângulo rebote são $S_1 = (0, 2\sqrt{3})$, $S_3 = (3, -\sqrt{3})$ e $S_5 = (-3, -\sqrt{3})$, pois são os "os pontos de cola" G_i calculados na seção 5.2.1.

Considere uma trajetória de bilhar, passando pelo foco F_2 , cujo ponto inicial P_0 está no arco $\widehat{24}$. Observe que, por exemplo, o ponto P_4 é mais perto do ponto S_1 do que de P_1 , e então o P_7 está ainda mais perto e assim por diante. Percebemos assim que $P_7P_8P_9$ se assemelha ao triângulo $S_1S_5S_3$, conforme mostra a figura 5.15:

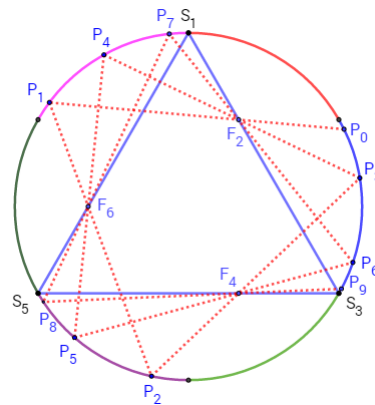


Figura 5.15: Trajetória aproximada do triângulo $S_1S_5S_3$

O que nos leva a provar o próximo teorema, que correlaciona com a proposição 4.1.1:

Teorema 5.2.4. *Se uma trajetória de bilhar percorre um linha de apoio K , de modo que ele vai alternadamente através dos pontos $F_2; F_6; F_4$ então sua trajetória tenderá para a trajetória periódica $S_1S_5S_3$.*

Demonstração. Dada uma trajetória proveniente do ponto P_0 dentro de um bilhar de corda hexagonal K com vértices $P_1; P_2; \dots; P_n$ e:

- $s_i = \overline{P_i F_j}$ com $j = 2, 4, 6$.
 $j = 6$ se $i = 3n - 2$;
 $j = 4$ se $i = 3n - 1$; e
 $j = 2$ se $i = 3n, n \in \mathbb{N}$.
- $\rho_i = \widehat{P_i F_2 F_6}$, se $i = 3n - 2$;
 $\rho_i = \widehat{P_i F_6 F_4}$, se $i = 3n - 1$; e
 $\rho_i = \widehat{P_i F_4 F_2}$, se $i = 3n, n \in \mathbb{N}$.
- $\alpha_i = \widehat{P_{i-1} P_i P_{i+1}}$

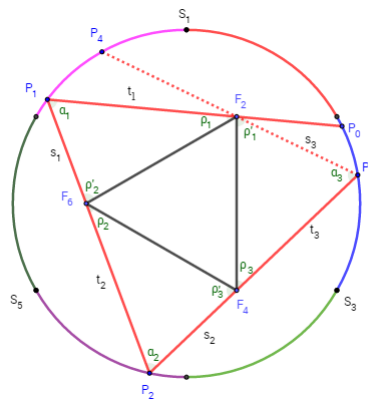


Figura 5.16: Trajetória que se torna indistinguível ao traçado do triângulo $S_1S_2S_3$ e as sequências $\{s_i\}$; $\{\rho_i\}$ e $\{\alpha_i\}$

Podemos então considerar as sequências $\{s_i\}$; $\{\rho_i\}$ e $\{\alpha_i\}$. Analisando a figura 5.16 verificamos que são sequências limitadas.

De fato, pelo teorema 5.2.3, temos que $\frac{\pi}{3} \leq \alpha_i \leq \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Dando continuidade, vamos mostrar inicialmente que $\{\rho_i\}$ é uma sequência não decrescente:

Subtraindo

$$\rho_{i+1} + \rho'_{i+1} = \frac{2\pi}{3}$$

de

$$\alpha_i + \rho_i + \rho'_{i+1} = \pi,$$

teremos:

$$\rho_{i+1} - \alpha_i - \rho_i = -\frac{\pi}{3}$$

$$0 \leq \alpha_i - \frac{\pi}{3} = \rho_{i+1} - \rho_i$$

e portanto $\rho_i \leq \rho_{i+1}$.

Sendo $\rho_i < \frac{2\pi}{3}$.

Assim, se $\rho_i \leq \rho_{i+1}$, logo a sequência $\{\rho_i\}$ converge porque é monótona e limitada.

Então se $i \rightarrow \infty$,

$$\alpha_i - \frac{\pi}{3} = \rho_{i+1} - \rho_i \rightarrow 0$$

Assim sendo, $\alpha_i \rightarrow \frac{\pi}{3}$.

Da lei dos cossenos, $12 = s_i^2 + t_i^2 - 2s_it_i \cos \alpha_i$ e de $s_i + t_i = 6$, obtemos:

$$\begin{aligned} 12 &= s_i^2 + (6 - s_i)^2 - 2s_i(6 - s_i) \cos \alpha_i \\ 12 &= 2s_i^2 - 12s_i + 36 - 2s_i(6 - s_i) \cos \alpha_i \\ s_i(6 - s_i) \cos \alpha_i &= 12 + s_i^2 - 6s_i \\ \cos \alpha_i &= \frac{12 + s_i^2 - 6s_i}{s_i(6 - s_i)} \end{aligned}$$

Consequentemente se $i \rightarrow \infty$, teremos $s_i \rightarrow s^*$ e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{12 + s^{*2} - 6s^*}{s^*(6 - s^*)} \\ 24 + 2s^{*2} - 12s^* - 6s^* + s^{*2} &= 0 \\ 3s^{*2} - 18s^* + 24 &= 0 \\ s^{*2} - 6s^* + 8 &= 0 \end{aligned}$$

que produz $s^{*'} = 2$ e $s^{*''} = 4$.

Usando a lei dos senos, obtemos:

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sqrt{12}} = \frac{\sin \rho_i}{s_i}$$

Se $i \rightarrow \infty$, então,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{sen } \rho^*}{4}$$

$$\text{sen } \rho^* = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{sen } \rho^* = 1$$

e então temos que $\rho^* = \frac{\pi}{2}$.

Logo se $i \rightarrow \infty$, temos que $\alpha_i \rightarrow \frac{\pi}{3}$ e $\rho_i = \frac{\pi}{2}$, então $\frac{\pi}{6} \leq \rho_i \leq \frac{\pi}{2}$.

Sabemos que $s_i + t_i = 6$ e da lei dos cossenos temos

$$s_i^2 = 12 + t_i^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot t_i \cos \rho_i$$

$$(s_i - t_i)(s_i + t_i) = 12 - 4\sqrt{3}t_i \cos \rho_i$$

$$(s_i - 6 + s_i) \cdot 6 = 12 - 4\sqrt{3}(6 - s_i) \cos \rho_i$$

$$12s_i - 4\sqrt{3}s_i \cos \rho_i = 48 - 24\sqrt{3} \cos \rho_i$$

$$s_i(3 - \sqrt{3} \cos \rho_i) = 12 - 6\sqrt{3} \cos \rho_i$$

$$s_i = \frac{12 - 6\sqrt{3} \cos \rho_i}{3 - \sqrt{3} \cos \rho_i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{12\sqrt{3} - 18 \cos \rho_i}{3\sqrt{3} - 3 \cos \rho_i}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} - 6 \cos \rho_i}{\sqrt{3} - \cos \rho_i}$$

Dada a função $f(\rho) = \frac{4\sqrt{3} - 6 \cos \rho}{\sqrt{3} - \cos \rho}$, é possível verificar através da derivada primeira de $f(\rho)$ que $f'(\rho) \geq 0$ em todo o intervalo $\frac{\pi}{6} \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}$ e portanto $f(\rho)$ é não decrescente. De fato,

$$f'(\rho) = \frac{6 \text{sen } \rho (\sqrt{3} - \cos \rho) - (4\sqrt{3} - 6 \cos \rho) \text{sen } \rho}{(\sqrt{3} - \cos \rho)^2}$$

$$f'(\rho) = \frac{2\sqrt{3} \text{sen } \rho}{(\sqrt{3} - \cos \rho)^2} \geq 0 \quad \forall \quad \frac{\pi}{6} \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}.$$

Assim, se $\rho_i \leq \rho_{i+1}$, então $s_i = f(\rho_i) \leq f(\rho_{i+1}) = s_{i+1}$. Logo a sequência $\{s_i\}$ também converge porque é monótona e limitada.

Podemos então considerar as sequências $\{s_i\}$; $\{\rho_i\}$ e $\{\alpha_i\}$ limitadas e:

- $2 \leq s_i \leq 4$

- $\frac{\pi}{6} \leq \rho_i \leq \frac{\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{3} \leq \alpha_i \leq \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

□

Finalizando esse último capítulo, podemos dizer que além do que já foi mencionado sobre os bilhares elípticos, podemos agora apresentar algumas propriedades relevantes do bilhar obtido pela *Construção do Jardineiro* como:

1. O limite desse bilhar é duas vezes continuamente diferenciável;
2. O bilhar para além da região planar delimitada por seis arcos elípticos, também temos um conjunto de pontos muito especiais: os focos cujas influências não podem ser ignoradas; e
3. Apresentam 3 tipos de trajetórias: passando pelos focos, passando pelo segmento que unem os focos e passando externamente ao segmento que une os focos.

6 Conclusão

Antes mesmo de tratarmos do objeto desse estudo, sentimos a necessidade de caracterizar uma elipse, mostrar a equação geral de 2^o. grau que a define e trabalharmos com sua translação e rotação. Baseado nas definições e consequências iniciais, dedicamos aos resultados e conceitos importantes: o princípio da reflexão das elipses, a definição de bilhar, falamos de um bilhar elíptico e finalmente desenvolvemos um capítulo sobre as curvas constituídas por arcos de elipse.

Nesse trabalho foi destacado a aplicação em jardinagem quando se pretende, por exemplo, construir um canteiro elíptico. O procedimento é muito simples: arranja-se um fio e prendem-se as pontas a duas estacas, que são afixadas ao chão de modo a que a distância entre elas seja menor do que o comprimento do fio. Com uma terceira estaca, e mantendo o fio esticado, desenha-se uma linha no chão, e a linha obtida é uma elipse.

Em geral, verificamos que se supormos em um bilhar elíptico que a bola se mova sem atrito, a trajetória percorrida pela bola pode ser classificada em três tipos: Sempre passa pelos focos, sempre passa exterior aos segmentos que unem os focos ou sempre passa interior ao segmento que unem os focos.

Além disso, observamos utilizando da *Construção do Jardineiro* que se fixado um polígono convexo de n lados, esticamos um laço de comprimento l ao redor deste até um ponto P e movemos este ponto ao redor do polígono, a curva obtida por essa construção é constituída por arcos de elipses. Observa-se que para a construção usamos polígonos regulares de 5 ou mais lados, pois esses polígonos podem ser "estrelados", sendo uma característica importante que os vértices das "estrelas" são os "pontos de cola" entre duas curvas elípticas, e uma trajetória entre esses pontos é periódica. Ressalta-se que para criar os arcos elípticos usamos 2 vértices do polígono por vez, de três vértices consecutivos, pegamos os 2 vértices extremos que funcionam como focos dos arcos elípticos.

Das curvas constituídas por arcos de elipses, estudamos algumas propriedades delas em função do parâmetro l e mostramos que também neste caso a influência dos focos não pode ser ignorada, o que nos permitiu classificar as trajetórias em três tipos, sendo estas: Focais, exterior e interior.

Um dos resultados mais interessantes que mostramos é que o limite desse bilhar é duas vezes continuamente diferenciável.

Finalmente, vamos mencionar brevemente um problema aberto de longa data, muito fre-

quentemente atribuído ao G.D. Birkhoff, embora originalmente por Poritsky, a conhecida conjectura de Birkhoff-Poritsky: Basicamente afirma que entre todos os bilhares de curvas suaves fechadas convexas, os únicos bilhares completamente integráveis são os bilhares em elipses[7].

Então, queremos concluir com uma pergunta: de todas as provas reunidas para o bilhar hexagonal de cordas, ainda podemos ter certeza de que o bilhar elíptico é o único bilhar convexo integrável? A conjectura ainda está em aberto e muitos matemáticos acreditam ser verdadeira. Vimos por outro lado, que curvas constituídas por arcos de elipse, são integráveis.

Bibliografia

- [1] ANDRADE, Rodrigo Manoel Dias. **Bilhares planares**. Dissertação de mestrado - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. São José do Rio Preto: [s.n.], 2012.
- [2] CALVOSO, Julio Cesar **Estudo das cônicas com aplicações e o software Geogebra como ferramenta de apoio didático**, 2014.
- [3] DELGADO, Jorge e FRENSEL, Katia e CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria analítica**, Coleção Profmat, 2013.
- [4] DE SOUSA, Denis Mota. **UM PROBLEMA INVERSO DE RECONSTRUÇÃO DE FONTE PARA A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO**. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- [5] dos SANTOS, Wagner José. **Explorando o Bilhar Elíptico com ferramentas computacionais: Uma proposta de ensino**, 2013.
- [6] FERNANDES, Wilker Thiago Resende. **Propriedades Geométricas de Bilhares Planares**. Trabalho de conclusão de curso de Bacharelado em Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2014.
- [7] FETTER, Hans L. Numerical exploration of a hexagonal string billiard. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 241, n. 8, p. 830-846, 2012.
- [8] LIMA, Elon Lages. **Análise real**. Impa, 2004.
- [9] LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no Plano**. 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [10] LOPES, Juracélio Ferreira **Cônicas e aplicações**. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2011.
- [11] PEREIRA, Fernanda Caroline Lesa; SILVA, Tatiana Gomes da. **Polígonos estrelados**. 2012.
- [12] RIBEIRO, FLávio de Oliveira **O Uso de Dobraduras no Processo de Ensino das Cônicas no Ensino Básico**, 2014.
- [13] SANTOS, Reginaldo J. **Algebra Linear e Aplicações**. Imprensa Universitária da UFMG, 2018.
- [14] SOUZA, Lindomar Duarte de et al. **Cônicas e suas propriedades notáveis**, 2014.

- [15] TABACHNIKOV, Serge - **Geometry and Billiards**, University Park - Department of Mathematics, Penn, 186 p, 2005.
- [16] TELES, Renato de Sá e SAA, Alberto Vazquez. **Bilhares: Aspectos Físicos e Matemáticos**. Artigo apresentado no 29^o. Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, Rio de Janeiro, 2013.