Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Compus Universitário do Araguaia

Aspectos teóricos e computacionais em polinômios

Evaldir Barbosa de Oliveira Junior
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins**

Trabalho financiado pela Capes e
Secretaria de Educação do Estado do Mato Grosso (SEDUC - MT)

Cuiabá - MT

Março de 2019

Aspectos teóricos e computacionais em polinômios

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Evaldir Barbosa de Oliveira Junior e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 19 de junho de 2019.

Prof. Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins
Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Prof. Dr. Manoel Rodrigo Moreira

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

O48a Oliveira Junior, Evaldir Barbosa de.
Aspectos teóricos e computacionais em polinômios / Evaldir Barbosa de Oliveira Junior. -- 2019
x, 88 f. ; 30 cm.

Orientador: Tibério Bittencourt de Oliveira Martins.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Pontal do Araguaia, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Polinômios. 2. Método de Newton-Raphson. 3. Polinômios Simétricos. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Aspectos teóricos e computacionais em polinômios"

Autor: Evaldir Barbosa de Oliveira Junior

defendida e aprovada em 31/05/2019.

Composição da Banca Examinadora:

Tibério Bittencourt

Presidente Banca/Orientador Doutor Tibério Bittencourt de Oliveira Martins
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Adilson A. Berlatto

Examinador Interno Doutor Adilson Antônio Berlatto
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Manoel Rodrigo Moreira
Instituição: Instituto Federal de Educação/Barra do Garças-MT

Barra do Garças, 31/05/2019.

Dedico este trabalho aos meus queridos pais, a minha esposa e as minhas filhas Karolinna e Giovanna.

Agradecimentos

- A Deus, por ter me dado forças e sabedoria para poder realizar meus estudos e concluir este trabalho;
- A minha família que me ajuda em tudo;
- Ao professor Tibério Bittencourt de Oliveira Martins pela paciência e dedicação oferecidas durante a construção deste trabalho;
- A todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional (PROFMAT - UFMT) que contribuíram com a minha formação acadêmica;
- A todos os meus companheiros de estudos da turma PROFMAT-UFMT 2017, em especial ao Quarteto Fantástico.

"Aqueles que são incapazes de compreender o que há de grande nas pequenas coisas, terminarão sem enxergar o que há de pequeno nas grandes coisas."

Paulo Coelho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos meios para encontrar raízes de polinômios computacionalmente e suas propriedades algébricas. Utilizamos, para isso, duas excelentes ferramentas: o Método de Newton-Raphson e a teoria dos Polinômios Simétricos. Na primeira parte, demonstramos a convergência local do Método de Newton-Raphson para funções reais. Também fazemos um estudo para verificar a existência e localização das raízes de um polinômio através da Regra dos Sinais de Descartes e das Sequências de Sturm. Em particular, fazemos um estudo detalhado do Método de Newton-Raphson para encontrar a raiz n-ésima de um número positivo. Em seguida, passa-se para estudo dos polinômios simétricos: uma ferramenta bastante útil na resolução de problemas algébricos de fatoração, de sistemas de equações não lineares, de equações de recorrência lineares e de algumas equações algébricas. No final, é apresentada uma lista de exercícios resolvidos, visando a fixação desses assuntos.

Palavras chave: Polinômios, Método de Newton-Raphson, Polinômios Simétricos.

Abstract

In this work we study ways to find polynomial roots computationally and their algebraic properties. We use two excellent tools for that: the Newton-Raphson Method and the Symmetric Polynomials theory. In the first part, we demonstrate the local convergence of the Newton-Raphson Method for real functions. We also perform a study to verify the existence and location of the roots of a polynomial through the Descartes' Rule of Signs and Sturm Sequences. In particular, we make a detailed study of the Newton-Raphson Method to find the nth root of a positive number. Next, we study symmetric polynomials: a very useful tool for solving algebraic problems of factorization, non-linear equation systems, linear recurrence equations and some algebraic equations. At the end, a list of solved exercises is presented, aiming at fixing these subjects.

Keywords: Polynomials, Newton-Raphson Method, Symmetric Polynomials.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Cálculo computacional das raízes de um polinômio

A primeira parte desse texto se dedica à seguinte questão numérica:

$$\boxed{\text{Dado um polinômio real } p, \text{ resolva } p(x) = 0.}$$

É parte do problema geral de encontrar uma raiz de uma função dada. Frequentemente o professor do ensino médio se depara com situações que envolve a resoluções de equações do tipo $p(x) = 0$. De um modo geral, isso ocorre nas mais diversas áreas das ciências exatas. O problema de encontrar numericamente a raiz n-ésima de um número real positivo a dado, por exemplo, é equivalente a encontrar uma raiz para o polinômio $p(x) = x^n - a$.

Consideremos, como um segundo exemplo retirado do Machado (2013), a seguinte situação de conteúdo do ensino médio envolvendo volume de um sólido geométrico:

"Considere uma chapa metálica de $30cm$ *por* $30cm$*. Se recortamos um quadrado de lado* x *em dada um dos cantos desta chapa e vincarmos as abas que sobraram obtemos uma caixa sem a tampa de volume aproximadamente* $15\,cm^3$*. Determine o valor, aproximado, da área dos quadrados retirados da chapa metálica."*

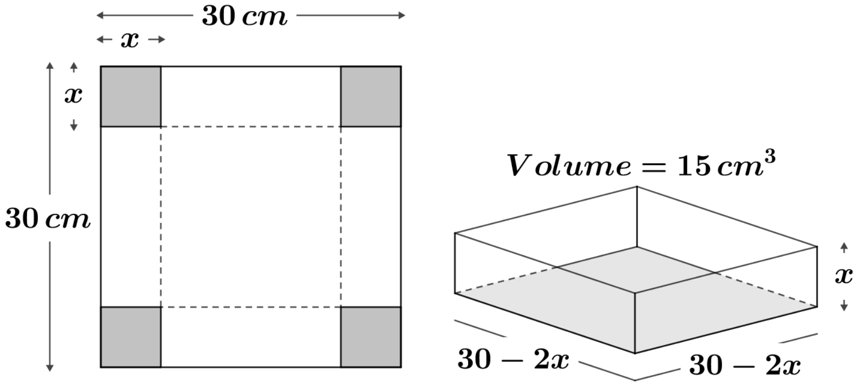

Figura 1: Área e Volume do segundo exemplo da introdução.

Observe que se efetuarmos o produto das três dimensões da caixa $(30-2x)(30-2x)x$, obtemos o volume, ou seja:

$$4x^3 - 120x^2 + 900x = 15,$$

isto é,

$$4x^3 - 120x^2 + 900x - 15 = 0,$$

com isso, verificamos que um problema de resolver uma equação, pode ser transformado facilmente em um problema de busca de raiz de uma função. De modo que, nesse sentido, os polinômios aparecerem frequentemente no cotidiano do aluno. Devido a essa frequência, isso faz com que dediquemos especial atenção ao conteúdo envolvendo equações polinomiais.

Mas como obter raízes reais de uma equação qualquer? Sabemos que, para algumas equações, como por exemplo, as equações polinomiais do segundo grau, existem fórmulas explícitas que dão as raízes em função dos coeficientes, no caso, a fórmula de Bhaskara. Para polinômios de grau 3 e 4, existem, respectivamente, as fórmulas de Cardano-Tartaglia, de 1545, e as de Ferrari, do mesmo século. Embora tivessem sido uma resposta muito importante para este, que era um problema milenar, na prática, são fórmulas de difícil manipulação, pois envolvem mudanças de variáveis, cálculo de discriminantes e muitas raízes. É difícil aproximar a raiz do polinômio mesmo tendo seu valor exato em mãos. No século XIX, Abel (1826) e Evariste Galois (Gonçalves, 1979, ver), provaram que, em geral, para polinômios de grau igual ou maior que 5, não existem fórmulas algébricas para encontrar raízes. Por isso, temos que nos contentar em encontrar apenas aproximações para esses zeros (soluções numéricas); mas isto não é uma limitação muito séria, pois, com o método que apresentaremos, conseguimos encontrar os zeros de uma função com qualquer precisão prefixada.

A ideia central destes métodos numéricos é partir de uma aproximação inicial para a raiz (um intervalo onde imaginamos a raiz estar contida) e em seguida refinar essa aproximação através de um processo iterativo.

Para isso, faremos nosso estudo dividido em duas etapas:

Primeira etapa: A localização de raízes ou isolamento das raízes, é o conteúdo do Capítulo 2, que consiste em obter intervalos que contém cada raiz. Nesta etapa é feita uma análise teórica e gráfica do polinômio $p(x)$. É importante destacar que o sucesso da localização das raízes de $p(x)$ depende fortemente da precisão desta análise. Para isto, destacamos três importantes teoremas:

i) **A Regra dos Sinais de Descartes** permite fazer uma prévia das quantidades de raízes reais positivas e negativas de um polinômio. Em que um polinômio com coeficientes reais não pode ter mais raízes positivas (contando as multiplicidades) que o número de variações de sinal dos seus coeficientes. De um modo geral, o teorema se resume na seguinte definição: a diferença entre o número de variações de sinal e o número de raízes positivas de um polinômio com coeficientes reais é um inteiro positivo par.

ii) **O Teorema de Sturm** nos permite encontrar, de uma maneira menos direta, a quantidade exata de raízes reais distintas de um polinômio com coeficientes reais em um intervalo dado.

iii) **O Teorema de Lagrange** nos permite encontrar uma cota superior das raízes reais positivas de um polinômio e, também, permite encontrarmos um intervalo onde estão contidas todas as raízes negativas e outro intervalo com todas as raízes positivas.

Segunda etapa: Determinação das raízes reais, ou refinamento, que consiste em aprimorar as aproximações iniciais para as raízes dentro do intervalo encontrado na primeira fase, ou seja, dado o "chute inicial" para a aproximação, precisamos melhorá-las sucessivamente até se obter uma aproximação para a raiz dentro de uma precisão prefixada.

Para essa aproximação utilizaremos o Método de Newton-Raphson, que pode ser encontrada em Stewart (2009), o qual é um processo iterativo cujo o objetivo consiste em construir uma sequência numérica que converge para a raiz de uma função dada. A análise do método é tema do Capítulo 1. É um método muito eficiente e um dos mais rápidos. Vários problemas que consistem em resolver equações podem ser transformados facilmente em problemas de busca de raiz de uma função, daí sua importância.

Ao invés de fornecer uma fórmula exata, o Método de Newton-Raphson tem outra abordagem, ele constrói uma sequência de números que se aproximam cada vez mais da raiz da função, em particular, das raízes de um polinômio. Seu nome é uma homenagem a Isaac Newton (1642-1727) e Joseph Raphson (1648-1715). Tanto Newton como Raphson, em seus livros, apresentaram métodos muito semelhantes para encontrar solução de polinômio de grau maior que 2. De modo que Newton, em 1671, no livro "Método de Fluxões" Newton (1736), descreve o método que ele utilizou para encontrar a solução da equação $x^3 - 2x - 5 = 0$. Porém este livro só foi publicado em 1736. Enquanto que Raphson, em 1690, no seu livro "Analysis aequationum universalis" Raphson (2011), apresenta a mesma técnica, porém de forma mais simples e semelhante a que se utiliza hoje nos livros. Observa-se que a publicação do livro de Joseph Raphson ocorreu 46 anos antes da publicação do livro de Isaac Newton.

Propriedades algébricas das raízes de um polinômio de uma variável

A segunda parte desse texto se dedica a estudar algumas propriedades algébricas das raízes de um polinômio e suas relações com os polinômios simétricos. Esse é o conteúdo do Capítulo 3.

O Teorema Fundamental da Álgebra, de Gauss, garante que um polinômio de grau n possui exatamente n raízes complexas, contadas as suas multiplicidades, e que, portanto, pode ser fatorado como produto de polinômios de 1º grau. Surge dessa ideia as relações de Girard, que relacionam os coeficientes do polinômio aos polinômios simétricos elementares (cujas variáveis são as raízes). Uma importante questão é levantada: dado um polinômio de várias variáveis e simétrico, é possível escrevê-lo em função dos elementares? Apresentamos uma demonstração para o Teorema Fundamental dos polinômios simétricos, de Isaac Newton, que dá uma resposta positiva sobre o assunto. Os polinômios simétricos são uma excelente ferramenta para encontrar soluções de problemas algébricos de fatoração, de sistemas de equações não lineares e de algumas equações algébricas. Apesar deste conteúdo ser frequentemente abordado em Olimpíadas de Matemática, ainda é muito pouco explorado no ensino médio.

Para finalizar, fazemos um estudo sobre as chamadas **Somas de Newton**, que são polinômios simétricos dados pela soma das n-ésimas potências das raízes de um polinômio unidimensional. Mostramos que essas somas são, na verdade, a solução de equações de recorrência lineares cujos coeficientes são dados pelo polinômio.

Capítulo 1

Método de Newton-Raphson

Segundo Stewart (2009), o Método de Newton-Raphson é um processo iterativo, cujo o objetivo consiste em construir uma sequência numérica que converge para a raiz de uma função dada. É um método muito eficiente e um dos mais rápidos. Vários problemas que consistem em resolver equações podem ser transformados facilmente em problemas de busca de raiz de uma função, daí sua importância.

Assim a ideia central deste método é partir de uma aproximação inicial para a raiz (um intervalo onde imaginamos a raiz estar contida) e em seguida refinar essa aproximação através do processo iterativo de Newton-Raphson.

1.1 Desenvolvimento

O tema principal desse capítulo é descrever uma estratégia de solução para o problema geral: Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo da reta, resolver $f(x) = 0$. Os métodos iterativos para obter raízes (ou zeros) de funções fornecem uma aproximações para a solução exata. Geralmente tais aproximações são tão boas quanto se deseja (no sentido de números de dígitos corretos). Assim, vejamos como funciona o Método de Newton-Raphson.

1.1.1 Método Iterativo de Newton-Raphson

Geometricamente, o método tem a seguinte forma: dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$, escolhemos um valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ como primeira aproximação da raiz de f. Então vamos ao ponto $(x_0, f(x_0))$ no gráfico e descemos pela reta tangente até atingirmos o eixo

x, a este número nós chamaremos de x_1. É nossa segunda aproximação da raiz de f.

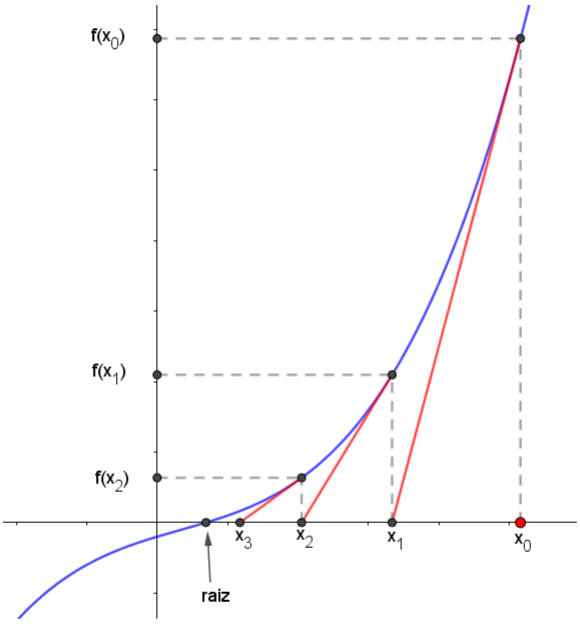

Figura 1.1: As três primeiras iterações do Método de Newton-Raphson.

O algoritmo continua da mesma forma: de x_1, vamos ao ponto $(x_1, f(x_1))$ no gráfico e descemos pela reta tangente até atingirmos o eixo x, a este número chamaremos de x_2, e assim por diante. A sequência gerada $x_0, x_1, x_2, x_3, ...$ tende a se aproximar da raiz da função. Ao longo de todo texto, uma sequência é sempre uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e representamos $x(i)$ por x_i, para $i = 0, 1, 2, 3, ...$

1.1.2 Fórmula de recorrência do Método de Newton-Raphson

Agora, vamos obter o x_1, **Analiticamente**, a partir do número x_0, isso irá sugerir a equação de recorrência do método. Uma vez atribuído o valor inicial x_0, calculamos $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ facilmente (já que a função é dada). A reta tangente ao gráfico no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada pela equação:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

ou seja,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{1.1}$$

Assim para encontrar sua raiz, $x = x_1$, fazemos:

$$\begin{aligned} y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \quad &= \quad f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right), \\ \Longleftrightarrow \quad x \quad &= \quad x_0 - \frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}, \end{aligned}$$

agora, denominamos $x = x_1$:

$$\Longleftrightarrow \quad x_1 \quad = \quad x_0 - \frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)} \ .$$

Fazemos este mesmo processo sucessivas vezes, seguindo a forma iterativa, ou simplesmente, **O Método de Newton-Raphson**:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f\left(x_k\right)}{f'\left(x_k\right)}, \quad k \in \mathbb{N}.} \tag{1.2}$$

1.1.3 Convergência e velocidade

Para o bom funcionamento do método e da convergência, observe que a derivada aplicada nos termos da sequência nunca pode ser nula. Além disso, a escolha inicial, x_0, deve ser controlada de alguma forma, não podendo ficar muito longe da raiz. Existem várias formas de se controlar esses parâmetros, a depender do problema específico estudado. Daremos um conjunto básico de hipóteses que garantem sua convergência quadrática.

O método de Newton-Raphson é um caso particular dos chamados *Métodos de Ponto Fixo*, (Ruggiero, 1996, p. 53). Para entender, transformamos nossa equação inicial $f(x) = 0$ em uma equivalente $\varphi(x) = x$. Partindo de um valor inicial x_0, construímos a sequência $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Se a sequência gerada converge para um número ξ, então este limite é dito um ponto fixo de φ, já que satisfaz $\varphi(\xi) = \xi$ e uma raiz de f. A função φ é dita uma *função de iteração para a equação* $f(x) = 0$.

Exemplo 1. *O método de Newton-Raphson se propõe a resolver uma equação do tipo $f(x) = 0$, onde $f : I \to \mathbb{R}$ e $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Mas observe que uma solução $x = \xi$ desse problema é também solução da equação $\varphi(x) = x$, onde a função de iteração $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.*

Teorema 1 (Convergência do Método de Ponto Fixo)**.** *Seja ξ uma raiz real da equação $f(x) = 0$, isolada num intervalo I centrado em ξ. Seja φ uma função de iteração para a* *equação* $f(x) = 0$. *Se*

i) φ *e* φ' *são contínuas em* I*;*

ii) $\underbrace{|\varphi'(x)| \leq M < 1}_{Baixa\,inclinacão!}$, $\forall\, x \in I$ *e*

iii) $x_0 \in I$,

então a sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *gerada pelo processo iterativo* $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ *converge para* ξ.

Demonstração. É feita em duas partes:

1ª parte: Prova-se que se $x_0 \in I$, então $x_k \in I$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Seja ξ uma raiz exata da equação $f(x) = 0$. Assim, $f(\xi) = 0$ se, e somente se,

$$\xi = \varphi(\xi) \tag{1.3}$$

e, para qualquer $k \in N$, temos: $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, então de 1.3, obtemos

$$x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) \tag{1.4}$$

Agora, a função φ' é contínua e diferenciável em I, então, pelo Teorema do Valor Médio, se $x_k \in I$, existe c_k entre x_k e ξ tal que

$$\varphi'(c_k)(x_k - \xi) = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) \tag{1.5}$$

Portanto, substituindo 1.4 em 1.5, obtemos

$$x_{k+1} - \xi = \varphi'(c_k)(x_k - \xi). \tag{1.6}$$

Então, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, temos

$$|x_{k+1} - \xi| = \underbrace{|\varphi'(c_k)|}_{<1} |x_k - \xi| < |x_k - \xi|\,, \tag{1.7}$$

ou seja, a distância entre x_{k+1} e ξ é estritamente menor que a distância entre x_k e ξ e, como I está centrado em ξ, temos que se $x_k \in I$, então $x_{x+1} \in I$. Por hipótese, $x_0 \in I$, então $x_k \in I$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

2ª parte: Prova-se que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$.

Assim, da 1ª Parte, segue que:

$$
\begin{aligned}
|x_1 - \xi| &= \underbrace{|\varphi'(c_0)|}_{\leq M} |x_0 - \xi| \leq M\,|x_0 - \xi| \\
&\quad \text{(como } c_0 \text{ está entre } x_0 \text{ e } \xi) \\
|x_2 - \xi| &= \underbrace{|\varphi'(c_1)|}_{\leq M} |x_1 - \xi| \leq M\,|x_1 - \xi| \leq M \cdot M\,|x_0 - \xi| = M^2\,|x_0 - \xi| \\
&\quad \textit{(como } c_1 \textit{ está entre } x_1 \textit{ e } \xi) \\
&\ \vdots \\
|x_k - \xi| &= \underbrace{|\varphi'(c_{k-1})|}_{\leq M} |x_{k-1} - \xi| \leq M\,|x_{k-1} - \xi| \leq M \cdot M^{k-1}\,|x_0 - \xi| = M^k\,|x_0 - \xi| \\
&\quad \textit{(como } c_{k-1} \textit{ está entre } x_{k-1} \textit{ e } \xi)
\end{aligned}
$$

De onde segue, que

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} |x_k - \xi| \leq \lim_{k\to\infty} M^k\,|x_0 - \xi| = 0,$$

pois $0 < M < 1$.

Portanto, $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k - \xi| = 0$, logo $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$.

□

Teorema 2 (Convergência do Método de Newton-Raphson)**.** *Sejam f, f' e f'' funções contínuas num intervalo I que contém a raiz $x = \xi$ de $f(x) = 0$. Suponha que $f'(\xi) \neq 0$. Então, existe um intervalo $\bar{I} \subset I$, contendo a raiz ξ, tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a sequência $\{x_k\}$ gerada pela fórmula recursiva $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ convergirá para a raiz.*

Demonstração. Tem-se que o método de Newton-Raphson é um MPF (Método do Ponto Fixo) com função de iteração φ dada por $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Portanto, para provar a convergência do método, basta verificar que, sob as hipóteses acima, as hipóteses do Teorema 1 estão satisfeita para φ.

Ou seja, é preciso provar que existe $\bar{I} \subset I$ centrado em ξ, tal que:

i) As funções φ e φ' são contínuas em $\bar{I}$;

ii) $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall\, x \in \bar{I}$.

Temos que

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \text{então} \quad \varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Por hipótese, $f'(\xi) \neq 0$ e, como f' é contínua em I, é possível obter $I_1 \subset I$ tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in I_1$. Assim, no intervalo $I_1 \subset I$, tem-se que as funções f, f' e f'' são contínuas e $f'(x) \neq 0$. Portanto, φ e φ' são contínuas em I_1.

Agora, $\varphi'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$. Como φ' é contínua em I_1 e $\varphi'(\xi) = 0$, é possível escolher $I_2 \subset I_1$ tal que $|\varphi'(x)| < 1$, $\forall x \in I_2$. Ainda mais, I_2 pode ser escolhido de forma que ξ seja seu centro. Concluindo, conseguimos obter um intervalo $I_2 \subset I$, centrado em ξ, tal que φ e φ' sejam contínuas em I_2 e $|\varphi'(x)| < 1$, $\forall x \in I_2$. Assim, tomamos $\bar{I} = I_2$.

Portanto, pelo Teorema 1, se $x_0 \in \bar{I}$, a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

converge para a raiz ξ. □

Em geral, afirma-se que o método de Newton-Raphson converge desde que x_0 seja escolhido "suficientemente próximo" de ξ. A razão desta afirmação está na demonstração acima, onde se verificou que, para pontos suficientemente próximos de ξ, as hipóteses do teorema da convergência dos Métodos de Ponto Fixo estão satisfeitas.

Os teoremas 1 e 2 exigem, como hipótese, a existência *a priori* de uma raiz no intervalo dado para garantir o funcionamento do método. Neste contexto, o Teorema de *Bolzano* nos fornece condições suficientes para a garantia de tal existência, (Ruggiero, 1996, ver).

Teorema 3 (Bolzano)**.** *Considere f uma função contínua num intervalo real $[a, b]$. Se $f(a)\, f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \xi$ entre a e b que é raiz de f.*

Corolário 4. *Dado um polinômio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, se $a_n a_0 < 0$, então p tem pelo menos uma raiz positiva.*

Já a velocidade de convergência de um algoritmo numérico tem a ver com a comparação da quantidade de dígitos corretos entre duas iterações consecutivas:

Definição 1 (Ordem de Convergência)**.** *Se uma sequência $\{x_k\}$ converge para ξ, com $\{x_k\} \neq \xi$, e se existem números positivos λ e α tais que:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^{\alpha}} = \lambda$$

então dizemos que $\{x_k\}$ *converge para* ξ *com ordem* α. *Para* α*=2, dizemos que a convergência é quadrática.*

A ordem quadrática é uma das mais rápidas obtidas nos algoritmos práticos, ela nos diz, *grosso modo*, que o número de dígitos corretos nos termos da sequência **dobra** a cada iteração. O Método de Newton-Raphson é, nesse sentido, muito rápido, pois nas melhores condições, tem ordem quadrática. O resultado a seguir segue Ruggiero (1996).

Teorema 5 (Ordem de convergência do Método de Newton-Raphson)**.** *Sejam* $f\left(x\right)$, $f'\left(x\right)$ *e* $f''\left(x\right)$ *contínuas num intervalo* $I = [a, b]$ *que contém uma raiz* $x = \xi$ *de* f. *Suponha* $f'\left(\xi\right) \neq 0$. *Então existe um intervalo* $\overline{I} \subset I$, *contendo a raiz* ξ, *tal que se* $x_0 \in \overline{I}$, *a sequência* $\{x_k\}$ *gerada pela fórmula recursiva 1.2 satisfaz*

$$|x_{k+1} - \xi| \leq M|x_k - \xi|^2, \qquad \textit{para} \qquad M > \frac{|f''(\xi)|}{2|f'(\xi)|}, \tag{1.8}$$

ou seja, x_k *converge para a raiz* ξ **quadraticamente***.*

Demonstração. Pelo o Teorema de Taylor, temos:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(\tilde{x})h^2}{2!} \tag{1.9}$$

onde $\tilde{x}$ está entre x e $x + h$. Seja

$$e_k := x_k - \xi \quad \Longrightarrow \quad x_k - e_k = \xi. \tag{1.10}$$

Fazendo $x = x_k$ e $x + h = \xi$ e em seguida substituindo em 1.9, obtemos

$$f(\xi) = f(x_k) + f'(x_k)\cdot(\xi - x_k) + f''(c_k)\frac{(\xi - x_k)^2}{2} \tag{1.11}$$

de modo que c_k está entre x_k e ξ.

Por outro lado, temos que $f(\xi) = 0$, logo

$$0 = f(x_k) - (x_k - \xi)\cdot f'(x_k) + f''(c_k)\frac{(e_k)^2}{2}. \tag{1.12}$$

Como por hipótese $f'(x) \neq 0$, podemos dividir 1.12 por $f'(x_k)$ obtendo:

$$0 = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - (x_k - \xi) + e_k^2\frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)}, \tag{1.13}$$

ou seja,

$$0 = \xi - \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right) + e_k^2 \frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)}, \tag{1.14}$$

logo, pela recorrência 1.2 , temos

$$0 = \xi - x_{k+1} + (x_k - \xi)^2 \frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)}, \tag{1.15}$$

agora, pela 1.10, obtemos:

$$0 = -e_{k+1} + e_k^2 \frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)},$$

ou seja,

$$e_{k+1} = e_k^2 \frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)}. \tag{1.16}$$

Assim, pela continuidade, $f''(c_k) \longrightarrow f''(\xi)$ e $f'(x_k) \longrightarrow f'(\xi)$, logo

$$\frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)} \longrightarrow \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}.$$

com isso, de 1.16, temos

$$lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \tag{1.17}$$

Portanto, tomando $M > \dfrac{|f''(\xi)|}{2|f'(\xi)|}$, tem-se de 1.17 que

$$e_{k+1} < Me_k^2, \text{ ou, equivalentemente, } |x_{k+1} - \xi| < M|x_k - \xi|^2.$$

□

1.2 Aplicação do Método de Newton para calcular a raiz n-ésima de um número positivo

Como já dissemos, quando é aplicado o Método de Newton-Raphson numa função f para resolver $f(x) = 0$, um fato crucial que devemos preocupar é quando pode-se ter certeza que a sequência obtida através deste método converge para uma raiz.

Inicialmente, para responder esta pergunta, começaremos apresentando algumas definições preliminares da análise real Lima (1981).

Definição 2. *Uma sequência $\{x_k\}$ é denominada* ***crescente*** *se $x_k \leq x_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \ldots$. É chamada* ***decrescente*** *se $x_k \geq x_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. É dita* ***monotônica*** *se for crescente ou decrescente. E é dita* **estritamente monotônica** *se não valem as igualdades.*

Definição 3. *Uma sequência $\{x_k\}$ é* ***limitada superiormente*** *se existir um número M tal que*

$$x_k \leq M, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

E é ***limitada inferiormente*** *se existir um número m de forma que*

$$m \leq x_k, \quad para \quad todo \quad k \in \mathbb{N}.$$

Se ela for limitada superior e inferiormente, então x_k é uma ***sequência limitada****.*

Definição 4. *Dizemos que uma sequência $\{x_k\}$* ***converge*** *para um real L, ou tem limite L quando, fixado arbitrariamente um erro $\epsilon > 0$ para o valor de L, existir um índice $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k - L| < \epsilon$, para todo $k > k_0$.*

O teorema a seguir, conhecido como *desigualdade das médias aritmética e geométrica*, é um resultado clássico da literatura e importante na nossa análise. Sua demonstração pode ser encontrada em Morgado (2015).

Teorema 6 (Desigualdade das médias aritmética e geométrica)**.** *A média aritmética de n números positivos é maior que ou igual a sua média geométrica e só é igual se os números forem todos iguais. Isto é, se $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são números positivos, então*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Em Stewart (2009), podemos encontrar a demonstração de dois resultados básicos no estudo das sequências enunciados a seguir.

Teorema 7 (Leis do Limite para Sequências)**.** *Se $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então:*

i) $\lim_{n \to \infty} (x_k + y_k) = \lim_{n \to \infty} x_k + \lim_{n \to \infty} y_k$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_k - y_k) = \lim\limits_{n\to\infty} x_k - \lim\limits_{n\to\infty} y_k$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} cx_k = c\lim\limits_{n\to\infty} x_k$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

v) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_k \cdot y_k) = \lim\limits_{n\to\infty} x_k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_k$

vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_k}{y_k} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_k}{\lim\limits_{n\to\infty} y_k}$, desde que $\lim\limits_{n\to\infty} y_k \neq 0$.

Teorema 8. *Toda sequência monotônica, limitada, é convergente.*

Vejamos a aplicação do Método de Newton para encontrar uma sequência $\{x_k\}$ que converge para a raiz n-ésima de um número positivo a dado, equivalentemente, encontrar um valor x tal que $x = \sqrt[n]{a}$, ou seja, $x^n = a$, isto é, $x^n - a = 0$. Caso n seja ímpar, o valor a pode ser tomado negativo.

Podemos então definir

$$f(x) = x^n - a. \tag{1.18}$$

Dessa forma queremos encontrar a raiz de f. Vamos mostrar que a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo Método de Newton-Raphson para esse tipo de função é monotônica, decrescente e que converge para $\sqrt[n]{a}$ quadraticamente. Vejamos:

1) Vamos mostrar que todos os termos de x_1 em diante são maiores que $\sqrt[n]{a}$ e então a sequência é limitada inferiormente pela raiz a partir do segundo termo:

Aplicando a lei de recorrência 1.2 do método em f:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{1}{n}\left(\frac{(n-1)x_k^n + a}{x_k^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{x_k^{n-1}}\left(\frac{(n-1)x_k^n + a}{n}\right) \\ &= \frac{1}{x_k^{n-1}}\left(\frac{\overbrace{x_k^n + x_k^n + \cdots + x_k^n}^{n-1} + a}{n}\right) \end{aligned}$$

Observando o lado esquerdo da equação, podemos aplicar o teorema 6 (da desigualdades das médias), de modo que

$$\begin{aligned} x_{k+1} &\geq \frac{1}{x_k^{n-1}} \sqrt[n]{\underbrace{x_k^n \cdot x_k^n \cdots x_k^n}_{n-1} \cdot a} \\ &= \frac{\overbrace{x_k \cdot x_k \cdots x_k}^{n-1}}{x_k^{n-1}} \sqrt[n]{a} \\ &= \sqrt[n]{a} \end{aligned}$$

Primeiramente observe que não interessa se $x_0 < \sqrt[n]{a}$ ou o contrário: o termo posterior x_1 é maior que a raiz, isso também é verdade para $x_2, x_3, x_4, ...$ Além disso, provavelmente, $x_0 \neq \sqrt[n]{a}$, então $x_k \neq \sqrt[n]{a}$, para todo $k = 0, 1, 2, 3, 4, ...$

2) Vamos mostrar que $\{x_k\}$ é decrescente a partir do segundo termo:

Para isto, vamos comparar x_{k+1} e x_k. Pela forma iterativa do Método de Newton-Raphson, obtemos:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - a}{n x_k^{n-1}},$$

que neste caso pode ser transformada para

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left(\frac{(n-1)x_k^n + a}{x_k^{n-1}}\right). \tag{1.19}$$

Pelo item 1, $x_k > \sqrt[n]{a}$, para $k = 1, 2, 3, 4, ...$, então temos que $a < x_k^n$. Assim da equação (1.19), temos:

$$x_{k+1} = \frac{(n-1)x_k^n + a}{n x_k^{n-1}} < \frac{(n-1)x_k^n + x_k^n}{n x_k^{n-1}} = \frac{n x_k^n}{n x_k^{n-1}} = x_k$$

Donde segue que $x_{k+1} < x_k$. Logo se tomarmos $x_0 > \sqrt[n]{a}$, então $\{x_k\}$ decresce desde o início, de modo que a definição 2 nos garante que $\{x_k\}$ é monotônica. Se $x_0 < \sqrt[n]{a}$, então a sequência decresce a partir de x_1.

3) Pelo item 1, tem-se que $\sqrt[n]{a}$ é uma cota inferior para $\{x_k\}$. Assim, pelas definições 2 e 3 , temos que $\{x_k\}$ é então uma sequência decrescente e limitada inferiormente, e portanto converge (teorema 8) para algum número $L \geq \sqrt[n]{a} > 0$. Logo se tomarmos $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = L$, então:

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(n-1)x_k^n + a}{x_k^{n-1}}\right),$$

pelo item (iii) do teorema 7, temos que

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \frac{n-1}{n} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{x_k^n + a}{x_k^{n-1}} \right),$$

e pelos item (i) e (vi) do teorema 7, tem-se que

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \frac{n-1}{n} \left(\frac{(\lim\limits_{k\to\infty} x_k)^n + \lim\limits_{k\to\infty} a}{(\lim\limits_{k\to\infty} x_k)^{n-1}} \right) \tag{1.20}$$

como por hipótese, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = L$, então da equação 1.20, temos que

$$\frac{n}{n-1} L = \frac{L^n + a}{L^{n-1}},$$

ou seja,

$$\frac{n}{n-1} L^n - L^n = a,$$

isto é,

$$L^n = a,$$

ou melhor,

$$L = \sqrt[n]{a}.$$

4) A sequência $\{x_k\}$ converge quadraticamente e satisfaz $|x_{k+1} - \sqrt[n]{a}| \leq M|x_k - \sqrt[n]{a}|^2$, onde $M > \dfrac{n-1}{2\sqrt[n]{a}}$: basta aplicar o teorema 5 para f dada por 1.18.

Exemplo 2. *Em particular, tomando $n = 2$ e $a = 7$ na equação 1.18 como exemplo para verificação da aplicação do Método de Newton-Raphason para encontrar $\sqrt{7}$. Com isto, tem-se que $f(x) = x^2 - 7$ o que implica que $f'(x) = 2x$.*

Usando a fórmula do Método de Newton, obtemos

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_k^2 + 7}{x_k} \right).$$

Inicialmente, escolhemos um valor para x_0 de modo que pertença a uma vizinhança de $\sqrt{7}$. Assim, como

$$\begin{cases} f(2) = 2^2 - 7 = -3 < 0 \\ f(3) = 3^2 - 7 = +2 > 0 \end{cases},$$

pelo Teorema 3, existe pelo menos uma raiz ξ de f, tal que $f\,(2) < f(\xi) < f\,(3)$. Verifiquemos, sem perda de generalidade, o comportamento da sequência $\{x_k\}$ quando tomemos $x_0 = 3$, assim:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{3^2+7}{3}\right) &&= 2.\underline{6}66666666666667 \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{(2.666666666666667)^2+7}{2.666666666666667}\right) &&= 2.\underline{645}833333333333 \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{(2.645833333333333)^2+7}{2.645833333333333}\right) &&= 2.\underline{64575131}2335958 \\
x_4 &= \frac{1}{2}\left(\frac{(2.645751312335958)^2+7}{2.645751312335958}\right) &&= 2.\underline{645751311064591}
\end{aligned}$$

Em destaque sublinhado são os dígitos que já estão corretos, exibindo a velocidade com a qual a sequência se aproxima da raiz $\xi = \sqrt{7}$.

Capítulo 2

Estudo da existência e localização de raízes polinomiais

Embora possamos usar o Método de Newton-Raphsom para encontrar as raízes de um polinômio, o fato de os polinômios aparecerem com tantas frequências em aplicações fazem com que lhes dediquemos especial atenção.

Normalmente, um polinômio de grau n é escrita da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0. \tag{2.1}$$

Se $n = 2$, sabemos da álgebra elementar como achar os zeros de p. De acordo com Hefez (2012), existem fórmulas fechadas, mas bem mais complicadas, para raízes de grau 3 e 4. Para $n \geq 5$, em geral, como vimos no primeiro capítulo, não existem fórmulas explícitas. De qualquer forma, somos forçados a usar métodos iterativos para encontrar zeros de polinômios.

Vários teorema da álgebra são úteis na localização e classificação de zeros de um polinômio. Isso é essencial para aplicar o método de Newton-Raphson num intervalo adequado. Faremos nosso estudo dividido em duas partes:

1. Localização de raízes,

2. Determinação das raízes reais.

2.1 Localização de raízes

Nesta seção é feita uma análise teórica e gráfica do polinômio $p(x)$. É importante destacar que o sucesso da localização das raízes de $p(x)$ depende fortemente da precisão desta análise. Assim, apresentamos alguns teoremas úteis ao nosso estudo.

Teorema 9 (Teorema Fundamental da Álgebra Ruggiero (1996))**.** *"Se $p(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, ou seja, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, onde $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ são reais ou complexos, com $a_n \neq 0$, então $p(x)$ tem pelo menos um zero, ou seja, existe um número complexo ξ tal que $p(\xi) = 0$."*

Este Teorema implica, por um argumento de indução, que p possui exatamente n raízes. A seguir, o resultado mais conhecido dos livros de ensino médio, também denominado Teorema Fundamental da Álgebra.

Corolário 10. *"Se p é um polinômio de grau $n \geq 1$, ou seja, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, onde $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ são reais ou complexos, com $a_n \neq 0$, então p tem exatamente n raízes contadas as suas multiplicidades.*

Algebricamente, o resultado anterior garante que dado um polinômio de grau n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

existem números complexos $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_k$ e inteiros positivos $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_k$ tais que p pode ser fatorado como

$$p(x) = a_n(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \cdots (x - r_k)^{m_k}$$

onde $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. Para cada $i = 1, ..., k$, dizemos que r_i é uma raiz de p de multiplicidade m_i, ou que r_i é raiz de p m_i vezes.

Corolário 11. *Polinômio com coeficientes reais apresentam raízes complexas aos pares. Polinômio de coeficientes reais e grau ímpar tem ao menos uma raiz real.*

2.1.1 A Regra dos Sinais de Descartes

Na tentativa de determinar a quantidade de raízes reais positivas de um polinômio, Descartes enunciou, sem demonstração, em Descartes (2012), uma regra que limita superiormente essa quantidade relacionando-a às variações de sinal dos coeficientes. O teste pode ser facilmente adaptado de modo a investigar a quantidade de raízes negativas também. A primeira demonstração da regra aparece no século 18 e depois disso foi generalizada de forma independente por Budan, Fourier, Sturm e A. Vincent, (Santos, 2013, ver).

A princípio vamos definir o que é uma variação em uma sequência finita de números reais.

Definição 5. *Seja* $p(x) = a_n x^{k_n} + a_{n-1}x^{k_{n-1}} + \cdots + a_1 x^{k_1} + a_0 x^{k_0}$ *um polinômio não constante de coeficientes reais, com* $k_n > k_{n-1} > \cdots > k_1 > k_0 \geq 0$ *e* $a_i \neq 0$ *para todo* i*. Defina a palavra* $\alpha_p = (\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0)$ *fazendo, para cada inteiro* $0 \leq j \leq n$,

$$\alpha_j = \begin{cases} +, & se \quad a_j > 0 \\ -, & se \quad a_j < 0. \end{cases}$$

A ***variação*** *de* p*, denotada* $\mathcal{V}(p)$*, é o número de pares de sinais consecutivos distintos em* α_p.

Teorema 12 (Regra dos Sinais de Descartes)**.** *Seja* p *um polinômio com coeficientes reais, o número de raízes positivas,* $\mathcal{R}_+(p)$*, desse polinômio não excede o número* $\mathcal{V}(p)$ *de variações de sinal dos coeficientes. Ainda mais,* $\mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_+(p)$ *é inteiro, par, não negativo.*

A Regra dos Sinais de Descartes não indica necessariamente o número exato de raízes de um polinômio. Nos exemplos a seguir, verifica-se que a Regra filtra um pequeno número de possibilidades para as quantidades $\mathcal{R}_+(p)$ e $\mathcal{R}_-(p)$.

Exemplo 3. *Dado* $p(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$*. Vamos deterninar o número de raízes positivas e negativas de* $p(x)$.

Observe as variações dos sinais do $p(x)$

$$p(x) = \underbrace{2x^5 \;\; -3x^4}_{+1} \;\; \underbrace{-4x^3 \;\; +x}_{+1} \;\; +1\,,$$

veja que $\mathcal{V}(p) = 2$, logo temos

$$\begin{cases} \text{se} \quad \mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_+(p) & = 0, \text{ então} \quad \mathcal{R}_+(p) = 2 \\ & ou \\ \text{se} \quad \mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_+(p) & = 2, \text{ então} \quad \mathcal{R}_+(p) = 0 \end{cases}$$

Para determinar o número de raízes reais negativas, $\mathcal{R}_-(p)$, de um polinômio p, consideremos o polinômio auxiliar $p_1(x) = p(-x)$, cujas raízes são exatamente opostas das raízes de p e seus coeficientes alteram o sinal caso sejam de grau ímpar. Construímos então $p_1(x) = p(-x)$ e usamos a regra pra raízes positivas: Assim, observe que

$$p_1(x) = p(-x) = \; -2x^5 \;\; -3x^4 \underset{+1}{\;\;} +4x^3 \underset{+1}{\;\;} -x \underset{+1}{\;\;} +1 \; ,$$

então para $\mathcal{V}(p_1) = 3$, temos

$$\begin{cases} \text{se} \quad \mathcal{V}(p_1) - \mathcal{R}_+(p_1) & = 2, \text{ então} \quad \mathcal{R}_+(p_1) = 1 \iff \mathcal{R}_-(p) = 1 \\ & ou \\ \text{se} \quad \mathcal{V}(p_1) - \mathcal{R}_+(p_1) & = 0, \text{ então} \quad \mathcal{R}_+(p_1) = 3 \iff \mathcal{R}_-(p) = 3 \end{cases}$$

Construindo o gráfico do polinômio $p(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$, verificamos que este possui um raiz real negativa e duas raízes reais positivas.

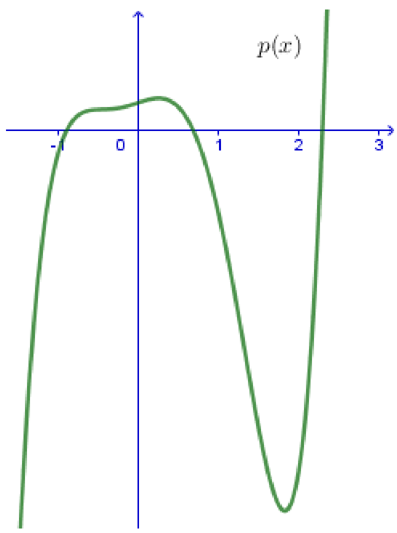

Figura 2.1: Gráfico da função $p(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$.

Exemplo 4. *Utilizando a Regra dos Sinais de Descartes, para calcular a quantidades de* *raízes positivas e negativas de* $p(x) = 4x^5 - x^3 + 4x^2 - x - 1$.

Observe que

$$p(x) = \ 4x^5 \ \ -x^3 \ \ +4x^2 \ \ -x \ \ -1 \ ,$$

assim $\mathcal{V}(p) = 3$, temos

$$\begin{cases} \text{se} \quad \mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_+(p) & = 0, \text{ então} \quad \mathcal{R}_+(p) = 3 \\ & ou \\ \text{se} \quad \mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_+(p) & = 2, \text{ então} \quad \mathcal{R}_+(p) = 1 \end{cases}$$

Agora, para encontrar as raízes negativa do exemplo 4, basta tomar $p_1(x) = p(-x)$, ou seja:

$$p_1(x) = p(-x) = \ -4x^5 \ \ +x^3 \ \ +4x^2 \ \ +x \ \ -1$$

assim para $\mathcal{V}(p_1) = 2$, temos

$$\begin{cases} \text{se} \quad \mathcal{V}(p_1) - \mathcal{R}_+(p_1) & = 2, \text{ então} \quad \mathcal{R}_+(p_1) = 0 \iff \mathcal{R}_-(p) = 0 \\ & ou \\ \text{se} \quad \mathcal{V}(p_1) - \mathcal{R}_+(p_1) & = 0, \text{ então} \quad \mathcal{R}_+(p_1) = 2 \iff \mathcal{R}_-(p) = 2 \end{cases}$$

Vamos construir o gráfico do polinômio $p(x)$ para analisar geometricamente as suas raízes.

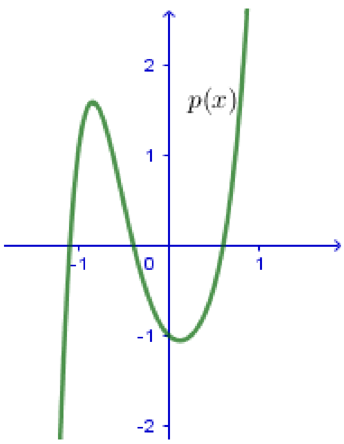

Figura 2.2: Gráfico da função $p(x) = 4x^5 - x^3 + 4x^2 - x - 1$.

Exemplo 5. *Utilize a Regra dos Sinais de Descartes para calcular as possíveis raízes positivas ou negativas de* $p(x) = x^7 - 5$. *(Observe que encontrar a solução de* p *é equivalente a encontrar a* $\sqrt[7]{5}$*).*

Veja que

$$p(x) = \underbrace{x^7 \quad -5}_{+1} .$$

Segue que $\mathcal{V}(p) = 1$, assim como $\mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_+(p) \geq 0$, temos $\mathcal{R}_+(p) = 1$, ou seja, $p(x) = 0$, tem uma raiz real positiva.

Agora vamos verificar de p possui raízes negativas.

$$p_1(x) = p(x) = \ -x^7 \ \ -5 \ ,$$

donde segue, que $\mathcal{V}(p_1) = 0$ e como $\mathcal{V}(p_1) - \mathcal{R}_+(p_1) \geq 0$, então $\mathcal{R}_+(p_1) = \mathcal{R}_-(p) = 0$, com isso, $p(x) = 0$, não tem raiz real negativa. Portanto, $p(x)$ tem apenas uma raiz real e é positiva.

Construindo o gráfico do polinômio de sétimo grau $p(x) = x^7 - 5$, verificamos que este possui apenas uma raiz real simples.

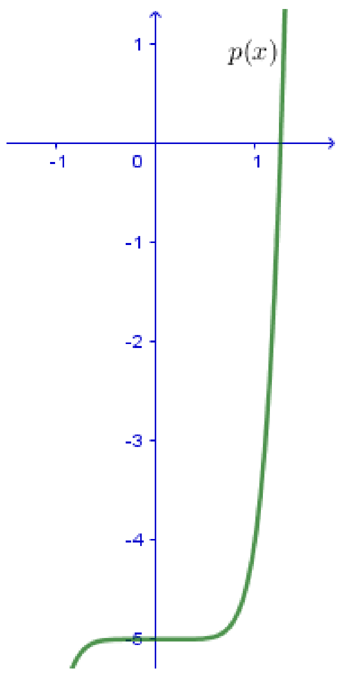

Figura 2.3: Gráfico da função $p(x) = x^7 - 5$.

Exemplo 6. *Seja o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 50x^2 + 9x - 45$. Vamos aplicar o Teorema de Descartes para calcular a quantidade de raízes positivas e negativas de p.*

Veja as variações dos sinais de p

$$p(x) = \underbrace{x^5 \quad -5x^4}_{+1} \quad \underbrace{-10x^3 \quad +50x^2}_{+1} \quad \underbrace{+9x \quad -45}_{+1}$$

com isto, tem-se $\mathcal{V}(p) = 3$, logo

$$\begin{cases} \text{se} \quad \mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_+(p) & = 0, \text{ então} \quad \mathcal{R}_+(p) = 3 \\ & ou \\ \text{se} \quad \mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_+(p) & = 2, \text{ então} \quad \mathcal{R}_+(p) = 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Agora, para encontrar as raízes negativa do exemplo 6, basta tomar $p_1(x) = p(-x)$, isto é:

$$p(x) = -x^5 \quad \underbrace{-5x^4 \quad +10x^3}_{+1} \quad \underbrace{+50x^2 \quad -9x}_{+1} \quad -45\,,$$

assim para $\mathcal{V}(p_1) = 2$, temos

$$\begin{cases} \text{se} \quad \mathcal{V}(p_1) - \mathcal{R}_+(p_1) & = 2, \text{ então} \quad \mathcal{R}_+(p_1) = 0 \iff \mathcal{R}_-(p) = 0 \\ & ou \\ \text{se} \quad \mathcal{V}(p_1) - \mathcal{R}_+(p_1) & = 0, \text{ então} \quad \mathcal{R}_+(p_1) = 2 \iff \mathcal{R}_-(p) = 2. \end{cases} \tag{2.3}$$

Conclui-se, pelo Teorema 12, que p possui $\mathcal{R}_+(p) = 3$ e $\mathcal{R}_-(p) = 0$ ou $\mathcal{R}_+(p) = 3$ e $\mathcal{R}_-(p) = 2$ ou $\mathcal{R}_+(p) = 1$ e $\mathcal{R}_-(p) = 0$ ou $\mathcal{R}_+(p) = 1$ e $\mathcal{R}_-(p) = 2$.

Agora, analisando o Gráfico 2.4 a seguir, verificamos que este possui cinco raízes reais simples, sendo duas negativas e três positivas.

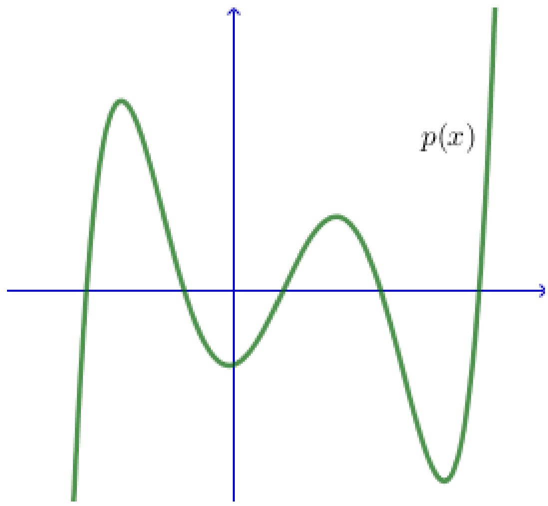

Figura 2.4: Gráfico da função $p(x) = x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 50x^2 + 9x - 45$.

Para uma demonstração da Regra de sinais de Descartes de acordo com Muniz Neto (2012), vamos analisar as palavras que usam os símbolos $+$ e $-$. Queremos saber das palavras do tipo $++$, $-++$, $--++-+$, ... qual a relação entre o número de troca de sinais e os símbolos inicial e final de cada palavra.

Lema 13. *Em relação ao alfabeto* $\{+, -\}$, *sejam* Ω *o conjunto das palavras finitas de letras inicial e final distintas e* Ψ *o conjunto das palavras finitas de letras inicial e final iguais. Para cada palavra finita* α, *seja* $\mathcal{V}(\alpha)$ *o número de pares de letras consecutivas e distintas em* α. *Então*

i) $\alpha \in \Omega \Longrightarrow \mathcal{V}(\alpha) \equiv 1(mod2)$.

ii) $\alpha \in \Psi \Longrightarrow \mathcal{V}(\alpha) \equiv 0(mod2)$

Demonstração. A demonstração é trivial e segue do princípio de indução finita. □

Para nossos propósitos, o resultado a seguir é crucial na demonstração da Regra de Sinal de Descartes.

Lema 14. *Seja* q *um polinômio não constante de coeficiente reais e* $c > 0$ *um real dado. Se* $p(x) = (x - c)q(x)$, *então* $\mathcal{V}(p) - \mathcal{V}(q)$ *é um inteiro positivo ímpar.*

Demonstração. Seja $\partial(q)$ o grau do polinômio q. Sem perda de generalidade, podemos supor que q seja mônico, ou seja, o coeficiente de maior grau igual a 1. Façamos indução sobre $\partial(q)$.

1. $\partial(q) = 1$: $\begin{cases} q(x) = x \\ q(x) = x - d, \text{ com } d > 0 \\ q(x) = x + d, \text{ com } d > 0 \end{cases}$

   Se $q(x) = x$, então $\mathcal{V}(q) = 0$ e $p(x) = (x-c)x = x^2 - cx$, de modo que $\mathcal{V}(p) - \mathcal{V}(q) = 1 - 0 = 1$. Suponha agora $q(x) = x - d$, onde $d > 0$. Então, $\mathcal{V}(q) = 1$ e $p(x) = (x-c)(x-d) = x^2-(c+d)x+cd$, de modo que $\mathcal{V}(p)-\mathcal{V}(q) = 2-1 = 1$. O caso $q(x) = x+d$, onde $d > 0$, é semelhante: $V(q) = 0$ e $p(x) = x^2+(d-c)x-cd$ e, como $-cd < 0$, segue do Lema 13 que $\mathcal{V}(p)$ é ímpar. Portanto, $\mathcal{V}(p) - \mathcal{V}(q) = \mathcal{V}(p) - 0$, um inteiro positivo ímpar.

2. Suponha o resultado válido para todo polinômio de grau menor que n, onde $n > 1$ é inteiro, e tome um polinômio q de grau n. Dado um polinômio qualquer h, denotaremos, sempre que necessário, por α_h e β_h, respectivamente, o coeficiente líder de h e o coeficiente (não nulo) do termo de h de menor grau. Assim,

$$h(x) = \alpha_h x^r + \cdots + \beta_h x^s,$$

   com $r \geq s$. Há três casos a considerar: O primeiro caso supõe que todos os coeficientes não nulos de q sejam positivos. Se isso não ocorre, então existe ao menos um coeficiente negativo (lembrando que o coeficiente líder de q é 1). Separamos este nos dois casos seguintes: o Caso 2 supõe que algum termo intermediário de q tem coeficiente nulo, ou seja, entre o coeficiente líder e o coeficiente não nulo de menor grau, existe um termo de q cujo coeficiente é nulo. O Caso 3 supõe que nenhum termo intermediário de q tem coeficiente nulo.

   1º caso: Todos os coeficientes de q são positivos: seja $q(x) = x^n + \cdots + \beta_q x^l$, com $l < n$. Então $\mathcal{V}(q) = 0$ e

$$p(x) = (x-c)q(x) = x^{n+1} + \cdots - c\beta_q x^l.$$

   Novamente pelo Lema 13, concluímos que $V(p)$ é ímpar e, daí, que $V(p) - V(q) = V(p)$ é positivo e ímpar.

   2º caso: Nem todos os coeficientes não nulos de q são positivos e existe um termo intermediário cujo coeficiente é nulo, ou seja, existem polinômios u e v tais que $q = u + v$, com

$$u(x) = x^n + \cdots + \beta_u x^m, \quad v(x) = \alpha_v x^r + \cdots + \beta_v x^s$$

com $n \geq m, r \geq s$ e $r + 1 < m$. Então

$$\begin{aligned} (x-c)q(x) &= (x-c)u(x) + (x-c)v(x) \\ &= \left(x^{n+1} + \cdots - c\beta_u x^m\right) + \\ &\quad + \left(\alpha_v x^{r+1} + \cdots - c\beta_v x^s\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

uma vez que $r+1 < m$. Distingamos agora dois subcasos: $\alpha_v\beta_u > 0$ e $\alpha_v\beta_u < 0$. No primeiro deles, temos $\mathcal{V}(q) = \mathcal{V}(u) + \mathcal{V}(v)$. Porém, $(-c\beta_u)\alpha_v < 0$, de modo que, pela Equação 2.4,

$$\mathcal{V}(p) = \mathcal{V}((x-c)q(x)) = \mathcal{V}((x-c)u(x)) + \mathcal{V}((x-c)v(x)) + 1.$$

Pela hipótese de indução (em princípio u tem grau n, mas $m \geq 1$ então $u(x) = x^m(\alpha_u x^{n-m} + \cdots + \beta_u)$ e $\mathcal{V}(u) = \mathcal{V}(x^m(\alpha_u x^{n-m} + \cdots + \beta_u)) = \mathcal{V}(\alpha_u x^{n-m} + \cdots + \beta_u)$); segue que existem números ímpares i_u e i_v tais que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}((x-c)u(x)) &= \mathcal{V}((x-c)x^m(\alpha_u x^{n-m} + \cdots + \beta_u)) \\ &= \mathcal{V}((x-c)(\alpha_u x^{n-m} + \cdots + \beta_u)) \\ &= \mathcal{V}(\alpha_u x^{n-m} + \cdots + \beta_u) + i_u \\ &= \mathcal{V}(u(x)) + i_u \end{aligned}$$

e $\mathcal{V}((x-c)v(x)) = \mathcal{V}(v(x)) + i_v$, logo

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(p) &= (\mathcal{V}(u) + i_u) + (\mathcal{V}(v) + i_v) + 1 \\ &= V(q) + i_u + i_v + 1, \end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{V}(p) - \mathcal{V}(q) =$ ímpar positivo.

No segundo subcaso, $\alpha_v\beta_u < 0$, temos, pela Equação 2.4, que

$$\mathcal{V}(q) = \mathcal{V}(u) + \mathcal{V}(v) + 1$$

e

$$\mathcal{V}(p) = \mathcal{V}((x-c)q(x)) = \mathcal{V}((x-c)u(x)) + \mathcal{V}((x-c)v(x)).$$

Usando novamente a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(p) &= (\mathcal{V}(u) + i_u) + (\mathcal{V}(v) + i_v) \\
&= \mathcal{V}(u) + \mathcal{V}(v) + 1 - 1 + i_u + i_v \\
&= \mathcal{V}(q) + i_u + i_v - 1,
\end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{V}(p) - \mathcal{V}(q) =$ ímpar positivo.

3º caso: Nem todos os coeficientes não nulos de q são positivos e nenhum termo intermediário tem coeficiente nulo, ou seja, $q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k$, com $a_{n-1}, \cdots, a_{k+1}, a_k \neq 0$ e nem todos positivos: escreva

$$q(x) = q_0(x) - q_1(x) + \cdots + (-1)^t q_t(x),$$

onde cada $q_i(x) = \alpha_i x^{k_i} + \cdots + \beta_i x^{l_i}$ ($k_i \geq l_i$) tem todos os coeficientes positivos e, para $i < t$, $l_i = k_{i+1} + 1$. Então $\mathcal{V}(q) = t$ e

$$\begin{aligned}
(x-c)q(x) &= (x-c)q_0(x) - (x-c)q_1(x) + \cdots + (-1)^t(x-c)q_t(x) \\
&= (x-c)(\alpha_0 x^{k_0} + \cdots + \beta_0 x^{l_0}) \\
&\quad -(x-c)(\alpha_1 x^{k_1} + \cdots + \beta_1 x^{l_1}) + \cdots + \\
&\quad +(-1)^t(x-c)(\alpha_t x^{k_t} + \cdots + \beta_t x^{l_t}) \\
&= \alpha_0 x^{k_0+1} + \cdots - (\alpha_1 + c\beta_0)x^{l_0} + \cdots + (\alpha_2 + c\beta_1)x^{l_1} + \\
&\quad + \cdots - (\alpha_3 + c\beta_2)x^{l_2} + \cdots + (-1)^t(\alpha_t + c\beta_{t-1})x^{l_{t-1}} + \\
&\quad + \cdots + (-1)^{t+1} c\beta_t x^{l_t}
\end{aligned}$$

Assim, há um número ímpar (e, daí, pelo menos um) de pares dos coeficientes consecutivos de sinais contrários em cada um dos $t+1$ intervalos com reticências acima, donde

$$\mathcal{V}(p) = V((x-c)q(x)) \geq t + 1 = V(g) + 1 = \text{ positivo}$$

e, em módulo 2,

$$\mathcal{V}(p) = \mathcal{V}((x-c)q(x)) \equiv t + 1 = V(q) + 1.$$

□

A seguir daremos uma demonstração da regra dos Sinais de Descartes para polinômios de coeficientes reais.

Demonstração. Sem perda de generalidade, trataremos o caso em que o polinômio é mônico. Façamos indução sobre o grau de p.

Para $\partial(p) = 1$, se $p(x) = x$ ou $p(x) = x + d$, com $d > 0$, então $\mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_+(p) = 0 - 0 = 0$. Se $p(x) = x - d$, então $\mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_+(p) = 1 - 1 = 0$.

Suponhamos agora o teorema seja válido para todo polinômio de grau menor que n, onde $n > 1$ é inteiro, e seja

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{2.5}$$

um polinômio de grau n. Há dois casos:

- $\mathcal{R}_+(p) = 0$: nesse caso, basta mostrar que $\mathcal{V}(p)$ é par. Como $\mathcal{R}_+(p) = 0$, segue, do teorema Bolzano que, $a_n a_0 = 1a_0 > 0$ e, daí, o lema 13 garante que $\mathcal{V}(p)$ é par.

- $\mathcal{R}_+(p) > 0$: tomando uma raiz positiva c de p, existe um polinômio não constante de q tal que $p(x) = (x-c)q(x)$. O lema 14 garante a existência de um número ímpar positivo i tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_+(p) &= (\mathcal{V}(q) + i) - (\mathcal{R}_+(q) + 1) \\ &= (\mathcal{V}(q) - \mathcal{R}_+(q)) + (i - 1). \end{aligned}$$

  como, pela hipótese de indução, $\mathcal{V}(q) - \mathcal{R}_+(q)$ é par e não negativa, segue que $\mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_+(p)$ é também par e não negativo.

□

Corolário 15. *Se p é um polinômio não constante de coeficientes reais e $\mathcal{R}_-(p)$ é o número de raízes negativas de p, então $\mathcal{V}(p(-x)) - \mathcal{R}_-(p)$ é par e não negativa.*

Demonstração. Imediata, basta aplicar a Regra de Sinais de Descartes para o polinômio $p_1(x) = p(-x)$. □

Teorema 16 (Taylor, Muniz Neto (2012), ver)**.** *Dado o polinômio $p(x)$ de grau n, se o desenvolvermos por Taylor em torno do ponto $x = a$, temos*

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Se chamarmos $x - a = y$, ao acharmos o número de raízes reais de $p(y) = 0$ que são maiores que zero, estaremos encontrando o número de raízes de $p(x) = 0$ que são maiores que a.

Podemos usar este resultado juntamente com a Regra de Sinal de Descartes para analisar as raízes de um determinado polinômio.

2.1.2 Sequências de Sturm

Umas das generalizações da Regra de Sinal de Descartes, dada em 1829 por C. Sturm, é um teorema muito eficiente que consegue determinar a quantidade exata de raízes reais distintas de um polinômio de coeficientes reais dentro de qualquer intervalo investigado $[a, b]$, em particular em $\mathbb{R}$. A sequência de Sturm é uma lista de polinômios auxiliares cujos valores são avaliados em a e em b e têm a variação de sinal avaliada e relacionada à quantidade de raízes.

Vamos mostrar como são construídas as *sequências de Sturm*:

Dado o polinômio $p(x)$ e um número real a, vamos definir $\tilde{\mathcal{V}}(a)$ com sendo o número de variações de sinal em $g_i(a)$ onde construímos a sequência

$$g_0(a), g_1(a), \cdots g_n(a),$$

ignorando os zeros, assim:

$$\begin{cases} g_0(x) = p(x) \\ g_1(x) = p'(x) \end{cases} \tag{2.6}$$

e, para $k \geq 2$, $g_k(x)$ é o resto da divisão de g_{k-2} por g_{k-1} com sinal trocado.

Vejamos um exemplo de como é construída a *sequência de Sturm*:

Exemplo 7. *Dado* $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$. *Vamos determinar a sequência de Sturm gerada por* $p(x)$.

Assim, de 2.6, temos

$$\begin{cases} g_0(x) = p(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \\ g_1(x) = p'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \end{cases}$$

como $n = 3$, temos que $g_2(x)$ é o resto da divisão de $g_0(x)$ por $g_1(x)$, assim:

$$\begin{array}{cccccccc|ccccc}
 & x^3 & + & x^2 & - & \text{x} & + & 1 & 3x^2 & + & \text{2x} & - & 1 \\ \hline
 & -x^3 & - & \frac{2}{3}x^2 & + & \frac{1}{3}x & & & \frac{1}{3}x & & & & \\
= & & & \frac{1}{3}x^2 & - & \frac{2}{3}x & + & 1 & & & & & \\ \hline
 & & - & \frac{1}{3}x^2 & - & \frac{2}{9}x & + & \frac{1}{9} & & + & \frac{1}{9} & & \\
= & & & & - & \frac{8}{9}x & + & \frac{10}{9} & & & & &
\end{array}$$

com isto, temos que $g_2(x) = \frac{8}{9}x - \frac{10}{9}$.

E, em seguida para encontrar $g_3(x)$ basta efetua a divisão de $g_1(x)$ por $g_2(x)$, isto é:

$$\begin{array}{cccccc|ccc}
 & 3x^2 & + & \text{2x} & - & 1 & \frac{8}{9}x & - & \frac{10}{9} \\ \hline
 & -3x^2 & + & \frac{15}{4}x & & & \frac{27}{8}x & & \\
= & & & \frac{23}{4}x & - & 1 & & & \\ \hline
 & & - & \frac{23}{4}x & + & \frac{115}{16} & & + & \frac{207}{32} \\
= & & & & & \frac{99}{16} & & &
\end{array}$$

de onde seque, que $g_3(x) = -\dfrac{99}{16}$.
Portanto, tem-se que sequência de Sturm do polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ é

$$\begin{cases} g_0(x) &=& x^3 + x^2 - x + 1 \\ g_1(x) &=& 3x^2 + 2x - 1 \\ g_2(x) &=& \dfrac{8}{9}x - \dfrac{10}{9} \\ g_3(x) &=& -\dfrac{99}{16} \end{cases} \tag{2.7}$$

O teorema a seguir nos garante a quantidade exata de raízes reais distintas de um polinômio com coeficientes reais num determinado intervalo. Para uma demonstração, (Uspensky, 1948, ver).

Teorema 17 (de Sturm)**.** *Seja p um polinômio de coeficientes reais. Se $p(a) \neq 0$ e $p(b) \neq 0$, então o número de raízes distintas de $p(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$ é exatamente $\tilde{\mathcal{V}}(a) - \tilde{\mathcal{V}}(b)$.*

Corolário 18. *Se $p(0) \neq 0$, então $\mathcal{R}_+(p)$ (o número de raízes positivas de p) e $\mathcal{R}_-(p)$ (o número de raízes negativas de p) são*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}_+ &=& \tilde{\mathcal{V}}(0) - \tilde{\mathcal{V}}(+\infty) \\ \mathcal{R}_- &=& \tilde{\mathcal{V}}(-\infty) - \tilde{\mathcal{V}}(0) \end{array}$$

Para calcular $\tilde{\mathcal{V}}(-\infty)$ ou $\tilde{\mathcal{V}}(+\infty)$, basta analisar a variação do sinal do termo líder de cada polinômio da sequência, levando em consideração que $(+\infty)^n$ é positivo e $(-\infty)^n$ é positivo se n é par e negativo se n é ímpar.

A fim de verificar a eficácia do teorema de Sturm, utilizaremos a sequência de Sturm 2.7 do exemplo anterior. Assim, tomando $a = 2$, obtemos

$$\begin{cases} g_0(2) &=& 2^3 + 2^2 - 2 + 1 &=& 11 & \Longrightarrow & + \\ g_1(2) &=& 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 &=& 15 & \Longrightarrow & + \\ g_2(2) &=& \dfrac{8}{9} \cdot 2 - \dfrac{10}{9} &=& \dfrac{2}{3} & \Longrightarrow & + \\ g_3(2) &=& -\dfrac{99}{16} & & & \Longrightarrow & - \end{cases} \tag{2.8}$$

Logo, de 2.8, há somente uma variação de $g_2(2)$ para $g_3(2)$, então $\tilde{\mathcal{V}}(a) = \tilde{\mathcal{V}}(2) = 1$

Agora, tomando $b = 3$ na sequência 2.7, temos:

$$
\begin{cases}
g_0(3) &= 3^3 + 3^2 - 3 + 1 &= 34 &\Longrightarrow + \\
g_1(3) &= 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 1 &= 32 &\Longrightarrow + \\
g_2(3) &= \dfrac{8}{9} \cdot 3 - \dfrac{10}{9} &= \dfrac{14}{9} &\Longrightarrow + \\
g_3(3) &= -\dfrac{99}{16} & &\Longrightarrow -
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

Veja, que em 2.9, houve, também, apenas uma variação de $g_2(2)$ para $g_3(2)$, então $\tilde{\mathcal{V}}(b) = \tilde{\mathcal{V}}(3) = 1$.

Portanto, o Teorema 17 garante que $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ não possui raízes reais no intervalo $[2, 3]$, pois

$$\tilde{\mathcal{V}}(2) - \tilde{\mathcal{V}}(3) = 1 - 1 = 0$$

Exemplo 8. *Dado* $p(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$. *Vamos encontrar o número de raízes reais distintas no intervalo* $[-2, 2]$.

Inicialmente vamos encontrar a sequência de Sturm. Assim, de 2.6, temos

$$
\begin{cases}
g_0(x) = p(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3 \\
g_1(x) = p'(x) = 6x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 10x + 6
\end{cases}
$$

como $n = 6$, temos que $g_2(x)$ é o resto da divisão de $g_0(x)$ por $g_1(x)$, assim:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3 & 6x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 10x + 6 \\
\hline
- & x^6 + \frac{5}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{3}x^2 & \frac{1}{6}x \\
= & -\frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - \frac{10}{3}x^2 + 5x - 3 & \\
\hline
 & +\frac{1}{3}x^5 - \frac{5}{9}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{9}x + \frac{1}{3} & -\frac{1}{8} \\
= & -\frac{8}{9}x^4 + \frac{16}{9}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{40}{9}x - \frac{8}{3} &
\end{array}
$$

com isto, temos que $g_2(x) = \frac{8}{9}x^4 - \frac{16}{9}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{40}{9}x + \frac{8}{3}$.

E, em seguida para encontrar $g_3(x)$ basta efetua a divisão de $g_1(x)$ por $g_2(x)$, isto é:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 6x^5 \quad -10x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 10x \quad + \quad 6 & \frac{8}{9}x^4 \quad - \quad \frac{16}{9}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{40}{9}x + \frac{8}{3} \\ \hline
- & 6x^5 \quad +12x^4 - 18x^3 + 30x^2 - 18x & \frac{27}{4}x \\
= & \qquad +2x^4 - 22x^3 + 42x^2 - 28x \quad + \quad 6 & \\ \hline
 & \qquad -2x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 10x \quad - \quad 6 & \qquad \frac{9}{4} \\
= & \qquad -18x^3 + 36x^2 - 18x &
\end{array}$$

de onde segue que $g_3(x) = 18x^3 - 36x^2 + 18x$.

Para encontrar $g_4(x)$ basta efetua a divisão de $g_2(x)$ por $g_3(x)$, ou seja:

$$\begin{array}{rl|l}
 & \frac{8}{9}x^4 \quad -\frac{16}{9}x^3 \quad +\frac{8}{3}x^2 \quad -\frac{40}{9}x \quad +\frac{8}{3} & 18x^3 \quad -36x^2 + 18x \\ \hline
 & -\frac{8}{9}x^4 \quad +\frac{16}{9}x^3 \quad -\frac{8}{9}x^2 & \frac{4}{81}x \\
= & \qquad\qquad\qquad \frac{16}{9}x^2 \quad -\frac{40}{9}x \quad +\frac{8}{3} &
\end{array}$$

assim, temos que $g_4(x) = -\frac{16}{9}x^2 + \frac{40}{9}x - \frac{8}{3}$.

De modo que $g_5(x)$ é o resto da divisão de $g_3(x)$ por $g_4(x)$, isto é:

$$
\begin{array}{crrrr|l}
 & 18x^3 & -36x^2 & +18x & & -\frac{16}{9}x^2 \quad +\frac{40}{9}x \quad -\frac{8}{3} \\
\hline
- & 18x^3 & +45x^2 & -27x & & -\frac{81}{8}x \\
= & & +9x^2 & -9x & & \\
\hline
 & & -9x^2 & +\frac{45}{2} & -\frac{27}{2} & \qquad -\frac{81}{16} \\
= & & & \frac{27}{2}x & -\frac{27}{2} &
\end{array}
$$

assim, temos que $g_5(x) = -\frac{27}{2}x + \frac{27}{2}$.

E, finalmente para encontrar $g_6(x)$ dividimos $g_4(x)$ por $g_5(x)$, ou seja:

$$
\begin{array}{crrr|l}
 & -\frac{16}{9}x^2 & +\frac{40}{9}x & -\frac{8}{3} & -\frac{27}{2}x \quad +\frac{27}{2} \\
\hline
 & +\frac{16}{9}x^2 & -\frac{16}{9}x & & \frac{32}{243}x \\
= & & -\frac{8}{3}x & +\frac{8}{3} & \\
\hline
 & & -\frac{8}{3}x & +\frac{8}{3} & \qquad -\frac{16}{81} \\
= & & & 0 &
\end{array}
$$

logo tem-s que $g_6(x) = 0$.

Assim, a sequência de Sturm do polinômio

$$p(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$$

é:

$$
\begin{cases}
g_0(x) & = & x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3 \\
g_1(x) & = & 6x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 10x + 6 \\
g_2(x) & = & \frac{8}{9}x^4 - \frac{16}{9}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{40}{9}x + \frac{8}{3} \\
g_3(x) & = & 18x^3 - 36x^2 + 18x \\
g_4(x) & = & -\frac{16}{9}x^2 + \frac{40}{9}x - \frac{8}{3} \\
g_5(x) & = & -\frac{27}{2}x + \frac{27}{2}
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

Com isto, pelo Teorema 17 podemos tomar $a = -2$ e $b = 2$ e substitui na sequência 2.10 para podermos verificar quantas raízes exatamente existe no $[a, b]$. Assim: Para $x = a = -2$, temos

$$
\begin{cases}
g_0(-2) & = & x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3 & = & +45 & \Longrightarrow & + \\
g_1(-2) & = & 6x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 10x + 6 & = & -246 & \Longrightarrow & - \\
g_2(-2) & = & \frac{8}{9}x^4 - \frac{16}{9}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{40}{9}x + \frac{8}{3} & = & +\frac{152}{3} & \Longrightarrow & + \\
g_3(-2) & = & 18x^3 - 36x^2 + 18x & = & -324 & \Longrightarrow & - \\
g_4(-2) & = & -\frac{16}{9}x^2 + \frac{40}{9}x - \frac{8}{3} & = & -\frac{56}{3} & \Longrightarrow & - \\
g_5(-2) & = & -\frac{27}{2}x + \frac{27}{2} & = & +\frac{81}{2} & \Longrightarrow & +
\end{cases}
\tag{2.11}
$$

de modo que, de 2.11, tem-se que houve 5 variações, então $\tilde{\mathcal{V}}(a) = \tilde{\mathcal{V}}(-2) = 4$.
E, agora, para $x = b = 2$, obtemos:

$$
\begin{cases}
g_0(2) & = & x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3 & = & +5 & \Longrightarrow & + \\
g_1(2) & = & 6x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 10x + 6 & = & +34 & \Longrightarrow & + \\
g_2(2) & = & \frac{8}{9}x^4 - \frac{16}{9}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{40}{9}x + \frac{8}{3} & = & +\frac{40}{9} & \Longrightarrow & + \\
g_3(2) & = & 18x^3 - 36x^2 + 18x & = & +36 & \Longrightarrow & + \\
g_4(2) & = & -\frac{16}{9}x^2 + \frac{40}{9}x - \frac{8}{9} & = & -\frac{8}{3} & \Longrightarrow & - \\
g_5(2) & = & -\frac{27}{2}x + \frac{27}{2} & = & -\frac{27}{2} & \Longrightarrow & -
\end{cases}
\tag{2.12}
$$

Veja, que em 2.12, houve apenas uma variação, então $\tilde{\mathcal{V}}(b) = \tilde{\mathcal{V}}(3) = 1$.

Como $p(a) = P(-2) = 45 \neq 0$ e $p(b) = p(2) = 5 \neq 0$, pelo Teorema 17, tem-se que $p_6(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ possui exatamente 3 raízes reais distintas no intervalo $(-2, 2)$, pois

$$\tilde{\mathcal{V}}(-2) - \tilde{\mathcal{V}}(2) = 4 - 1 = 3.$$

Construindo o gráfico do $p(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$, verificamos pela sua análise que este realmente possui três raízes reais positivas, sendo uma múltipla, uma raiz real negativa e duas raízes complexas não reais conjugadas.

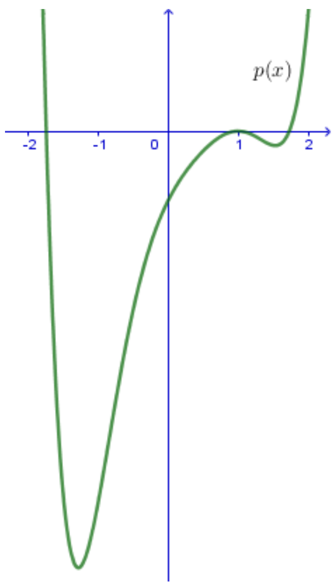

Figura 2.5: Gráfico da função $p(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ exibindo suas três raízes reais distintas.

2.1.3 Uma cota superior para as raízes positivas

Os teoremas de Descartes e Sturm, em geral, fornecem a quantidade de raízes de um dado polinômio, mas não indicam um intervalo (ou região no plano complexo) onde procurá-las. Vamos estabelecer alguns resultados nesse sentido.

Teorema 19 (Teorema de Lagrange). *Suponha $a_n > 0$ e a_{n-k} o primeiro coeficiente negativo. Então*

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_n}} \tag{2.13}$$

B:= maior valor absoluto dos coeficientes negativos.

Demonstração. Como queremos um limitante superior R, podemos tomá-lo maior que 1.

Então para $x > 1$:

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_n x^n + \underbrace{a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n-k+1}x^{n-k+1}}_{\text{coeficientes positivos}} + \underbrace{a_{n-k}x^{n-k}}_{\text{primeiro coeficiente negativo}} + \\
&\quad + a_{n-k-1}x^{n-k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
&\geq a_n x^n + a_{n-k}x^{n-k} + a_{n-k-1}x^{n-k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
&\geq a_n x^n - Bx^{n-k} - Bx^{n-k-1} + \cdots - Bx - B \\
&\geq a_n x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \cdots + x + 1) \\
&= a_n x^n - B\frac{x^{n-k+1} - 1}{x-1} \\
&= a_n x^n - B\frac{x^{n-k+1}}{x-1} + \frac{B}{x-1} \\
&\geq a_n x^n - B\frac{x^{n-k+1}}{x-1} \\
&= \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_n x^{k-1}(x-1) - B\right] \\
&> \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_n (x-1)^{k-1}(x-1) - B\right] \\
&= \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_n (x-1)^{k} - B\right].
\end{aligned}$$

Queremos garantir $p(x) > 0$. Esta última inequação é maior que 0 se, e somente se,

$$\begin{aligned}
a_n(x-1)^k - B \geq 0 &\iff a_n(x-1)^k \geq B \\
&\iff x \geq 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_n}}
\end{aligned}$$

□

O corolário a seguir explica porque é suficiente estudarmos um limitante positivo para as raízes positivas de um polinômio e daí tirarmos informação sobre o limitante inferior positivo, o inferior negativo e o superior negativo das raízes.

Corolário 20. *A cota inferior das raízes positivas de p, é o inverso da cota superior R_1 das raízes positivas do polinômio auxiliar $p_1(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$. Com os polinômios auxiliares $p_2(x) = p(-x)$ e $p_3(x) = x^n p\left(-\frac{1}{x}\right)$ e suas respectivas cotas superiores R_2 e R_3, temos as cotas para as raízes negativas de p. Resumindo, $\frac{1}{R_1} \leq \mathcal{R}_+(p) \leq R$ e $-R_2 \leq \mathcal{R}_-(p) \leq -\frac{1}{R_3}$.*

Exemplo 9. *Vamos determinar as cotas superior e inferior das raízes positivas do polinômio $p(x) = x^5 - 3.7x^4 + 7.4x^3 - 10.8x - 6.8$.*

Pelo Teorema 19, temos $a_5 = 1$, $B = |-10.8|$ e $5 - k = 4 \Longrightarrow k = 1$, logo

$$R = 1 + \sqrt[1]{\frac{10.8}{1}} = 11.8. \tag{2.14}$$

E pelo Corolário 20, temos

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= x^5 p\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= x^5\left(\frac{1}{x^5} - \frac{3.7}{x^4} + \frac{7.4}{x^3} - \frac{10.8}{x} - 6.8\right) \\
&= -6.8x^5 - 10.8x^4 + 7.4x^2 - 3.7x + 1.
\end{aligned}$$

como $a_5 < 0$ de $p_1(x)$, estudamos o polinômio $q(x) = -p_1(x) = 6.8x^5 + 10.8x^4 - 7.4x^2 + 3.7x - 1$ que possui as mesmas raízes de $p_1(x)$ e tem coeficiente líder positivo, de onde segue que $q(x)$ tem $a_5 = 6.8$, $B = |-7.4| = 7.4$ e $5 - k = 2 \Longrightarrow k = 3$, logo

$$R_1 = 1 + \sqrt[3]{\frac{7.4}{6.8}} \Longrightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\frac{7.4}{6.8}}} \approx 0.5 \tag{2.15}$$

Portanto, de 2.14 e 2.15, tem-se que $0.5 < \mathcal{R}_+(p) \leq 11.8$.

Exemplo 10. *Seja $p(x) = -x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 2$. Vamos utilizar o Teorema de Lagrange para determinar os limitantes superior e inferior das raízes positivas e negativas de p.*

Como para calcular o limitante positivo de p, utilizando o Teorema de Lagrange, devemos ter $a_n > 0$, sendo assim encontrar as raízes da

$$-x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

é equivalente encontrar as raízes da

$$x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0,$$

com isto, considere $q(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 2$ um polinômio com raízes iguais a de p, de onde segue que $a_5 = 1$, $B = |-2| = 2$ e $5 - k = 4 \Longrightarrow k = 1$. Assim, temos:

$$R = 1 + \sqrt[1]{\frac{2}{1}} = 3. \tag{2.16}$$

De modo, que $R = 3$ é o limitante superior das raízes positivas de p.

Agora, para encontrar o limitante inferior das raízes positivas de p, aplicaremos o Corolário 20, assim temos que:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^5 q\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x^5\left(\frac{1}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 2\right) \\ &= 2x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

de onde segue, $a_5 = 2$, $B = |-2| = 2$ e $5 - k = 3 \Longrightarrow k = 2$. Sendo assim, obtemos

$$R_1 = 1 + \sqrt[2]{\frac{2}{2}} = 2. \tag{2.17}$$

Portanto, tem-se de 2.16 e 2.17, que $\frac{1}{2} \leq \mathcal{R}_+(p) \leq 3$.

Por outro lado, para para encontrar os limitantes das raízes negativas de p, basta aplicar novamente o Corolário 20, de modo que

$$\begin{aligned} p_2(x) &= p(-x) \\ &= x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

logo, $a_5 = 1$, $B = |-2| = 2$ e $5 - k = 0 \Longrightarrow k = 5$, de onde segue

$$R_2 = 1 + \sqrt[5]{\frac{2}{1}} \approx 2.15,$$

assim, temos que $-R_2 \approx -2.15$ é o limitante inferior das raízes negativas de p.

E por último vamos encontrar o limitante superior das raízes negativas, assim pelo Corolário 20, temos

$$\begin{aligned} p_3(x) &= x^5 q\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= x^5\left(\frac{1}{(-x)^5} - \frac{2}{(-x)^4} + \frac{1}{(-x)^3} - \frac{2}{(-x)^2} + \frac{1}{-x} + 2\right) \\ &= 2x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - x \end{aligned}$$

assim, obtemos que $a_5 = 2$, $B = |-2| = 2$ e $5 - k = 4 \Longrightarrow k = 1$, logo

$$R_3 = 1 + \sqrt[1]{\frac{2}{2}} = 2.$$

de modo que $-\dfrac{1}{R_3} = -\dfrac{1}{2}$ é limitante superior das raízes negativas de p.

Portanto, tem-se que $-2.15 \leq \mathcal{R}_{-}(p) \leq -\dfrac{1}{2}$.

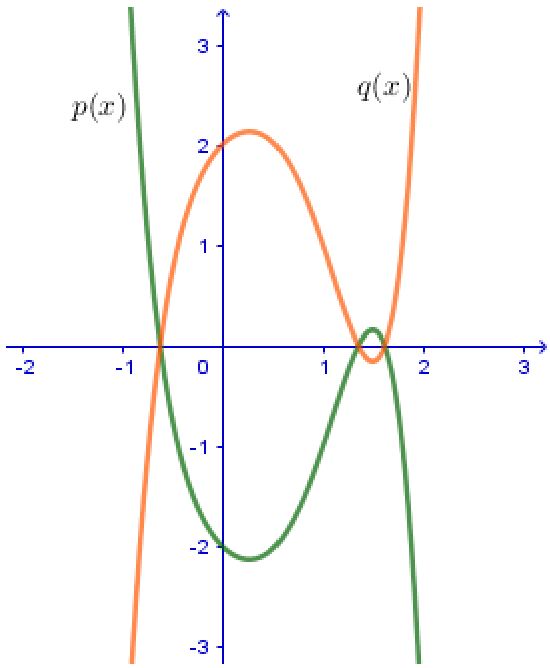

Figura 2.6: Gráfico dos polinômios $p(x) = -x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 2$ e $q(x) = -p(x)$.

Exemplo 11. *Seja* $p(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$. *Vamos determinar o número de raízes reais através da Regra dos Sinais de Descartes e também pela sequência de Sturm. Calcule os limitantes positivos e negativos através do Teorema de Lagrange.*

i) inicialmente, pelo Teorema de Descartes, vamos descobrir a quantidade de raízes positivas e negativas de p.

   Veja as variações dos sinais de p

   $$p(x) = \; x^6 \;\; -2x^5 \;\; -x^4 \;\; +4x^3 \;\; -5x^2 \;\; +6x \;\; -3 \,,$$

   $$+1 \qquad\qquad +1 \quad +1 \quad +1 \quad +1$$

   com isto, tem-se $\mathcal{V}(p) = 5$, logo

$$
\begin{cases}
\text{se} \quad \mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_{+}(p) & = 0, \text{ então} \quad \mathcal{R}_{+}(p) = 5 \\
 & \quad \textit{ou} \\
\text{se} \quad \mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_{+}(p) & = 2, \text{ então} \quad \mathcal{R}_{+}(p) = 3 \\
 & \quad \textit{ou} \\
\text{se} \quad \mathcal{V}(p) - \mathcal{R}_{+}(p) & = 4, \text{ então} \quad \mathcal{R}_{+}(p) = 1
\end{cases}
\tag{2.18}
$$

Agora, para encontrar as raízes negativa, basta tomar $p_1(x) = p(-x)$, isto é:

$$
p_1(x) = p(-x) = \; x^6 \; \underbrace{+2x^5 \; -x^4}_{+1} \; -4x^3 \; -5x^2 \; -6x \; -3 \; ,
$$

assim para $\mathcal{V}(p_1) = 1$, temos

$$
\mathcal{V}(p_1) - \mathcal{R}_{+}(p_1) = 0, \text{ então} \quad \mathcal{R}_{+}(p_1) = 1 \iff \mathcal{R}_{-}(p) = 1.
$$

Com, isto, temos que $p(x)$ possui $\mathcal{R}_{-}(p) = 1$ e $\mathcal{R}_{+}(p) = 1$ ou $\mathcal{R}_{-}(p) = 1$ e $\mathcal{R}_{+}(p) = 3$ ou $\mathcal{R}_{-}(p) = 1$ e $\mathcal{R}_{+}(p) = 5$.

ii) Utilizando o Teorema de Sturm, temos do Exemplo 8, equações 2.10, calculados os seguintes polinômios da sequência de Sturm para p:

$$
\begin{cases}
g_0(x) & = & x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3 \\
g_1(x) & = & 6x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 10x + 6 \\
g_2(x) & = & \dfrac{8}{9}x^4 - \dfrac{16}{9}x^3 + \dfrac{8}{3}x^2 - \dfrac{40}{9}x + \dfrac{8}{3} \\
g_3(x) & = & 18x^3 - 36x^2 + 18x \\
g_4(x) & = & -\dfrac{16}{9}x^2 + \dfrac{40}{9}x - \dfrac{8}{3} \\
g_5(x) & = & -\dfrac{27}{2}x + \dfrac{27}{2}
\end{cases}
\tag{2.19}
$$

Com isto, pelo Teorema 17 podemos calcular $\tilde{\mathcal{V}}(-\infty)$, $\tilde{\mathcal{V}}(0)$ e $\tilde{\mathcal{V}}(+\infty)$ e assim calcularmos o número exato de raízes negativas e positivas distintas de p. Assim:

$$\tilde{\mathcal{V}}(-\infty) = 4 \qquad\qquad \tilde{\mathcal{V}}(0) = 3 \qquad\qquad \tilde{\mathcal{V}}(+\infty) = 1$$

$$\begin{cases} g_0(-\infty) &= + \\ g_1(-\infty) &= - \\ g_2(-\infty) &= + \\ g_3(-\infty) &= - \\ g_4(-\infty) &= - \\ g_5(-\infty) &= + \end{cases} \qquad \begin{cases} g_0(0) &= - \\ g_1(0) &= + \\ g_2(0) &= + \\ g_3(0) &= + \\ g_4(0) &= - \\ g_5(0) &= + \end{cases} \qquad \begin{cases} g_0(+\infty) &= + \\ g_1(+\infty) &= + \\ g_2(+\infty) &= + \\ g_3(+\infty) &= + \\ g_4(+\infty) &= - \\ g_5(+\infty) &= - \end{cases}$$

de onde segue que $\tilde{\mathcal{V}}(-\infty) = 4$, $\tilde{\mathcal{V}}(0) = 3$ e $\tilde{\mathcal{V}}(+\infty) = 1$. Portanto, pelo Corolário 18, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_+(p) &= \tilde{\mathcal{V}}(0) - \tilde{\mathcal{V}}(+\infty) = 3 - 1 = 2 \\ \mathcal{R}_-(p) &= \tilde{\mathcal{V}}(-\infty) - \tilde{\mathcal{V}}(0) = 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

iii) Agora, vamos determinar os limitantes das raízes positivas e negativas de p. Para isso, utilizaremos o teorema de Lagrange e o corolário 20.

Assim, de $p(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$, tem-se que $a_6 = 1$, $B = |-5| = 5$ e $6 - k = 5 \Longrightarrow k = 1$, então temos que limitante superior das raízes positivas de p é

$$R = 1 + \sqrt[1]{\frac{5}{1}} = 6.$$

Pelo corolário 20, temos que

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^6 p\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x^6\left(\frac{1}{x^6} - \frac{2}{x^5} - \frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 3\right) \\ &= -3x^6 + 6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

como $a_6 < 0$ de $p_1(x)$, estudamos o polinômio

$$q_1(x) = -p_1(x) = 3x^6 - 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 1$$

que possuem as mesmas raízes de p_1, de onde segue que q_1 tem $a_6 = 3$, $B = |-6| = 6$

e $6 - k = 5 \Longrightarrow k = 1$, logo

$$R_1 = 1 + \sqrt[1]{\frac{6}{3}} = 3,$$

como, pelo corolário 20, temos $\frac{1}{R_1} \leq \mathcal{R}_+(p) \leq R$, segue que as raízes positivas de p pertence ao intervalo $\frac{1}{3} < \mathcal{R}_+(p) \leq 6$.

Por outro lado, vamos determinar os limitantes das raízes negativas de p. Assim, pelo corolário 20, temos:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= p(-x) \\ &= x^6 + 2x^5 - x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 6x - 3 \end{aligned}$$

logo $a_6 = 1$, $B = |-6| = 6$ e $6 - k = 4 \Longrightarrow k = 2$, de onde segue que o limitante inferior das raízes negativas é

$$R_2 = 1 + \sqrt[2]{\frac{6}{1}} \approx 3.45 \Longrightarrow -R_2 = -3.45.$$

E por último vamos encontrar o limitante superior das raízes negativas, assim pelo corolário 20, temos

$$\begin{aligned} p_3(x) &= x^6 p\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= x^6 \left(\frac{1}{x^6} + \frac{2}{x^5} - \frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x} - 3\right) \\ &= -3x^6 - 6x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Novamente, como $a_6 < 0$ de $p_3(x)$, passamos a estudar o polinômio $q_3(x) = -p_3(x) = 3x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x - 1$ que possuem as mesmas raízes de p_3, de onde segue que q_3 tem $a_6 = 3$, $B = |-2| = 2$ e $6 - k = 1 \Longrightarrow k = 5$, logo o limitante superior das raízes negativa é

$$R_3 = 1 + \sqrt[5]{\frac{2}{3}} \Longrightarrow -\frac{1}{R_3} = -\frac{1}{1 + \sqrt[5]{\frac{2}{3}}} = -0.52.$$

Portanto, tem-se que as raízes negativas de $p(x)$ estão limitadas ao intervalo $-3.45 < \mathcal{R}_-(p) < -0.52$.

Com as informações acima, vamos ver como se comporta o gráfico de p.

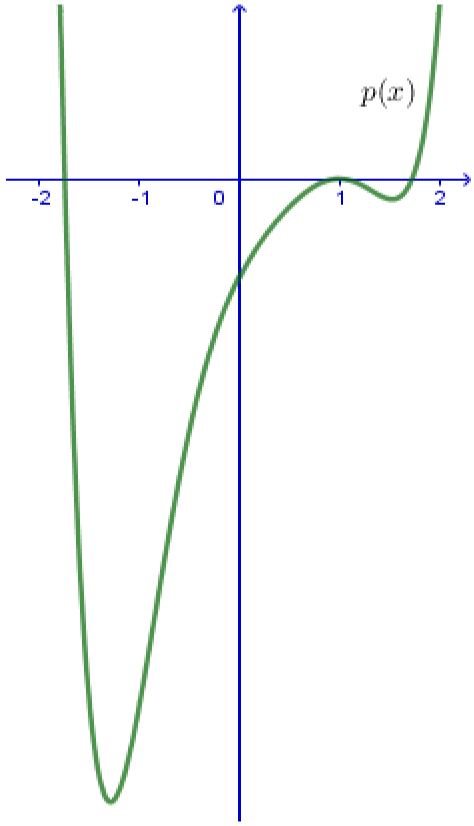

Figura 2.7: Gráfico da função $p(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ exibindo suas três raízes reais distintas. Observe que a sequência de Sturm não contabiliza a raiz múltipla.

O teorema seguinte é uma alternativa mais simples de se implementar porém menos precisa que o de Lagrange para calcular um limitante para as raízes de um polinômio.

Teorema 21. *Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é o polinômio de grau n e se*

$$r = 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|}$$

então cada zero de p se encontra na região circular definida por $|x| \leq r$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha $a_n > 0$ e seja $A = \max_{0 \leq k \leq n-1}\{|a_k|\}$.

Para $x > 1$, temos

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \\
&\geq a_nx^n - Ax^{n-1} - \cdots - Ax - A \\
&= a_nx^n - A(x^{n-1} + \cdots + x + 1) \\
&= a_nx^n - A\frac{x^n - 1}{x - 1} \\
&= a_nx^n - \frac{Ax^n}{x - 1} + \frac{A}{x - 1} \\
&> a_nx^n - \frac{Ax^n}{x - 1} \\
&= x^n\frac{a_n(x - 1) - A}{x - 1}
\end{aligned}$$

Para que o último termo da cadeia de inequações acima seja positivo, é necessário e suficiente que $a_n(x-1) - A > 0$, ou seja, $x > 1 + \dfrac{A}{a_n}$, que é o resultado esperado. $\square$

Exemplo 12. *Vamos utilizar o Teorema 21 para determinar o raio em que as raízes do* $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ *estão contidas.*

Assim, de $p(x)$, temos $n = 3, a_0 = -1, a_1 = +1, a_2 = -1, a_3 = 1$, logo

$$\frac{|a_0|}{|a_3|} = \frac{1}{1} = 1, \qquad \frac{|a_1|}{|a_3|} = \frac{1}{1} = 1 \quad e \quad \frac{|a_2|}{|a_3|} = \frac{1}{1} = 1,$$

com isso, pelo Teorema 21, temos

$$r = 1 + \max_{0 \leq k \leq 2} \frac{|a_k|}{|a_3|} = 1 + \max\{1, 1, 1\} = 1 + 1 = 2.$$

Daí, tem-se que $r = 2$. Então, todas as raízes de $p(x)$ se encontram num disco centrado na origem e com raio 2.

Vamos construir o domínio do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ para analisar geometricamente as suas raízes no plano complexo.

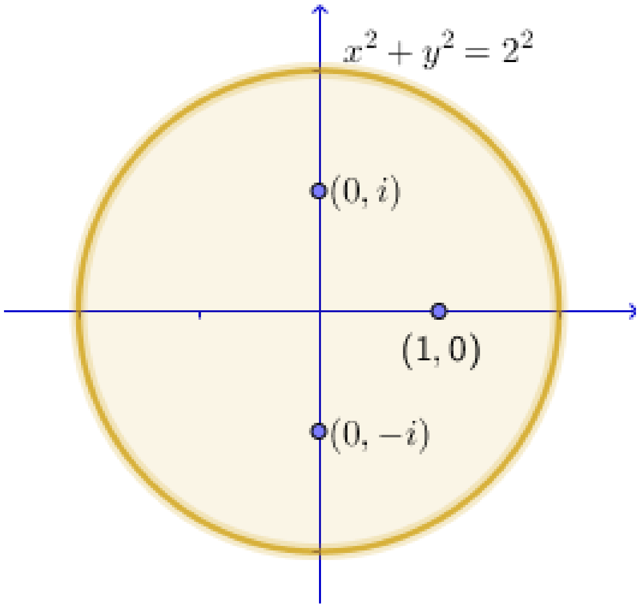

Figura 2.8: Círculo de raio 2 cm.

De fato, os zeros de $p(x)$ são: $x_1 = 1$, $x_2 = -i$ e $x_3 = i$.

Exemplo 13. *Dado* $p(x) = -x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 2$. *Vamos calcular o limitantes das raízes de* $p(x)$ *utilizando o Teorema 21.*

Temos, de $p(x)$, que $n = 5, a_0 = -2, a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = -1, a_4 = 2, a_5 = -1$, logo

$$\frac{|a_0|}{|a_5|} = \frac{2}{1} = 2, \qquad \frac{|a_1|}{|a_5|} = \frac{1}{1} = 1, \qquad \frac{|a_2|}{|a_5|} = \frac{2}{1} = 2, \qquad \frac{|a_3|}{|a_5|} = \frac{1}{1} = 1 \quad e \quad \frac{|a_4|}{|a_5|} = \frac{2}{1} = 2,$$

assim, pelo Teorema 21 , temos

$$r = 1 + \max_{0 \leq k \leq 4} \frac{|a_k|}{|a_5|} = 1 + \max\{2, 1, 2, 1, 2\} = 1 + 2 = 3.$$

De onde segue, que $r = 3$.

Então, todos as raízes de $p(x)$ se encontram num disco centrado na origem e com raio 3.

A fim de verificar graficamente a situação das raízes, vamos construir o gráfico do polinômio $p(x) = -x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 2$ para analisar graficamente as suas respectivas raízes reais.

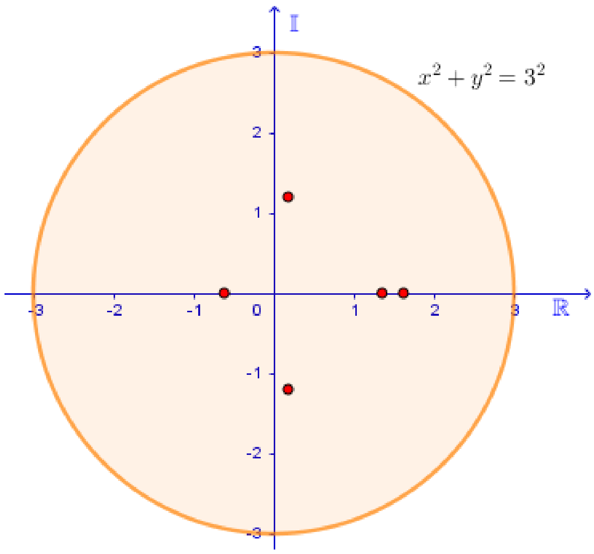

Figura 2.9: Raízes de $p(x) = -x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 2$ e um Círculo de raio 3 cm no plano complexo.

2.2 Determinação das Raízes Reais

Para se obter raízes reais de equações polinomiais, pode-se aplicar o Método de Newton-Raphson estudado anteriormente. Contudo, estas equações surgem tão frequentemente que merecem um estudo especial, conforme comentamos no início desta seção. Estudaremos um processo para se calcular o valor numérico de um polinômio, isto porque, em qualquer dos métodos, este cálculo deve ser feito uma ou mais vezes por iteração. Por exemplo, no Método de Newton-Raphson, a cada iteração deve-se fazer uma avaliação do polinômio e uma de sua derivada.

2.2.1 Método para se calcular o valor numérico de um polinômio

O esforço computacional é medido através do número de operações efetuadas a cada iteração, da complexidade destas operações, do número de decisões lógicas, do número de avaliações de função a cada iteração e do número total de iterações.

Para simplificar, estudaremos o processo analisando um polinômio de grau 6:

$$p_6(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0. \tag{2.20}$$

Este polinômio pode ser escrito na forma:

$$p(x) = (((((a_6 x + a_5)\, x + a_4)\, x + a_3)\, x + a_2)\, x + a_1)\, x + a_0, \tag{2.21}$$

conhecida como forma dos *parênteses encaixados* ou *método de Horner*.

Deve-se observar que, se o valor numérico de p for calculado pelo processo 2.21, o número de operações é menor do que pelo processo 2.20. Para um polinomial genérico de grau n, vemos que, pelo processo 2.21, teremos de efetuar n multiplicações e n adições. No entanto, pelo processo 2.20, o número de adições é também n mas o número de multiplicações é

$$n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(1+n)\, n}{2}$$

desde que x^k seja calculado por $\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}^{k\,vezes}$, pois a potenciação calculada desta forma introduz erros menores de arredondamento.

Veja que

$$\frac{n+n^2}{2} = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} > n$$

se, e somente se, $n \geq 2$, isto é, o processo 2.21 efetua realmente um número menor de operações que o processo 2.20.

Temos então, no caso de $n = 6$, que

$$p_6(x) = \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{a_6}_{b_6:=}\, x + a_5)}_{b_5:=}\, x + a_4)}_{b_4:=}\, x + a_3)}_{b_3:=} x + a_2)}_{b_2:=} x + a_1)}_{b_1:=} x + a_0}_{b_0:=}$$

Para se calcular o valor numérico de $p(x)$ em $x = w$, basta fazer sucessivamente:

$$\begin{cases} b_6 := a_6 \\ b_5 := a_5 + b_6 w \\ b_4 := a_4 + b_5 w \\ b_3 := a_3 + b_4 w \\ b_2 := a_2 + b_3 w \\ b_1 := a_1 + b_2 w \\ b_0 := a_0 + b_1 w \end{cases}$$

logo, $p(w) = b_0$.

Portanto, para $p(x)$ de grau n qualquer, calculamos $p(w)$ calculando as constantes b_k, com $k = n, n-1, n-2, \cdots 2, 1, 0$ sucessivamente, sendo:

Algoritmo 1.

$$\begin{cases} b_n &= a_n \\ b_k &= a_k + b_{k+1} \cdot w, \textit{ para} \quad k = n-1, n-2, \cdots, 2, 1, 0 \end{cases}$$

e b_0 será o valor de $p(x)$ para $x = w$.

Como calcular o valor de $p'(x)$ em $x = w$ usando os coeficientes b_k obtidos anteriormente? Tomando como exemplo o polinômio 2.20, temos

$$p(x) = a_6 x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

então,

$$p'(x) = 6a_6 x^5 + 5a_5 x^4 + 4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1.$$

Para $x = w$, temos que

$$\begin{array}{rclcrcl} b_6 &=& a_6 & \Longrightarrow & a_6 &=& b_6 \\ b_5 &=& a_5 + b_6 w & \Longrightarrow & a_5 &=& b_5 - b_4 w \\ b_4 &=& a_4 + b_5 w & \Longrightarrow & a_4 &=& b_4 - b_3 w \\ b_3 &=& a_3 + b_4 w & \Longrightarrow & a_3 &=& b_3 - b_4 w \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} b_2 & = & a_2 + b_3 w & \Longrightarrow & a_2 & = & b_2 - b_3 w \\ b_1 & = & a_1 + b_2 w & \Longrightarrow & a_1 & = & b_1 - b_2 w \\ b_0 & = & a_0 + b_1 w & \Longrightarrow & a_0 & = & b_0 - b_1 w \end{array}$$

Dado que já conhecemos $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$, logo:

$$\begin{aligned} p'(w) &= 6a_6w^5 + 5a_5w^4 + 4a_4w^3 + 3a_3w^2 + 2a_2w + a_1 \\ &= 6b_6w^5 + 5(b_5 - b_6w)w^4 + 4(b_4 - b_5w)w^3 + 3(b_3 - b_4w)w^2 + 2(b_2 - b_3w)w + \\ &\quad + b_1 - b_2w \\ &= 6b_6w^5 - 5b_6w^5 + 5b_5w^4 - 4b_5w^4 + 4b_4w^3 - 3b_4w^3 + 3b_3w^2 - 2b_3w^2 + 2b_2w - \\ &\quad - b_2w + b_1 \end{aligned}$$

daí, temos que $p'(w) = b_6w^5 + b_5w^4 + b_4w^3 + b_3w^2 + b_2w + b_1$.

Aplicando o mesmo esquema anterior, temos

$$\begin{cases} c_6 = b_6 \\ c_5 = b_5 + c_6 w \\ c_4 = b_4 + c_5 w \\ c_3 = b_3 + c_4 w \\ c_2 = b_2 + c_3 w \\ c_1 = b_1 + c_2 w \end{cases}$$

Calculamos, pois, os coeficientes c_k, com $k = n, n-1, \cdots, 1$ da seguinte forma:

Algoritmo 2.

$$\begin{cases} c_n = b_n \\ c_k = b_k + c_{k+1} \cdot w, \ \textit{para} \quad k = n-1, n-2, \cdots, 2, 1 \end{cases}$$

Donde, teremos $p'(w) = c_1$.

2.2.2 Método de Newton-Raphson para raízes de polinômios

Seja $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + +a_1x + a_0$ e x_0 uma aproximação inicial para a raiz procurada ξ. Conforme vimos, o Método de Newton-Raphson consiste em desenvolver aproximações sucessivas para ξ a partir da iteração: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{p(x_k)}{p'(x_k)}$. Usando as observações anteriores sobre o cálculo de $p(x_k)$ e $p'(x_k)$, construímos o seguinte:

Algoritmo 3. *Dados $a_0, a_1, \cdots, a_n$, coeficientes de $p(x)$, x_0 a aproximação inicial, ε_1 e ε_2 precisões desejadas e fixado itmax, o número máximo de iterações que serão permitidas, (Ruggiero, 1996, ver).*

1) deltax=x_0

2)
$$\left[\begin{array}{l} \text{Para}\, k = 1, 2, \cdots, \text{itmax, faca:} \\ b = a_n \\ c = b \\ \left[\begin{array}{l} \text{Para}\, i = (n-1), \cdots, 1, \text{faca:} \\ b = a_i + bx \\ c = b + cx \end{array}\right. \\ b = a_0 + bx \\ \text{Se } |b| \leq \varepsilon_1 \quad \text{vá para o passo} \quad 4 \\ \text{deltax} = b/c \\ x = x - \text{deltax} \\ \text{Se } |\text{deltax}| \leq \varepsilon_2 \quad \text{vá para o passo} \quad 4 \end{array}\right.$$

3) Imprimir mensagem de que não houve convergência com "itmax" iterações.

4) FIM.

Exemplo 14. *Dada a equação polinomial $x^5 - 3.7x^4 + 7.4x^3 - 10.8x^2 + 10.8x - 6.8 = 0$, vamos encontrar uma das raízes aplicando o Método de Newton-Raphson para polinômios.*

Temos que

$$\begin{cases} p_5(1) &= -2.1 \\ p_5(2) &= 3.6 \end{cases}$$

Então, pelo Teorema 3, existe pelo menos uma raiz no intervalo $(1, 2)$.

Partindo de $x_0 = 1.5$ e considerando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$, o método de Newton para polinômio fornece:

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}cl}
x_{k+1} & = & x_k - \dfrac{p(x)}{p'(x)} & = & |x_{k+1} - x_k| \\
x_1 & = & 1.50000 - \dfrac{p(1.5)}{p'(1.5)} & = & 0.286195286 \\
x_2 & = & 1.7861952862 - \dfrac{p(1.7861952862)}{p'(1.7861952862)} & = & 0.075405863 \\
x_3 & = & 1.7107894233 - \dfrac{p(1.7107894233)}{p'(1.7107894233)} & = & 0,001060195 \\
x_4 & = & 1.7001874737 - \dfrac{p(1.7001874737)}{p'(1.7001874737)} & = & 0.000187416 \\
x_5 & = & 1.7000000574 - \dfrac{p(1.7000000574)}{p'(1.7000000574)} & = & 0.\overbrace{000000}^{10^{-6}}574
\end{array}
$$

De modo que $x_k = x_5 = 1.7$, $f(x_k) = 0$ e $|x_5 - x_4| = 5.74 \cdot 10^{-7}$.

Vamos construir o gráfico do polinômio $p(x)$ para analisar geometricamente a localização desta raiz.

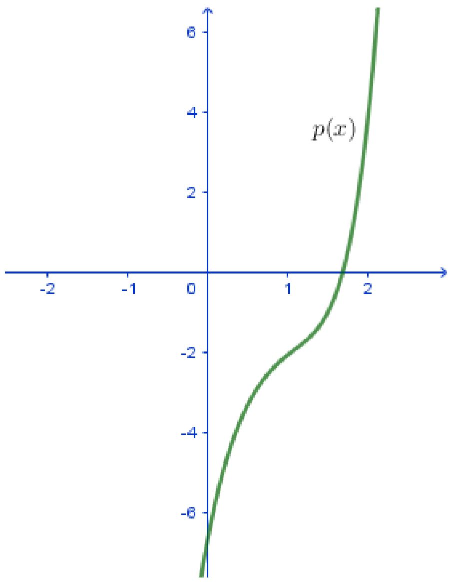

Figura 2.10: Gráficos de $p(x) = x^5 - 3.7x^4 + 7.4x^3 - 10.8x^2 + 10.8x - 6.8$.

Exemplo 15. *Dado* $p(x) = 2x^6 - 10.25x^5 + 6.875x^4 + 14.5x^3 + x^2 - 2.625x - 3.625$. *Vamos utilizar o Método de Newton-Raphsom para determinar uma raiz do* $p(x)$.

Solução. Veja que

$$
\begin{cases}
p(3) = -286.875 \\
p(4) = 385.875
\end{cases}
$$

Então, pelo Teorema 3, existe uma raiz no intervalo $(3, 4)$.

Partindo de $x_0 = 4$ e considerando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$, o Método de Newton para polinômio fornece:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{p(x)}{p'(x)} & &= |x_{k+1} - x_k| \\
x_1 &= 4 - \frac{p(4)}{p'(4)} & &= 0.23682336 \\
x_2 &= 3.7631760644 - \frac{p(3.7631760644)}{p'(3.7631760644)} & &= 0.111746886 \\
x_3 &= 3.6514291780 - \frac{p(3.651429178)}{p'(3.651429178)} & &= 0.025229209 \\
x_4 &= 3.6261999698 - \frac{p(3.6261999698)}{p'(3.6261999698)} & &= 0.001197533 \\
x_5 &= 3.6250026165 - \frac{p(3.6250026165)}{p'(3.6250026165)} & &= 0.000002616 \\
x_6 &= 3.625 - \frac{p(3.625)}{p'(3.625)} & &= 0
\end{aligned}
$$

Assim, temos $x_k = x_6 = 3.625$, $p(x_k) = 0$ e $|x_6 - x_5| = 0$. Vejamos a localização da raiz de p no gráfico 2.11 abaixo.

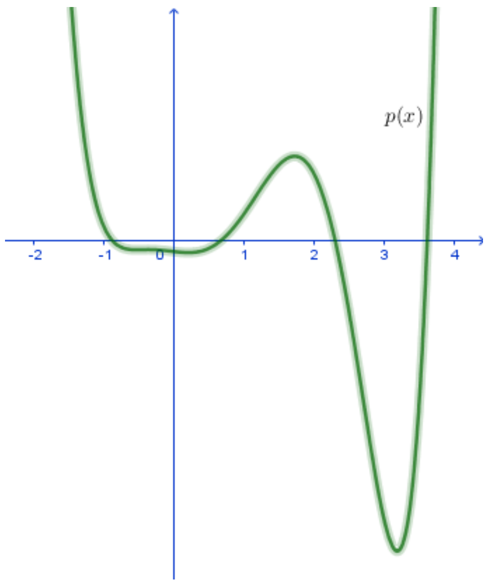

Figura 2.11: Gráficos de $p(x) = 2x^6 - 10.25x^5 + 6.875x^4 + 14.5x^3 + x^2 - 2.625x - 3.625$.

Exemplo 16. *Consideremos agora* $p(x) = x^3 - 3x + 3 = 0$ *e* $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$. *A figura 2.12 mostra o gráfico cartesiano de* p.

Vemos assim que $x^3 - 3x + 3 = 0$ tem uma única raiz no intervalo $(-3, 1.5)$. Executamos o Método de Newton para este polinômio duas vezes:

i) com $x_0 = -0.8$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$, itmax=30;

ii) com $x_0 = -2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$, itmax=10

Veja o efeito de tomarmos x_0 próximo a um zero da derivada e depois x_0 próximo à raiz:

No caso (i) foi encontrada $x_k = -2.103801$ com $|f(x_k)| = 2.4 \cdot 10^{-7}$ em 17 iterações.

No caso (ii) foi obtida exatamente o mesmo resultado em 3 iterações.

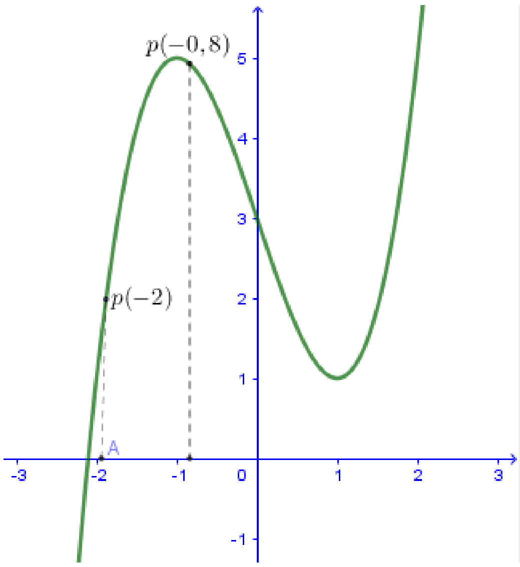

Figura 2.12: Gráfico da função $p(x) = x^3 - 3x + 3$.

2.2.3 Algoritmo geral para encontrar raiz de polinômio

Resumindo todos os resultados obtidos nos capítulos 1 e 2, os teoremas de Descartes e Sturm testam a existência e a quantidade de raízes reais de um polinômio com coeficientes reais. O teorema de Lagrange e seu corolário estabelecem os intervalos no semi-eixo dos reais negativos e no semi-eixo dos reais positivos onde se encontram essas raízes. Aplicando o Teorema de Sturm seguidas vezes, é possível isolarmos cada raiz em seu intervalo. Nessa altura, já é possível aplicarmos o Método de Newton-Raphson para determinarmos todas as raízes.

Algoritmo 4. *Dado $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ com coeficientes reais:*

1) Calcular a sequência de Sturm $g_0, g_1, \cdots, g_r$ referente ao polinômio p.

2) Use a Regra de Descartes ou o Teorema de Sturm em $\mathbb{R}$ para garantir a existência de

raízes.

3) Se existe raiz, use o Teorema de Lagrange para encontrar um intervalo em que elas estão contidas.

4) Se existe mais de uma raiz, divida o intervalo em dois e use o teorema de Sturm em cada um para testar se elas estão isoladas. Repita esse passo a quantidade de vezes necessária para isolar cada raiz em seu intervalo.

5) Use o Método de Newton-Raphson em cada intervalo que contenha uma raiz de p.

Capítulo 3

Polinômios Simétricos

Neste capítulo, exploramos algumas propriedades algébricas dos polinômios. Das relações de Girard, surgem os polinômios simétricos elementares. Então exploramos os polinômios simétricos do anel dos polinômios em várias variáveis reais simbolizado por $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$. Uma demonstração do Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos de Isaac Newton é dada. Para isso, estabelecemos o importante conceito de ordem lexicográfica de modo a definir claramente um coeficiente líder dentro de um polinômio. A referência básica para este capítulo é Muniz Neto (2012).

Definição 6. *Um polinômio $p \in \mathbb{R}[x_1, \cdots x_n]$ é* ***simétrico*** *quando*

$$p\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = p\left(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \cdots, x_{\sigma_n}\right)$$

para toda permutação σ de $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Para entender melhor a definição acima, considere os polinômios $p, q \in \mathbb{R}[x, y, z]$ dados por

$$\begin{cases} p\left(x, y, z\right) & = & x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2yz - 3xy^2z - 3xyz^2 + xyz \\ e & & \\ q\left(x, y\right) & = & x^3 + y^3 - x. \end{cases}$$

O primeiro polinômio é simétrico , uma vez que

$$
\begin{aligned}
p\left(x,y,z\right)=x^3+y^3+z^3-3x^2yz-3xy^2z-3xyz^2+xyz &= p(x,z,y)\\
&= p(y,x,z)\\
&= p(y,z,x)\\
&= p(z,x,y)\\
&= p(z,y,x)
\end{aligned}
$$

mas o segundo polinômio não é, pois

$$q\left(x,y\right)=x^3+y^3-x\neq q\left(y,x\right).$$

3.1 Polinômios Simétricos Elementares

Esse conjunto de polinômios simétricos, ditos *elementares*, merece especial atenção. Explicitamos tais polinômios na definição a seguir.

Definição 7. *Para $0\leq j\leq n$, o j-ésimo* ***polinômio simétrico elementar*** *nas variáveis $x_1,\cdots x_n$, denotado $s_j=s_j\left(x_1,\cdots x_n\right)$, é definido como*

$$
s_j\left(x_1,\cdots x_n\right) = \begin{cases} 1, & se \quad j=0\\ \displaystyle\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j}^{n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}, & se \quad 1\leq j\leq n, \end{cases}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
s_0 &= 1\\
s_1 &= \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1+x_2+\cdots+x_n\\
s_2 &= \sum_{1\leq i<j}^{n} x_ix_j = x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n\\
&\vdots\\
s_k &= \sum_{1\leq j_1<j_2\cdots j_k}^{n} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_k}\\
&\vdots\\
s_n &= x_1x_2\cdots x_n.
\end{aligned}
$$

De modo particular, para polinômios de duas, três e quatro variáveis temos:

1. Para $n = 2$, temos:

$$\begin{cases} s_0(x_1, x_2) &= 1 \\ s_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \\ s_2(x_1, x_2) &= x_1 x_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

2. Para $n = 3$, temos:

$$\begin{cases} s_0(x_1, x_2, x_3) &= 1 \\ s_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ s_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3 \end{cases} \tag{3.2}$$

3. Para $n = 4$, temos:

$$\begin{cases} s_0(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 1 \\ s_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ s_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \\ s_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \\ s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 x_3 x_4 \end{cases} \tag{3.3}$$

De um modo geral, para n variáveis, existem $n + 1$ polinômios simétricos.

Por outro lado, a importância dos polinômios simétricos elementares reside na proposição a seguir, sendo as relações do corolário 23 conhecidas como as **Relações de Girard** entre coeficientes e raízes de um polinômio unidimensional.

Exemplo 17. *Observe a relação entre os polinômios simétricos elementares σ_j de três variáveis e os polinômios simétricos s_j de quatro variáveis:*

i) para $n = 3$, temos

$$\begin{cases} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \sigma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ \sigma_3 &= x_1 x_2 x_3 \end{cases} \tag{3.4}$$

ii) para $n = 4$, temos

$$\begin{cases} s_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ s_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ s_4 &= x_1x_2x_3x_4 \end{cases} \tag{3.5}$$

Assim obtemos

$$\begin{cases} s_1 = \sigma_1 + x_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ s_2 = \sigma_2 + x_4\sigma_1 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ s_3 = \sigma_3 + x_4\sigma_2 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ s_4 = x_4\sigma_3 &= x_1x_2x_3x_4 \end{cases}$$

A fim de demonstrar o lema a seguir, considere $s_j = s_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ os polinômios simétricos em n variáveis e $\sigma_j = \sigma_j(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ os polinômios simétricos em $n-1$ variáveis. Com isto, podemos escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 + x_n \\ s_2 &= \sigma_2 + x_n\sigma_1, \\ s_3 &= \sigma_3 + x_n\sigma_2, \\ &\vdots \\ s_j &= \sigma_j + x_n\sigma_{j-1}, \\ &\vdots \\ s_{n-1} &= \sigma_{n-1} + x_n\sigma_{n-2}, \\ s_n &= x_n\sigma_{n-1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Lema 22. *Sejam $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ raízes do polinômio*

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n). \tag{3.7}$$

Então podemos escrever

$$p(x) = x^n - s_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^j s_j x^{x-j} + \cdots + (-1)^n s_n \tag{3.8}$$

onde $s_j(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$, *com* $j = 1, \cdots, n$.

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n. Para $n = 1$ é imediato e para $n = 2$, o lema é válido pois:

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2 \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 \\ &= x^2 - s_1x + s_2\end{aligned} \tag{3.9}$$

Agora, suponhamos que o lema seja verdadeiro para um certo $n = k$, assim mostremos que pra $n = k + 1$ ela também é verdadeira. Com efeito, multiplicando $f(x)$ por $(x - x_{k+1})$, obtemos que

$$\begin{aligned}p(x)(x - x_{k+1}) &= (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k)(x - x_{k+1}) \\ &= x(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k) - x_{k+1}(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k).\end{aligned}$$

Além disso, considerando que 3.8 também seja verdadeira nas indeterminadas $x_1, x_2, \cdots, x_k$, temos

$$\begin{aligned}p(x)(x - x_{k+1}) &= x\left(x^k - \sigma_1x^{k-1} + \cdots + (-1)^k\sigma_k\right) - x_{k+1}\left(x^k - \sigma_1x^{k-1} + \cdots + (-1)^k\sigma_k\right) \\ &= x^{k+1} - \sigma_1x^k + \cdots + (-1)^k\sigma_kx \\ &\quad -x_{k+1}x^k + \sigma_1x_{k+1}x^{k-1} + \cdots + (-1)^{k+1}\sigma_kx_{k+1} \\ &= x^{k+1} - (\sigma_1 + x_{k+1})x^k + \cdots + (-1)^k(\sigma_k + \sigma_{k-1}x_{k+1})x + (-1)^{k+1}\sigma_kx_{k+1}\end{aligned}$$

pelas relações 3.6, tem-se que $s_j = \sigma_j + x_n\sigma_{j-1}$ para todo $1 \leq j \leq k$ e $s_{k+1} = \sigma_kx_{k+1}$, de modo que podemos substitui, cada $\sigma_j + x_{k+1}\sigma_{j-1}$, na última equação acima, por s_j. Assim, obtemos

$$p(x)(x - x_{k+1}) = x^{k+1} - s_1x^k + s_2x^{k-1}\cdots + (-1)^{k+1}s_{k+1}. \tag{3.10}$$

Mostrando, assim que o Lema 22 é válido para $n = k + 1$, ou seja:

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)(x - x_{k+1}) = x^{k+1} - s_1x^k + 2x^{k-1}\cdots + (-1)^{k+1}s_{k+1}.$$

Portanto, pelo principio de indução matemática, tem-se que o lema 22 e válido para todo

n natural.

$\square$

Corolário 23 (Relações de Girard)**.** *Se* $p(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, *com raízes* $x_1, \cdots, x_n$, *então, para* $1 \leq j \leq n$, *temos*

$$s_j\left(x_1, \cdots, x_n\right) = (-1)^n \frac{a_{n-j}}{a_n} \tag{3.11}$$

Exemplo 18. *A fim de ilustrar o que a corolário acima o que diz, considere as raízes complexas* α, β *e* γ *do polinômio* $p(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

Pelas Relações de Girard, temos

$$\alpha + \beta + \gamma = \quad 2 \tag{3.12}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \quad 0 \tag{3.13}$$

$$\alpha\beta\gamma = \quad -1. \tag{3.14}$$

Porém, vale observar que tais relações não trazem informações suficiente para calcularmos α, β e γ. De fato, ao tentarmos resolver o sistema formado pelas igualdades anteriores, recaímos nas equações polinomiais $p(\alpha) = 0$, $p(\beta) = 0$ e $p(\gamma) = 0$. Senão, vejamos multiplicando ambos os membros de 3.13 por α, obtemos

$$\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma = 0,$$

ou seja,

$$\alpha^2(\beta + \gamma) + \alpha\beta\gamma = 0$$

de onde segue de 3.12 que $\beta + \gamma = 2 - \alpha$ e de 3.14 que $\alpha\beta\gamma = -1$, logo substituindo na última equação, obtemos

$$\alpha^2(2 - \alpha) - 1 = 0,$$

ou seja, a equação obtida em α é equivalente à expressão dada em x e em nada facilitou o cálculo das raízes. Porém, observando que uma raiz é $\alpha = 1$, substituindo o valor de α em 3.12 e 3.14, obtemos as outras duas $\beta = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\gamma = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

3.2 Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos

Uma questão fundamental na teoria dos polinômios simétricos é saber se é possível gerá-los como funções dos polinômios simétricos elementares. O Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos, de Isaac Newton, assegura uma resposta positiva sobre essa questão. O algoritmo de van der Waerden estabelece um mecanismo para isso.

Agora, vejamos alguns exemplos de como expressar polinômios simétricos não elementares em função de simétricos elementares.

Exemplo 19. *Seja o polinômio* $p(x,y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}[x,y]$. *Vamos escrever o polinômio* p *em termos dos Polinômios Simétricos Elementares.*

Tem-se que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy, \text{ (pela definição de polinômios simétricos, temos)} \\ &= s_1^2 - 2s_2. \end{aligned}$$

Com isto, temos que $p(x,y) = f(s_1, s_2) = s_1^2 - 2s_2$, onde $s_1 = x + y$ e $s_2 = xy$, e f é um polinômio nas variáveis s_1 e s_2.

Exemplo 20. *Dado* $p(x,y) = x^4 + y^4 + x^2y + xy^2 + 6xy \in \mathbb{R}[x,y]$. *Vamos reescrever* p *em função dos termos dos Polinômios Simétricos Elementares.*

Fatorando a expressão,

$$x^4 + y^4 + x^2y + xy^2 + 6xy = x^4 + y^4 + xy(x+y) + 6xy. \tag{3.15}$$

Por outro lado, pelo binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned} (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ &= x^4 + y^4 + xy(4x^2 + 4y^2 + 6xy) \end{aligned}$$

de onde segue, que

$$x^4 + y^4 = (x+y)^4 - xy\left(4(x^2+y^2) + 6xy\right). \tag{3.16}$$

Também do binômio de Newton,

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy. \tag{3.17}$$

Portanto, substituindo 3.17 em 3.16 e, logo depois, substituindo o resultado em 3.15, obtemos a seguinte expressão em função dos polinômios simétricos elementares:

$$\begin{aligned}
x^4 + y^4 + x^2y + xy^2 + 6xy &= (x+y)^4 - xy\left(4(x+y)^2 - 2xy\right) + xy(x+y) + 6xy \\
&= (x+y)^4 - xy\left(4(x+y)^2 - (x+y) - 2xy\right) + 6xy \\
&= s_1^4 - s_2\left(4s_1^2 - s_1 - 2s_2\right) + 6s_2
\end{aligned}$$

que é um polinômio nas variáveis s_1 e s_2.

Exemplo 21. *Seja o polinômio $p(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + xyz \in \mathbb{R}[x,y,z]$. Vamos escrever p em termos dos Polinômios Simétricos Elementares.*

Tem-se que

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + xyz = 3(x^2 + y^2 + z^2) + xyz \tag{3.18}$$

veja que

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^2 &= (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)
\end{aligned}$$

de onde segue

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + xz + yz) \tag{3.19}$$

Portanto, substituindo 3.19 em 3.18, obtemos a seguinte expressão em função dos polinômios simétricos elementares:

$$\begin{aligned}
3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + xyz &= 3\left((x+y+z)^2 - 2(xy + xz + yz)\right) + xyz \\
&= 3s_1^2 - 6s_2 + s_3.
\end{aligned}$$

O Teorema dos Polinômios Simétricos de Isaac Newton garante que esse tipo de transformação sempre é possível. A fim de demonstrá-lo, apresentaremos inicialmente algumas definições que servirão como base. A definição a seguir sugere uma forma de ordenarmos os monômios dentro de um polinômio de múltiplas variáveis.

Definição 8. *Dados dois monômios* $a_{(i)}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ *e* $b_{(j)}x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$ *em* $\mathbb{R}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, *escrevemos*

$$a_{(i)}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} \succ b_{(j)}x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$$

se a lista dos expoentes $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ *é lexicograficamente maior que a lista* $(j_1, j_2 \cdots, j_n)$, *ou seja, se existe* v *tal que* $i_1 = j_1$, ..., $i_{v-1} = j_{v-1}$ *e* $i_v > j_v$.

Além disso, dentro de um mesmo polinômio, o monômio de maior ordem lexicográfica é denominado monômio ou termo líder.

Proposição 24. *Se* $a_{(i)}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ *corresponde ao termo líder do polinômio simétrico* $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, *então* $i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_n$.

Demonstração. Suponhamos que i_1 seja o maior expoente encontrado em p. Como p é um polinômio simétrico, temos certeza que a variável $x_1^{i_1}$ aparece em algum monômio. Dentre os monômios que contêm $x_1^{i_1}$, escolha, dentre as outras variáveis, uma com expoente máximo, digamos i_2. O argumento de que p é simétrico impõe que existe um monômio em p que contém $x_1^{i_1}x_2^{i_2}$ com $i_1 \geq i_2$. Agora, temos que o termo líder de p contêm $x_1^{i_1}x_2^{i_2}$ e devemos repetir este processo mais $n-2$ vezes até chegarmos ao termo líder $a_{(i)}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$, com $i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_n$. □

Proposição 25. *Seja* $a_{(i)}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$, $a_{(i)} \neq 0$, *o monômio líder de um polinômio simétrico* $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$. *O monômio em* $\mathbb{R}[s_1, s_2, \cdots, s_n]$ *definido por*

$$g(s_1, s_2, \cdots, s_n) = a_{(i)}s_1^{i_1-i_2}s_2^{i_2-i_3}\cdots s_{n-1}^{i_{n-1}-i_n}s_n^{i_n}, \tag{3.20}$$

onde s_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, *são os polinômios simétricos elementares, é um polinômio simétrico nas variáveis* $x_1, ..., x_n$ *e seu monômio líder é o mesmo que de* p.

Demonstração. Da proposição anterior, $i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_n$, portanto os expoentes de g são inteiros não nulos. É fácil ver que, fazendo a mudança de variáveis, o monômio g se torna um polinômio simétrico nas variáveis $x_1, \cdots, x_n$ já que é um monômio cujas variáveis são polinômios elementares.

Vamos desenvolver 3.20 em função das indeterminadas $x_1, \cdots, x_n$.

$$g = a_{(i)}\left(\sum_{i}^{n} x_i\right)^{i_1-i_2}\left(\sum_{1\leq i<j}^{n} x_ix_j\right)^{i_2-i_3}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)^{i_n}. \tag{3.21}$$

Agora, para obtermos o termo líder de g, devemos destacar, no somatório 3.21, o produto

$$a_{(i)}x_1^{i_1-i_2}\left(x_1x_2\right)^{i_2-i_3}\left(x_1x_2x_3\right)^{i_3-i_4}\cdots\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{i_n}. \tag{3.22}$$

Assim, agrupando as indeterminadas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ em 3.22, obtemos

$$a_{(i)}x_1^{i_1-i_2+i_2-i_3+\cdots+i_n}x_2^{i_2-i_3+i_3-i_4+\cdots+i_n}\cdots x_n^{i_n} \tag{3.23}$$

Logo, o termo líder de p é igual ao termo líder de g. $\square$

Exemplo 22. *Seja o polinômio simétrico $p(x,y,z) = (x+y)(x+z)(y+z) \in \mathbb{R}[x,y,z]$. Vamos escrever o polinômio p em função dos polinômios simétricos elementares, utilizando a Definição 8 e as proposições 25 e 24.*

Temos que

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= (x+y)(x+z)(y+z) \\ &= x^2y + x^2z + xy^2 + 2xyz + y^2z + xz^2 + yz^2, \end{aligned} \tag{3.24}$$

logo, pela Definição 8, o termo líder do polinômio 3.24 é o monômio x^2y, pois

$$\overbrace{x^2y}^{2,1,0} \succ \overbrace{x^2z}^{2,0,1} \succ \overbrace{xy^2}^{1,2,0} \succ \overbrace{x^1yz}^{1,1,1} \succ \overbrace{xz^2}^{1,0,2} \succ \overbrace{y^2z}^{0,2,1} \succ \overbrace{yz^2}^{0,1,2}.$$

Vamos construir o monômio $g_1(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}[s_1, s_2, s_3]$ de tal modo que, ao fazermos mudança de variáveis, o seu termo líder seja igual ao termo líder de p. Como o termo líder de p é $x^2y^1z^0$, pela Proposição 25, temos

$$\begin{aligned} g_1 &= s_1^{i_1-i_2}s_2^{i_2-i_3}s_3^{i_n} \\ &= s_1^{2-1}s_2^{1-0}s_3^0 \\ &= s_1s_2 \\ &= (x+y+z)(xy+xz+yz) \end{aligned} \tag{3.25}$$

assim, desenvolvendo 3.25, obtemos

$$g_1 = x^2y + x^2z + xy^2 + 3xyz + xz^2 + y^2z + yz^2 \tag{3.26}$$

A ideia agora é construirmos o polinômio $f_1 = p - g_1$, que é simétrico e com coeficiente líder lexicograficamente menor que p:

$$\begin{aligned} f_1 &= p - g_1 \\ &= x^2y + x^2z + xy^2 + 2xyz + y^2z + xz^2 + yz^2 - (x^2y + x^2z + xy^2 + 3xyz + xz^2 + \\ &\quad +y^2z + yz^2) \\ &= -xyz. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Como $f_1 \neq 0$, então devemos repetir o processo acima. Assim, como $-x^1y^1z^1$ é o termo líder de f_1, logo, pela Proposição 25, temos

$$\begin{aligned} g_2 &= -s_1^{(i_1-i_2)} s_2^{(i_2-i_3)} s_3^{i_n} \\ &= -s_1^{(1-1)} s_2^{(1-1)} s_3^1 \\ &= -s_1^0 s_2^0 s_3^1 \\ &= -(x+y+z)^0(xy+xz+yz)^0(xyz)^1 \\ &= -xyz. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Agora, calculamos $f_2 = f_1 - g_2$, obtendo

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 - g_2 \\ &= -xyz + xyz \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Como $f_2 = 0$, então isso encerra o algoritmo. Obtemos então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} f_1 = p - g_1 \\ f_2 = f_1 - g_2. \end{cases} \tag{3.30}$$

Somando as equações, obtemos

$$p = g_1 + g_2. \tag{3.31}$$

Portanto, substituindo 3.25 e 3.28 em 3.31, obtemos p em função dos polinômios simétricos elementares, isto é:

$$p = s_1s_2 - s_3, \tag{3.32}$$

ou seja,

$$p(x,y,z) = (x+y)(x+z)(y+z) = (x+y+z)(xy+xz+yz) - xyz.$$

Esse é o denominado algoritmo de Van der Waerden. A explicação para o funcionamento é que sempre que calculamos o polinômio $f_i = f_{i-1} - g_i$, para $f_{i-1} \neq 0$, ele possui termo líder menor (lexigraficamente) que f_{i-1} e, assim, para cada próximo passo, o termo líder diminui e, como existe uma quantidade finita de monômios lexigraficamente menores que o termo líder p, garantimos que o algoritmo se encerra. Portanto, para algum $r \geq 0$, temos no processo que $f_r = 0$. Deste modo, organizando cada uma das etapas, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} f_1 &= p - g_1 \\ f_2 &= f_1 - g_2 \\ &\vdots \\ f_r &= f_{r-1} - g_r \end{cases}$$

Adicionar membro a membro as etapas acima, obtemos

$$\cancel{f_1} + \cancel{f_2} + \cancel{f_3} + \cdots + \cancel{f_{r-1}} + f_r = p + \cancel{f_1} + \cancel{f_2} + \cdots + \cancel{f_{r-1}} - (g_1 + g_2 + \cdots + g_r),$$

e como $f_r = 0$, então obtemos o polinômio p em função dos polinômios $g_1, g_2, \cdots, g_r$. Logo,

$$p = g_1 + g_2 + \cdots + g_r,$$

onde cada $g_i(s_1, s_2, \cdots, s_n) \in \mathbb{R}[s_1, s_2, \cdots, s_n]$ é um monômio cujas variáveis são polinômios simétricos elementares. Resumidamente, conseguimos construir um polinômio $f \in \mathbb{R}[s_1, \cdots, s_n]$, $f = g_1 + g_2 + \cdots g_r$ tal que $p(x_1, \cdots, x_n) = f(s_1, \cdots, s_n)$. Esta é basicamente a demonstração do seguinte teorema devido a Isaac Newton:

Teorema 26 (Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos)**.** *Seja $p \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ um polinômio simétrico. Então, existe $f \in \mathbb{R}[s_1, \cdots, s_n]$ tal que*

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(s_1, s_2, \cdots, s_n),$$

onde s_j é o $j-$ésimo polinômio simétrico elementar nas indeterminadas $x_1, \cdots, x_n$.

3.3 Somas de Newton

Uma ferramenta bastante útil na resolução de problemas algébricos de fatoração, na resolução de sistemas de equações não lineares, na resolução de algumas equações algébricas são as funções polinomiais simétricas, que apesar de seu grande poder algébrico são pouco divulgadas entre os nossos alunos. A finalidade deste seção é mostrar como estas ferramentas podem ser úteis na resolução de alguns problemas olímpicos.

Teorema 27 (Somas de Newton)**.** *Seja* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$*,* $a_n \neq 0$*, com raízes* $r_1, r_2, \cdots, r_n$*. Seja* $S_k = r_1^k + r_2^k + \cdots + r_n^k$*,* $k \geq n$*, a soma das* $k-$*ésimas potências das raízes. Então,*

$$a_n S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_1 S_{k-(n-1)} + a_0 S_{k-n} = 0. \tag{3.33}$$

Em particular, se $k = n$*, temos* $a_n S_n + a_{n-1}S_{n-1} + \cdots + a_1 S_1 + na_0 = 0$*.*

Demonstração. Como $r_1, r_2, \cdots, r_n$ são raízes da equação $p(x) = 0$, montamos o sistema

$$\begin{cases} a_n r_1^n + a_{n-1}r_1^{n-1} + \cdots + a_1 r_1 + a_0 = 0, \\ a_n r_2^n + a_{n-1}r_2^{n-1} + \cdots + a_1 r_2 + a_0 = 0, \\ \vdots \\ a_n r_n^n + a_{n-1}r_n^{n-1} + \cdots + a_1 r_n + a_0 = 0. \end{cases}$$

Multiplicando as equações acima, respectivamente, por $r_1^{k-n}, r_2^{k-n}, \cdots, r_n^{k-n}$, obtemos

$$\begin{cases} a_n r_1^k + a_{n-1}r_1^{k-1} + \cdots + a_1 r_1^{k-(n-1)} + a_0 r_1^{k-n} = 0, \\ a_n r_2^k + a_{n-1}r_2^{k-1} + \cdots + a_1 r_2^{k-(n-1)} + a_0 r_2^{k-n} = 0, \\ \vdots \\ a_n r_n^k + a_{n-1}r_n^{k-1} + \cdots + a_1 r_n^{k-(n-1)} + a_0 r_n^{k-n} = 0. \end{cases}$$

Somando todas equações acima encontramos

$$a_n\left(r_1^k + \cdots + r_n^k\right) + a_{n-1}\left(r_1^{k-1} + \cdots + r_n^{k-1}\right) + \cdots + a_0\left(r_1^{k-n} + \cdots + r_n^{k-n}\right) = 0$$

Como $S_k = r_1^k + r_2^k + \cdots + r_n^k$, obtemos o resultado desejado. $\square$

Corolário 28. *Nas condições do Teorema 27, vale a recorrência*

$$S_k - s_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^j s_j S_{k-(n-j)} + \cdots (-1)^n s_n S_{k-n} = 0,$$

onde $k \geq n$ *e* s_j *são os polinômios simétricos elementares nas variáveis* $r_1, r_2, \cdots, r_n$*. Em particular, quando* $k = n$*, temos*

$$S_n - s_1 S_{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n S_0 = 0 \quad e \quad S_0 = n.$$

Demonstração. Como $a_n \neq 0$, então podemos dividir a equação 3.33 por a_n e usar as Relações de Girard: $s_j = (-1)^j \dfrac{a_{n-j}}{a_n}$. □

Corolário 29. *Seja* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *com* $a_n a_0 \neq 0$*. Sejam* $r_1, r_2, \cdots, r_n$ *suas raízes e considere*

$$T_k = \frac{1}{r_1^k} + \frac{1}{r_2^k} + \cdots \frac{1}{r_n^k}, \quad com \quad k \geq n. \tag{3.34}$$

Então:

$$a_0 T_k + a_1 T_{k-1} + \cdots + a_{n-1} Tk - (n-1) + a_n T_{k-n}. \tag{3.35}$$

Demonstração. A hipótese $a_0 \neq 0$ implica que todas as raízes são não nulas e, portanto, invertíveis. Observe que

$$p\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{x} + a_0. \tag{3.36}$$

Multiplicando 3.36 por x^n, obtemos

$$x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = a_n + a_{n-1} x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n, \tag{3.37}$$

ou seja, esse é um polinômio cujos coeficientes estão na ordem reversa em relação aos coeficientes de p. Vamos denota-lo de $q(x)$. Observe que as raízes de $q(x)$ são os inversos $\dfrac{1}{r_1}, \dfrac{1}{r_2}, \cdots, \dfrac{1}{r_n}$, pois $q(x) = x^n p\left(\dfrac{1}{x}\right)$, logo

$$
\begin{aligned}
q\left(\frac{1}{r_i}\right) &= \left(\frac{1}{r_i}\right)^n p\left(\frac{1}{\frac{1}{r_i}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{r_i}\right)^n p\left(r_i\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Então aplicando o Teorema de 27 para o polinômio q temos o resultado. $\square$

Exemplo 23. *Seja $p(x) = ax^2 + bx + c$ com raízes r_1 e r_2. Vamos obter uma fórmula para $S_k = r_1^k + r_2^k$.*

Como r_1 e r_2 são raízes da equação $p(x) = 0$, então podemos escrever

$$
\begin{cases}
ar_1^2 + br_1 + c = 0 \\
ar_2^2 + br_2 + c = 0.
\end{cases}
\tag{3.39}
$$

Somando a duas equações acima obtemos

$$
a\left(r_1^2 + r_2^2\right) + b\left(r_1 + r_2\right) + 2c = 0. \tag{3.40}
$$

Agora, pelo Teorema 27, temos que

$$
\begin{cases}
S_0 = r_1^0 + r_2^0 = 2 \\
S_1 = r_1 + r_2 \\
S_2 = r_1^2 + r_2^2.
\end{cases}
\tag{3.41}
$$

Assim, substituindo as equações do sistema 3.41 na equação 3.40, obtemos

$$
aS_2 + bS_1 + cS_0 = 0
$$

Por outro lado, para encontrar S_k basta multiplicar por r_1^{k-2} e r_2^{k-2}, respectivamente, as equações do sistema 3.39. Assim, obtemos o seguinte sistema

$$
\begin{cases}
ar_1^k + br_1^{k-1} + cr_1^{k-2} = 0 \\
ar_2^k + br_2^{k-1} + cr_2^{k-2} = 0.
\end{cases}
\tag{3.42}
$$

Em seguida, somando a duas equações acima temos

$$a\left(r_1^k + r_2^k\right) + b\left(r_1^{k-1} + r_2^{k-1}\right) + c\left(r_1^{k-2} + r_2^{k-2}\right) = 0,$$

ou seja,

$$aS_k + bS_{k-1} + cS_{k-2} = 0,$$

isto é,

$$S_k = -\frac{b}{a}S_{k-1} - \frac{c}{a}S_{k-2}. \tag{3.43}$$

Portanto, pelas Relações de Girard (Corolário 23), tem-se que 3.43 é equivalente a

$$S_k = s_1 S_{k-1} - s_2 S_{k-2},$$

onde $s_1 = r_1 + r_2$, $s_2 = r_1 r_2$, $S_{k-1} = r_1^{k-1} + r_2^{k-1}$ e $S_{k-2} = r_1^{k-2} + r_2^{k-2}$.

Exemplo 24. *Seja o polinômio de grau 3* $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *tal que* r_1, r_2 *e* r_3 *são suas respectivas raízes. Vamos obter uma fórmula para* $S_k = r_1^k + r_2^k + r_3^k$.

Como r_1, r_2 e r_3 são raízes de $p(x) = 0$, então

$$\begin{cases} ar_1^3 + br_1^2 + cr_1 + d = 0 \\ ar_2^3 + br_2^2 + cr_2 + d = 0 \\ ar_3^3 + br_3^2 + cr_3 + d = 0. \end{cases} \tag{3.44}$$

Usando o mesmo procedimento do exemplo 23: multiplicando as equações do sistema 3.44, respectivamente, por r_1^{k-3}, r_2^{k-3} e r_3^{k-3} e em seguida somando membro a membro das equações do novo sistema formado, obtemos

$$a\left(r_1^k + r_2^k + r_3^k\right) + b\left(r_1^{k-1} + r_2^{k-1} + r_3^{k-1}\right) + c\left(r_1^{k-2} + r_2^{k-2} + r_3^{k-2}\right) + d\left(r_1^{k-3} + r_2^{k-3} + r_3^{k-3}\right) = 0,$$

ou seja,

$$aS_k + bS_{k-1} + cS_{k-2} + dS_{k-3} = 0,$$

isto é,

$$S_k = -\frac{b}{a}S_{k-1} - \frac{c}{a}S_{k-2} - \frac{d}{a}S_{k-3}$$

Portanto, pelas Relações de Girard (Corolário 23), tem-se que

$$S_k = s_1 S_{k-1} - s_2 S_{k-2} + s_3 S_{k-3}.$$

Exemplo 25. *Sejam $r_1, r_2, \cdots, r_{1000}$ as raízes de $x^{1000} - 10x + 10 = 0$. Vamos determinar o valor de $r_1^{1000} + r_2^{1000} + \cdots + r_{1000}^{1000}$.*

Como a_{1000}, a_1 e a_0 são os únicos coeficientes diferentes de zero do $p_{1000}(x) = 0$. Então, pelo Teorema 27, temos que

$$S_{1000} - 10S_1 + 10S_0 = 0, \tag{3.45}$$

onde $S_0 = r_1^0 + r_2^0 + \cdots + r_{1000}^0 = 1000$ e, além disso, como o coeficiente de S_{999} é zero, logo $s_1 = 0$ e como $s_1 = S_1$, pois $s_1 = r_1 + r_2 + \cdots + r_{1000} = S_1$. Com isto, temos de 3.45 que

$$S_{1000} - 10 \cdot 0 + 10 \cdot 1000 = 0,$$

de onde segue, que

$$S_{1000} = r_1^{1000} + r_2^{1000} + \cdots + r_{1000}^{1000} = -10.000.$$

Exemplo 26. *Sejam x_1 e x_2 as raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 6x + 1$. Vamos provar que $x_1^n + x_2^n$ é um inteiro não divisível por 5 para todo inteiro não negativo n.*

Seja $S_n = x_1^n + x_2^n$ a soma de Newton das raízes de p para $n \geq 0$. Temos que $S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2$ e $S_1 = x_1 + x_2 = 6$ pelas Relações de Girard. Aplicando o teorema 27 (ou a sua demonstração), concluímos que $S_n - 6S_{n-1} + S_{n-2} = 0$, para $n \geq 2$, de modo que

$$S_n = 6S_{n-1} - S_{n-2}. \tag{3.46}$$

Como os dois primeiros termos dessa relação de recorrência são inteiros, é claro que os próximos termos também serão, já que o conjunto dos inteiros é fechado para multiplicação, adição e subtração.

Para mostrar que $5 \nmid S_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, vamos usar a aritmética modular e o Princípio de Indução Forte:

1. $S_0 = 2$ e $S_1 = 6$ não são divisíveis por 5.

2. Suponha, como hipótese de indução, que até um certo número $n = k$, seja verdadeiro que $5 \nmid S_n$, ou seja, $S_n \not\equiv 0(\mod 5)$ para $n = 0, 1, \cdots, k$.

   Por contradição, suponha que $5 \mid S_{k+1}$, ou seja, $S_{k+1} \equiv 0(\mod 5)$. Usando 3.46, deduzimos que $6S_k - S_{k-1} \equiv 0(\mod 5)$, que é equivalente a dizer que

$$6S_k \equiv S_{k-1}(\mod 5). \tag{3.47}$$

   Como $5 \equiv 0(\mod 5) \Longrightarrow 5S_k \equiv 0(\mod 5)$, subtraímos essa última equação de 3.47, obtendo assim $S_k \equiv S_{k-1}(\mod 5)$. Usando a recorrência 3.46 para $n = k$ nessa última equação, obtemos $6S_{k-1} - S_{k-2} \equiv S_{k-1}(\mod 5)$, que é equivalente a $5S_{k-1} \equiv S_{k-2}(\mod 5)$. Mas $5S_{k-1} \equiv 0(\mod 5)$ e portanto $0 \equiv S_{k-2}(\mod 5)$. Essa última equação nos diz que $5 \mid S_{k-2}$, o que contradiz a hipótese de indução. Logo não pode ser verdade que $S_{k+1} \equiv 0(\mod 5)$, provando assim que $5 \nmid S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 4

Atividades complementares e os gabaritos

Atividade 1. *Verifique a famosa desigualdade das médias aritmética e geométrica. Se* $a, b, c \in \mathbb{R}_+$*, então* $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ *e a igualdade ocorre, se, e somente se,* $a = b = c$.

Solução. Inicialmente, veja

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3x^2z + 6xyz + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + z^3 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + xz^2 + yz^2 + 3xyz) - 3xyz \end{aligned}$$

daí, temos que

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)^3 - 3(x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + xz^2 + yz^2 + 3xyz) \quad (4.1)$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} (xy + xz + yz)(x+y+z) &= x^2y + xy^2 + xyz + x^2z + xyz + xz^2 + xyz + xyz \\ &\quad + y^2z + yz^2 \\ &= x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + xz^2 + yz^2 + 3xyz \end{aligned}$$

de onde segue que

$$x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + xz^2 + yz^2 + 3xyz = (xy + xz + yz)(x+y+z), \quad (4.2)$$

em seguida, substituindo 4.2 em 4.1, obtemos a seguinte igualdade:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \;=\; (x+y+z)^3 - 3(xy+xz+yz)(x+y+z) \tag{4.3}$$

Agora, o próximo passo é mostrar que se x, y, z são números reais positivos, então observe

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) \tag{4.4}$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) &= \frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(x^2-2xz+z^2\right)+\left(y^2-2yz+z^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right)
\end{aligned}$$

de modo que

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0,$$

pois são soma de números quadrados, logo $\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right) \geq 0$.

Ora, como estamos supondo x, y, z reais positivos, logo temos que $x+y+z>0$ e daí $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) \geq 0$, pois é o produto de fatores maiores ou igual a zero. Assim temos que:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) \geq 0$$

e daí

$$x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz,$$

ou seja,

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz \tag{4.5}$$

Agora, tomando $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$ e $z=\sqrt[3]{c}$ e em seguida substituindo em 4.5, obtemos:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3+\left(\sqrt[3]{a}\right)^3}{3} \geq \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c},$$

ou seja,

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Com a igualdade ocorrendo se e somente se $a = b = c$, pois em

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) \geq 0$$

a igualdade ocorre apenas quando $x = y = z$, visto que $x+y+z > 0$, uma vez que x, y, z são números reais positivos e além disso,

$$(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) = \frac{1}{2}\left((x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right) \iff x = y = z$$

Atividade 2. *Calcule o valor de* $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$.

Solução. Sejam $u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $v = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Com isso, temos

$$s_1 = u + v = 1 \tag{4.6}$$

$$s_2 = uv = -1. \tag{4.7}$$

Deste modo, u e v são raízes do polinômio $f(x) = x^2 - s_1x + s_2$. Substituindo as equações 4.6 e 4.7 em f, obtemos $f(x) = x^2 - x - 1$. Mas, temos que u e v são raízes de f, então

$$u^2 - u - 1 = 0 \tag{4.8}$$

$$v^2 - v - 1 = 0. \tag{4.9}$$

Agora, ao multiplicar as equações 4.8 e 4.9, respectivamente por u^n e v^n, com $n \geq 0$, obtemos

$$u^{n+2} - u^{n+1} - u^n = 0 \tag{4.10}$$

$$v^{n+2} - v^{n+1} - v^n = 0. \tag{4.11}$$

E, em seguida adicionando as equações 4.10 e 4.11, temos

$$u^{n+2} + v^{n+2} - (u^{n+1} + v^{n+1}) - (v^n + u^n) = 0. \tag{4.12}$$

Agora, denominamos $S_n = u^n + v^n$. Com isto, a equação 4.12 se reduz à recorrência

$$S_{n+2} - S_{n+1} - S_n = 0. \tag{4.13}$$

De modo, que

$$\begin{cases} S_0 = u^0 + v^0 = 2 \\ S_1 = u^1 + v^1 = 1 \end{cases}$$

assim, da equação 4.13, temos

$$\begin{cases} S_2 = S_1 + S_0 = 1 + 2 = 3 \\ S_3 = S_2 + S_1 = 3 + 1 = 4 \\ S_4 = S_3 + S_2 = 4 + 3 = 7 \\ S_5 = S_4 + S_3 = 7 + 4 = 11. \end{cases}$$

Para facilitar os cálculos, efetuamos a seguinte operação

$$\begin{array}{rcl} S_5^2 & = & \left(u^5 + v^5\right)^2 \\ S_5^2 & = & u^{10} + v^{10} + 2u^5v^5 \\ S_5^2 & = & S_{10} + 2u^5v^5 \\ S_{10} & = & S_5^2 - 2(uv)^5 \\ S_{10} & = & 11^2 - 2(-1)^5 \\ S_{10} & = & 123. \end{array}$$

Atividade 3. *Sejam a,b,c reais não nulos tais que $a + b + c = 0$. Prove que*

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)$$

Solução. Se

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (x-a)(x-b)(x-c) \\ & = & x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc, \end{array} \tag{4.14}$$

então a condição $a + b + c = 0$ garante que

$$f(x) = x^3 + s_2 x - s_3, \tag{4.15}$$

onde $s_2 = ab + ac + bc$ e $s_3 = abc$. Mas $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Com isso, de 4.15, obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} a^3 &= -s_2 a + s_3 && (4.16) \\ b^3 &= -s_2 b + s_3 && (4.17) \\ c^3 &= -s_2 c + s_3. && (4.18) \end{aligned}$$

Somando membro a membro as igualdade 4.16, 4.17 e 4.18 e utilizando, novamente, a condição $a + b + c = 0$, obtemos

$$a^3 + b^3 + c^3 = -s_2(a + b + c) + 3s_3 = 3s_3 \quad (4.19)$$

daí, tem-se que

$$s_3 = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \quad (4.20)$$

e além disso, observe

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = -2s_2 \quad (4.21)$$

de onde segue

$$s_2 = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \quad (4.22)$$

Por outro lado, afim de encontrar a expressão $a^5 + b^5 + c^5$, multiplicamos ambos os membros das igualdades 4.16, 4.17 e 4.18, respectivamente, por a^2, b^2 e c^2, obtendo

$$\begin{aligned} a^5 &= -s_2 a^3 + s_3 a^2 && (4.23) \\ b^5 &= -s_2 b^3 + s_3 b^2 && (4.24) \\ c^5 &= -s_2 c^3 + s_3 c^2. && (4.25) \end{aligned}$$

Em seguida, somando membro a membro as igualdades 4.23,4.24 e 4.25,temos

$$a^5 + b^5 + c^5 = -s_2(a^3 + b^3 + c^3) + s_3(a^2 + b^2 + c^2) \quad (4.26)$$

Portanto, substituindo 4.20 e 4.22 em 4.26, obtemos

$$\begin{aligned} a^5+b^5+c^5 &= \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)+\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) \\ &= 5\left(\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{6}\right). \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right).$$

Atividade 4. *As raízes do polinômios $f(x)=x^3-7x^2+14x-6$ são os comprimentos dos lados de um triângulo. Calcule a área do mesmo.*

Solução. Sejam a, b, c as raízes de f e A a área do triângulo tendo tais raízes por lados. Aplicando a fórmula de Herão para calcular a área do triângulo

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \tag{4.27}$$

onde p é o semi-perímetro do triângulo, então

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c). \tag{4.28}$$

Por outro lado, pelas Relações de Girard temos

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-b)(x-c) \\ &= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc \\ &= x^3-s_1x^2+s_2x-s_3, \ \textit{(de modo que f foi dada, logo)} \\ &= x^3-7x^2+14x-6. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Com isto, de 4.28 e 4.29, obtemos

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}s_1(a,b,c)=\frac{7}{2},$$

assim, substituindo em 4.27, temos

$$A^2=\frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}-a\right)\left(\frac{7}{2}-b\right)\left(\frac{7}{2}-c\right).$$

Agora, observe de 4.29 que

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2} - a\right)\left(\frac{7}{2} - b\right)\left(\frac{7}{2} - c\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 14\left(\frac{7}{2}\right) - 6 = \frac{1}{8}.$$

Portanto, de 4.27 tem-se que

$$\begin{aligned} A^2 &= p(p-a)(p-b)(p-c) \\ &= p \cdot f(p) \\ &= \frac{7}{2} \cdot f(\frac{7}{2}) \\ &= \frac{7}{16}, \end{aligned}$$

de onde segue que $A = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$, mas como a área é um valor positiva, logo $A = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Atividade 5 (Romênia)**.** *Sejam a, b, c, d números reais tais que*

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{4 - \sqrt{5 - a}}, \\ b &= \sqrt{4 + \sqrt{5 - b}}, \\ c &= \sqrt{4 - \sqrt{5 + c}}, \\ d &= \sqrt{4 - \sqrt{5 + d}},. \end{aligned}$$

Calcule os possíveis valores do produto abcd.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} a = \sqrt{4 - \sqrt{5 - a}} \implies && a^2 &= 4 - \sqrt{5 - a} \\ \implies && (a^2 - 4)^2 &= \left(-\sqrt{5 - a}\right)^2 \\ \implies && a^4 - 8a^2 + 16 &= 5 - a \\ \implies && a^4 - 8a^2 + a + 11 &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos que $b^4 - 8b^2 + b + 11 = 0$. Com isto, tanto a com b são raízes do polinômio

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + x + 11. \tag{4.30}$$

Aplicando o mesmo procedimento, conclui-se que c e d são raízes do polinômio

$$p(x) = x^4 - 8x^2 - x + 11. \tag{4.31}$$

e segue, daí, que -c e -d também são raízes de f.

Portanto, a,b,$-c$ e $-d$ são todos raízes de f e, se soubermos que tais raízes são duas a duas distintas, concluiremos que elas são todas as raízes do polinômios f; daí, as Relações de Girard nos darão

$$abcd = ab(-c)(-d) = 11.$$

Para isto, basta verificar, se $a = b$, logo

$$\begin{aligned} a = b \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{4 - \sqrt{5-a}} = \sqrt{4 + \sqrt{5-b}} \\ &\Longleftrightarrow \quad 4 - \sqrt{5-a} = 4 + \sqrt{5-b} \\ &\Longleftrightarrow \quad a = b = 5. \end{aligned}$$

Mas, como

$$5 \neq \sqrt{4 - \sqrt{5-5}} = a,$$

então, temos $a \neq b$. Analogamente, tem-se que $a \neq -c$, $a \neq -d$ e, além disso, temos que $b, -c$ e $-d$ são dois a dois distintos.

Atividade 6 (Croácia). *Se a, b, c são reais dois a dois distintos satisfazendo o sistema de equações*

$$\begin{cases} a^3 = 3b^2 + 3c^2 - 25 \\ b^3 = 3c^2 + 3a^2 - 25 \\ c^3 = 3a^2 + 3b^2 - 25 \end{cases}$$

calcule os possíveis valores do produto abc.

Solução. Temos que

$$a^3 = 3b^2 + 3c^2 - 25, \tag{4.32}$$

adicionando $3a^2$ em ambos os membros da equação 4.32, obtemos

$$a^3 + 3a^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 25, \tag{4.33}$$

em seguida tomando $a^2 + b^2 + c^2 = k$. Assim, de 4.33, temos que

$$a^3 + 3a^2 = 3k - 25,$$

ou seja,

$$a^3 + 3a^2 + (25 - 3k) = 0,$$

de modo que a é raiz do polinômio

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + (25 - 3k); \tag{4.34}$$

analogamente, b e c são raízes de tal polinômio.

Agora, pelas Relações de Girard, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-b)(x-c) \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc \end{aligned} \tag{4.35}$$

então segue dos polinômios 4.34 e 4.35 que

$$a + b + c = -3 \tag{4.36}$$

$$ab + ac + bc = 0 \tag{4.37}$$

$$abc = 3k - 25 \tag{4.38}$$

observe, da equação 4.36, que

$$\begin{aligned} a+b+c=-3 &\implies (a+b+c)^2 = (-3)^2 \\ &\implies a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) = 9 \end{aligned}$$

e de 4.37, temos que $a^2 + b^2 + c^2 = 9 = k$. Portanto, tem-se da equação 4.38 que

$$abc = 3k - 25 = 2$$

Atividade 7 (Bulgária)**.** *Sejam a e b números reais que satisfazem as equações*

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a^3 + b^3 = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ache o valor de $a^4 + b^4$.

Solução. Para tratarmos o problema com a teoria das somas de Newton, precisamos de um polinômio de 2º grau cujas raízes sejam a e b. Basta então tomar $p(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$. Logo, pelo Teorema 27, temos que

$$S_k = s_1 S_{k-1} - s_2 S_{k-2}, \tag{4.39}$$

de modo que $s_1 = S_1$ e $S_0 = x^0 + y^0 = 2$.
Assim para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} S_2 &= s_1 S_1 - s_2 S_0 \\ &= s_1 s_1 - 2 s_2 \\ &= s_1^2 - 2 s_2. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Da mesma forma, para $n = 3$, obtemos

$$\begin{aligned} S_3 &= s_1 S_2 - s_2 S_1 \\ &= s_1 (s_1^2 - 2 s_2) - s_2 s_1 \\ &= s_1^3 - 3 s_1 s_2 \end{aligned} \tag{4.41}$$

e para $n = 4$, temos

$$\begin{aligned} S_4 &= s_1 S_3 - s_2 S_2 \\ &= s_1 (s_1^3 - 3 s_1 s_2) - s_2 (s_1^2 - 2 s_2) \\ &= s_1^4 - 4 s_1^2 s_2 + 2 s_2^2. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Como por hipótese, temos que $S_2 = 2$ e $S_3 = 2\sqrt{2}$, assim de 4.40 e 4.41 temos as seguintes situações

$$\begin{aligned} s_1^2 - 2 s_2 = 2 &\iff \left(s_1^2 - 2 s_2\right)^2 = 2^2 \\ &\iff s_1^4 - 4 s_1 s_2 + 4 s_2^2 = 4 \\ &\iff \underbrace{s_1^4 - 4 s_1 s_2 + 2 s_2^2}_{S_4} = 4 - 2 s_2^2 \\ &\iff S_4 = 4 - 2 s_2^2 \end{aligned} \tag{4.43}$$

e além disto, temos

$$\begin{aligned} s_1^3 - 3 s_1 s_2 = 2\sqrt{2} &\iff \left(s_1 (s_1^2 - 3 s_2)\right)^2 = (2\sqrt{2})^2 \\ &\iff s_1^2 (s_1^2 - 2 s_2 - 1 s_2^2) = 8 \end{aligned}$$

de 4.40 temos $s_1^2 - 2s_2 = 2$ e $s_1^2 = 2 + 2s_2$, logo

$$\begin{array}{rclrcl} s_1^3 - 3s_1s_2 & = & 2\sqrt{2} \iff & (2+2s_2)(2+s_2^2)^2 & = & 8 \\ & & \iff & 2(1+s_2)(4-4s_2^2+s_2^4) & = & 8 \\ & & \iff & (1+s_2)(4-4s_2^2+s_2^4) & = & 4 \\ & & \iff & 4-4s_2+s_2^2+4s_2-4s_2^2+s_2^3 & = & 4 \\ & & \iff & s_2^3 - 3s_2^2 & = & 0 \\ & & \iff & s_2^2(s_2-3) & = & 0 \\ & & \iff & s_2 = 0 & \text{ou} & s_2 = 3. \end{array} \tag{4.44}$$

Portanto, de 4.43, tem-se que $S_4 = 4 - 2 \cdot 0 = 4$ ou $S_4 = 4 - 2 \cdot 3 = -2$. Como a e b são reais, então temos que $S_4 \geq 0$, ou seja, $S_4 = 4$.

Atividade 8. *Determine todas as soluções reais da equação* $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$.

Solução. Tomando $\sqrt[4]{1-x} = a$ e $\sqrt[4]{15+x} = b$, de onde segue $a^4 = 1 - x$ e $b^4 = 15 + x$, com isto, temos que

$$\begin{cases} S_4 = a^4 + b^4 = 16 \\ S_1 = a + b = 2. \end{cases} \tag{4.45}$$

E, além disto, pelo Polinômio Simétrico Elementar, temos

$$\begin{cases} s_1 = a + b = 2 \\ s_2 = ab. \end{cases} \tag{4.46}$$

Agora, de 4.42, temos

$$\begin{array}{rcl} S_4 & = & s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 2s_2^2 \\ 16 & = & 2^4 - 4 \cdot 2^2 \cdot s_2 + 2 \cdot s_2^2 \\ 0 & = & s_2\,(s_2 - 8)\,. \end{array}$$

De onde segue que $s_2 = 0$ ou $s_2 = 8$. Sendo assim, temos duas situações:

primeira situação: $s_2 = 0$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 0. \end{cases}$$

Assim, $a = 0$ e $b = 2$ ou $a = 2$ e $b = 0$. Se $a = 0$ e $b = 2$, $x = 1$. Agora, se $a = 2$ e $b =$, $x = -15$.

segunda situação: $s_2 = 8$

$$\begin{cases} a + b &= 2 \\ ab &= 8. \end{cases}$$

Nessa situação, a e b não são reais pois são raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 2x + 8$ cujo discriminante é $\Delta = -28$, logo x também não é real. Portanto, $S = \{-15, 1\}$

Considerações finais

.

Este trabalho teve como objetivo principal apresentar a eficácia e aplicabilidade da combinação do método de Newton-Raphson, da regra de sinais de Descartes e das sequências de Sturm para encontrar as raízes de um polinômio real e, além disso, mostrar que os polinômios simétricos são uma excelente ferramenta para encontrar soluções de problemas algébricos de fatoração, de sistemas de equações não lineares e de algumas equações algébricas. Sendo assim, esperamos que esse trabalho possa contribuir na construção de uma estratégia na busca de resolução de problemas. Pensando nesse sentido, (Polya, 1994, p. 5) comenta que:

> $\cdots$ Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo ou tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano.

A abordagem do método de Newton-Raphson pode ser apresentada como uma proposta a ser utilizada nas aulas do ensino médio como um mecanismo que torna o estudo de polinômios mais interessante, uma vez que pode apresentar ao aluno outras possibilidades a serem exploradas de forma generalizada do conteúdo e não somente alguns casos particulares de resoluções de equações polinomiais. Nesse mesmo sentido, as relações de Girard juntamente com os polinômios simétricos, também, podem ser trabalhadas, pois são outras importantes ferramentas na busca de soluções de problemas polinomiais, de maneira que frequentemente são abordados em Olimpíadas de Matemática. Portanto, esperamos que esse trabalho possa contribuir para o ensino-aprendizagem de alunos e professores.

Referências Bibliográficas

Abel, N. H. (1826). *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré*. J. reine angew. Math.

Descartes, R. (2012). *The geometry of René Descartes*. Dover Publications.

Gonçalves, A. (1979). *Introdução à Álgebra*. Projeto Euclides. IMPA.

Hefez, A.; Villela, M. L. T. (2012). *Polinômios e Equação Algébricas*. SBM.

Lima, E. (1981). *Curso de análise*, volume 1. IMPA.

Machado, I.A.;Alves, R. (2013). *Método de Newton*, volume 4. SIPE.

Morgado, A. C.; Carvalho, P. C. P. (2015). *Matemática Discreta*. SBM.

Muniz Neto, A. (2012). *Tópicos de Matemática Elemetar: Polinômios*, volume 6. SBM.

Newton, I. (1736). *The Method of Fluxions and Infinite Series: With Its Application to the Geometry of Curve-lines*. Henry Woodfall; and sold by John Nourse.

Polya, G. (1994). *A arte de resolver problemas: um enfoque do método matemático*. Interciência.

Raphson, J. (2011). *Analysis Aequationum Universalis*. BiblioBazaar.

Ruggiero, M.A.G.; Da Rocha Lopes, V. (1996). *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Pearson Makron Books.

Santos, E. (2013). A regra dos sinais de Descartes. *Revista do Professor de Matemática*, 83.

Stewart, J. (2009). *Cálculo*, volume 1. Cengage Learning.

Uspensky, J. (1948). *Theory of Equations*. McGraw-Hill Book Company.