UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

TRIGONOMETRIA URBANA, UMA PROPOSTA DIDÁTICA

FÁBIO RAMOS MANHÃES

ORIENTADORA: PROFA. DRA. ROSA ELVIRA QUISPE CCOYLLO

Vitória - ES
2018

Fábio Ramos Manhães

TRIGONOMETRIA URBANA, UMA PROPOSTA DIDÁTICA.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Professora Doutora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.

Vitória - ES

2018

Fábio Ramos Manhães

TRIGONOMETRIA URBANA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Professora Doutora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.

Membros da Banca:

Profª. Drª. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo

(Orientadora – Universidade Federal Do Espírito Santo. UFES)

Profª. Drª. Júlia Schaetzle Wrobel

(Examinadora – Universidade Federal Do Espírito Santo. UFES)

Prof. Dr. Bruno Alves Dassie

(Examinador – Universidade Federal Fluminense. UFF)

Vitória - ES
2018

AGRADECIMENTOS

A Deus por me conceder essa oportunidade.

Ao Profmat-UFES e todos os professores pela oportunidade de concluir esta etapa na vida e também a CAPES, pelo apoio financeiro durante o curso.

A minha esposa Marta Lima Ferreira, pela paciência, carinho e compreensão com limites tendendo ao infinito, mesmo nos sábados de intensos estudos.

Aos meus pais: Francisco Pinto Manhães, Zeli Ramos Manhães "*In Memorian*" e Miriam Lara Domingues Benevides "*In Memorian*", que me ensinaram que o caminho dos estudos é o caminho da liberdade do homem.

As minhas filhas Thais Lara Costa Manhães e Fabiana Lara Costa Manhães por entender a minha ausência por dois anos.

Aos meus irmãos e demais familiares, em especial: Flávio Ramos Manhães e Keli Benevides Manhães, por entender a minha ausência por dois anos.

A minha orientadora pela paciência e dedicação na orientação deste trabalho Profa. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo. Aos membros da banca, por terem sido meus professores Dr. Bruno Alves Dassie na graduação e Dra. Júlia S. Wrobel na pós-graduação e aqui participando desta importante etapa de estudos na minha formação docente.

Aos meus amigos de estudo diário do Profmat-UFES-2016, em especial os primeira via: Geyson Suzano, Diego Pauli De Paula, Lenise Julia Fassini Da Silva, Thais De Moura.

Aos monitores de Matemática da Escola Estadual de Ensino Médio Guarapari, que participaram do projeto: João Vitor Maioli, Fernanda Machado Subtil, Vanessa De Almeida Andrade, Jorge Alves Machado Segundo, Paulo Miguel Rodrigues, Victoria Souza Santos Xavier, Tafne Soares de Souza.

Aos alunos que foram voluntários e participaram do projeto contribuindo para a construção deste trabalho: Maria Helena Monteiro Reis, Maysa Kétlin Souza da Silva, Ana Clara Nascimento Tavares, Vitor Lucas Miguel Mascarenhas, Davi da Silva S Machado, Kaleb Prado da Silva, Sabrina Rocha de Almeida, Juliana Sangali da Silva, Natan Lagassa de O Cuzzuol, Victória Coradello Fernandes, Paulo Vitor Miranda Glicerio, Gustavo Gabriel de Oliveira, Bruna Claver de Abreu Rocha, Camila da Costa Bispo, Maria Eduarda Silva Pinto.

Aos professores e colegas de trabalho que torceram muito pela concretização deste trabalho, em especial: Juliana Taques, George Amorim, Rubens Monteiro, Dariomar Cano e Vanilda Loreiro.

"Não te mandei eu? Esforça-te, e tem bom ânimo; não temas, nem te espantes; porque o Senhor teu Deus é contigo, por onde quer que andares".

Josué 1:9

RESUMO

A abordagem sobre a Trigonometria trabalhada nos espaços urbanos diz respeito à capacidade de sair da sala de aula e explorar os espaços da cidade para o ensino de Matemática de uma forma significativa, com o auxílio de novas tecnologias e contextualizadas com a História do lugar, numa metodologia de resolução de problemas. Compreender o significado de razão trigonométrica, saber resolver questões envolvendo um triângulo qualquer e conseguir utilizar a teoria trigonométrica na resolução de problemas reais, é o que se espera dos alunos participantes desta pesquisa. Prévio a isso, um levantamento histórico associado a uma base teórica do conteúdo de trigonometria a ser utilizado, propiciarão a construção de uma sequência didática. Os professores que apreciaram a sequência, a avaliaram positivamente, e os alunos que a vivenciaram, apresentaram um bom desenvolvimento dos assuntos estudados, com um aproveitamento significativo dos conteúdos. A sequência didática proposta realizou a função de trazer o aluno para a rua e explorar os espaços urbanos do entorno da escola para se aprender matemática.

Palavras-chave: Matemática, Ensino, Trigonometria, Aprendizagem, Espaço Urbano.

ABSTRACT

The approach to Trigonometry worked in urban spaces concerns the ability to leave the classroom and explore the spaces of the city for teaching mathematics in a significant way, with the help of new technologies and contextualized with the History of the place, in a problem solving methodology. Understanding the meaning of trigonometric reason, knowing how to solve questions involving any triangle and being able to use trigonometric theory in solving real problems is what is expected of the students participating in this research. Prior to this, a historical survey associated to a theoretical basis of the trigonometry content to be used, will propitiate the construction of a didactic sequence. Teachers who appreciated the sequence, evaluated it positively, and the students who experienced it, presented a good development of the subjects studied, with a significant use of the contents. The proposed didactic sequence carried out the function of bringing the student to the street and exploring the urban spaces around the school to learn mathematics.

Keywords: Mathematics, Teaching, Trigonometry, Learning, Urban Space.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC	APLICACAÇÃO DO CONHECIMENTO
OC	ORGANIZAÇÃO DO CONHECIMENTO
ODA	OBJETOS DIGITAIS DE APRENDIZAGEM
PAEBES	PROGRAMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO ESPÍRITO SANTO
PI	PROBLEMATIZAÇÃO INICIAL

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Justificativa

Esse trabalho se justifica por se entender que a sala de aula, da forma que funciona nos dias atuais, pode não ser um lugar muito atrativo para os alunos, por conseguinte, utilizar-se de espaços não formais de educação se apresenta como uma alternativa cativante e complementar ao tradicional.

> *É importante ressaltar que, embora seja de censo comum que a Educação não-formal é diferente da Educação formal, por utilizar ferramentas didáticas diversificadas e atrativas, isto nem sempre é verdade. Há muitos exemplos de professores que adotam estratégias pedagógicas variadas para abordar um determinado conteúdo, fugindo do tradicional método da aula expositiva não-dialogada. E também há exemplos de aulas estritamente tradicionais e autoritárias sendo realizadas em espaços não-escolares. (JACOBUCCI, 2008, p.56).*

Diante do exposto, para esta proposta os espaços não formais serão utilizados não de uma forma tradicional, mas de forma dialogada e colaborativa, onde o aluno seja o protagonista do ensino.

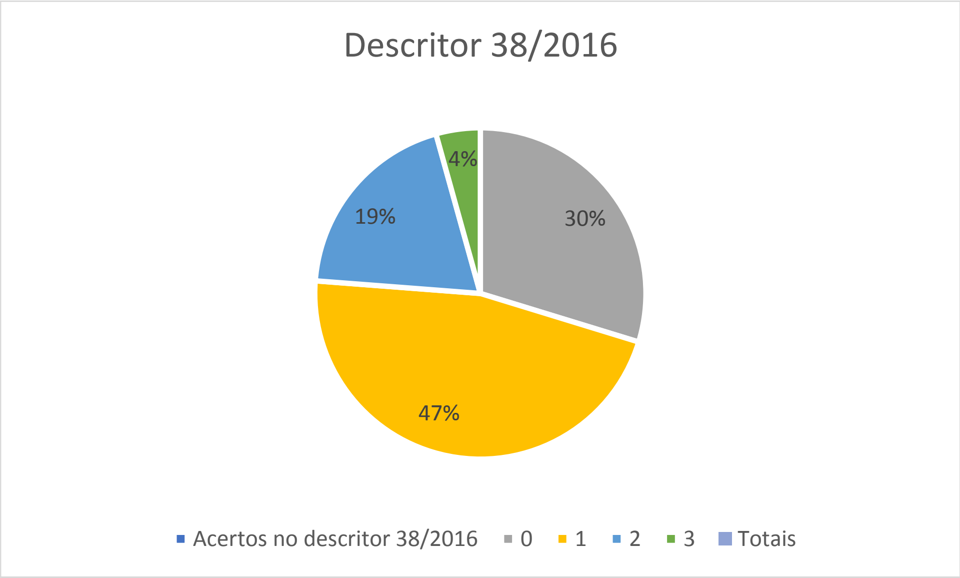
Um outro fato que motiva esta pesquisa são os resultados obtidos pelos alunos nos últimos dois anos em dois descritores do Paebes[1] Trimestral do Estado do Espirito Santo, onde o desempenho dos mesmos não foi satisfatório no que respeita à disciplina de Matemática para os professores dessa área, frente a um

[1] Programa de Avaliação da Educação Básica do Espirito Santo

ensino formal da Escola Estadual de Ensino Médio Guarapari, mais especificamente. São eles:

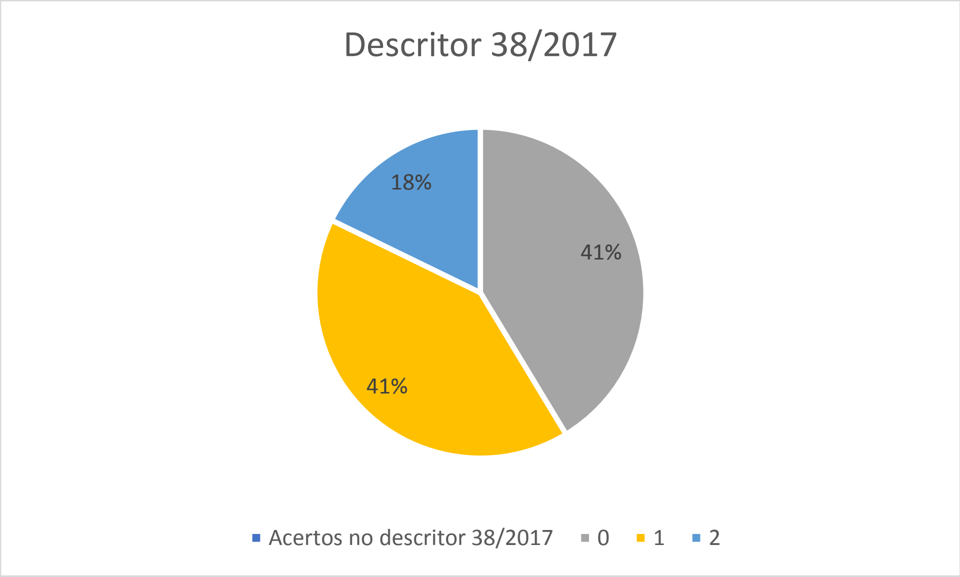
- Descritor 38: Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.

Figura 1: Resultado do descritor 38/2016



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 2: Resultado do descritor 38/2017

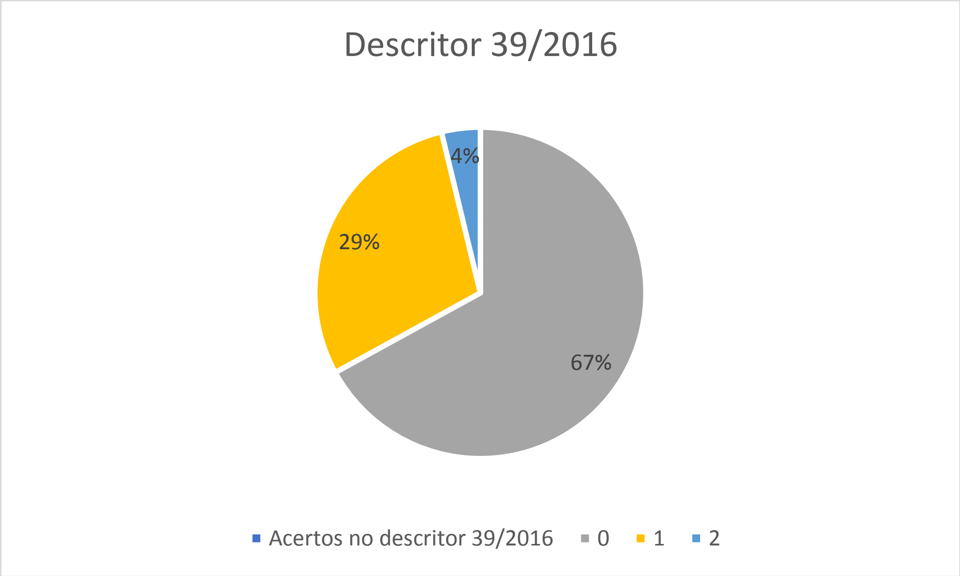


Fonte: Elaborado pelo autor

Os gráficos das figuras 1 e 2 mostram que no ano de 2016, no descritor número 38, 30% dos alunos não acertaram nenhuma questão, e isso se agravou no ano seguinte com 41% dos alunos errando todas as questões do mesmo.

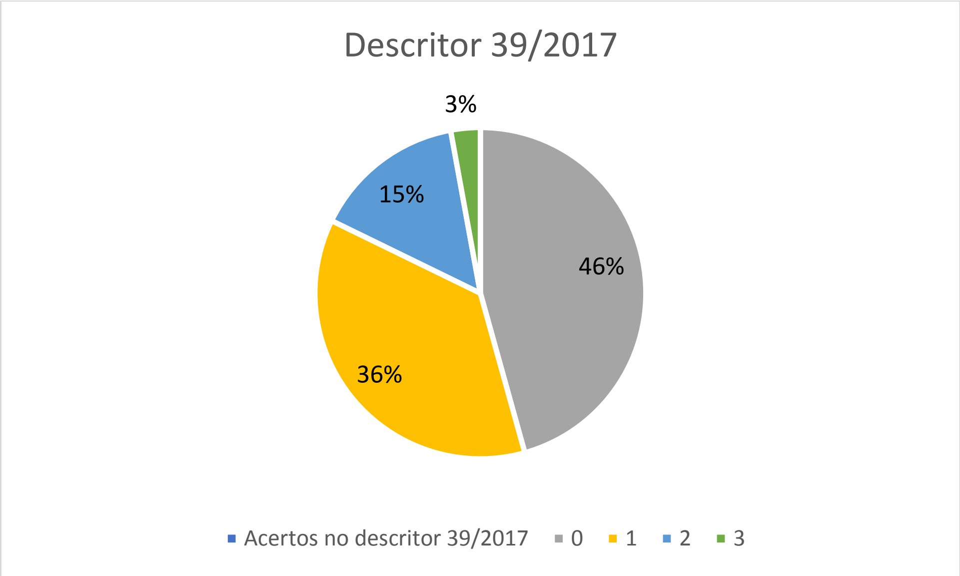
- <u>Descritor 39:</u> Utilizar razões trigonométricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.

Figura 3: Resultado do descritor 39/2016



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4: Resultado do descritor 39/2017



Fonte: Elaborado pelo autor

No descritor número 39 obteve-se uma melhora de 2016 para o ano de 2017, mas com uma porcentagem ainda muito grande de alunos errando todas as questões: 46% (Figuras 3 e 4).

Tais descritores são amplamente abordados neste trabalho.

Além da proposta de pretender ocupar espaços não formais, se anseia trabalhar a interdisciplinaridade com o aluno, no sentido de estabelecer uma relação entre seus conhecimentos e os aspectos sociais e culturais onde este está inserido.

> *Na interdisciplinaridade escolar, as noções, finalidades, habilidades e técnicas visam favorecer, sobretudo, o processo de aprendizagem respeitando os saberes dos alunos e sua integração, FAZENDA (2015, p. 12).*

Neste sentido explorar o Radium Hotel[2] como um material de interdisciplinaridade, visa absorver do aluno aquilo que ele já conhece da sua cidade, sua experiência sobre o local e possíveis oportunidades de aprendizagem.

Motivação e Objetivos

Ser professor é ser escolhido para uma profissão que requer amor pelo que se faz, estudo, atualização, paciência, entusiasmo e resiliência. Um profissional de Matemática além desses atributos carrega consigo paixão e romantismo. A maior motivação está em ver um aluno, principalmente aquele que possui mais dificuldade, atingir os objetivos em um exercício, em uma avaliação. É ver o aluno acertar, porque ele gosta de acertar, provavelmente todos gostam de acertar.

Assim pretende-se que este trabalho possa ajudar a algum professor a aprimorar as suas práticas, possa contribuir, talvez não de forma plena, mas possa motivar ao aluno e ao professor a colocar em prática sua experiência de sala de

[2] O Radium Hotel, localizado no município de Guarapari (ES), é um importante símbolo do turismo do estado. Construído em 1947, com o propósito de sediar uma escola da Marinha do Brasil, foi transformado em hotel cassino em 1953.

aula. Tendo este documento como referência para desenvolver este projeto em algum lugar, na sua cidade, com suas vivências culturais, históricas e ambientais e que possa ser um instrumento norteador de boas práticas no ensino de Matemática.

Não tem a pretensão de ser um documento completo, um documento pronto e acabado, definido. Pois parafraseando meu eterno professor e um dos maiores motivadores da minha formação, Bruno Alves Dassie (2016) "a definição esgota o objeto".

Que seja um instrumento de constante atualização para diversos e possíveis trabalhos futuros.

Objetivo geral

Essa pesquisa tem por objetivo geral minimizar as dificuldades decorrentes do processo de ensino-aprendizagem da Matemática por meio de atividades interdisciplinares, em espaços não formais de aprendizagem que favoreçam a construção de significados e representações da trigonometria a partir do contexto sócio histórico e com uso das tecnologias para a compreensão dos conteúdos.

Objetivos específicos

Aos estudantes participantes do projeto: entender as motivações e pesquisas que levaram ao desenvolvimento da Trigonometria; que possam apropriar-se das novas tecnologias para resolução de problemas; tenham a capacidade de construir as relações trigonométricas a partir da semelhança de triângulos; que possam utilizar o Teorema de Pitágoras para resolução de problemas em um triângulo retângulo e consigam demonstrar algumas razões trigonométricas; que saibam utilizar uma tabela trigonométrica; que possam analisar e selecionar informações de um aplicativo de celular para cumprir determinada ação; que possam ainda, compreender o contexto sócio histórico da construção do Radium Hotel; que sejam capazes de aplicar a lei dos senos e dos cossenos na resolução de problemas matemáticos; que sejam capazes de validar os objetos digitais de aprendizagem (ODA), apresentando suas críticas e aprofundando seus estudos.

Metodologia de Desenvolvimento do Trabalho

Alguns conhecimentos prévios de geometria plana são necessários para o desenvolvimento do trabalho que se inicia com revisões bibliográficas em ROQUE; CARVALHO (2012), BOYER; MERZBACH (2012), EVES (2004), analisando as abordagens sobre alguns conceitos históricos que contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria. Após esta etapa foram realizadas revisões bibliográficas na parte teórica em BARBOSA (2012), NETO; CAMINHA (2013), PINTO (1974), CARVALHO (2005), CARMO; MORGADO; WAGNER (2006). Tais textos contribuíram para desenvolver uma teoria básica e algumas aplicações, dando suporte ao desenvolvimento da Sequência Didática que é proposta posteriormente, com as oficinas e práticas expositivas e dialogadas que ocorreram ao longo do processo. Conclui-se com as autoavaliações realizadas e as avaliações propostas para futuros trabalhos.

Organização do Trabalho

No capítulo 2 são apresentados alguns conceitos históricos sobre o desenvolvimento da trigonometria, até uma descoberta mais atual sobre o assunto. Uma revisão bibliográfica foi necessária para o desenvolvimento de todo o trabalho. No capítulo 3, é feita uma abordagem da teoria e algumas aplicações da trigonometria na matemática e em outras áreas. No capítulo 4, é apresentada a proposta didática através de uma sequência didática e a descrição das atividades desenvolvidas. No 5° e último capítulo, são feitas algumas considerações sobre o trabalho desenvolvido e propostas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

ALGUNS CONCEITOS HISTÓRICOS

2.1 Trigonometria Grega

Segundo o professor Pitombeira[3], a trigonometria como ciência teórica foi uma criação de estudiosos gregos. De acordo com o mesmo, foi Hiparco de Nicéia o precursor da construção da teoria como um ramo da matemática. Seus estudos se concentravam na trigonometria esférica, cujos resultados seriam aplicados na Astronomia, área do seu interesse.

> *Hiparco foi o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas, usando para isso uma tabela de cordas por Astronomia. As principais contribuições de Hiparco em Astronomia foram a organização dos dados empíricos babilônicos, a confecção de um catálogo de estrelas e a descoberta da precessão dos equinócios. (PITOMBEIRA, 2005, p. 139).*

Os babilônios, por razões desconhecidas, utilizavam o seu sistema de numeração com base 60, porém existem teorias[4] sobre a razão desta escolha que não serão detalhadas aqui. Nesse sistema, denominado de sexagesimal, os babilônios propuseram a divisão da circunferência em 360 partes iguais, dando origem à unidade de medida de ângulo, conhecida como grau. Assim definido, a circunferência possui 360 graus.

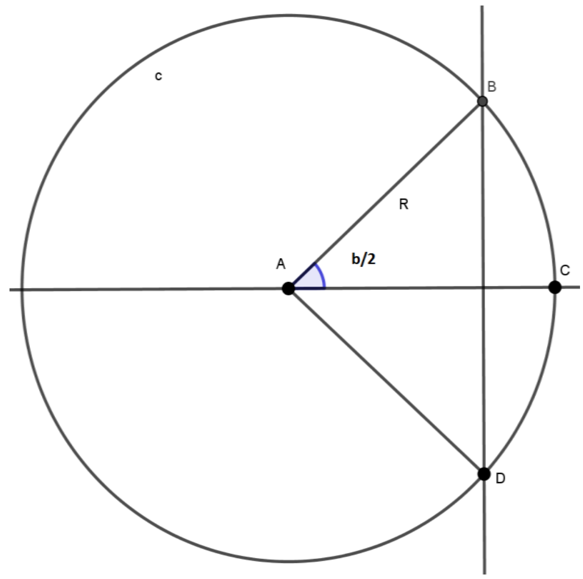
[3] João Bosco Pitombeira de Carvalho é professor emérito do Departamento de Matemática da PUC-rio.

[4] Acredita-se que os babilônios utilizaram esse sistema devido à vantajosa fatoração do número sessenta, o que facilita em muito os cálculos, principalmente as divisões. Ainda hoje é utilizado esse sistema na forma de graus (ângulo central) de uma circunferência e na medição do tempo em minutos ou segundos.

2.1.1 Construção de Hiparco e o seno de um arco

Por volta do ano 140 a.C., possivelmente influenciado pelos estudos babilônicos, Hiparco desenvolveu a seguinte construção:

Figura 5: Círculo e Corda



Fonte: Elaborado pelo autor

Considere a circunferência de raio $\boldsymbol{R = 60}$ e centro no ponto $\boldsymbol{A}$. Sobre a circunferência são marcados dois pontos (arbitrários): $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$, e traçado o segmento retilíneo $\overline{\boldsymbol{BD}}$, o qual será chamado de *corda*. Para medir esse segmento será utilizado uma unidade de medida, que irá depender da medida do raio. Observe que ao se transladar a corda do ponto $\boldsymbol{C}$ até o ponto $\boldsymbol{A}$, o raio $\overline{\boldsymbol{AC}}$ será seccionado em duas partes, ficando a parte ligada ao centro $\boldsymbol{A}$, cada vez menor. Quando a corda $\overline{\boldsymbol{BD}}$ atingir o ponto $\boldsymbol{A}$, se terá a maior corda possível no círculo: o seu diâmetro. O comprimento da corda $\overline{\boldsymbol{BD}}$, denotado por $\boldsymbol{Cd(b)}$, pode ser escrito em função do ângulo $\boldsymbol{B\hat{A}C}$, definido aqui como metade do ângulo $\boldsymbol{B\hat{A}D}$, que é igual a $\boldsymbol{b}$. Pela definição de Hiparco[5] é possível admitir que a *inclinação da semirreta* de origem em $\boldsymbol{A}$ na direção de $\boldsymbol{B}$ é dada pelo comprimento da corda $\overline{\boldsymbol{BD}}$, denotado por $Cd(b)$, dividido pelo diâmetro do círculo,

[5] A "Trigonometria" do período helenístico era baseada no estudo da relação entre um arco (ou ângulo) e sua corda. Muitas das identidades trigonométricas e teoremas conhecidos hoje, também o eram aos matemáticos helênicos, mas na sua forma equivalente de corda.

$$\sin\frac{b}{2} = Inclinação\ de\ \overrightarrow{AB} = \frac{Cd(b)}{2R}$$

e considerando $R=60$, tem-se,

$$\sin\frac{b}{2} = \frac{Cd(b)}{120} \qquad \text{equivalente a,} \qquad Cd(b) = 120 \cdot \sin\frac{b}{2}$$

Ao denominar o comprimento da corda $\overline{\boldsymbol{BD}}$ de $2m$, isto é, $Cd(b) = 2m$, resulta a definição do *seno* em função do comprimento da corda e do raio,

$$\sin\frac{b}{2} = \frac{m}{R}$$

Observe que se $R=1$, então o *seno* será a metade do comprimento da corda, daí o motivo para o *seno* também ser conhecido como *"meia corda"*.

2.1.2 O Teorema de Ptolomeu na trigonometria

A construção supracitada permitiu a Hiparco propor uma tabela de cordas, que é muito semelhante a uma tabela de senos de ângulos, como é conhecida nos dias atuais, para ângulos entre 0° e 180°. Posteriormente a esse trabalho, Ptolomeu[6], cientista grego, publicou em sua obra "*O Almagesto"* a tabela de cordas de Hiparco. O objetivo de Ptolomeu, segundo o professor Pitombeira (2005, p.176) *"era de descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar, supondo que a Terra está no seu centro".*

Muitos autores consideram *O Almagesto*[7], como a mais importante obra de trigonometria da época.

> *De longe, a mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade foi a "Syntaxis matemática", obra de treze livros escrita por Ptolomeu de Alexandria, cerca de meio século depois de Menelau. Esse célebre "Sintese Matemática" era distinguida de um outro grupo de tratados astronômicos por outros autores (Aristárco, inclusive) por ser a de Ptolomeu chamada a coleção "maior" (O Almagesto em árabe)...(BOYCE,2015, p.126).*

---

[6] Ptolomeu foi um cientista, astrônomo e geografo grego que viveu em Alexandria, cidade de Egito. Na antiguidade, Alexandria foi uma das cidades mais importantes do mundo civilizado, além de ponto de encontro entre Europa, África e Ásia e ter abrigado a maior Biblioteca do mundo antigo.

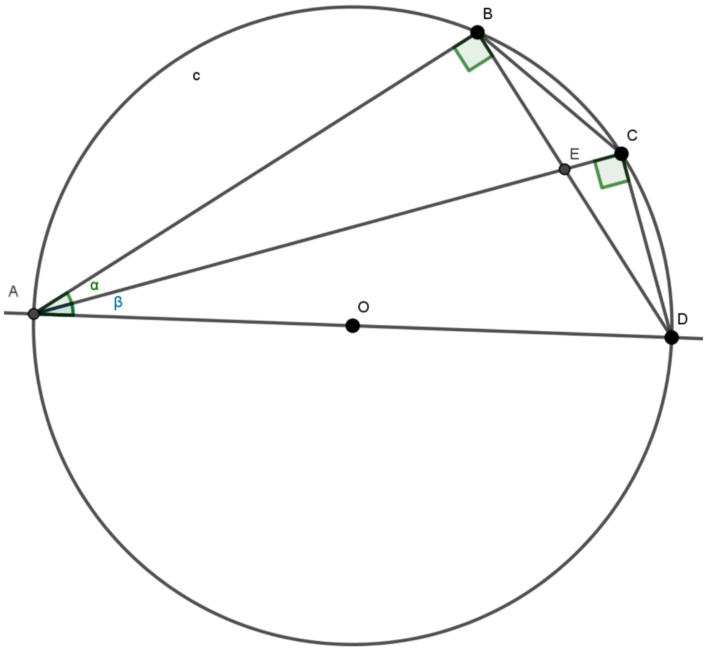
[7] Ou "Syntaxis matemática" como chamado pelo próprio Ptolomeu.

Em esse trabalho é possível destacar a importante proposição geométrica denominada de o *"Teorema de Ptolomeu"*, que diz: *Se $ABCD$ é um quadrilátero (convexo) inscrito em um círculo, então a soma do produto dos lados opostos de um quadrilátero convexo inscrito num círculo é igual ao produto das diagonais, isto é,*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

A figura abaixo mostra um caso particular do Teorema, que é de interesse deste trabalho.

Figura 6: Teorema de Ptolomeu



Fonte: Elaborado pelo autor

Esse caso particular do Teorema de Ptolomeu se apresenta quando $AD = 2r$, isto é, AD é o diâmetro de uma circunferência, conforme a figura 6. Assim, fazendo os arcos $\widehat{BD} = 2\alpha$ e $\widehat{CD} = 2\beta$, temos que os ângulos $B\hat{A}D = \alpha$ e $C\hat{A}D = \beta$, uma vez que são ângulos inscritos correspondentes a estes arcos, respectivamente. Tem-se ainda que $C\hat{A}B = \alpha - \beta$ e $C\hat{D}B = \alpha - \beta$, pois também são ângulos inscritos correspondentes ao mesmo arco $\widehat{BC} = 2(\alpha - \beta)$. Dos triângulos ABD e ACD tem-se,

$$\sin\alpha = \frac{BD}{2r} \qquad \text{e} \qquad \sin\beta = \frac{CD}{2r}$$

Observando que os triângulos AED e BEC são semelhantes, é possível escrever:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{BE}{AE} = \frac{CE}{DE} = \frac{BC}{2r}$$

Ainda, observando que os ângulos $B\hat{A}D$ e $B\widehat{D}A$ são complementares resulta que,

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha) = \frac{AB}{2r} \qquad \text{e} \qquad \cos\beta = \sin(90° - \beta) = \frac{AC}{2r}$$

Assim, pelo teorema de Ptolomeu, conclui-se a igualdade,

$$2r \cdot \cos\alpha \cdot 2r \cdot \sin\beta + 2r \cdot \sin(\alpha - \beta) \cdot 2r = 2r \cdot \cos\beta \cdot 2r \cdot \sin\alpha$$

Onde cancelando os termos semelhantes não nulos, em ambos os membros, encontra-se o seno da subtração de arcos,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Utilizando esse raciocínio, Ptolomeu desenvolveu outras relações que são semelhantes às formulas conhecidas atualmente como seno e cosseno da adição e subtração de arcos, concluindo assim sua tabela de cordas.

2.2 Trigonometria desenvolvida por outros povos

O *Almagesto* de Ptolomeu serviu de referência para os astrônomos de vários povos, mas a construção de uma tabela trigonométrica de senos, somente foi feita pelos indianos por volta do século IV ou V d.C. O *Surya Siddhanta,* trabalho que continha essa construção, foi desenvolvido por autores desconhecidos. Essa obra, que significa Sistemas de Astronomia[8], é um conjunto de regras e textos matemáticos, que apesar de não se preocupar com o rigor das demonstrações, continha pela primeira vez uma tábua de senos em vez de cordas, e que devido ao grande número de reedições, hoje em dia não é possível determinar com precisão as partes que são originais.

No final do século $VIII$, os árabes continuaram os estudos de astronomia iniciados pelos Gregos e os Hindus. Eles foram responsáveis pela introdução das

[8] O tratado descreve regras para calcular o movimento de vários planetas e a lua em relação a constelações e o diâmetro desses planetas; calcula as orbitas de vários corpos astronômicos; afirma a forma da terra sendo esférica; calcula o diâmetro da terra, da lua e a distância entre a terra e a lua, etc.

funções tangente, cotangente, secante e cossecante. Coube a eles também, a mudança do raio do círculo trigonométrico de 60 para 1. Ainda os mesmos conheciam as leis dos senos para triângulos, e foi *Nasir-Eddin*, astrônomo árabe, quem sistematizou os conhecimentos matemáticos de trigonometria plana e esférica no seu trabalho denominado de *Tratado sobre o quadrilátero*.

A trigonometria chega a Europa por volta do século XII. Uma tradução, do árabe ao latim do *Almagesto de Ptolomeu,* é atribuída a *Johannes de Sacrobosco*[9]. Entretanto foi *George von Peuerbach*[10] quem fez uma tradução direta dessa obra do grego original para o latim, ao perceber as fragilidades do sistema ptolemaico descritas no tratado, que utilizava para o ensino de astronomia na Universidade de Viena. Um outro trabalho de trigonometria foi o do matemático e astrônomo *Johann Muller von Konigsberg*[11], conhecido como *Regiomontano*. Foi ele quem publicou, talvez um dos mais importantes estudos sobre trigonometria da época, um tratado denominado *De triangulis omnimodis, obra* composta de cinco livros e estruturada de forma similar ao famoso livro *Os Elementos* de *Euclides*. Essa obra marcou o renascimento deste ramo da matemática na Europa.

Em 1579, o francês *François Viète*[12] publicou C*anon Mathematicus.* Em esse trabalho Viète determina triângulos planos e esféricos utilizando as seis funções trigonométricas.

No princípio do século $XVII$, em 1614, *John Napier*[13] publicou o seu *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. É creditado a ele, a invenção dos logaritmos que possibilitaram grandes avanços na formalização da trigonometria, ao encontrar regras que contribuíram para os estudos também de triângulos esféricos. Segundo

---

[9] Foi um matemático e astrônomo escocês (1195-1256) que lecionou na Universidade de Paris. Também foi conhecido por John of Holywood.

[10] Foi um astrônomo austríaco (1423-1461) e professor da Universidade de Viena. É considerado um dos precursores europeus da visão heliocêntrica do mundo, que depois foi adoptada por Nicolau Copérnico e Johannes Kepler.

[11] Foi um famoso matemático, astrônomo e cosmógrafo alemão (1436-1476), discípulo de George Peuerbach. A ele é atribuído a invenção dos sinais + e -.

[12] Foi um matemático e advogado ilustre francês (1540-1603). A ele é atribuído a frase "Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar".

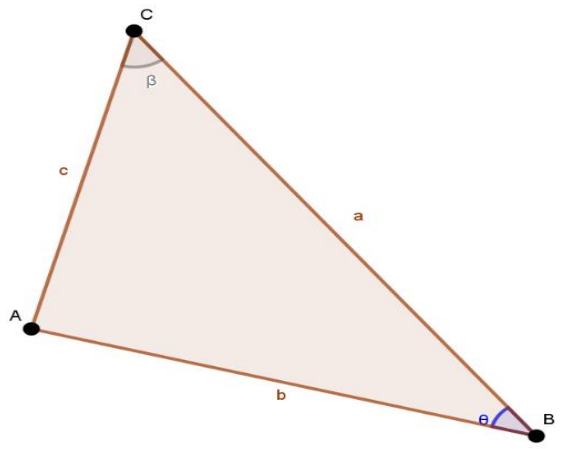
[13] John Napier (1550-1617) foi um matemático, físico astrônomo, astrólogo e teólogo escocês. Sua descoberta mais notável, os logaritmos, assentaram também as bases para a formulação de princípios fundamentais da análise combinatória.

Silva (2014, pg.155): *"a obra contém extensas tabelas de logaritmos dos senos e das tangentes de todos os ângulos de 0 a 90 graus em passos de 1 minuto"*.

Um exemplo de aplicação do trabalho de Napier é dado a seguir,

Dado um triângulo ABC, onde são conhecidos os lados $AB = b$, $AC = c$ e o ângulo β, conforme a figura 7, encontrar o ângulo θ, oposto ao lado c.

Figura 7: **Triângulo Retângulo dados dois lados e dois ângulos**



Fonte: Elaborado pelo autor

Para resolver esse problema, primeiramente ele utiliza a lei de senos que na época já era de conhecimento acadêmico,

$$\frac{\sin\theta}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \qquad \text{daí,} \qquad \log\left(\frac{\sin\theta}{c}\right) = \log\left(\frac{\sin\beta}{b}\right)$$

que pode ser escrita também como,

$$\log(\sin\theta) - \log c = \log(\sin\beta) - \log b$$

por conseguinte,

$$\log(\sin\theta) = \log \mathrm{c} + \log(\sin\beta) - \log b$$

que ao utilizar uma tabela de logaritmos, é possível encontrar o ângulo que corresponde aos cálculos acima. Nessa tabela Napier utiliza uma circunferência trigonométrica de raio $r = 10^7$, como exemplifica abaixo o professor Pitombeira (2012, p. 231).

Tabela 1: **Fragmento da tabela de Napier**

20° +minutos	**seno**	**logaritmo**
0	3.420.201	10.728.852
1	3.422.934	10.720.865
...	...	...
30	3.502.075	10.492.295
...	...	...

Fonte: PITOMBEIRA (2012)

Da tabela, o valor do seno de um ângulo de 20° é 3.420.201 e o logaritmo deste seno vale 10.728.852. Onde o seno do ângulo de 20° em uma tabela trigonométrica atual (Figura 8) vale aproximadamente 0,34202, que é o valor da tabela de Napier multiplicado pelo raio do círculo $r = 10^7$, onde o seno foi calculado.

Figura 8: **Fragmento de tabela trigonométrica atual**

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	0,33	0,309017	0,951057	0,32492
19	0,35	0,325568	0,945519	0,344328
20	0,37	0,34202	0,939693	0,36397
21	0,38	0,358368	0,93358	0,383864
22	0,40	0,374607	0,927184	0,404026

Fonte:http://www.ufrgs.br/biomec/materiais/Tabela%20Trigonometrica.pdf. Acesso em: 05.08.2018

Em uma última consideração, tem-se a contribuição de *Euler*[14]. É creditada a ele a iniciativa de *"tratar o cálculo como uma teoria das funções"*, Pitombeira (2012, p. 305). Em seu trabalho, Euler define o que é uma função analítica e escreve uma aproximação da função exponencial natural[15],

[14] Leonhard Paul Euler (1707-1783) foi um matemático e físico suíço. Fez importantes descobertas no Cálculo e na Teoria dos grafos. É considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII e também de todos os tempos. Foi um dos mais prolíficos, calcula-se que toda a sua obra reunida teria entre 60 e 80 volumes de quartos.

[15] A função inversa da função exponencial natural, é a função logaritmo natural.

$$f(x) = e^x \qquad \text{pela série} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

culminando na sua equação,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (1)$$

Dessa equação é possível deduzir que,

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x \qquad (2)$$

onde somando e subtraindo as equações (1) e (2), obtém-se:

$$\cos x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin x = \frac{e^x - e^{-x}}{2i}$$

Concluindo assim nas relações trigonométricas desejadas, Pitombeira (2012, p.315).

2.3 Descobertas Recentes

Estudos recentes, feitos por Daniel Mansfield e Norman Wildberger, da *School of Mathematics and Statistics, UNSW,* Sydney, Austrália, revelam que a trigonometria surgiu aproximadamente 1500 anos antes de Hiparco publicar sua tabela de cordas.

Esses estudos se concentram numa placa conhecida como Pliptom 322, que foi descoberta em *Senkereh*, no Sul do atual Iraque, pelo Norte Americano Edgar Banks. Atualmente esta placa encontra-se alocado na Universidade Columbia em Nova York para estudos.

Figura 9: Pliptom 322

Fonte: Mansfield, Windberg (2017)

Na pesquisa, eles descobriram que a Pliptom 322 é uma tabela trigonométrica sexagesimal exata desenvolvida pelos babilônios e que não se baseava na noção de ângulo e sim na descrição de triângulos retângulos em função de seus lados, denominados lado curto, lado longo e diagonal de um retângulo. De acordo com Mansfield e Wildberger. (2017, p.2), "uma tabela trigonométrica moderna é uma lista de triângulos retângulos com hipotenusa 1 e aproximações dos comprimentos dos lados (catetos): $\sin\theta$ e $\cos\theta$, juntamente com a razão $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$". A Pliptom 322 não adotava este modelo, era uma tabela baseada em proporções. Esta descoberta indica que as origens da trigonometria, conhecida até agora, se deram entre os séculos XIX e XVI a.C.

CAPÍTULO 3

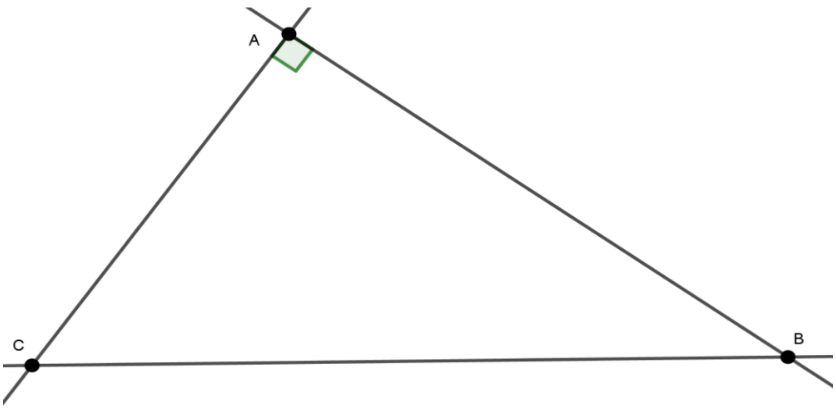
TEORIA E APLICAÇÕES

3.1 Trigonometria no Triângulo Retângulo

3.1.1 Triângulo Retângulo

Um triângulo é dito *retângulo*, quando um de seus ângulos mede 90°, isto é, quando possui um ângulo *reto*. Assim, dado um triângulo retângulo ABC, de ângulo reto no vértice A, conforme a figura 10, tem-se os lados AC e AB denominados de *catetos* e o lado BC, oposto ao ângulo reto, denominado de *hipotenusa*.

Figura 10: Triângulo Retângulo ABC.

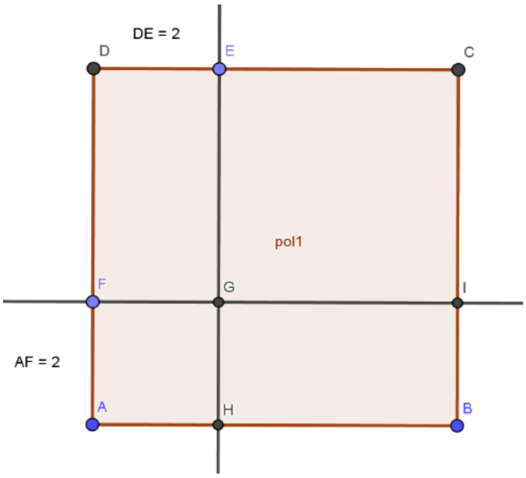


Fonte: Elaborado pelo autor

São denotados os ângulos internos como $A\hat{C}B = \hat{C}$, $A\hat{B}C = \hat{B}$ e $C\hat{A}B = \hat{A}$. Denominando as medidas dos catetos por $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e a hipotenusa por $\overline{BC} = a,$ tem-se um dos mais famosos e importantes teoremas da Matemática, o Teorema de Pitágoras.

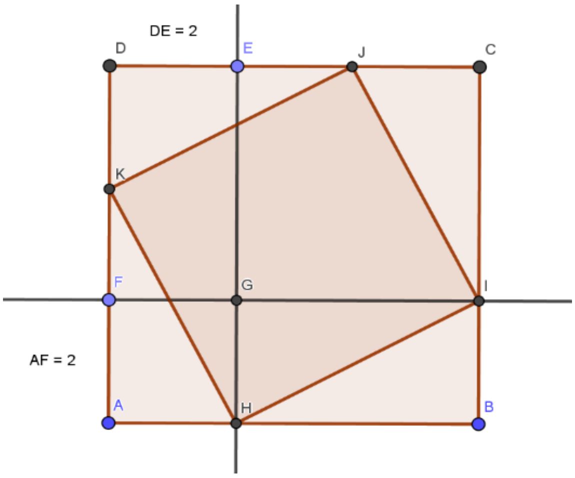
<u>Teorema de Pitágoras</u>: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa a é igual à soma dos quadrados dos catetos b e c, isto é, $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 11: quadrado *ABCD*



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 12: quadrado *HIJK*

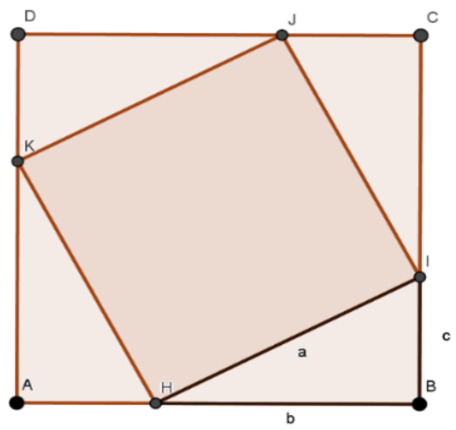


Fonte: Elaborado pelo autor

Prova: Na figura 11 foi construído um quadrado *ABCD*, e sobre os lados $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ foram marcados dois pontos, F e E, que estão a uma mesma distância dos vértices *A* e *D*, respectivamente. Por esses pontos foram traçados os seguimentos $\overline{FI}$ e $\overline{EH}$, que são paralelos aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do quadrado, respectivamente.

Construindo um novo quadrado de lado $\overline{HI}$ conforme a figura 12, obtém-se quatro triângulos retângulos congruentes $(AHK), (DKJ), (CJI)$ e (BIH), pelo caso LLL[16], isto é, possuem os três lados congruentes. Denominando as medidas dos lados $\overline{BI} = c$, $\overline{BH} = b$ e a hipotenusa $\overline{HI} = a$, pode-se construir a figura 13.

Figura 13: Teorema de Pitágoras



Fonte: Elaborado pelo autor

Ainda, observando que a área do quadrado maior é $ABCD = (b + c)^2$, (Figura 13), pode-se escrever que a área do quadrado $ABCD$ é igual a área do quadrado $JKHI$ mais a área dos quatro triângulos retângulos congruentes. Portanto,

16 Se dois triângulos possuem três lados homólogos congruentes então os triângulos são semelhantes.

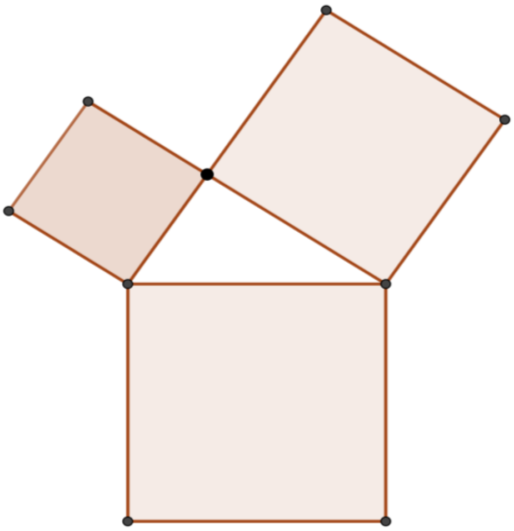
$$(b+c)^2 = a^2 + 4\frac{b \cdot c}{2} \quad \text{que é equivalente a,} \quad b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

donde cancelando os termos semelhantes em ambos os membros da igualdade, obtém-se que: $b^2 + c^2 = a^2$.

■

Exemplo: Por construção no *GeoGebra*, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Figura 14: Relação entre áreas

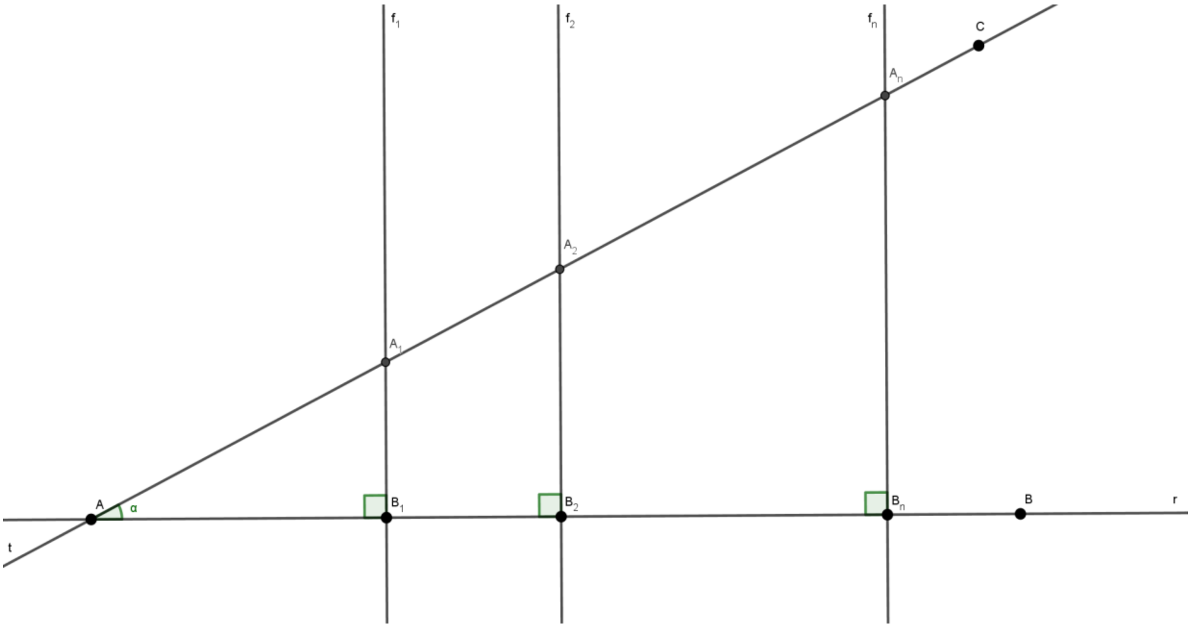


Fonte: Elaborado pelo autor

3.1.2 Razões Trigonométricas

Considere duas retas concorrentes, a reta r que passa pelos pontos A e B, a reta t que passa pelos pontos A e C. Essas retas são cortadas pelas retas transversais, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ perpendiculares à reta r, conforme a figura abaixo. O ângulo $B\hat{A}C = \alpha$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Assim definido, tem-se que os triângulos $AB_1A_1, AB_2A_2, AB_3A_3, \ldots$ são semelhantes, pois possuem dois ângulos com a mesma medida e consequentemente o terceiro ângulo também o será. Daí, tem-se que os lados homólogos são proporcionais e podem-se escrever as razões,

Figura 15: Razões trigonométricas



Fonte: Elaborado pelo autor

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{AA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{AA_3}} = \cdots = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{AA_n}} \qquad (1)$$

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{AA_2}} = \frac{\overline{AB_3}}{\overline{AA_3}} = \cdots = \frac{\overline{AB_n}}{\overline{AA_n}} \qquad (2)$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{AB_3}} = \cdots = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{AB_n}} \qquad (3)$$

Onde as razões (1), (2) e (3) depenem apenas do ângulo α . Assim, pode-se definir, para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, a expressão (1) como $\sin\alpha$, a (2) como $\cos\alpha$ e a (3) como $\tan\alpha$.

Ainda, denominando $\overline{A_1B_1} = b$, $\overline{AB_1} = c$ e $\overline{AA_1} = a$, pode-se escrever as razões como:

$$\sin\alpha = \frac{b}{a}, \qquad \cos\alpha = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \tan\alpha = \frac{b}{c}$$

Fazendo,

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \tan\alpha \qquad \text{dai,} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Ainda, do Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$, substituindo os valores de b e c

pelos correspondentes: $a \sin\alpha = b$, $a\cos\alpha = c$. Tem-se que $a^2 = (a\sin\alpha)^2 + (a\cos\alpha)^2$, que pode ser escrita como, $a^2 = a^2(\sin\alpha)^2 + a^2(\cos\alpha)^2$, o que implica em,

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Denotando a medida do ângulo $A\widehat{A_1}B_1 = \beta$, para $0 < \beta < 90°$, tem-se que $\cos\beta = \frac{b}{a}$, $\sin\beta = \frac{c}{a}$ e $\tan\beta = \frac{c}{b}$. O que decorre em relações entre ângulos complementares: $\sin\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \sin\beta$ e $\tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$. Observando que em todo triângulo a soma dos ângulos internos é sempre igual a $180°$, isto é, $\alpha + \beta + 90° = 180°$, donde, $\alpha + \beta = 90°$, são complementares. Dai, resulta a proposição abaixo.

Proposição 1. Se dois ângulos α e β são complementares, então:

$$\sin\alpha = \cos\beta\,, \qquad \cos\alpha = \sin\beta \qquad \text{e} \qquad \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$$

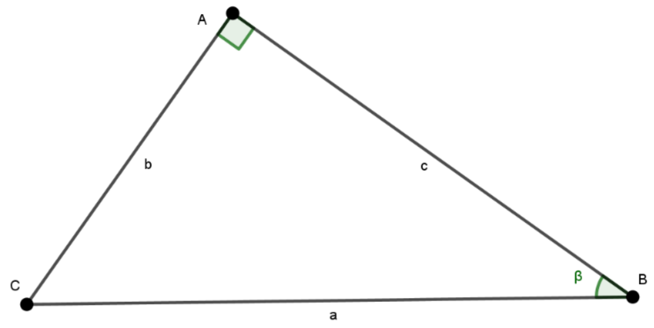
Observação. Note que se $\alpha + \beta = 90°$, então é possível escrever $\alpha = 90° - \beta$, ou $\beta = 90° - \alpha$. Assim, pode-se concluir que, $\sin\alpha = \sin(90° - \beta)$ o que implica em $\sin\alpha = \cos\beta$ e analogamente $\sin\beta = \cos\alpha$.

Exemplos:

a) Determinar a área de um triângulo retângulo, conhecidos a hipotenusa e um de seus ângulos agudos.

Solução: Do enunciado, considere que no triângulo são conhecidos o ângulo agudo β e a medida da hipotenusa a.

Figura 16: Triângulo retângulo com um ângulo dado



Fonte: Elaborado pelo autor

Daí, fazendo $b = a\sin\beta$ e $c = a\cos\beta$, substituímos esses valores na área do triângulo retângulo que é dada por,

$$A(ABC) = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{a\sin\beta \cdot a\cos\beta}{2} = \frac{a^2 \sin\beta \cdot \cos\beta}{2}$$

b) Determinar a área de um triângulo retângulo, conhecidos a hipotenusa e um cateto.

Solução: Considere a figura do exemplo (a) acima. Suponha conhecidos as medidas do cateto b e a da hipotenusa a. Daí, Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que $a^2 = b^2 + c^2$, que pode ser escrito também,

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b), \quad \text{donde,} \quad c = \sqrt{(a+b)\cdot(a-b)}$$

Logo substituindo na área do triângulo retângulo tem-se que,

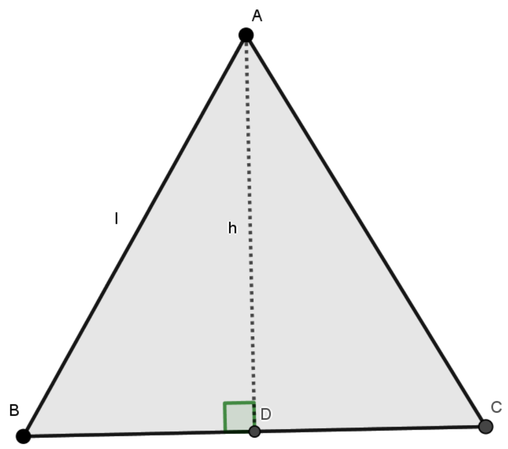
$$A(ABC) = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{b \cdot \sqrt{(a+b)\cdot(a-b)}}{2}$$

3.1.3 Senos e Cossenos de ângulos notáveis.

Alguns ângulos são denominados notáveis porque foram deduzidos a partir de polígonos regulares, consideradas pelos gregos como figuras perfeitas.

Considere um triângulo equilátero de lado l conforme a figura abaixo:

Figura 17: Triângulo equilátero de lado l



Fonte: Elaborado pelo autor

O pé da altura h do triângulo, relativa ao lado $\overline{BC}$, encontra este segmento no ponto D. A medida do segmento $\overline{BD} = \frac{l}{2}$, uma vez que a altura do triângulo equilátero coincide com a mediana de $\overline{BC}$. O triângulo equilátero ABC possui todos os ângulos internos congruentes medindo $60°$, isto é, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$ e a altura do triângulo que é coincidente também com a bissetriz, determina no triângulo ADB, um ângulo $B\hat{A}D = 30°$. Assim, no triângulo ADB, tem -se que:

$$\sin 60° = \sin \hat{B} = \frac{h}{l} \quad \text{e} \quad \cos 60° = \cos \hat{B} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(B\hat{A}D\right) = \sin 30° \quad \text{e} \quad \cos\left(B\hat{A}D\right) = \cos 30°$$

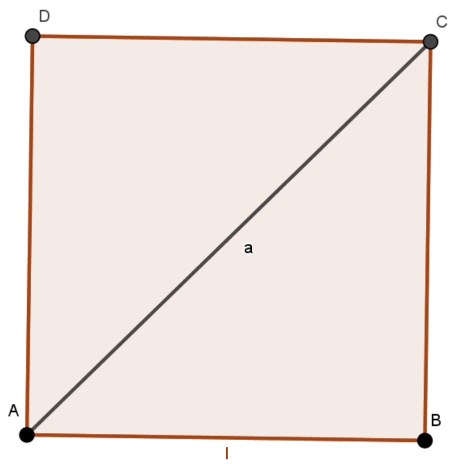
Mas, pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ADB, tem-se que: $h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$, o que implica em $h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$, que é equivalente a $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ (2).

Daí, substituindo o valor de (2), tem-se que, $\sin 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainda, como $30°$ e $60°$ são ângulos complementares, é possível escrever as relações seguintes:

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Agora considere um quadrado de lado l e diagonal a, conforme a figura abaixo:

Figura 18: quadrado de lado l e diagonal a



Fonte: Elaborado pelo autor

A diagonal AC determina no quadrado $ABCD$ o triângulo ABC, que é retângulo em B e de hipotenusa a. Os ângulos agudos desse triângulo medem 45°, pois a diagonal bissecta o ângulo reto nos vértices A e C determinando os ângulos $C\hat{A}B = B\hat{C}A = 45°$. Da figura tem-se que,

$$\cos 45° = \sin 45° = \frac{l}{a} \qquad (1)$$

Entanto, pelo teorema de Pitágoras, $a^2 = l^2 + l^2$, dai, $a = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$, e substituindo em (1), tem-se:

$$\text{Cos}\, 45° = \sin 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, para o ângulo sexagesimal $x°$ tal que, $0 < x < 90$, definidas as razões, é possível construir a tabela abaixo:

Tabela 2: Ângulos notáveis

	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Outros ângulos notáveis medidos no sistema sexagesimal, são os ângulos agudos de 37° e 53°, que são deduzidos das ternas aritméticas pitagóricas[17]. Um exemplo de terno de números inteiros primitivo[18] é {3,4,5}, que são encontrados a partir das equações paramétricas:

[17] Um terno pitagórico ou tripla pitagórica é formado por três números naturais {a,b,c} que satisfazem o Teorema de Pitágoras. Observe que se {a,b,c} é um terno pitagórico então {ka,kb,kc} também o será (k>0).

[18] Um terno de números inteiros {a,b,c} é chamado primitivo se o único fator comum entre eles é o número um, isto é, os mesmos são primos entre si, dois a dois.

$$a = 2uv, \qquad b = u^2 - v^2, \qquad c = u^2 + v^2$$

onde u e v são inteiros primos entre si. Outro exemplo de terno pitagórico primitivo é {5,12,13}.

3.2 Trigonometria em um Triângulo Qualquer

3.2.1 Lei dos Senos

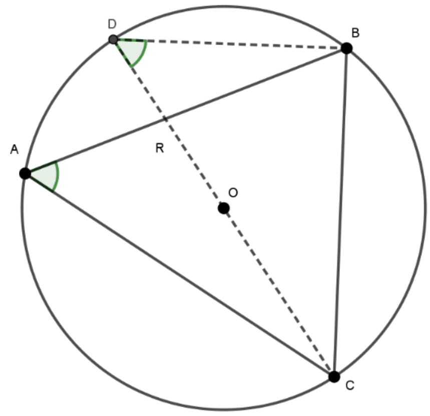
Teorema 2. Qualquer que seja o triângulo ABC, inscrito em uma circunferência de raio R, tem-se que,

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \hat{A}} = \frac{\overline{AB}}{\sin \hat{C}} = \frac{\overline{AC}}{\sin \hat{B}} = 2R$$

Prova: Serão analisados aqui dois casos, o primeiro ao inscrever o triângulo em uma circunferência de raio R, e o segundo ao inscrevê-lo numa semicircunferência de mesmo raio.

Caso 1: Considere um triangulo qualquer ABC inscrito num círculo de raio R, conforme a figura 19. Traçando o diâmetro da circunferência a partir do vértice C, este intercepta a circunferência num ponto denominado de D.

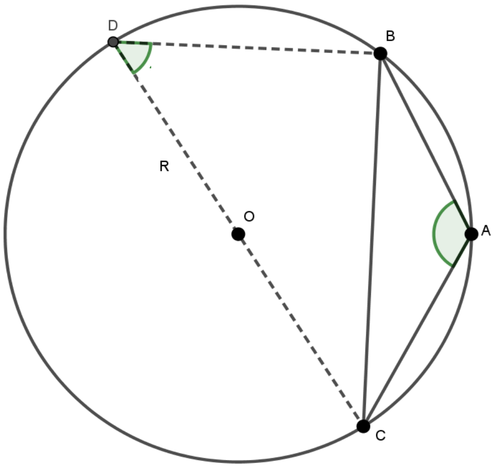
Figura 19: Lei dos senos



Fonte: Elaborado pelo autor

Assim definido, observa-se que os ângulos $\hat{A}$ e $\widehat{D}$ são congruentes, pois são ângulos inscritos correspondentes ao mesmo arco $\widehat{BC}$. Daí, $\sin\hat{A} = \sin\widehat{D}$.

Figura 20: Triângulo inscrito numa circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor

Caso 2: Agora o triângulo é construído numa semicircunferência de raio R. Traçando o diâmetro a partir do vértice C, este intercepta a circunferência no ponto D.

Os ângulos $\hat{A}$ e $\widehat{D}$ são suplementares, pois cada um representa a metade do ângulo central correspondentes aos seus arcos $\widehat{BC}$, maior e menor, respectivamente. Daí, como os dois arcos correspondem a todo o círculo, a soma dos dois ângulos corresponde a um ângulo de $180°$. Portanto, $\sin\hat{A} = \sin\widehat{D}$.

Assim, nos dois casos acima, o triângulo BDC é um triângulo retângulo em $\hat{B}$, uma vez que $\hat{B}$ é um ângulo inscrito em um arco de um semicírculo. Logo,

$$\sin\widehat{D} = \frac{\overline{BC}}{2R} \qquad \text{donde,} \qquad \overline{BC} = 2\text{R}\sin\widehat{D} = 2\text{R}\sin\hat{A} \qquad \text{daí,} \qquad \frac{\overline{BC}}{\sin\hat{A}} = 2R$$

Analogamente, tem-se que, $\frac{\overline{AB}}{\sin\hat{C}} = 2R$ e $\frac{\overline{AC}}{\sin\hat{B}} = 2R$. Portanto,

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\hat{A}} = \frac{\overline{AB}}{\sin\hat{C}} = \frac{\overline{AC}}{\sin\hat{B}} = 2R$$ ■

3.2.2 Lei dos cossenos

Teorema 3. Em um triângulo qualquer ABC, de lados a, b e c, tem-se que:

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$

c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

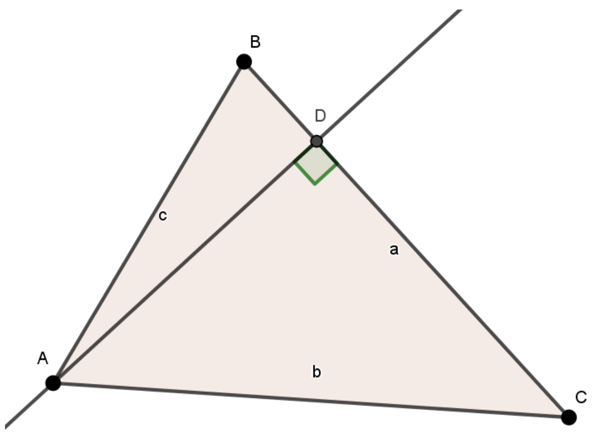
Prova: A demonstração será dividida em dois casos**.**

Caso 1. O triângulo ABC é acutângulo.

Seja $\overline{AD} = h_a$ a altura relativa ao lado a do triângulo ABC da figura 21, e $\overline{BD} = x$. Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ADB tem-se que,

$$c^2 = h_a^2 + x^2 \qquad \text{equivalente a,} \qquad c^2 - x^2 = h_a^2 \quad (1)$$

Figura 21: Lei dos cossenos no triângulo acutângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Ainda, pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ADC,

$$b^2 = h_a^2 + (a - x)^2 \qquad \text{equivalente a,} \qquad b^2 - x^2 - a^2 + 2ax = h_a^2 \quad (2)$$

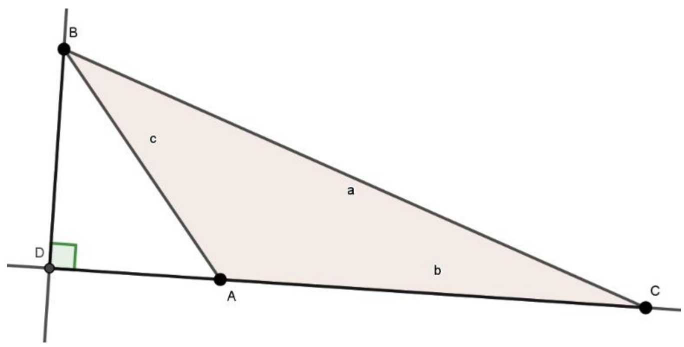
Igualando (1) e (2),

$$b^2 - x^2 - a^2 + 2ax = c^2 - x^2 \qquad \text{daí} \qquad b^2 = c^2 + a^2 - 2ax \quad (3)$$

Entretanto no triângulo ADB: $\cos\hat{B} = \frac{x}{c}$, que pode ser escrito como: $c\,.\cos\hat{B} = x$ (4) Assim, substituindo (4) em $(3\,)$, conclui-se que $b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c\cos\hat{B}$, que é o resultado esperado. Os outros resultados, itens b) e c), são análogos.

Caso 2*.* O triângulo ABC é obtusângulo.

Figura 22: Lei dos cossenos no triângulo obtusângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Sejam $\overline{BD} = h_b$ e $\overline{AD} = x$, conforme figura 22. Aplicando o Teorema de Pitágoras, nos triângulos ABD e BDC, respectivamente, obtemos,

$$c^2 = h_b^2 + x^2 \qquad \text{e} \qquad a^2 = h_b^2 + (b+x)^2$$

Isolando h_b^2 em cada equação, obtém-se,

$$c^2 - x^2 = h_b^2 \qquad \text{e} \qquad a^2 - b^2 - 2bx - x^2 = h_b^2$$

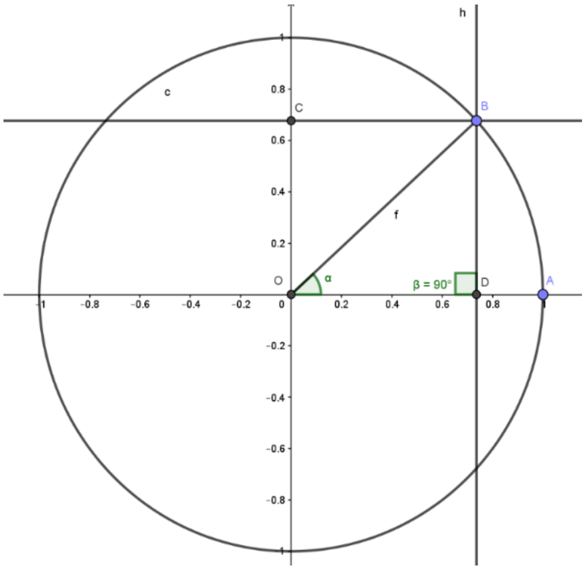
Que por transitividade é equivalente a, $c^2 - x^2 = a^2 - b^2 - 2bx - x^2$, que implica em $a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$ $(*)$. Mas, no triângulo ABD, $\cos\hat{A} = \frac{x}{c}$, que pode ser escrito como $x = c\cos\hat{A}$. Que substituindo em $(*)$, obtém-se $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\hat{A}$. Observando que os ângulos $B\hat{A}D$ e $B\hat{A}C$ são suplementares, o que implica em terem os valores dos cossenos com sinal oposto. Daí resulta a igualdade desejada, $a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c\cos\hat{A}$. As outras igualdades, itens b) e c), são análogas. ■

3.2.3 Teorema Fundamental da Trigonometria

Teorema 4. Qualquer que seja o ângulo α, tem-se: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Prova: Dado um círculo de centro O e raio $r = 1$, conforme a figura abaixo:

Figura 23: Teorema fundamental da trigonometria



Fonte: Elaborado pelo autor

Por definição, $\sin\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}}$, o que implica em, $\overline{BD} = \overline{OB}\sin\alpha$, mas $\overline{OB} = r = 1$, logo $\overline{BD} = \sin\alpha$ (1). Analogamente, $\cos\alpha = \frac{\overline{DO}}{\overline{OB}}$, assim, $\overline{DO} = \cos\alpha$ (2). Entretanto, pelo teorema de Pitágoras, tem-se que, $\overline{DO}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{OB}^2$ (3), pois o triângulo ODB, é retângulo em B .Dai, substituindo $\overline{OB}$, (1) e (2) em (3), temos que,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$ ■

3.3 Operações no arco do seno e cosseno

3.3.1 Soma e Diferença de Arcos

Teorema 5. Sejam α e β dois ângulos agudos. Então, tem-se que:

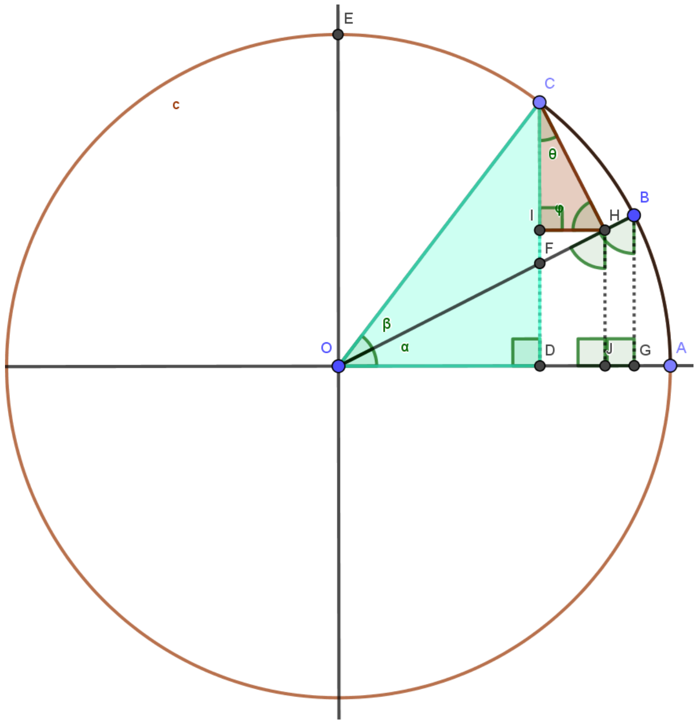
a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$

b) $\sin(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\text{sen}\beta$

c) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$

d) $\sin(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\text{sen}\beta$

Figura 24: Soma e diferença de arcos



Fonte: Elaborado pelo autor

Prova do item b. Considere um círculo de centro O e raio $r = 1$, além dos arcos $\widehat{AB} = \alpha$, $\widehat{BC} = \beta$, conforme a figura 24. Assim, temos $\widehat{AC} = \alpha + \beta$. E sendo $\overline{DI} = \overline{HJ}$, então: $\sin(\alpha + \beta) = \overline{DC} = \overline{DI} + \overline{IC} = \overline{HJ} + \overline{IC}$ $\quad (1)$

Por construção os ângulos $\widehat{AOB} = \alpha$ e $\widehat{DCH} = \theta$ são de mesma medida, uma vez que os triângulos OFD e CFH são semelhantes pelo caso AA. Aqui o ângulo $\widehat{CHF}$ é reto. Veja que, $\sin\alpha = \frac{\overline{HJ}}{\overline{OH}}$, $\cos\beta = \frac{\overline{OH}}{\overline{OC}}$ daí, $\overline{HJ} = \overline{OH}\sin\alpha = \overline{OC}\cos\beta\,.\sin\alpha$ Mas, $\overline{OC} = 1$, logo $\overline{HJ} = \sin\alpha\,.\cos\beta$ $\quad (2)$.

De forma análoga, no triângulo CIH, tem-se que: $\cos\alpha = \frac{\overline{IC}}{\overline{CH}}$, $\sin\beta = \frac{\overline{CH}}{\overline{OC}}$ daí $\overline{IC} = \overline{CH}\cos\alpha = \overline{OC}.\sin\beta\,.\cos\alpha = \sin\beta.\cos\alpha$ $\quad (3)$. Por fim, substituindo (2) e (3) em (1), tem-se: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

■

3.3.2 Arco Duplo e Arco Metade

Proposição 6.

a) Se $\theta \in (0°, 45°)$,então $\text{sen}2\theta = 2.\text{sen}\theta.\cos\theta$.

b) Se $\theta \in (0°, 45°)$,então $\text{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

Prova do item a. A figura 25 mostra um círculo C de centro O e raio $r = 1$.

Considere um triângulo com um dos vértices no centro do círculo, logo BOC é um triângulo isósceles. Sejam $\overline{OA}$ e $\overline{BD}$ as alturas relativas aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{OC}$, respectivamente. Observe que $\overline{OA}$ coincide com a bissetriz do ângulo $B\hat{O}C$ e com a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, logo $\overline{AB} = \overline{AC}$.

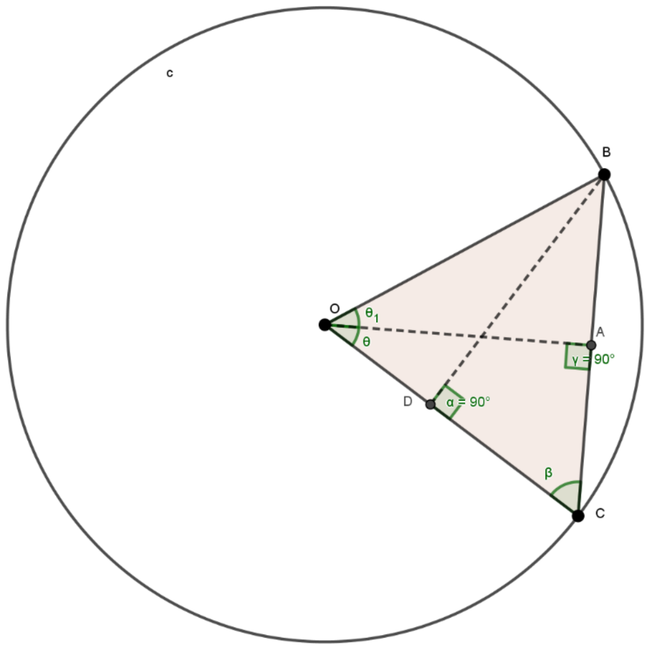
Agora no triângulo OAC, tem-se: $\cos\theta = \overline{OA}$ (1), $\text{sen}\theta = \overline{AC} = \overline{AB}$ (2). E no triângulo OBD: $\text{sen}2\theta = \overline{BD}$ (3). Ainda, a área do triangulo BOC pode ser calculado de duas formas:

$$\frac{\overline{OC}.\overline{BD}}{2} = A(BOC) = \frac{\overline{BC}.\overline{OA}}{2} = \frac{2.\overline{AB}.\overline{OA}}{2}$$

Substituindo os valores de (1), (2) e (3), tem-se que,

$$\frac{1.\text{sen}2\theta}{2} = \frac{2.\text{sen}\theta.\cos\theta}{2} \qquad \text{donde} \qquad \text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta$$

Figura 25: Arco duplo e arco metade



Fonte: Elaborado pelo autor

Prova do item b. No triângulo BOD tem-se, $\overline{OD} = \cos 2\theta$, logo no segmento $\overline{OC}$,

$$\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC} = \cos 2\theta + \overline{DC} \quad (1)$$

E no triangulo BDC: $\cos\beta = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$ o que implica em $\overline{DC} = \overline{BC}\cos\beta = \overline{BC}\,\text{sen}\,\theta$ (2), pois os ângulos θ e β são complementares. Assim, usando o resultado do item a) onde $\overline{BC} = 2.\overline{AB} = 2.\sin\theta$ (3) , e substituindo (2) e (3) em (1),

$$1 = \cos 2\theta + 2\text{sen}\theta.\text{sen}\theta \qquad \text{donde} \qquad 2.\text{sen}^2\theta = 1 - \cos 2\theta$$

o que implica em, $sen\,\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$. Por fim, considere $\frac{\theta}{2}$ em vez de θ para concluir:

$$\text{sen}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$ ■

3.3.3 Relações Trigonométricas Complementares

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
b) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
c) $\cos 2\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta$

d) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-(\tan\theta)^2}$

e) $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

f) $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

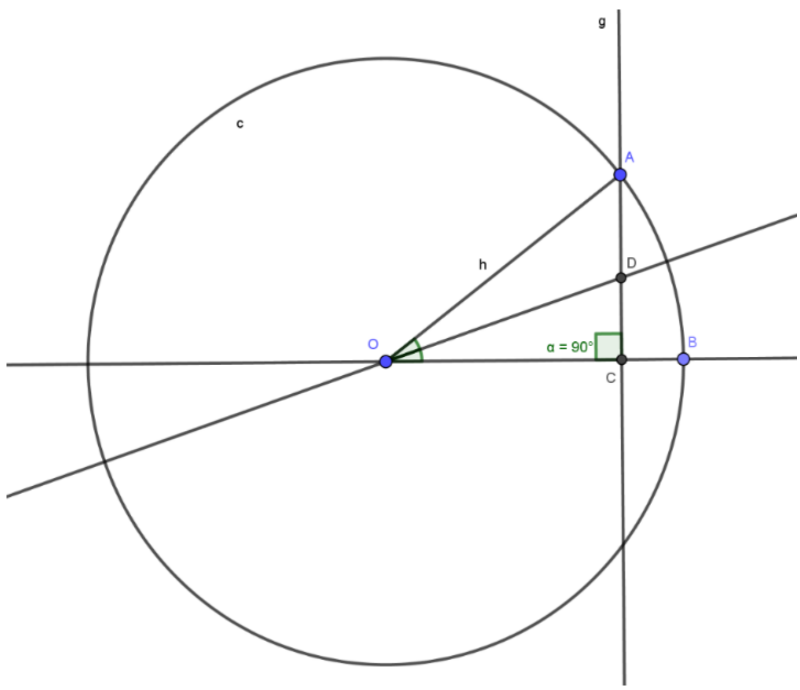
g) $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$.

Prova do item a. Fazendo $\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta)$, pelo teorema 5 tem-se que:

$$\cos(\theta+\theta) = \cos(2\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

O que prova a igualdade.

Figura 26: Triângulo inscrito num círculo dado sua bissetriz



Fonte: Elaborado pelo autor

Prova do item g. Seja uma circunferência de raio $r = 1$, e um triângulo AOC inscrito na semicircunferência, conforme a Figura 26. Sejam a reta i, bissetriz ao ângulo $A\hat{O}C = \theta$ e a reta g, perpendicular à reta f, que contém o lado $\overline{OC}$ do triângulo.

Da figura, $\overline{OC} = \cos\theta\ (1)$, $\overline{AC} = \operatorname{sen}\theta\ (2)$ e $\overline{OA} = r = 1\ (3)$. Entretanto,

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} \qquad \text{donde} \qquad \overline{DC} = \overline{OC}.\tan\frac{\theta}{2} = \cos\theta\,.\tan\frac{\theta}{2}\ (4)$$

e substituindo (2) e (3) no segmento: $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = \text{ sen } \theta - \cos\theta\,.\tan\frac{\theta}{2}$ (5) .

Ainda pelo teorema da bissetriz interna de um triângulo qualquer: $\frac{\overline{OC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AD}}$ (6).

Agora substituindo $(1), (3), (4)$ e (5) em (6):

$$\frac{\cos\theta}{\cos\theta.\tan\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sin\theta - \cos\theta.\tan\dfrac{\theta}{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta.\tan\frac{\theta}{2} = \cos\theta\left(\sin\theta - cos\,\theta.\,tan\frac{\theta}{2}\right)$$

supondo que $\cos\theta \neq 0$, então fica simplificada como: $\cos\theta.\tan\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2} = \sin\theta$.

Para finalizar na forma requerida: $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)}$.

■

3.4 Aplicações

3.4.1 Aplicações na Matemática.

3.4.1.1 O seno e o cosseno do arco metade $\boldsymbol{\frac{\theta}{2}}$ em função do $\boldsymbol{\sin\theta}$.

Como já exposto, tem-se que, $\sin 2\theta = 2.\sin\theta.\cos\theta$ (1) e pelo Teorema Fundamental da Trigonometria, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (2). Logo substituindo $\frac{\theta}{2}$ em (1) e (2), tem-se que: $\sin\theta = 2\,.\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}$ (3) e $1 = \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}$ (4).

Somando e subtraindo (3) e (4), tem-se que:

$$1 + \sin\theta = \sin^2\frac{\theta}{2} + 2.\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = \left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \quad (5)$$

$$1 - \sin\theta = \sin^2\frac{\theta}{2} - 2.\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = \left(\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \quad (6)$$

Daí, de (5) e (6): $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{1 + \sin\theta}$ (7)

$$\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{1 - \sin\theta} \quad (8)$$

Agora somando e subtraindo (7) e (8): $2\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\theta} \pm \sqrt{1-\sin\theta}$

$$2\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\theta} \mp \sqrt{1-\sin\theta}$$

O que resulta nas expressões do seno e cosseno do arco metade:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\pm\sqrt{(1+\sin\theta)} \pm \sqrt{(1-\sin\theta)}}{2}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\pm\sqrt{1+\sin\theta} \mp \sqrt{(1-\sin\theta\,)}}{2}$$

(PINTO 1974, p.176).

3.4.1.2 Mostre que: $\cos 3\boldsymbol{\theta} = \mathbf{4cos^3}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{3cos}\boldsymbol{\theta}$.

Do Teorema 5, $\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta.\cos\theta - \sin 2\theta.\sin\theta$ (1). Entretanto, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ (2), $\text{sen}2\theta = 2\,.\sin\theta.\cos\theta$ (3) e $\sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$ (4). Daí, substituindo (2),(3) e (4) em (1), tem-se que:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= (cos^2\theta - sin^2\theta)\cos\theta - (2.\sin\theta.\cos\theta)\sin\theta\\ &= (\cos^3\theta - \cos\theta\,.\sin^2\theta) - (2\sin^2\theta.\cos\theta)\\ &= \cos^3\theta - \cos\theta(1-\cos^2\theta)\ -2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &= \cos^3\theta - \cos\theta + \cos^3\theta - 2.\cos\theta + 2.\cos^3\theta\\ &= 4cos^3\theta - 3cos\theta\end{aligned}$$

O que mostra a igualdade. (IEZZI 2013, p.127).

3.4.1.3 Teorema de Heron

Dado um triângulo ABC de lados a, b e c, opostos aos vértices respectivos. Se $p = \frac{a+b+c}{2}$ e S são o semiperímetro e a área do triângulo ABC, respectivamente, então:

a) $1 - \cos\hat{A} = \frac{2(p-b)(p-a)}{bc}$

b) $1 + \cos\hat{A} = \frac{2p(p-a)}{bc}$

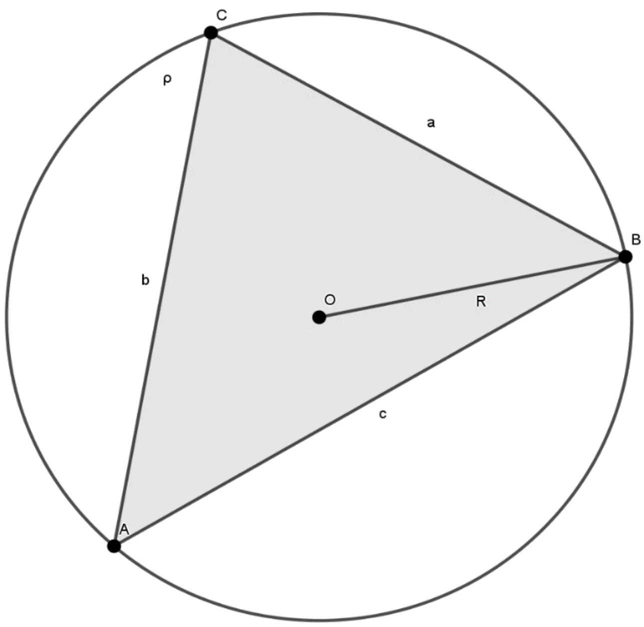
c) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, conhecida como *Fórmula de Heron*.

d) $S = \frac{abc}{4R}$**,** onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo.

(CARMO; MORGADO; WAGNER 2005, p. 76).

Prova. Seja um triângulo ABC qualquer, de lados $\overline{BC} = a, \overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$, conforme a figura 27.

Figura 27: Triângulo inscrito em um círculo de raio R



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do triângulo pode ser calculada como: $A(abc) = \frac{1}{2} \cdot bc \sin \hat{A}$ (1). Elevando ambos os membros de (1) ao quadrado e isolando $\sin \hat{A}$, tem-se que:

$$\frac{4[A(abc)]^2}{b^2c^2} = (\sin A)^2 = 1 - \left(\cos \hat{A}\right)^2 = (1 + \cos \widehat{A})(1 - \cos \widehat{A})$$

Observe que acima foi utilizado o Teorema Fundamental da trigonometria. Logo:

$$\left(1 + \cos \hat{A}\right)\left(1 - \cos \hat{A}\right) = \frac{4[A(abc)]^2}{b^2c^2} = \frac{4S^2}{b^2 \cdot c^2} \quad (2)$$

Por outro lado, pela lei dos cossenos, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$, onde isolando $\cos \hat{A}$ tem-se: $\cos \hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (3), daí somando 1 a ambos os lados da equação (3):

$$1+\cos\hat{A}=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)\cdot(b+c-a)}{2bc}=\frac{2p\cdot[2(p-a)]}{2bc}=\frac{2p(p-a)}{bc}$$

o que mostra o item (b).

De forma análoga, na equação (3), multiplicando com -1 e somando 1 em ambos os membros da igualdade, tem-se:

$$1-\cos\hat{A}=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{[a+(b-c)]\cdot[a-(b-c)]}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$=\frac{2(p-c)\cdot 2(p-b)}{2bc}=\frac{2(p-c)(p-b)}{bc}$$

o que comprova o resultado do item (a).

Para provar o item (c), basta fazer a substituição de (3) em (2), o que resulta em: $\frac{4S^2}{b^2\cdot c^2}=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\left(\frac{2p(p-a)}{bc}\right)\left(\frac{2(p-c)(p-b)}{bc}\right)$, sendo equivalente a: $4S^2=b^2\cdot c^2\left(\frac{2p(p-a)}{bc}\right)\left(\frac{2(p-c)(p-b)}{bc}\right)$, onde dividindo-se os termos semelhantes não nulos obtém-se: $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$, por fim concluindo em: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, como se queria demonstrar.

Por último, para provar (d), usando a relação $\frac{a}{\sin\hat{A}}=2R$, dada pela lei dos senos em um triângulo inscrito num círculo de raio R. Logo isolando $\sin\hat{A}$ e substituindo em (1), tem-se o pretendido: $A(abc)=S=\frac{1}{2}bc.\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$. ■

3.4.1.4 Relações entre as alturas e o raio do círculo

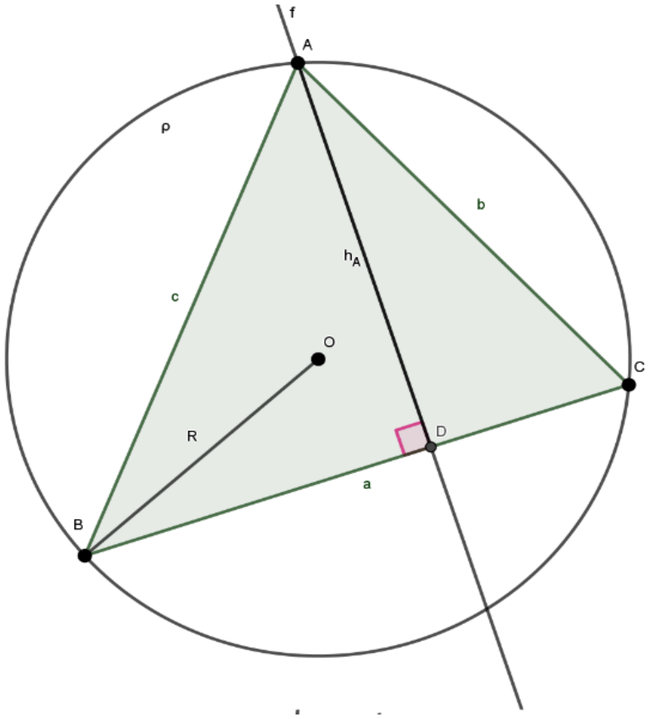
Se h_A, h_B e h_c são as alturas de um triângulo ABC, respectivos aos vértices A, B e C, então:

a) $h_A=2R\,.\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo.

b) $\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}=\frac{1}{r}$, onde r é o raio do círculo inscrito no triângulo.

Prova do item a. Dado um triângulo qualquer ABC e o círculo circunscrito ao triângulo cujo raio é R. Suponha que os lados do triângulo medem: $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$, conforme a figura abaixo:

Figura 28: Triângulo inscrito com a altura relativa a um lado dado

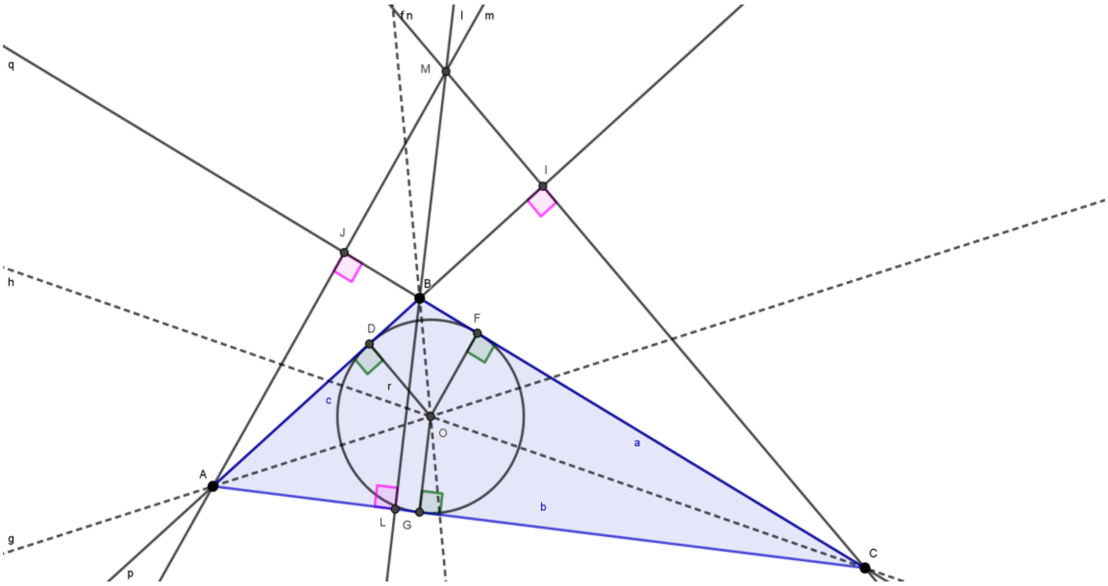


Fonte: Elaborado pelo autor

Pela Lei dos Senos, tem-se que $\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$. Daí, $\frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R$, o que é equivalente a: $b = 2R \cdot \sin \hat{B}$ (1). Por outro lado no triângulo ADC: $\cos \hat{C} = \frac{h_A}{b}$, na qual a altura será: $h_A = b \cdot \cos \hat{C}$ (2). Portanto, substituindo o valor de (1) em (2), obtém-se a igualdade desejada: $h_A = 2R \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}$.

Prova do item b. Dado um triângulo ABC qualquer de lados $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$. Sejam $\overline{AJ} = h_A$, $\overline{BL} = h_B$ e $\overline{CI} = h_C$ as alturas relativas aos lados a, b e c, respectivamente. Os segmentos $\overline{OD} = \overline{OF} = \overline{OG} = r$, que têm a medida do raio do círculo inscrito no triângulo ABC.

Figura 29: Relação entre as alturas de um triângulo e o raio do círculo inscrito



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do triângulo ABC, pode ser calculada como: $A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_B$ (1). Por outro lado, este triângulo pode ser dividido em outros três triângulos AOC, AOB e BOC, cujas as áreas são: $A(AOC) = \frac{1}{2} r \cdot b$ (2), $A(AOB) = \frac{1}{2} r \cdot c$ (3) e $A(BOC) = \frac{1}{2} r \cdot a$ (4). Dai, como a área do triângulo ABC é a soma das áreas dos outros três triângulos AOC, AOB e BOC:

$$\frac{1}{2} b \cdot h_B = \frac{1}{2} r \cdot a + \frac{1}{2} r \cdot b + \frac{1}{2} r \cdot c = \frac{1}{2} r(a+b+c) = \frac{1}{2} r(2p) = r.p$$

Observe que acima foi fatorado r e substituído, $a+b+c=2p$. Por conseguinte, $b \cdot h_B = r \cdot 2p$, o que é equivalente a: $\frac{b}{r} = \frac{2p}{h_B}$ (5).

De forma análoga, ao calcular a área do triângulo ABC, tomando a altura em a e c, respectivamente, tem-se: $\frac{a}{r} = \frac{2p}{h_A}$ (6) e $\frac{c}{r} = \frac{2p}{h_C}$ (7). Logo, somando ambos os membros das igualdades nas equações (5), (6) e (7):

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{r} + \frac{c}{r} = \frac{2p}{h_A} + \frac{2p}{h_B} + \frac{2p}{h_C} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r}(a+b+c) = (2p) \cdot \left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C}\right)$$

Daí, cancelando em ambos os lados da igualdade os termos semelhantes, tem-se o que se queria provar:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} \qquad \blacksquare$$

3.4.1.5 Transformação de soma em produto

$$\mathbf{sin}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{sin}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{2} \cdot \mathbf{sin}((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})/\mathbf{2}) \cdot \mathbf{cos}((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})/\mathbf{2})$$

Como já exposto em 3.3.1, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ (1) e $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ (2). Fazendo $x = a + b$ e $y = a - b$, tem-se: $\frac{x+y}{2} = a$ e $\frac{x-y}{2} = b$. Agora substituindo esses valores em (1) e (2):

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (3)$$

$$\sin(y) = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (4)$$

Adicionando (3) e (4) obtém-se a igualdade desejada:

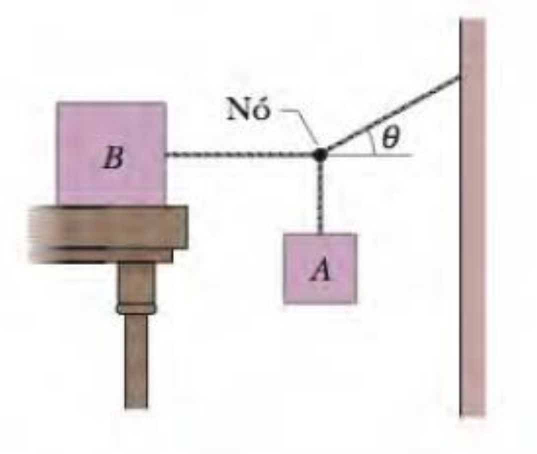
$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

3.4.2 Aplicações em outras áreas

3.4.2.1 Física

Equilíbrio Estático: O bloco B da figura abaixo pesa 711N. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a mesa é 0,25; o ângulo θ é 30°; suponha que o trecho da corda entre o bloco e o nó é horizontal. Determine o peso máximo do bloco A para o qual o sistema permanece em repouso (HALLIDAY; RESNICK; WALKER 2014, p. 137).

Figura 30: Sistema em equilíbrio estático



Fonte: Halliday, Resnick E Walker (2014)

Solução. Supondo que o sistema está em equilíbrio estático pode-se utilizar que $\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$, isto é, as forças resultantes na horizontal e na vertical são nulas.

Daí, sobre as forças aplicadas no nó, obtém-se, na vertical: $T_A \cdot \sin\theta - P_A = 0$ (1), onde T_A é a força de tração do cabo no bloco A e P_A é a força peso do bloco A. Na horizontal tem-se que: $T_A \cdot \cos\theta - T_B = 0$ (2), onde T_B é a força de tração do cabo no bloco B e $T_A \cdot \cos\theta$ é a componente horizontal da força de tração do cabo no bloco A.

Sobre as forças aplicadas no bloco B, tem-se, na vertical: $P_B - F_N = 0$ (3). Onde P_B, é a força peso no bloco B e F_N é a força normal no bloco B. Na horizontal: $T_B - fat_B = 0$ (4). Adicionando as equações (2)e (4) tem-se $T_A \cdot \cos\theta = fat_B$ (5).
Como, $fat_B = \mu_{estático} \cdot F_N$, isto é, a força de atrito é o produto do coeficiente de atrito pela força normal. Da equação (3) tem-se $fat_B = \mu_{estático} \cdot P_B$. Onde substituindo os valores informados, resulta em $fat_B = 0{,}25 \cdot 711 = 177{,}75N$.

Na equação (5), substituindo o valor do ângulo e da força de atrito, resulta que,

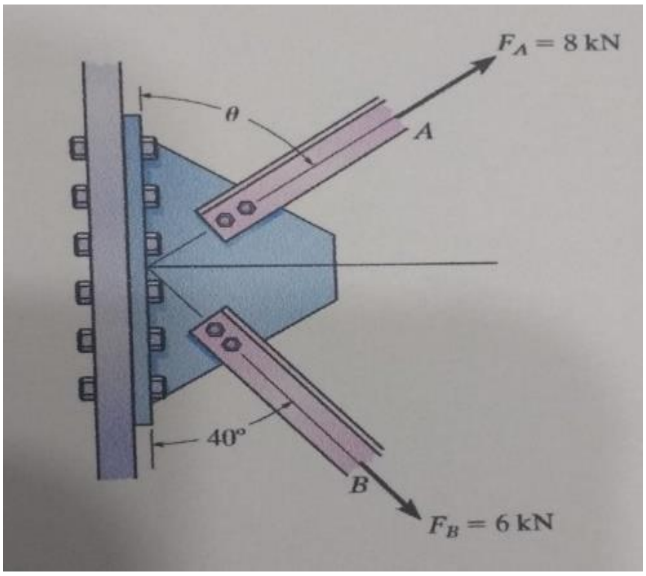
$$T_A \cong \frac{177{,}75}{0{,}866} \cong 205{,}25N$$

Portanto substituindo os valores conhecidos na equação (1) resulta em $P_A \cong 205{,}25 \cdot \sin 30° \cong 205{,}25 \cdot 0{,}5 \cong 102{,}625\ N.$ Assim, o peso máximo do bloco A para que o sistema continue em equilíbrio estático será de aproximadamente 103 N.

3.4.2.2 Engenharia

Vetores de Força. Determine o ângulo θ para conectar o membro A à chapa, de modo que a força horizontal resultante de F_A e F_B seja direcionada horizontalmente para a direita. Além disso, informe qual é a intensidade da força resultante. (HIBBELER 2011, p. 19).

Figura 31: Vetores de força

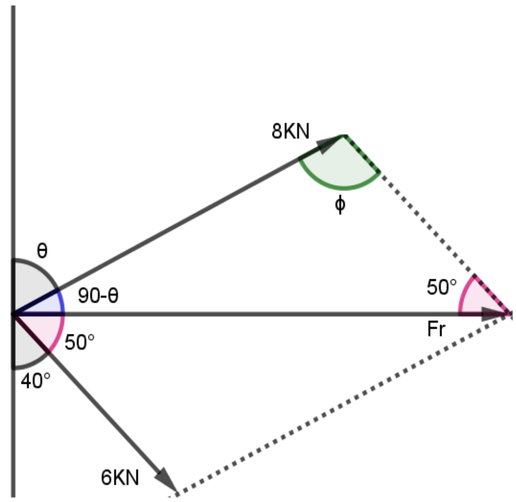


Fonte: HIBBELER (2011)

Solução. Utilizando a lei do paralelogramo para adição de vetores, tem-se o diagrama da Figura 32.

Pela lei dos senos: $\frac{6}{\sin(90°-\theta)} = \frac{8}{\sin 50°}$, tem-se: $\sin(90-\theta) = 0.5745$, o que resulta em $\theta = 54{,}93° \cong 54{,}9°$.

Figura 32: **Regra do paralelogramo**



Fonte: Elaborado pelo autor

Como a soma dos ângulos internos em qualquer triângulo é igual a $180°$, tem-se que $\phi = 94{,}93°$. E pela lei dos cossenos a força resultante F_r é dada por:

$$F_r = \sqrt{8^2 + 6^2 - 2(8)(6)\cos 94{,}93°} = 10{,}4KN$$

■

CAPÍTULO 4

TRIGONOMETRIA URBANA, UMA PROPOSTA DIDÁTICA

4.1 Matemática Significativa

Ao longo da vida profissional de um professor de Matemática, é muito provável que ele se veja diante do seguinte questionamento de pelo menos um de seus alunos: "*pra que serve trigonometria?*". Após a pergunta ele pode pensar que, ou esse aluno ainda não estudou trigonometria e não gosta de Matemática, ou ele já estudou, mas não consegue visualizar uma aplicação prática no seu dia a dia.

Os significados matemáticos, que partem de uma aprendizagem significativa, dependem dos conhecimentos prévios dos alunos, que no caso da trigonometria são estabelecidos geralmente no nono ano do ensino fundamental. E se caracteriza de acordo com Moreira.

> *Sabemos que a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação cognitiva entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio. Nesse processo, que é não-literal e não-arbitrário, o novo conhecimento adquire significados para o aprendiz e o conhecimento prévio fica mais rico, mais diferenciado, mais elaborado em termos de significados, e adquire mais estabilidade. (MOREIRA, 2010, p. 4).*

Em muitos casos, os conhecimentos de trigonometria se iniciam com a apresentação da trigonometria do triângulo retângulo, que pode utilizar como prérequisito o Teorema de Tales, onde o aluno estuda os conceitos de proporcionalidade através de segmentos proporcionais. A partir deste conceito é possível introduzir as ideias de semelhança, onde são estudados os três casos de semelhança entre triângulos. E a partir do Teorema de Tales e da semelhança entre triângulos, as relações trigonométricas podem ser construídas, e o professor pode realizar a demonstração do Teorema de Pitágoras.

Com relação aos estudos de trigonometria, a chegada do aluno no ensino médio, em muitos casos, ocorre de forma truculenta. Onde alguns não foram apresentados aos estudos de trigonometria, desconhecem completamente o conteúdo por vários motivos, que em alguns casos envolvem a administração escolar da rede pública em geral, como troca constante de professores, falta de planejamento, falta de dar sequência aos conteúdos, entre outros.

Diante do exposto, a Trigonometria Urbana pretende dar um significado ao estudo de trigonometria, observando que na ausência de conhecimentos prévios é necessário trabalhar o que ainda não se conhece. Entendendo que a aprendizagem significativa deve ocorrer de acordo com Pelizzari et al.

> *Para haver aprendizagem significativa são necessárias duas condições. Em primeiro lugar, o aluno precisa ter uma disposição para aprender: se o indivíduo quiser memorizar o conteúdo arbitrária e literalmente, então a aprendizagem será mecânica. Em segundo, o conteúdo escolar a ser aprendido tem que ser potencialmente significativo, ou seja, ele tem que ser lógica e psicologicamente significativo: o significado lógico depende somente da natureza do conteúdo, e o significado psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem. Cada aprendiz faz uma filtragem dos conteúdos que têm significado ou não para si próprio. (PELIZZARI et al 2002, p. 38).*

Neste sentido, a motivação e a disposição a aprender podem ser potencializadas com a proposta didática aqui apresentada. Lembrando que se busca aqui também motivar o professor, pois muitas vezes por falta de recursos ou problemas das mais diversas ordens, podem e fazem o professor trabalhar de forma repetitiva e sem vontade, como afirma D’Ambrozio:

> *Recomenda-se que nenhum profissional deve fazer a mesma coisa por mais de quatro ou cinco anos. A aparente aquisição de uma rotina de execução conduz a falta de criatividade e consequentemente à ineficiência. Mas, o que é mais grave, ao estresse. Sobretudo no magistério, o estresse tem sido*

> *apresentado como uma das causas mais frequentes de inabilitação profissional. (D'AMBROZIO, 2016, p.95).*

Portanto, pretende-se dar uma alternativa a uma rotina que em alguns casos ocorre em sala de aula.

4.2 A proposta didática

Para tentar fugir de uma apresentação totalmente abstrata, a Trigonometria Urbana vai utilizar um espaço não-formal de educação unido a uma abordagem de assuntos abstratos, através da História da Matemática utilizando a metodologia da resolução de problemas.

Entendendo aqui espaço não formal como descrito por Jacobucci.

> *O termo espaço "não-formal" tem sido utilizado atualmente por pesquisadores em educação, professores de diversas áreas do conhecimento e profissionais que trabalham com divulgação científica para descrever lugares, diferentes da escola, onde é possível desenvolver atividades educativas" (JACOBUCCI, 2008, p. 55).*

Observando que espaço formal definido pela lei 9394/96 de diretrizes e bases da educação nacional é a escola com todas as suas dependências. A trigonometria urbana pretende explorar as áreas externas da escola, nos espaços urbanos no qual a escola está inserida, um local "não institucionalizado". (JACOBUCCI 2008, p. 57).

A História da Matemática auxilia a trigonometria urbana de forma significativa, como uma alternativa que pode possibilitar a interdisciplinaridade e motivar o aluno a aprender a trigonometria. Assim, pretende-se utilizar a História da Trigonometria como recurso pedagógico.

> *A história da Matemática proporciona ao professor uma alternativa para sua prática pedagógica, visto que possibilita articular ao processo pedagógico, - aqui entendido como todas as etapas de aprendizagem e ensino envolvidas na educação- a visão de mundo do estudante, opções de atitudes a serem tomadas nas diferentes situações, bem como mudanças na história do cotidiano. (SIMIONATO, PACHECO, 2007, p. 6).*

Quando o aluno "põe a mão na massa", isto é, busca um caminho para resolver um problema utilizando materiais diferentes do seu dia a dia, da sala de aula, ele quase sempre fica mais interessado na aula. A falta da prática pode causar desinteresse e implicar no seu rendimento como afirma D'Ambrozio. (2016, pg. 86).“O caráter experimental da matemática foi removido do ensino e isso pode ser reconhecido como um dos fatores que mais contribuíram para o mau rendimento escolar”.

Concordando com esse ponto de vista, buscou-se utilizar a Modelagem Matemática como modelo de projeto para potencializar a proposta didática que será aplicada na sequência. Vendo esse modelo como uma metodologia facilitadora ao processo educativo, por seu aspecto dinâmico.

> *A Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (BASSANEZI, 2018, p. 24).*

Entende-se aqui Modelagem Matemática como “uma estratégia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais.” (BASSANEZI, 2015. P. 15). Neste sentido, cada aluno, com seu ponto de vista, pode produzir uma resposta. Não necessariamente certa ou errada, mas uma resposta do que ele entendeu sobre o que está sendo investigado.

Assim, espera-se que os alunos trabalhem em grupo, e busquem uma solução para as propostas que lhes serão apresentadas. Com isso, a motivação pela descoberta, o desafio da realização da atividade proposta, a curiosidade e a capacidade de revolver conflitos ficam potencializadas e estimuladas. Ainda, que os professores busquem, de forma colaborativa, a discussão sobre as estratégias adotadas e oriente os trabalhos para que os mesmos sejam resolvidos. Questionando os resultados apresentados e refinando os modelos construídos pelos alunos, levantando hipóteses e validando resultados.

As novas tecnologias fazem parte do cotidiano da maioria dos alunos que chegam ao ensino médio. As redes sociais estão diariamente sendo utilizadas por esses alunos. O uso de aplicativo de celular e do *Sotware Geogebra,* que é um software livre de Matemática onde é possível construir funções Matemáticas, realizar construções geométricas diversas, entre outras funções que possui, pode potencializar os significados que se busca no desenvolvimento das atividades propostas.

Com base no que foi exposto aqui, a proposta didática apresentada é uma sequência didática para ser trabalhada com os alunos do primeiro ano do ensino médio da educação básica.

Sequência Didática (SD)	
Título:	Trigonometria urbana, uma proposta didática.
Público Alvo:	1ª Série do Ensino Médio/ 3º Trimestre/ Escola Estadual de Ensino Médio "Guarapari", Guarapari, ES.
Problematização:	O Radium Hotel, localizado no município de Guarapari (ES), é um importante símbolo do turismo do estado. Construído em 1947, com o propósito de sediar uma escola da Marinha do Brasil, foi transformado em hotel cassino em 1953. Foi considerado um dos mais importantes empreendimentos turísticos do litoral brasileiro na época, mas atualmente sua estrutura encontra-se sucateada, em completo abandono, devido à falta de políticas públicas e descaso das autoridades. Outra questão importante relacionada ao espaço urbano de Guarapari é o avanço das construções sobre a restinga, que tem causado sérios problemas ambientais e urbanos. Esta proposta pretende utilizar os estudos de Matemática, mais especificamente a trigonometria, aliando recursos tecnológicos em uma prática educativa interdisciplinar, para trabalhar questões relativas ao desenvolvimento do ambiente urbano da cidade. Neste contexto, propõe-se as seguintes perguntas problematizadoras: • É possível repensar o espaço urbano sem agredir a restinga? • Qual a importância da preservação do nosso patrimônio?

	• É possível entender trigonometria utilizando a orla da praia?
Objetivo Geral:	Promover atividades interdisciplinares e de campo que favoreçam a construção de significados e representações da trigonometria, a partir do contexto sócio histórico e com uso das tecnologias para a compreensão dos conteúdos matemáticos.

Conteúdos e Métodos			
Aula (55 min)	**Objetivos Específicos**	**Conteúdos**	**Dinâmicas**
1 PI[19]	Entender as motivações e pesquisas que levaram ao desenvolvimento da Trigonometria.	História da Matemática: Trigonometria.	• Levantamento preliminar dos conhecimentos que os alunos possuem acerca da Trigonometria. • Aula expositiva dialogada. • Apresentação em *Power Point* das aulas de campo.
Conteúdos e Métodos			
Aula (55 min)	**Objetivos Específicos**	**Conteúdos**	**Dinâmicas**
2 e 3 OC[20]	• Conhecer o *software Geogebra* e saber utiliza-lo para a resolução de problemas geométricos. • Construir relações trigonométricas a partir da semelhança de triângulos. • Utilizar o Teorema de Pitágoras para resolução de problemas num triângulo retângulo.	Trigonometria no triângulo retângulo: Teorema de Pitágoras.	• Aula expositiva dialogada • O professor apresenta o Teorema de Pitágoras utilizando o *software Geogebra* e mostra a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Constrói as relações entre lados e os ângulos do triângulo. • Exemplos e aplicação

[19] Problematização inicial

[20] Organização do conhecimento

4 **OC**	• Demonstrar algumas razões trigonométricas dos ângulos notáveis. • Saber utilizar uma tabela trigonométrica para resolução de problemas.	Razões trigonométricas: Ângulos notáveis.	• Aula expositiva dialogada. • O professor constrói uma tabela trigonométrica, demonstrando os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°. Utilizando as figuras: quadrado e triângulo equilátero. • Os alunos são orientados fazer o download aplicativo de celular *Clinometer.*
Conteúdos e Métodos			
Aula (55 min)	**Objetivos Específicos**	**Conteúdos**	**Dinâmicas**
5,6,7 e 8 **AC[21]**	• Utilizar as razões trigonométricas para resolver um problema prático de Matemática. • Dominar estratégias de busca, organização, análise e seleção de informações, aplicativos e ferramentas necessários para cumprir uma determinada ação educativa. • Compreender o contexto sócio histórico da construção do Radium Hotel e comparar com a construção de outros edifícios da orla.	• Medindo a altura do Radium Hotel: Aspectos históricos, sociais e culturais relacionados ao Radium Hotel. • Aplicações da Trigonometria	• Aula de campo e realização de atividade em grupo. • Visita técnica ao Radium Hotel com a participação da professora de História. • Os alunos recebem orientações sobre a utilização do aplicativo *Clinometer.* • Os grupos de alunos realizam a medição da altura do Radium Hotel.
9 e 10 **OC**	• Estimular o desenvolvimento da visão espacial através	• Trigonometria num triângulo qualquer: Lei dos senos e Lei dos	• Aula expositiva dialogada. • O professor apresenta a demonstração da lei dos

[21] Aplicação do conhecimento

	da resolução de problemas matemáticos. • Aplicar a Lei dos senos e dos cossenos para medir grandes distâncias.	cossenos.	senos e dos cossenos utilizando o *software Geogebra* como facilitador da aprendizagem.
11 e 12 **AC**	• Aplicar a Lei dos senos e dos cossenos para medir grandes distâncias. • Usar a tecnologia como auxílio a aprendizagem	Medindo distâncias maiores	Os alunos realizam a atividade de campo com o objetivo de medir na Praia das Castanheiras distâncias maiores entre dois pontos
13 e 14 **AC**	• Aplicar a Lei dos senos e dos cossenos para medir grandes distâncias. • Usar a tecnologia como auxílio a aprendizagem	Medindo distâncias inacessíveis	Os alunos realizam a atividade de campo com objetivo de medir a distância de um ponto da Praia das Castanheiras até a Ilha Escalvada.
Conteúdos e Métodos			
Aula (55 min)	**Objetivos Específicos**	**Conteúdos**	**Dinâmicas**
15 e 16 **AC**	Analisar ferramentas tecnológicas, dispositivos móveis e objetos digitais de aprendizagem (ODA) apropriando-se dessas possibilidades para aprofundamento de estudos, reforço escolar, esclarecimento de dúvidas	Avaliação Realizada	• Aula expositiva dialogada. • O professor estimula uma discussão sobre os conteúdos estudados e orienta os grupos sobre a autoavaliação. .
17 e 18 **AC**	Validar os objetos digitais de aprendizagem (ODA). Apresentar suas críticas	Avaliação Proposta	• Produção dos vídeos. • Os grupos elaboram os vídeos de no máximo 5 minutos cada • Apresentação dos vídeos elaborados pelos alunos

Avaliação	• A avaliação ocorrerá de forma contínua durante todo o processo de aplicação da sequência didática: • Participação nas aulas e registros escritos das atividades propostas; • Auto avaliação; Foram considerados em todo processo avaliativo os conhecimentos Conceituais, Procedimentais e Atitudinais, segundo ZABALA (1998). Foi utilizado o modelo de avaliação de D'AMBROZIO (2016).
Referências	BARBOSA, J.L.M.; **Geometria Euclidiana Plana,** João Lucas Marques Barbosa. 11.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2012. BOYER, C.B.; MERZBACH. **História da matemática**. Tradução: Helena Castro. Tradução da 3ª edição americana. São Paulo: Edgard Blücher, 2012. CARMO, MANFREDO PERDIGÃO Do. **Trigonometria**. **Números Complexos.** Manfredo Perdigão do Carmo, Augusto César Morgado, Eduardo Wagner. 3a ed. Rio de Janeiro: SMB, 2005. EVES, H.; **Introdução a História da Matemática.** Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues- Campinas, SP: Editora Unicamp, 2004. HOHENWART, Markus e Judith. **Manual Oficial da Versão 3.2. Ajuda GeoGebra** (Help Search)- GeoGebra Online (Website) Disponível em: http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf . Acesso em: 31de maio de 2018. IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar, 3: Trigonometria: 506 exercícios propostos com resposta, 167 testes de vestibulares com respostas,** Gelson Iezzi. – 9 ed. – São Paulo: Atual, 2013. NETO, M; CAMINHA, A. **Geometria,** Antônio Caminha Muniz Neto. – Rio de Janeiro: SBM, 2013. PINTO, H.F.; **Trigonometria, volumes 1 e 2**. Rio de Janeiro: Editora Científica, 1974.
Bibliografia	AIKENHEAD, G. **Educação científica para todos**. Tradução: Maria Teresa Oliveira. Portugal: Edições Pedagogo, 2009. AULER, D.; BAZZO, W. A. **Reflexões para a implementação do movimento CTS no contexto educacional brasileiro**. Ciência & Educação, v. 7, n. 1, p. 1-13, 2001. DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A., PERNAMBUCO, M. M. **Ensino de Ciências: fundamentos e métodos**, 4 ed. São Paulo: Cortez, 2011. GUIMARÃES, Y. A. F.; GIORDAN, M. **Instrumento para construção e validação de sequências didáticas em um curso a distância de**

	formação continuada de professores. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, Campinas, 2011. ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução: Ernani F. da Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Fonte: Elaborada pelo autor a partir do modelo estrutural de uma Sequência Didática proposto por Guimarães e Giordan (2011).

4.3 Avaliação

4.3.1 Relatório de Autoavaliação

Avaliar pode ser uma das tarefas mais difíceis do processo de ensino aprendizagem. A Trigonometria Urbana, utiliza como avaliação, o modelo apresentado por D'Ambrozio.

> *A avaliação serve para que o professor verifique o que de sua mensagem foi passado, se seu objetivo de transmitir ideias foi atingido- transmissão de ideias e não a aceitação e a incorporação dessas ideias e muito menos treinamento (D'AMBROZIO, 2016, p. 65).*

Seguindo esse raciocínio, um relatório de autoavaliação é defendido por Ubiratan D'Ambrozio[22]. Este relatório pode através da escrita, mostrar ao aluno o seu "próprio processo cognitivo" (D'AMBROZIO, 2016, p. 65) o que facilita o andamento do processo de aprendizagem. Um modelo é apresentado na Figura 33.

Este formato de avaliação pode ser utilizado de forma processual, podendo ajudar ao professor a entender os pontos positivos e negativos do processo de ensino e aprendizagem. Possibilitando também, uma retomada de atitudes e direção, quando for o caso, para que o trabalho aconteça de forma colaborativa e prazerosa.

[22] Ubiratan D'ambrozio é professor emérito de Matemática da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e atual professor do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirantes de São Paulo.

Figura 33: Modelo de relatório de autoavaliação

Relatório-Autoavaliação

Nome Do Aluno:

Nome da Disciplina:

Nome do Professor:

Tema da Aula:

Data:

Síntese da Aula:

30 linhas ou 300 palavras ou 3000 toques ou 25 cm

Bibliografia Pertinente:

Fonte: Elaborado pelo autor com base no modelo proposto por D’Ambrozio (2016)

4.3.2 Produção de Vídeos como avaliação

As novas tecnologias fazem parte da vida dos alunos da maioria das escolas públicas e privadas do nosso país. Em muitos casos, a proibição do uso dessas se dá por entender que afasta o aluno da aula. A Trigonometria Urbana propõe que a produção de vídeos seja uma modalidade de avaliação, por entender que está se trata de forma de produção de material multimodal, Oechsler (2018) e pode ser usado como um instrumento completo de avaliação, pois aproxima as novas tecnologias ao processo de ensino de matemática. Obedecendo os seguintes parâmetros:

> *Para que a produção do vídeo e o seu caráter multimodal ocorra, é necessário que seus produtores considerem e compreendam características de "design", como layout, composição, imagem, gráficos, texto, ângulos, tamanhos, para que suas ideias sejam transmitidas de forma apropriada ao seu público. (OECHSLER, 2018, p. 50).*

Neste sentido é possível explorar as potencialidades da produção de vídeos na educação matemática, mais especificamente como ferramenta para o ensino e aprendizagem da matemática, uma vez que a avaliação representa uma das partes mais importantes do processo de ensino e aprendizagem.

Quando um professor utiliza um vídeo em sua aula, Tena (2014, p.78 apud OECHSLER, 2018, p.51), alguns aspectos devem ser levados em conta antes da apresentação aos alunos:

1. Os conteúdos são coerentes do ponto de vista científico?
2. Está atualizado?
3. Os objetivos são claros?
4. Adapta-se às características dos alunos?
5. O vocabulário é compreensível?
6. É tecnicamente atrativo?
7. O tempo é adequado as características dos meus alunos?
8. Propicia a realização de atividades posteriores?

É possível utilizar esses critérios para se propor um modelo de avalição para os alunos levando em conta os seguintes parâmetros, como especificado na tabela:

Tabela 3: Modelo de avaliação de vídeos em Matemática

Item de avaliação	O que especificamente será avaliado
Fundamentação Teórica	Verificar se o conteúdo é coerente do ponto de vista científico.
Clareza nos objetivos	Se os objetivos foram alcançados com o vídeo
Vocabulário adequado	Se a linguagem atende à proposta de trabalho apresentada
Tecnicamente atrativo	Criatividade dos alunos
Tempo adequado	Se o tempo de exposição do vídeo, está bem determinado

Fonte: Elaborado pelo autor

É importante ressaltar que a produção de vídeo não deve ocorrer sem que os alunos sejam orientados de como fazer. Ainda, deve ser levado em conta todos os inconvenientes que podem aparecer durante o trabalho, como materiais inadequados, falta de recursos diversos, etc.

O vídeo é considerado por muitos autores de comunicação como uma importante forma de transmissão de informações, devido ao seu caráter multimodal. Sabendo que a matemática pode ser representada de três modos: oralidade, escrita e representação visual, como afirma Oechsler (2018). É possível unir a Matemática com os vídeos, devido a ambos terem as mesmas características. Assim, utilizar essa forma de linguagem multimodal para avaliar os alunos através da produção de vídeos Matemáticos, os colocam na posição de protagonistas do processo avaliativo onde seria possível avaliar não só o seu trabalho produzido, mas também o professor e o processo educativo.

4.4 Resultados e Análise Dados

4.4.1 Análise dos conhecimentos prévios

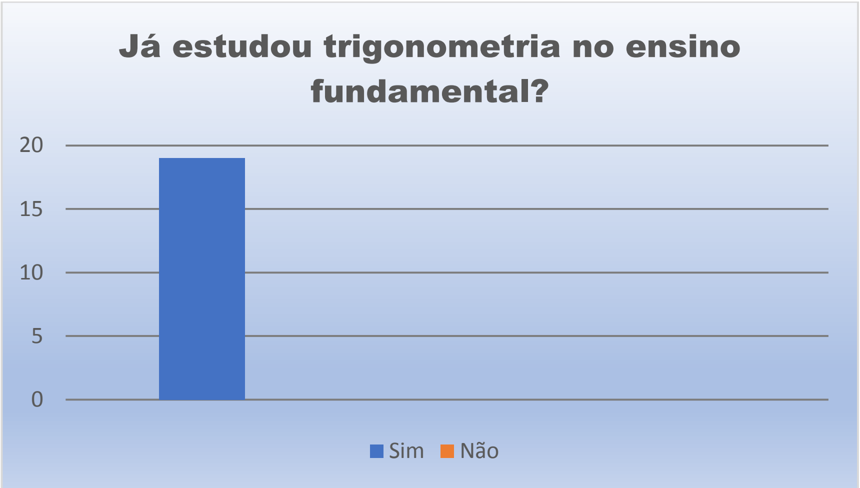
Com o objetivo de analisar a sequência didática, desde um ponto de vista metodológico, foi feita uma validação *à priori* por pares, onde foram convidados professores mestrandos de Matemática do curso Profmat e outros professores, para fazer uma análise teórica do trabalho que será realizado, segundo uma perspectiva sociocultural conforme Guimarães e Giordan (2011). Conforme o instrumento de análise e avaliação da sequência, que é apresentado no anexo C, todos os itens foram muito bem avaliados pelos pares, num total de 12 professores, com valores entre quatro e cinco, o que representa um nível de satisfação muito bom com o trabalho por parte dos professores que responderam à pesquisa.

Sobre a aplicação da sequência didática, foram selecionados alunos voluntários do primeiro ano do ensino médio da mesma escola dos turnos matutino e vespertino, num total de 19 alunos. Contou também com o auxílio dos alunos monitores de Matemática da terceira série do ensino médio, num grupo de 7 alunos.

A primeira pergunta consiste na análise dos conhecimentos prévios dos alunos, investigando o que ele já estudou, o que ele sabe sobre trigonometria e sua história.

O gráfico da figura 34 mostra que todos os alunos participantes já estudaram trigonometria no ensino fundamental.

Figura 34: Conhecimentos prévios Trigonometria



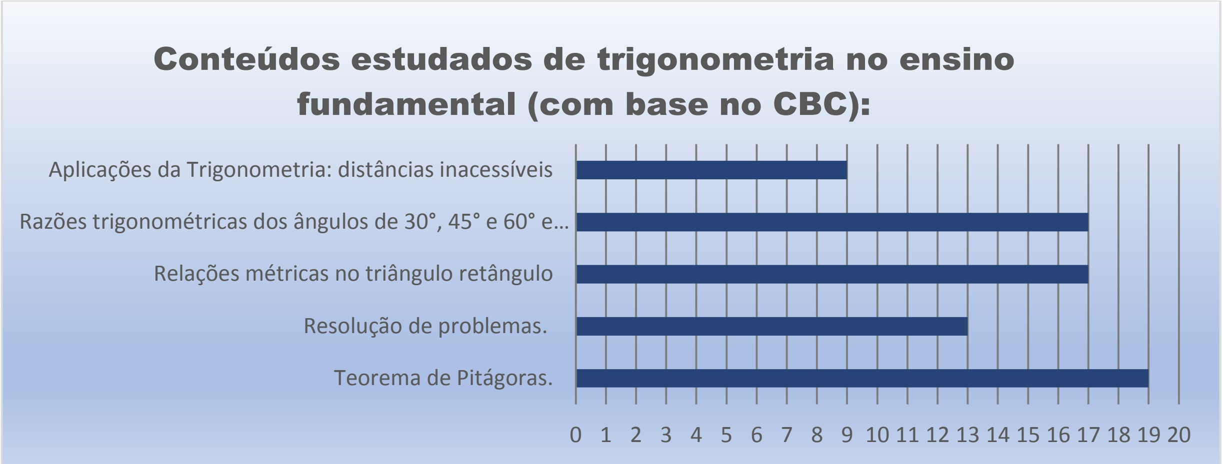
Fonte: Elaborado pelo autor

O segundo gráfico, na figura 35, detalha especificamente os conteúdos estudados pelos alunos no ensino fundamental. Os conteúdos foram escritos no quadro e explicados aos alunos, pois a maioria não lembrava os nomes dos conteúdos. Esses conteúdos foram selecionados com base no Currículo Básico Comum (CBC) do Estado do Espírito Santo para o ensino fundamental.[23]

No gráfico é possível observar que todos os alunos já estudaram o Teorema de Pitágoras e quase a metade não estudou as aplicações e medidas de distâncias inacessíveis, onde o professor trabalha a Trigonometria num triângulo qualquer e aplica as Leis dos Senos e dos Cossenos. A resolução de problemas também não foi muito explorada, mas os ângulos notáveis e as relações métricas no triângulo retângulo, a maioria dos alunos afirmou que já estudou.

[23] https://sedu.es.gov.br/Media/.../SEDU_Curriculo_Basico_Escola_Estadual_(FINAL).pdf

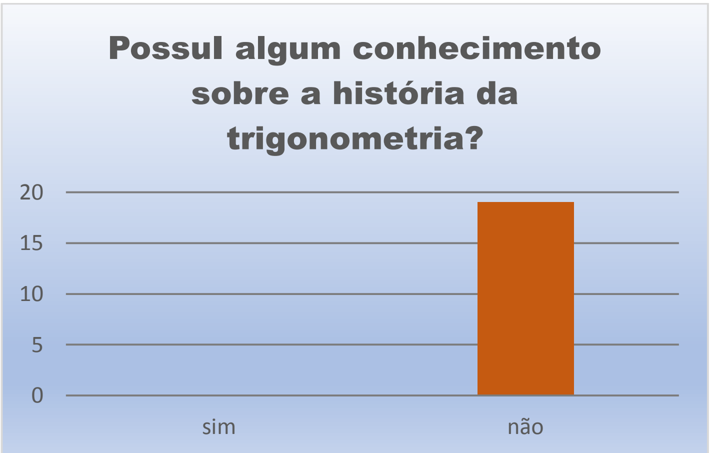
Figura 35: Conhecimentos prévios específicos Trigonometria



Fonte: Elaborado pelo autor

Este último gráfico mostra que nenhum aluno teve contato com algum assunto sobre a História da Trigonometria.

Figura 36: Conhecimentos prévios de História da Trigonometria

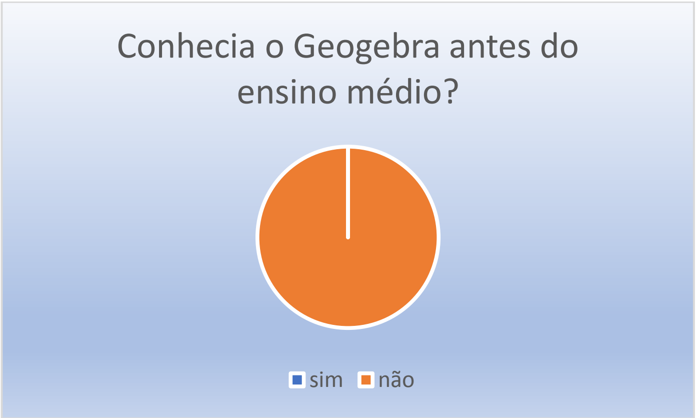


Fonte: Elaborado pelo autor

Ainda com o objetivo de analisar quem são os alunos que vão participar da pesquisa, no sentido de verificar seus conhecimentos anteriores a aplicação da pesquisa e quais conhecimentos a mesma proporcionou ao aluno, foi realizado um questionário sobre seus conhecimentos anteriores a respeito do *software Geogebra.* Esse questionário foi aplicado após o aluno ser apresentado ao *Geogebra.* Segundo os resultados os alunos voluntários já haviam realizado estudo de funções diversas e atividades de análise e construção de gráficos nas aulas do dia a dia, tudo isso durante o segundo trimestre letivo, mas não haviam realizado ainda as atividades de Trigonometria propostas na pesquisa.

O gráfico abaixo mostra que nenhum dos alunos voluntários conhecia o *software Geogebra.*

Figura 37: Conhecimentos prévios de *Geogebra.*

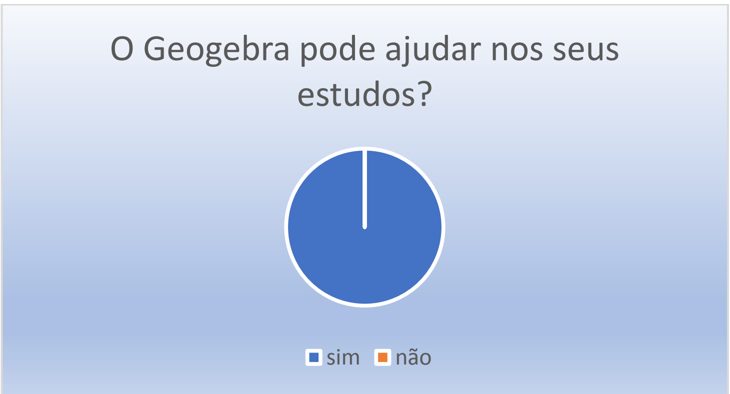


Fonte: Elaborado pelo autor

A segunda pergunta era para responder de forma específica como ele utilizou o *Geogebra,* mas como nenhum dos alunos conhecia o programa, não se obteve resultados.

O próximo gráfico mostra que todos os alunos entendem que o *Geogebra* pode auxiliar nas suas atividades de estudo, após serem apresentados ao *software*.

Figura 38: Se o *Geogebra* ajudaria nos estudos

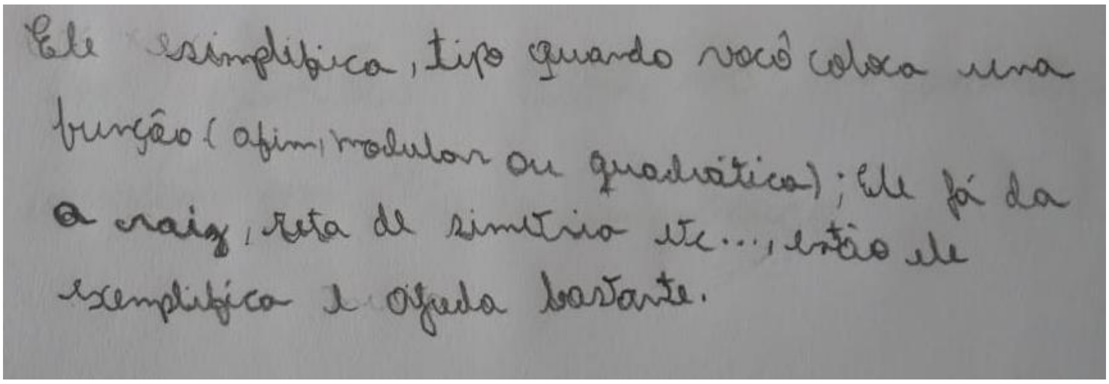


Fonte: Elaborado pelo autor

A quarta pergunta dessa parte da pesquisa, solicitava a descrição de como o *Geogebra* pode auxiliar nas atividades de estudo. É possível observar que eles ainda não tiveram contato com os estudos de Trigonometria utilizando o *Geogebra*. Muitas respostas fazem referências ao que eles estudaram de funções nas aulas do segundo trimestre.

A escolha das respostas para publicação aqui foi feita de forma aleatória, pois as respostas foram próximas umas das outras. Algumas respostas dadas pelos alunos foram destacadas abaixo:

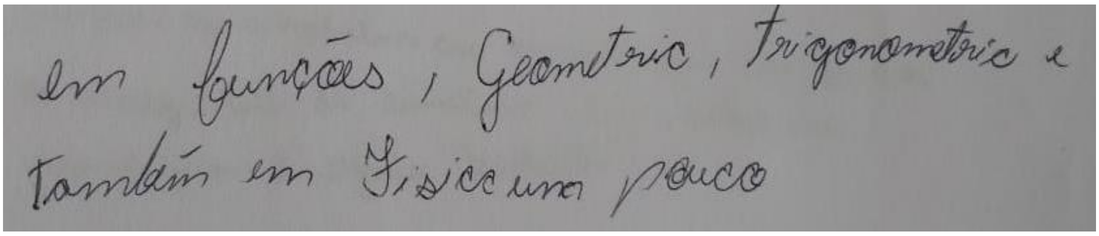
Figura 39: Aluno 1, sobre o *Geogebra*



Ele esimplifica, tipo quando você coloca uma função (afim, modulor ou quadrática); Ele já da a raiz, reta de simetria etc..., então ele exemplifica e ajuda bastante.

Fonte: Elaborado pelo autor

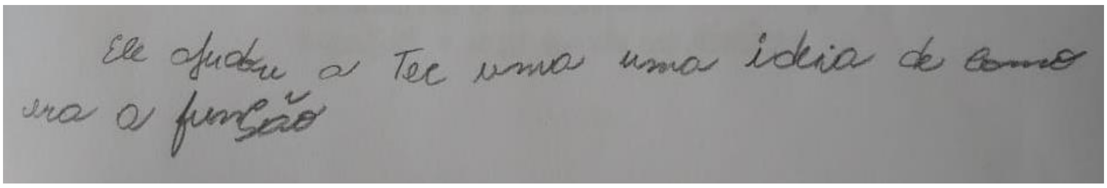
Figura 40: Aluno 2, sobre o geogebra



em funções, Geometria, Trigonometria e Tambem em Fisica um pouco

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 41: Aluno 3, sobre o geogebra



Ele ajudou a Ter uma uma ideia de como era a função

Fonte: Elaborado pelo autor

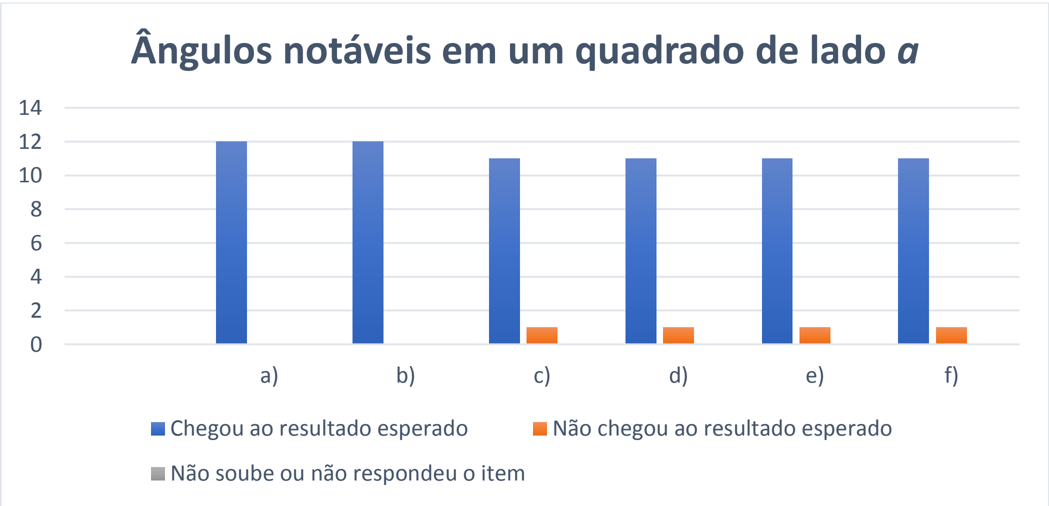
4.4.2 Ângulos Notáveis.

A segunda atividade propõe aos alunos a construção de uma tabela com os ângulos chamados de notáveis.

Na construção dessa tabela de ângulos notáveis foram utilizados um quadrado de lado ***a*** e um triângulo equilátero, também de lado ***a***. As atividades propostas buscam explorar a formulação de uma tabela trigonométrica através das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, a partir de um quadrado e um triângulo equilátero dados. Nesta atividade os alunos são levados a validar resultados que já conheciam do ensino fundamental, no caso a tabela de ângulos de 30°, 45° e 60°. Em muitos casos, essa tabela foi o primeiro contato desses alunos com uma tabela trigonométrica.

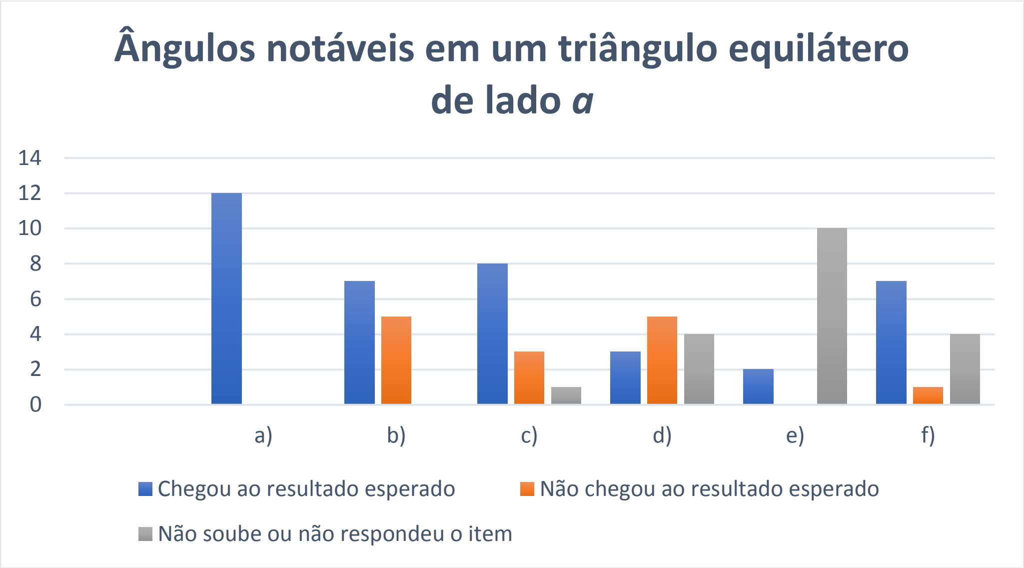
Em um primeiro momento os alunos tiveram uma revisão sobre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente em um triângulo retângulo, posteriormente foram convidados a resolver as atividades conforme o apêndice D.

Figura 42: Ângulos notáveis em um quadrado



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 43: Ângulos notáveis em um triângulo equilátero



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelos resultados é possível perceber que os alunos não tiveram muitas dificuldades em realizar a primeira atividade, que culmina em encontrar o seno, cosseno e tangente de um ângulo de 45° a partir de um quadrado dado.

Na segunda atividade os alunos não foram tão eficientes. Inicialmente todos conseguiram identificar os ângulos de 30° e 60° no triângulo equilátero.

No item d) a maioria dos alunos não conseguiu atingir o objetivo da questão que era calcular o seno e cosseno dos ângulos de 30° e 60°. Na última parte da atividade muitos não souberam ou não responderam os itens e) e f) , provavelmente pelo mesmo motivo do item d), por não entenderem ou não conseguirem relacionar as razões trigonométricas ao triângulo dado.

Nas atividades realizadas pelos alunos fora do ambiente escolar, ocorridas no contraturno, a primeira da sequência foi medir a altura do Radium Hotel[24], que segundo os próprios alunos foi a atividade mais desafiadora e gratificante, pois eles colocaram em prática as razões trigonométricas estudadas e tiveram a oportunidade

[24] O Radium Hotel foi um casino muito frequentado na década de XX, e símbolo de ostentação da classe mais abastada do Espírito Santo. Hoje está desativado. Na época de bastante movimento no porto de Guarapari, sendo uma causante a exploração das areias monazíticas, é que foram criados os hotéis Torium, Radium e Monazita.

de conhecer um pouco mais sobre este importante empreendimento que foi construído na cidade de Guarapari.

Figura 44: Radium Hotel

Fonte: Elaborado pelo autor

No dia da visita, os alunos foram recebidos por dona Ângela, que entre outras formações é turismóloga e a pessoa que atualmente é responsável por atender os turistas que chegam a cidade e querem conhecer um pouco sobre o edifício. Do relato dado por dona Ângela podemos destacar: a história do Doutor Silva Melo[25] e sua amizade com Albert Einstein; e a procura do Hotel por hospedes-pacientes que chegavam para se tratar nas areias da Praia da Areia Preta, que tem propriedades medicinais. Outra questão discutida foi a restinga, de como a construção do Hotel na época, respeitou esse espaço, o que não ocorre na atualidade vistos os prédios que agora ocupam a orla.

[25] Antônio da Silva Mello (1886-1973) natural de Juiz de Fora, foi um médico, professor e ensaísta que escreveu livros dos mais variados assuntos. Ele descobriu e popularizou o uso terapêutico das areias monazíticas de Guarapari. Seu trabalho sobre os efeitos biológicos da radioatividade tiveram repercussão no mundo científico internacional.

Figura 45: A história do Radium Hotel

Fonte: Elaborado pelo autor

Seguindo o roteiro, os alunos não encontraram dificuldades em elaborar uma estratégia para medir a altura do prédio. Num primeiro momento, mediram a distância do prédio até um ponto fixo.

Figura 46: Medindo um cateto

Fonte: Elaborado pelo autor

Posteriormente escolheram um colega entre os participantes, que ficou neste ponto fixo e mediram a altura dos seus olhos até o chão.

Figura 47: Altura dos olhos em relação ao chão

Fonte: Elaborado pelo autor

Com o auxílio do aplicativo *Clinometer* mediram a partir da altura dos olhos da aluna escolhida, o ângulo entre o plano horizontal e o topo do prédio.

Figura 48: Medindo o ângulo de inclinação

Fonte: Elaborado pelo autor

Os mesmos procedimentos foram realizados pelos alunos do outro turno. As atividades aconteceram em dois turnos. Os alunos que estudam pela manhã, participavam das atividades no turno vespertino e os alunos que estudam no turno vespertino participaram pela manhã. Como a pesquisa foi trabalhada com alunos voluntários, para que não haja prejuízo escolar, os mesmos participavam sempre no contraturno. Se aplicada no próprio turno, é importante que se tenha um planejamento bem definido para que o aluno não perca as outras aulas do turno. O que poderia causar um transtorno para o professor e a escola, consequentemente um prejuízo ao aluno.

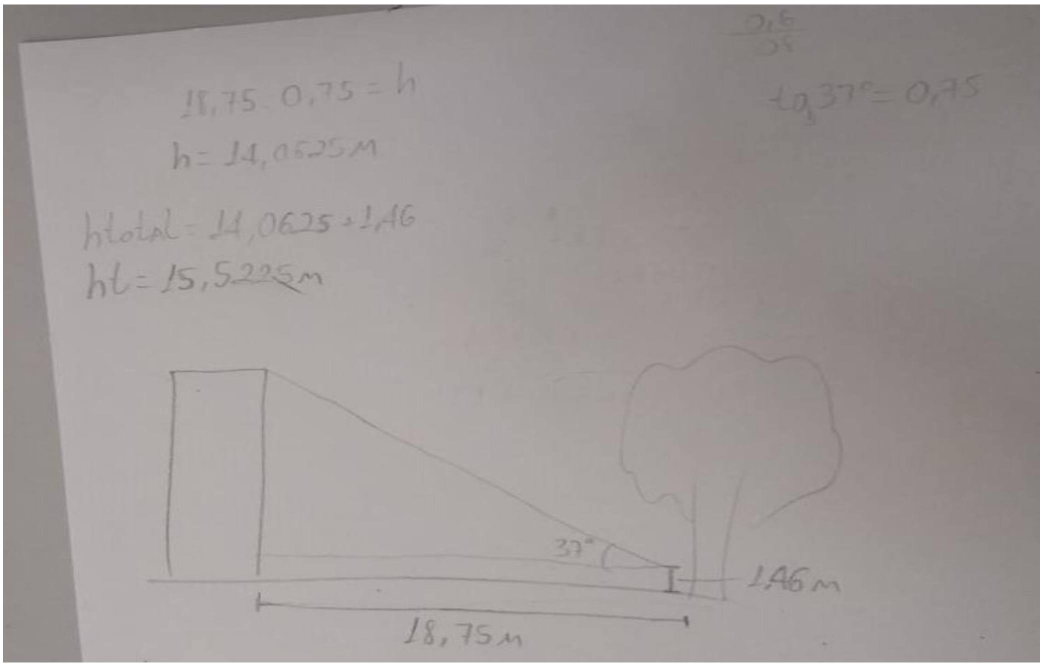
Figura 49: Medindo a altura dos olhos

Fonte: Elaborado pelo autor

Como essa atividade foi realizada em grupo, todos os grupos chegaram a uma mesma resposta. O valor do ângulo utilizado foi definido por uma média aritmética dos valores medidos. Os alunos fizeram várias medições e posteriormente calcularam a média aritmética para chegar a um valor final. Não foram encontrados registros sobre a real altura do Radium Hotel, nem mesmo nos poucos documentos que ainda existem no prédio, mas o cálculo realizado parece estar bem coerente comparando com outras edificações próximas.

Uma das soluções, que é medir a altura do prédio é apresentada abaixo na figura 50.

Figura 50: Cálculo da altura do Radium Hotel



Fonte: Elaborado pelo autor

Para todas as atividades práticas ou teóricas eram realizados encontros para aprofundar os conhecimentos adquiridos através de exercícios teóricos e de aplicações e posteriormente as atividades eram corrigidas com os alunos. Os registros de alguns encontros seguem nas figuras 51 e 52, abaixo:

Figura 51: Encontro da Atividade Medindo a Altura do Radium Hotel

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 52: Encontro da Atividade Teorema de Pitágoras e Aplicações

Fonte: Elaborado pelo autor

Seguindo a Sequência Didática, a pesquisa se encaminhou para a Trigonometria num triângulo qualquer: Lei dos senos e Lei dos cossenos. Num primeiro momento com uma aula expositiva e dialogada foram abordadas as duas leis.

Uma atividade inicial foi proposta com quatro exercícios com o objetivo de verificar se os alunos compreenderam as duas leis e se resolveriam problemas simples utilizando esse conhecimento. Uma vez que a última atividade fora do ambiente escolar seria aplicar as leis para medir distâncias maiores e inacessíveis.

No primeiro exercício, eram conhecidos dois ângulos de um triângulo e a medida de um dos lados. Era pedido para o aluno calcular a medida de um outro lado. No segundo exercício, em um triângulo qualquer, dois lados eram informados e o aluno deveria calcular o terceiro lado, sabendo ainda a medida do ângulo entre os dois lados que já foram informados. Em um terceiro exercício, dados dois lados de um triângulo e o ângulo entre eles calcular a medida do terceiro lado. Praticamente uma cópia do exercício anterior com o detalhe de que no exercício número 2, o ângulo era de 120° e no exercício número 3 o ângulo era de 60°, onde o aluno relacionava os cossenos dos dois ângulos. No quarto e último exercício o aluno era levado a relacionar o seno de 135°, que foi dado no exercício número 1, com o seno de 45° deste exercício. Foram dados dois ângulos e um dos lados.

Os resultados foram de 100% de aproveitamento de todos os que participaram. Todos chegaram aos resultados esperados.

O último encontro foi na Praia das Castanheiras no centro de Guarapari.

Figura 53: Praia das Castanheiras

Fonte: Elaborado pelo autor

A proposta foi medir distâncias maiores e distâncias inacessíveis. Os instrumentos de medida que foram utilizados não eram muito precisos, mas para distâncias entre dois pontos fixos próximos, como a realizada na praça do Radium Hotel, funcionou bem e com resultados satisfatórios. Agora, o problema surgiu ao tentar medir distâncias inacessíveis.

De fato, com um teodolito improvisado feito a partir de um compasso de madeira fixado em um transferidor também de madeira, os ângulos medidos com tal instrumento não foram tão precisos. Para distâncias maiores o “teodolito” não atendeu ao objetivo, uma vez que o ângulo entre dois pontos fixos escolhidos (um poste e uma árvore na orla da praia, que se encontravam a uma distância de 43 metros) e a Ilha Escalvada[26], localizada a 9 Km da orla da Praia da Areia Preta[27] e o Siribeira[28], era menor que 2° e o nosso instrumento não possuía aquela precisão. Assim, com os dados coletados se propôs o seguinte problema: *dados três pontos fixos P, A e I, (poste, arvore e ilha), onde as distancias de P até A (43m), de P até I (distância da ilha até a orla) e o ângulo $I\hat{P}A$ (foi medido com o "teodolito") são conhecidos, calcule a medida do terceiro lado do triangulo e os outros dois ângulos restantes*.

Figura 54: Teodolito de madeira

Fonte: Elaborado pelo autor

[26] A Ilha Escalvada está localizada aproximadamente a 8Km da costa de Guarapari, ES. O desembarque na ilha está proibido. A ilha também é conhecida como Ilha do Farol.

[27] A praia de Areia Preta (Guarapari,ES), segundo pesquisas da UFES, tem o poder de reduzir casos de câncer de mama. A causa seria a atmosfera da região que é rica em íons negativos e radiação.

[28] Siribeira Iate Clube é um dos clubes mais tradicionais do Espírito Santo e está localizado na orla entre as praias da Areia preta e Castanheiras.

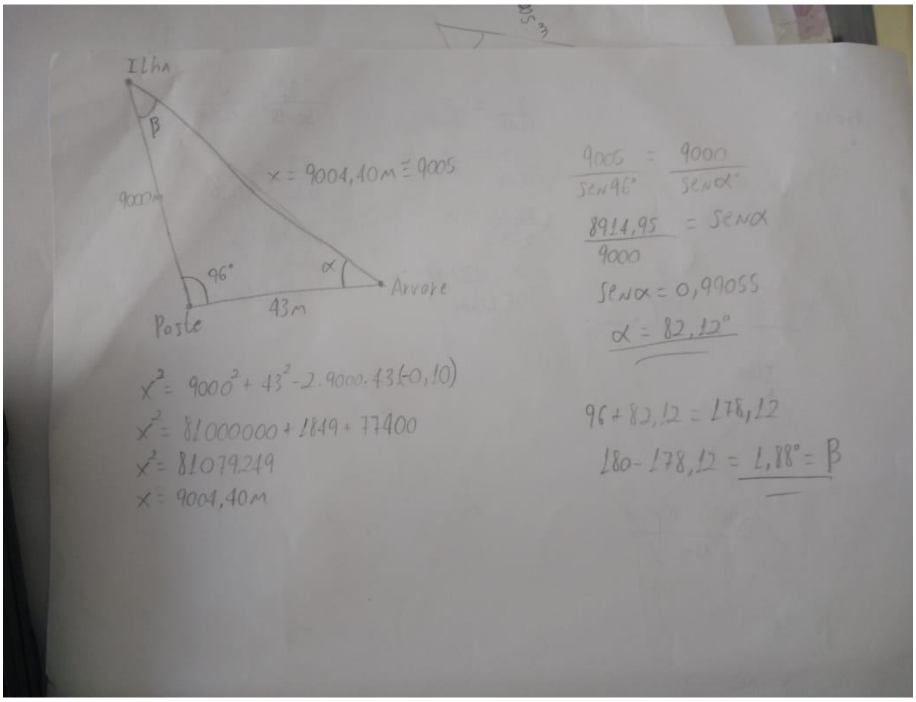
Após consultar na internet a distância da ilha Escalvada até a orla da praia das Castanheiras (9Km aprox.), os alunos elaboraram uma estratégia de solução do problema (utilizaram a lei de senos e cossenos) que permitiu calcular o ângulo, que de fato era extremamente pequeno, como mostra a figura 55.

Figura 55: Realizando os cálculos

Fonte: Elaborado pelo autor

Um dos cálculos para resolução do problema é apresentado na figura abaixo:

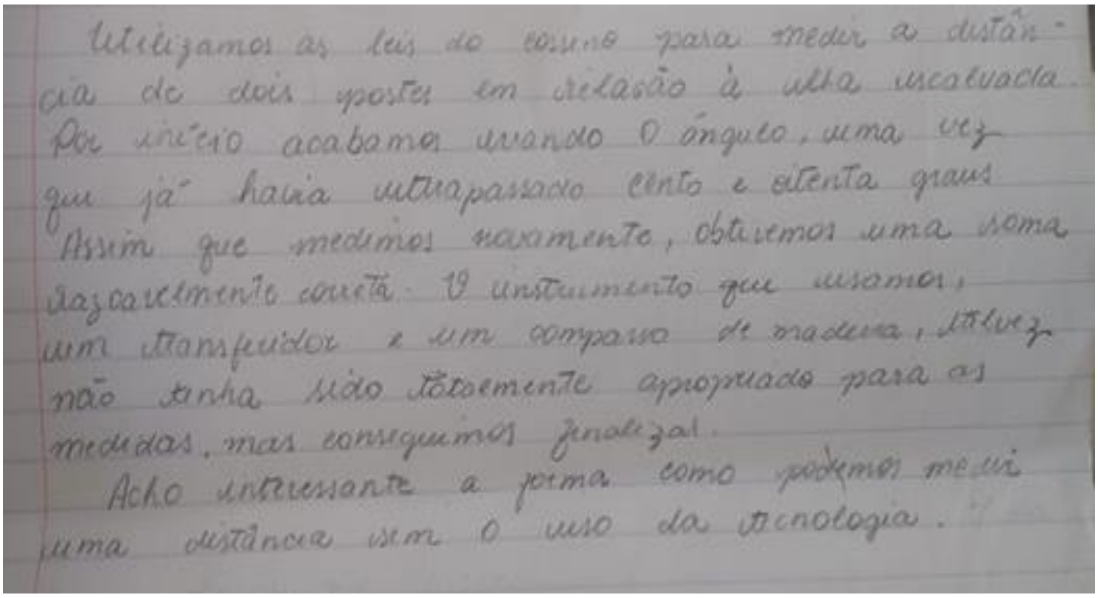
Figura 56: Cálculo de Medidas inacessíveis



Fonte: Elaborado pelo autor

Em conclusão, a avaliação realizada foi a produção de um relatório de autoavaliação sobre o que deu certo, o que deu errado e de fato, o que o aluno aprendeu em sala de aula e na prática. Abaixo segue alguns relatos:

Figura 55: Relatório de autoavaliação de um aluno



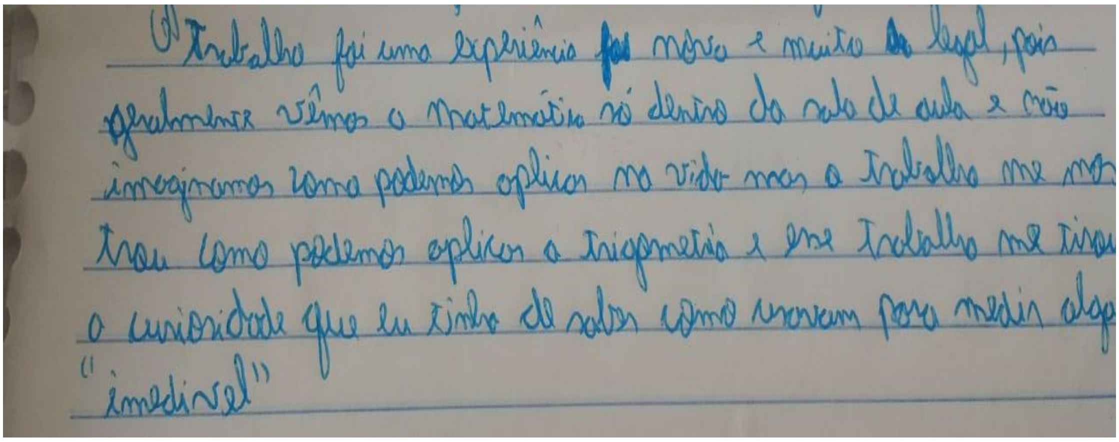
Utilizamos as leis do cosseno para medir a distância de dois postes em relação à ilha escalvada. Por início acabamos errando o ângulo, uma vez que já havia ultrapassado cento e oitenta graus. Assim que medimos novamente, obtivemos uma soma razoavelmente correta. O instrumento que usamos, um transferidor e um compasso de madeira, talvez não tenha sido totalmente apropriado para as medidas, mas conseguimos finalizar.

Acho interessante a forma como podemos medir uma distância sem o uso da tecnologia.

Fonte: Elaborado pelo autor

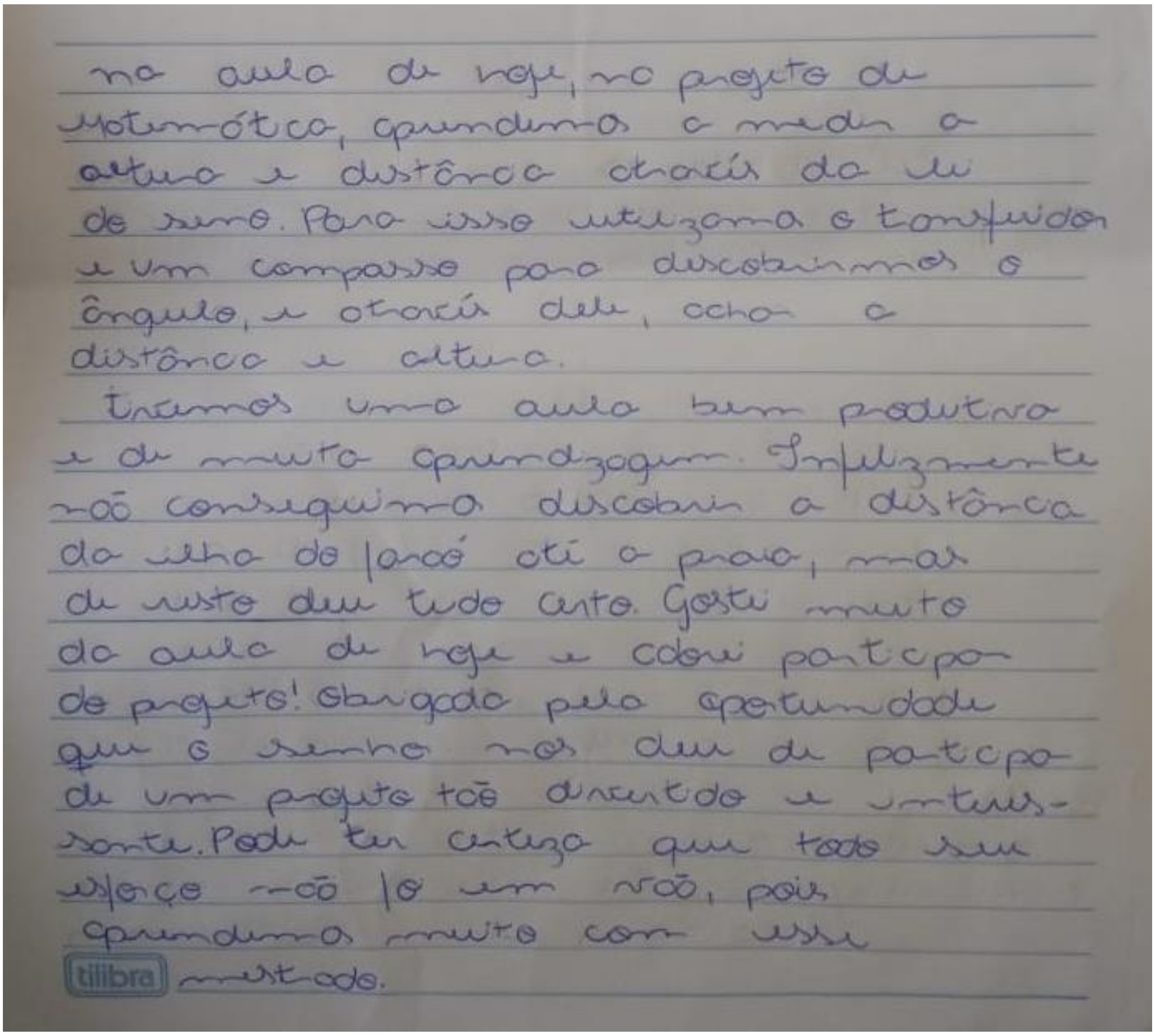
O texto abaixo é um fragmento do relatório de um outro aluno que reforça o fato de que experiências fora da sala de aula podem ser significativas.

Figura 56: Parte do relatório de autoavaliação de outro aluno


O Trabalho foi uma experiência ~~foi~~ nova e muito ~~de~~ legal, pois geralmente vêmos a matemática só dentro da sala de aula e não imaginamos como podemos aplicar na vida mas o Trabalho me mostrou como podemos aplicar a trigometria e esse Trabalho me tirou a curiosidade que eu tinha de saber como usavam para medir algo "imedível"

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 57: Relatório de autoavalição de um outro aluno


Na aula de hoje, no projeto de Matemática, aprendemos a medir a altura e distância através da lei do seno. Para isso utilizamos o teodolito e um compasso para descobrirmos o ângulo, e através dele, achar a distância e altura.

Tivemos uma aula bem produtiva e de muito aprendizagem. Infelizmente não conseguimos descobrir a distância da ilha do Jacaré até a praia, mas de resto deu tudo certo. Gostei muito da aula de hoje e adorei participar do projeto! Obrigado pela oportunidade que o senhor nos deu de participar de um projeto tão divertido e interessante. Pode ter certeza que todo seu esforço não foi em vão, pois aprendemos muito com esse método.

Fonte: Elaborado pelo autor

Após avaliação, a proposta para trabalhos futuros é que sejam produzidos vídeos dessas atividades externas. O vídeo pode enriquecer muito a avaliação, pois se trata de uma ferramenta multimodal, como já exposto anteriormente.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este último capítulo do trabalho de pesquisa de mestrado tem por objetivo mostrar algumas conclusões e propor algumas recomendações para futuros trabalhos relacionados ao tema.

O levantamento Histórico e Teórico serviu de base para os trabalhos realizados na sequência didática, fundamentando toda a teoria que foi trabalhada e estudada com os alunos.

As respostas apresentadas pelos professores sobre a pesquisa foram extremamente positivas, representando que é possível sim realizar estas atividades no dia a dia da escola, com muito planejamento e organização.

O retorno apresentado pelos alunos nos relatórios reforça positivamente a tese de que é possível trabalhar a Matemática fora da sala de aula de forma significativa, com bons resultados e com aprendizagem. Que as novas tecnologias fazem parte de seu cotidiano e que a escola não pode virar as costas para essa realidade. Que é possível aliar as novas tecnologias com as práticas de ensino, unindo ainda, algumas áreas que possuem em muitos casos pouco diálogo, como História e Matemática.

Sobre as recomendações para futuros trabalhos, seria importante redimensionar o tempo das atividades, analisar os possíveis aplicativos que possibilitam medir ângulos no plano horizontal, pois o teodolito de madeira que foi improvisado foi muito impreciso e foi necessário usar um plano alternativo para não perder a oportunidade de aprender com a aula, uma vez que medindo os ângulos o triângulo possuía mais de 180° o que é um absurdo, na trigonometria plana. E o que era um problema se tornou uma oportunidade, pois utilizando a internet foi possível verificar a distância real e assim conhecendo dois lados e um ângulo entre eles, resolveu o triângulo.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J.L.M.; **Geometria Euclidiana Plana / João Lucas Marques Barbosa**. 11.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 4ª Ed., 1ª reimpressão. – São Paulo: Contexto, 2018.

BOYER, C.B.; MERZBACH. **História da matemática**. Tradução: Helena Castro. Tradução da 3ª edição americana. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BRASIL. **LDB: Lei de diretrizes e bases da educação nacional.** – Brasília: Senado Federal, Coordenação De Edições Técnicas, 2017.

CARMO, M.P.; MORGADO, A.C.; WAGNER, E. Notas históricas de: PITOMBEIRA, J.B de C. **Trigonometria**. **Números Complexos.** – 3 ed. Rio de Janeiro: SMB, 2005.

CARVALHO, P.C.P.; **Introdução à geometria espacial / Paulo Cézar Pinto de Carvalho**. - 4.ed.- Rio de Janeiro: SBM, 2005.

D'AMBROZIO, U. **Educação Matemática: Da Teoria á Prática**. 23ª Ed., 4ª Reimpressão. – Campinas, SP: Papirus, 2016.

EVES, H.; **Introdução a História da Matemática. Howard Eves**; tradução: Hygino H. Domingues- Campinas, SP: Editora Unicamp, 2004.

FAZENDA, I.C.A. **INTERDISCIPLINARIDADE: Didática e Prática de Ensino.** Revista: interdisciplinaridade: Didática e Prática de Ensino 1. São Paulo, V1, n.6. Abril de 2015.

GIORDAN, M.; GUIMARÃES, Y. A. F.; MASSI, L. **Uma análise das abordagens investigativas de trabalhos sobre sequências didáticas: tendências no ensino de ciências**. VIII ENPEC - Encontro Nacional de Pesquisas em Educação em Ciências. Campinas, 2011.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física, volume 1: mecânica**. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

HIBBELER, R.C. **Estática: mecânica para engenharia;** 12ª edição, São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

HOHENWART, Markus e Judith. **Manual Oficial da Versão 3.2. Ajuda GeoGebra** (Help Search)- GeoGebra Online (Website) Disponível em: http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf . Acesso em: 31de maio de 2018.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar, 3: Trigonometria: 506 exercícios propostos com resposta, 167 testes de vestibulares com respostas / Gelson Iezzi**. – 9 ed. – São Paulo: Atual, 2013.

JACOBUCCI, D.F.C. **Contribuições dos espaços não-formais de educação para a formação da cultura científica.** Revista: Em Extensão, Uberlândia, V.7, 2008.

MANSFIELD, D.F.,WILDBERGER, N.J. **Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry**. School of Mathematics and Statistics, UNSW, Sydney, Australia: Elsevier Inc 2017.

MORAES FILHO, D.C.De; **Manual de Redação Matemática / Daniel De Cordeiro Moraes Filho**, - Rio de Janeiro: SMB, 2014.

MOREIRA, M.A. **Aprendizagem Significativa Crítica.** Instituto de Física da UFRGS, Campus Porto Alegre, Rio Grande do Sul: 2010. Disponível em: www.if.ufrg.br/~moreira. Acesso em: 30/05/2018.

NETO, M; CAMINHA, A. **Geometria / Antônio Caminha Muniz Neto**. – Rio de Jneiro: SBM, 2013.

PELIZZARI, A.; KRIEGL, M.de L.; BARON, M.P.; FINCK, N.T.L.; DOROCINSKI, S.I. **Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel.** Rev. PEC, Curitiba, v.2, n.1, p.37-42, jul.2001-jul.2002.

OECHLES, V. **Comunicação Multimodal: produção de vídeos em aulas de MATEMÁTICA**. 2018. Tese (Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, São Paulo.

PINTO, H.F.; **Trigonometria, volumes 1 e 2**. Rio de Janeiro: Editora Científica, 1974.

ROQUE, T.; CARVALHO, J.B.P. De; **Tópicos de História da Matemática / Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira Carvalho**. – Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SILVA, E.R. **O surgimento das trigonometrias em diferentes culturas e as relações surgidas entre elas.** Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Matemática e Científica, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Belém: 2014.

SIMIONATO, I.M., PACHECO, E.R. **Um Olhar Histórico à Trigonometria como Fonte de Motivação em Sala de Aula.** Programa de Desenvolvimento Educacional da Secretaria de Estado da Educação - SSD/ PR. Paraná, 2007.

Apêndice A

TRIGONOMETRIA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

1. Caro Aluno, você já estudou trigonometria?

   (   ) sim   (   ) não

2. Quais conteúdos de trigonometria você já estudou?

   ____

   ____

   ____

3. Nos seus estudos sobre trigonometria, você já estudou algum assunto sobre História da Trigonometria?

   (   ) sim   (   ) não

4. Se respondeu sim no item 3, descreva em poucas palavras o que você sabe sobre a História da Trigonometria.

   ____

   ____

   ____

Apêndice B

GEOGEBRA: NOÇÕES BÁSICAS

1. Você já conhecia o *Geogebra* antes do ensino médio?
   (   ) sim   (   ) não

2. Se você respondeu sim na pergunta 1, responda especificamente como utilizou o *Geogebra*. Exemplo, para resolver exercícios de Física, para estudo de geometria, etc.

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

3. Após ser apresentado ao *Geogebra*, acredita que ele pode te auxiliar nas tuas atividades de estudo?
   (   ) sim   (   ) não

4. Se você respondeu sim à pergunta 3, descreva de que forma o *Geogebra* poderia te auxiliar nas tuas atividades de estudo.

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

ATIVIDADES BÁSICAS NO *GEOGEBRA*: TEOREMA DE PITÁGORAS, LEI DOS SENOS E DOS COSSENOS

1. Construa um triângulo qualquer e meça seus ângulos internos. Meça também todos os seus lados.
2. Construa uma reta que passa por dois pontos e outras duas retas, uma perpendicular e uma outra paralela a essa primeira reta.
3. Construa um triângulo qualquer, posteriormente construa as bissetrizes desse triângulo.
4. Construa um triângulo retângulo. Sobre cada lado construa um quadrado e meça suas áreas, compare os valores das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a do quadrado construído sobre a hipotenusa.
5. Construa um triângulo ABC qualquer. Meça dois de seus ângulos e um de seus lados. Calcule a medida do terceiro ângulo e dos dois outros lados utilizando a Lei dos Senos.

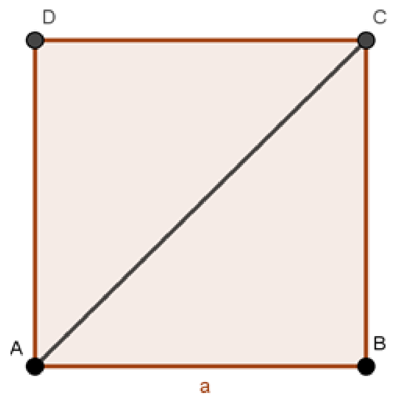
   Após calcular manualmente, meça agora com o *Geogebra* e verifique se seus cálculos estão corretos.
6. Construa um triângulo ABC qualquer. Meça um de seus ângulos e dois dos seus lados. Calcule a medida do terceiro ângulo e dos dois outros lados utilizando a Lei dos Cossenos.

   Após calcular manualmente, meça agora com o *Geogebra* e verifique se seus cálculos estão corretos.

Apêndice C

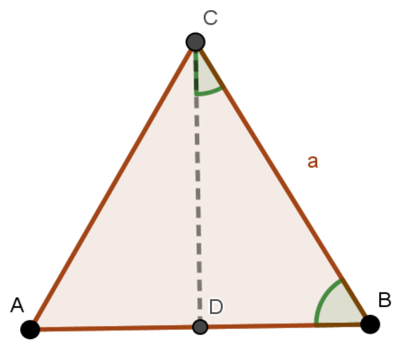
CONSTRUINDO UMA TABELA TRIGONOMÉTRICA DE ÂNGULOS NOTÁVEIS

1. Dado o quadrado abaixo, responda as questões.



a) Qual é a medida do ângulo $B\hat{A}C$?
b) Qual é a medida da diagonal AC?
c) Calcule o $\sin B\hat{A}C$.
d) Calcule o $\cos B\hat{A}C$.
e) Compare os resultados.
f) Calcule a $\tan B\hat{A}C$.

2. Dado o triângulo equilátero abaixo, responda as questões.



a) Qual é a medida dos ângulos destacados?
b) Qual é a medida do segmento DB ?
c) Determine em função do lado do triângulo a medida do segmento CD.
d) Calcule o seno e o cosseno dos ângulos destacados.
e) Compare os resultados.
f) Calcule a tangente desses ângulos.

3. Com os resultados das atividades 1 e 2, complete a tabela abaixo:

	30°	45°	60°
seno			
cosseno			
tangente			

Apêndice D

MEDINDO A ALTURA APROXIMADA DO *RADIUM HOTEL*

Atividade de Campo com o objetivo de medir a altura aproximada do *Radium Hotel* que é considerado um Monumento Histórico da cidade de Guarapari do Estado do Espirito Santo.

Materiais:

1. Trena de 30 metros
2. Telefone celular com aplicativo de inclinação instalado
3. Caneta, lápis e borracha
4. Cadernos de anotações
5. Tabela trigonométrica impressa
6. Calculadora

Roteiro:

1. Separe os alunos em grupos, aproximadamente cinco alunos por grupo.
2. Escolha um ponto próximo, aproximadamente uns 5 m. do prédio do Radium Hotel. Posicione um aluno voluntário neste ponto.
3. Meça a distância do prédio do Radium Hotel até este ponto, no qual a pessoa está posicionada.
4. Meça a altura dos olhos do aluno voluntário, isto é, a distância de seus olhos até o chão.
5. Com o aparelho de celular e o aplicativo meça o ângulo de inclinação entre o topo do prédio do Radium Hotel e os olhos do aluno voluntário.
6. Faça todos os registros.
7. Realize os cálculos que possibilitem determinar a altura do prédio do Radium Hotel. Utilize uma tabela trigonométrica, se necessário.
8. Compare os resultados com os resultados dos outros grupos.
9. Anote as semelhanças e diferenças encontradas, corrija possíveis erros.
10. Determine a altura aproximada do Radium Hotel.

Apêndice E

MEDINDO DISTÂNCIAS MAIORES

Atividade de Campo com o objetivo de medir na Praia das Castanheiras distâncias maiores entre dois pontos.

Materiais:

1. Trena de 30 metros
2. Telefone celular com aplicativo de inclinação instalado
3. Caneta, lápis e borracha
4. Cadernos de anotações
5. Tabela trigonométrica impressa.
6. Teodolito de material reciclado
7. Calculadora

Roteiro:

1. Escolher três pontos da praia, preferencialmente postes, pois estes ficarão fixos. Sendo que um deles fique aproximadamente a uma mesma distância dos outros dois.
2. Denominar cada poste de *A*, *B* e *C*. Fixando um cartaz provisório de tal forma que não danifique o poste e nem o suje. A escolha do ponto *B*, deverá ser aproximadamente equidistante de *A* e *C*.
3. Medir a distância entre os postes *A* e *B* com a trena, denominar esta distância de d_1 .
4. Medir a distância entre *B* e *C*, também com a trena e denominar esta distância de d_2.
5. Posicionando um aluno voluntário em *B*, medimos com o teodolito de material reciclado o ângulo $C\hat{A}B = \alpha$, denominando de *alfa*.
6. Faça todos os registros. Com os dados disponíveis responda qual a melhor forma de calcular a distância entre *A* e *C*?
7. Realizar os cálculos e determinar a distância entre os postes *A* e *C*. Utilize uma tabela trigonométrica e uma calculadora, se necessário.

Apêndice F

MEDINDO DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS

Atividade de campo com objetivo de medir a distância de um ponto da Praia das Castanheiras até a Ilha Escalvada.

Materiais:

1. Trena de 30 metros
2. Telefone celular com aplicativo de inclinação instalado
3. Caneta, lápis e borracha
4. Cadernos de anotações
5. Tabela trigonométrica impressa.
6. Teodolito de material reciclado
7. Calculadora

Roteiro:

1. Escolher dois pontos da praia, preferencialmente postes, pois estes ficarão fixos. Sendo que os dois não fiquem muito próximos. Denomine estes postes de *A* e *B*.
2. Com a trena medir a distância entre os dois postes *A* e *B*.
3. Considere que o ponto *C* seja a Ilha Escalvada, posicionando um aluno voluntário no ponto *A*, medir com o teodolito de material reciclado o ângulo $C\hat{A}B = \alpha$, denominado de *alfa*.
4. Considere que o ponto *C* seja a Ilha Escalvada, posicionando um aluno voluntário no ponto *B*, medir com teodolito de material reciclado o ângulo $C\hat{B}A = \beta$, denominado de *beta*.
5. Faça todos os registros. Com os dados disponíveis, responda qual a melhor forma de calcular a distância entre o poste *A* e a Ilha Escalvada?
6. Realizar os cálculos e determinar a distância entre o poste *A* e a Ilha Escalvada e o Poste *B* e a Ilha Escalvada. Utilize uma tabela trigonométrica e uma calculadora, se necessário.

Apêndice G

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Universidade Federal Do Espírito Santo.
Departamento De Pós-Graduação Em Matemática
Mestrado Em Matemática Em Rede Nacional
Av. Fernando Ferrari, 514 - Goiabeiras, Vitória - ES | CEP 29075-910

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(PARA RESPONSÁVEL LEGAL PELO MENOR DE 18 ANOS - Resolução 466/12)

Prezado(a) Senhor(a), solicitamos a sua autorização para convidar o(a) seu/sua filho(a) ____ para participar como voluntário(a) da pesquisa: **"TRIGONOMETRIA URBANA, UMA PROPOSTA DIDÁTICA"**. Esta pesquisa é da responsabilidade do professor pesquisador Fábio Ramos Manhães, residente no endereço Rua Aristides Caramuru, nº 199, Ed. Júlia, apto 205, Muquiçaba, Guarapari - ES, CEP: 29.215.180, e-mail professormanhaes@gmail.com.br. Também participa desta pesquisa a orientadora Doutora ROSA ELVIRA QUISPE CCOYLLO, e-mail re94@yahoo.com.br. Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensíveis, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados, caso concorde com a realização do estudo pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue e a outra ficará com a pesquisadora responsável. Caso não concorde, não haverá nenhum problema, bem como será possível retirar o consentimento a qualquer momento, também sem nenhum prejuízo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Prezado(a) Senhor(a), esta pesquisa de mestrado tem como objetivo investigar as possíveis contribuições para o processo de ensino e aprendizagem, da proposta didática Trigonometria Urbana. Utilizando a metodologia de resolução de problemas aplicada ao ensino de trigonometria através de uma sequência didática, na perspectiva da educação em espaços não formais de aprendizagem.

A pesquisa será realizada com alunos do primeiro ano do turno matutino da EEEM "Guarapari" no contraturno escolar. O trabalho será desenvolvido com alunos do primeiro ano, visto que os conteúdos curriculares relacionados à temática trigonometria estão presentes no planejamento da disciplina de Matemática nesta série. A pesquisa ocorrerá entre junho e agosto 2018 e a maioria das atividades acontecerá na escola, com três saídas a campo com os alunos. Realizaremos três visitas, uma ao Radium Hotel, a segunda Praia do Riacho e uma terceira, à Praia das Castanheiras, com a devida autorização da escola e dos responsáveis. Ao longo do percurso na Praia do Riacho, seremos acompanhados pelo agente da Secretaria de Meio Ambiente da Prefeitura o Sr. Rivelino Galvão. Nossas atividades serão realizadas em grupos formados por 5 a 7 alunos no sentido de compartilhar os ensinamentos adquiridos. Foram feitos dois documentos a serem assinados pelos alunos e respectivos pais, no caso de serem menores de 18 anos. Os respectivos documentos encontram-se anexados na plataforma/apêndice do projeto: TALE (12 a 18 anos) e TCLE (maiores de 18 anos ou emancipados).

RISCOS DA PESQUISA:

Durante a aula de campo, não podemos negar que existem riscos de acidentes, como picada de insetos, quedas, entre outros. Para minimizar tais riscos, será recomendado aos participantes usarem roupas adequadas para a este tipo de aula, entre eles: boné, calça comprida, calçado fechado, repelente e filtro solar. Ainda assim, o professor pesquisador e a orientadora assumirão os possíveis riscos da pesquisa.

Desta forma, foram tomadas as seguintes ações:

1. Sempre os sujeitos serão informados sobre a participação da investigação, com assinatura da autorização pelo uso do depoimento oral.
2. No caso do uso de fotografias, haverá um termo de autorização do uso de imagem.
3. Todos os nomes dos alunos serão codificados, não sendo exposto em nenhum momento.
4. A participação na investigação é voluntária, nem comprometendo nem os sujeitos envolvidos, nem a investigação, no caso de desistência. O sujeito poderá desistir de sua participação a qualquer momento.
5. A pesquisa contará somente com alunos com idade superior a 14 anos. Para os que possuem menos de 18 anos, também haverá um termo assinado pelos pais.

É relevante considerar pequenos constrangimentos dos alunos em não conseguirem realizar as atividades propostas. Para minimizar os riscos de exposição dos sujeitos da pesquisa, serão tomadas as seguintes precauções: reforçar que os dados dos participantes não serão divulgados e que os alunos fazem parte de uma pesquisa na qual estão em processo de aprendizagem, todos os nomes dos alunos serão codificados não sendo identificado em nenhum momento, esclarecer que a participação na investigação é voluntária, não comprometendo nem os sujeitos envolvidos, nem a investigação.

BENEFÍCIOS DIRETOS E INDIRETOS PARA OS VOLUNTÁRIOS:

A pesquisa tem como benefícios oportunizar aos alunos o contato com uma metodologia diferenciada que poderá se tornar um fator de motivação ao estudo, uma experiência que contribui com a capacidade de trabalhar em equipe e que desenvolva a organização e a autonomia. Os voluntários poderão beneficiar-se de melhorias no ensino como um todo. A partir das ações realizadas ao longo da investigação, será elaborado uma sequência didática voltado para a ensino de trigonometria na educação básica, contribuindo assim para o desenvolvimento de alternativas efetivas para projetos de intervenção escolar no futuro.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre as responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa como gravações, entrevistas, fotos e filmagens ficarão armazenados em pastas de arquivo, memórias auxiliares, como pen drive, e computador pessoal, sob a responsabilidade do pesquisador, pelo período de no mínimo 5 anos. Nem você e nem seus pais (ou responsáveis legais) pagarão nada para você participar desta pesquisa, também não receberão nenhum pagamento para a sua participação, pois é voluntária. Se houver necessidade, as despesas (deslocamento e alimentação) para a sua participação e de seus pais serão assumidas ou ressarcidas pelo pesquisador. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Assinatura do pesquisador

Apêndice H

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Universidade Federal Do Espírito Santo.
Departamento De Pós-Graduação Em Matemática
Mestrado Em Matemática Em Rede Nacional
Av. Fernando Ferrari, 514 - Goiabeiras, Vitória - ES | CEP 29075-910

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TALE
(PARA MENORES DE 18 ANOS - Resolução 466/12)

OBS: Este Termo de Assentimento para o menor de 18 anos não eliminará a necessidade do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido que deverá ser assinado pelo responsável ou representante legal do menor.

Querido estudante____, eu Fábio Ramos Manhães, gostaria de convidá-lo, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais], para participar como voluntário(a) da pesquisa de minha responsabilidade, intitulada: **"TRIGONOMETRIA URBANA, UMA PROPOSTA DIDÁTICA"**. Sou residente no endereço Rua Aristides Caramuru, nº 199, Ed. Júlia, apto 205, Muquiçaba, Guarapari - ES, CEP: 29.215.180, e-mail professormanhaes@gmail.com.br. Também participa desta pesquisa a orientadora Doutora ROSA ELVIRA QUISPE CCOYLLO, e-mail re94@yahoo.com.br. Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensíveis, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados, caso concorde com a realização do estudo pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue e a outra ficará com a pesquisadora responsável. Caso não concorde, não haverá nenhum problema, bem como será possível retirar o consentimento a qualquer momento, também sem nenhum prejuízo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Prezado(a) Senhor(a), esta pesquisa de mestrado tem como objetivo investigar as possíveis contribuições para o processo de ensino e aprendizagem, da proposta didática Trigonometria Urbana. Utilizando a metodologia de resolução de problemas aplicada ao ensino de trigonometria através de uma sequência didática, na perspectiva da educação em espaços não formais de aprendizagem.

A pesquisa será realizada com alunos do primeiro ano do turno matutino da EEEM "Guarapari" no contraturno escolar. O trabalho será desenvolvido com alunos do primeiro ano, visto que os conteúdos curriculares relacionados à temática trigonometria estão presentes no planejamento da disciplina de Matemática nesta série. A pesquisa ocorrerá entre junho e agosto 2018 e a maioria das atividades acontecerá na escola, com três saídas a campo com os alunos. Realizaremos três visitas, uma ao Radium Hotel, a segunda Praia do Riacho e uma terceira, à Praia das Castanheiras, com a devida autorização da escola e dos responsáveis. Ao longo do percurso na Praia do Riacho, seremos acompanhados pelo agente da Secretaria de Meio Ambiente da Prefeitura o Sr. Rivelino Galvão. Nossas atividades serão realizadas em grupos formados por 5 a 7 alunos no sentido de compartilhar os ensinamentos adquiridos. Foram feitos dois documentos a serem assinados pelos alunos e respectivos pais, no caso de serem menores de 18 anos. Os respectivos documentos encontram-se anexados na plataforma/apêndice do projeto: TALE (12 a 18 anos) e TCLE (maiores de 18 anos ou emancipados).

RISCOS DA PESQUISA:

Durante a aula de campo, não podemos negar que existem riscos de acidentes, como picada de insetos, quedas, entre outros. Para minimizar tais riscos, será recomendado aos participantes usarem roupas adequadas para a este tipo de aula, entre eles: boné, calça comprida, calçado fechado, repelente e filtro solar. Ainda assim, o professor pesquisador e a orientadora assumirão os possíveis riscos da pesquisa.

Desta forma, foram tomadas as seguintes ações:

1. Sempre os sujeitos serão informados sobre a participação da investigação, com assinatura da autorização pelo uso do depoimento oral.
2. No caso do uso de fotografias, haverá um termo de autorização do uso de imagem.
3. Todos os nomes dos alunos serão codificados, não sendo exposto em nenhum momento.
4. A participação na investigação é voluntária, nem comprometendo nem os sujeitos envolvidos, nem a investigação, no caso de desistência. O sujeito poderá desistir de sua participação a qualquer momento.
5. A pesquisa contará somente com alunos com idade superior a 14 anos. Para os que possuem menos de 18 anos, também haverá um termo assinado pelos pais.

É relevante considerar pequenos constrangimentos dos alunos em não conseguirem realizar as atividades propostas. Para minimizar os riscos de exposição dos sujeitos da pesquisa, serão tomadas as seguintes precauções: reforçar que os dados dos participantes não serão divulgados e que os alunos fazem parte de uma pesquisa na qual estão em processo de aprendizagem, todos os nomes dos alunos serão codificados não sendo identificado em nenhum momento, esclarecer que a participação na investigação é voluntária, não comprometendo nem os sujeitos envolvidos, nem a investigação.

BENEFÍCIOS DIRETOS E INDIRETOS PARA OS VOLUNTÁRIOS:

A pesquisa tem como benefícios oportunizar aos alunos o contato com uma metodologia diferenciada que poderá se tornar um fator de motivação ao estudo, uma experiência que contribui com a capacidade de trabalhar em equipe e que desenvolva a organização e a autonomia. Os voluntários poderão beneficiar-se de melhorias no ensino como um todo. A partir das ações realizadas ao longo da investigação, será elaborado uma sequência didática voltado para a ensino de trigonometria na educação básica, contribuindo assim para o desenvolvimento de alternativas efetivas para projetos de intervenção escolar no futuro.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre as responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa como gravações, entrevistas, fotos e filmagens ficarão armazenados em pastas de arquivo, memórias auxiliares, como pen drive, e computador pessoal, sob a responsabilidade do pesquisador, pelo período de no mínimo 5 anos. Nem você e nem seus pais (ou responsáveis legais) pagarão nada para você participar desta pesquisa, também não receberão nenhum pagamento para a sua participação, pois é voluntária. Se houver necessidade, as despesas (deslocamento e alimentação) para a sua participação e de seus pais serão assumidas ou ressarcidas pelo pesquisador. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

____

Assinatura do pesquisador

Apêndice I

Universidade Federal Do Espírito Santo.
Departamento De Pós-Graduação Em Matemática
Mestrado Em Matemática Em Rede Nacional
Av. Fernando Ferrari, 514 - Goiabeiras, Vitória - ES | CEP 29075-910

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(PARA MAIORES DE 18 ANOS OU EMANCIPADOS - Resolução 466/12)

Querido estudante____, eu Fábio Ramos Manhães, gostaria de convidá-lo, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais], para participar como voluntário(a) da pesquisa de minha responsabilidade, intitulada: **"TRIGONOMETRIA URBANA, UMA PROPOSTA DIDÁTICA"**. Sou residente no endereço: Rua Aristides Caramuru, nº 199, Ed. Júlia, apto 205, Muquiçaba, Guarapari - ES, CEP: 29.215.180, e-mail professormanhaes@gmail.com.br. Também participa desta pesquisa a orientadora Doutora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo, e-mail re94@yahoo.com.br. Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensíveis, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados, caso concorde com a realização do estudo pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue e a outra ficará com a pesquisadora responsável. Caso não concorde, não haverá nenhum problema, bem como será possível retirar o consentimento a qualquer momento, também sem nenhum prejuízo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Prezado(a) Senhor(a), esta pesquisa de mestrado tem como objetivo investigar as possíveis contribuições para o processo de ensino e aprendizagem, da proposta didática Trigonometria Urbana. Utilizando a metodologia de resolução de problemas aplicada ao ensino de trigonometria através de uma sequência didática, na perspectiva da educação em espaços não formais de aprendizagem.

A pesquisa será realizada com alunos do primeiro ano do turno matutino da EEEM "Guarapari" no contraturno escolar. O trabalho será desenvolvido com alunos do primeiro ano, visto que os conteúdos curriculares relacionados à temática trigonometria estão presentes no planejamento da disciplina de Matemática nesta série. A pesquisa ocorrerá entre junho e agosto 2018 e a maioria das atividades acontecerá na escola, com três saídas a campo com os alunos. Realizaremos três visitas, uma ao Radium Hotel, a segunda Praia do Riacho e uma terceira, à Praia das Castanheiras, com a devida autorização da escola e dos responsáveis. Ao longo do percurso na Praia do Riacho, seremos acompanhados pelo agente da Secretaria de Meio Ambiente da Prefeitura o Sr. Rivelino Galvão. Nossas atividades serão realizadas em grupos formados por 5 a 7 alunos no sentido de compartilhar os ensinamentos adquiridos. Foram feitos dois documentos a serem assinados pelos alunos e respectivos pais, no caso de serem menores de 18 anos. Os respectivos documentos encontram-se anexados na plataforma/apêndice do projeto: TALE (12 a 18 anos) e TCLE (maiores de 18 anos ou emancipados).

RISCOS DA PESQUISA:

Durante a aula de campo, não podemos negar que existem riscos de acidentes, como picada de insetos, quedas, entre outros. Para minimizar tais riscos, será recomendado aos participantes usarem roupas adequadas para a este tipo de aula, entre eles: boné, calça comprida, calçado fechado, repelente e filtro solar. Ainda assim, o professor pesquisador e a orientadora assumirão os possíveis riscos da pesquisa.

Desta forma, foram tomadas as seguintes ações:

1. Sempre os sujeitos serão informados sobre a participação da investigação, com assinatura da autorização pelo uso do depoimento oral.
2. No caso do uso de fotografias, haverá um termo de autorização do uso de imagem.
3. Todos os nomes dos alunos serão codificados, não sendo exposto em nenhum momento.
4. A participação na investigação é voluntária, nem comprometendo nem os sujeitos envolvidos, nem a investigação, no caso de desistência. O sujeito poderá desistir de sua participação a qualquer momento.
5. A pesquisa contará somente com alunos com idade superior a 14 anos. Para os que possuem menos de 18 anos, também haverá um termo assinado pelos pais.

É relevante considerar pequenos constrangimentos dos alunos em não conseguirem realizar as atividades propostas. Para minimizar os riscos de exposição dos sujeitos da pesquisa, serão tomadas as seguintes precauções: reforçar que os dados dos participantes não serão divulgados e que os alunos fazem parte de uma pesquisa na qual estão em processo de aprendizagem, todos os nomes dos alunos serão codificados não sendo identificado em nenhum momento, esclarecer que a participação na investigação é voluntária, não comprometendo nem os sujeitos envolvidos, nem a investigação.

BENEFÍCIOS DIRETOS E INDIRETOS PARA OS VOLUNTÁRIOS:

A pesquisa tem como benefícios oportunizar aos alunos o contato com uma metodologia diferenciada que poderá se tornar um fator de motivação ao estudo, uma experiência que contribui com a capacidade de trabalhar em equipe e que desenvolva a organização e a autonomia. Os voluntários poderão beneficiar-se de melhorias no ensino como um todo. A partir das ações realizadas ao longo da investigação, será elaborado uma sequência didática voltado para a ensino de trigonometria na educação básica, contribuindo assim para o desenvolvimento de alternativas efetivas para projetos de intervenção escolar no futuro.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre as responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa como gravações, entrevistas, fotos e filmagens ficarão armazenados em pastas de arquivo, memórias auxiliares, como pen drive, e computador pessoal, sob a responsabilidade do pesquisador, pelo período de no mínimo 5 anos. Nem você e nem seus pais (ou responsáveis legais) pagarão nada para você participar desta pesquisa, também não receberão nenhum pagamento para a sua participação, pois é voluntária. Se houver necessidade, as despesas (deslocamento e alimentação) para a sua participação e de seus pais serão assumidas ou ressarcidas pelo pesquisador. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

____

Assinatura do pesquisador

Apêndice J

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Universidade Federal Do Espírito Santo.
Departamento De Pós-Graduação Em Matemática
Mestrado Em Matemática Em Rede Nacional
Av. Fernando Ferrari, 514 - Goiabeiras, Vitória - ES | CEP 29075-910

AUTORIZAÇÃO DE PARTICIPAÇÃO NA PESQUISA
CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO VOLUNTÁRIO(A)

Eu, ____, RG nº _________________, confirmo que o pesquisador Fábio Ramos Manhães, explicou-me os objetivos desta pesquisa, bem como, a forma de participação. As alternativas para a participação do menor ___________________________________ também foram discutidas. Eu li e compreendi este Termo de Consentimento, portanto, eu concordo em dar meu consentimento para o menor participar como voluntário desta pesquisa.

Guarapari, _______ de ____________________ de 2018.

____
Assinatura do(a) participante

____
Assinatura do responsável pelo participante

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e o aceite do voluntário em participar (duas testemunhas não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:

Apêndice K

Termo de Responsabilidade e compromisso do pesquisador responsável

Eu, **Fábio Ramos Manhães**, pesquisador responsável pelo projeto "TRIGONOMETRIA URBANA UMA PROPOSTA DIDÁTICA", declaro estar ciente e que cumprirei os termos da Resolução nº 466/2-012 do Conselho Nacional de Saúde do Ministério da Saúde – CONEP, e declaro: (a) assumir o compromisso de zelar pela privacidade e sigilo das informações; (b) tornar os resultados desta pesquisa públicos sejam eles favoráveis ou não; e, (c) comunicar o CEP sobre qualquer alteração no projeto de pesquisa, nos relatórios anuais ou através de comunicação protocolada, que me forem solicitadas.

__________________, _____ de ________________ de _______.

____

Fábio Ramos Manhães

Apêndice L

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Universidade Federal Do Espírito Santo.
Departamento De Pós-Graduação Em Matemática
Mestrado Em Matemática Em Rede Nacional
Av. Fernando Ferrari, 514 - Goiabeiras, Vitória - ES | CEP 29075-910

AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM E SOM

Pelo presente documento, eu ____, RG: ________________________ CPF: ________________________ domiciliado na Rua ____, número _____, cidade ________________________, CEP ________________, declaro ceder ao pesquisador Fábio Ramos Manhães, CPF:019.086.037-55, RG: 3.782.810- ES e domiciliado na Rua Aristides Caramuru, nº 199, Ed. Júlia, apto 205, Muquiçaba, Guarapari - ES, CEP: 29.215.180, e-mail professormanhaes@gmail.com.br, sem quaisquer restrições quanto aos seus efeitos patrimoniais e financeiros, a plena propriedade e os direitos autorais de minha imagem e som de voz que prestei em depoimento de caráter histórico e documental aos alunos participantes do Projeto “Trigonometria Urbana uma proposta didática”. Esses alunos foram previamente autorizados pelos seus responsáveis e estão sob orientação do pesquisador aqui referida. O depoimento foi realizado na cidade de ______________________, Estado ______, em ____/____/____ e será utilizado como subsídio à construção de sua dissertação de Mestrado em Matemática na Universidade Federal do Espirito Santo. O pesquisador acima citado fica consequentemente autorizado a utilizar, divulgar e publicar para fins acadêmicos e culturais, o mencionado depoimento, no todo ou em parte, editado ou não, com a ressalva de garantia da integridade do seu conteúdo.

Local e Data: _____________, ______ de ____________________ de ________.

(Assinatura do entrevistado/depoente)

Apêndice M

CARTA DE ANUÊNCIA PARA DESENVOLVIMENTO DE PESQUISA NA INSTITUIÇÃO ESCOLAR

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Universidade Federal Do Espírito Santo.
Departamento De Pós-Graduação Em Matemática
Mestrado Em Matemática Em Rede Nacional
Av. Fernando Ferrari, 514 - Goiabeiras, Vitória - ES | CEP 29075-910

Autorizo a realização da pesquisa intitulada **"TRIGONOMETRIA URBANA UMA PROPOSTA DIDÁTICA"**, que será desenvolvida no período de agosto de 2018 a outubro de 2018, coordenada pelo pesquisador **Fábio Ramos Manhães**, a ser realizada na Escola Estadual de Ensino Médio "Guarapari" em conformidade com os objetivos e metodologias previamente apresentados.

Como representante da Escola Estadual de Ensino Médio "Guarapari", estou ciente das corresponsabilidades associadas ao projeto de pesquisa no compromisso do resguardo da segurança e bem-estar dos participantes da pesquisa recrutados. Declaro ainda estar ciente da autonomia de cada indivíduo em aceitar ou recusar a participar da pesquisa, independente da anuência que apresento.

Esta autorização está condicionada à aprovação da pesquisa elencada acima por um Comitê de Ética em Pesquisa, legalmente instituído, como forma de resguardar o cumprimento da Resolução 466/2012 do Conselho Nacional de Saúde – CNS e suas complementares.

O descumprimento desses condicionamentos assegura-me o direito de retirar minha anuência a qualquer momento da pesquisa.

Guarapari, ______ de ____________________ de __________.

____

Nome e assinatura do responsável pela Instituição

Anexo A

TEOREMA DE TALES

Sejam as retas paralelas g , f e i, isto é $g \parallel f \parallel i$, e as retas transversais h e j , conforme a figura abaixo.

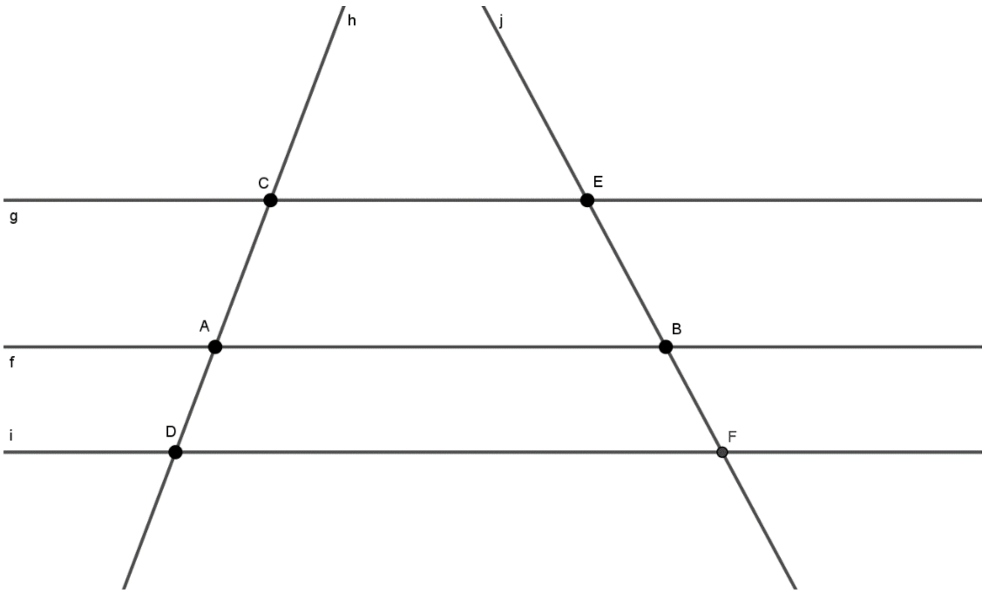


Figura: Teorema de Tales

Escolhe-se os pontos $C, E \in g$; $A, B \in f$ e $D, F \in i$, de modo que C, A, D e E, B, F sejam duas ternas de pontos colineares. Então:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{BF}}$$

.

.

Anexo B

TEOREMA DA BISSETRIZ

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$.

a) Se P é o pé da bissetriz interna e Q é o pé da bissetriz externa relativas ao lado BC , então:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$$

b) Sendo $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b \;\; e \;\; \overline{BC} = a$, temos:

$$\begin{cases} \overline{BP} = \dfrac{ac}{b+c} \\ \overline{PC} = \dfrac{ab}{b+c} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \overline{BQ} = \dfrac{ac}{|b-c|} \\ \overline{QC} = \dfrac{ab}{|b-c|} \end{cases}$$

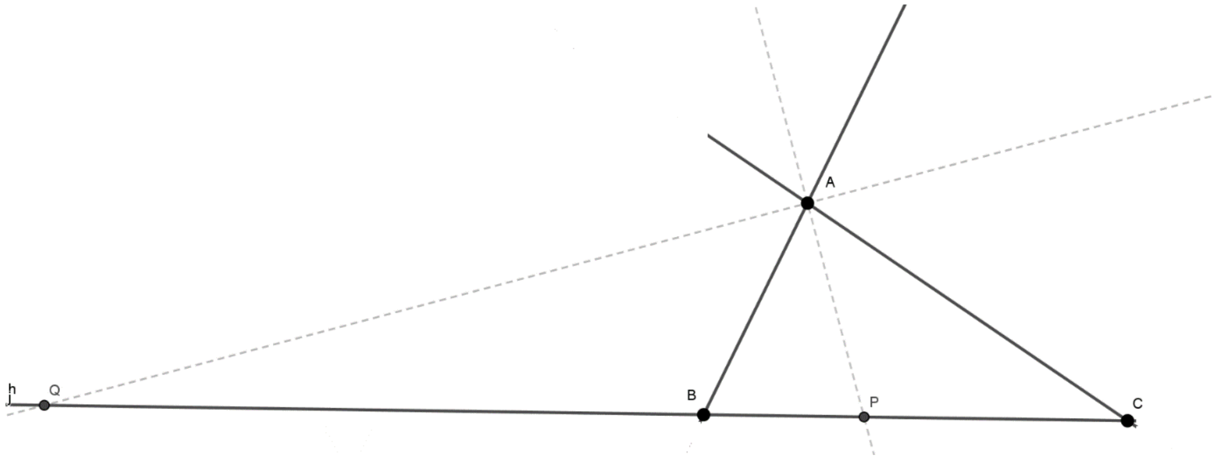


Figura: Teorema da Bissetriz

Anexo C

INSTRUMENTO DE ANÁLISE, AVALIAÇÃO E VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A- ESTRUTURA E ORGANIZAÇÃO						
	Quantificadores: onde 5 significa muito satisfeito	1	2	3	4	5
A_1	Qualidade e originalidade da SD e sua articulação com os temas da disciplina					
A_2	Clareza e inteligibilidade da proposta					
A_3	Adequação do tempo segundo as atividades propostas					
A_4	Referencial Teórico/ Bibliografia					
B- PROBLEMATIZAÇÃO						
B_1	O Problema					
B_2	Coerência Interna da SD					

B_3	A problemática nas perspectivas Social/Científica					
B_4	Articulação entre os conceitos e a problematização					
B_5	Contextualização de Problema					
B_6	O problema e sua resolução					
C- CONTEÚDOS E CONCEITOS						
C_1	Objetivos e Conteúdos					
C_2	Conhecimentos Conceituais, Procedimentais e Atitudinais					
C_3	Conhecimento Coloquial e Científico					
C_4	Organização Encadeamento dos Conteúdos					
C_5	Tema, Fenômeno, Conceitos					
D- MÉTODOS DE ENSINO E AVALIAÇÃO						
D_1	Aspectos Metodológicos					
D_2	Organização das atividades e contextualização					
D_3	Métodos de avaliação					
D_4	Avaliação integradora classificatória vinculada aos resultados a serem atingidos					
D_5	Feedback de Avaliação					

Fonte: Giordan e Guimarães (2011)