UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PPG

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Construções Geométricas com Régua e Compasso

Weslley Jonh Barros Silva

São Luís - MA
2019

WESLLEY JONH BARROS SILVA

Construções Geométricas com Régua e Compasso

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Maranhão, no Programa de Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, sob orientação do Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

São Luís
2019

Silva, Weslley Jonh Barros.
Construções geométricas com régua e compasso / Weslley Jonh Barros Silva. – São Luís, 2019.
86 f.

Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual do Maranhão, 2019.

Orientador: Prof. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto.

1. Aprendizagem. 2. Geometria. 3. Construções geométricas. I. Título.

CDU 514.1

Weslley Jonh Barros Silva

Construções Geométricas com Régua e Compasso

São Luís, 29 de Março de 2019.

Dissertação analisada e aprovada pela banca examinadora

Prof. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

Orientador

DEMATI - UEMA

Prof Dr. Roberto Batista dos Santos

Membro Interno

DEMATI - UEMA

Prof Dr. Rônci Sandro Vieira

Membro Externo

Departamento de Matemática - IFES

Dedico este trabalho à minha Família: Pai, mãe e irmãos por estarem presentes em toda essa árdua jornada, me apoiando em todos os meus passos e decisões.

Agradecimentos

À Deus pela proteção em todas as muitas viagens realizadas a São Luís e por todos os dons concedidos a mim e que foram essenciais para a produção deste trabalho.

Agradeço à minha mãe Maria Delma e ao meu pai José Guimarães que sempre me deram todo apoio para que eu pudesse estudar. Agradeço também ao valores a mim transmitidos, que foram preponderante na minha jornada.

Agradeço aos meus irmãos Antônio Carlos, Francivânia e Antônio Marcos pelo companheirismo e por sempre me darem apoio e incentivo.

Agradeço ao meu cunhado Sebastião pelo apoio durante os dois anos do curso, dirijindo nas idas e vindas da rodoviária para casa, e as minhas cunhadas Raimunda Teotonho e Dejane, pelo incentivo.

Agradeço a toda a minha família e amigos que sempre me motivaram.

Agradeço aos meus colegas de trabalho pelo incentivo durante todo o curso.

Agradeço aos colegas do Mestrado Profmat UEMA turma de 2017 pela amizade, pelos momentos de descontraçãoo e pelos momentos de estudo.

Agradeço à coordenação local do PROFMAT-UEMA, Prof. Dr. João Coelho Filho e Prof. Dr. Raimundo José Brandão , por sua dedicação.

Agradeço à minha orientadora Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto, que foi fundamental na realização deste trabalho.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço aos professores participantes da banca examinadora que dividiram comigo este momento tão importante e esperado: Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos e Prof Dr. Rônei Sandro Vieira.

Resumo

A aprendizagem de geometria, na maioria das vezes tratada de forma tradicional com alunos sendo sujeitos puramente passivos, faz com que essa aprendizagem não seja significativa para o aluno. Dessa forma o discente não guarda as informações trasmitidas em sala, por muito tempo. Nesse trabalho será exposto, por meio de uma proposta do uso de construções geométricas com régua e compasso, que é possivel melhorar a compreensão e assimilação dos conteúdos de geometria. Para isso foi feito um minicurso com 20 alunos de 8° ano com uma análise qualitativa das resoluções das atividades propostas no apêndice D e dos questionários dos apêndices A e B aplicados aos alunos, conclui-se que houve uma melhora significativa na assimilação dos conteúdos propostos. Também foi observado uma motivação maior em participar das aulas, incluindo os alunos que afirmavam não gostar de matemática, pois participaram ativamente das atividades com construções geométricas, estimulados pelo prazer de ver suas próprias construções.

Palavras-chave: Aprendizagem. Geometria. Construções Geométricas.

Abstract

The learning of geometry, most often treated in a traditional way with students being purely passive subjects, makes this learning not significant for the student. This way the student does not keep the information transmitted in the room for a long time. In this work will be exposed, through a proposal of the use of geometric constructions with ruler and compass, that it is possible to improve the understanding and assimilation of the contents of geometry. For this purpose a mini-course with 20 students of ang 8 year was made with a qualitative analysis of the resolutions of the activities proposed in appendix D and of the appendices A and B appended to the students, it was concluded that there was a significant improvement in the assimilation of the proposed contents. There was also a greater motivation to participate in classes, including students who said they did not like math because they actively participated in activities with geometric constructions, stimulated by the pleasure of seeing their own constructions.

Keywords: Learning. Geometry. Geometric constructions.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

O processo de ensino-aprendizagem no Brasil, mais especificamente no Maranhão, apresenta estatísticas que mostram sua precariedade. No último IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), ocorrido em 2017, o Brasil ficou com nota 4,4, o Maranhão com nota 4,2 não sendo alcançadas suas metas para esse ano e ainda distantes da meta mínima deseja, que é 6,0. Os dados da educação brasileira são ainda mais alarmantes quando se observa a disciplina Matemática. No último PISA (sigla em inglês Programa de Avaliação Internacional de Estudantes), constatou-se que 70% dos estudantes brasileiros estão abaixo do nível básico de proficiência esperado, o que mostra o caráter de urgência na tomada de medidas por partes de todos os envolvidos no processo de ensino-aprendizagem de matemática no Brasil.

Necessita-se de mudanças na forma como a disciplina vem sendo ensinada atualmente. Nessa perspectiva, deve-se apresentar aos estudantes uma matemática que relacione prática com a teoria, que é o caso da proposta do uso de construções geométricas com régua e compasso, abordada neste trabalho. Essa proposta será utilizada como ferramenta auxiliar no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de geometria.

As construções geométricas com régua e compasso são usadas desde os primórdios da geometria pelos gregos. Segundo Wagner, 2009 " [...] as construções geométricas permanecem imunes ao tempo(ao contrário de diversos tópicos da Matemática que foram continuamente modificados) sendo tão útil hoje como em qualquer outra época para educação do jovem estudante de matemática". Apesar de sua utilidade histórica, essa ferramenta tem sido pouco usada na educação básica.

Geralmente os livros didáticos apresentam algumas construções geométricas, com régua e compasso. Como exemplo citamos a coleção Matemática Bianchini do autor Edwaldo Bianchini de 2015. Essas construções devem ser feitas nos conteúdos teóricos de geometria, mas geralmente são negligenciadas pelos professores, ou porque não tenham as habilidades necessárias ou porque julgam de pouca relevância.

No presente trabalho será investigado o seguinte problema: A prática de construções geométricas com régua e compasso melhora o processo de ensino-aprendizagem de matemática tornando-o mais significativo e tornado a teoria de mais fácil assimilação e compreensão para o aluno?

De acordo com esse questionamento essa pesquisa busca na educação básica, mais especificamente em turmas de 8º ano do ensino fundamental, aspectos qualitativos que mostrem a relevância do ensino de construções geométricas com o uso de régua e compasso, melhorando dessa forma, a assimilação dos conteúdos de geometria.

2 Ensino de Geometria

2.1 Uma breve história da Geometria

A matemática surgiu a partir das necessidades humanas em diferentes momentos da história, evoluindo dos rudimentos das primeiras contagens até a matemática mais complexa e abstrata que temos hoje. Energia elétrica, computadores, aviões, telecomunicação, equipamentos médicos, televisores, são apenas alguns exemplos de benefícios que não seriam possíveis, não fosse os conhecimentos de matemática.

> A civilização moderna e nosso modo de viver atual só se tornaram possíveis, porque o homem, por meio da matemática, acumulou, ao longo dos séculos, vastos conhecimentos sobre o mundo físico e com isso conseguiu, parcialmente, dominá-lo e colocá-lo a seu serviço.(GERALDO, 2007, p.1)

Portanto a matemática é bem mais que um conjunto de algoritmos vazios que muitos alunos repetem na escola, sem muitas vezes, entender o seu real significado, sendo a mesma uma das maiores ferramentas humanas para interpretação do mundo físico. De acordo com (GERALDO, 2007, p.1) " Não há, portanto, exagero em se firmar que vivemos em um mundo altamente dependente de matemática e que ela está presente em tudo a nossa volta."

A matemática é dividida em algumas subáreas, como álgebra, aritmética e geometria, das quais a geometria ocupa lugar de destaque. Assim como a álgebra e a aritmética, a geometria surgiu como solução para uma situação cotidiana, a mesma teve como motivação a cobrança de impostos feitas pelo faraó. De acordo com (Mlodinow, 2008, p.19), "O governo determinava os impostos da terra baseado na altura da enchente do ano e na área de superfície das propriedades."

Essas propriedades muitas vezes tinham partes encobertas pelo rio Nilo, de forma que era preciso fazer uma nova medida da terra para que fosse cobrado imposto proporcional a sua área. Como os primeiros passos da geometria se deram em medidas de terras, se torna fácil explicar a origem do nome geometria, o mesmo é de origem grega e significa "medida da terra".

De acordo com Batista e Fronza(2008), os gregos, por volta de 600 a.C, foram os pioneiros na investigação de cunho geométrico, com Tales de Mileto, o mesmo deu início a investigação empregando o método dedutivo, tendo ele, trazido os conhecimentos geométricos da época, da Babilônia e do Egito. Dois séculos depois, Pitágoras de Samos, juntamente com seus discípulos, continuaram o modo sitemático que havia sido iniciado com Tales; Pitágoras e seus discípulos acreditavam que o mundo era regido por números inteiros, entretanto, eles mesmos descobriram os números irracionais.

No século 4 a.C, Platão fundou uma academia onde na sua entrada, estava fixado o seguinte lema: "Que ninguém que ignore a geometria entre aqui", tendo como um de seus discipulos, Euclides de Alexandria.

Desde as primeiras ideias de medidas de terra até os dias atuais a geometria teve grande avanço, entretanto um grande marco da geometria foi a obra "os elementos" do grego Euclides que viveu por volta de 300 a.C e que havia sido membro da academia de Platão. Mesmo sem ter feito grandes descobertas, ele é conhecido até hoje por sistematizar e organizar os conhecimentos de geometria de sua época.

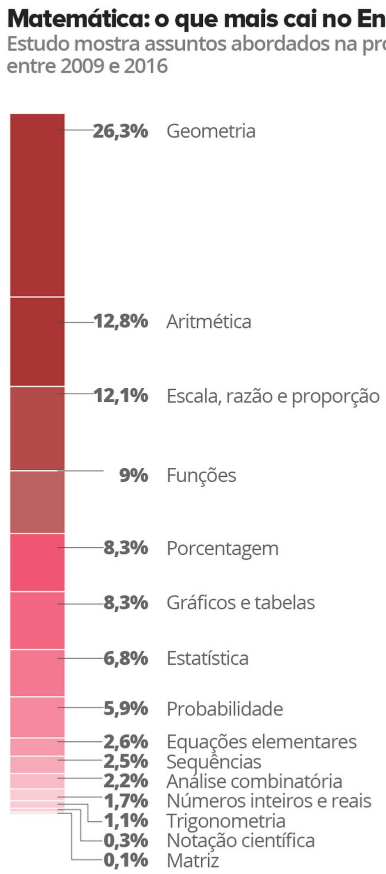
> Sua obra, Os elementos, composta de 13 livros, seria respeitada por seus sucessores e serviria de base da geometria, influenciando o desenvolvimento da Ciência por mais de mil anos e é, até os tempos modernos, o segundo trabalho mais traduzido e estudado na história da humanidade com cerca de oitocentas edições, sendo superado somente pela Bíblia. Também veio a ser a primeira obra importante de matemática a ser impressa.(ROBERTO, 2006, p.202)

A matemática, no geral, pode ser contemplada em todos os lugares a nossa volta, sobretudo nas formas geométricas, como podemos observar na simetria de um floco de neve, das teias de aranha e dos animais; na forma esférica dos planetas; na construção de alvéolos hexagonais pelas abelhas e nas formas esféricas das ondas produzidas por um objeto atirado na água. Esses são alguns exemplos que mostram a geometria na natureza. Tais fatos naturais servem de inspiração para diversas criações humanas e para busca da interpretação do mundo físico, sendo a geometria uma das mais importantes ferramentas para essa interpretação.

2.2 Como acontece o ensino de geometria no Brasil

Com os índices precários de aprendizagem de matemática, com 70% dos estudantes brasileiros abaixo do nível básico de proficiência esperado de acordo com Pisa, e com notas baixas no IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), vê-se a necessidade de mudanças em todos os aspectos. Um dos ramos da matemática que vem sendo bastante explorado no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) é a geometria. Segundo estudos realizados pelo Sistema Ari de Sá, essa disciplina é a primeira colocada em números de questões presentes no ENEM, como se pode observar na figura 2.1.

Figura 2.1: Matemática que mais cai no Enem



Fonte: Sistema Ari de Sá, disponível em: https://guiadoestudante.abril.com.br/enem/raio-x-do-enem-os-conteudos-que-mais-caem-na-prova-desde-2009/

As quesõtes de geometria, com 26,3%, são encontradas em maior número nas provas do ENEM que foram analisadas no intervalo de 2009 a 2016. Isso mostra que o principal exame, de acesso a cursos superiores, do Brasil tem dado bastante ênfase a essa parte da matemática do ensino básico, legitimando sua importância para o currículo dos educandos na educação básica. Segundo os parâmetros curriculares nacionais (PCN), "Quando o aluno tem um estudo adequado de Geometria, este desenvolve habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas."

Para melhorar o ensino de geometria devemos sim, ensinar os conteúdos teóricos exigidos nos seus currículos nas determinadas séries, mas também devemos submete-los a atividades práticas para que eles possam entender as abstrações teóricas, "[...] para se alcançar a abstração é preciso começar pelo concreto. Este é o caminho para a formação de conceitos." (LORENZATO, 2010, p.20)

Podemos observar que, como parte da matemática mais cobrada em exames, e com os índices ruins em matemática, devemos mudar a forma como ela vem sendo abordada. Uma solução seria mudar maneira como muitos professores se restringem a passar os conteúdos, que é simplesmente teórico. Devemos incluir atividades práticas, não substituindo a teoria e o modelo tradicional, mas trabalhando de forma coexistente.

3 Construção Geométrica Com Régua e Compasso no Ensino de Matemática

As construções geométricas foram desenvolvidas pelos gregos e levada através do tempo até nós como uma ferramenta para resolver problemas de geometria. De acordo com (WAGNER, 2009, p.1), "As construções com régua e compasso ja apareceram no século V a.C, época dos pitagóricos, e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática grega."

Entretanto, com o passar do tempo a prática de construções geométricas foi ficando cada vez mais rara nas escolas, sendo muitas vezes pouco abordada nos livros didáticos. Atualmente muitos livros apresentam algumas construções elementares, mas na maioria das vezes os professores negligenciam essa parte, deixando assim de usar essa ferramenta nos conteúdos de geometria. Em um questionário feito com 20 professores da rede pública da educação básica, foi constatado que 40% deles nunca trabalharam a prática das construções geométricas com seus alunos. As causas podem ser diversas, desde a falta de preparo dos professores até a falta de planejamento ou a falta de instrumentos. O que se sabe é que muitos deles não apresentem essa prática a seus alunos, esses por sua vez deixam de ter contato com essa ferramenta da matemática.

> A rigor, ensinar geometria sem esses instrumentos é como dar a uma criança um triciclo sem as duas rodas traseiras. Ela até consegue se locomover, mas muito mal. Estamos é mutilando a geometria quando a ensinamos como fazemos hoje, além de abrir mão de ferramentas cujo alcance didático é inesgotável (PUTNOKI, 2013, p.369)

Em tempos anteriores as construções geométricas eram feitas na disciplina "Desenho geométrico" que deixou de ser obrigatória, de modo que o ensino de construções geométricas se tornou raro nas escolas.

> Com a promulgação da LDB 5692/71, o Desenho Geométrico deixa de ser uma disciplina obrigatória e com essa lei, as escolas passam a ter liberdade para construir sua grade curricular, dentro da parte diversificada. Estes fatos, entre outros, contribuíram para que o Desenho Geométrico fosse excluído de muitas instituições escolares. (ZUIN, 2001, p.7)

Entretanto, sabe-se que a geometria, aritmética e álgebra são interdependentes, de forma que pode-se ter a prática de construções geométricas em meio aos outros campos do saber matemático pode auxiliar na compreensão dessas construções, para que haja um melhor entendimento das mesmas, se tornando um aprendizado significativo e não configurem apenas como um processo decorativo. Essas construções geométricas devem ser relacionados com os demais campos do conhecimento, "[...]em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade "(ZUIN, 2002, p.11).

Supõe-se que os problemas de construção geométrica estimulam um aprendizado mais consistente, a exemplo temos o conceito de circunferência que pode ser definida como o conjunto dos pontos equidistantes de um ponto dado, tal conceito quando passado para alunos de ensino fundamental, pode não apresentar a compreensão que o professor definiu previamente que eles adquirissem. Entretanto com o uso de instrumentos práticos, como é o caso da régua e compasso, supõe-se que esse conhecimento se torna muito mais significativo e de mais fácil assimilação, uma vez que o aluno a cada vez que constrói uma circunferência observa que a abertura do compasso é a mesma e por isso a distancia da ponta seca, onde fica o centro do circulo, até a outra ponta é sempre constante.

A geometria, em particular os problemas de construções geométricas, assim como toda a matemática, apresenta soluções por caminhos diversos, ficando a cargo do aluno escolher a maneira mais adequada. Segundo Wagner, 2009: "Muitas vezes, um problema de geometria e, em particular, de construção geométrica, pode ser resolvido de diversas formas, ou seja, por caminhos diferentes: mais curtos, mais longos e também mais bonitos".

Por ser uma tividade prática, as construções geométricas podem ajudar aos alunos a terem uma assimilação melhor do que somente mostrado as propriedades geométricas na lousa.

> Palavras não alcançam o mesmo efeito que conseguem os objetos ou imagens, estáticos ou em movimento. Palavras auxiliam, mas não são suficientes para ensinar (LORENZATO, 2010, p.17).

3.1 A Base Nacional Comum Curricular(BNCC) e as construções geométricas

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprovada em 2017, traz na parte de competências específicas, algumas propostas de construções geométricas que devem ser feitas pelos alunos.

> Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).(BRASIL, 2017 p.7).

Vamos destacar aqui algumas das habilidades, referentes as construções geométricas, com régua e compasso, que o aluno tem que alcançar no que diz respeito ao ensino da geometria, proposto pela BNCC em cada ano do ensino fundamental II.

7° **ano:**

> Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes .
>
> Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. (BRASIL, 2017, P.307).

8° **ano:**

> Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
>
> Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso. (BRASIL, 2017, P.313).

As construções geométricas com uso de régua e compasso, foram propostas no 7° e 8° anos na (BNCC). Isso não significa que os alunos não possam ter acesso a esses instrumentos em outras anos, mas que especificamente nos anos supracitados a ênfase deve ser maior.

3.2 Noções Básicas e instrumentos para a execução das construções geométricas

Quando se fala em construções geométricas nesse trabalho, refere-se a construções feitas somente com régua, sem marcação, e compasso. As regras das construções possíveis com régua e compasso são:

> Traçar uma reta, conhecendo dois de seus pontos; traçar um círculo, conhecendo o seu centro e um ponto do círculo; determinar as interseções de retas ou círculos já construídos com retas ou círculos já construídos.
>
> Não são permitidos: Traçar um círculo de raio ou centro "arbitrários"; usar uma graduação previamente preparada da régua ou do compasso; tomar sobre uma reta um ponto "arbitrário"; deslizar a régua até certa posição; etc. (WAGNER, 2007, p.105)

Ao fazer uma construção geométrica com régua e compasso, devemos descrever os passos da construção que serão feitos, de forma que um leitor consiga entender esses passos e possa reproduzir a construção, seguindo os mesmos. Os instrumentos usados nas construções geométricas são:

Régua sem marcação

Nas construções geométricas com régua e compasso, usamos régua sem marcação(Figura 3.1), a mesma é usada para ligar dois pontos e construir segmentos de reta. As réguas que os alunos usam, na maioria das vezes é graduada entretanto nas construções geométricas é exigido que o aluno não faça uso dessa graduação.

Figura 3.1: Régua sem graduação

Fonte: criado pelo próprio autor

Compasso:

O compasso é um instrumento para construção de circunferências. Ele possui duas hastes: Uma ponta metálica, chamada ponta seca, e outra ponta onde se coloca o grafite. Sendo que as duas hastes do compasso com o mesmo tamanho. Ao abrirmos o compasso, obtemos uma distâncias entre a ponta seca e o grafite, essa distância determina o raio da circunferência construida com essa abertura (Figura3.2).

Figura 3.2: Compasso

Fonte: criado pelo próprio autor

Lápis:

Apresenta internamente grafite com grau de dureza variável, classificado pelas letras: B, 2B, 3B, 4B, 5B e 6B, muito macios, sendo a B o menos macio e a 6B o mais macio. Existe também os muito duros que são: H, 2H, 3H, 4H... até o 9H, sendo o 9H o mais duro de todos.

Borracha:

Geralmente são brancas e macias, preferencialmente de plástico sintético. A borracha é usada para corrigir pequenos erros.

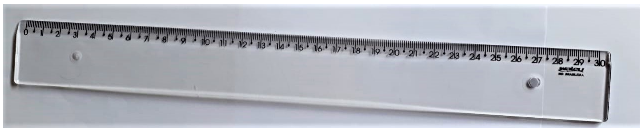
3.2.1 Outros instrumentos de desenho geométrico

Nas construções geométricas, somente com régua e compasso, o trensferidor, a régua graduada e o esquadro podem auxiliar quando se desejar medir a precisão da construção realizada. Como exemplo podemos citar a construção do ângulo de 30°, que pode ser construído, primeiramente realizando a construção do ângulo de 60° e depois construindo a bissetriz deste ângulo. Para saber se a construção foi realizada adequadamente, pode-se usar o transferidor para averiguação. Assim como o transferidor, a régua graduada e o esquadro também são úteis para averiguação da precisão de determinadas construções.

Régua graduada:

A régua é usada para ligar dois pontos e construir retas, semirretas ou segmentos de reta. Na Figura 3.3, temos uma régua graduada com a graduação em milímetros e centímetros, como são as que os alunos geralmente usam.

Figura 3.3: Régua graduada



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

Esquadro:

Há dois tipos de esquadros. Um deles possui os ângulos iguais a 45°, 45° e 90°, esse esquadro é comumente chamado de esquadro de 45° ou ainda isósceles, (Figura 3.4). Outro possui ângulos de 30°, 60° e 90°(sendo esse chamado de esquadro de 60°, ou ainda escaleno).

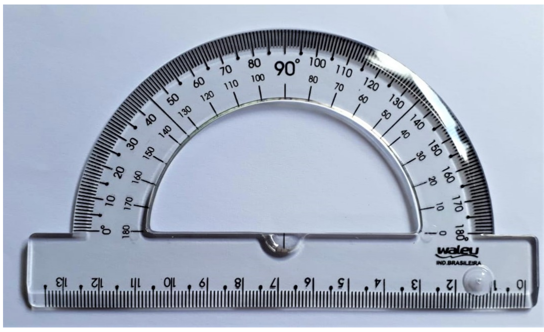
Figura 3.4: Compasso

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

Transferidor:

O tansferidor é um instrumento para medir ângulo e para auxiliar em suas construções. Ele pode ser encontrado em duas versões: um de meia volta ou 180°(Figura 3.5) e outro de uma volta, 360°.

Figura 3.5: Transferidor



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

4 Construções geométricas com régua e compasso

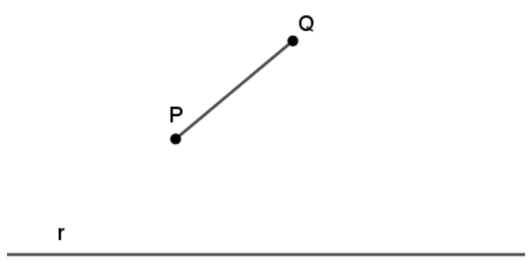
4.1 Construir um segmento congruente ao segmento PQ dado, sobre uma reta r dada

Para tranferir um segmento de reta PQ para a reta r dada como pode-se observar na Figura 4.1. Devemos proceder da seguinte maneira:

i) Coloque a ponta seca do compasso no ponto P e abrindo o compasso de modo que a outra ponta fique sobre o ponto Q, marca-se um ponto A na reta r.

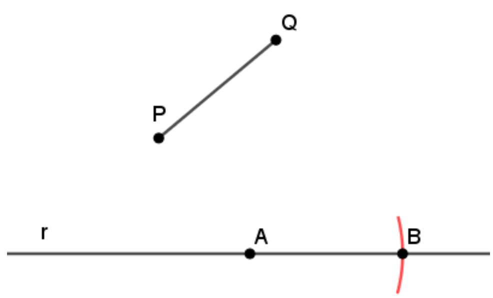
ii) Coloque a ponta seca do compasso no ponto A , mantendo a abertura feita no segmentoPQ, marca-se um ponto B na reta r, logo temos o segmento AB congruente ao segmento PQ como podemos ver na Figura 4.2.

Figura 4.1: Transferir o segmento PQ para a reta r.



Fonte: Criado pelo próprio autor

Figura 4.2: Segmento PQ congruente ao segmento AB



Fonte: Criado pelo próprio autor

4.2 Construir um ângulo β congruente a um Ângulo α dado

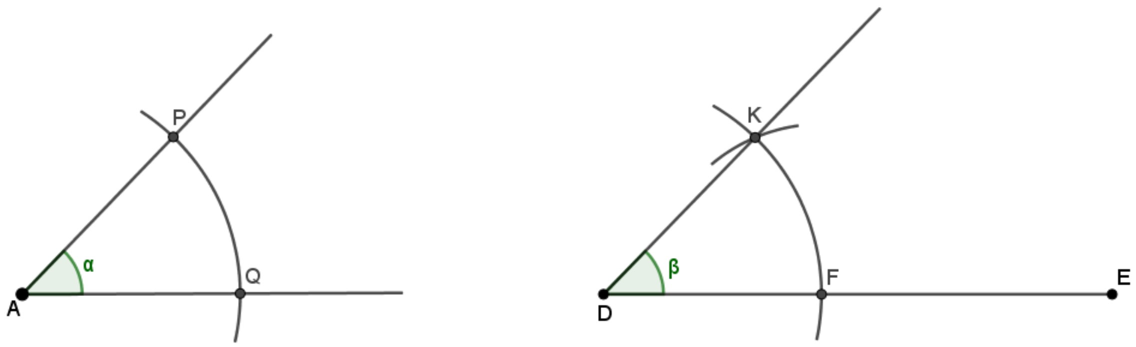
Para realizar essa construção segue-se os seguintes passos:

i) Traça-se um círculo qualquer de centro em A, determinando os pontos P e Q nos lados do ângulo α.

ii) Traça-se um círculo de mesmo raio e centro em D, determinando F em DE;

iii)Com raio PQ traçamos um círculo de centro D para determinar K sobre o primeiro círculo. Dessa forma, encontramos $\alpha = \beta$ como pode-se observar na figura 4.3.

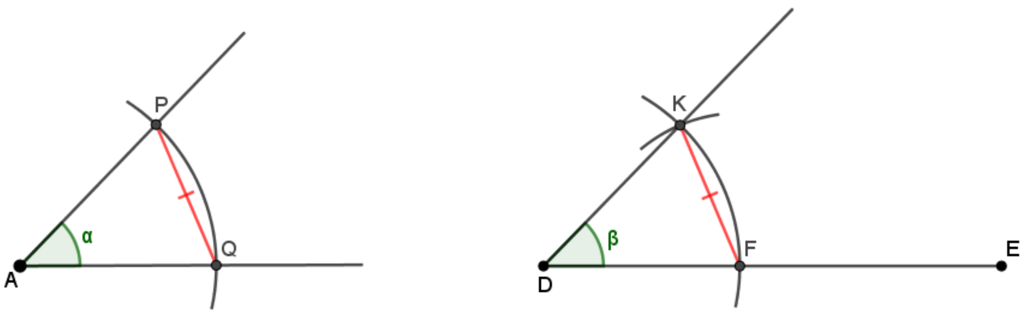
Figura 4.3: Transporte de ângulo



Fonte: Criado pelo próprio autor

De fato, na construção da Figura 4.3, basta construirmos o segmento PQ e o segmento KF como podemos observar na Figura 4.4, sabendo que $\overline{AP} = \overline{DK}$, $\overline{AQ} = \overline{DF}$ e $\overline{PQ} = \overline{KF}$, pelo critério lado, lado, lado (LLL) tem -se que o triângulo APQ é congruente ao triângulo DKF, logo $\alpha = \beta$.

Figura 4.4: Transporte de ângulo



Fonte: Criado pelo próprio autor

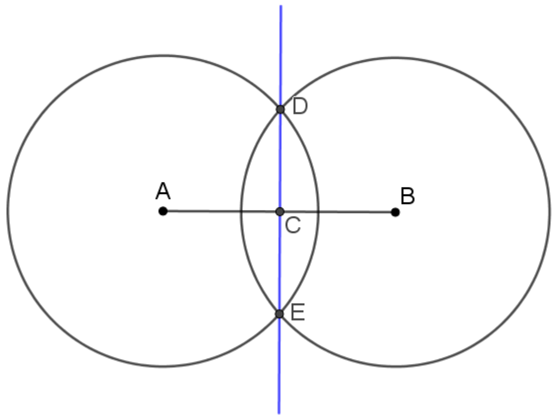
4.3 Traçar a mediatriz de um segmento AB.

A Mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que passa pelo ponto médio desse segmento. Para construir a mediatriz basta seguir os seguintes passos:

i)Trace dois círculos de mesmo raio, com centros em A e B.

ii)Sejam D e E os pontos de intersecção desses círculos, Figura 4.5. A reta DE é a mediatriz de AB.

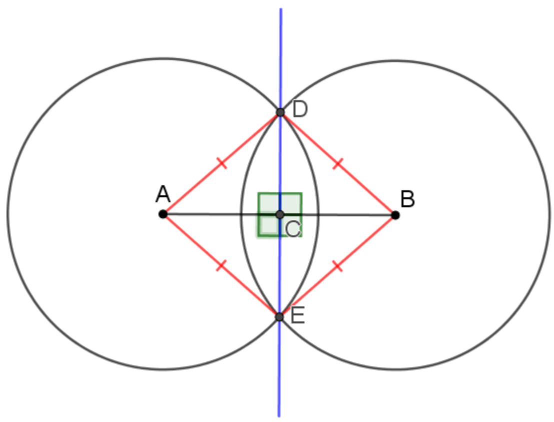
Figura 4.5: A mediatriz de AB.



Fonte: Criado pelo próprio autor

Sendo $ADBE$ um losango, suas diagonias são perpendiculares e cortam-se ao meio, logo DE é a mediatriz de AB, (Figura 4.6). É importante Lembrar que a mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos equidistantes dos extemos desse segmento.

Figura 4.6: A mediatriz de AB.

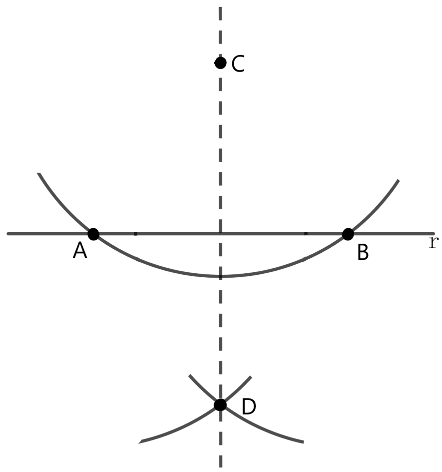


Fonte: Criado pelo próprio autor

4.4 Traçar uma reta perpendicular a reta r passando por um Ponto C, fora dela

Para traçar por um ponto C uma perpendicular a uma reta r, tracamos um círculo de centro em C que intersecta a reta r em A e B(Figura 4.7). Em seguida, traçamos dois círculos de mesmo raio com centros em A e em B, passando por C, obtendo o ponto D, um dos pontos de interseção desses círculos. A reta CD é perpendicular a AB.

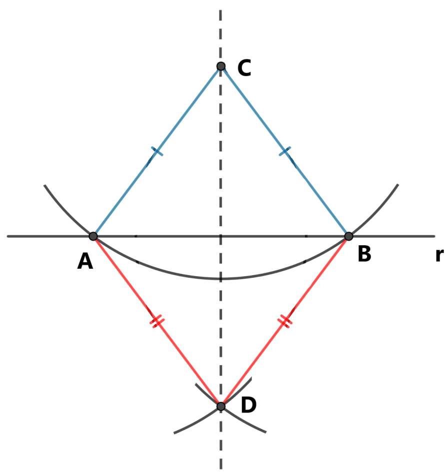
Figura 4.7: Reta perpendicular a r passando por C



Fonte: Criado pelo próprio autor

De fato,como $\overline{CA} = \overline{CB}$ e $\overline{DA} = \overline{DB}$, a reta $\overline{CD}$ é mediatriz de $\overline{AB}$ e portanto perpendicular a AB como pode ser observado na Figura 4.8.

Figura 4.8: Reta perpendicular a r passando por C



Fonte: Criado pelo próprio autor

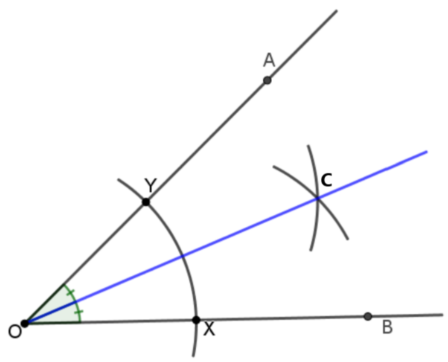
4.5 Traçar a bissetriz de um ângulo dado.

A bissetriz de um ângulo AÔB é a semirreta OC tal que AÔC = CÔB. A bissetriz divide o ângulo em dois outros ângulos de mesma medida. Para construir a bissetriz do ângulo AÔB dado, segue-se os seguintes passos:

i) Traçamos um circulo de centro O de terminando os pontos X e Y nos lados do ângulo (Figura 4.9).

ii) Em seguida Traçam-se dois círculos de mesmo raio com centros em X e Y que possuem C como um dos pontos de interseção. A semirreta OC é a bissetriz do ângulo AÔB .

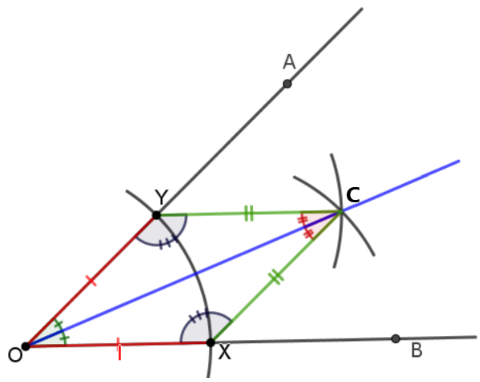
Figura 4.9: A bissetriz do ângulo AÔB



Fonte: Criado pelo próprio autor

De fato pela construção feita, os triângulos OXY e OYC são congruentes (caso LLL) e portanto XÔC = CÔY como pode ser observado na Figura 4.10.

Figura 4.10: A bissetriz do ângulo AÔB



Fonte: Criado pelo próprio autor

Lembramos ainda que: *A bissetriz de um ângulo é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos lados do ângulo.*

4.6 Traçar uma reta paralela a reta r passando por um Ponto P, fora dela

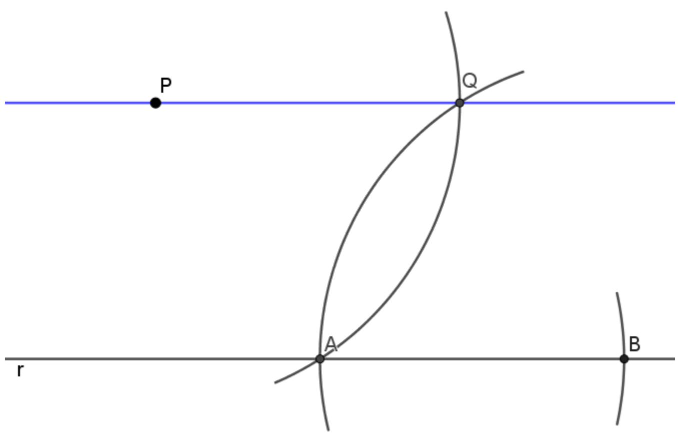
Para traçar por um ponto P uma paralela a uma reta r, deve-se proceder da seguinte maneira:

i) Traçamos três círculos, sempre com mesmo raio: o primeiro com centro em P, determinando um ponto A na reta r;

ii) Trace o segundo com centro em A , determinando o ponto B na mesma reta;

iii) Trace e o terceiro com centro em B, determinando o ponto Q sobre o primeiro círculo (Figura 4.11). Logo PQ é paralela a AB.

Figura 4.11: Retas paralelas



Fonte: Criado pelo próprio autor

Observando como foi feita a construção, temos que $PABQ$ é um losango e portanto, seus lados PQ e AB são paralelos.

4.7 Pontos Notáveis em um triângulo

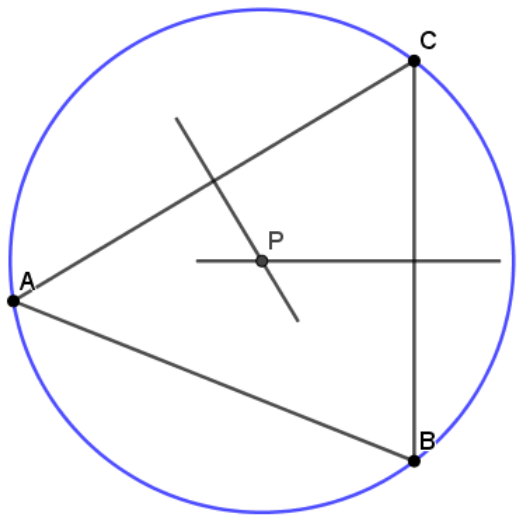
4.7.1 Encontrar o circuncentro e traçar o Circulo circunscrito ao triângulo ABC

Para encontrar o circuncentro do triângulo ABC, deve-se seguir os passos abaixo:

i) Trace a mediatriz em dois lados desse triângulo encontrando a interseção P dessas mediatrizes, que é o circuncentro desse triângulo;

ii) Construa agora um circulo de centro P e raio PA. Temos então a construção do círculo circunscrito ao triângulo ABC (Figura 4.12).

Figura 4.12: Circuncentro e círculo circunscrito ao triângulo ABC



Fonte: Criado pelo próprio autor

4.7.2 Dado um triângulo ABC, encontrar o incentro e construir um circulo inscrito

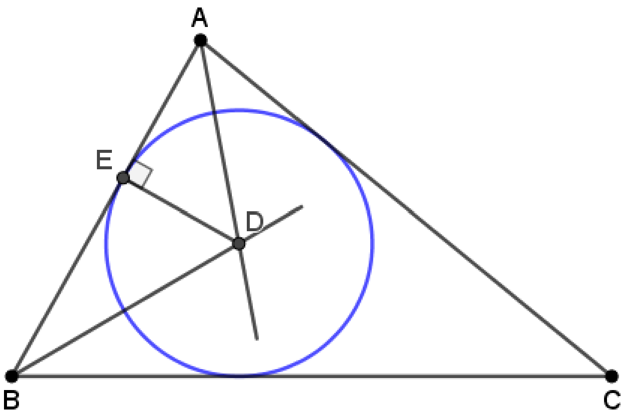
Passos de construção:

i) Trace as bissetrizes de dois ângulos quaisquer do triângulo ABC;

ii) Em seguida encontre o ponto D que é a interseção dessas bissetrizes, esse por sua vez é o incentro de um triângulo ABC dado;

iii) Em seguida trace agora a reta perpendicular ao segmento AB que passa por D de modo que encontra-se o ponto E em AB. O círculo inscrito desejado é o círculo de centro D e raio DE (Figura 4.13).

Figura 4.13: Incentro e círculo inscrito ao triângulo ABC



Fonte: Criado pelo próprio autor

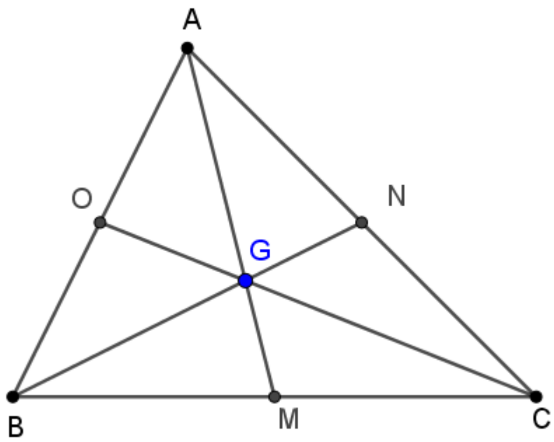
4.7.3 Encontrar o baricentro de um triângulo com régua e compasso

Para encontrar o baricentro de um triângulo ABC dado, siga os passos abaixo:

i) Encontre o ponto médio dos segmentos AB, AC, e BC, esses podendo ser encontrado com a construção da mediatriz em cada um deses segmentos;

ii) Em seguida traçamos as medianas e tomamos o ponto G, sendo este, a interseção dessas medianas, o mesmo é baricentro do triângulo ABC (Figura 4.14).

Figura 4.14: Baricentro



Fonte: Criado pelo próprio autor

4.7.4 Construir um triângulo equilátero

Para construir um triângulo equilátero devemos prosseguir da seguinte maneira:

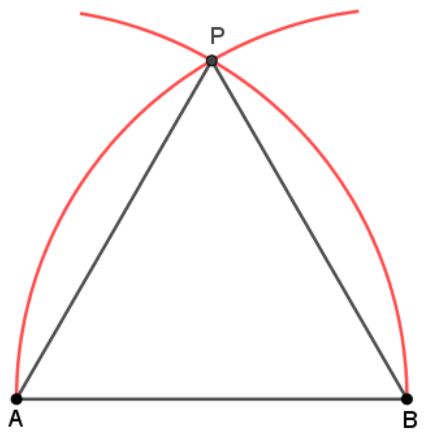
i) Construa um segmento de reta de extremidades A e B;

ii) Construa uma circunferencia C de centro A passando por B;

iii)Construa uma circunferência D de centro B passando por A;

iv) Sendo o ponto P a interseção dessas duas circunferencias, temos o triângulo equilátero ABP, como podemos observar na Figura 4.15.

Figura 4.15: Triângulo equilátero ABP



Fonte: Criado pelo próprio autor

Como as duas circunferências C e D tem os seus raios com a mesma medida do segmento AB, temos que $\overline{AB} = \overline{BP} = \overline{AP}$, logo o triângulo ABP é equilátero.

4.8 Construções de Ângulos usando régua e compasso

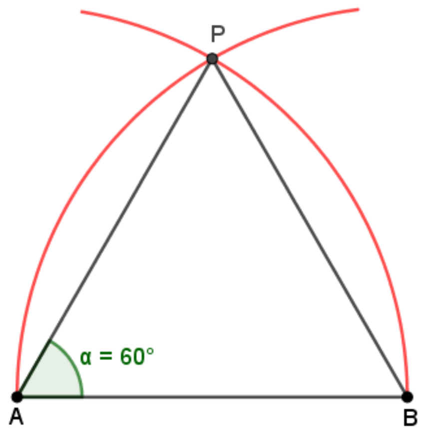
4.8.1 Construção do ângulo de $60°$

Passos de construção:

i) Construa um triângulo equilátero;

ii) Como um triângulo equilátero tem seus três ângulos internos com medida igual a $60°$, tomando um dos ângulos, tem-se a construção desejada (Figura 4.16).

Figura 4.16: Triângulo equilátero ABP



Fonte: Criado pelo próprio autor

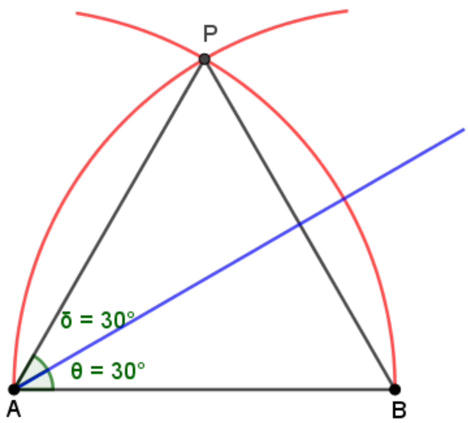
4.8.2 Construção do ângulo de 30°

Para construir um ângulo de 30° devemos seguir os seguintes passos:

i) Construir um ângulo de 60° como foi feito na sessão anterior;

ii) Em seguida, construir a bissetriz desse ângulo, como mostra a Figura 4.17, assim tem-se um ângulo de 30°.

Figura 4.17: Ângulo de 30°



Fonte: Criado pelo próprio autor

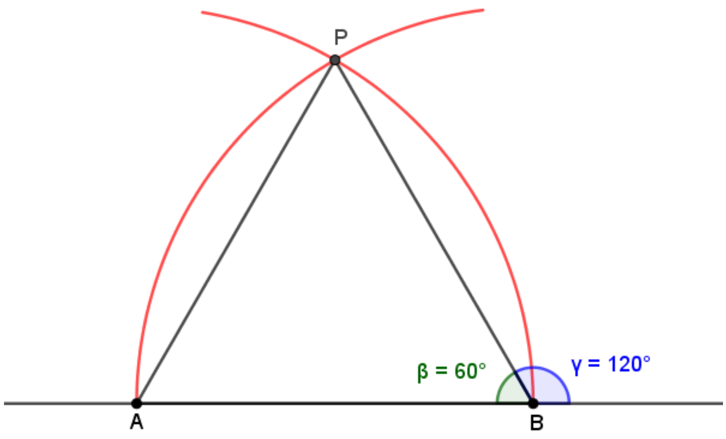
4.8.3 Construção do ângulo de 120°

Para construir um ângulo de 120° devemos seguir os seguintes passos:

i) Construa um triângulo equilátero;

ii) Como cada ângulo interno desse triângulo tem 60°, basta agora tomar um de seus ângulos externos, pois o mesmo é o suplemento de 60°, logo tem medida igual a 120°.

Figura 4.18: Ângulo de 120°



Fonte: Criado pelo próprio autor

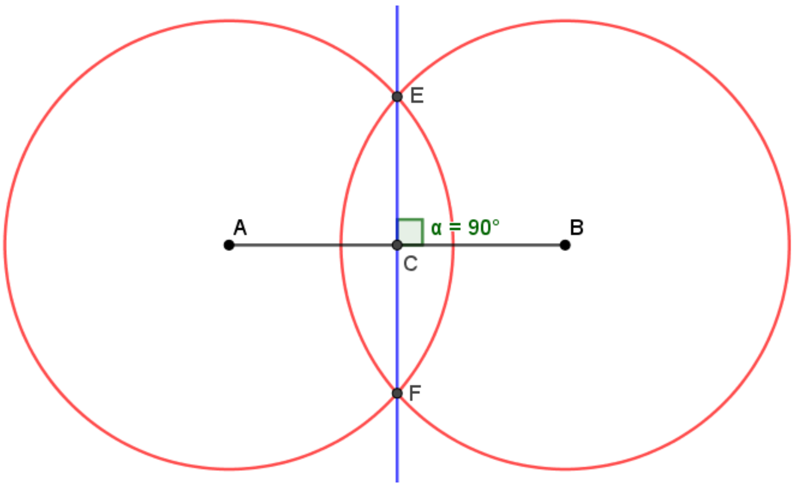
4.8.4 Construção do ângulo de 90°

Para construir um ângulo de 90° devemos seguir os seguintes passos:

i) Construa um segmento de reta;

ii) Em seguida trace a mediatriz desse segmento. Dessa forma tem-se um ângulo de 90°.

Figura 4.19: Ângulo de 90°



Fonte: Criado pelo próprio autor

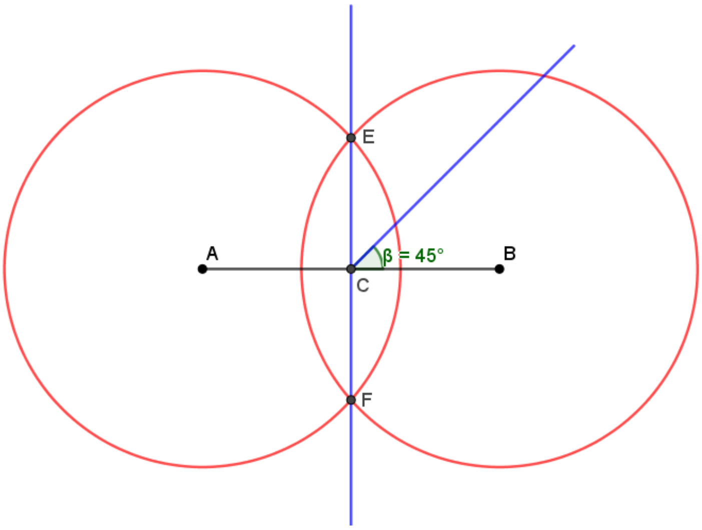
4.8.5 Construção do ângulo de 45°

Para construir um ângulo de 45° devemos seguir os seguintes passos:

i) Construa primeiro um ângulo de 90° como foi feito na sessão anterior;

ii) Em seguida construa a bissetriz desse ângulo, como mostra a Figura 4.20. Assim tem-se um ângulo de 45°.

Figura 4.20: Ângulo de 45°



Fonte: Criado pelo próprio autor

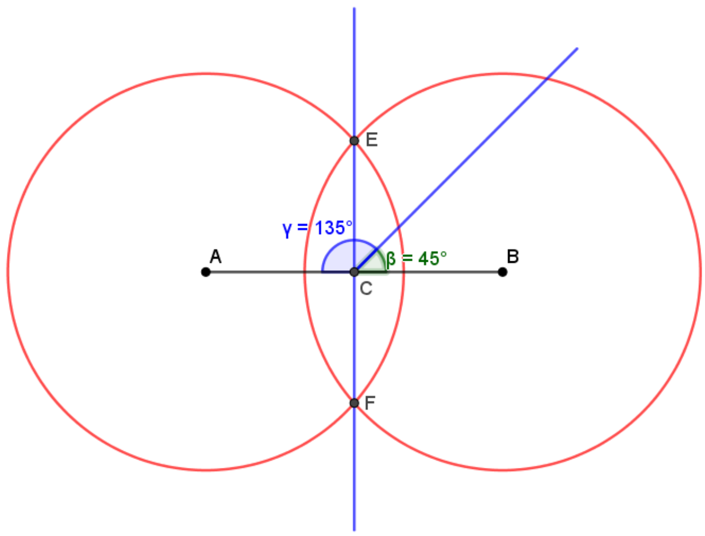
4.8.6 Construção do ângulo de 135°

Para construir um ângulo de 135° devemos seguir os seguintes passos:

i) Construa um ângulo de 45° como foi feito na sessão anterior;

ii) Em seguida tome o suplemento desse ângulo no segmento AB como mostra a Figura 4.21. Assim tem-se um ângulo de 135°.

Figura 4.21: Ângulo de 135°



Fonte: Criado pelo próprio autor

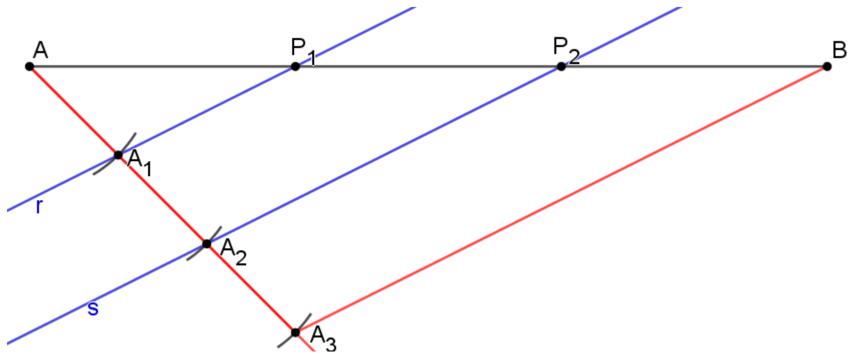
4.9 Dividir o segmento AB em partes iguais

Para dividir o segmento em duas partes iguais basta traçar a mediatriz do segmento, encontrando assim o ponto médio. Para dividir o segmento AB, por exemplo, em 3 partes iguais basta seguir os seguintes passos:

i) Trace uma semirreta AX (Figura 4.22);

ii) Sobre ela construímos, com o compasso, os segmentos iguais AA_1, A_1A_2 e A_2A_3 e as paralelas a A_3B traçadas pelos pontos A_1 e A_2.

Figura 4.22: Dividindo o segmento AB em 3 partes iguais



Fonte: Criado pelo próprio autor

Como são um feixe de retas paralelas com duas transversais, sabendo que os segmentos AA_1, A_1A_2 e A_2A_3 são iguais, pelo teorema de Tales temos $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2B}$.

5 Metodologia

A obtenção de dados da pesquisa ocorreu com um grupo composto por 20 alunos matriculados no 8º ano da escola Albertina Alencar Neiva, onde os mesmos fizeram um minicurso com duração de 12 h/a, na sala de aula. Nesse minicurso foram contemplados, através de construções geométricas com régua e compasso, conteúdos de geometria programados no livro didático e outras construções que não estão no programa anual. O minicurso aborda desde as construções simples, como o transporte de segmentos e ângulos, até algumas construções mais complexas, como a construção do incírculo e circuncírculo de um triângulo.

Durante o minicurso, inicialmente foi apresentado aos estudantes os instrumentos de construção geométrica, que são a régua sem marcação e o compasso. Posteriormente foram desenvolvidas algumas atividades básicas, como a construção de vários círculos, para que se familiarizassem com o compasso. Também foram feitas algumas construções elementares na sala, em forma de tutorial, para que eles as reproduzissem.

A princípio foram mostradas as construções elementares, feitas em forma de tutorial para que os alunos reproduzissem. Depois foram propostas alguns problemas que podem ser resolvidas usando combinações de algumas construções elementares, previamente feitas pelos alunos n o minicurso. Deste modo, foi observado desde as soluções dadas por eles até as tentativas de resolução, quando alguns não conseguiram resolver a atividade proposta. Algumas atividades foram propostas em forma de competição, dividindo os alunos em grupos, onde a precisão da construção era o fator que decidia qual grupo pontuava em cada atividade proposta. Para verificar a precisão foi utilizado outros instrumentos de desenho como: o esquadro, a régua graduada e transferidor.

Também foi feita uma análise da coleção de matemática, em uso na escola onde foi feito o minicurso, observando quantas e quais foram as construções geométricas com régua e compasso, que foram apresentadas pelo autor do livro como exercício resolvido ou atividade proposta.

Nos questionários feitos aos alunos, buscou-se primeiramente fazer um levantamento sobre o uso de construção geométrica na vida escolar desses alunos e também a opinião dos mesmos sobre tal utilização. No segundo questionário buscou-se fazer uma comparação sobre as concepções dos estudantes antes e depois de trabalhar com construções geométricas no minicurso.

Ainda no minicurso, foi aplicado um questionário para os professores, buscando entender qual a relação dos mesmos com a ultilização das construções geométricas em sala de aula.

6 Resultados e Discussões

Neste capítulo será exposta a análise qualitativa e quantitativa do uso de construções geométricas com régua e compasso no processo de ensino-aprendizagem de matemática. Para isso, será mostrado aqui as análises feitas durante a pesquisa, a respeito dessas construções geométricas, a saber: análise dos questionários feitos aos alunos, sendo um no início e outro no final do minicurso; análise da coleção de livro didático vigente na escola onde a pesquisa foi realizada; Análise do questionário feito aos professores e análise do curso de construções geométricas preparado para os professores.

6.1 Análise dos livros didáticos em uso na escola em que alunos que participaram do minicurso estudam

Foi feita uma análise da coleção Matemática Bianchini, autor Edwaldo Bianchini, editora moderna, em uso de 2017 a 2019. A mesma é usada na escola em que os alunos que participaram do minicurso estudam. Nessa coleção, foi contada a quantidade de construções geométricas, com régua e compasso, propostas aos alunos, Tabela 6.1.

Ano	Número de construções
$6^o ano$	3
$7^o ano$	4
$8^o ano$	6
$9^o ano$	0

Tabela 6.1: Quantidade de construções geométricas por ano

Foi observado que o livro do 8º ano apresenta o maior número de construções geméticas no ensino fundamental, na coleção analisada, motivo pelo qual os alunos do 8º ano foram escolhidos para esta pesquisa. Na Tabela 6.2, podemos observar quais são as construções geométricas apresentadas em cada ano letivo.

6ºano	7ºano	8ºano	9ºano
Retas perpendiculares	Divisão de um segmento	Retas paralelas	
Construção de triângulos	Ângulos congruentes	Segmentos congruentes	
Construção do ângulo de 60º	Bissetriz de um ângulo	Ponto médio	
	Construção de losangos	Bissetriz de um ângulo	
		Triângulos	
		Mediatriz	

Tabela 6.2: Construções geométricas propostas em cada eno letivo

Em todos os anos é apresentada alguma proposta de construção geométrica com régua e compasso, exceto no 9° ano do ensino fundamental, que é apresentada nenhuma proposta, haja visto que as construções geométricas elementares foram apresentadas nos anos anteriores.

As construções geométricas propostas nos livros dessa coleção, apresentam as soluções passo a passo, para que o aluno possa reproduzi-la. No final de cada construção, pode-se observar a demonstração dessa construção geométrica, de forma bem simplificada, tendo em vista o nível de conhecimento dos alunos.

Foi observado que esta coleção apresenta as principais construções geométricas elementares.

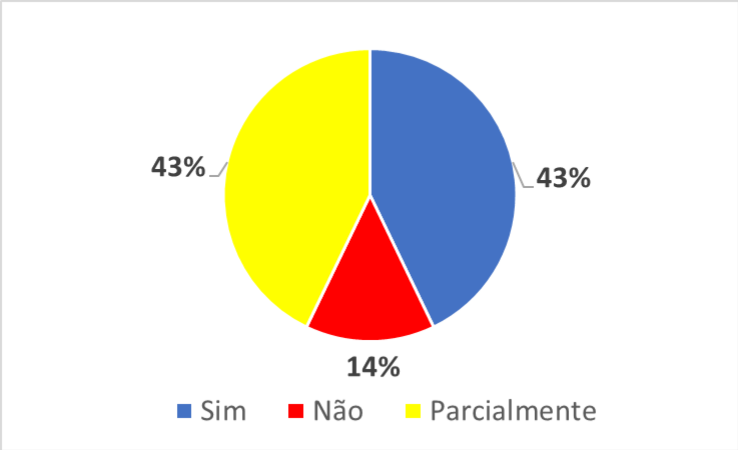
6.2 Análise do questionário 1

A finalidade do questionário 1, apresentado no apêndice A, é investigar se os alunos tiveram as construções geométricas com régua e compasso e se tiveram, saber se foi significativo.

Quando questionados se sentem dificuldade no processo de ensin-aprendizagem de matemática, 43% disseram que sim, 43% disseram que parcialmente e apenas 14% disseram que não tem dificuldade, Figura 6.1. O que mostra que os alunos, em grande parte, sentem dificuldade em aprender os conteúdos propostos. Muitos conteúdos de matemática nem sempre podem ser expostos de forma fácil, lúdica e a aprendizagem na maioria das vezes exige bastante esforço e dedicação. Mas sabe-se que em grande parte uma apresentação diferenciada de conteúdos, pode fazer a diferença no tocante à sua assimilação.

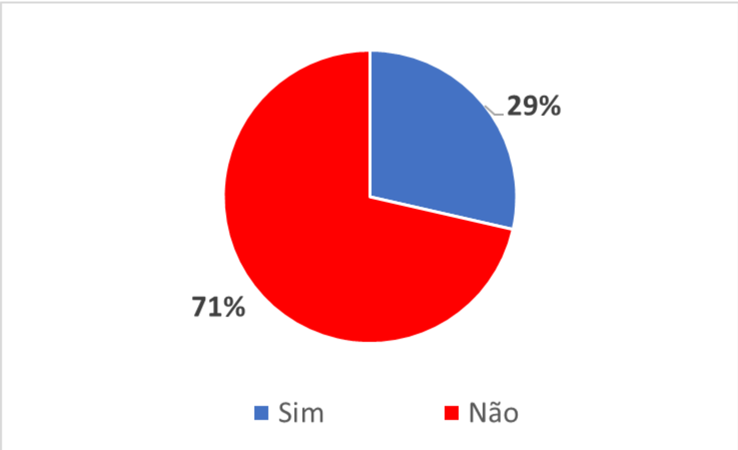
Ao serem questionados se já tiveram aulas práticas referentes aos conteúdos de geometria, 29% afirmaram que sim e 71% afirmaram que nunca tiveram nenhuma aula prática, mostrando que as aulas ainda são em sua maioria somente expositiva.

Figura 6.1: Alunos que sentem dificuldade no processso de ensino-aprendizagem de matemática



Fonte: Criado pelo próprio autor

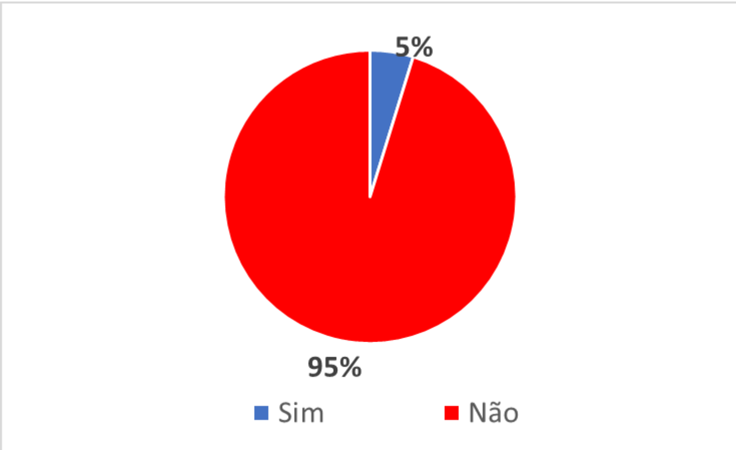
Figura 6.2: Alunos que já tiveram aulas práticas referentes aos conteúdos de geometria



Fonte: Criado pelo próprio autor

Ao serem questionados sobre a utilização de construções geométricas com régua e compasso em algum momento na sua vida escolar, 5% afirmaram que ja tiveram contatos com essas construções e 95% afirmaram que nunca haviam trabalhado com régua e compasso na escola,(Figura 6.3). Isso mostra que essa ferramenta importante não vem sendo explorada no processo de ensino e aprendizagem como deveria.

Figura 6.3: Alunos que ultilizaram construções geométricas alguma vez durante sua vida escolar

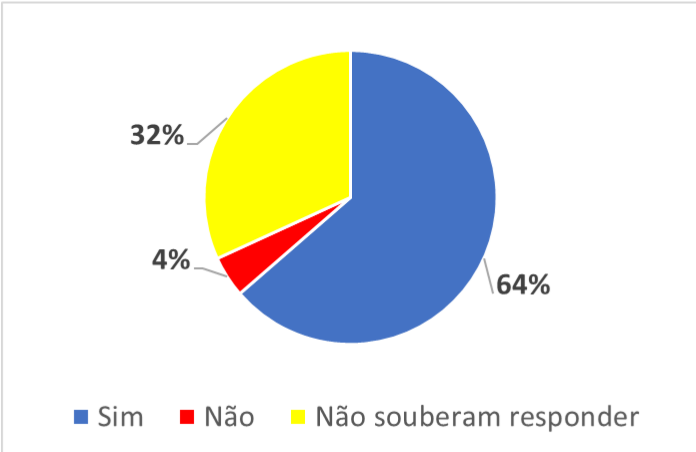


Fonte: Criado pelo próprio autor

Um outro questionamento feito aos alunos é se eles acreditam que o uso de construções geométricas com régua e compasso, pode ajudá-los na assimilação dos conteúdos de geometria. Nesse questionamento 4% acham que não, 32% não souberam responder e 64% acham que sim, mostrando que mesmo sem conhecimento aprofundado do assunto, os educandos acreditam que atividades como o uso de construções geométricas com régua e compasso, podem ajudá-los.

As demais perguntas, da 5° até a 11°, foram bem diretas e conceituais, para saber o quanto os alunos conheciam, não os conceitos totalmente iguais aos que tem nos livros, mas pelo menos a ideia daquele conceito, como exemplo da bissetriz, mediana, ponto médio e outros conceitos, sendo que alguns eles ja tinham visto anteriormente, e outros não. O que se pôde observar foi que eles tiveram. Nessas perguntas, em média, 12% de acerto, o que é uma média muito baixa.

Figura 6.4: Alunos que acreditam que o uso de construções geométricas pode ajudá-lo a assimilar melhor os conteúdos de geometria/matemática

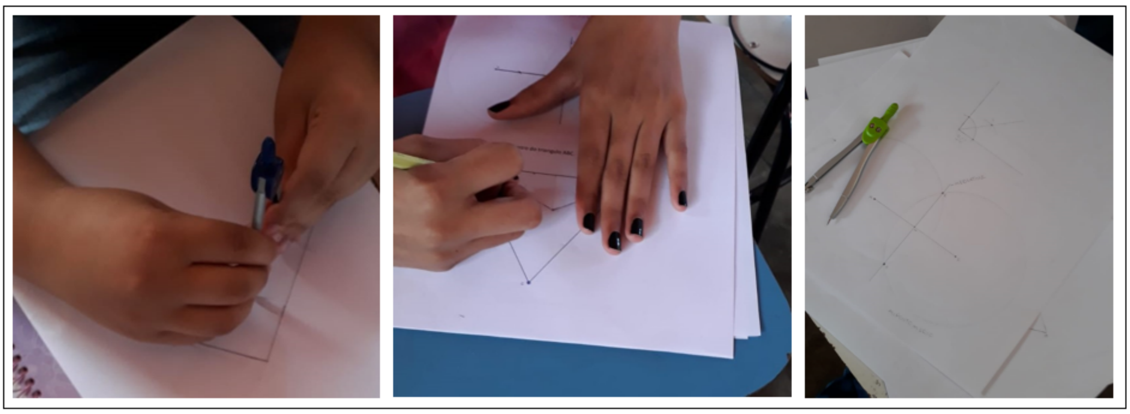


Fonte: Criado pelo próprio autor

6.3 Análise das atividades Propostas

As atividades propostas no minicurso foram feitas na intenção de que os educandos desenvolvessem habilidades para fazerem suas próprias construções geométricas com régua e compasso, a princípio com construções mais simples, aumentando o nível de dificuldade a cada construção, de modo que os alunos fossem concatenando as ideias das construções já feitas para construir outras mais difíceis posteriormente. Observe, na Figura 6.5, os alunos executando algumas atividades propostas no minicurso.

Figura 6.5: Alunos executando atividades propostas no minicurso de construções geométricas com régua e compasso

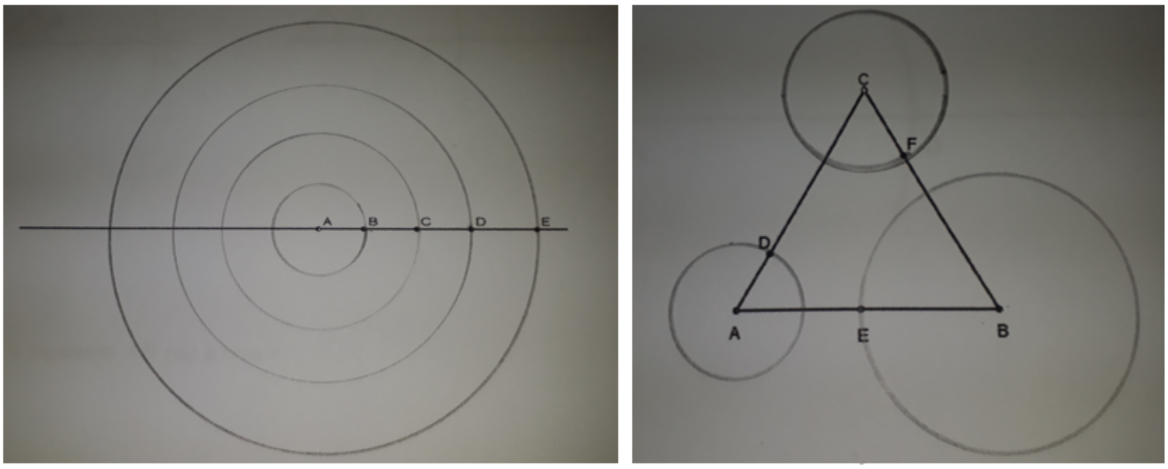


Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

6.3.1 Atividade proposta 1 e 2: Construção de círculos

Nessa atividade os alunos construíram vários círculos, dado o centro e um ponto desse círculo, onde a finalidade da atividade era a familiaridade com o compasso, haja visto que essa prática não é muito comum, e por esse motivo, os alunos sentem dificuldade no manuseio do mesmo (Figura 6.6).

Figura 6.6: Construção feita pelo aluno 18: Atividade proposta 1 e 2



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

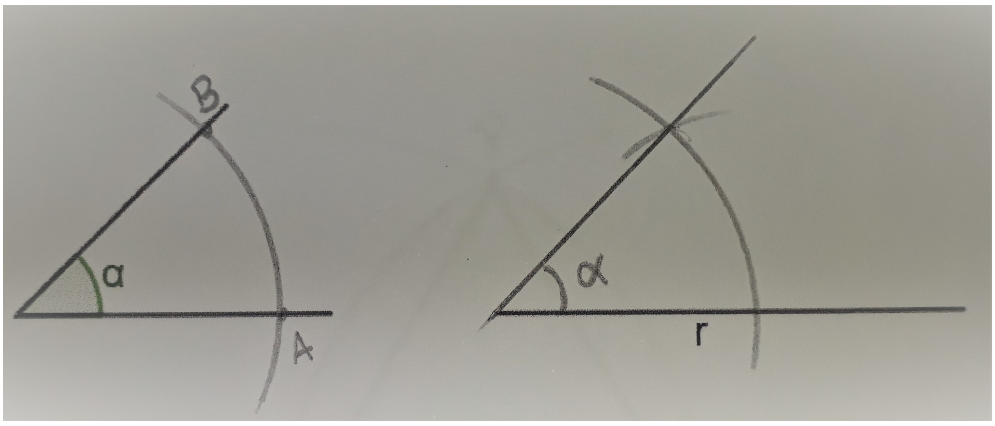
A princípio, os alunos tiveram certa dificuldade nessas construções, mesmo sendo bastante elementares, muitos deles pegavam de maneira errada no compasso, ou colocavam força desproporcional, de modo que não conseguiam construir adequadamente o círculo. Entretanto, com algumas orientações, eles conseguiram concluir essas atividades.

A atividade proposta 2 é similar a primeira, onde a principal finalidade é que os alunos tenham familiaridade com o compasso.

6.3.2 Atividade proposta 3 e 4: Transferência de Retas e ângulos

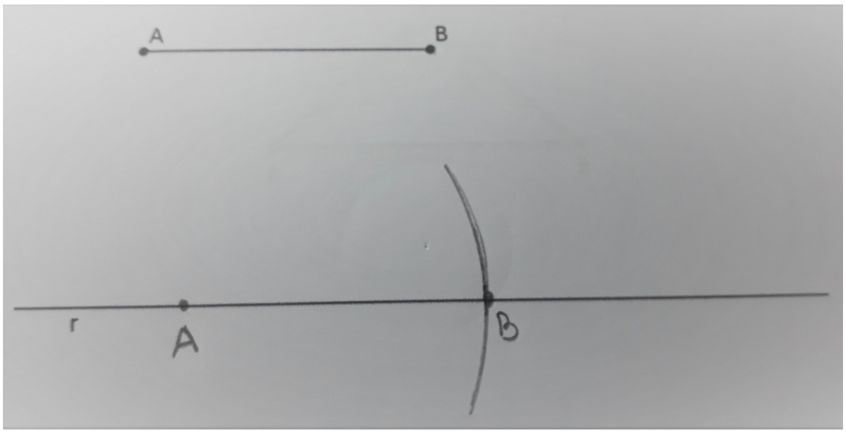
Nessas construções propostas, os alunos tiveram o primeiro contato com atividades que exigem mais que apenas construir círculos, essas construções foram feitas na lousa em forma de tutorial e os alunos não tiveram muita dificuldade na execução. Observe na Figura 6.7 e Figura 6.8 algumas dessas construções feitas pelos alunos.

Figura 6.7: Construção feita pelo aluno 18: Atividade proposta 3



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

Figura 6.8: Construção feita pelo aluno 8: Atividade proposta 4

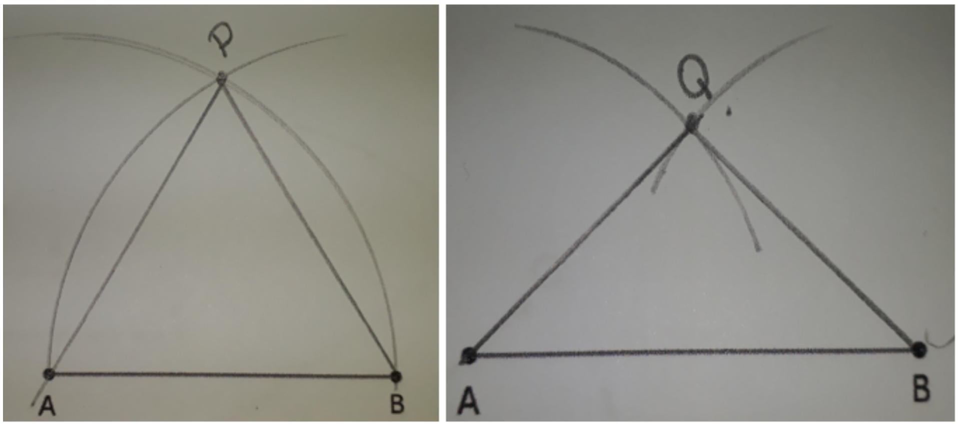


Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

6.3.3 Atividade proposta 5, 6 e 7: Construção de triângulos

As construções de triângulos foram bem interessantes. Foi proposto a construção do triângulo equilátero sem o tutorial, para que os alunos usassem os conhecimentos prévios das construções anteriores e encontrassem uma estratégia para essa construção. Depois de algumas tentativas sem concluir corretamente a construção proposta, essa construção foi feita em forma de tutorial para que eles a reproduzissem. Quando foi proposta a construção de um triângulo isósceles, com apenas um dos lados diferente, os alunos conseguiram fazer sem que fosse feito anteriormente na lousa. Eles usaram o conhecimento adquirido na construção anterior e perceberam que bastava fechar um pouco o compasso, em relação ao segmento AB dado, que os outros dois lados teriam medidas diferentes desse segmento, tendo assim a construção desejada. Observe essas construções na Figura 6.9

Figura 6.9: Construção feita pelo aluno 16: Atividades proposta 5 e 6



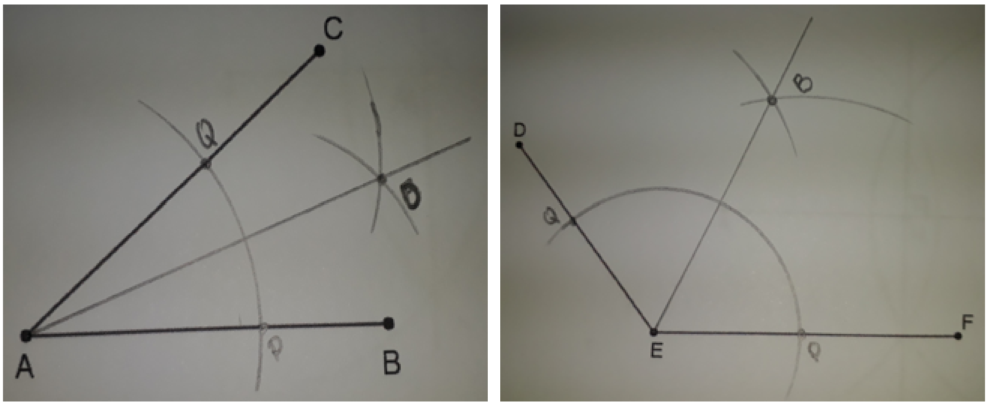
Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

Foi proposto ainda a construção de um triângulo escaleno, dadas as medidas de seus três lados. Com a experiência das construções dos dois triângulos anteriores, muitos alunos conseguiram fazer essa construção, sem explicação prévia do roteiro. Isso mostra mostrando assim uma certa independência para decidir quais passos seguir.

6.3.4 Atividade proposta 8 e 9: Construção da bissetriz de um ângulo

Nessa atividade, foi proposta a construção de uma bissetriz. Primeiramente, foi feito na lousa, em forma de tutorial, de modo que os alunos a reproduziram. Foram duas construções propostas, uma em um ângulo agudo e outra em um ângulo obtuso (Figura 6.10).

Figura 6.10: Construção feita pelo aluno 1: Atividades proposta 8 e 9



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

Durante essa construção, foi explicado aos alunos o motivo da semirreta AB e AD serem as bissetrizes dos ângulos dados. Para isso, foram usados conhecimentos de congruência de triângulos, que é conteúdo apresentado aos alunos no 8° ano do ensino fundamental, ano de estudo dos alunos participantes do minicurso.

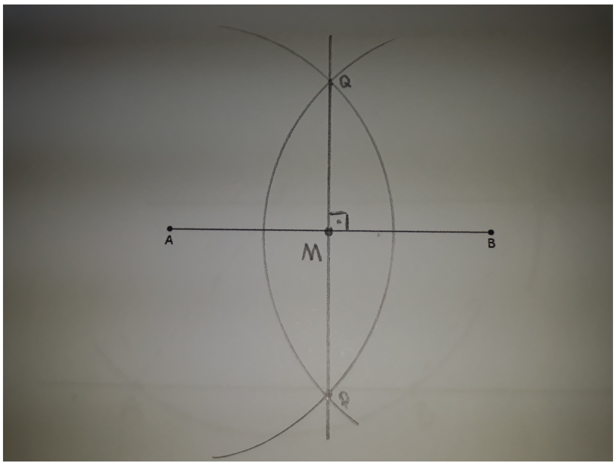
Nas competições envolvendo construções geométricas, feitas no minicurso, essa construção foi motivo de euforia entre os alunos, pois sentiram-se bastante motivados a fazer sempre melhor, com mais precisão. Para verificar qual dos grupos, separados para competição, seria campeão nessa atividade, foi medido a precisão da construção, para isto foi usado um transferidor.

6.3.5 Atividade proposta 10, 11, 12 e 13: Construção de perpendiculares e paralelas

A construção da mediatriz é uma das construções mais importante, porque ela é pré-requisito para diversas outras construções mais complexas. Sabe-se que a mediatriz é a reta perpendicular a um segmento de reta dado, passando por seu ponto médio. Dessa forma, ao construir a mediatriz de um segmento, encontramos o ponto médio desse segmento. Portanto a construção da Figura 6.11, contempla as atividades propostas 10 e 11.

Como a construção da mediatriz é uma construção pré-requisito, ela foi feita como

Figura 6.11: Construção feita pelo aluno 3: Ponto médio e mediatriz de um segmento de reta dado

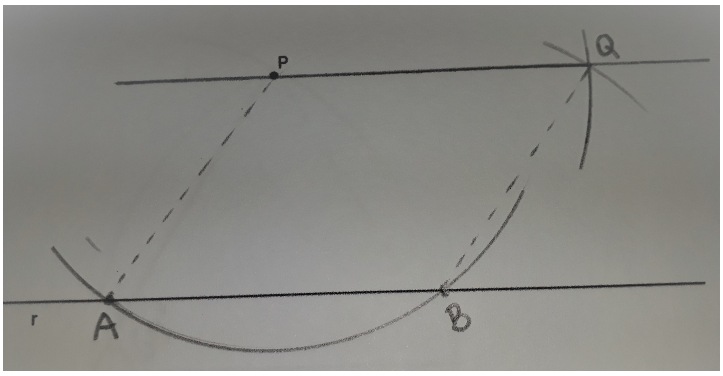


Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

tutorial para que os alunos reproduzissem de modo que tentassem fazer sozinhos a atividade 12 (Construção da reta que passa por P e é perpendicular a reta r) que, mesmo sendo similar, necessita de uma nova estratégia para sua execução. Grande parte dos alunos conseguiram concluir essa atividade sem a necessidade de novas orientações.

Outra construção muito importante, que também é pré-requisito para muitas outras, é a construção da reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto P dado. Primeiramente, isso foi proposto como desafio aos alunos, que não haviam visto anteriormente essa construção. Depois de algumas tentativas, foram passadas algumas orientações a eles conseguiram concluir, construindo um paralelogramo (Figura 6.12).

Figura 6.12: Construção feita pelo aluno 15: Reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto P dado

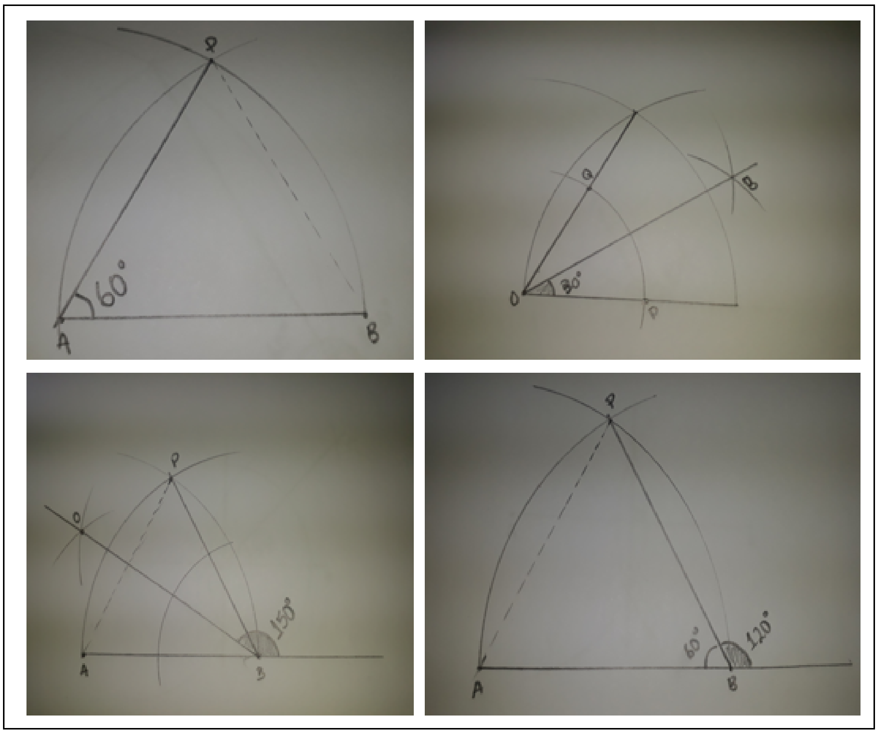


Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

6.3.6 Atividade propostas: Construção de ângulos usando apenas régua e compasso

As construções de ângulos foram aquelas em que os alunos foram mais independentes, traçando suas próprias estratégias e usando os conhecimentos das construções anteriores para realizarem as construções propostas. Pôde-se observar o fascínio dos alunos ao concluir uma das construções propostas, sobretudo, essas de ângulos que tiveram poucas dicas.

Figura 6.13: Construção feita pelo aluno 13: Construção de ângulos de 60°, 30°, 150° e 120°.



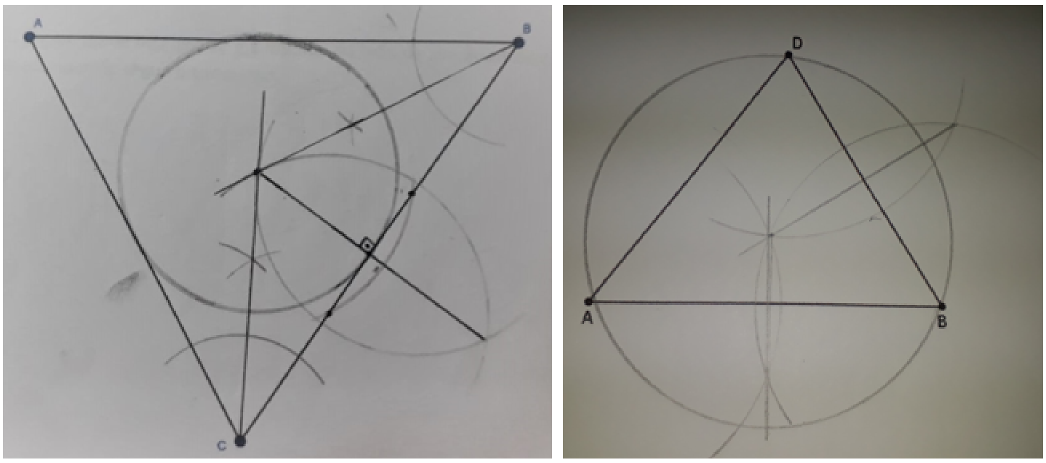
Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

Além dos ângulos da Figura 6.13, os alunos também construíram os ângulos de 90°, 45°, e135°.

6.3.7 Atividade propostas: Pontos notáveis em um triângulo qualquer

Essas foram as atividades mais complexas, que exigiram mais dos alunos. A proposta foi apresentada e dadas algumas dicas de como utilizar as construções assimiladas anteriormente para construir essas mais complexas. A primeira atividade proposta entre os pontos notáveis é a construção do incentro e do incírculo de um triângulo. nesse caso houve muitos erros, pois essa construção exige muita precisão,pois, caso contrário, o incírculo não tangencia os lados do triângulo. Entretanto, os alunos conseguiram concluir essa atividade proposta. Na Figura 6.14 pode-se observar a construção do aluno 2.

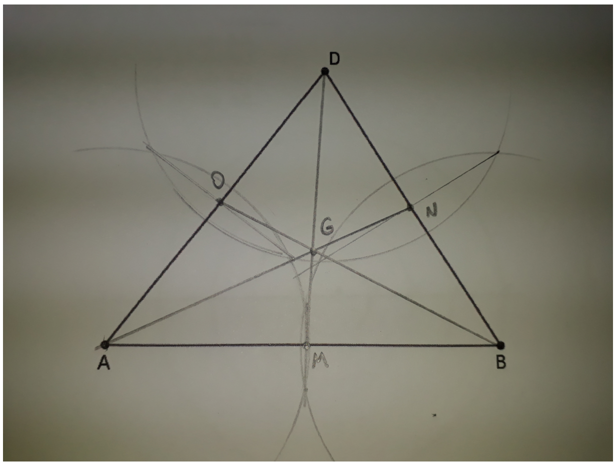
Figura 6.14: Construção feita pelo aluno 2: Construção do incírculo e circuncírculo de um triângulo



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

Também foi proposta a construção do baricentro do triângulo ABC. Essa construção exige apenas, como pré-requisito, que os alunos saibam que o baricentro é a interseção das medianas e que saibam encontrar essas medianas, usando, para isso, construções já estudadas em outras atividades anteriores. Nessa casso, especificamente, precisa-se encontrar os pontos médios.Para isso basta construir a mediatriz do segmento, pois a mesma passa por esse ponto médio, observe a Figura 6.15.

Figura 6.15: Construção feita pelo aluno 2: Construção do baricentro de um triângulo



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

6.4 Análise do questionário 2

Nesse questionário pôde-se observar a opinião dos alunos após a conclusão do minicurso. Quando questionados como classificariam a oficina de construção geométrica, 100% dos alunos consideraram que foi muito boa, mostrando assim, que mesmo com algumas dificuldades em algumas construções, os alunos gostaram muito de participar. A cada construção a satisfação do aluno era observada nitidamente pela satisfação com que os alunos comunicavam ter concluído a atividade proposta.

No segundo questionário, foi perguntado aos alunos o que mais lhe chamou a atenção no minicurso de construção geométrica, e as respostas foram diversas. Seguem algumas das respostas com alunos identificados enumeradamente, por motivo de privacidade.

"É bem diferente e bem mais legal do que uma aula normal." (Estudante 1)

"O que eu achei mais legal foi aprender a construir tudo na prática" (Estudante 2)

Na terceira pergunta, eles foram questionados se a prática de construções geométricas com régua e compasso, como recurso complementar as aulas tradicionais de matemática, tornaria o ensino de geometria mais atrativo e compreensível. Nesse questionamento pode-se observar que todos os alunos (100%) disseram que sim, aumentando consideravelmente a porcentagem do questionário inicial, feito antes do minicurso, onde os apenas 64% responderam "sim". Seguem algumas das respostas dos alunos:

"Sim porque nós aprendemos muito mais na prática do que somente na teoria." (Estudante 4)

"Sim, é bem mais legal porque além de ser explicado o assunto, também fazemos na prática, desse modo aprendemos melhor" (Estudante 7)

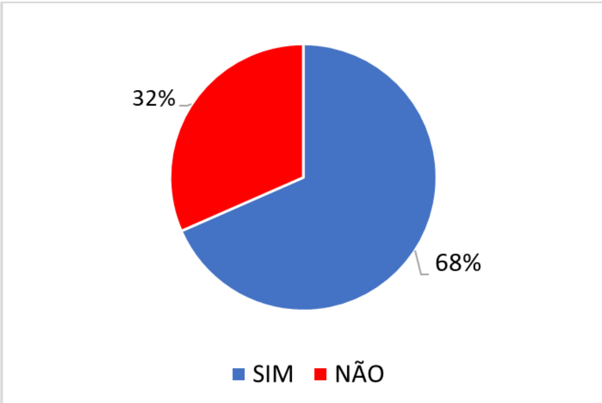
"Sim, porque nós interagimos mais com as construções geométricas e é bem legal construir." (Estudante 15)

As demais perguntas, da 4° até a 10°, foram bem diretas e conceituais, encontadas no apêndice B. Elas também foram feitas no questionário 1, para saber o quanto os alunos as conheciam após o minicurso. O que se pôde observar foi que eles tiveram, nessas perguntas, em média, 66% de acerto, o que equivale a um aumento considerável de acertos, mostrando que houve uma assimilação dos conteúdos propostos aos alunos.

6.5 Análise de questionário feito a professores de matemática da educação básica

Quando perguntados se tiveram a disciplina de desenho geométrico na graduação, 68% dos professores responderam que sim e 32% responderam que nao tiveram essa disciplina como mostra a Figura 6.16. Deste modo, podemos observar uma falha muito grande na formação dos professores, uma vez que as construções geométricas constam nos livros didáticos dos alunos como parte integrante de seu currículo.

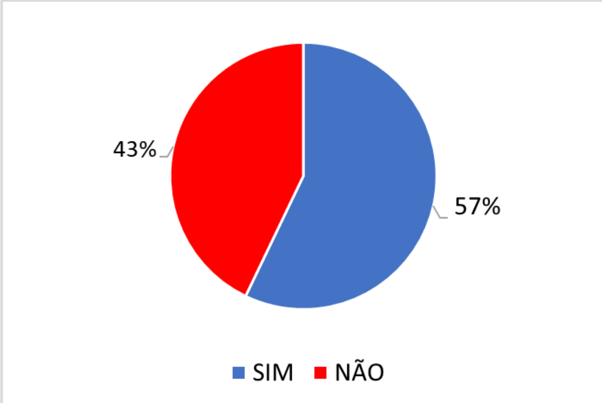
Figura 6.16: Docentes que tiveram a disciplina de desenho geométrico na graduação



Fonte: Criado pelo próprio autor

Dos professores que afirmaram que tiveram o curso de desenho geométrico, 57% deles afirmaram que o curso foi relevante para o prática docente e 43% deles afirmaram que não foi relevante como mostra a Figura 6.17. O que podemos observar é que do público total de professores, da educação básica, entrevistados, apenas 39% deles fizeram o curso de desenho geométrico e acharam relevante para aplicação em sala de aula. Mais uma vez notamos como essa parte da matemática é negligenciada na formação do professor, fato este que tem consequências que muitas vezes duram por toda a vida de trabalho do docente, uma vez que sem posse desses conhecimentos o mesmo não pode repassá-los a seus alunos.

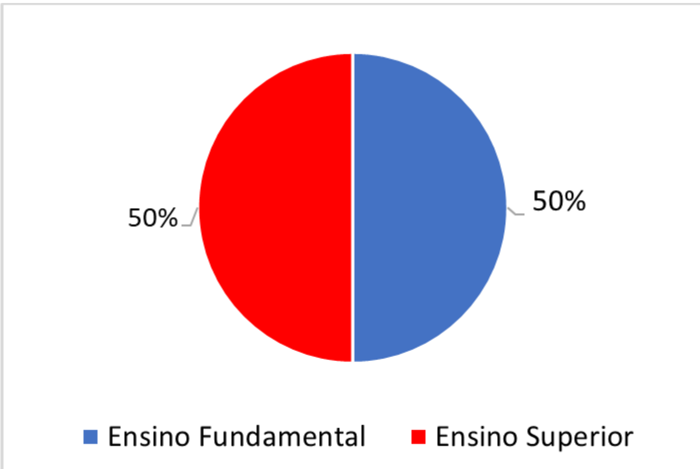
Figura 6.17: Docentes que tiveram a disciplina de desenho geométrico na graduação e acharam relevante para prática em sala de aula



Fonte: Criado pelo próprio autor

Quando perguntados quando ocorreu o primeiro contato com a prática de construções geométricas com régua e compasso, 50% dos professores responderam que havia sido no ensino fundamental e 50% deles afirmaram que o primeiro contato com as construções geométricas ocorreu apenas no ensino superior, como mostra o gráfico da Figura 6.18). Mais uma vez notamos uma defasagem na prática de construções geométrica nas escolas de educação básica, pois metade dos professores entrevistados só tiveram contato com essa prática no ensino superior.

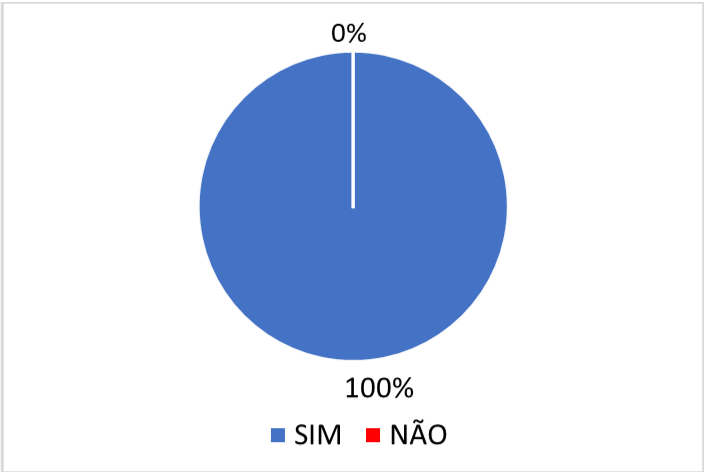
Figura 6.18: Primeiro contato dos docentes com a prática de construções geométricas com régua e compasso



Fonte: Criado pelo próprio autor

No questionário realizado com professores da educação básica, 100% dos docentes responderam que acreditam que as atividades práticas auxiliam, de forma significativa, no processo de ensino e aprendizagem de matemática, como mostra o gráfico da Figura 6.19. Esse resultado mostra que os professores acreditam que somente as aulas expositivas, não são suficientes para uma boa formação do educando.

Figura 6.19: Docentes que acreditam que as atividades práticas auxiliam, de forma significativa, no processo de ensino e aprendizagem de matemática?

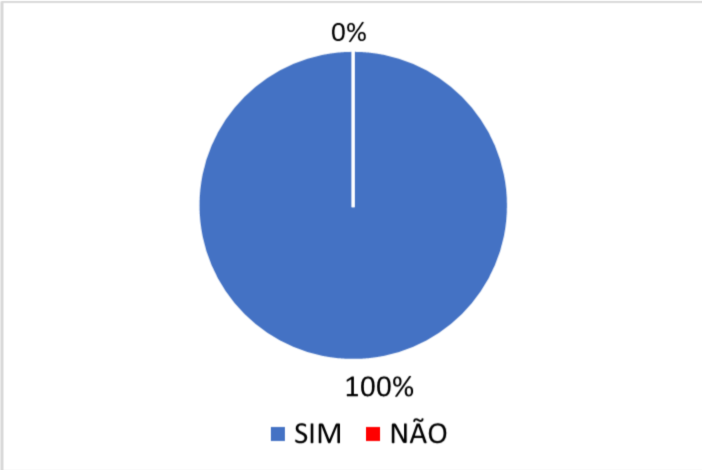


Fonte: Criado pelo próprio autor

Quando perguntados quantos acreditam que a prática de construções geométricas auxilia de forma significativa no processo de ensino-aprendizagem de matemática, 100% dos professores entrevistados afirmaram que sim, como mostra o gráfico da Figura 6.20. Como as construções geométrica com régua e compasso se configuram como uma atividade prática, esses 100% do gráfico da Figura 6.20, justificam o gráfico da Figura 6.19, onde 100% dos entrevistados afirmam que as atividades práticas são relevantes para o processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Figura 6.20: Docentes que acreditam que a prática de construções geométricas com régua e compasso é relevante na formação do educando, auxiliando de forma significativa o processo de ensino e aprendizagem de matemática

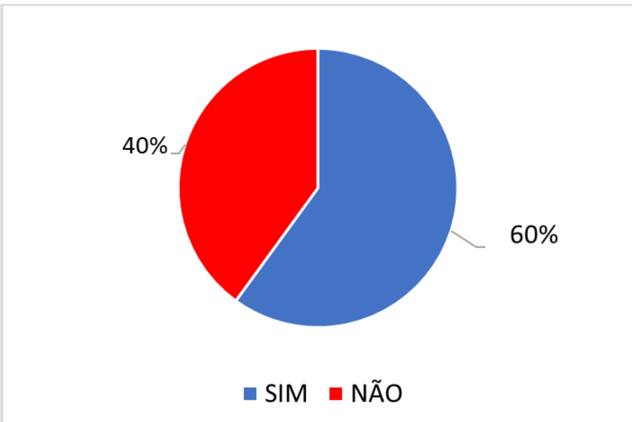
.



Fonte: Criado pelo próprio autor

Quando foi perguntados aos docentes entrevistados quantos já fizeram aulas práticas com uso de construções geométricas com régua e compasso, 60% afirmaram que sim e 40% afirmaram que nunca utilizaram dessa prática em sala de aula. Se confrontarmos os gráficos da Figura6.19, Figura 6.20 e Figura 6.21, nota-se uma enorme contradição, uma vez que 100% dos mesmos entrevistados afirmaram que o uso dessas construções são importantes assim como outros tipos de aulas práticas. A gráfico da Figura 6.22 pode ajudar a entender essa contradição.

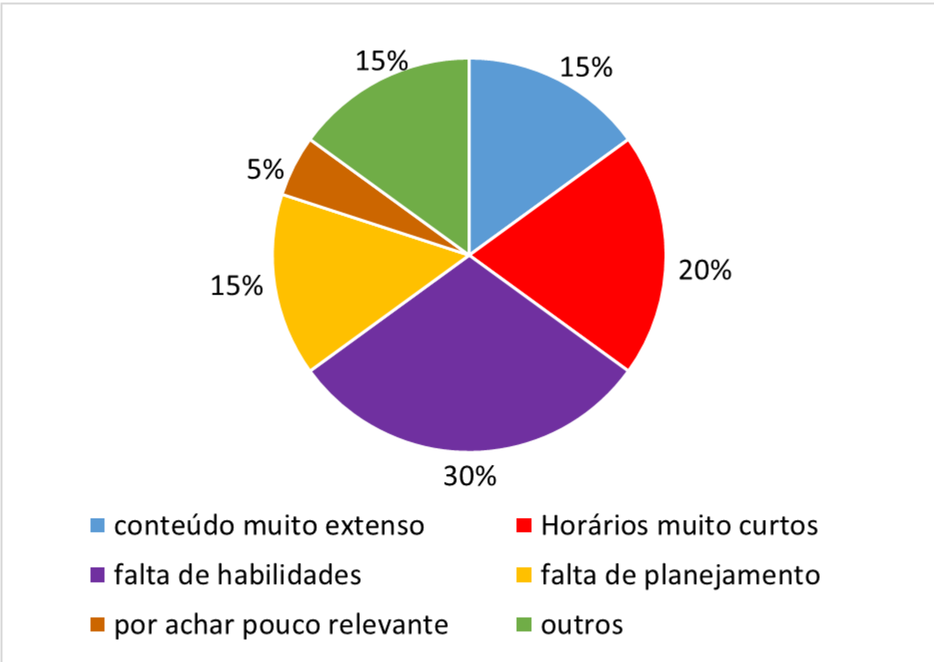
Figura 6.21: Docentes que já fizeram aulas práticas com uso de construções geométricas com régua e compasso.



Fonte: Criado pelo próprio autor

Quando foi perguntado por que muitas vezes o professor abre mão de atividades práticas, sabendo que os mesmos as acham relevantes, 5% responderam que acham pouco relevante, 15% disseram achar o conteúdo muito extenso, restando pouco tempo para aulas práticas, 15% deles acham que o motivo é a falta de planejamento do docente, 20% disseram que o motivo é o fato dos horários serem muito curtos, 15% tem outros motivos, não citados no questionário, e que 30% dos entrevistados, afirmaram que o motivo pelo qual muitos docentes não utilizam atividades práticas, como o exemplo das construções geométricas com régua e compasso, é a falta de habilidade do professor.

Figura 6.22: Causas que fazem os docentes optarem por não uzarem atividades práticas na sala de aula



Fonte: Criado pelo próprio autor

7 Considerações Finais

O processo de ensino-aprendizagem de matemática no Brasil não tem sido eficiente, haja vista os índices precários de medidores nacionais (Ideb), e internacionais (Pisa) de qualidade de ensino. Com notas baixas no medidor nacional e entre as últimas colocações no medidor internacional, ver-se claramente a necessidade de mudanças, não só em políticas educacionais, mas também no modo como tem sido ensinado os conteúdos de matemática.

A aprendizagem de matemática exige uma concatenação dos conteúdos apresentados com aqueles trabalhados anteriormente, sendo que grande parte dos alunos, não adquirem a proficiência desejada nos anos anteriores de estudo, fazendo com que a matemática se torne, muitas vezes, uma tarefa árdua, tanto para o aluno que não compreende a aula, como para o professor que não consegue transmitir aos alunos, as competências e habilidades previstas.

Diante disso, a pesquisa teve como objetivo relatar, através do minicurso, como as construções geométricas podem auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de geometria/Matemática, fazendo com que os educandos tenham uma melhor assimilação dos conteúdos propostos. Esse objetivo foi alcançado, uma vez que foi notado, através de questionários, uma melhor compreensão dos conceitos geométricos apresentados aos alunos que fizeram a prática dessas construções, com uso de régua e compasso. Essa melhora também é consequência de uma motivação a mais por parte dos alunos, pois segundo relatos deles,trabalhar na prática é mais atrativo.

Essa pesquisa foi feita com uma análise qualitativa de 20 alunos de 8º ano, de modo que eles foram submetidos a um minicurso, em forma de tutorial, de construções geométricas com duração de 12 h/a. Os alunos tiveram aulas sempre aliando teoria a prática dessas construções, onde foram lançados desafios para que eles, com seus conhecimentos, assimilados no minicurso previamente, traçassem seus próprios caminhos na construção geométrica proposta.

Além do minicurso, foram feitos alguns questionários que foram essenciais para essa pesquisa, dois deles voltados aos alunos, sendo um antes e um depois do minicurso, e um deles voltado aos professores. Com os questionários feitos aos alunos, foi observado uma evolução, tanto na parte cognitiva, como no nível de entusiasmo que eles tinham para participar das aulas. Na parte cognitiva, além de analisar que respondiam bastantes questionamentos em sala, bem mais que costumavam fazer em aulas somente expositivas, também passaram de 12% de acertos para 66% em conceitos elementares de geometria.

No questionário feito aos professores, notou-se uma grande defasagem na preparação deles, no que diz respeito ao tema dessa pesquisa, pois apenas 68% fizeram o curso na graduação, e desses 43% não acharam relevantes para o ensino em sala de aula.

No minicurso os alunos desenvolveram individualmente as construções propostas, fazendo várias tentativas com erros e acertos, podendo ser observado a interatividade e interesse dos mesmos ao fazer suas construções geométricas com uso da régua e do compasso. Dessa forma eles fixaram melhor alguns conceitos geométrico que possivelmente, sem esse recurso, só veriam na lousa.

Quando se fala em um determinado conceito geométrico, com aula somente expositiva, os alunos tem uma compreensão temporária e vaga, mas quando eles trabalham esse conceito com uma construção geométrica, usando as ferramentas aqui propostas, eles adquirem um conhecimento mais sólido e mais significativo, além de sentirem entusiasmo por usarem instrumentos palpáveis e por concluírem determinada construção.

A análise qualitativa tem sido cada vez mais usada entre os pesquisadores. Entretanto, aliando ao quantitativo, pode-se encontrar resultados ainda mais significativos. Desse modo esta pesquisa pode ser ainda mais eficaz, caso seja realizada uma análise estatística com dois grupos, usado em apenas um desses grupos, as construções geométricas com régua e compasso como ferramenta de ensino, aplicando os mesmos conteúdos em ambos, de modo que no final do curso, seja feito um questionário dos conteúdos abordados durante o período determinado da pesquisa. Para isto, pode-se fazer uma comparação de médias, usando alguns métodos estatísticos, afim de observar se a diferença dos dois métodos, foi ou não significativa do ponto de vista quantitativo.

Através dos questionários feitos aos alunos e da análise qualitativa durante o minicurso, pôde-se observar que o uso de construções geométricas com régua e compasso foi efetivo no processo de ensino-aprendizagem de geometria, uma vez que torna as aulas mais atrativas, fomentando nos educandos um sentimento de desafio, de querer resolver outros problemas com um nível maior de dificuldade e consequentemente, torna o conhecimento mais significativo.

Depois de observar a eficiência do uso de construções geométricas no minicurso (Apêndice D), e analisando os questionários feitos aos alunos e professores, viu-se a necessidade de que as construções geométricas com régua e compasso fossem contempladas no ensino fundamental, e não mais negligenciadas como vinha acontecendo muitas vezes. Para isso foi elaborado um curso de construções geométrica com régua e compasso, para os professores da rede pública, que lecionam no ensino fundamental de 6º ao 9º ano, da cidade onde ocorreu a pesquisa.

O curso proposto tem o objetivo não só de mostrar as construções geométricas e fazer a parte prática com os professores, mas também, mostrar a importância dessas construções para uma melhor assimilação de conceitos geométricos. Feito isso o professor estará habilitado para propor as construções do livro e até alguns desafios mais complexos, também estará ciente da importância dessa prática para a formação geométrica/matemática do aluno.

O objetivo do curso para os docentes é preencher as lacunas deixadas pela sua formação e levar mais uma ferramenta que irá ajudar para que haja uma melhor aprendizagem de conceitos geométricos, que muitas vezes é tratado simplesmente de maneira expositiva na lousa.

Analisando esta pesquisa, observou-se, que a prática de construção geométrica como ferramenta de ensino, é eficiente, tornando as aulas mais atrativas, motivadoras e significativas e consequentemente melhorando a aprendizagem dos alunos.

Referências

[1] BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Brasília, DF, 2002.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Curricular (BNCC).São Paulo,SP,2018.

[3] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. Matemática, uma breve história. 2.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

[4] FRONZA, MaurÍcio da Silva e BATISTA, João Peneireiro . **Geometria Plana e Desenho Geométrico**. Revisão bibliográfica — UFSM, Universidade Federal de Santa Maria, 2008.

[5] GERALDO GARBI, Gilberto. **A Rainha das Ciências.** 2.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

[6] LIMA NETO, Sergio. **Construções geométricas: Exercícios e soluções**. 1.ed. Rio de Janeiro:SBM, 2009.

[7] LORENZATO, Sérgio. **Para Aprender Matemática.** 3.ed. São Paulo: Autores associados, 2010.

[8] MLODINOW , Leonard. **A Janela de Euclides.** 4.ed. São Paulo: Geração Editorial, 2008.

[9] PUTNOKI, José Carlos. **Que se devolvam a Euclides a régua e o compasso.** Revista do Professor de Matemática, n. 13, p. 368 – 374, 2013.

[10] Sistema Ari de Sá: **Raio X ENEM.** Disponível em: $< https : //portalsas.com.br/br/raiox/dowload/raiox\_2017.pdf >$. Acesso: em 11 de novembro de 2018.

[11] G1 - o portal de notícias: **levantamento mostra o que mais cai na prova desde 2009.**Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/enem/2017/noticia/enem-levantamento-mostra-o-que-mais-cai-na-prova-desde-2009.ghtml. Acesso: em 11 de novembro de 2018.

[12] ALENTE, Wagner.**Há 150 anos uma querela sobre a geometria elementar no Brasil: algumas cenas dos bartidores.** Bolema, Rio Claro – SP, v. 12, n. 13, 1999.

[13] WAGNER, Eduardo. **Uma introdução as Construções geométricas.** 6.ed. Rio de Janeiro: OBMEP, 2015.

[14] ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. Dissertação (Mestrado) — UFMG, Faculdade de Educação, 2001.

Apêndices

Apêndice A - Questionário 1

Questionário 1

Prezado(a) estudante,

tendo em vista a realização de uma pesquisa de conclusão de mestrado que aborda o tema: "Construções geométricas com régua e compasso", solicito sua contribuição ao responder este questionário.

ACADÊMICO: Weslley Jonh Barros Silva

PROFESSORA ORIENTADORA: Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto 1. Você sente dificuldade na aprendizagem de conteúdos da Matemática?

[ ] Sim [ ] Não [ ] Parcialmente

2. Nas séries anteriores você já teve algum tipo de aula prática referente aos conteúdos de geometria?

[ ] Sim [ ] Não

3. Em algum momento da sua vida estudantil seu professor de matemática utilizou a régua e compasso na sala?

[ ] Sim [ ] Não

3.1 Se sua resposta ao item anterior foi positiva responda (caso contrário passe para o item 4).

Como foi o uso desses instrumentos de desenho geométrico na sua sala? O que você aprendeu a construir com eles?

___

___

___

4. Você acredita que o uso de construções geométricas pode ajudá-lo(a) a assimilar melhor alguns conteúdos de geometria?

[ ] Sim [ ] Não

Justifique: __________

5. O que é um ponto médio de um segmento de reta?

6. O que é uma bissetriz de um Ângulo?

7. O que é baricentro de um triângulo?

8. O que são retas paralelas?

9. O que é circuncentro de um triângulo?

10. O que é Incentro de um triângulo?

11. O que é uma mediatriz de um seguimento?

Apêndice B - Questionário 2

Questionário 2

Prezado(a) estudante

Tendo em vista a realização de uma pesquisa de conclusão de mestrado que aborda o tema: **Construções geométrica com régua e compasso**, solicito sua contribuicão ao responder este questionário.

ACADEMICO: Weslley Jonh Barros Silva
PROFESSORA ORIENTADORA: Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

1. Como você classificaria a oficina de Construção geométrica que você participou?

[ ] Muito boa [ ] Boa [ ] Regular [ ] Ruim

2. O que mais lhe chamou atenção ao participar do mini curso de construção geométrica? Você aprendeu algo novo?

____

____

____

____

3. Você acredita que a prática de construção geométrica como recurso complementar às aulas tradicionais de matemática tornaria o ensino de geometria mais atrativo/compreensível?

[ ] Sim [ ] Não

Justifique:____

4. O que é um ponto médio de um segmento de reta?

5. O que é uma bissetriz de um Ângulo?

6. O que é baricentro de um triângulo?

7. O que são retas paralelas?

8. O que é circuncentro de um triângulo?

9. O que é Incentro de um triângulo?

10. O que é uma mediatriz de um seguimento?

Apêndice C - Questionário 3

Questionário feito a professores da educação básica

1. Você teve a disciplina de desenho geométrico na graduação?

[ ] sim [ ] não

2. Se a resposta do item anterior for sim responda a pergunta abaixo, caso contrário pule para pergunta 3.Você acha que o curso de desenho geométrico da graduação foi significativo para que você pudesse exercer seu trabalho, na parte de geometria, abordando com eficiência essas construções?

[ ] sim [ ] não

3. Qual foi seu primeiro contato com construções geométricas com régua e compasso?

[ ] Ensino fundamental

[ ] Ensino médio

[ ]Ensino superior

4.Você acha que as atividades práticas auxiliam, de forma significativa, no processo de ensino e aprendizagem de matemática?

[ ] sim [ ] não

5. Você acha que a prática de construções geométricas podem auxiliar de forma significativa no processo de ensino e aprendizagem de matemática?

[ ] sim [ ] não

6. Enquanto professor, você já fez alguma aula pratica usando construções geométricas com régua e compasso?

[ ] sim [ ] não

7. Por que muitas vezes o professor abre mão de atividades práticas? [ ] conteúdo muito extenso

[ ] Horários muito curtos

[ ] falta de habilidades

[ ] falta de planejamento

[ ] por achar pouco relevante

[ ] outros motivos

Apêndice D - Atividades propostas aos alunos durante o mini-curso de construções geométricas

Atividades propostas aos alunos durante o minicurso de construções geométricas

PRIMEIRAS NOÇÕES DE CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICAS USANDO RÉGUA E COMPASSO

1.Usando régua e compasso, construa:

a) Uma circunferência de raio AB.

b) Uma circunferência de raio AC.

c) Uma circunferência de raio AD.

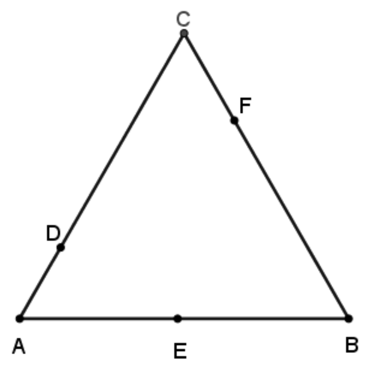
d) Uma circunferência de raio AE.

2. O bserve a figura abaixo e faça o que se pede:

a) Desenhe uma circunferência com centro em A passando por D.

b) Desenhe outra circunferência com centro em B passando por E.

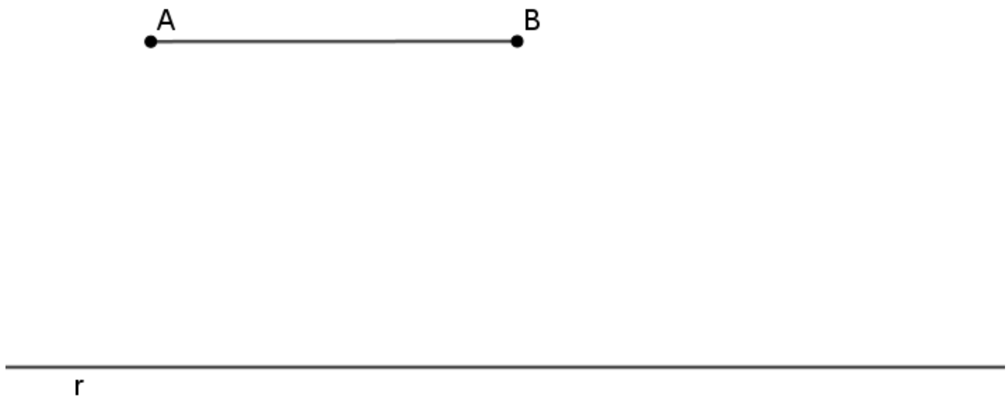
c) Desenhe uma terceira circunferência com centro em C e passando por F.



TRANSFERÊNCIA DE ÂNGULOS E SEGMENTOS

3. Transfira o ângulo α par a reta r.

4. Transfira o segmento AB par a reta r.

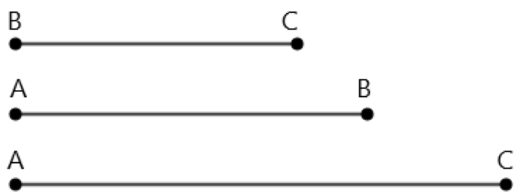


CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS USANDO APENAS RÉGUA E COMPASSO

5. Construa um triângulo equilátero de lado AB.

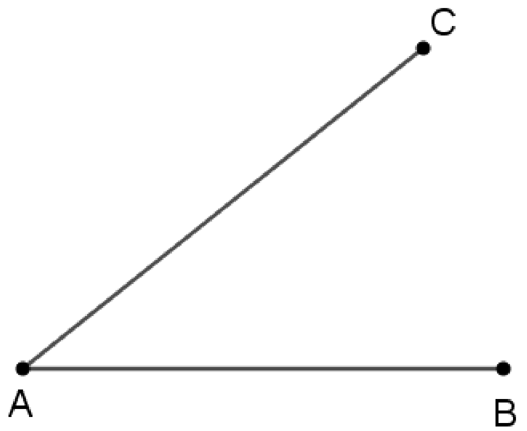
6. Construa um triângulo isósceles de lado AB.

7. Construa um triângulo com os lados medido respectivamente, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$.

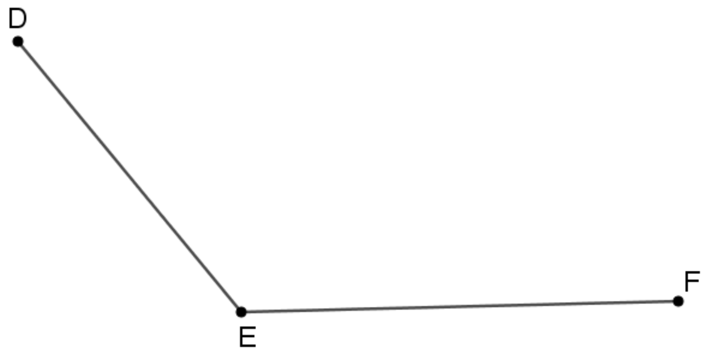


BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

8. Construa a bissetriz do ângulo BÂC abaixo, usando régua e compasso.



9. Construa a bissetriz do ângulo D$\hat{E}$F abaixo, usando régua e compasso.

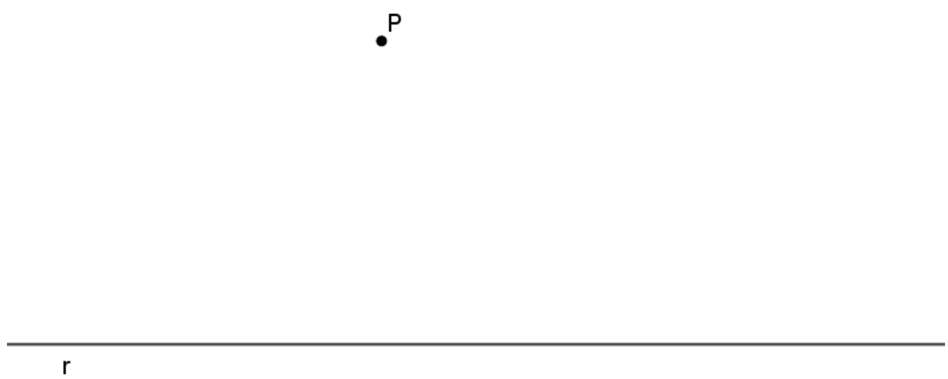


PARALELAS E PERPENDICULARES

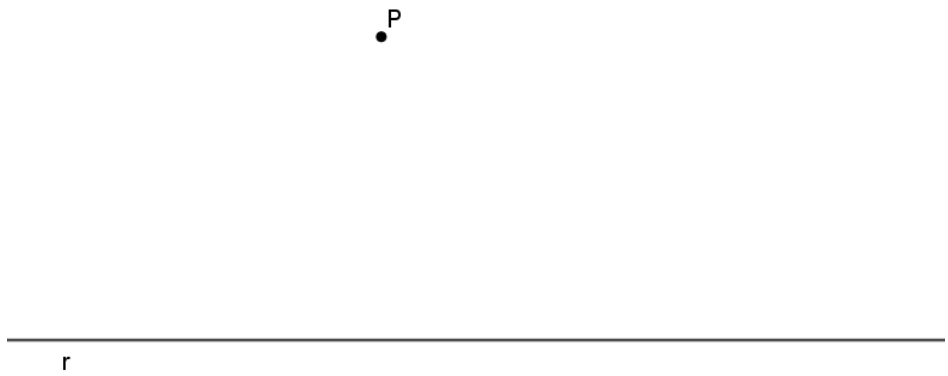
10. Encontre o Ponto médio do segmento de reta AB.

11. Construa a mediatriz do segmento AB usando régua e compasso.

12. Construa a reta que passa por P e é perpendicular a reta r.



13. Construa a reta paralela a reta r passando pelo ponto P.



CONSTRUÇÃO DE ÂNGULOS USANDO APENAS RÉGUA E COMPASSO

14. Construa o ângulo de 60°, usando apenas régua e compasso

15. Construa o ângulo de $30°$, usando apenas régua e compasso.

16. Construa o ângulo de $120°$, usando apenas régua e compasso.

17. Construa o ângulo de $150°$, usando apenas régua e compasso.

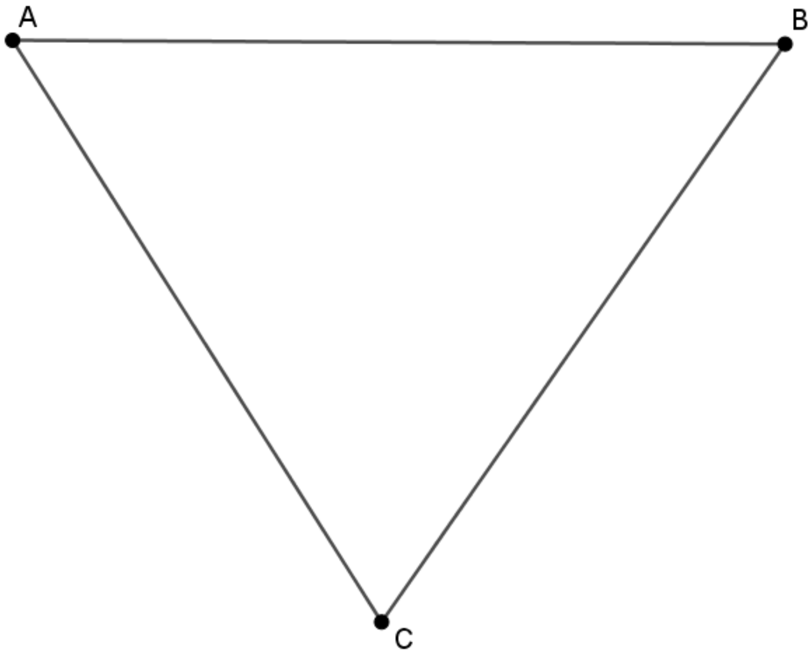
18. Construa o ângulo de $90°$, usando apenas régua e compasso.

19. Construa o ângulo de $45°$, usando apenas régua e compasso.

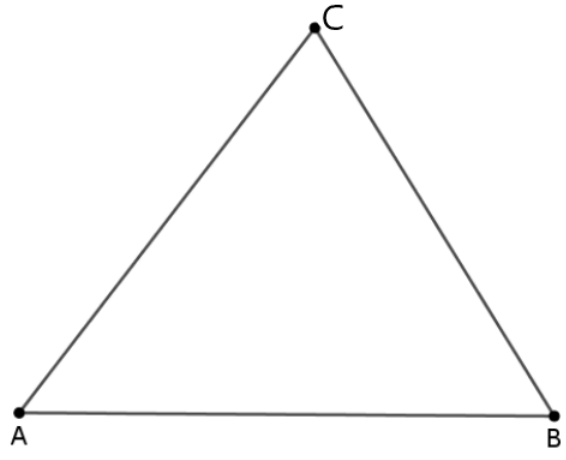
20. Construa o ângulo de $135°$, usando apenas régua e compasso.

PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO QUALQUER

21. Encontre o incentro do triângulo ABC e trace o incírculo.



22. Encontre o circuncentro do triângulo ABC e trace o circuncírculo.



23. Encontre o baricentro do triângulo ABC .