UNIVERSIDADE FEDERAL DO SEMI-ÁRIDO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RAVENIA ADAIL SILVA VIEIRA LIMA

FINANCIAMENTOS IMOBILIÁRIOS E MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

MOSSORÓ - RN

2019

RAVENIA ADAIL SILVA VIEIRA LIMA

FINANCIAMENTOS IMOBILIÁRIOS E MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Odacir Almeida Neves

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001"

MOSSORÓ – RN

2019

L732f Lima, Ravenia Adail Silva Vieira.
FINANCIAMENTOS IMOBILIÁRIOS E MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO / Ravenia Adail Silva Vieira Lima. - 2019.
70 f. : il.

Orientador: Odacir Almeida Neves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2019.

1. Ensino. 2. Aprendizagem. 3. Matemática Financeira. 4. Educação Financeira. I. Neves, Odacir Almeida, orient. II. Título.

RAVENIA ADAIL SILVA VIEIRA LIMA

FINANCIAMENTOS IMOBILIÁRIOS E MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 26 / 04 / 2019

BANCA EXAMINADORA

Dr. Odacir Almeida Neves – UFERSA
Presidente

FRCDAraújo

Dra. Fabiane Regina da Cunha Dantas Araújo – UFERSA
Membro interno

Dr. Marcelo Bezerra de Moraes – UERN
Membro externo

MOSSORÓ/RN, 2019

Dedico esse trabalho a minha família pelo carinho e compreensão em todos os momentos de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, vigilante zeloso, por ter olhado por nós nestes anos, em cada traiçoeira curva dos Inconfidentes.

A meus pais José Adail e Jucilene e minhas tias Maria do Socorro e Olga por terem acreditado na educação como elemento essencial para a minha vida e sempre buscaram me guiar neste caminho.

Aos irmãos Adail e Rayanne, que assim como todos os irmãos divergimos ás vezes, mas são companheiros, conselheiros e incentivadores em todos os momentos.

Aos meus colegas da UFERSA, João Neto, Cleiton, Elias, Luiz Carlos, Lennon, Aurenildo, Roberto, Laudelino, Janio, Laécio, Evanilson e em especial ao Lucas e Jorge Michel, minha equipe Vale do Jaguaribe e companheiros de viagem, pelo companheirismo e amizade ao longo do curso.

A todos os funcionários e professores que fazem parte da E.E.M. Lauro Rebouças de Oliveira pela força e apoio diário nesse período.

Ao meu orientador, professor Odacir pela disponibilidade, pela paciência e pelos ensinamentos, por tornar essa pesquisa real.

Não quisemos dar uma “receita” de
modelagem, mas simplesmente despertar
o interesse em aplicar este método para
ensinar e, mais que isto, ensinar-
aprendendo.

BASSANEZI & BIEMBENGUT (2002)

RESUMO

A Matemática Financeira é um ramo da matemática que se desenvolveu muito nas últimas décadas por conta do aumento do consumo da população e os seus conteúdos que são importantes na promoção da cidadania e do entendimento do mundo econômico e financeiro. Porém, nas escolas, muitas vezes os conteúdos da Matemática Financeira não são abordados ou enfatizam apenas fórmulas prontas, utilizando dados sem contextualização que pouco atraem os alunos e não proporcionam desenvolver as habilidades básicas da Educação Financeira. Assim, este trabalho tem como objetivo propor a utilização da modelagem matemática no ensino da matemática, voltada para alunos do Ensino Médio, apresentando uma proposta de ensino de Matemática Financeira que utiliza Financiamentos Imobiliários. Essa investigação é voltada para produção de uma proposta de atividade didática, por isso optou-se por uma pesquisa bibliográfica. Acredita-se que a modelagem matemática aliada aos financiamentos auxiliei no processo de ensino e aprendizagem, possibilitando aos alunos trabalhar com aplicações de conteúdos matemáticos e simultaneamente aprimorar as capacidades de pesquisa, senso de equipe, além de contribuir para o desenvolvimento da reflexão, da discussão e da crítica.

Palavras-chave: Ensino; Aprendizagem; Matemática Financeira; Educação Financeira.

ABSTRACT

Financial Mathematics is a branch of mathematics that has developed a lot in recent decades due to the increase in population consumption and its contents that are important in promoting citizenship and understanding of the economic and financial world. However, in schools, Financial Mathematics content is often not addressed or only emphasizes ready-made formulas, using non-contextual data that does not attract students and does not provide the basic skills of Financial Education. Thus, this paper aims to propose the use of mathematical modeling in mathematics teaching, aimed at high school students, presenting a proposal of teaching of Financial Mathematics that uses Real Estate Financing. This research is focused on the production of a didactic activity proposal, so we opted for a bibliographic research. It is believed that mathematical modeling combined with funding helped the teaching and learning process, allowing students to work with applications of mathematical content and simultaneously improve research skills, team sense, and contribute to the development of reflection, discussion and criticism.

Keywords: Teaching; Learning; Financial math; Financial education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática Financeira é um ramo da matemática que se dedica ao estudo do desenvolvimento e uso do dinheiro no decorrer do tempo. Sua evolução está muito relacionada ao conceito e ao significado de comércio. Duarte (1987) diz sobre a Matemática Financeira, que nós devemos ter um olhar mais cuidadoso, devido a sua presença no cotidiano como, por exemplo, ao calcular as prestações de um financiamento de um bem a ser adquirido, optando-se pelo pagamento à vista ou parcelado, por exemplo, faz-se necessário o uso de cálculos matemáticos.

É notório que, mesmo sem fazer todas as contas, na compra financiada, o valor total desembolsado é maior, em relação ao preço à vista. Para uma grande parcela da população, no entanto, a compra financiada é a única opção. Muitas pessoas desejam ou precisam comprar um imóvel e, então, o financiamento imobiliário surge como uma opção para aquele grupo que não tem como pagar à vista.

Há muitas discussões a respeito do assunto, algumas pessoas apontam que as taxas de juros nos financiamentos são muito elevadas, sendo melhor economizar para comprar à vista e continuarem pagando aluguel até conseguirem ter todo dinheiro; outras acham melhor realizar um financiamento do que pagar aluguel, pois o dinheiro gasto em aluguéis não tem retorno. Não existe uma saída que seja ideal para todas as pessoas.

Muitas dúvidas aparecem quando se pretende fazer um financiamento, pois envolve o valor do imóvel que se deseja adquirir, o número de parcelas e a taxa de juros do financiamento entre outros aspectos. Além disso, há diferentes tipos de sistemas de financiamentos e diferentes tipos de sistemas de amortizações. Assim, é grande o número de pessoas que ficam em dúvida se o valor das prestações está correto, e essa dúvida é solucionada quando é realizada uma análise que leve em conta todos os fatores que envolve um financiamento. A realização de todos esses cálculos envolve vários conhecimentos da área de Matemática Financeira.

Embora seja um assunto importante para o estudante, muitas vezes os conteúdos não são tratados de forma profunda e significativa, ficando na superficialidade. Ao ensinar Matemática Financeira deve-se considerar as situações envolvidas, que podem ser, entre outros assuntos, consumo, trabalho e operações bancárias.

Afim de que os alunos consigam aprender Matemática Financeira para terem uma postura mais crítica sobre as ofertas e promoções diárias, é preciso ir além do ensino de conceitos e fórmulas, sendo fundamental que o professor crie um ambiente no qual o ensino seja contextualizado e promova reflexões.

Essa proposta foi construída para o ensino e aprendizagem dos sistemas de amortização mais usados em financiamentos imobiliários no Brasil, devido às dificuldades citadas anteriormente.

Considerando a importância da Matemática Financeira no desenvolvimento social e pessoal dos alunos e levando em consideração o atual cenário do ensino de Matemática Financeira, acredita se na importância de investigar alternativas para colocar o aluno frente a esses problemas, para que aprendam a discuti-los de forma crítica, buscando meios para solucioná-los.

Dentre as tendências metodológicas de ensino de matemática temos a resolução de problemas, o uso de jogos, a história da matemática, as novas tecnologias de informação e comunicação, a modelagem matemática e a etnomatemática. A modelagem surge como uma alternativa para o processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo, pois, através da construção de modelos, os alunos têm a possibilidade de participar mais, pesquisando sobre o tema, analisando dados e finalizando na elaboração do modelo. Oferece ao aluno condições e oportunidades de interagir com o mundo à sua volta, visando à união das questões discutidas em sala de aula com o mundo real.

O objetivo geral desse trabalho é apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem que alia Modelagem Matemática e Financiamentos Imobiliários para ensinar os sistemas de amortização SAC e PRICE, e como objetivos específicos, elaborar uma sequência didática de atividades para ensinar conceitos de matemática financeira relacionados aos sistemas de amortização e propor o uso dos softwares Microsoft Excel e GeoGebra para o ensino de matemática financeira.

Esta pesquisa se concentra em investigar como a Modelagem Matemática pode contribuir no ambiente de aprendizagem, para os processos de ensino e aprendizagem de matemática financeira no ensino médio. Sendo uma investigação voltada para produção de uma proposta de atividade didática, por isso optou-se por uma pesquisa bibliográfica para reunir as informações e dados que servirão de base para a construção dessa proposta.

Considerados os objetivos citados, que são o foco de interesse da pesquisa, o presente trabalho está estruturado em três capítulos, além da introdução, considerações finais e da lista de referências.

No primeiro Capítulo, descreveremos o desenvolvimento da matemática financeira e uma breve abordagem da educação financeira no Brasil. No segundo Capítulo, abordamos as orientações dos documentos oficiais da educação para a ensino de Matemática Financeira, o caminho de desenvolvimento da Modelagem Matemática, considerações sobre seus principais aspectos e possibilidades de estratégia de ensino-aprendizagem da Matemática e particularmente da Matemática Financeira. Já no terceiro Capítulo, as atividades propostas serão descritas, bem como as sugestões de estratégias para serem utilizados com os alunos e de intervenções do professor no decorrer do processo investigativo.

Finalmente, esboçamos as considerações finais da pesquisa, relatando as possibilidades de alcance dos objetivos propostos, finalizando dessa forma os estudos da proposta apresentada.

2 MATEMÁTICA FINANCEIRA E CENÁRIO ATUAL BRASILEIRO

2.1 – O desenvolvimento da Matemática Financeira

A Matemática Financeira vem ganhando mais espaços em estudos, devido à sua importância nas diversas áreas da sociedade, pois está presente desde o mais simples pagamento, vendas do comércio, até os grandes investimentos nos mercados financeiros. Entretanto, nem sempre foi assim, a história apresenta um desenvolvimento de fatos variados e de importâncias significativas.

De acordo com Rosetti e Schimiguel (2009), os primeiros agrupamentos humanos, de modo geral eram nômades, viviam da exploração da natureza e sua alimentação era obtida pela pesca, caça e coleta de frutos. Esses grupos não possuíam moeda. Com a expansão das civilizações, as pessoas começaram a se relacionar e se comunicar, começou as primeiras trocas de mercadorias, oriundas da produção em excedentes de cada um, não havia lucro ou estipulação de valores, as mercadorias eram destinadas a suprir as necessidades básicas dentre os grupos.

Como coloca D'Ambrósio e D'Ambrósio,

> No princípio, o homem produzia para seu consumo. Com o progresso e multiplicando-se suas necessidades, para satisfazê-las, viu-se ele na contingência de fazer circular sua produção. Viu-se na necessidade de trocar o que lhe sobrava pelo que lhe faltava. E, assim, começa o comércio, primitivamente muito complicado. Consistia, pura e simplesmente, na troca de mercadorias. (D'AMBRÓSIO; D'AMBRÓSIO, 1972, p. 85)

Essas trocas de mercadorias, principalmente matérias primas e objeto de grande necessidade, realizada de forma direta, sem moedas e sem equivalências de valores, é chamada de escambo e corresponde à primeira manifestação comercial. Depois, como desenvolvimento do artesanato, da cultura e o crescimento do contato social entre os grupos, essa forma de comércio aparentemente simples e eficiente tornou-se ineficaz, pois alguns produtos se tornaram mais solicitados que os demais.

Então, foi criado um sistema de equivalência de valor usando as mercadorias que apresentavam um maior grau de aceitação, pela sua utilidade e por facilitar as trocas, e servindo para avaliar o valor dos outros bens a partir dela, ou seja, assumiram a finalidade de moeda. Segundo Ifrah (1997, p. 146),

> A primeira unidade de escambo admitida na Grécia pré-helênica foi o boi. No século VII a. C., na Ilíada de Homero (XXIII, 705, 749-751 e VI, 236) [...] , a armadura em bronze de Glauco em 9 bois e a de Diomedes (que era de ouro) em 100 bois; ademais, numa lista de recompensas, vem suceder-se na ordem dos valores decrescentes, uma copa de prata cinzelada, um boi e um meio talento de ouro.

O gado era útil no transporte e na prestação de serviços. No Império Romano, o sal exerceu este papel, pois, além da dificuldade em consegui-lo, servia para conservar alimentos. Outras culturas possuíam “moedas mercadorias” distintas, os Astecas usavam o chocolate e os Egípcios utilizavam o pão. O tipo de moeda mercadoria e como eram feitas as trocas decorriam não somente dos costumes sociais, mas também do nível de evolução política e econômica de cada povo.

Essas trocas, às vezes, não beneficiavam ambas as partes, por exemplo, um agricultor podia não necessitar de instrumentos, mas o fabricante dos instrumentos carecia de alimentos para sua sobrevivência e era feito o comércio. Desse modo, o escambo possuía limites dentro do contexto social.

Quando o homem passa a dominar e aperfeiçoar o processo de fundição de metais, além de identificar metais nobres para utilizá-los na fabricação de seus utensílios e armas. Surge então as primeiras moedas, que são peças de metal pequenas, com a marca oficial de uma autoridade pública que certificava o seu peso e valor, um exemplo disso foi o rosto de Alexandre - o grande, gravado nas moedas.

Segundo o historiador grego Heródoto, foi Creso, rei da Lídia (atual Turquia), quem cunhou as primeiras moedas, entre 640 e 630 a.C. Inicialmente as moedas eram cunhadas em ouro e prata, pois, além de seu valor e raridade, tinham os costumes e crenças religiosos. Um exemplo disso são os sacerdotes babilônicos que acreditavam na ligação do sol com o ouro e da lua com a prata. Somente no final do século XIX, quando novas ligas metálicas foram descobertas e empregadas na fabricação de moedas, foi que elas passaram a circular pelo seu valor extrínseco, ou seja, valor gravado em sua face, independentemente do metal nela contido.

A invenção e utilização da moeda por suas várias vantagens, possibilitou o dinamismo do comércio, pois liberou os comerciantes e mercadores dos entraves do escambo. Além disso, esse processo foi favorável ao acúmulo de dinheiro e a cobrança de impostos, já que era complicado fazer quando a moeda mercadoria eram bois, temperos, cereais.

Depois, com a invenção da imprensa, surge o papel-moeda, assim, os governos passaram a fazer a emissão de moeda em papel que divide o padrão com as moedas cunhadas. Atualmente, com o advento dos computadores e da informatização, o conceito de dinheiro vem obtendo mais expansão, com os cartões de crédito e débito.

No Brasil, os primeiros anos de exploração dos recursos naturais se deum utilizado o escambo. Os colonizadores ofereciam aos indígenas artigos de pouco valor comercial em trocas de informações importantes, serviços e pedras preciosas.

Isso durou muito tempo, até que o governador do Rio de Janeiro, Constantino Menelau, adotou, em 1614, o açúcar como moeda mercadoria: uma arroba (quinze quilogramas) de açúcar correspondiam a mil réis portugueses, que era a moeda de Portugal que circulava no Brasil. De acordo com a lei, comerciantes eram obrigados a aceitar o produto para pagar compras. O fumo e o algodão também eram bastante utilizados e juntamente com os réis portugueses, constituíram o sistema monetário no brasileiro.

Quando os holandeses ocuparam o nordeste brasileiro, ocorre a cunhagem das primeiras moedas em território brasileiro, chamadas de obsidionais, eram confeccionadas em ouro ou prata, com o formato quadrangular, foram feitas nos anos de 1645, 1646 e 1654 e tinham o valor de III, VI e XII florins, que foi a moeda criada pelas províncias holandesas. Possuíam de um lado seu valor em algarismos romanos e o símbolo da Companhia das Índias Ocidentais (GWC) e do outro, as palavras “ANNO”, “BRASIL” e um dos três anos de cunhagem já mencionados.

Figura 01 – Obsidionais

Fonte: Rosetti e Schimiguel (2009)

Com a criação da Casa da Moeda em Salvador (1694), ocorre a criação da primeira moeda oficial brasileira e assim o primeiro Sistema Monetário Brasileiro, o real, no plural réis, que é diferente da atual moeda utilizada no país, também eram cunhadas em prata e ouro, e foram produzidas moedas nos valores de 1.000, 2.000 e 4.000 réis, em ouro e de 20, 40, 80, 160, 320 e 640 réis, em prata. Essas moedas foram conhecidas como “série das patacas”, pois foram as que por mais tempo circularam no Brasil.

Figura 02 – Moeda de 1000 réis.

Fonte: Rosetti e Schimiguel (2009)

Com o passar do tempo as pessoas tiveram a vontade de guardar o excedente de suas moedas de ouro e prata, então, surgiram os Bancos e nesses eram emitidos recibos, chamados de papel moeda ou notas de banco, onde descreviam as quantias que ficavam guardadas.

Figura 03 – Notas do Banco do Brasil.

Fonte: Rosetti e Schimiguel (2009)

Com o passar do tempo, as moedas começaram a serem falsificadas, no lugar de ouro e prata, elas eram feitas com metais de valor mais baixo. Com isso, o governo decidiu substituir as moedas por cédulas e tirar de circulação todas as moedas verdadeiras e falsas.

Figura 04 – Primeira cédula brasileira.

Fonte: Rosetti e Schimiguel (2009)

Porém, alguns bancos com autorização do governo provisório republicano, emitiram mais cédulas do que a quantidade de ouro e prata que existia nos cofres, o chamado dinheiro sem lastro. O ouro guardado servia de lastro para o dinheiro circulante no país. Era uma espécie de garantia para o valor do dinheiro em circulação, qualquer problema, havia a garantia de ser trocado pelo ouro. Isso deflagrou no país um descontrole financeiro, o que fez o Tesouro Nacional passar a centralizar o serviço de emissão de cédulas, no lugar dos bancos.

Quando aconteceu o aumento do dinheiro sem lastro e do crédito, sem o aumento da riqueza do país, ocorreu o surgimento da inflação, que só foi percebido após alguns meses com o crescimento ininterrompido dos preços. Somente no governo de Getúlio Vargas acontece a primeira troca de moeda no Brasil, passando a ser o chamado Cruzeiro, em 1942. Mil réis passam a valer 1 cruzeiro. É aí que surge também o centavo.

Figura 05 – Nota de 1 cruzeiro

Fonte: Rosetti e Schimiguel (2009)

Uma nova mudança ocorre no Governo José Sarney, quando a inflação alcançava 200% ao ano, levando à, em 1986, implantação do cruzado. Mil cruzeiros valiam 1 cruzado. O descontrole financeiro na época continuou, e ainda no mesmo governo, em 1989, ocorre uma nova troca, o cruzado perde três zeros e vira cruzado novo.

Figura 06 – Nota de 1.000 cruzados

Fonte: Rosetti e Schimiguel (2009)

Figura 07 – Nota de 500 cruzados novos

Fonte: Rosetti e Schimiguel (2009)

O cruzado novo volta a se chamar cruzeiro, pela terceira vez, no governo de Fernando Collor de Mello, em 1990. O governo anterior deixa o país com um grande problema de inflação, mas o novo presidente mantém a moeda com o valor de seu antecessor. Para tentar conter os problemas econômicos, ele adota muitas medidas impopulares através dos planos Collor I e II que determinavam um forte ajuste fiscal.

Figura 08 – Cédula de 10 mil cruzeiros

Fonte: Rosetti e Schimiguel (2009)

Com o país ainda em grave crise e com denúncias de corrupção, o presidente Collor sofre o primeiro impeachment de um Presidente da República do Brasil. O vice-presidente Itamar Franco assume a presidência do país com a maior inflação registrada na história brasileira. Em 1993, foi estabelecida uma nova moeda, o cruzeiro real (CR$) para substituir o cruzeiro. Também houve a divisão por 1000 e teve duração de apenas 11 meses, o período mais curto de uma moeda na história do Brasil.

Figura 09 – Cédula de 10 mil cruzeiros reais

Fonte: Rosetti e Schimiguel (2009)

No ano de 1994 ocorreu a última mudança de moeda até o momento, ainda no governo de Itamar, foi criada uma moeda para definitivamente frear a hiperinflação, entra em vigor a URV (Unidade Real de Valor), equivalendo a 2750 cruzeiros reais, passa a valer 1 real. Além disso, ela foi associada ao dólar, por essa ser valorizada. Essa moeda conseguiu instituir a estabilidade monetária e manter a inflação sob controle.

Figura 10 – Cédula de um real

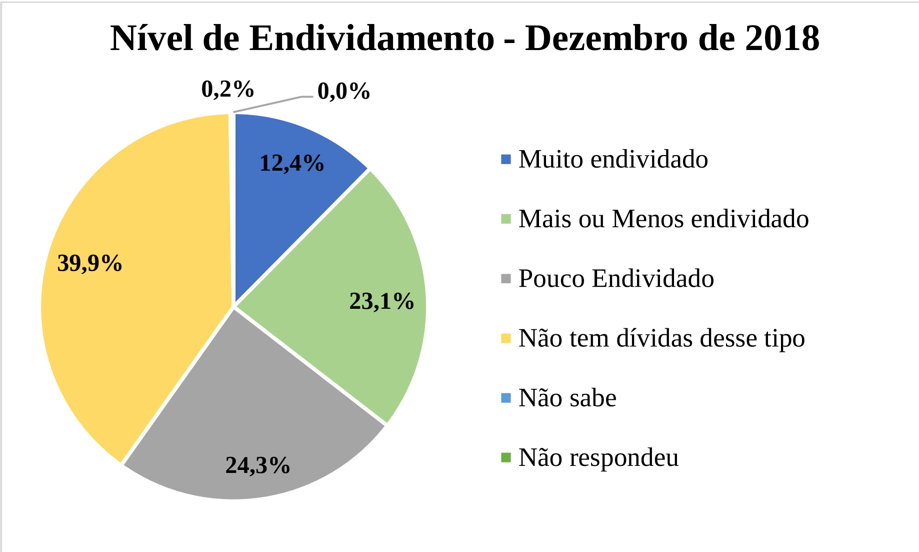
Fonte: Rosetti e Schimiguel (2009)

2.2- Analfabetismo Financeiro Brasileiro & Educação Financeira

Com a diminuição da inflação e o desenvolvimento da globalização e o neoliberalismo, a população brasileira vive um momento de intenso consumismo, influenciado principalmente com as ofertas de produtos e serviços em variadas propagandas veiculadas pelos meios de comunicação em massa e a facilidade de crédito nas instituições financeiras. O consumidor encontra várias formas para a aquisição de um bem, tais como parcelamentos, promoções, aumento da carência para começar a pagar e outras facilidades encontradas para atrair os clientes. Isso aquece a economia do país, aumentando os postos de trabalho e a fonte de renda dos empreendedores. Porém, os índices de endividamento e inadimplência estão aumentando.

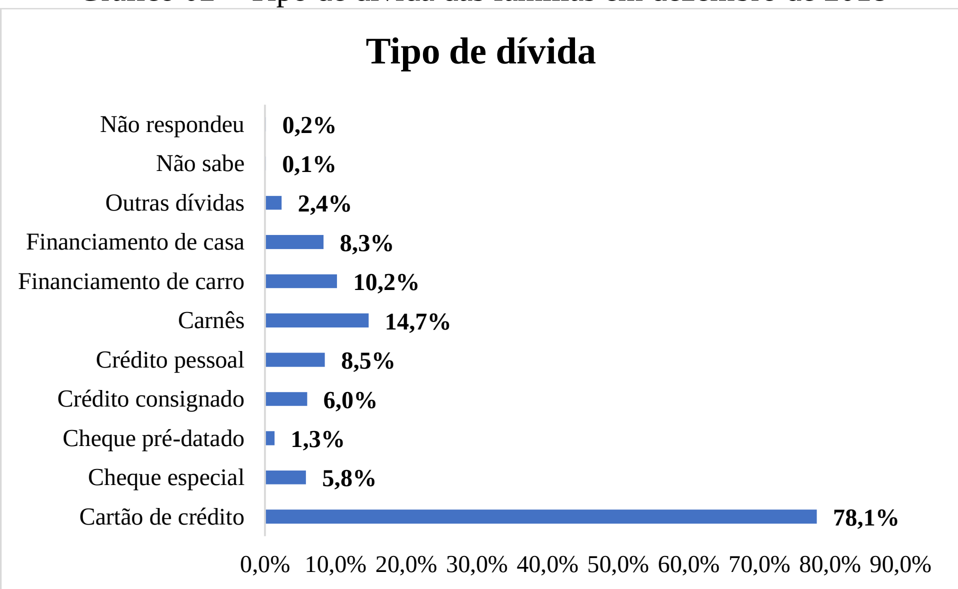
Segundo o levantamento da Confederação Nacional do Comércio (CNC), o percentual de famílias brasileiras com dívidas fechou 2018 em 59,8%, ou seja, praticamente seis em cada dez famílias tem algum tipo de dívida.

Gráfico 01 – Nível de endividamento das famílias em dezembro de 2018



Fonte: Confederação Nacional do Comércio

Gráfico 02 – Tipo de dívida das famílias em dezembro de 2018



Fonte: Confederação Nacional do Comércio

Esses números são preocupantes e apontam para o despreparo das famílias na administração de seus recursos. Uma das causas apontadas foram as mudanças de moeda que ocorreram no país, no período de 1942 a 1994, num total de oito trocas de moedas. Essa fragilidade econômica longa pode ter gerado a falta de planejamento financeiro dos brasileiros. Pois, segundo Cássia D'Aquino (2008, p. 9), "Numa economia sufocada pela inflação, qualquer tentativa de planejamento financeiro tinha resultados frágeis e desanimadores".

A população sem conhecimento, analfabetos financeiros, se torna vulnerável as armadilhas do mercado de consumo provenientes da publicidade. De acordo, com D'Aquino:

> A publicidade pode educar e informar o consumidor sobre os produtos que anuncia, mas também pode influenciar o consumo de produtos que não queremos ou precisamos realmente. Além disso, ela pode ser desonesta e anunciar vantagens inexistentes de um produto. (D'AQUINO, 2008, p. 116).

Assim, o comércio com muitas novidades e atrativos consegue envolver os clientes a fim de vender algum produto. Apesar de todas essas informações, o maior problema é dar crédito para pessoas que não sabem como usá-lo conscientemente. Antes dessas facilidades de crédito, deveria ter ocorrido a educação financeira nas escolas e consequentemente nas famílias.

Este cenário atual já foi alertado pelo professor Augusto César Morgado (2002), citado em Marchioni e Soares (2013, p. 2)

> Matemática Financeira é um assunto que inexplicavelmente não costuma ser ensinado no Ensino Médio. Então a gente chega no Brasil a esta situação absurda de um aluno com 11 anos de Matemática, 8 no fundamental e 3 no médio, sai do ensino médio, entra na universidade e não é capaz de decidir racionalmente entre uma compra à vista com desconto e uma compra a prazo. Ao mesmo tempo ele aprendeu a fazer contas com Matrizes, aprendeu o que são Números Complexos e é incapaz de decidir racionalmente entre uma compra à vista e uma compra a prazo. Isto é, na minha opinião, uma maluquice total. Matemática Financeira pode e deve ser ensinada no Ensino Médio.

Assim, os alunos vão à escola e estudam matemática durante toda a educação básica e concluem o ensino médio sem possuírem noções de como são realizados os cálculos dos juros presentes em compras, empréstimos e financiamentos, tampouco de analisar, entre várias opções, qual é a mais interessante na sua realidade financeira.

Já que a escola tem o papel de dar subsídios para a inserção dos sujeitos na sociedade, implica, entre muitos deveres, o desenvolvimento de práticas financeiras, pois a relação dos indivíduos com o dinheiro é determinada pelos conhecimentos que elas possuem.

O tema Educação Financeira está ocupando o centro de interesse de vários estudos, baseado na visão que ela pode tornar as pessoas mais conscientes financeiramente. O Banco Mundial (2011) coloca que o "analfabetismo financeiro" é um dos obstáculos para o progresso de países em desenvolvimento, como o Brasil.

Nos últimos anos, em face da forma de organização social e cultural das pessoas, surgiram pesquisas sobre o que é educação financeira e o que significa educar financeiramente os indivíduos.

A Educação Financeira é definida pela Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Econômico – OCDE, como:

> [...] o processo em que os indivíduos melhoram a sua compreensão sobre os produtos financeiros, seus conceitos e riscos, de maneira que, com informação e recomendação claras, possam desenvolver as habilidades e a confiança necessárias para tomarem decisões fundamentadas e com segurança, melhorando o seu bem-estar financeiro. (BRASIL, 2005, p. 223).

Já a concepção do Banco Central do Brasil reforça a anterior, pois a Educação Financeira é tida como

> “o processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram sua compreensão dos conceitos e produtos financeiros. Com informação, formação e orientação claras, as pessoas adquirem os valores e as competências necessários para se tornarem conscientes das oportunidades e dos riscos a elas associados e, então, façam escolhas bem embasadas, saibam onde procurar ajuda e adotem outras ações que melhorem o seu bem-estar.” (BACEN, 2012, p.23).

Logo, educar financeiramente abrange temas que ajudam a população a entender mais o mundo econômico que habitam, para serem cidadãos críticos, capazes de questionar suas opções de consumo, ou seja, ajuda no desenvolvimento de pessoas mais cientes e mais aptos para fazer escolhas importantes em seu cotidiano.

Devido a importância da Educação Financeira, a OCDE incluiu na prova do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), conteúdos de matemática financeira. Essa medida visa melhorar as práticas educacionais de vários países, ressaltando que devem ser incluídos conteúdos de Matemática Financeira no currículo escolar.

Nesse cenário, em que várias instituições ressaltam a importância da educação financeira, começar pelos jovens ainda na escola é necessário pois assim desde cedo estarão preparadas para cuidar bem do dinheiro.

Para Silva e Powell (2013), a Educação Financeira na escola tem como objetivos formar jovens com a capacidade de

> compreender as noções básicas de finanças e economia para que desenvolvam uma leitura crítica das informações financeiras presentes na sociedade; - aprender a utilizar os conhecimentos de matemática (escolar e financeira) para fundamentar a tomada de decisões em questões financeiras; desenvolver um pensamento analítico sobre questões financeiras, isto é, um pensamento que permita avaliar oportunidades, riscos e as armadilhas em questões financeiras; - desenvolver uma metodologia de planejamento, administração e investimento de suas finanças através da tomada de decisões fundamentadas matematicamente em sua vida pessoal e no auxílio ao seu núcleo familiar; analisar criticamente os temas atuais da sociedade de consumo; (SILVA; POWELL, 2013, p.13)

Jovens financeiramente educados são mais independentes em suas finanças e menos propensos a dívidas e descontrole financeiro, pois desenvolvem habilidades que o possibilitam consumir, poupar e investir de forma prudente e racional.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 A Modelagem Matemática e seus principais aspectos

A Modelagem é usada para encontrar a solução de problemas do dia a dia há muito tempo. De acordo, com Ricieri (1991, p.32), citado por Medonça (2008, p.66) temos que:

> Em busca de soluções para os problemas que enfrentavam no seu cotidiano, os povos antigos, mediante a experimentação, a observação, o método de tentativa e erro, entre outros, criavam representações dos diversos fenômenos que procuravam compreender, simplificando-os e apresentando-os nas mais diversas formas, como em desenhos, versos, equações e esquemas.

Essas representações que proporcionam a explicação e a interpretação de um fenômeno em estudo, sejam eles naturais ou sociais, chamamos de modelo. Por meio da linguagem simbólica da Matemática, consegue-se fazer essa representação de uma situação problema de acordo com os termos matemáticos (fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, etc.).

A modelagem matemática é o processo de obtenção de um modelo. A modelagem se caracteriza como um conjunto de etapas que conduzem o modelador a atingir um modelo matemático que retrata um problema, onde são empregados conteúdos matemáticos, experiência e bastante criatividade.

De acordo com Biembengut e Hein (2000), a modelagem se configura como sendo um processo artístico, apesar do conhecimento matemático ser essencial na elaboração de um modelo, comparando o processo de modelagem matemática com o trabalho de um escultor trabalhando com argila para produzir um objeto. Na concepção das autoras, esse objeto que representa sua ideia é um modelo e o processo de obtenção desse modelo é a Modelagem.

Cabe ao modelador, além de uma certa dose de criativamente, intuição para que possa interpretar corretamente o contexto a ser estudado e usar de forma adequada as ferramentas matemáticas.

Para Bassanezi (2004, p.24), a modelagem "[...] consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Assim para Bueno (2011, p.8)

> A modelagem matemática pode ser entendida como uma atividade de formular estratégias e argumentos a respeito de uma situação e formalizá-los sob a forma de um sistema matemático que permita uma interpretação ou compreensão a respeito da situação.

Campos (2007, p. 80) coloca que "[...] a validade ou a riqueza do modelo não estão somente ligadas à sofisticação matemática que o envolve, mas à sua capacidade de explicação, de predição, de adaptação, de adequação e de aplicação em diferentes contextos". Nesse sentido, a importância de um modelo é dada quando ele vai além do esperado, quando além de ser útil para representar a situação para qual foi criado, também pode ser suporte para outras aplicações e teorias.

Portanto, modelagem é um processo dinâmico e que conecta a matemática à realidade, pois parte de um problema real e associa-se a um conjunto de hipóteses, que visa obter um modelo que solucione esse problema.

Para os povos antigos, os avanços nos modelos eram dificultados pela falta de recursos tecnológicos, pois o grande entrave desse avanço era a complexidade dos números. com o avanço dos computadores e o acesso a eles, isso tem facilitado a criação de modelos cada vez mais sofisticados.

Além disso, a complexidade do mundo atual e a impossibilidade de se lidar com ele diretamente, tem levado o homem a cada vez mais trabalhar com representações da realidade na busca de soluções para os mais variados tipos de problema.

A Modelagem Matemática pode servir a diferentes áreas como, por exemplo, Biologia, Química, Física, Economia, Engenharia e a própria Matemática. Portanto, trata-se de um processo muito rico e criativo para solucionar situações problemas, mas não tão simples, pois alguns esforços são necessários para se chegar a melhor representação matemática.

De acordo Biembegut e Hein (2000), no processo de geração de representação de situações reais através de modelos matemáticos há uma série de procedimentos, divididos em três etapas e subdivididas em seis. São elas: **Interação** (percepção e apreensão), **Matematização** (compreensão e explicação) e **Modelo matemático** (significação e modelação).

A primeira etapa é a Interação, na qual a partir da tomada de conhecimento da situação-problema, é necessário procurar o máximo de conhecimento possível sobre a situação a fim de ter mais clareza a respeito dos caminhos a serem seguidos para elaboração do modelo.

A etapa de Matematização é a fase na qual são apontados os fatos envolvidos, categorizando as informações como importantes ou não. Além do mais, é a etapa em que há o levantamento das hipóteses, selecionando as variáveis e constantes envolvidas e a análise com os recursos matemáticos para chegar à descrição das relações em termos matemáticos.

Ainda segundo Biembegut e Hein (2000), essa é a fase mais complexa e desafiadora, pois é nessa que se dará à tradução da situação problema para a linguagem matemática, ou seja, é nela que se formula um problema e escreve-o segundo um modelo que leve à solução. Intuição, criatividade e experiência acumulada são elementos indispensáveis nessa etapa.

Essa etapa também exige um conhecimento considerável dos conhecimentos matemáticos e muitas vezes é necessário o auxílio do computador para chegar ao modelo, como sugerido por Biembegut e Hein (2000).

A última etapa, denominada modelo matemático, consiste na interpretação da solução e na verificação ou validação desse modelo construído. Nesta etapa, quando o modelo da situação é encontrado, ocorre uma testagem do modelo obtido para verificar em que nível este se aproxima da situação-problema. Assim, sua interpretação deve ser feita através de análise das implicações da solução, derivada do modelo que está sendo investigado, para, então, verificar-se sua adequabilidade, caso o modelo não atenda às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa para, mudando-se ou ajustando-se hipóteses, variáveis, etc. à situação problema investigado e avaliado, aumente o grau de confiabilidade (BIEMBEGUT; HEIN, 2000).

No processo de ensino e aprendizagem de Matemática, a Modelagem se apresenta como um meio para estimular o interesse dos estudantes pelos conteúdos matemáticos, pois oportuniza o estudo desses através de pesquisas de situações-problemas de aplicação do seu cotidiano e que valorizam o seu senso crítico (CAMPOS, 2007).

As Orientações Curriculares Nacionais para Ensino Médio, quando tratam das questões metodológicas, apontam a modelagem como forma de integrar diferentes saberes disciplinares e promover a interação social e a reflexão sobre problemas que fazem parte da realidade dos alunos (BRASIL, 2006).

No mesmo sentido, Campos et al (2012, p. 6), colocam que,

> [...] a modelagem matemática contribui para a construção de um ambiente pedagógico no qual os alunos, de um lado, podem realizar simulações e fazer analogias na medida em que um mesmo modelo pode ser útil na representação de diferentes situações. E, de outro lado, eles podem identificar aplicações em outras áreas do conhecimento e em diferentes contextos, além de associar o conteúdo curricular com o mundo do trabalho.

Portanto, é possível percebe que a grande importância da modelagem como método de ensino está também na ligação dos conhecimentos matemáticos com outras áreas do conhecimento. Além disso, há o fato de que a Modelagem Matemática traz em uma mesma proposta o trabalho com a matemática prática, a formal e a utilitária, assim como ressalta Chaves (2005, p. 28):

> [...] a modelagem Matemática, inverte a sequência normalmente utilizada no ensino tradicional – definição/exemplos/exercícios/aplicações, começando por aplicações/problemas, oferece a oportunidade de implementarmos novos ambientes de

> aprendizagem onde podemos estar desenvolvendo de forma significativa os conceitos matemáticos e a partir do trânsito do aluno entre as Matemáticas: práticas, oriunda das diversas atividades humanas, formal que é o resultado da sistematização, refinamento e generalização dos diversos saberes da tradição e a utilitária que aplica o conhecimento sistematizado em situações diferenciadas.

Nesse sentido, a modelagem matemática possibilita um ambiente onde os alunos são colocados a investigar situações reais, onde além de problematizar, esse aluno também irá questioná-la e obter conclusões usadas na matemática.

Machado Jr (2005) ressalta que mais um ponto marcante do trabalho com a Modelagem Matemática é o fato que os conceitos surgem das necessidades dos alunos e não das imposições sem nenhum sentido de ser, esse autor aponta como sendo essa a principal característica dessa proposta de trabalho, uma forma de construção de conhecimento que flui de maneira natural e não por imposição, facilitando o entendimento e a relações com o cotidiano do aluno.

Quando a modelagem é levada para a escola, há a necessidade de fazer algumas adaptações, dando à Modelagem a nomenclatura Modelação Matemática. Em sala de aula deverão ser considerados alguns aspectos como a escolaridade dos estudantes, os conteúdos do programa de ensino, a carga horária necessária e a disponibilidade para a realização de trabalhos extraclasse.

Biembengut e Hein (2000) sugerem passos para os professores implementarem de fato a Modelação Matemática na sala de aula.

Começando por fazer um diagnóstico dos alunos, pois o professor precisa conhecer sua realidade socioeconômica, tempo que dispõe para estudar fora da sala de aula, grau de conhecimento matemático, além da quantidade de alunos e o horário da disciplina. A partir disso, o professor pode definir um tema adequado que concilie os interesses dos alunos e o programa da disciplina ou pode deixar que os alunos escolham. De qualquer forma, deve-se aprofundar no tema para auxiliar os alunos a planejar o desenvolvimento dos trabalhos.

Depois, para o desenvolvimento do conteúdo programático segue-se as mesmas etapas da modelagem matemática.

Na etapa de **Interação**, é realizada a apresentação do tema, seguida por um levantamento de questões sugeridas pelos alunos. O professor, nesta etapa, tem grande importância, pois a motivação dos alunos depende da forma como ele mostra seu conhecimento e interesse pelo tema.

Na etapa de **Matematização**, deve-se proceder o desenvolvimento do conteúdo matemático necessário para a formulação e resolução do problema proposto, além da apresentação de exemplos e exercícios análogos, com o objetivo de melhorar o entendimento dos conceitos por parte dos alunos.

Por fim, a identificação do **Modelo matemático**. Nessa etapa, é feita a sua validação, ou seja, verifica se o modelo obtido representa a realidade e talvez possa retornar as etapas iniciais para melhorá-lo.

Essas etapas propostas por Biembengut e Hein (2000) devem ajudar o professor no seu trabalho, mas elas não são rígidas, podendo seguir outros rumos se for necessário para atingir seus objetivos em sala de aula.

Além disso, segundo Barbosa (2001), a modelagem redefine o papel do professor no momento em que ele perde o caráter de detentor e transmissor do saber para ser entendido como aquele que está na condução das atividades, numa posição de partícipe. Nessa perspectiva o professor assume características diferentes, tem o papel de mediador da relação ensino-aprendizagem, deve orientar o trabalho tirando dúvidas, colocando novos pontos de vista em relação ao problema tratado e outros aspectos que permitam aos alunos pensarem sobre o assunto e proporcionar momentos de discussão durante a realização da Modelação Matemática com o objetivo de ajudar os alunos a vencer as dificuldades apresentadas durante o processo.

Quanto ao processo de avaliação, o professor precisa realizá-lo continuamente e procurar atribuir significado ao desempenho dos alunos, analisando o quanto estão comprometidos com o trabalho em todas as etapas. Além disso, para finalizar, o professor deve avaliar se houve aprendizagem do conhecimento matemático necessário para a atividade (CAMPOS, 2007).

Assim, o desenvolvimento de propostas de ensino-aprendizagem que utilizam a Modelação Matemática pode ser feito nas diversas áreas do conhecimento matemático, tais com a Álgebra, Geometria e também a Matemática Financeira, para esse trabalho, buscamos desenvolver o ensino-aprendizagem da Matemática Financeira usando a Modelagem Matemática.

3.2- O ensino e a aprendizagem de Matemática Financeira através da Modelagem Matemática

Os documentos oficiais norteadores da Educação Básica são a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), eles enfatizam a formação para o trabalho e a cidadania tanto no currículo como conteúdos ministrados nas escolas para que cada indivíduo possa exercer seu papel de cidadão ativo em frente aos problemas na sociedade:

> A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (LBD n. 9394/96, BRASIL, p. 02).

Assim, os conteúdos escolares têm como objetivo o pleno desenvolvimento dos educandos para que usem os conhecimentos adquiridos para entender e modificar o espaço físico e social no qual habitam, com o propósito de melhorar suas realidades de forma consciente.

Nos PCNs, a Matemática é apresentada como tendo papel fundamental na resolução de problemas cotidianos na vida profissional, social e pessoal de cada pessoa, ajudando na compreensão e na tomada de decisões diante das alternativas de consumo, identificando as opções mais vantajosas de negócios. O Ministério da Educação (MEC) salienta a relevância da Matemática apontando que

> Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessário tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. (BRASIL, 1999, p. 251)

Dessa forma, a Matemática Financeira é imprescindível para a realização das escolhas mais adequadas em uma compra, sendo preciso realizar um planejamento, no qual serão analisadas as questões que estão sendo impostas para a aquisição de um produto, e então apontar a escolha mais acertada para a forma de pagamento a ser feita de acordo com a situação financeira do indivíduo.

Dentro do ensino de matemática, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), a Matemática Financeira está inserida na parte de Números e Operações e deve

> [...] proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do quotidiano, tais como:[..] ler faturas de contas de consumo de água, luz e telefone;[...]. O trabalho com esse bloco de conteúdos deve tornar o aluno, ao final do ensino médio, capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; conferir se estão corretas informações em embalagens de produtos quanto ao volume; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários. (BRASIL, 2006, p. 71).

Nos PCNs de Matemática (1998), o estudo de Matemática Financeira aparece no tema transversal Trabalho e Consumo, ressaltando que

> [...] com a criação permanente de novas necessidades transformando bens supérfluos em vitais, a aquisição de bens se caracteriza pelo consumismo. O consumo é apresentado como forma e objetivo de vida. É fundamental que nossos alunos aprendam a se posicionar criticamente diante dessas questões e compreendam que grande parte do que se consome é produto do trabalho, embora nem sempre se pense nessa relação no momento em que se adquire uma mercadoria. É preciso mostrar que o objeto de consumo, seja um tênis ou uma roupa de marca, um produto alimentício ou aparelho eletrônico etc, é fruto de um tempo de trabalho, realizado em determinadas condições. Quando se consegue comparar o custo da produção de cada um desses produtos com o preço de mercado é possível compreender que as regras do consumo são regidas por uma política de maximização do lucro e precarização do valor do trabalho. Aspectos ligados aos direitos do consumidor também necessitam da Matemática para serem mais bem compreendidos. Por exemplo, para analisar a composição e a qualidade dos produtos e avaliar seu impacto sobre a saúde e o meio ambiente, ou para analisar a razão entre menor preço/maior quantidade. Nesse caso, situações de oferta como: compre 3 e pague 2, nem sempre são vantajosas, pois geralmente são feitas para produtos que não estão com muita saída – portanto, não há, muitas vezes, necessidade de aplica-los em grande quantidade – ou que estão com os prazos de validade próximos do vencimento. Habituar-se a analisar essas situações é fundamental para que os alunos possam reconhecer e criar formas de proteção contra a propaganda enganosa e contra os estratagemas de marketing que são submetidas os potenciais consumidores. (BRASIL, 1998. p.35)

Assim, a Matemática Financeira promove ao aluno o desenvolvimento de habilidades e competências para refletir e julgar de maneira crítica suas opções financeiras que ocorreram no seu dia a dia. A matemática financeira, de forma evidente, tem que ocupar um papel importante dentre os conteúdos de matemática estudados na educação básica. Pois, os conhecimentos financeiros são fundamentais para a promoção da cidadania e compreensão do mundo econômico (ROSSETI JÚNIOR; SCHIMIGUEL, 2011, p. 01).

O conhecimento matemático financeiro fundamental para possibilitar a Educação Financeira tem como mais importante meio de propagação a escola. Logo, a conexão entre a Matemática Financeira e a escola é essencial, não podendo tratar a Matemática Financeira como um conteúdo sem utilidade e somente com fórmulas.

Muitas vezes, os conteúdos de Matemática Financeira são ensinados nas escolas de forma tradicional, através da memorização e aplicação de fórmulas em situações que não fazem parte do cotidiano dos alunos. Isso torna os conteúdos descontextualizados e sem significado prático para os estudantes. Rosetti Jr e Schimiguel (2009, p. 11) ressaltam que os "conteúdos de matemática comercial e financeira que são trabalhados atualmente com alunos do ensino médio e de ensino técnico não atendem às demandas dos estudantes e do mundo do trabalho."

Os conhecimentos de Matemática financeira têm uma vasta área de aplicação no cotidiano, como financiamentos de casa e carros, realizações de empréstimos, compras a crediário ou com cartão de crédito, aplicações financeiras, investimentos em bolsas de valores, entre outras situações.

A Modelagem Matemática é muito útil para a Matemática Financeira, pois as metodologias de ensino e aprendizagem tem que oportunizar aos estudantes visão fundamental para entender os conteúdos da disciplina, tornando-a mais significativa e envolvente. Esse envolvimento dos alunos só ocorre se os professores trouxerem situações do dia a dia do aluno e que seja utilizável no mundo. Como esclarece Bassanezi (1999), não é suficiente optar por qualquer temática, é necessário que o docente faça uma investigação se aquela situação problema de fato é relevante e se trará algum benefício à vida dos alunos, proporcionando um olhar mais questionador para a sociedade.

Assim, a Modelagem permite ao aluno que durante o estudo de Matemática Financeira tenha uma visão adequada das situações cotidianas, para que esteja preparado para tomar decisões relacionadas ao mundo comercial, já que essa disciplina não deve ser centrada somente em fórmulas e cálculos, pois deve ser relacionado à realidade do aluno.

Para superar a aprendizagem mecânica, os docentes precisam de novas formas de trabalhar o tema. Essas novas abordagens devem preparar os alunos para solucionar situações práticas que surgem no seu cotidiano, desse modo, terão que despertar no aluno, além dos conhecimentos dos cálculos financeiros, um senso crítico e questionador, para que ele esteja preparado para avaliar conscientemente as suas opções financeiras no decorrer da vida.

3.3 O Excel e o GeoGebra como ferramentas para o ensino de Matemática Financeira através da Modelagem Matemática

As tecnologias, como por exemplo a Informática, não são suficientes, por si só, de fazer com que o processo de ensino e aprendizagem se torne mais fácil, o que acontece é que através das tecnologias o processo de ensino se torna mais enriquecedor e favorável ao aluno (LEAL, 2009).

Assim, a utilização de tecnologias no ensino vem para ajudar na melhoria do processo de ensino e aprendizagem tornando-o mais interativo, desafiador, o que pode gerar uma aprendizagem mais consistente para os estudantes.

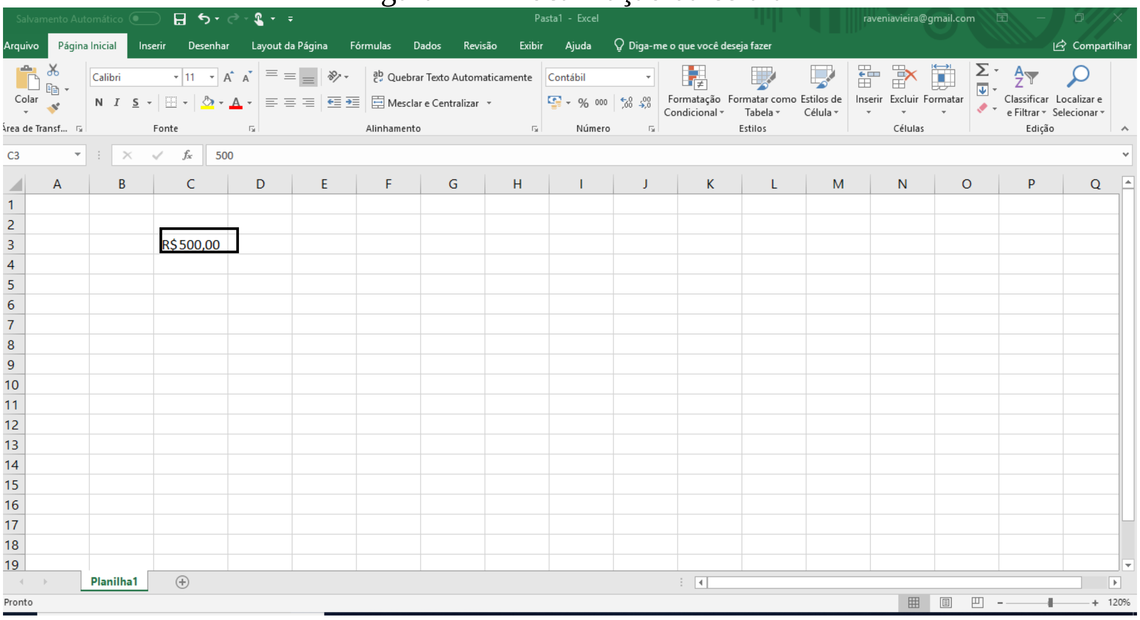
Lamentavelmente, existem várias dificuldades em realizar uma ligação firme entre a tecnologia na sala de aula, o docente e os estudantes, o que atrapalha, tornando-a mais distante da realidade.

As planilhas eletrônicas, um tipo de programa de computador que usa tabelas para fazer cálculos ou mostrar dados, é constituída por linhas e colunas, na qual as linhas são representadas por números e as colunas por letras, cada interseção entre uma linha e uma coluna é chamada célula. Um exemplo de software que trabalha com essas planilhas é o Microsoft Excel, pago e de fácil manuseio ou o Calc do LibreOffice que é livre e tem comandos parecidos com o Excel

Além de fornecerem cálculos rápidos e precisos, as planilhas eletrônicas também podem ser empregadas no ensino de Matemática para reduzirem o tempo gasto com cálculos repetitivos e que os alunos já sabem fazer, também reduz gastos com papel e permite as correções e alterações de forma rápida e eficiente.

Para esse trabalho, serão propostos comandos básicos do Excel. No caso descrito na figura abaixo, o valor de R$500,00 situa-se na célula C3, sempre indicando-se primeiro a letra da coluna e, em seguida, o número da linha.

Figura 11 – Localização da célula



Fonte: Acervo da autora

Os princípios da elaboração de uma fórmula sempre começam com o sinal de igual (=). Para fixar um endereço de célula, é preciso usar o cifrão ($), e o endereço que estiver após o $ estará fixo. Veja esses exemplos:

· C3: nada está fixo;

· C$3: está fixa somente a linha 3;

· $C3: está fixa somente a coluna C;

· C3: estão fixas a coluna C e a linha 3;

Os operadores aritméticos, também chamados de operadores matemáticos, são:

Tabela 01 – Operadores aritméticos

Operador	**Significado**
+ (Sinal de mais)	Adição
- (Sinal de menos)	Subtração
* (Asterisco)	Multiplicação
/ (Barra de fração)	Divisão
^ (Acento circunflexo)	Potenciação
% (Sinal de porcentagem)	Porcentagem

Fonte: Acervo da autora

O aluno precisa apenas compreender como colocar a fórmula na planilha eletrônica. Com os comandos dados, pode efetuar vários cálculos uma só vez, podendo, sempre que quiser, alterar os valores e fórmulas que novamente a planilha apresentará os resultados. Assim, os conteúdos de Sistema de Amortização SAC e PRICE podem ser abordados de maneira prática e dinâmica, com o auxílio do Excel.

Existe vários softwares educacionais e outros que não foram desenvolvidos com fins educacionais, mas podem ser usados em sala de aula. O GeoGebra é um software de matemática dinâmica, porém ele não é muito usado no ensino de Matemática Financeira, apesar de reunir recursos de geometria, álgebra, tabelas, planilhas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente virtual. Assim, é possível fazer representações diferentes de um mesmo objeto que interage entre si.

No GeoGebra é possível fazer simulações computacionais baseadas em situações reais, que permitem que os estudantes possam alterar valores de variáveis ou parâmetros de entrada e observar as alterações no objeto da simulação. Os operadores aritméticos são os mesmos do Excel. Ambos os softwares exigem o domínio de procedimentos de construção que auxiliam no desenvolvimento de habilidades e atitudes de conjeturar, relacionar, refinar suposições, que são importantes nas atividades com modelagem matemática.

4 A PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Para o desenvolvimento da proposta nos referenciamos nas três etapas para o encaminhamento do trabalho com Modelagem Matemática em sala de aula, conforme sugerido por Biembengut e Hein (2000): interação (percepção e apreensão); matematização (compreensão e explicação); e modelo matemático (significação e modelação). Frente aos objetivos propostos, as etapas da proposta de atividade foram os seguintes:

4.1- 1ª Etapa: INTERAÇÃO (Percepção e Apreensão)

A proposta se desenvolverá sobre a temática sistemas de amortização nos financiamentos imobiliários. A escolha foi feita devido ao fato de ser um tema muito atual e do qual boa parcela da população tem dívidas para o financiamento do carro ou da casa própria. Além disso, o conhecimento do assunto poderá auxiliar os estudantes a tomarem as melhores decisões na hora de realizarem financiamentos no decorrer de sua vida.

Assim, nessa primeira etapa deve ser solicitado, antes da primeira aula, que os alunos realizem pesquisas sobre financiamentos imobiliários em sites, bibliotecas ou instituições bancárias na cidade, com o objetivo de motivar sobre o tema e entender o que é um financiamento imobiliário. Dessa forma, os estudantes poderão ter um grande envolvimento e responsabilidade no desenvolvimento da atividade desde o início, reduzindo a intervenção do professor que cuidará mais de conduzir o trabalho dos discentes, como é citado por Barbosa (2003). Os conhecimentos e dúvidas adquiridos na pesquisa devem ser socializados pelos grupos de alunos em sala de aula.

Os sistemas de amortização são desenvolvidos para operações de empréstimos e financiamentos, os mais utilizados pelos bancos são o sistema francês de amortização (Price), no qual o devedor vai saldar seu débito por meio de uma série de pagamentos iguais, esse sistema tem como principais características ter parcela fixa, juros decrescentes e amortização crescente. O outro sistema de amortização muito utilizado é o sistema de amortização constante (SAC), em que o saldo devedor, ou seja, o total da dívida que é divido pelo prazo do financiamento resultando em uma taxa de amortização fixa, assim, as primeiras parcelas têm valores mais altos, mas tendem, juntamente com os juros, a reduzirem no decorrer do pagamento.

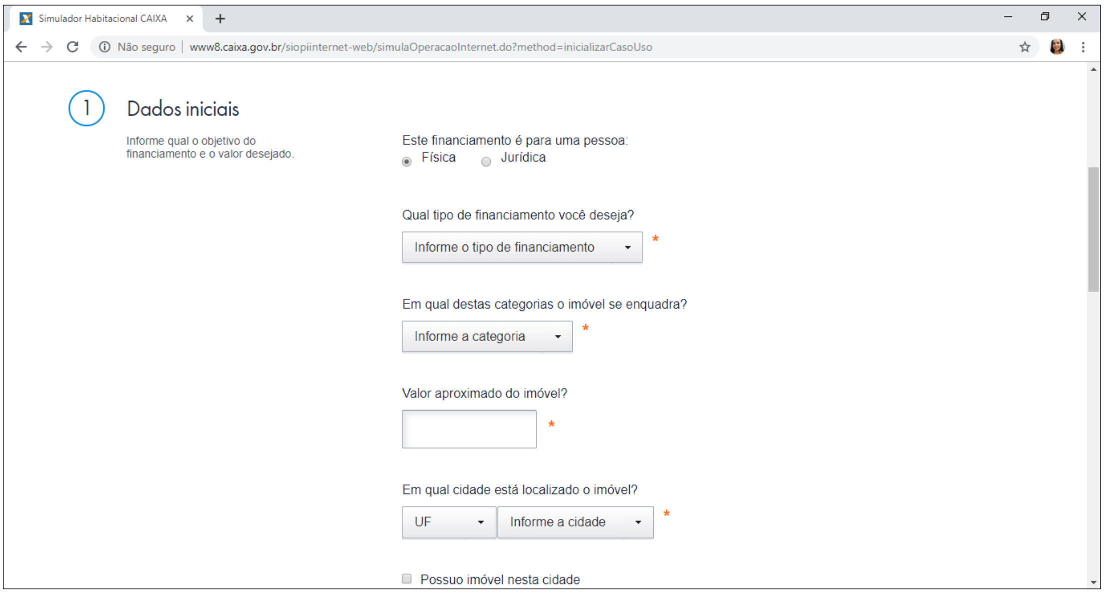
Existem alguns simuladores de financiamentos na internet, os mesmos estão nos sites dos bancos, como Caixa Econômica Federal, Banco do Brasil, Banco Bradesco, entre outros. A Caixa Econômica Federal por se tratar de uma instituição financeira responsável pela fomentação da habitação no país, possui uma linha de crédito considerável nessa carteira, vejamos o simulador desse banco, figura 12, disponível no site da Caixa Econômica (CAIXA ECONÔMICA FEDERAL, 2019). O docente pode mostrar para os alunos o uso do simulador ou levá-los para um laboratório de informática e utilizarem juntos.

Figura 12 – Tela inicial do Simulador Habitação Caixa

Fonte: Sitio da Caixa Econômica Federal

Para iniciar a simulação no site, é necessário o preenchimento de alguns dados iniciais obrigatórios, se é para uma pessoa jurídica ou física, se o financiamento é de um imóvel residencial ou comercial, qual categoria o imóvel se encaixa, se um imóvel novo ou usado, construção, imóvel da CAIXA, reforma e/ou ampliação, o valor aproximado do imóvel e, finalizando essa primeira parte, a cidade onde o imóvel se localiza.

Figura 13 – Simulador Habitação Caixa I

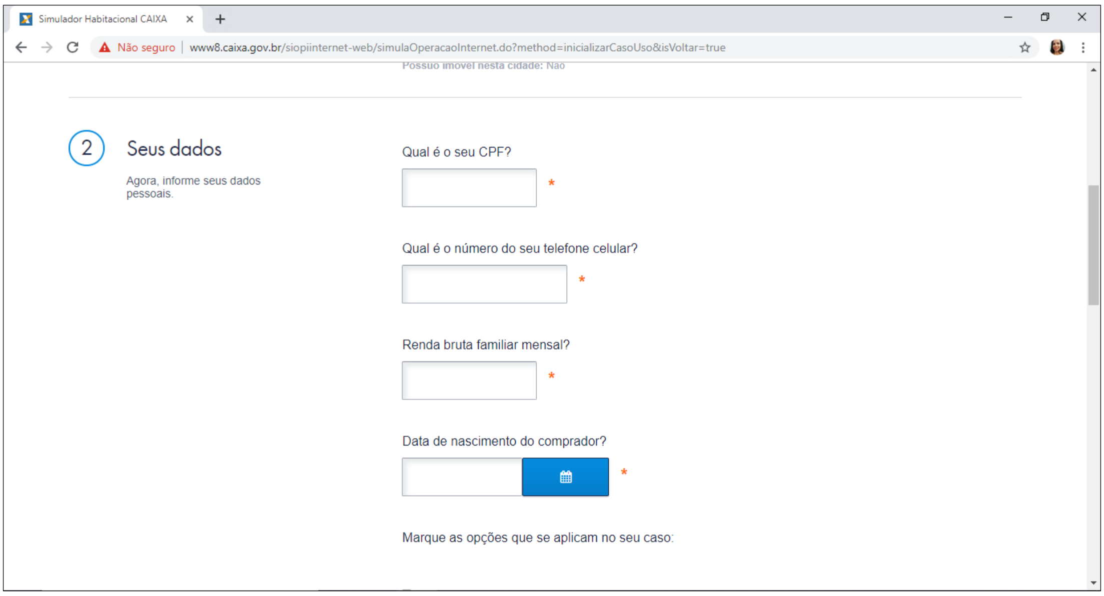


Fonte: Sitio da Caixa Econômica Federal

Primeiramente, todos os alunos vão realizar a mesma simulação, escolhendo pessoa física, imóvel residencial, imóvel novo, no valor de R$ 120.000,00, valor médio encontrado em pesquisa realizada na cidade de Limoeiro do Norte, Ceará - a escolha da cidade foi feita por ser a cidade natal da pesquisadora.

Na segunda etapa, os estudantes vão preencher os itens CPF, número de telefone, renda bruta familiar e data de nascimento do comprador.

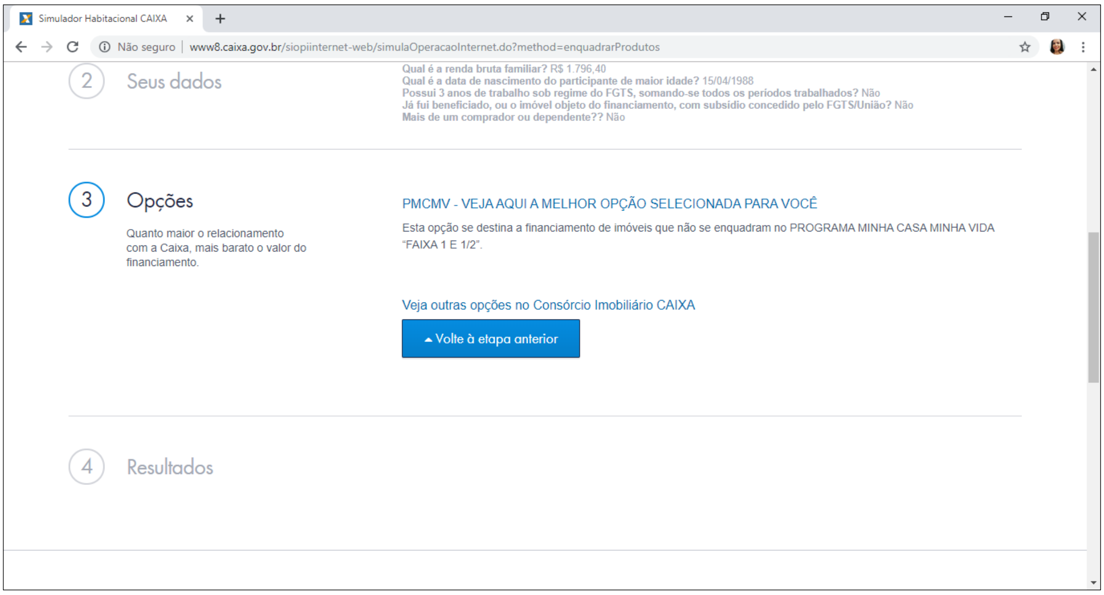
Figura 14 – Simulador Habitação Caixa II



Fonte: Sitio da Caixa Econômica Federal

Segundo dados do IBGE, o salário médio mensal dos trabalhadores formais na cidade é de 1,8 salários mínimos, R$ 1796,40, assim, vamos utilizar essa informação para renda bruta familiar, e estipular que o comprador tenha 30 anos. Logo depois de todos esses passos, o simulador do site remete a melhor condição encontrada por ele, nesse caso, foi o Programa Minha Casa Minha Vida (PMCMV).

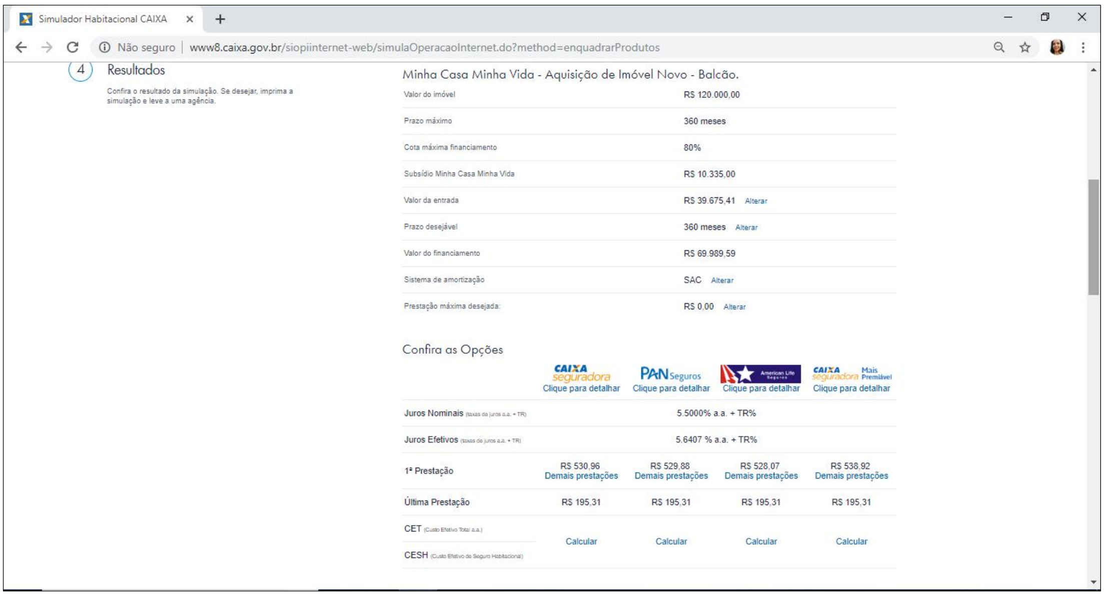
Figura 15 – Simulador Habitação Caixa III



Fonte: Sitio da Caixa Econômica Federal

Ao clicar no link aparece toda a descrição e da simulação que foi realizada.

Figura 16 – Simulador Habitação Caixa IV



Fonte: Sitio da Caixa Econômica Federal

No final, o simulador gerou toda a informação referente ao financiamento do imóvel simulado. Daí, o professor deve discutir com os alunos sobre os elementos que estão descritos na simulação, o que eles já conheciam e o que descobriram na pesquisa sobre financiamentos.

Como o foco da pesquisa são sistemas de amortização, o docente deve deixar por último esse ponto, ao chegar nele deve explicar aos estudantes que ao realizar uma compra a prazo, em geral com juros, temos um saldo devedor, que corresponde ao valor do bem quando foi comprado. No pagamento parcelado, o somatório das parcelas é maior que o saldo devedor. Pois cada parcela é formada por duas partes: uma são os juros e a outra é o abatimento da dívida. Essa segunda parte é chamada de amortização. Somadas todas as amortizações obtemos o valor do saldo devedor. O pagamento dos juros não ajuda a diminuir a dívida, eles são o valor que é pago por comprar produtos a prazo.

Nos financiamentos, as parcelas também são constituídas por alguns impostos, a taxa de inflação e o seguro, porém, o foco dessa pesquisa é a compreensão dos sistemas de amortização SAC e Price, essas variáveis serão desprezadas.

Em um sistema de amortização, qualquer parcela P é obtida somando uma parte referente da amortização e outra de juros em certo período. Assim, simbolicamente:

$$P_t = A_t + J_t$$

onde:

- P_t é a parcela paga no período t;
- A_t representa a amortização referente a esse período;
- J_t representa os juros cobrados no período t.

Os juros nos sistemas de amortização são aplicando a taxa periódica i sobre a dívida do período anterior. Simbolicamente:

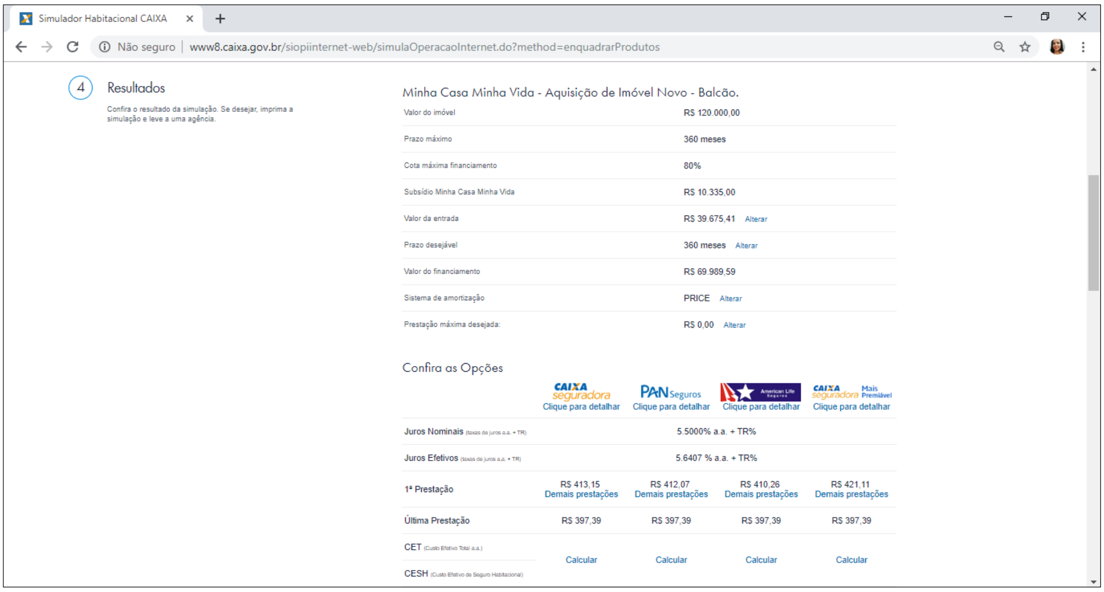
$$J_t = i.D_{t-1}$$

onde:

- J_t, $1 \leq t \leq n$ representa os juros pagos em uma referida parcela no período n no qual a dívida será paga;
- i é taxa cobrada no financiamento;
- D_{t-1} é o saldo devedor do período anterior.

O docente deve pedir para eles trocarem o sistema SAC pelo sistema Price, clicando em alterar e questionar se houve mudanças.

Figura 17 – Simulador Habitação Caixa V



Fonte: Sitio da Caixa Econômica Federal

Os discentes irão perceber que o valor da prestação foi alterado. Nesse momento, os alunos devem levantar alguns questionamentos, como:

- Quais as diferenças entre os dois sistemas de amortização?
- Como calcular a parcela de uma casa financiada?

Novamente, o docente deve deixar claro que no SAC, amortização do saldo devedor é constante em cada prestação e os juros são calculados sempre sobre o saldo devedor do último período. Já no Francês, as parcelas são iguais formada de duas partes: uma de juros e outra de amortização, o devedor vai pagando juros e amortizando a dívida.

O professor deve propor que os alunos alterem livremente o site de simulação para eles testarem e experimentarem as opções disponíveis, sempre discutindo o que eles observam.

4.2 2ª etapa: MATEMATIZAÇÃO (Compreensão e Explicação)

Então, o professor deve propor aos alunos o seguinte problema Adaptado de Puccini (1986):

Ao tentar comprar uma casa cujo valor à vista é de V. O comprador recorre a um banco e consegue financiamento do imóvel sendo que paga uma entrada E e financia o restante D_0 em n meses a uma taxa $i\,\%$ ao mês. Qual sistema de amortização é mais vantajoso para ser usado em um financiamento, SAC ou Price?

Para solucionar o problema as variáveis citadas anteriormente impostos, a taxa de inflação e o seguro serão desprezadas por não serem relevantes nesse primeiro contato que os estudantes têm com o assunto.

Assim, as aulas continuarão sendo desenvolvidas no laboratório de informática e será subdivida em 10 atividades. As atividades podem ser realizadas com os alunos em pequenos grupos (2 ou 3 alunos).

Atividade 01: Veja a tabela 02:

Tabela 02 – Juros cobrados pelos principais bancos no crédito imobiliário

Instituição	Taxa ao mês (%)
1 Itaú Unibanco	0,69
2 Banco Inter	0,72
3 Banco Bradesco	0,75
4 Banco Santander	0,75
5 Banco BANESTES	0,76
6 Banco do Brasil	0,79
7 Banco do Estado do R. Grande do Sul	0,85
8 APE Poupex	0,90
9 Caixa Econômica Federal	0,91

Fonte: Banco Central/novembro 2018

Uma casa custa R$ 50.000,00. José adquire a casa com uma entrada de R$ 20.000,00 e financia os outros R$ 30.000,00 durante 24 meses em um dos bancos que constam na tabela e com o sistema de amortização SAC. Escolha uma das taxas de juros dos bancos acima e construa a planilha de amortização desse financiamento, nela, deve constar em cada período o valor da amortização, dos juros, da prestação e o saldo devedor do período.

Para solucionar esse problema o professor deve propor que inicialmente os estudantes nos cadernos ou em folhas de ofício determinem os dados pedidos para os cinco primeiros períodos de tempos assim eles podem a através da construção manual observar padrões de construção.

Depois, no Laboratório de Informática, contar com o auxílio do software Microsoft Excel, pois facilita os cálculos e é de fácil atualização. Vamos utilizar algumas letras para representar as variáveis,

- t é o período;
- D_t é o saldo devedor do respectivo período;
- A_t é o valor constante da amortização;

- J_t é o valor dos juros;
- P_t é o valor da prestação, resultante da soma da amortização com os juros.

Se escolhemos a taxa de 0,91% ao mês da Caixa Econômica teremos a planilha incialmente

Tabela 03 – Cabeçalho da tabela de amortização SAC

SAC	
Valor de venda do Imóvel:	R$ 50.000,00
Valor da entrada dado:	R$ 20.000,00
Valor financiado:	R$ 30.000,00
Valor de Juros Pagos:	0,91%
Número de Parcelas:	24
VALOR REAL PAGO PELO IMÓVEL:	
PERCENTUAL PAGO A MAIS:	

Fonte: acervo da autora

Como no SAC as amortizações são constantes o valor de cada amortização é igual ao capital dividido pelo tempo, nesse caso, para qualquer t, temos

$$A_t = \frac{30000}{24} = R\$\ 1.250{,}00.$$

Para iniciar a tabela, no período $t = 1$, os estudantes devem ter em mente o que já foi explicado e pesquisado sobre os sistemas de amortização. No SAC, como os juros são cobrados sobre o saldo devedor anterior, no caso $D_0 = R\$\ 30.000{,}00$, logo $J_1 = 0{,}0091 \times 30000 = R\$\ 273{,}00$. O valor da parcela que é a soma da amortização e os juros, será $P_1 = 1.250 + 273 = R\$1.523{,}00$ e o saldo devedor é a diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período é de $D_1 = 30.000 - 1.250 = R\$\ 28.750{,}00$. O mesmo raciocínio de estende para os meses seguintes. Fazendo isso no Excel, obtemos

Tabela 04 – Amortização pelo SAC

SAC				
Valor de venda do Imóvel:				R$ 50.000,00
Valor da entrada dado:				R$ 20.000,00
Valor financiado:				R$ 30.000,00
Valor de Juros Pagos:				0,91%
Número de Parcelas:				24
VALOR REAL PAGO PELO IMÓVEL:				R$ 33.412,50
PERCENTUAL PAGO A MAIS:				11,38%
t	**Dt**	**At**	**Jt**	**Pt**
0	R$ 30.000,00	R$ -	R$ -	R$ -
1	R$ 28.750,00	R$ 1.250,00	R$ 273,00	R$ 1.523,00
2	R$ 27.500,00	R$ 1.250,00	R$ 261,63	R$ 1.511,63

3	R$ 26.250,00	R$ 1.250,00	R$ 250,25	R$ 1.500,25
4	R$ 25.000,00	R$ 1.250,00	R$ 238,88	R$ 1.488,88
5	R$ 23.750,00	R$ 1.250,00	R$ 227,50	R$ 1.477,50
6	R$ 22.500,00	R$ 1.250,00	R$ 216,13	R$ 1.466,13
7	R$ 21.250,00	R$ 1.250,00	R$ 204,75	R$ 1.454,75
8	R$ 20.000,00	R$ 1.250,00	R$ 193,38	R$ 1.443,38
9	R$ 18.750,00	R$ 1.250,00	R$ 182,00	R$ 1.432,00
10	R$ 17.500,00	R$ 1.250,00	R$ 170,63	R$ 1.420,63
11	R$ 16.250,00	R$ 1.250,00	R$ 159,25	R$ 1.409,25
12	R$ 15.000,00	R$ 1.250,00	R$ 147,88	R$ 1.397,88
13	R$ 13.750,00	R$ 1.250,00	R$ 136,50	R$ 1.386,50
14	R$ 12.500,00	R$ 1.250,00	R$ 125,13	R$ 1.375,13
15	R$ 11.250,00	R$ 1.250,00	R$ 113,75	R$ 1.363,75
16	R$ 10.000,00	R$ 1.250,00	R$ 102,38	R$ 1.352,38
17	R$ 8.750,00	R$ 1.250,00	R$ 91,00	R$ 1.341,00
18	R$ 7.500,00	R$ 1.250,00	R$ 79,63	R$ 1.329,63
19	R$ 6.250,00	R$ 1.250,00	R$ 68,25	R$ 1.318,25
20	R$ 5.000,00	R$ 1.250,00	R$ 56,88	R$ 1.306,88
21	R$ 3.750,00	R$ 1.250,00	R$ 45,50	R$ 1.295,50
22	R$ 2.500,00	R$ 1.250,00	R$ 34,13	R$ 1.284,13
23	R$ 1.250,00	R$ 1.250,00	R$ 22,75	R$ 1.272,75
24	R$ -	R$ 1.250,00	R$ 11,38	R$ 1.261,38

Fonte: acervo da autora

Os comandos usados foram:

- Valor financiado: Na célula E4, digitar $= E2 - E3$;
- Saldo devedor (D_0): Na célula B12, digitar = $\$E\$4$;
- Amortização (A_1): Na célula C13, digitar $= \$B\$12/\$E\$6$, os cifrões fixam a célula escolhida;
- Juros (J_1): Na célula D13, digitar $= \$E\$5 * B12$;
- Parcela (P_1): Na célula E13, digitar $= C13 + D13$;
- Saldo devedor (D_1): Na célula B13, digitar $= B12 - C13$;
- Faça a seleção dessas quatros primeiras células que foram preenchidas, aguardem surgir uma cruz fina do canto inferior da última célula selecionada, pressione o botão esquerdo do mouse e arraste para baixo até a 36ª linha;
- Para calcular o valor real pago pelo imóvel, a soma da coluna parcelas, digite na célula E8, $= SOMA(E13{:}E36)$;
- O percentual pago a mais, na célula E9 digitar $= (E8 - E4)/E4$, e na barra de ferramentas escolher o estilo porcentagem.

Depois, com a tabela construída pode-se facilmente ver o valor de parcela, observar que elas são decrescentes e que no décimo mês o saldo devedor é zero, ou seja, os R$ 30.000,00 inicialmente financiados foram pagos o que resultou em R$ 3.412,50 de juros e um montante de R$ 33.412,50. Também é possível realizar comparações de acordo com o Banco escolhido pelos alunos, por exemplo, no banco Bradesco a taxa de juros é de 0,75% ao mês.

Tabela 05 – SAC na Caixa Econômica Federal

SAC - CAIXA	
Valor de venda do Imóvel:	R$ 50.000,00
Valor da entrada dado:	R$ 20.000,00
Valor financiado:	R$ 30.000,00
Valor de Juros Pagos:	0,91%
Número de Parcelas:	24
VALOR REAL PAGO PELO IMÓVEL:	R$ 33.412,50
PERCENTUAL PAGO A MAIS:	11,38%

t	Dt	At	Jt	Pt
0	R$ 30.000,00	R$ -	R$ -	R$ -
1	R$ 28.750,00	R$ 1.250,00	R$ 273,00	R$ 1.523,00
2	R$ 27.500,00	R$ 1.250,00	R$ 261,63	R$ 1.511,63
3	R$ 26.250,00	R$ 1.250,00	R$ 250,25	R$ 1.500,25
4	R$ 25.000,00	R$ 1.250,00	R$ 238,88	R$ 1.488,88
5	R$ 23.750,00	R$ 1.250,00	R$ 227,50	R$ 1.477,50
6	R$ 22.500,00	R$ 1.250,00	R$ 216,13	R$ 1.466,13
7	R$ 21.250,00	R$ 1.250,00	R$ 204,75	R$ 1.454,75
8	R$ 20.000,00	R$ 1.250,00	R$ 193,38	R$ 1.443,38
9	R$ 18.750,00	R$ 1.250,00	R$ 182,00	R$ 1.432,00
10	R$ 17.500,00	R$ 1.250,00	R$ 170,63	R$ 1.420,63
11	R$ 16.250,00	R$ 1.250,00	R$ 159,25	R$ 1.409,25
12	R$ 15.000,00	R$ 1.250,00	R$ 147,88	R$ 1.397,88
13	R$ 13.750,00	R$ 1.250,00	R$ 136,50	R$ 1.386,50
14	R$ 12.500,00	R$ 1.250,00	R$ 125,13	R$ 1.375,13
15	R$ 11.250,00	R$ 1.250,00	R$ 113,75	R$ 1.363,75
16	R$ 10.000,00	R$ 1.250,00	R$ 102,38	R$ 1.352,38
17	R$ 8.750,00	R$ 1.250,00	R$ 91,00	R$ 1.341,00
18	R$ 7.500,00	R$ 1.250,00	R$ 79,63	R$ 1.329,63
19	R$ 6.250,00	R$ 1.250,00	R$ 68,25	R$ 1.318,25
20	R$ 5.000,00	R$ 1.250,00	R$ 56,88	R$ 1.306,88
21	R$ 3.750,00	R$ 1.250,00	R$ 45,50	R$ 1.295,50
22	R$ 2.500,00	R$ 1.250,00	R$ 34,13	R$ 1.284,13
23	R$ 1.250,00	R$ 1.250,00	R$ 22,75	R$ 1.272,75
24	R$ -	R$ 1.250,00	R$ 11,38	R$ 1.261,38

Tabela 06 – SAC no Banco Bradesco

SAC - BRADESCO	
Valor de venda do Imóvel:	R$ 50.000,00
Valor da entrada dado:	R$ 20.000,00
Valor financiado:	R$ 30.000,00
Valor de Juros Pagos:	0,75%
Número de Parcelas:	24
VALOR REAL PAGO PELO IMÓVEL:	R$ 32.812,50
PERCENTUAL PAGO A MAIS:	9,38%

t	Dt	At	Jt	Pt
0	R$ 30.000,00	R$ -	R$ -	R$ -
1	R$ 28.750,00	R$ 1.250,00	R$ 225,00	R$ 1.475,00
2	R$ 27.500,00	R$ 1.250,00	R$ 215,63	R$ 1.465,63
3	R$ 26.250,00	R$ 1.250,00	R$ 206,25	R$ 1.456,25
4	R$ 25.000,00	R$ 1.250,00	R$ 196,88	R$ 1.446,88
5	R$ 23.750,00	R$ 1.250,00	R$ 187,50	R$ 1.437,50
6	R$ 22.500,00	R$ 1.250,00	R$ 178,13	R$ 1.428,13
7	R$ 21.250,00	R$ 1.250,00	R$ 168,75	R$ 1.418,75
8	R$ 20.000,00	R$ 1.250,00	R$ 159,38	R$ 1.409,38
9	R$ 18.750,00	R$ 1.250,00	R$ 150,00	R$ 1.400,00
10	R$ 17.500,00	R$ 1.250,00	R$ 140,63	R$ 1.390,63
11	R$ 16.250,00	R$ 1.250,00	R$ 131,25	R$ 1.381,25
12	R$ 15.000,00	R$ 1.250,00	R$ 121,88	R$ 1.371,88
13	R$ 13.750,00	R$ 1.250,00	R$ 112,50	R$ 1.362,50
14	R$ 12.500,00	R$ 1.250,00	R$ 103,13	R$ 1.353,13
15	R$ 11.250,00	R$ 1.250,00	R$ 93,75	R$ 1.343,75
16	R$ 10.000,00	R$ 1.250,00	R$ 84,38	R$ 1.334,38
17	R$ 8.750,00	R$ 1.250,00	R$ 75,00	R$ 1.325,00
18	R$ 7.500,00	R$ 1.250,00	R$ 65,63	R$ 1.315,63
19	R$ 6.250,00	R$ 1.250,00	R$ 56,25	R$ 1.306,25
20	R$ 5.000,00	R$ 1.250,00	R$ 46,88	R$ 1.296,88
21	R$ 3.750,00	R$ 1.250,00	R$ 37,50	R$ 1.287,50
22	R$ 2.500,00	R$ 1.250,00	R$ 28,13	R$ 1.278,13
23	R$ 1.250,00	R$ 1.250,00	R$ 18,75	R$ 1.268,75
24	R$ -	R$ 1.250,00	R$ 9,38	R$ 1.259,38

Fonte: acervo da autora

Os alunos devem notar que com taxas de juros menores gera parcelas mais baratas, e que nessa comparação o segundo banco gera uma economia de R$ 600,00. Deixar mais um tempo para essas observações dos alunos. Após todos finalizados, passaremos para próxima atividade.

Atividade 02: Construir a fórmula do saldo devedor no SAC de cada período, a partir das experiências anteriores.

Pela tabela construída, espera-se que os alunos notem que para encontrar o saldo devedor no primeiro período, devem subtrair uma amortização do saldo devedor inicial (D_0); no segundo período, foi feita mais uma amortização de igual valor a primeira, ou seja, em relação ao saldo devedor inicial foi feita duas amortizações; no terceiros período, mais uma amortização de igual valor às anteriores, assim, do valor financiado foram realizadas três amortizações, esse raciocínio se repete nos demais período. Logo, em t períodos, uma quantidade t de amortizações será subtraída do valor financiado para encontrar o saldo devedor no período t. Algebricamente:

$$\begin{aligned}
t = 1 &\longrightarrow\ D_1 = D_0 - 1.A \\
t = 2 &\longrightarrow\ D_2 = D_0 - 2.A \\
t = 3 &\longrightarrow\ D_3 = D_0 - 3.A \\
&\ \ \vdots \\
t \quad &\longrightarrow\ D_t = D_0 - t.A
\end{aligned}$$

onde D_t é o saldo devedor no período t, D_0 é o valor financiado e A é a amortização constante.

Atividade 03: Construir a fórmula dos juros cobrados em cada período no SAC a partir das experiências anteriores.

No decorrer da aula os alunos já observaram que a amortização de cada parcela é igual, assim, a dívida vai decrescendo disposta numa progressão aritmética. Na atividade 01 esta razão é de (-1250). Como a taxa de juro é o percentual sobre a dívida, ela também estará disposta numa progressão aritmética e como consequência as parcelas estarão dispostas numa progressão de mesmo tipo. Assim, provavelmente os estudantes notam que a diferença entre dois termos consecutivos é constante na tabela construída. Generalizando teremos que a diferença

$$J_{t+1} - J_t = i.D_t - i.D_{t-1}.$$

Mas, na atividade anterior, os alunos já chegaram à fórmula de calcular o saldo devedor de cada período e então, o professor deve questionar como ficaria a relação anterior se substituísse pela fórmula encontrada na atividade 02. Assim, esperase que escrevam:

$$J_{t+1} - J_t = i.(D_0 - t.A) - i[D_0 - (t-1).A]$$
$$J_{t+1} - J_t = i.D_0 - i.t.A - i.D_0 + i.t.A - i.A$$
$$J_{t+1} - J_t = -i.A$$

Logo, a progressão aritmética formada pelos juros no SAC tem razão $r = -i.A = (-i.D_0)/n$ e o primeiro termo é $J_1 = i.D_0$. Usando o termo geral da progressão aritmética, trocando a variável n para t e realizando as substituições necessárias teremos a fórmula para o cálculo dos juros no sistema de amortização SAC pois

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$
$$J_t = J_1 + (t-1).r$$
$$J_t = i.D_0 + (t-1).\frac{D_0}{n}.(-i)$$
$$J_t = \frac{n.i.D_0 - i.(t-1).D_0}{n}$$
$$J_t = \frac{n.i.D_0 - i.t.D_0 + i.D_0}{n}$$
$$J_t = \frac{D_0}{n}.i.(n+1-t)$$

onde J_t são os juros no período t, D_0 é o valor financiado e n era o número de parcelas.

Atividade 04: Construir a fórmula da parcela a ser paga em cada período no SAC a partir das experiências anteriores.

Nesse momento, os alunos já chegaram nas expressões para o saldo devedor e para os juros no SAC. Devem achar agora uma expressão algébrica que corresponda a parcela a ser paga em dado período. O professor deve pedir para os alunos observarem a tabela, eles devem notar que cada parcela, seja qual for t, é obtida pela soma da amortização, que é constante no sistema SAC, e os juros do período. Dessa forma, obtemos que

$$P_t = A + J_t$$
$$P_t = \frac{D_0}{n} + \frac{D_0}{n}.i.(n+1-t)$$
$$P_t = \frac{D_0}{n}.[1 + i.(n+1-t)]$$

Dessa forma, sabendo o valor financiado D_0, a taxa de juros i e o números de parcelas n, podemos determinar qualquer prestação com a expressão acima.

Atividade 05: Construir a fórmula do montante pago em financiamento no SAC a partir das experiências anteriores.

O professor tem que alertar que além de saber o valor das parcelas, para analisar se cabe no orçamento mensal, ao financiar um bem é fundamental saber o montante pago ao final do contrato. Isso é um importante aspecto a ser considerado na hora de escolher qual sistema de amortização utilizar. Observando na tabela 04 que as prestações têm uma queda constante, ou seja, também forma uma progressão aritmética, assim a razão

$$r = P_t - P_{t-1}$$

$$r = \frac{D_0}{n}.[1 + i.(n + 1 - t)] - \frac{D_0}{n}.\left[1 + i.\left(n + 1 - (t - 1)\right)\right]$$

$$r = \frac{D_0}{n} + \frac{D_0}{n}.n.i + \frac{D_0}{n}.i - \frac{D_0}{n}.t.i - \frac{D_0}{n} - \frac{D_0}{n}.n.i - \frac{D_0}{n}.i + \frac{D_0}{n}.t.i - \frac{D_0}{n}.i$$

$$r = -\frac{D_0}{n}.i = -i.A$$

Assim, o montante pago no SAC é a soma de todas prestações e pode ser encontrado usando a fórmula dos n termos de uma progressão aritmética, trocando novamente a variável n para t e realizando as substituições necessárias, temos que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \Rightarrow M_t = \frac{(P_1 + P_t).t}{2}.$$

Como $P_t = \frac{D_0}{n}.[1 + i.(n + 1 - t)]$. Para a primeira prestação $t = 1$, teremos

$$P_1 = \frac{D_0}{n}.[1 + i.(n + 1 - 1)] = \frac{D_0}{n}.(1 + i.n) = \frac{D_0}{n} + D_0.i$$

E agora a última prestação, fazendo $t = n$, obtemos

$$P_t = \frac{D_0}{n}.[1 + i.(n + 1 - n)] = \frac{D_0}{n}.(1 + i) = \frac{D_0}{n} + \frac{D_0}{n}.i$$

Substituindo P_1 e P_t em M_t, tem se

$$M_t = \frac{\left(\frac{D_0}{n} + D_0.i + \frac{D_0}{n} + \frac{D_0}{n}.i\right).n}{2} = \frac{\left[\frac{D_0}{n}.(1 + i.n + 1 + i)\right].n}{2} \Longrightarrow$$

$$M_t = \frac{D_0}{2}.[2 + i.(1 + n)].$$

Atividade 06: Uma casa custa R$ 50.000,00. José adquire a casa com uma entrada de R$ 20.000,00 e financia os outros R$ 30.000,00 durante 24 meses em um dos bancos que constam na tabela 02 e com o sistema de amortização Price. Escolha uma das taxas de juros dos bancos acima e construa a planilha de amortização desse financiamento, nela deve constar em cada período o valor da amortização, dos juros, da prestação e o saldo devedor do período.

Ainda com o auxílio do software Microsoft Excel, nessa atividade os alunos podem utilizar as mesmas letras para representar as variáveis e continuar com o mesmo banco escolhido na atividade 01.

Continuando com taxa de 0,91% ao mês da Caixa Econômica teremos a planilha incialmente

Tabela 07 – Cabeçalho da tabela de amortização Price

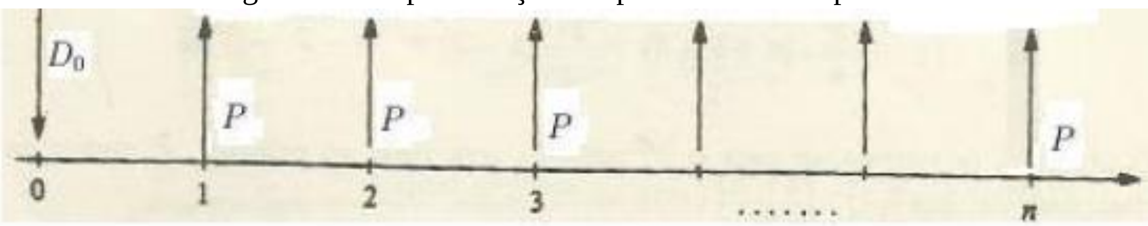
Price	
Valor de venda do Imóvel:	R$ 50.000,00
Valor da entrada dado:	R$ 20.000,00
Valor financiado:	R$ 30.000,00
Valor de Juros Pagos:	0,91%
Número de Parcelas:	24
VALOR REAL PAGO PELO IMÓVEL:	R$ 33.530,91
PERCENTUAL PAGO A MAIS:	12%

Fonte: acervo da autora

Os alunos devem lembrar que no sistema Price as parcelas são constantes, podemos indicar apenas por P. Os juros em cada período são calculados da mesma forma que no sistema SAC, incidido sobre o saldo devedor do período anterior e a amortização é obtida pela diferença entre o valor da prestação e o valor dos juros do período.

Com a intenção de determinar como é calculado o valor das prestações, o professor pode construir o seguinte esquema, que representa os valores das prestações a serem pagas em cada período:

Figura 18 – Representação das parcelas de cada período



Fonte: PUCCINI (1986)

Em conjunto, professor e alunos podem analisar cada pagamento, afim de obter informações de como é calculado o valor de cada parcela.

Devem observar que o pagamento da parcela P depois de um mês (data 1) equivale a um pagamento no dia do financiamento (data 0) de V_1, tal que:

$$V_1.(1+i) = P \Rightarrow V_1 = \frac{P}{(1+i)},$$

isto é, aplicando a taxa de juros i sobre V_1 e somando com V_1, obtemos o valor de P, a ser pago na data 1.

O pagamento da parcela P depois de dois meses (data 2) equivale a um pagamento no dia do financiamento (data 0) de V_2, tal que:

$$V_2.(1+i)^2 = P \Rightarrow V_2 = \frac{P}{(1+i)^2}$$

ou seja, aplicando sobre V_2, juros compostos com a taxa de i ao mês por dois meses seguidos, para obter o valor P, a ser pago na data 2.

O pagamento da parcela P depois de três meses (data 3) equivale a um pagamento no dia do financiamento (data 0) de V_3, tal que:

$$V_3.(1+i)^3 = P \Rightarrow V_3 = \frac{P}{(1+i)^3}$$

Aplicando sobre V_3, juros compostos com a taxa de i ao mês por três meses consecutivos, para obter o valor P, a ser pago na data 3.

Repetindo o procedimento para as demais prestações, teremos que o valor financiado é

$$D_0 = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$$

$$D_0 = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

$$D_0 = P.\left(\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

Observe que a sequência

$$\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

forma uma progressão geométrica, em que o primeiro termo é $1/(1+i)$, a razão é $1/(1+i)$ e a quantidade de termos é n. Assim, como a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$$

e então,

$$D_0 = P.\left(\frac{\frac{1}{1+i}.\left(\frac{1}{(1+i)^n}-1\right)}{\frac{1}{1+i}-1}\right) = P.\left(\frac{\frac{1}{1+i}.\left(\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right)}{\frac{1-1-i}{1+i}}\right) =$$

$$= P.\left(\frac{\frac{1}{1+i}.\left(\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right)}{\frac{-i}{1+i}}\right) = P.\left[\frac{1}{1+i}.\left(\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right).\left(\frac{1+i}{-i}\right)\right] \Rightarrow$$

$$D_0 = P.\frac{(1+i)^n-1}{i.(1+i)^n}.$$

Isolando P, teremos a expressão procurada

$$P = D_0.\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n-1},$$

que nos dá o valor da prestação fixa no sistema Price.

Assim como na atividade 01 o professor deve propor que novamente que os estudantes nos cadernos ou em folhas de ofício construam dos dados pedidos para os cinco primeiros períodos de tempos no sistema Price, para novamente eles realizarem a construção manual e observar os padrões de construção. Depois no Excel, temos uma tabela do tipo abaixo.

Tabela 08 – Amortização pelo Price

Price				
Valor de venda do Imóvel:				R$ 50.000,00
Valor da entrada dado:				R$ 20.000,00
Valor financiado:				R$ 30.000,00
Valor de Juros Pagos:				0,91%
Número de Parcelas:				24
VALOR REAL PAGO PELO IMÓVEL:				R$ 33.530,91
PERCENTUAL PAGO A MAIS:				12%
t	**Dt**	**At**	**Jt**	**Pt**
0	R$ 30.000,00			
1	R$ 28.875,88	R$ 1.124,12	R$ 273,00	R$ 1.397,12
2	R$ 27.741,53	R$ 1.134,35	R$ 262,77	R$ 1.397,12
3	R$ 26.596,85	R$ 1.144,67	R$ 252,45	R$ 1.397,12
4	R$ 25.441,77	R$ 1.155,09	R$ 242,03	R$ 1.397,12
5	R$ 24.276,16	R$ 1.165,60	R$ 231,52	R$ 1.397,12
6	R$ 23.099,96	R$ 1.176,21	R$ 220,91	R$ 1.397,12
7	R$ 21.913,04	R$ 1.186,91	R$ 210,21	R$ 1.397,12
8	R$ 20.715,33	R$ 1.197,71	R$ 199,41	R$ 1.397,12
9	R$ 19.506,72	R$ 1.208,61	R$ 188,51	R$ 1.397,12
10	R$ 18.287,11	R$ 1.219,61	R$ 177,51	R$ 1.397,12
11	R$ 17.056,40	R$ 1.230,71	R$ 166,41	R$ 1.397,12

12	R$ 15.814,49	R$ 1.241,91	R$ 155,21	R$ 1.397,12
13	R$ 14.561,28	R$ 1.253,21	R$ 143,91	R$ 1.397,12
14	R$ 13.296,67	R$ 1.264,61	R$ 132,51	R$ 1.397,12
15	R$ 12.020,55	R$ 1.276,12	R$ 121,00	R$ 1.397,12
16	R$ 10.732,82	R$ 1.287,73	R$ 109,39	R$ 1.397,12
17	R$ 9.433,36	R$ 1.299,45	R$ 97,67	R$ 1.397,12
18	R$ 8.122,09	R$ 1.311,28	R$ 85,84	R$ 1.397,12
19	R$ 6.798,88	R$ 1.323,21	R$ 73,91	R$ 1.397,12
20	R$ 5.463,62	R$ 1.335,25	R$ 61,87	R$ 1.397,12
21	R$ 4.116,22	R$ 1.347,40	R$ 49,72	R$ 1.397,12
22	R$ 2.756,56	R$ 1.359,66	R$ 37,46	R$ 1.397,12
23	R$ 1.384,52	R$ 1.372,04	R$ 25,08	R$ 1.397,12
24	R$ 0,00	R$ 1.384,52	R$ 12,60	R$ 1.397,12

Fonte: acervo da autora

Os comandos usados foram:

- Valor financiado: Na célula K4, digitar $= K2 - K3$;
- Saldo devedor (D_0): Na célula H12, digitar $= \$K\$4$;
- Parcela (P_1): Na célula K13, digitar $= \$K\$4 * (\$K\$5 * (1 + \$K\$5)\text{^}\$K\$6/((1 + \$K\$5)\text{^}\$K\$6 - 1))$, fórmula encontra para o valor da parcela fixa.
- Juros (J_1): Na célula J13, digitar $= \$K\$5 * H12$;
- Amortização (A_1): Na célula I13, digitar $= K13 - J14$;
- Saldo devedor (D_1): Na célula H13, digitar $= H12 - I13$;
- Faça a seleção dessas quatros primeiras células que foram preenchidas, aguardem surgir uma cruz fina do canto inferior da última célula selecionada, pressione o botão esquerdo do mouse e arraste para baixo até a 36ª linha;
- Para calcular o valor real pago pelo imóvel, a soma da coluna parcelas, digite na célula K8, $= SOMA(K13{:}K36)$;
- O percentual pago a mais, na célula K9 digitar $= (K8 - K4)/K4$, e na barra de ferramentas escolher o estilo porcentagem.

Agora os alunos dispõem de uma tabela construída no sistema SAC e a outra no sistema Price. Os dados apresentados nas planilhas podem ser organizados em gráficos e mostrados de uma forma mais clara e objetiva, pois facilitam a análise e interpretações. Para isso, basta selecionar as colunas amortização e juros em cada tabela e na barra de ferramentas clicar em inserir gráficos, o programa já disponibiliza uma opção, mas pode ser modificada, ficando a critério dos estudantes o que eles considerarem mais adequado aos dados. Um exemplo são os gráficos a seguir.

Gráfico 03 – Amortização e Juros no SAC

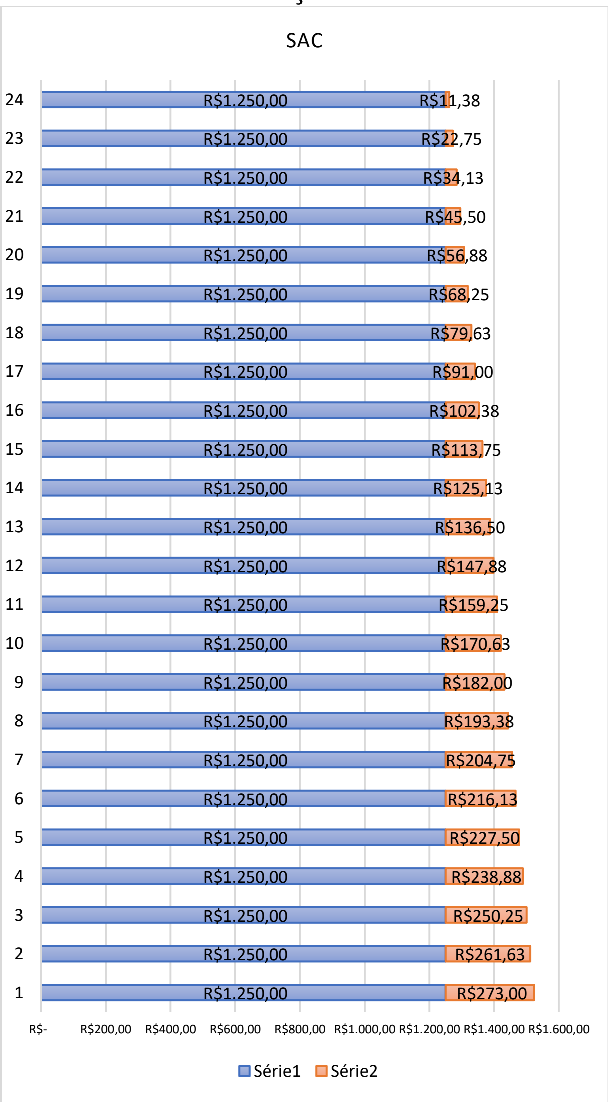
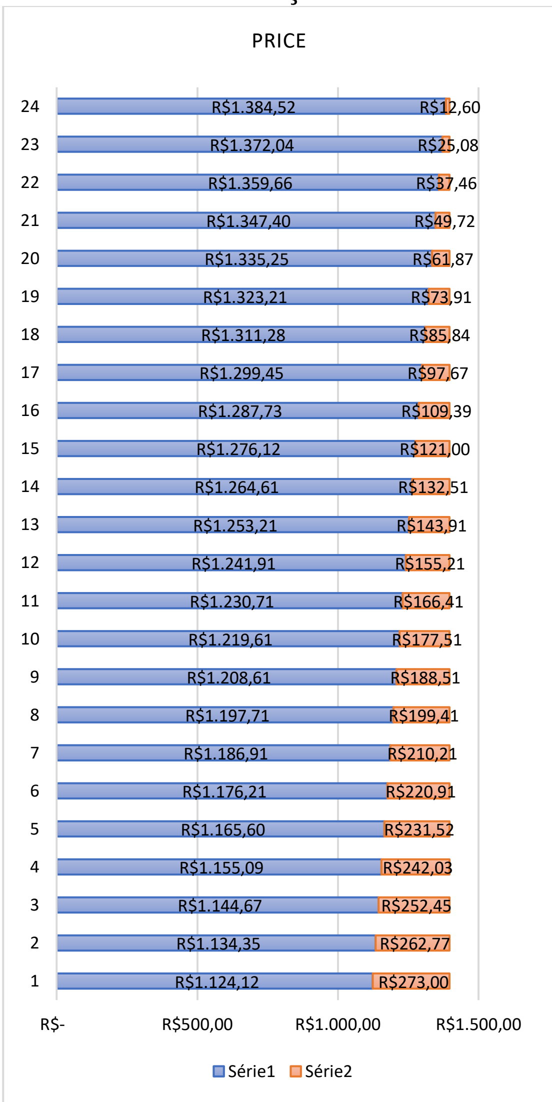


Gráfico 04 –Amortização e Juros no Price



Fonte: acervo da autora

Podemos fazer diversas observações e comparações tais como que pelo sistema Price as primeiras parcelas são mais baixas comparadas às primeiras do SAC. Entretanto, como as parcelas pelo SAC vão diminuindo, em determinado momento a parcela pelo SAC fica menor, ao ponto de o saldo final do financiamento por esta última modalidade ficar mais barato.

O professor pode observar caso os alunos não tenham feito essa observação que na atividade 01 e 06, fizeram o estudo de caso derivado da situação problema proposta, mas não permite afirmar corretamente qual sistema de amortização escolher, para isso, propõe-se mais algumas atividades.

Atividade 07: Construir a fórmula do saldo devedor no Price a partir das experiências anteriores.

Na atividade 06, os estudantes acharam que o valor financiado D_0 é

$$D_0 = P.\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}.$$

Seja D_t o valor da dívida após o pagamento da parcela no período t. Então, a dívida será totalmente paga após $n-t$ prestações consecutivas e iguais a P, já que nestas prestações está incluso os valores das amortizações. Dessa forma, o saldo devedor D_t é dado por

$$D_t = P.\frac{(1+i)^{n-t} - 1}{i.(1+i)^{n-t}}.$$

Os alunos já encontraram como calcular P, substituíndo temos:

$$D_t = \frac{D_0.i.(1+i)^n}{[(1+i)^n - 1]}.\frac{[(1+i)^{n-t} - 1]}{i.(1+i)^{n-t}} = \frac{D_0.i.(1+i)^n}{[(1+i)^n - 1]}.\frac{\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)^t}\right]}{\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^t}} =$$

$$= \frac{D_0.[(1+i)^n - (1+i)^t]}{[(1+i)^n - 1]} = \frac{\frac{D_0.[(1+i)^n - (1+i)^t]}{(1+i)^n}}{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}} = \frac{D_0.[1 - (1+i)^{t-n}]}{[1 - (1+i)^{-n}]}.$$

Atividade 08: Construir a fórmula dos juros cobrados em cada período no sistema de amortização Price a partir das experiências anteriores.

O docente deve lembrar que nos sistemas amortização, os juros são calculados multiplicando a taxa de juros pelo saldo devedor do período anterior, ou seja,

$$J_t = i.D_{t-1}$$

Substituindo D_{t-1} com a relação encontrada na atividade 07, temos

$$J_t = i.\frac{D_0.\left[1 - (1+i)^{(t-1)-n}\right]}{[1 - (1+i)^{-n}]} = i.\frac{D_0.[1 - (1+i)^{t-n-1}]}{[1 - (1+i)^{-n}]}.$$

Atividade 09: Construir a fórmula do montante pago em financiamento no Price a partir das experiências anteriores.

Como já foi visto pelos estudantes algumas vezes, no sistema Price as prestações têm valores constantes, para encontrar o valor do montante total pago, basta efetuar a multiplicação entre o número de prestações pelo valor de cada uma, ou seja,

$$M_t = n.P = n.D_0.\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = D_0.\frac{i.n}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Comparado o mesmo exemplo sob os dois sistemas, nas mesmas condições como foi realizado, temos que o SAC é mais vantajoso, pois o montante gerado foi de R$ 33.412,50 e no sistema Price, o montante foi de R$ 33.530,91, significando uma economia de R$ 118,41. A desvantagem do SAC está no fato das prestações mais altas no início, quando comparadas com as prestações do sistema Price. Isso deve ser observado pois muitas vezes a preocupação é apenas se o valor da parcela caber no orçamento mensal, isso é uma armadilha de consumo que encanta os consumidores com anúncios do tipo “temos a prestação que cabe no seu bolso”.

Atividade 10: Adaptado de Puccini (1986) - Um financiamento com valor de D_0 pode ser financiado pelo Sistema de Amortizações Constante (SAC) ou Price. Em ambos os casos o prazo será de n períodos, a taxa será i %, por período e os juros obedecerão ao regime de juros compostos. Determine a partir de que período t $(1 \leq t \leq n)$ o valor da prestação do SAC, será menor do que o valor da prestação do Sistema Francês.

Para determinar o momento em que a prestação no sistema SAC é menor que a do sistema Francês, os alunos vão buscar o valor de t, onde $P_{SAC} < P_P$, para isso basta utilizar as relações encontradas na atividade 04 e 06. Assim,

$$\frac{D_0}{n}.[1 + i.(n+1-t)] < D_0.\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow 1 + i.(n+1-t) < \frac{n.i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow$$

$$i.(n+1-t) < \frac{n.i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - 1 \Rightarrow (n+1-t) < \frac{n.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{1}{i} \Rightarrow$$

$$-t < \frac{n.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{1}{i} - n - 1 \Rightarrow t > \frac{1}{i} + 1 + n - \frac{n.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow$$

$$t > \frac{1+i}{i} + n.\left(1 - \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right).$$

Com essa relação, pode-se determinar a partir de que período o valor da parcela do SAC se torna menor que a parcela do sistema Francês. No caso das atividades 01 e 06, onde $n = 24$ e $i = 0{,}91\%$ teríamos

$$t > \frac{1 + 0{,}0091}{0{,}0091} + 24.\left(1 - \frac{(1 + 0{,}0091)^{24}}{(1 + 0{,}0091)^{24} - 1}\right) \Rightarrow t > 12{,}0662.$$

Assim, a partir do 13º período, a prestação do SAC se torna mais barata, o que pode ser visualizado nas tabelas 04 e 08.

Voltando a situação problema proposta no início: *Ao tentar comprar uma casa cujo valor à vista é de V. O comprador recorre a um banco e consegue financiamento do imóvel sendo que paga uma entrada E e financia o restante D_0 em n meses a uma taxa i % ao mês. Qual sistema de amortização é mais vantajoso para ser usado em um financiamento, SAC ou Francês?*

Os estudantes já viram como construir as tabelas em cada sistema de amortização, e como calcular amortização, juros, saldo devedor em cada período e o montante total. Com o auxílio do GeoGebra pode-se construir simulações que permitam analisar e comparar o comportamento deles em cada período, nos dois sistemas de amortização, variando o valor do financiamento, da taxa de juros e do número de parcelas. Para isso, vamos chamar a variável período (t) de x e o valor financiado (D_0) de D. A parcela de cada período no sistema SAC e no Price ficariam, respectivamente,

$$P_{sac}(x) = \frac{D}{n}.[1 + i.(n + 1 - x)] \text{ e } P_{price}(x) = D.\frac{i.(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}.$$

A intenção é generalizar a situação, porém, esses parâmetros já são estabelecidos pelas instituições financeiras e iremos trabalhar com eles.

Primeiramente, ao abrir o GeoGebra vamos fazer alguns ajustes, deve-se clicar na janela de visualização com o lado direito do mouse e selecionar a ferramenta “janela de visualização”. Surgirá uma caixa no lado direito da tela e, então, modificar o eixo Y de 1 para 1000 e depois em barra superior escolher OPÇÕES, ARREDONDAMENTO, escolher 4 CASAS DECIMAIS e clicar. Tais ações são mostradas nas Figuras 19 e 20.

Figura 19 –Janela de Visualização

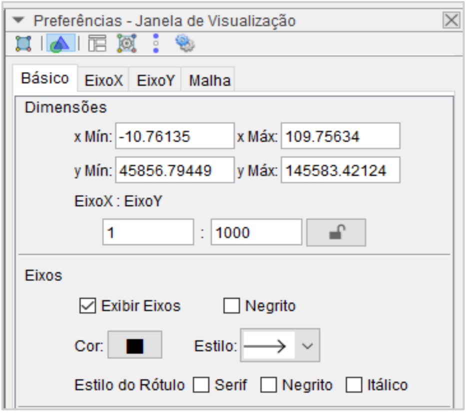
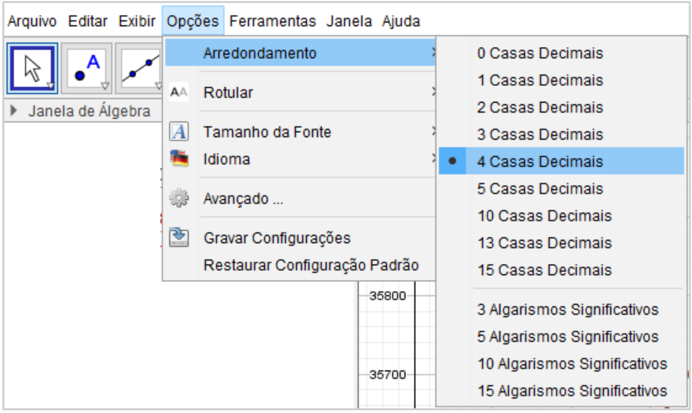


Figura 20 – Arredondamento no GeoGebra



Fonte: acervo da autora

No caso do valor financiado cada banco determina uma faixa a ser contratada. De acordo com as pesquisas, tem-se um mínimo de R$10.000,00 e máximo de R$1.500.000,00. Nesse trabalho, consideramos a cidade pequena de Limoeiro do Norte-Ceará e então, o limite máximo será de R$500.000,00. Em relação ao número de prestações, o maior prazo dados pelos bancos é de 35 anos, ou seja, 420 meses e decorrido apenas 1 mês, os montantes são iguais. As taxas de juros mensais variam muito, mas não ultrapassam 10% ao mês e com isso, as taxas ficaram entre 0,1% a 10% ao mês.

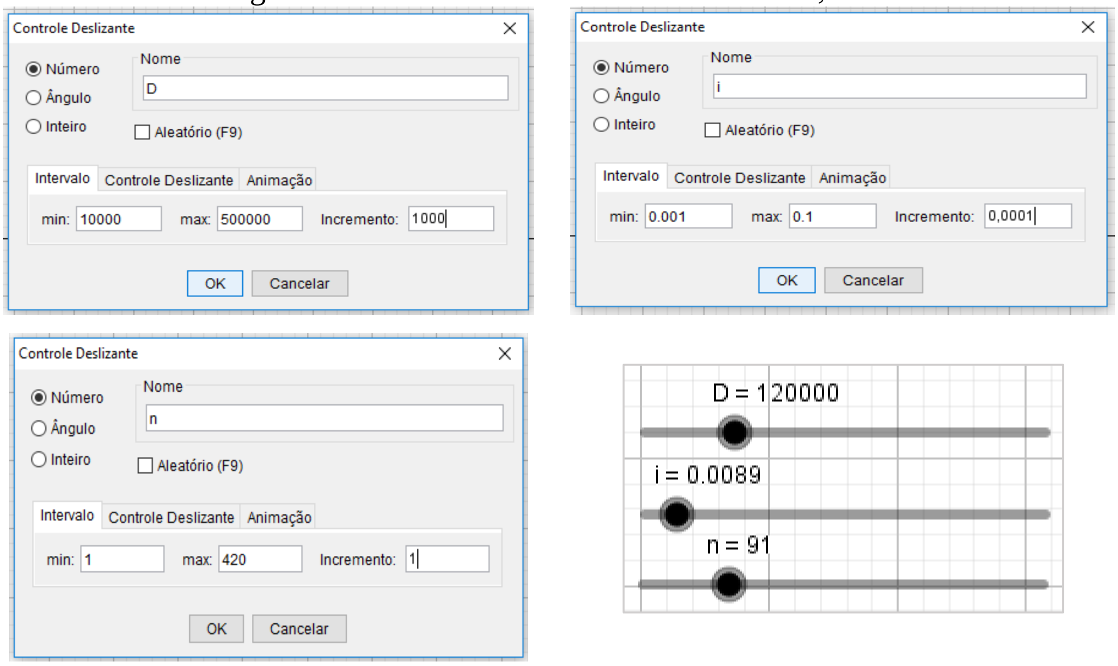
Depois o professor deve apresentar a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE, ela que permite ajustar parâmetro em um intervalo de valores pré-definidos quando o usuário move o marcador. Como nessa situação trata-se de um financiamento imobiliário, temos três parâmetros a considerar, o valor do financiamento (D), a taxa mensal de juros $(i\ \%)$ e o número de parcelas (n). Para ativar essa ferramenta CONTROLE DESLIZANTE, basta clicar inserir. Uma imagem é mostrada na Figura 21.

Figura 21 – Controle deslizante

Fonte: acervo da autora

Abaixo temos os dados para os dois controles deslizantes, o valor do financiamento (D), a taxa mensal de juros $(i\%)$ e o número de prestações (n), respectivamente

Figura 22 – Dados dos controles deslizantes *D*, *i* e *n*



Fonte: acervo da autora

Agora, vamos adicionar as duas funções que representam a parcela de cada período no sistema SAC e no Price no canto inferior da tela, na barra de entrada. Teremos então,

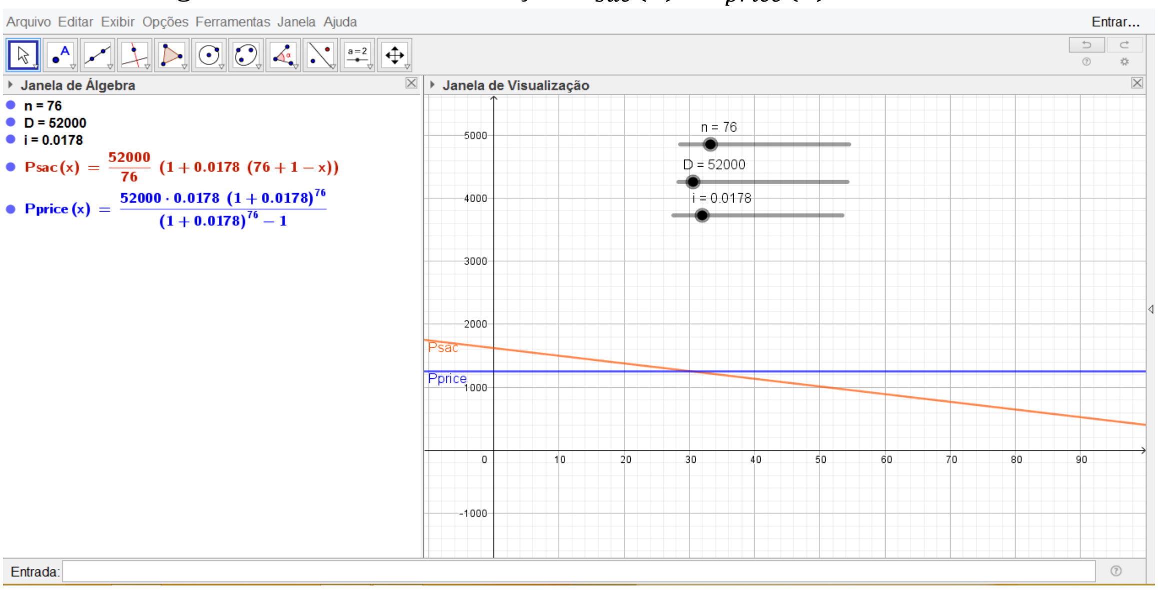
Tabela 09 – Funções dos valores das parcelas em cada sistema de amortização

$P_{sac}(x) = (D/h) * (1 + i * (n + 1 - x))$	$P_{price}(x) = (D * i * ((1 + i)^\wedge(n)))/(((1 + i)^\wedge(n)) - 1)$

Fonte: acervo da autora

Temos então as funções da seguinte forma

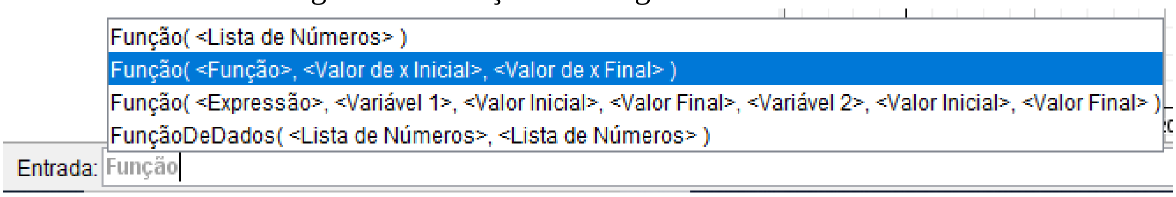
Figura 23 – Gráficos das funções $P_{sac}(x)$ e $P_{price}(x)$ no GeoGebra



Fonte: acervo da autora

Ao mover os marcadores ou animando os controles deslizantes os gráficos vão mudando. Agora na barra de Entrada, vamos digitar a palavra função, vão surgir algumas opções, deve-se escolher, a opção Função(<Função>,<Valor de x inicial>,<Valor de x final>), como mostra a figura a seguir

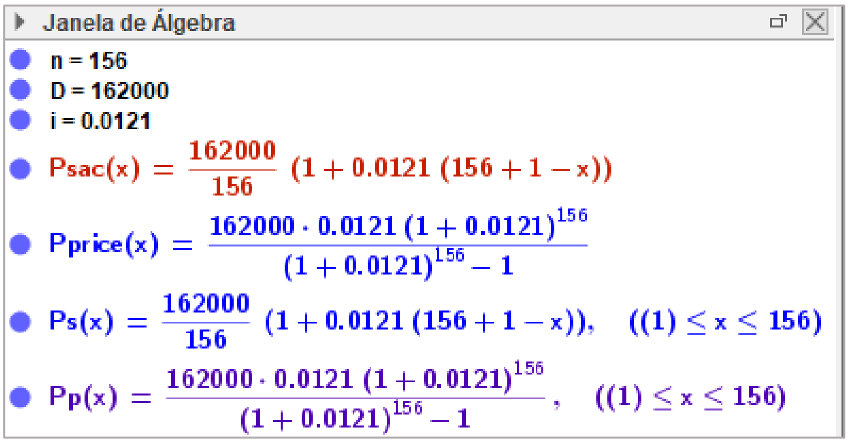
Figura 24 – Função a ser digitada no GeoGebra



Fonte: acervo da autora

Na sequência, apagando as três palavras entre parênteses e digita-se as seguintes informações, assim como está na imagem.

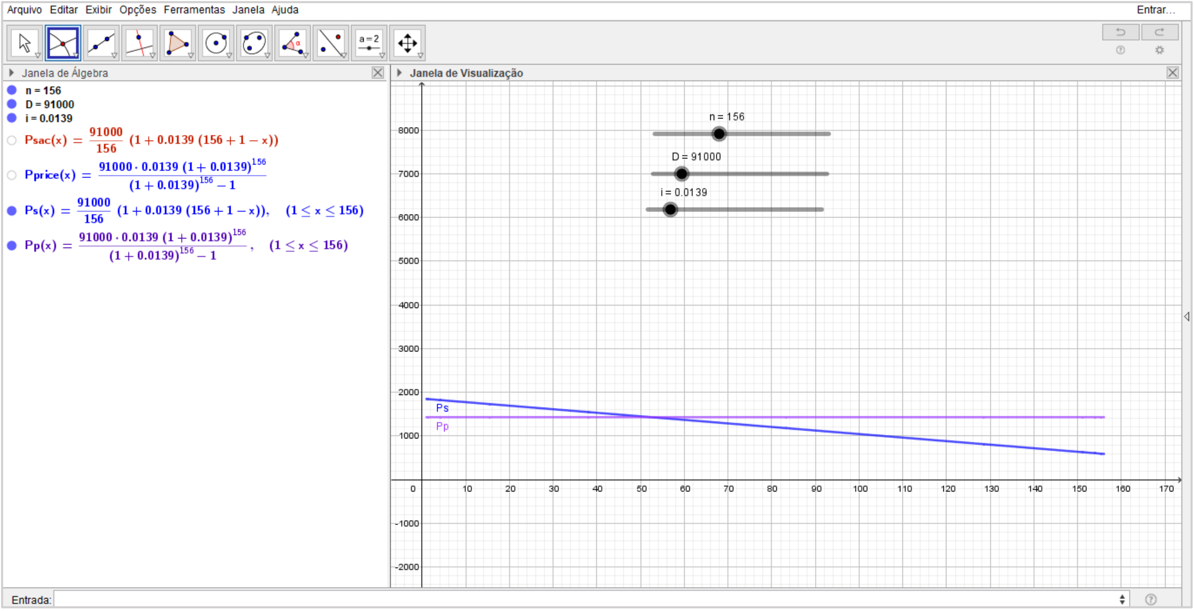
Figura 25 – Funções das parcelas com domínio restrito



Fonte: acervo da autora

Posteriormente, deve-se clicar na bolinha azul de $P_{sac}(x)$ e $P_{price}(x)$ e assim teremos só os gráficos das funções em que o número x de parcelas tem domínio de $1 \leq x \leq n$.

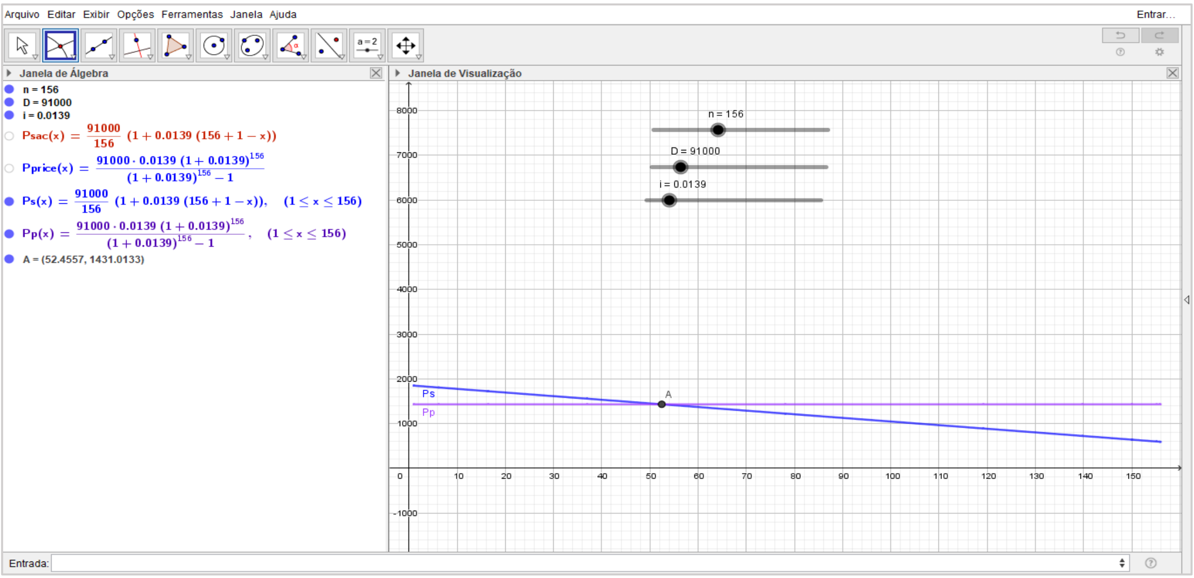
Figura 26 – Funções de parcelas com domínio restrito



Fonte: acervo da autora

Como pode-se observar, os gráficos se cruzam e para determinar a interseção basta clicar na segunda janela, selecionar a Interseção de Dois Objetos e depois clicar em cada gráfico. Temos então,

Figura 27 – Ponto A de interseção dos Gráficos das Funções das parcelas



Fonte: acervo da autora

O ponto de interseção representa o momento em que as parcelas do sistema SAC e Price são iguais, antes dele as parcelas do Price eram menores e após, são maiores. Pode se inserir as funções dos juros na animação ainda chamando a variável período (t) de x e o valor financiado (D_0) de D. As funções dos juros do sistema SAC e do Price são, respectivamente

$$J_{sac}(x) = \frac{D}{n}.i.(n+1-t) \text{ e } J_{price}(x) = \frac{i.D.[1-(1+i)^{x-n-1}]}{1-(1+i)^{-n}}$$

Acrescentando as duas funções que representam os juros de cada período no sistema SAC e no Price no canto inferior da tela, na barra de entrada. Obtemos,

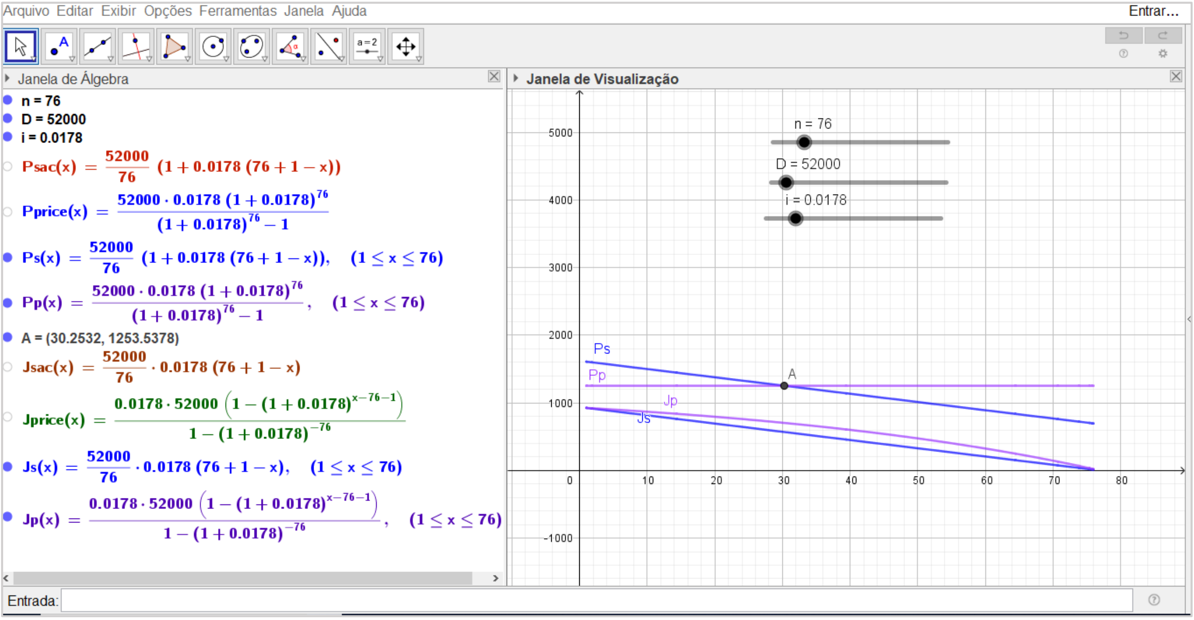
Tabela 10 – Funções dos valores dos juros em cada sistema de amortização

$J_{sac}(x) = (D/n) * i * (n+1-x)$	$J_{price}(x) = ((D * i) * ((1-(1+i)^\wedge(x-n-1)))/(1-(1+i)^\wedge(-n))$

Fonte: acervo da autora

Por fim, escolher a opção Função(<Função>,<Valor de x inicial>,<Valor de x final>) e repetir o procedimento anterior com essas funções. A construção é mostrada na Figura 31.

Figura 28 – Gráficos das Funções das parcelas e dos juros com domínio restrito



Fonte: acervo da autora

Animando os controles deslizantes dos gráficos, os juros em cada período são maiores no sistema Price. No sistema SAC, os juros decrescem linearmente, enquanto que no sistema Price, formam uma curva.

Para finalizar, o professor deve comparar os montantes que seriam pagos no total em cada sistema de amortização, então sugere-se pedir aos alunos para abrir mais outra janela do GeoGebra pois essa análise será um pouco distinta das anteriores já que os parâmetros serão apenas o valor do financiamento (D), a taxa mensal de juros $(i\%)$ e o número de parcelas (n) é que será a variável x. Assim, a função que mostrará qual o valor pago em um financiamento depende do número de parcelas escolhidas. Será necessário fazer os ajustes que foram feitos na construção anterior de arredondamento para 4 casas decimais e nos eixos de 1:100.

A função do montante no SAC e Price, respectivamente

$$M_{sac}(x) = \frac{D}{2}.[2 + i.(1 + x)] \text{ e } M_{price}(x) = \frac{D.i.x}{1 - (1 + i)^{-x}}.$$

A seguir, na tabela 11, tem-se a maneira que deve ser digitada na caixa de entrada

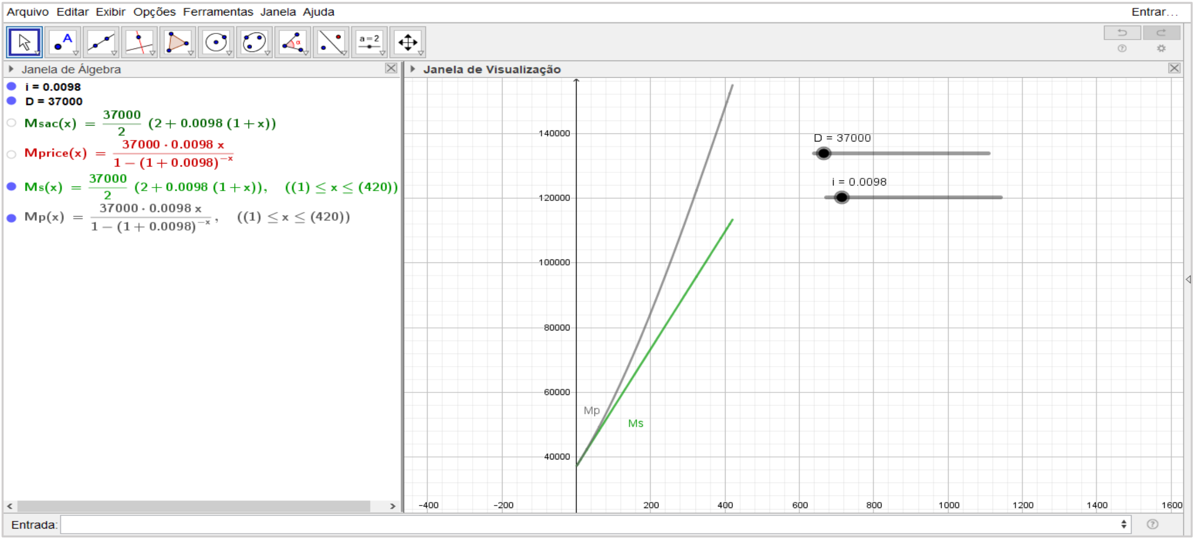
Tabela 11 – Funções dos valores dos montantes em cada sistema de amortização

$M_{sac}(x) = (D/2) * (2 + i * (1 + x))$	$M_{price}(x) = (D * i * x)/(1 - (1 + i)\char`^(-x))$

Fonte: acervo da autora

Novamente, escolhendo a opção Função(<Função>,<Valor de x inicial>,<Valor de x final>) e usando os passos realizados anteriormente com essas funções, só que o valor de x final é 420. No programa aparece as duas funções da seguinte forma

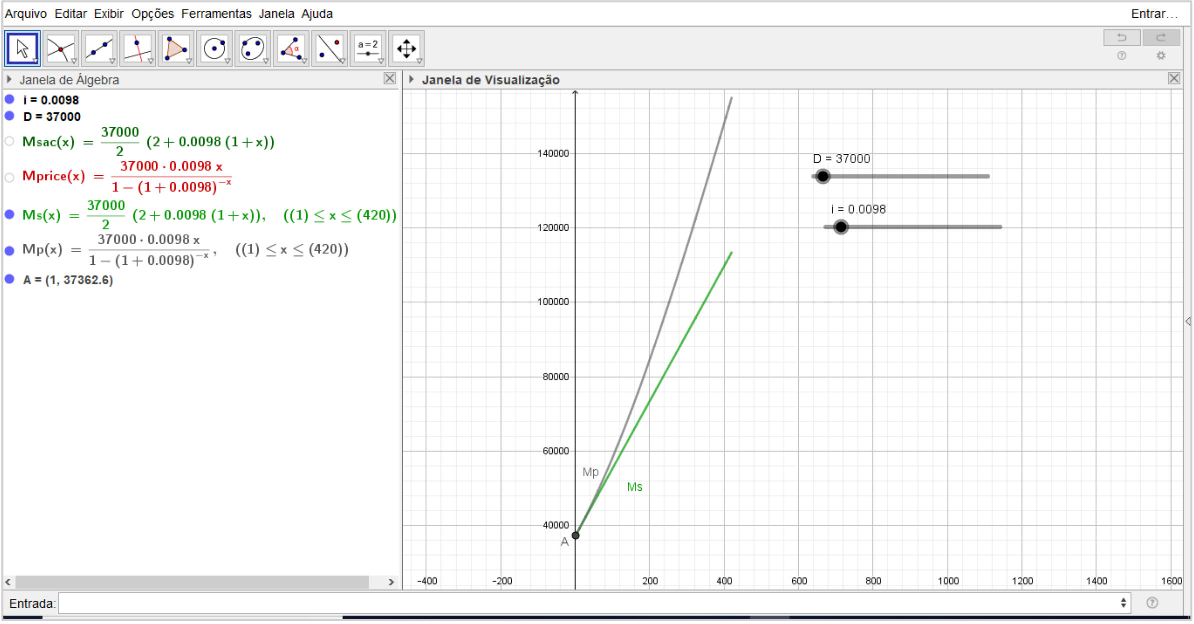
Figura 29 – Gráficos das Funções dos montantes com domínio restrito



Fonte: acervo da autora

À medida que o número de parcelas aumenta, maior será o montante pago ao final do financiamento e maior a diferença entre os valores pagos nos dois sistemas de amortização. Ao mover os marcadores ou animando os controles deslizantes, o gráfico verde do montante no SAC sempre fica sobre ou abaixo do gráfico roxo do montante no Price, ou seja, ou eles são iguais ou o montante gerado no Price é maior. Fazendo a interseção dos dois gráficos, chegamos à Figura 30.

Figura 30 – Ponto A de interseção dos Gráficos das Funções dos montantes



Fonte: acervo da autora

O único ponto de interseção é quando o financiamento é dividido em uma parcela, pois o dinheiro seria amortizado em uma única parcela e só iria ser cobrado juros uma vez. Daí espera-se que os estudantes concluem que nas mesmas condições de valor financiado, duração e taxa de juros, o montante resultante no sistema SAC é menor que no sistema Francês.

Ao final dessas dez atividades, espera-se que os alunos tenham chegado à vários modelos que permitam analisar cada uma das variáveis envolvidas em um financiamento, espera-se que os estudantes percebam que não há uma resposta fechada para a situação proposta, pois, no sistema SAC, começa-se com parcelas altas e vai diminuído até o final do financiamento e no sistema Francês o valor das parcelas são constantes, e inicialmente menores que as do sistema SAC, no entanto, se paga mais juros no sistema Francês do que no sistema SAC, já que nesse sistema a pessoa paga parcelas maiores antes, e quem paga antes, paga menos juros. O valor pago a mais dependerá da quantidade de parcelas e das taxas de juros.

4.3 – 3ª Etapa: MODELO MATEMÁTICO (Significação e Modelação)

Com as tabelas, gráficos e fórmulas produzida nos softwares Excel, GeoGebra e manualmente, os alunos avaliarão se é, ou não, significativa e relevante a solução dada - validação. Os estudantes, ao encerrarem as atividades, poderão averiguar minuciosamente se os trabalhos desenvolvidos estarão de acordo com a situação problema. O uso de softwares possibilita aos estudantes uma resposta ágil ao seu raciocínio, pois ao digitar uma equação ou um dado tem-se visualização rápida ao que foi imaginado, tornando válido ou não a lógica usada. Assim, rapidamente o estudante pode verificar, repensar ou corrigir o modelo construído.

Quanto à avaliação da proposta, o professor pode ver as dificuldades encontradas no sentido de auxiliar o estudante a vencê-las, considerando seu progresso ao longo das ações, frisando sempre que a avaliação será feita através da observação quanto à participação, ao envolvimento e interesse dos alunos no decorrer das atividades propostas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi elaborar uma proposta didática para o ensino de sistemas de amortização que fosse uma possibilidade metodológica ao ensino tradicional centrado e limitado à aplicação mecânica de fórmulas/procedimentos e conceitos neutros e abstratos.

Inicialmente, abordamos a importância do conhecimento de matemática e a necessidade de desenvolver uma postura crítica perante a grande quantidade de ofertas e promoções que nos chega diariamente do comércio. Nesse sentido, busca desenvolver os conhecimentos financeiros de forma que fosse útil para os estudantes, com vistas à aumentar seu senso crítico.

Para isso, utilizamos a Modelagem Matemática juntamente com os Sistemas de Amortização, pois a Modelagem Matemática, que surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam para decidir como se deve agir, tem como objetivo interpretar e compreender os mais diversos fenômenos existentes nas mais diversas áreas, devido ao "poder" que a modelagem proporciona pelas aplicações dos conceitos matemáticos. Através dela, pode-se descrever estes fenômenos, analisá-los e interpretá-los a fim de gerar discussões reflexivas. O uso do Excel nessa proposta para a construção das planilhas de amortização é muito enriquecedor e prático, pois, em pouco tempo e com pouco comandos, são fornecidas informações que levariam bastante tempo para serem achadas, se os cálculos fossem feitos apenas de forma manual.

Como estratégia de ensino-aprendizagem, a Modelagem Matemática, também chamada de Modelação Matemática, promove o incentivo às pesquisas, proporcionando aos alunos desenvolver a criatividade e habilidades para formulação e resolução de problemas utilizando os conteúdos matemáticos aprendidos.

Além disso, nessa proposta tratamos de questões relacionadas à sociedade e de interesse dos alunos que darão a oportunidade deles realizarem as suas escolhas, mas orientando sobre a viabilidade de ir por esse caminho desejado. Nesse sentido, essa proposta é necessária tanto por parte do professor quanto por parte dos alunos, que precisam se familiarizar com o assunto, despertando interesse e compreensão pelo tema abordado.

Espera-se que o desenvolvimento dessas estratégias proporcione mais envolvimento dos alunos, diferente do ensino tradicional, no qual busca-se, na maioria das vezes, apenas repetir o que o professor explica; a postura e a motivação dos estudantes frente ao conhecimento mudem, dando mais importância aos conteúdos que serão desenvolvidos; É e produzam mais no desenvolvimento das atividades em grupo do que tradicionalmente. Por fim, essa proposta visa proporcionar o desenvolvimento da criatividade, reflexão crítica e argumentação, oportunizando que os alunos falem, critiquem e questionem.

REFERÊNCIAS

BACEN. Banco Central do Brasil. **O Programa de Educação Financeira do Banco Central, 2012**. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/?BCEDFIN>. Acesso em: 3 jan. 2019.

BANCO MUNDIAL. **Workshop ENEF - Results of the impact evaluation into the financial education pilot project in schools in 2010**. Washington D.C., Jun 2011. Disponível em: <http://documents.worldbank.org/curated/en/2011/06/16334120/workshop-enefresultsim pact-evaluation-financial-education-pilot-project-schools-2010>. Acesso em: 15 de nov. de 2018.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. **BOLEMA**, ano 14, nº 15, p. 5 – 23, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática em Sala de Aula. **Perspectiva**, v. 27, n. 98, 2003.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática:** Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. 1999. Disponível em: <http://www.ime.unicamp .br/~biomat/bio9art_1.pdf> Acesso em: 10 nov. 2019.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2000. 127 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/ SEMTEC, 2006. v.2.

BRASIL. **Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Econômico (OCDE**), Brasília, 2005.

BUENO, V. C. **Concepções de Modelagem Matemática e Subsídios para a Educação Matemática:** Quatro maneiras de compreendê-la no cenário nacional. 2011. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, 2011.

CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. **Habitação:** Simulador de habitação. 2019. Disponível em: <http://www.caixa.gov.br/voce/habitacao/Paginas/default.aspx >. Acesso em: 05 2019.

CAMPOS, C. R. **Educação Estatística:** uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da Estatística em cursos de graduação. 2007. 242 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

CAMPOS, C.; JACOBINI, O. R.; WODEWOTZKI, M. L.L.; FERREIRA, D. H. L. Modelagem matemática como instrumento de interação entre aprendizagem curricular e reflexões críticas na sala de aula de estatística. **Augusto Guzzo Revista Acadêmica,** n. 10, dez. 2012.

CHAVES, M. I. de A.; SANTO, A. O. do E. **Um modelo de modelagem matemática para o ensino médio.** Disponível em: <www.ufpa.br/npadc/gemm/documentos/docs/ artigoCNNECIM>. Acesso em: 11 nov. 2018.

CONFEDERAÇÃO NACIONAL DO COMÉRCIO DE BENS, SERVIÇOS E TURISMO. **Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (Peic) - dezembro 2018.** Disponível em: <http://cnc.org.br/central-do-conhecimento/pes quisas/economia/pesquisa-de-endividamento-e-inadimplencia-do-consumido-11>. Acesso em: 11 nov. 2018.

D’AMBRÓSIO, N.; D’AMBRÓSIO, U. **Matemática Comercial e Financeira e Complementos de Matemática para os cursos do 2grau.** São Paulo: Companhia Editorial Nacional, 1972.

D’AQUINO, Cássia. **Educação Financeira**: Como educar seu filho. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

DUARTE, N. **A relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar:** 1987. 176 f. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos - SP, 1987.

IFRAH, G. **História Universal dos Algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

MACHADO JR, A. G. **Modelagem matemática no ensino-aprendizagem e resultados**. 2005. 142 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará. Belém, 2005.

MARCHIONI, A. P. R.; SOARES, M. de J. Uso da Tecnologia no Ensino da Matemática Financeira**. Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemát** HTEM), São Carlos, SP, 15-19 de Julho de 2013.

MEC-BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio-**2006, volume 2. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_2_internet.pdf>. Acesso em: 19 de nov. 2019.

MEC-BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

BRASIL. Ministério da Educação (1999). **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação.

MENDONÇA, L. O. **A Educação Estatística em um Ambiente de Modelagem Matemática no Ensino Médio**. 2008. 236 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2008.

PUCCINI, A.. de L. **Matemática financeira objetiva e aplicada**. 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1986.

ROSETTI JUNIOR, H. R.; SCHIMIGUEL, J. **Endividamento de jovens, educação financeira e cidadania**. 2009. Disponível em: <http://www.administradores.com.br>. Acesso: 19 dez. 2018.

ROSETTI JUNIOR, H.; SCHIMIGUEL, J. **A História do dinheiro e a Educação Matemática Financeira**. 2011. Disponível em: <http://www.administradores.com.br>. Acesso em: 19 de jan. 2019.

ROSSETI JR., H.; SCHIMIGUEL, J. Educação matemática financeira: conhecimentos financeiros para a cidadania e inclusão. **Revista Científica Internacional** Inter Science Place, ano 2, n. 9, p. 1-13. Out/nov. 2009.

SILVA, A. M.; POWELL, A. B. **Um programa de Educação Financeira para a Matemática Escolar da Educação Básica**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: RETROSPECTIVAS E PERSPECTIVAS, 11., 2013, Curitiba, Anais ... Curitiba: 2013. Disponível em: < http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2675_2166_ID.pdf> Acesso em: 15 nov. 2018.