

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

MARCELO TAVARES COSTA

**UM LIVRO PARADIDÁTICO PARA O ENSINO DE PROCESSOS DE  
CONTAGEM E COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Belém - Pará

2019

MARCELO TAVARES COSTA

**UM LIVRO PARADIDÁTICO PARA O ENSINO DE PROCESSOS DE  
CONTAGEM E COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias.

Belém - Pará

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a)

---

T2311 Tavares Costa, Marcelo  
UM LIVRO PARADIDÁTICO PARA O ENSINO DE  
PROCESSOS DE CONTAGEM E COMBINATÓRIA NO  
ENSINO FUNDAMENTAL / Marcelo Tavares Costa. — 2019.  
50 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias  
Coorientador(a): Prof. Dr. José Augusto Nunes  
Fernandes

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em  
Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas  
e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Processos combinatórios . 2. Livro paradidático. 4.  
Ensino da Matemática. I. Título.

CDD 510

---

MARCELO TAVARES COSTA

**UM LIVRO PARADIDÁTICO PARA O ENSINO DE PROCESSOS DE  
CONTAGEM E COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL**

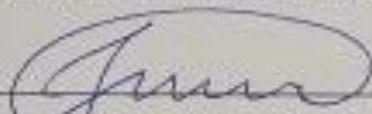
Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias.

Data da apresentação: 25 de Junho de 2019

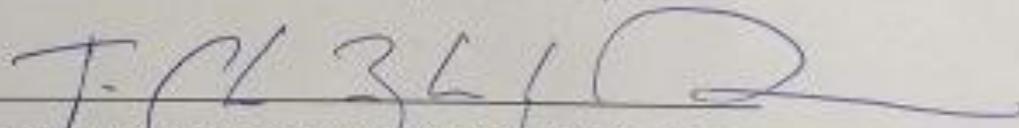
Resultado:



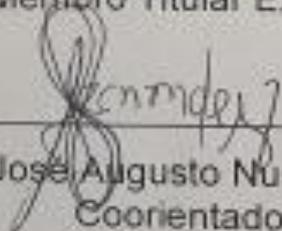
Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias  
Professor Orientador (PROFMAT)



Prof. Dra. Joelma Morbach  
Membro Titular Interno (PROFMAT)



Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma  
Membro Titular Externo



Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes  
Coorientador

Belém – Pará

2019

## DEDICATÓRIA

Trabalho dedicado ao infinito e eterno amor de Deus.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de cursar o Profmat, por todo o apoio e suporte que ele me deu utilizando como instrumentos os membros de minha família, pois sem eles acredito que jamais teria conseguido.

Ao Governo do Estado do Pará, que me concedeu licença aprimoramento, proporcionando tempo para estudar ao longo das disciplinas do Profmat.

A Prefeitura Municipal de Ananindeua, que me concedeu licença aprimoramento e bolsa de estudos, proporcionando além de tempo para estudar, a necessária ajuda financeira para custear minhas despesas no decorrer do curso.

Ao Professor Dr. José Augusto Nunes Fernandes que, além de amigo, foi meu professor desde a graduação, me orientou desde o TCC, me orientando também ao longo de minha vida como docente e, agora co-orientando este trabalho de Dissertação.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indiretamente para a realização deste curso e desenvolvimento deste trabalho.

## **RESUMO**

O presente trabalho trata sobre o ensino dos processos de contagem e combinatória no ensino fundamental. Uma análise histórica sinaliza a presença de diversos problemas em algumas civilizações relacionados a essas temáticas, mostrando a evolução das aplicações dos mesmos até os tempos atuais, e que estão relacionados a áreas de grande relevância para a sociedade, como a computação. Documentos oficiais são avaliados verificando as prescrições e as regulamentações dos mesmos para o ensino dos processos de contagem e combinatória para a educação básica, ressaltando ainda mais sua importância. Por fim, como produto do mestrado profissional Profmat, é apresentado um livro paradidático como ferramenta de auxílio nos processos de ensino e de aprendizagem da temática deste trabalho, que também consistiu na sua aplicação por meio de testes de sondagem (pré-teste e pós-teste) com a aplicação parcial do livro paradidático, verificando assim a relevância do mesmo observando-se os processos cognitivos demonstrados pelos estudantes na resolução das questões propostas nos dois momentos da aplicação da atividade proposta neste trabalho.

**PALAVRAS-CHAVE:** Processos combinatórios, Livro paradidático, Ensino da Matemática

## **ABSTRACT**

This paper deals with the teaching of counting and combinatorial processes in elementary school. A historical analysis indicates the presence of several problems in some civilizations related to these themes, showing the evolution of their applications to the present times, and which are related to areas of great relevance to society such as computing. Official documents are evaluated verifying the prescriptions and the regulations of the same ones for the teaching of the processes of counting and combinatory for the basic education, pointing still more its importance. Finally, as a product of the professional master's degree Profmat, educational book is presented as a tool to help in the teaching and learning processes of the subject of this work, which also consisted of its application through (pre-test and post- test) with the partial application of the educational book, checking the relevance of the same, looking the cognitive processes demonstrated by the students in the resolution of the questions proposed in the two moments of the application of the proposed activity in this work.

Key Word: Combinatory processes, Didactic Book, Mathematics Teaching.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Loshu .....	166
Figura 2 Quadro Mágico .....	177
Figura 3 Stomachion.....	177
Figura 4 Leitura Noturna .....	200
Figura 5 Alfabeto da língua portuguesa em Braille .....	211
Figura 6 Primeira página do pré-teste .....	26
Figura 7 Segunda página do pré-teste .....	29
Figura 8 Terceira página do pré-teste.....	300
Figura 9 Quarta página do pré-teste .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b> 1
Figura 10 Resoluções expostas pelo “Aluno 1” .....	322
Figura 11 Resoluções expostas pelo “Aluno 2” .....	333
Figura 12 Resoluções expostas pelo “Aluno 3” .....	344
Figura 13 Demais resoluções expostas pelo “Aluno 3”.....	344
Figura 14 Resoluções expostas pelo “Aluno 4” .....	355
Figura 15 Resoluções do “Aluno 5” .....	366
Figura 16 Resoluções do “Aluno 6” .....	377
Figura 17 Pós-teste .....	39
Figura 18 Resoluções do “Aluno A” .....	400
Figura 19 Resoluções do “Aluno B” .....	411
Figura 20 Resoluções do “Aluno C” .....	422
Figura 21 Resoluções do “Aluno D” .....	433
Figura 22 Resoluções do “Aluno E” .....	444
Figura 23 Resoluções do “Aluno F” .....	455

<b>SUMÁRIO</b>	
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>2 UM POUCO DA HISTÓRIA, APLICAÇÕES E APRIMORAMENTOS .....</b>	<b>15</b>
<b>2.1 Um pouco do percurso histórico .....</b>	<b>15</b>
<b>2.2 Aplicações e aprimoramentos.....</b>	<b>18</b>
<b>3 PRESCRIÇÕES E REGULAMENTAÇÕES .....</b>	<b>22</b>
<b>4 TRABALHO DE PESQUISA E TESTAGEM DE PARTE DO MATERIAL ..</b>	<b>25</b>
<b>4.1 Diagnóstico inicial.....</b>	<b>26</b>
<b>4.2 Experimentação.....</b>	<b>27</b>
4.2.1 Sobre o pré-teste.....	27
4.2.2 Sobre o pós-teste .....	38
<b>4.3 Análises posteriores e validação .....</b>	<b>46</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>47</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>48</b>
<b>APÊNDICES.....</b>	<b>50</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Por toda a parte encontramos a Matemática e a todo instante suas operações são realizadas pelos seres humanos; no entanto, a palavra Matemática quando pronunciada, escutada, lida ou até mesmo lembrada, pode gerar em uma parcela significativa da sociedade um sentimento de repúdio, mal estar ou pânico.

Aparentemente de forma robotizada, uma fração da população desenvolve cálculos matemáticos com relativo êxito, no entanto, sem ter plenamente uma noção do que está se passando e o que o resultado representa.

Pelo visto, em virtude de toda essa problemática um tanto quando preconceituosa e cultural com relação a esta importante área de conhecimento, acredita-se que os resultados relacionados a ela na educação básica estejam se mostrando um tanto quanto prejudicados; com isso, acreditamos que se faz necessário um trabalho árduo e contínuo de contribuição ao processo de Ensino da Matemática e também da aprendizagem dela, visando elevarmos a qualidade de seu entendimento.

Se o mediador do ensino da Matemática, o professor, for capaz de oferecer um ensino da Matemática de forma dinâmica, atrativa e criativa, inclusive voltado para estudos futuros de seus aprendentes, tem em mãos uma arma valiosa para desenvolver no educando o pensamento crítico, a confiança em seu potencial mental via raciocínios lógicos e o hábito de utilizar as suas competências adquiridas com autonomia, senso investigativo e, sobretudo criativo (SILVA, 2013, p.9)

Essa necessidade reforça-se, pois nos parece ser consensual que a matemática possui uma gama gigantesca de conteúdos que são aplicados nas mais diversas situações, desde as operações básicas contidas nas situações comerciais do dia-a-dia até cálculos mais avançados que permitem explorações até mesmo fora do planeta, todos com notável relevância para os avanços da sociedade como um todo.

Dentre as relevantes temáticas da Matemática na Educação Básica, este trabalho sugere um olhar especial aos temas Processos de Contagem e Combinatória, uma vez que se constituem elementos que nos parecem primordiais para desenvolver no discente o raciocínio combinatório, racionalidade esta que nos parece colaborar com o desenvolvimento e aperfeiçoamento do letramento matemático.

## Em consonância com a Matriz do Pisa 2012

O letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias. (BRASIL, 2018, p. 1)

Acreditamos ainda que, ao longo do tempo, estudos dos referidos temas facilitam a compreensão e o aperfeiçoamento do Pensamento Computacional, que no posicionamento de Brackmann (2017, p. 8)

É uma abordagem de ensino que usa diversas técnicas oriundas da Ciência da Computação e vem gerando um novo foco educacional no quesito inovação nas escolas mundiais como um conjunto de competências de solução de problemas que devem ser compreendidos por uma nova geração de estudantes em conjunto com as novas competências do século 21 (i.e., pensamento crítico, colaboração, etc...)

Esses conhecimentos servem também como introdução para linguagens de programação, que são atividades às vezes consideradas complicadas para quem se dispõe a realizá-las, onde vários discentes acabam não avançando por não conhecerem a lógica, que é de fundamental importância para aqueles que desejam aprender a programar. Se tivéssemos estudos sobre lógica desde o início da Educação Básica, os discentes poderiam adquirir esta capacidade de entendimento das proposições de maneira mais tranquila, tendo competência para resolver atividades de análise de informações e tomada de decisões.

Nesse aspecto compactuamos com Steve Jobsque, em 1995, em entrevista para produção de um documentário chamado “O triunfo dos Nerds”<sup>1</sup>, afirmou que “Todas as pessoas deveriam aprender a programar um computador, porque isso ensina a pensar”.

Os processos de Contagem e Combinatória, não somente estimulam a aprendizagem da linguagem de programação, como também fomentam o estudo da Robótica, aprimorando desta forma o raciocínio lógico e promovendo ajuda no que diz respeito a organização como um todo, melhorando a maneira da escrita e sendo um agente motivador no estudo da matemática, das ciências da natureza, bem como da

---

<sup>1</sup> Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=55nHzrZsdG4>

Língua Inglesa, além do mais, estimulando nos discentes a criatividade para desenvolver estratégias na busca de soluções para situações de problemas.

Em relação à Robótica, Silva (2009) ressalta sua importância no auxílio de atividades humanas, e como esta trata disciplinas da Educação Básica de forma colateral, mostrando adjacências entre diversas áreas do conhecimento, para ele,

A robótica é uma área de pesquisa que visa o desenvolvimento de robôs para, de algum modo, auxiliar o homem em tarefas complexas ou repetitivas. Sendo, portanto, uma área que agrega várias áreas do conhecimento, traz em si a interdisciplinaridade. Isso se mostra também na diversidade de setores em que robôs podem ser utilizados (SILVA, 2009, p. 3).

Com base nas argumentações e nos agentes motivadores que já foram citados, acreditamos que seria de fácil reconhecimento a relevância destas temáticas para o estudo da matemática e de áreas afins. Ademais, o interesse para o desenvolvimento deste trabalho acerca de Processos de Contagem e Análise Combinatória, também partiu de relatos de docentes em diálogos formais em reuniões pedagógicas em Escolas de Educação Básica, assim como em conversas informais acerca da temática, considerando suas práticas docentes, que sempre atribuem a esta temática uma notável importância assim como uma preocupante observação com relação a sua dificuldade, bem como a importância do livro didático no processo ensino aprendizagem nas escolas, sobretudo no ensino dos referidos temas ao longo do Ensino Fundamental.

Percepções de que nos livros didáticos nem sempre encontramos os temas Processos de Contagem e Combinatória, nos foram relatadas; bem como dissertaram que quando os encontramos, em geral não estão ligados ao dia a dia dos discentes, sendo apresentados de forma que nos parecem por vezes, serem superficiais, fragmentadas ou ainda, em algumas delas, sem o necessário contexto.

É na dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania (BRASIL, 2006, p. 83).

Ao analisarmos esses pontos, verificamos a necessidade de uma maior atenção a esta temática, como termos iniciativas de buscarmos novas estratégias de ensino para somar com as já existentes, almejando resultados melhores. Uma vez que uma das ferramentas mais utilizadas para os estudos é o livro didático, entretanto observamos que a mesma, por vezes, pode estar deixando a desejar.

Precisamos ter o cuidado de ao contextualizarmos, não o fazermos de maneira simplória de modo a evitarmos os problemas ditos fechados

A contextualização pode ser feita por meio da resolução de problemas, mas aqui é preciso estar atento aos problemas “fechados”, porque esses pouco incentivam o desenvolvimento de habilidades. Nesse tipo de problema, já de antemão o aluno identifica o conteúdo a ser utilizado, sem que haja maiores provocações quanto à construção de conhecimento e quanto à utilização de raciocínio matemático (BRASIL, 2006, p. 83).

A evolução da educação nos traz novos modelos educacionais, como, por exemplo, o do ponto de vista sócio construtivista, que nos apresentam as asserções de “situação-problema” e “problema aberto”.

Apesar de apresentarem objetivos diferentes, esses dois tipos de problemas colocam o aluno, guardando-se as devidas proporções, em situação análoga àquela do matemático no exercício da profissão. O aluno deve, diante desses problemas, realizar tentativas, estabelecer hipóteses, testar essas hipóteses e validar seus resultados (BRASIL, 2006, p. 84).

Ao cursarmos as disciplinas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, tivemos a possibilidade de ratificar algumas constatações vivenciadas ao longo dos anos de docência a respeito da relevância da utilização dos mais variados recursos didáticos, dentre elas a de utilizarmos os Livros Paradidáticos com o objetivo de aperfeiçoarmos o processo de ensino aprendizagem, em especial nos referidos temas em questão.

São livros e materiais que, sem serem propriamente didáticos, são utilizados para este fim. Os paradidáticos são considerados importantes porque podem utilizar aspectos mais lúdicos que os didáticos e, dessa forma, serem eficientes do ponto de vista pedagógico. Recebem esse nome porque são adotados de forma paralela aos materiais convencionais, sem substituir os didáticos (MENEZES, 2001, n.p).

Devemos reiterar a importância desta ferramenta que também é uma aliada em prol do ensino e da aprendizagem de Matemática, como destaca Menezes (2001), para quem:

A importância dos livros paradidáticos nas escolas aumentou principalmente no final da década de 90, a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), que estabeleceu os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e orientou para a abordagem de temas transversais relacionados ao desenvolvimento da cidadania(MENEZES, 2001, n. p).

Desta forma, propusemos a elaboração de um produto instrucional, como dissertação de final de curso do Profmat, que considere a prática docente do autor, a carência de referências sobre os processos de contagem e combinatória no Ensino Fundamental, para além dos livros didáticos, e que sirva como uma boa proposta de atividades paradidáticas para o ensino dos referidos temas em especial no 3<sup>o</sup> e 4<sup>o</sup> ciclos do Ensino Fundamental, acreditando que, dessa forma, estaremos dando uma colaboração como resposta as situações que antes nos referimos.

As duas histórias disjuntas que compõem os dois capítulos do livro paradidático, foram criadas com a proposta de introduzir e aplicar os referidos temas do trabalho; onde, um dos capítulos foi aplicado em um grupo de alunos, em caráter de pré-teste, objetivando verificarmos o entendimento dos discentes após leitura do material produzido.

Ainda com o intuito de avaliarmos o material, desta vez a partir de exames nacionais; selecionamos e adaptamos questões de edições anteriores do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, que constituíram um pós-teste para os alunos depois da leitura completa do material produzido.

## 2 UM POUCO DA HISTÓRIA, APLICAÇÕES E APRIMORAMENTOS

Neste capítulo explanaremos sobre alguns elementos que estão relacionados aos processos de contagem e combinatória. Faz-se importante destacarmos que todo conhecimento possui uma gênese, onde a compreensão da mesma, muitas das vezes, pode nos permitir um melhor entendimento, ou até mesmo um despertar, de uma curiosidade sobre ele, gerando uma investigação mais aprofundada, levando novamente à clareza; portanto acreditamos na importância de conhecermos a história dos temas, na ânsia de uma melhor compreensão dos mesmos.

Além de um apanhado histórico, mostraremos, de forma contemporânea, algumas aplicações das temáticas em questão, levando em consideração que um conhecimento sem aplicabilidade pode mostrar-se para os aprendentes como algo vazio, sem um “por que devemos estudá-los?”. Em contrapartida, quando conseguimos vislumbrar tais aplicabilidades, estes temas tornam-se mais bem recebidos pela comunidade geral.

Portanto, objetivamos, mostrar aqui que estes conhecimentos não estão, assim como historicamente nunca estiveram, dissociados da realidade.

### 2.1 Um pouco do percurso histórico

Encontramos algumas dificuldades na atividade de verificação do período em que tivemos a primeira resolução de um problema que culminou com o surgimento da Análise Combinatória. Nesta busca, verificamos que para Morgado *et al.* (1998) o desenvolvimento do binômio  $(1+x)^n$  por volta de três milênios a.C. já era conhecido estritamente, para a conjuntura quando o valor de  $n$  era igual a 2. Para os demais valores naturais de  $n$  maiores que 2, nos deparamos, de forma conectada com o triângulo de Pascal, já familiarizado pelos chineses, árabes e hindus por volta dos séculos XII e XIII a.C., como por exemplo, pelo hindu Baskhara, que já calculava arranjos, combinações e permutações de  $n$  elementos.

Entre os mais antigos documentos sobre análise combinatória da história, pode ser encontrado por volta do século XVII a. C. um documento onde um escriba de nome Ahmes detalhou soluções de dezenas problemas, dentre eles o de número 79, que indagava sobre o chamado problema dos “Bens” que de acordo com (BOYER, 1974,

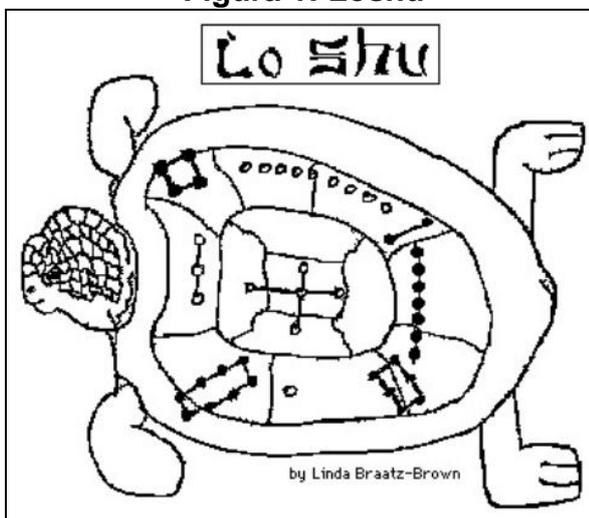
p.12) citava “sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas de trigo, 16.807 hecates”, onde este problema quer saber qual é a soma de todas as coisas citadas de forma enumerada.

Sobre a ótica do raciocínio combinatório o problema dos “Bens” sugere a aplicação de dois princípios de grande importância para a resolução de problemas em análise combinatória: o “princípio de adição” e o “princípio multiplicativo”. (BASTOS et al, 2016, p. 19)

Sobre Quadrados Mágicos, literaturas relacionadas à história da Matemática, como em Boyer (1996) e Eves (1997), relatam que o povo chinês se originou há mais de três milênios a.C. e foi instituído pelo Imperador e engenheiro Yu, às margens do Rio Amarelo, que fica situado em território Chinês. Teve prosseguimento com a dinastia Shang, por volta de 1500 a.C., e foi onde acharam-se os primeiros numerais chineses inscritos sobre couraças de quelônios.

Yu vislumbrou uma tartaruga, que, posteriormente, viria ser considerada “celestial”, porque trazia em seu casco uma simbologia quadrada que podia ser transformada em algarismos de um a nove, e que geravam sempre como resultado o número 15 quando somados na horizontal, vertical ou diagonal, como se fossem uma espécie de algarismos mágicos. A figura a seguir apresenta essa situação.

**Figura 1: Lo Shu**



Fonte:Disponível em <http://mathforum.org/alejandre/magic.square/loshu.html> Acesso em 28/09/2018

Essa disposição de números passou então a ser conhecida, até hoje, pelo nome de loshu, e mais popularmente de quadrado mágico, que é considerado divino pelo povo

chinês. A figura a seguir apresenta um exemplo de quadrado mágico de 9 componentes, em que cada linha, coluna ou diagonal totaliza 15.

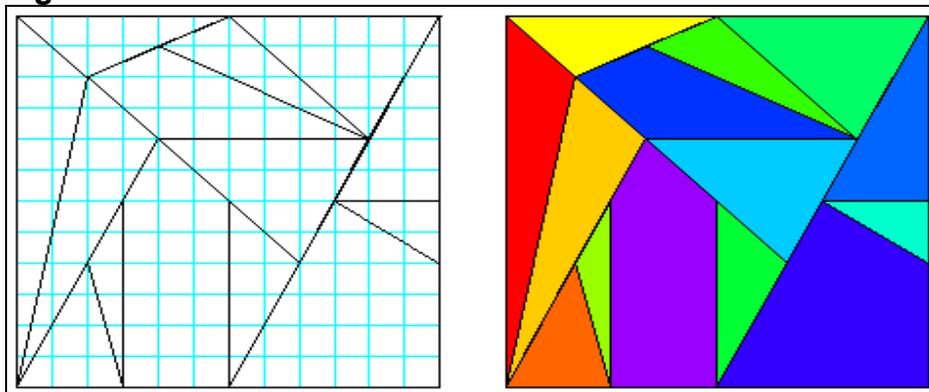
**Figura 2: Quadro Mágico**

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Fonte: elaborada pelo autor

Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), tido como um dos maiores matemáticos da história, em especial da antiguidade, publicou um tipo de "quebra-cabeça" que gerou indisposições para os matemáticos e também para os historiadores. Conhecido como Stomachion, este jogo é um arranjo constituído por quatorze peças que quando encaixadas podem formar quadrados, e que desta forma, muito aparenta ser análogo ao quebra-cabeça chinês conhecido como Tangran.

**Figura 3: Stomachion**



Fonte: Disponível em <http://mathworld.wolfram.com/news/2003-11-19/stomachion/>. Acesso em 28/09/2018

Oliveira (2015, p. 25), cita que em 2003, o jornal americano *The New York Times* publicou um artigo de título *In Archimedes Puzzle, A New EurekaMoment*, sobre a pesquisa do historiador de Matemática Dr. Reviel Netz, da Universidade de Stanford, Califórnia, onde ele afirmava que o Stomachion não era simplesmente um mero passatempo, mas um objeto executado por Arquimedes para fins de Análise Combinatória.

De acordo com Wieleitner (1928, p. 184), o estudo de Combinatória se mostrou efetivamente estabelecida na matemática e mostrou-se disjunta da teoria dos números, no final do século XVII juntamente com o cálculo de probabilidades. Época essa em que surgiu em um curto espaço de tempo, três importantes publicações:

- a) *Traité Du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal;
- b) *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e,
- c) *Ars Magna Sciendi Sive Combinatória* (1669) de Athanasius Kircher.

Além disso, Oliveira (2015, p. 25) afirma que ainda no final desse século, vieram a ser divulgados trabalhos de Wallis (1673) e Frénicle de Bessy (1693). Enquanto que com início do século XVIII, tivemos Bernoulli (1713) e *De Moivreem* seu *Doctrine of chances* (Londres, 1718) que tinham um caráter análogo.

No início do século XIX podemos destacar uma formulação que, posteriormente, recebeu o nome de “Princípio das gavetas”, uma ferramenta aparentemente simplória, porém detentora de grande poder para auxiliar a resolver vários problemas de combinatória e que foi desenvolvida por um ex-aluno de Gauss de nome Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

Defronte desta breve trajetória histórica, temos consciência de não apresentarmos novidades, uma vez que são temas que, no âmbito da história da Matemática, já se encontram amplamente difundidos e até mesmo dissertados. Fizemos um apanhado, apenas com o intuito de introduzirmos sobre as inesgotáveis aplicações dos processos de contagem e combinatória nas mais diversas áreas, como na elétrica, telecomunicações, computação, códigos corretores de erros, jogos, aplicativos, dentre outros; tudo graças ao desenvolvimento humano, que através de pessoas das ciências ou até mesmo de quem não participa dela de forma regular e efetiva, mas que corroboram para atingirmos o nível dos dias de hoje.

## **2.2 Aplicações e aprimoramentos**

Ao longo do tempo, são inúmeras as aplicações dos processos de contagem e análise combinatória que, após o surgimento, passam a se fazer notórios, gerando negáveis aperfeiçoamentos nas suas áreas de aplicações.

Na comunicação escrita, por exemplo, podemos citar a relação entre o sistema que ficou conhecido como “Leitura Noturna”, desenvolvido com o intuito de se realizar leitura no escuro durante guerras, para não chamar atenção dos inimigos, criada no século XIX por Charles Barbier de La Serre (França, 1767 – 1841), que foi um capitão da artilharia francesa que

criou um sistema de escrita noturna, que permitia a comunicação entre os soldados. Seu sistema baseava-se em um tabuleiro de 36 quadrados, cada qual relacionado com um som. Cada som era representado no tabuleiro por um paralelogramo de pontos. Esse sistema destinava-se, basicamente, a emissão de sons. (SONZA, 2004, p 57 e 58)

Que posteriormente, inspirou a criação da “Escrita” Braille, uma vez que em 1824, baseado no significado tátil dos pontos de relevo de Barbier, o também francês Louis Braille (França, 1809-1852), aos 15 anos de idade,

inventou o sistema que utilizava seis pontos em relevo, muito semelhante ao que está em uso atualmente e que recebeu seu nome. Obteve sessenta e três símbolos diferentes que representavam todas as letras do alfabeto, acentuação, pontuação e sinais matemáticos. Esses símbolos, hoje, são empregados em textos literários, em diversos idiomas, nas simbologias matemática e científica em geral, na música e, recentemente, na informática. (SONZA, 2004, p 61)

Tanto o sistema para leitura noturna quanto o de escrita Braille, são constituídos por matrizes que possuem pontos, dispostos em linhas e colunas, onde cada um deles possui duas possibilidades, a de ser destacado do relevo do papel, ou não, com objetivo de gerar uma forma de escrita para posterior decodificação, sem a necessidade do sentido da visão. Uma vez que por meio do tato, a leitura passa a ser realizada com os dedos, identificando um ou mais pontos destacados e o que isso representa.

Figura 4: Leitura Noturna

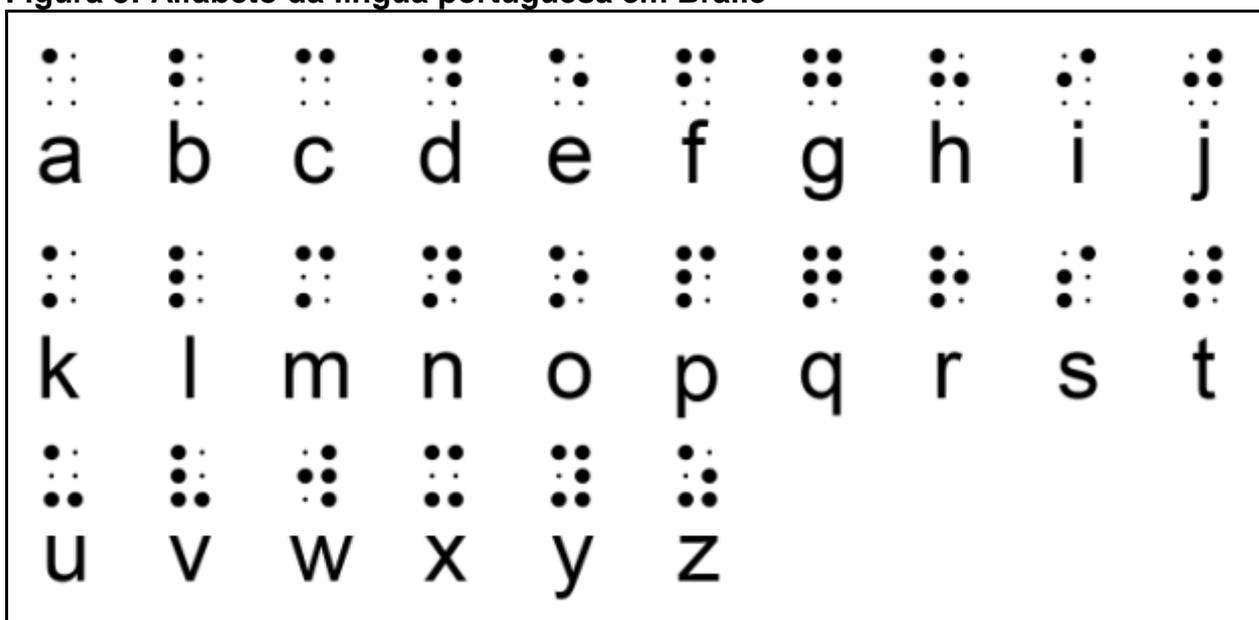
a	i	o	u	é	è
an	in	on	un	eu	ou
b	d	g	j	v	z
p	t	q	ch	f	s
l	m	n	r	gn	ll
oi	oin	ian	ien	ion	ieü

Fonte: Disponível em <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTujyeS7m0rvFaLdIONxTclGxmsg1exYYdQHvrcQYHAVdMJfbT>  
Aceso em 14 de junho de 2019

Podemos destacar que o sistema inicialmente proposto por Barbier não foi bem aceito, rejeição dada a sua complexidade no momento da leitura, dificuldade esta gerada pelo grande número de pontos na matriz, mas que foi aprimorado por Louis Braille, que reduziu o número de pontos e conseguiu emplacar mundialmente a escrita aprimorada por ele, e por isso denominada de Braille, que sendo mais simplificada é bastante utilizada até os nossos dias.

A alteração feita por Braille ocorreu apenas na ordem (número de linhas e colunas) da matriz, e, ao reduzir o número de pontos, ressignificou a forma de decodificar os, agora, 63 caracteres deste sistema de escrita, que são gerados a partir de combinações (subconjuntos) dos pontos. A figura a seguir apresenta a representação das 26 letras do nosso alfabeto no sistema Braille.

**Figura 5: Alfabeto da língua portuguesa em Braille**



Fonte: Disponível em <http://www.projetoacesso.org.br/site/images/Screenshot%202012-12-06%20at%204.46.41%20PM.png>

Redução esta que facilitou a decodificação dos caracteres, pois possibilitou tocar totalmente cada símbolo com o dedo de uma só vez.

### 3 PRESCRIÇÕES E REGULAMENTAÇÕES

Os processos de contagem possuem prescrições desde a segunda etapa da Educação Básica Brasileira (Ensino Fundamental), como podemos verificar nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN'S) que nos conteúdos conceituais e procedimentais do 1<sup>o</sup> ciclo, citam em seus conteúdos conceituais e procedimentais a utilização de diferentes estratégias para quantificar elementos de uma coleção: contagem, pareamento, estimativa e correspondência de agrupamentos. (BRASIL, 1997, p 50)

Ainda para o 1<sup>o</sup> ciclo, e também de forma colateral ao 2<sup>o</sup> ciclo do Ensino Fundamental, os PCN'S também sugerem que devemos levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvem combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem. (BRASIL, 1997, p 57). Para os 3<sup>o</sup> e 4<sup>o</sup> ciclos, que são os finais desta etapa, encontramos que o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem. (BRASIL, 1997, p 40)

Já na matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), no item denominado de Matemática e suas Tecnologias, nas competências de área 1, afirma que o estudante deve "Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais" e na habilidade H2 reforça que o mesmo deve "Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem." (BRASIL, 2009,p.5).

Reforçando mais ainda, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), prescreve que

Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos (BRASIL, 2018, p.273).

Apesar destas, e de outras, prescrições normativas, nos parece passiva de questionamentos a forma como esses temas vêm sendo desenvolvidos ao longo da trajetória do Ensino da Matemática no Ensino Básico Brasileiro. Fato este que nos leva a reflexões sobre as relevâncias do efetivo estudo dos mesmos que se mostram tão

importantes na Matemática, sobretudo, no Ensino Fundamental. Examinamos neste trabalho a anuência em dissertar, como intuito elementar do estudo, sobre a relevância em elaborar um livro paradidático para aproveitamento dos professores e alunos nesse nível de ensino de modo a favorecer a aprendizagem de processos de contagem e de combinatória.

De forma específica, ao realizarmos o levantamento do que prescrevem os documentos normativos a respeito do ensino de processos de contagem e combinatória no Ensino Fundamental, destacamos de forma enfática que

No decorrer dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental os alunos devem ser levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los (BRASIL, 1998, p. 52).

Acreditamos que se existir uma participação dinâmica dos alunos na descoberta e exploração das possibilidades, podemos ensinar uma temática para crianças, seja qual for a idade e ciclo, desde que o tema seja exibido diversas vezes, com olhares e níveis de dificuldades distintos, de acordo com cada fase de desenvolvimento da criança, abordando situações que elas já tenham vivenciado e considerando as habilidades específicas já carregadas por elas ao ingressarem na educação básica.

Com posterior atividade de pesquisar as abordagens de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental a respeito dos temas em questão, corroboramos com a ideia de que

O professor de matemática possa trabalhar com o ensino da combinatória em sala de aula ao longo dos quatro ciclos do Ensino Fundamental estabelecendo como base a estreita relação entre teoria e prática, num currículo em espiral como sugerem os PCN-EF (COSTA, 2003, p. 26).

A partir de então, demos início à produção de um material instrucional, na forma de livro paradidático, sobre processos de contagem e combinatória, para ser utilizado no Ensino Fundamental. Buscamos também pesquisar metodologias e técnicas específicas de como produzir material lúdico para o ensino de matemática, sempre com foco de tentar minimizar as possíveis deficiências ou limitações identificadas nas coleções de livros destinadas ao Estudo de Matemática no Ensino Fundamental.

Um livro paradidático nos pareceu conveniente para a situação, uma vez que fazendo uso apenas do livro didático os aprendentes podem ficar limitados a poucas

possibilidades de desenvolver o modo de pensar, e, em especial, o raciocínio combinatório como bem destaca Borba (2010, p. 10).

Baseando-nos nestes azimutes, demos continuidade na produção do material instrucional, sempre com o foco de contribuir com o desenvolvimento do pensamento combinatório de forma lúdica, pois acreditamos ser uma boa e estratégica abordagem desses conteúdos que no decorrer do tempo como docente, que ao serem abordados, nos mostrou que por vezes podem despertar rejeição entre os alunos, por exigirem interpretação textual e criação de estratégias de resolução, pois estes temas possuem um grau de complexidade maior, retirando os discentes de uma possível “zona de conforto” de apenas realizarem cálculos a partir de aplicações de fórmulas prontas, por exemplo..

#### **4 TRABALHO DE PESQUISA E TESTAGEM DE PARTE DO MATERIAL**

Nesta fase, objetivamos a aferição da motivação, em geral, atingida pela utilização do material instrucional produzido, a partir da testagem de um dos capítulos do livro paradidático, na ocasião, em construção, tendo em vista aperfeiçoá-lo em sua totalidade. Para isso, análises de materiais, comunicação com docentes e nossa experiência; foram levadas em conta, com vistas à calibragem inicial do material que constaria no livro paradidático, proposto como produto do mestrado profissional.

A atividade de testagem do material ocorreu em uma instituição de ensino da rede privada que funciona em regime de convênio com a Secretaria de Educação do Estado do Pará (SEDUC), situada no Bairro do Guamá, na cidade de Belém, capital do estado do Pará, onde o autor atua como professor de matemática do 4<sup>o</sup> ciclo do Ensino Fundamental e também do Ensino Médio.

A idade dos alunos participantes variou de 12 a 15 anos. Dentre eles, 75% haviam participado da explanação inicial sobre processos de contagem de forma implícita (ao revisarmos potências) e os 25% restantes, não tiveram nenhum contato formal com os temas nos momentos imediatamente anteriores ao do desenvolvimento da pesquisa. Por essa razão, dividimos a amostra em dois grupos, levando em conta quem obteve ou não explicações sobre o tema.

Na ocasião, entregamos o capítulo impresso a cada um dos alunos, que, após lerem a “trama” e analisarem os exercícios resolvidos, deveriam resolvê-los das formas que lhes fossem mais convenientes. Em seguida, algumas questões semelhantes, a resolver, foram propostas nesta parte do material.

Também foi apresentado aos alunos um segundo teste, onde se depararam com itens adaptados de edições anteriores do ENEM. Desta vez, nosso objetivo foi o de avaliar o conjunto de propriedades que o livro paradidático pode ter, também quando relacionado a este conceituado exame; sem esquecer, do que seria considerado uma boa abordagem para o que, de fato, indica as vantagens desse tipo de material didático, como bem destaca Lima (2010, p. 3) ao dizer que esse tipo de material instrucional, por não se prenderem aos aspectos normativos, propiciam certa liberdade ao estudante no modo de expressar-se.

Desta forma, partimos para os esperados momentos de investigação, e experimentação, do que estávamos produzindo.

#### **4.1 Diagnóstico inicial**

Nesta fase, consideramos as experimentações vivenciadas em nossas jornadas docentes, bem como os dados obtidos por meio de narrativas de professores, coletadas em reuniões pedagógicas formais e também em diálogos informais; como citamos na introdução deste trabalho dissertativo.

Levamos em conta ainda, um breve levantamento de alguns documentos como dissertações e teses, que abordam o ensino dos temas em questão, bem como sobre temas transversais a eles relacionados. Este levantamento nos gerou a assimilação de que a presença de obstáculos é frequente e duradoura no processo de aprendizado vivido pelos discentes na tentativa de compreender essas temáticas.

Também foi desenvolvida uma explanação inicial sobre processos de contagem de forma implícita ao trabalharmos a ideia de potências, sem uso de conceitos ou fórmulas, uma vez que o exaustivo uso de fórmulas, quando da construção de conceitos pode tornar-se obstáculo para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, como destacado por Gonçalves (2014, p. 38). Essa autora destaca também que, apesar dessa notoriedade, ainda vemos uma grande parcela de professores utilizando a metodologia de fórmula-aplicação como ferramenta didático-pedagógica dominante. (GONÇALVES, 2014 p 38)

Objetivamos também salientar que não precisamos de recursos matemáticos rebuscados para resolver diversos problemas de contagem e combinatória.

Após revisarmos potenciação com os alunos, apresentamos situações como as de lançamentos consecutivos de moedas ou dados, divisão de bactérias por bipartição, código de barras, entre outros, e de que formas podemos expressar matematicamente esses saberes e calcular a quantidade dessas ocorrências por meio das potências, Vimos também como algumas situações problemas poderiam ser solucionadas de outras maneiras, como, por exemplo, fazendo uso da árvore de possibilidades, expondo todas as chances de resultados e fazendo posterior contagem, ou até mesmo apenas fazendo

uso do raciocínio lógico combinatório que, de alguma forma, já estava presente no modo de pensar dos alunos.

Desta maneira, esperávamos que, posteriormente, os alunos percebessem uma correlação entre raciocínio lógico, árvore de possibilidades, processos de contagem e combinatória.

## **4.2 Experimentação**

Esta etapa foi bastante esperada, pois representaria o período onde colocaríamos em ação o protótipo do livro paradidático proposto, e foi o momento que nos propiciou a realização das devidas retificações, nos remetendo, inclusive, ao diagnóstico inicial, para podermos adentrar, de forma mais segura e eficiente, num processo de complementação.

### **4.2.1 Sobre o pré-teste**

Aplicamos, em ambos os grupos, um capítulo, previamente escolhido, do livro paradidático em construção e que expõe situações de contagem e combinatória para os alunos, em que partes das situações encontram-se resolvidas no material proposto, nas questões de número 1, 2 e 5, enquanto as demais, de número 3, 4, 6 e a questão de finalização, são tidas como propostas.

Ao lerem o material, os discentes analisaram as situações expostas, bem como as resoluções contidas no material, e, posteriormente, tentaram resolver as questões que foram propostas da maneira que se sentiram mais seguros. Ressaltamos que tais questões possuem como resultados valores um tanto quanto pequenos, não exigindo operações com elevados valores e não demandam muito tempo de resolução. As próximas quatro figuras a seguir apresentam as quatro páginas do pré-teste, razão pela qual as apresentaremos sequencialmente.

Figura 6: Primeira página do pré-teste

Alunos de uma escola combinam fazerem um lanche em uma lanchonete e, ao chegarem ao local, além do ambiente descontraído, amplo e confortável, perceberam que se tratava de uma loja pertencente a uma rede da indústria de restaurantes de serviço rápido onde os sanduiches são fáceis de preparar e feitos na hora, na frente do cliente, do jeito que pedirem, ao vivo e a cores, usando pães de variados sabores e tamanhos, uma variedade de recheios deliciosos, saladas de verduras selecionadas e diversos tipos de molhos; e que para isso, deveriam seguir uma seqüência de passos para realizar os processos de escolhas e montagem de seu sanduiche.

Nas paredes do estabelecimento e também no cardápio, facilmente encontrava-se uma frase de estímulo seguida dos passos que deveriam ser seguidos para que, cada um dos amigos possa montar seu sanduiche de acordo com sua dieta, preferência e comodidade.

*"Siga os passos a seguir e monte seu delicioso sanduiche, pois acreditamos que o melhor lanche do mundo é o do seu jeito!"*

**1º PASSO: Escolher o sabor do pão dentre os sabores gergelim, integral, sírio e grãos.**

**2º PASSO: Definir se o pão dentre ficará com seu comprimento original de 28 cm ou será dividido na metade, ficando com apenas 14 cm..**

**3º PASSO: Escolher o recheio (proteína) dentre os sabores carne, frango, bacon, atum e peru.**

**4º PASSO: Optar se o sanduiche será aquecido ou não.**

**5º PASSO: Escolher 3 opções de salada dentre 6 opções disponibilizadas.**

**6º PASSO: Selecionar 2 tipos de molhos dentre os 5 disponíveis.**

**Agora sim!**

Após realizar os cálculos necessários para determinar o total de possibilidades para uma pessoa que vai montar um sanduiche, monte o seu e tenha um Bom Apetite!

Figura 7: Segunda página do pré-teste

As possibilidades para o 1º PASSO são em número igual a 4, pois nesta etapa é onde devemos escolher o sabor do pão dentre os 4 sabores disponibilizados pelo estabelecimento.

4 opções






Gergelim

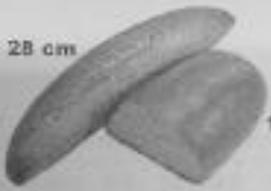
Integral

Sirio

Grãos

Após termos escolhido o sabor do pão, vamos então para o 2º PASSO, onde escolheremos entre as duas possibilidades de tamanho para o pão escolhido. É o momento onde iremos definir se ele ficará com seu comprimento original de 28 cm ou será dividido na metade, ficando com apenas 14 cm.

28 cm



14 cm

Que Bacana !!!

Agora, antes do próximo passo; vamos pensar. . .

Quantas opções já foram disponibilizadas?

Observe o esquema a seguir:

1º PASSO	2º PASSO	
Gergelim	28 cm	└──┬──┘
	14 cm	
Integral	28 cm	└──┬──┘
	14 cm	
Sirio	28 cm	└──┬──┘
	14 cm	
Grãos	28 cm	└──┬──┘
	14 cm	

Perceba que as oito possibilidades citadas vêm do chamado princípio multiplicativo e são as seguintes opções: Gergelim 28 cm, Gergelim 14 cm, Integral 28 cm, Integral 14 cm, Sirio 28 cm, Sirio 14 cm, Grãos 28 cm e Grãos 14 cm; como mostra o esquema conhecido como árvore de possibilidades.

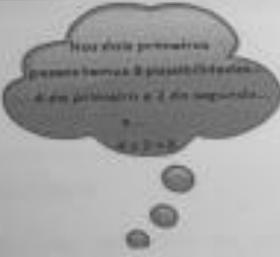


Figura 8: Terceira página do pré-teste

Chegou a hora do 3º PASSO onde iremos desta vez escolher o recheio (proteína) dentre os 5 sabores disponíveis pela loja que são os de: carne, frango, bacon, atum e peru.

Lembrando que podem ser apresentados em pães nos sabores Gergelim, Integral, Sírio e Grãos; sendo que os mesmos possuem versões de 28 cm 14 cm. Assim...

Quantas serão as possibilidades até este passo?

4º PASSO: O sanduíche será aquecido?

( ) SIM ( ) NÃO

.... 2 POSSIBILIDADES

DAÍ...

Quantas serão as possibilidades até agora?

5º PASSO: Escolher obrigatoriamente 3 opções distintas de salada dentre 6 opções disponibilizadas.

1ª escolha	2ª escolha	3ª escolha
6	5	4

...mas importa a ordem?

Alface, Tomate e Pepino não é igual a Pepino, Tomate e Alface?

**SÃO OPÇÕES IGUAIS!!!!.....NÃO IMPORTA A ORDEM!!!!**

Então temos que descontar as escolhas iguais....Como Faz?

Basta dividirmos pelo total de possibilidades de colocarmos os três tipos de saladas escolhidos.....



**Figura 9: Quarta página do pré-teste**

**FICA ASSIM:**

1ª escolha	2ª escolha	3ª escolha
6	.	5
3	.	2
1ª escolhido	2ª escolhido	3ª escolhido ,

**totalizando 20 opções para este passo.**

**Atualizaaaaannndo...  $4 \times 2 \times 5 \times 2 \times 20 = 1600$  possibilidades até o quinto passo.**

**6º PASSO: Selecionar 2 tipos de molhos dentre os 5 disponíveis.**

**Quantas serão as possibilidades para este passo?**

**Finalizaaaaannndoooo.....**

**Quantas são as possibilidades de escolha para este lanche?**

**Tenha um bom apetite!!!**

Fonte: elaboradas pelo autor

A princípio os alunos ficaram apreensivos, mesmo lendo algo a respeito de uma situação cotidiana, e mostraram-se um tanto quanto sem saber como proceder, em especial, aquela porcentagem de alunos que não obtiveram esclarecimentos a respeito da temática, ou seja, aqueles discentes onde o único referencial, além de suas vivências, foram os exemplos resolvidos do material impresso que foi entregue a eles.

No entanto, após lerem outras vezes e realizarem uma verificação mais minuciosa dos exemplos resolvidos, demonstraram-se mais familiarizados com os temas, em geral, nos parecendo perceber a aplicabilidade do princípio multiplicativo.

Seguem amostras de algumas soluções apresentadas pelos alunos nas questões de número 3, 4 e 6 e na de finalização, de número 7, que foram propostas para os alunos, que aqui denominaremos como “Aluno 1”, “Aluno 2”, “Aluno 3”, e assim por diante. Vale ressaltar que esta denominação é de maneira apenas organizacional, não denotando escala de conhecimento, capacidade ou algo do tipo.

**Figura 10: Resoluções expostas pelo “Aluno 1”**

Chegou a hora do 3º PASSO onde iremos desta vez escolher o recheio (proteína) dentre os 5 sabores disponíveis pela loja que são os de: carne, frango, bacon, atum e peru.

Lembrando que podem serem apresentados em pães nos sabores Gergelim, Integral, Sírio e Grãos; sendo que os mesmos possuem versões de 28 cm 14 cm. Assim...

Quantas serão as possibilidades até este passo?

$$8 \times 5 = 40$$

4º PASSO: O sanduíche será aquecido?

SIM                      ( ) NÃO

.... 2 POSSIBILIDADES

DAÍ...

Quantas serão as possibilidades até agora?

$$40 \times 2 = 80$$

6º PASSO: Selecionar 2 tipos de molhos dentre os 5 disponíveis.

Quantas serão as possibilidades para este passo?

$$2 = \binom{5}{2} = 32 - 5$$

$$27$$

Finalizaaaannndoooo.....

Quantas são as possibilidades de escolha para este lanche?

$$\begin{array}{r} 36 \\ 27 \\ \hline 63 \\ 32 \\ \hline 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3600 \\ 27 \times \\ \hline 97200 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos notar que o denominado “Aluno 1” parece perceber a utilização do princípio multiplicativo utilizado nas duas primeiras questões e aplicou corretamente nas questões 3 e 4, porém apresentou dificuldade na compreensão do raciocínio nas combinações para as questões seguintes, e acabou recorrendo de forma incorreta as potências, não conseguindo êxito para a questão 6 e finalização. O aluno informou que não obteve aula expositiva sobre as temáticas,

**Figura 11: Resoluções expostas pelo “Aluno 2”**

Chegou a hora do 3º PASSO onde iremos desta vez escolher o recheio (proteína) dentre os 5 sabores disponíveis pela loja que são os de: carne, frango, bacon, atum e peru.

Lembrando que podem ser apresentados em pães nos sabores Gergelim, Integral, Sírio e Grãos; sendo que os mesmos possuem versões de 28 cm 14 cm. Assim...

Quantas serão as possibilidades até este passo?

40.  $1^{\circ}$  Passo =  $4 \times 2$  opções ( $2^{\circ}$ ).  $3^{\circ}$  Passo = 40 possibilidades.  
 $2^{\circ}$  Passo =  $8 \times 5$  opções ( $3^{\circ}$ ).

**4º PASSO: O sanduíche será aquecido?**

() SIM                      ( ) NÃO

.... 2 POSSIBILIDADES

DAÍ...

Quantas serão as possibilidades até agora?

$3^{\circ}$  Passo = 40.                       $4^{\circ}$  Passo =  $40 \times 2$  (sim ou não) = 80

**6º PASSO: Selecionar 2 tipos de molhos dentre os 5 disponíveis.**

Quantas serão as possibilidades para este passo?

Molho 1  $\begin{matrix} / \\ / \\ / \\ / \\ / \end{matrix}$  molhos disponíveis  
 Molho 2  $\begin{matrix} / \\ / \\ / \\ / \\ / \end{matrix}$  molhos disponíveis

= 10

**Finalizaaaannndoooo.....**

Quantas são as possibilidades de escolha para este lanche?

Fonte: Dados da pesquisa

Chamamos à atenção de que o “Aluno 2” nos parece atentar para a utilização do princípio multiplicativo utilizado nas duas primeiras questões e, similarmente, faz uso nas questões 3 e 4, no entanto, apresentou dificuldade na compreensão do raciocínio nas combinações para as questões seguintes, e acabou recorrendo de forma incorreta a árvore de possibilidades, não conseguindo êxito para a questão 6 e na de finalização. Informou ainda que não obteve aula expositiva sobre as temáticas.

**Figura 12: Resoluções expostas pelo “Aluno 3”**

Chegou a hora do 3º PASSO onde iremos desta vez escolher o recheio (proteína) dentre os 5 sabores disponíveis pela loja que são os de: carne, frango, bacon, atum e peru.

Lembrando que podem ser apresentados em pães nos sabores Gergelim, Integral, Sírio e Grãos; sendo que os mesmos possuem versões de 28 cm 14 cm. Assim...

Quantas serão as possibilidades até este passo?

$5 \times 5 = 25$   
 $25 + 8 = 33$   
 33 possibilidades

4º PASSO: O sanduíche será aquecido?

SIM                      ( ) NÃO

.... 2 POSSIBILIDADES

DAÍ...

Quantas serão as possibilidades até agora?

$33 + 2 = 35$  possibilidades

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno não obteve o sucesso esperado nas resoluções apresentadas acima, onde aparentou uma certa confusão envolvendo os princípios da adição e multiplicativo.

**Figura 13: Demais resoluções expostas pelo “Aluno 3”.**

6º PASSO: Selecionar 2 tipos de molhos dentre os 5 disponíveis.

$1635 + 2 \times 5 = 1660$

Quantas serão as possibilidades para este passo?

1660 possibilidades

Finalizaaaaannndoooo.....

Quantas são as possibilidades de escolha para este lanche?

1660  
 de escolha para este lanche

Fonte: Dados da pesquisa

Transpareceu uma não compreensão do raciocínio combinatório inerente à combinação, onde temos que descartar as possibilidades de agrupamentos com mesmos elementos, mesmo que em ordem **diferentes**, pois representam um mesmo conjunto, logo são contagens consideradas repetidas. Este aluno informou que também não assistiu aula expositiva sobre as temáticas.

**Figura 14: Resoluções expostas pelo “Aluno 4”**

**Lembrando que podem serem apresentados em pães nos sabores Gergelim, Integral, Sírio e Grãos; sendo que os mesmos possuem versões de 28 cm 14 cm. Assim...**

Quantas serão as possibilidades até este passo?

45

$4 \times 2 \times 5 = 40$

**4º PASSO: O sanduíche será aquecido?**

( ) SIM ( ) NÃO

.... 2 POSSIBILIDADES

DAÍ...

Quantas serão as possibilidades até agora?

90

$40 \times 2 = 80$

**6º PASSO: Selecionar 2 tipos de molhos dentre os 5 disponíveis.**

Quantas serão as possibilidades para este passo?

$5 \cdot 4 = 20$

$3 \cdot 2 = 6$

$20 + 6 = 26$

$26 \cdot 2 = 52$

$52 \cdot 2 = 104$

$104 \cdot 2 = 208$

$208 \cdot 2 = 416$

$416 \cdot 2 = 832$

$832 \cdot 2 = 1664$

$1664 \cdot 2 = 3328$

$3328 \cdot 2 = 6656$

$6656 \cdot 2 = 13312$

$13312 \cdot 2 = 26624$

$26624 \cdot 2 = 53248$

$53248 \cdot 2 = 106496$

$106496 \cdot 2 = 212992$

$212992 \cdot 2 = 425984$

$425984 \cdot 2 = 851968$

$851968 \cdot 2 = 1703936$

$1703936 \cdot 2 = 3407872$

$3407872 \cdot 2 = 6815744$

$6815744 \cdot 2 = 13631488$

$13631488 \cdot 2 = 27262976$

$27262976 \cdot 2 = 54525952$

$54525952 \cdot 2 = 109051904$

$109051904 \cdot 2 = 218103808$

$218103808 \cdot 2 = 436207616$

$436207616 \cdot 2 = 872415232$

$872415232 \cdot 2 = 1744830464$

$1744830464 \cdot 2 = 3489660928$

$3489660928 \cdot 2 = 6979321856$

$6979321856 \cdot 2 = 13958643712$

$13958643712 \cdot 2 = 27917287424$

$27917287424 \cdot 2 = 55834574848$

$55834574848 \cdot 2 = 111669149696$

$111669149696 \cdot 2 = 223338299392$

$223338299392 \cdot 2 = 446676598784$

$446676598784 \cdot 2 = 893353197568$

$893353197568 \cdot 2 = 1786706395136$

$1786706395136 \cdot 2 = 3573412790272$

$3573412790272 \cdot 2 = 7146825580544$

$7146825580544 \cdot 2 = 14293651161088$

$14293651161088 \cdot 2 = 28587302322176$

$28587302322176 \cdot 2 = 57174604644352$

$57174604644352 \cdot 2 = 114349209288704$

$114349209288704 \cdot 2 = 228698418577408$

$228698418577408 \cdot 2 = 457396837154816$

$457396837154816 \cdot 2 = 914793674309632$

$914793674309632 \cdot 2 = 1829587348619264$

$1829587348619264 \cdot 2 = 3659174697238528$

$3659174697238528 \cdot 2 = 7318349394477056$

$7318349394477056 \cdot 2 = 14636698788954112$

$14636698788954112 \cdot 2 = 29273397577908224$

$29273397577908224 \cdot 2 = 58546795155816448$

$58546795155816448 \cdot 2 = 117093590311632896$

$117093590311632896 \cdot 2 = 234187180623265792$

$234187180623265792 \cdot 2 = 468374361246531584$

$468374361246531584 \cdot 2 = 936748722493063168$

$936748722493063168 \cdot 2 = 1873497444986126336$

$1873497444986126336 \cdot 2 = 3746994889972252672$

$3746994889972252672 \cdot 2 = 7493989779944505344$

$7493989779944505344 \cdot 2 = 14987979559889010688$

$14987979559889010688 \cdot 2 = 29975959119778021376$

$29975959119778021376 \cdot 2 = 59951918239556042752$

$59951918239556042752 \cdot 2 = 119903836479112085504$

$119903836479112085504 \cdot 2 = 239807672958224171008$

$239807672958224171008 \cdot 2 = 479615345916448342016$

$479615345916448342016 \cdot 2 = 959230691832896684032$

$959230691832896684032 \cdot 2 = 1918461383665793368064$

$1918461383665793368064 \cdot 2 = 3836922767331586736128$

$3836922767331586736128 \cdot 2 = 7673845534663173472256$

$7673845534663173472256 \cdot 2 = 15347691069326346944512$

$15347691069326346944512 \cdot 2 = 30695382138652693889024$

$30695382138652693889024 \cdot 2 = 61390764277305387778048$

$61390764277305387778048 \cdot 2 = 122781528554610775556096$

$122781528554610775556096 \cdot 2 = 245563057109221551112192$

$245563057109221551112192 \cdot 2 = 491126114218443102224384$

$491126114218443102224384 \cdot 2 = 982252228436886204448768$

$982252228436886204448768 \cdot 2 = 1964504456873772408897536$

$1964504456873772408897536 \cdot 2 = 3929008913747544817795072$

$3929008913747544817795072 \cdot 2 = 7858017827495089635590144$

$7858017827495089635590144 \cdot 2 = 15716035654990179271180288$

$15716035654990179271180288 \cdot 2 = 31432071309980358542360576$

$31432071309980358542360576 \cdot 2 = 62864142619960717084721152$

$62864142619960717084721152 \cdot 2 = 125728285239921434169442304$

$125728285239921434169442304 \cdot 2 = 251456570479842868338884608$

$251456570479842868338884608 \cdot 2 = 502913140959685736677769216$

$502913140959685736677769216 \cdot 2 = 1005826281919371473355538432$

$1005826281919371473355538432 \cdot 2 = 2011652563838742946711076864$

$2011652563838742946711076864 \cdot 2 = 4023305127677485893422153728$

$4023305127677485893422153728 \cdot 2 = 8046610255354971786844307456$

$8046610255354971786844307456 \cdot 2 = 16093220510709943573688614912$

$16093220510709943573688614912 \cdot 2 = 32186441021419887147377229824$

$32186441021419887147377229824 \cdot 2 = 64372882042839774294754459648$

$64372882042839774294754459648 \cdot 2 = 128745764085679548589508919296$

$128745764085679548589508919296 \cdot 2 = 257491528171359097179017838592$

$257491528171359097179017838592 \cdot 2 = 514983056342718194358035677184$

$514983056342718194358035677184 \cdot 2 = 1029966112685436388716071354368$

$1029966112685436388716071354368 \cdot 2 = 2059932225370872777432142708736$

$2059932225370872777432142708736 \cdot 2 = 4119864450741745554864285417472$

$4119864450741745554864285417472 \cdot 2 = 8239728901483491109728570834944$

$8239728901483491109728570834944 \cdot 2 = 16479457802966982219457141669888$

$16479457802966982219457141669888 \cdot 2 = 32958915605933964438914283339776$

$32958915605933964438914283339776 \cdot 2 = 65917831211867928877828566679552$

$65917831211867928877828566679552 \cdot 2 = 131835662423735857755657133359104$

$131835662423735857755657133359104 \cdot 2 = 263671324847471715511314266718208$

$263671324847471715511314266718208 \cdot 2 = 527342649694943431022628533436416$

$527342649694943431022628533436416 \cdot 2 = 1054685299389886862045257066872832$

$1054685299389886862045257066872832 \cdot 2 = 2109370598779773724090514133745664$

$2109370598779773724090514133745664 \cdot 2 = 4218741197559547448181028267491328$

$4218741197559547448181028267491328 \cdot 2 = 8437482395119094896362056534982656$

$8437482395119094896362056534982656 \cdot 2 = 16874964790238189792724113069965312$

$16874964790238189792724113069965312 \cdot 2 = 33749929580476379585448226139930624$

$33749929580476379585448226139930624 \cdot 2 = 67499859160952759170896452279861248$

$67499859160952759170896452279861248 \cdot 2 = 134999718321905518341792904559722496$

$134999718321905518341792904559722496 \cdot 2 = 269999436643811036683585809119444992$

$269999436643811036683585809119444992 \cdot 2 = 539998873287622073367171618238889984$

$539998873287622073367171618238889984 \cdot 2 = 1079997746575244146734343236477779808$

$1079997746575244146734343236477779808 \cdot 2 = 2159995493150488293468686472955559616$

$2159995493150488293468686472955559616 \cdot 2 = 4319990986300976586937372945911119232$

$4319990986300976586937372945911119232 \cdot 2 = 8639981972601953173874745891822238464$

$8639981972601953173874745891822238464 \cdot 2 = 17279963945203906347749491783644476928$

$17279963945203906347749491783644476928 \cdot 2 = 34559927890407812695498983567288953856$

$34559927890407812695498983567288953856 \cdot 2 = 69119855780815625390997967134577907712$

$69119855780815625390997967134577907712 \cdot 2 = 138239711561631250781995934269155815424$

$138239711561631250781995934269155815424 \cdot 2 = 276479423123262501563991868538311630848$

$276479423123262501563991868538311630848 \cdot 2 = 552958846246525003127983737076623261696$

$552958846246525003127983737076623261696 \cdot 2 = 1105917692493050006255967474153246523392$

$1105917692493050006255967474153246523392 \cdot 2 = 2211835384986100012511934948306493046784$

$2211835384986100012511934948306493046784 \cdot 2 = 4423670769972200025023869896612986093568$

$4423670769972200025023869896612986093568 \cdot 2 = 8847341539944400050047739793225972187136$

$8847341539944400050047739793225972187136 \cdot 2 = 17694683079888800100095479586451944374272$

$17694683079888800100095479586451944374272 \cdot 2 = 35389366159777600200190959172903888748544$

$35389366159777600200190959172903888748544 \cdot 2 = 70778732319555200400381918345807777497088$

$70778732319555200400381918345807777497088 \cdot 2 = 141557464639110400800763836691615554994176$

$141557464639110400800763836691615554994176 \cdot 2 = 283114929278220801601527673383231109988352$

$283114929278220801601527673383231109988352 \cdot 2 = 566229858556441603203055346766462219976704$

$566229858556441603203055346766462219976704 \cdot 2 = 1132459717112883206406110693532924439953408$

$1132459717112883206406110693532924439953408 \cdot 2 = 2264919434225766412812221387065848879906816$

$2264919434225766412812221387065848879906816 \cdot 2 = 4529838868451532825624442774131697759813632$

$4529838868451532825624442774131697759813632 \cdot 2 = 9059677736903065651248885548263395519627264$

$9059677736903065651248885548263395519627264 \cdot 2 = 18119355473806131302497771096526791039254528$

$18119355473806131302497771096526791039254528 \cdot 2 = 36238710947612262604995542193053582078509056$

$36238710947612262604995542193053582078509056 \cdot 2 = 72477421895224525209991084386107164157018112$

$72477421895224525209991084386107164157018112 \cdot 2 = 144954843790449050419982168772214328314036224$

$144954843790449050419982168772214328314036224 \cdot 2 = 289909687580898100839964337544428656628072448$

$289909687580898100839964337544428656628072448 \cdot 2 = 579819375161796201679928675088857313256144896$

$579819375161796201679928675088857313256144896 \cdot 2 = 1159638750323592403359857350177714626512289792$

$1159638750323592403359857350177714626512289792 \cdot 2 = 2319277500647184806719714700355429253024579584$

$2319277500647184806719714700355429253024579584 \cdot 2 = 4638555001294369613439429400710858506049159168$

$4638555001294369613439429400710858506049159168 \cdot 2 = 9277110002588739226878858801421717012098318336$

$9277110002588739226878858801421717012098318336 \cdot 2 = 18554220005177478453757717602843434024196636672$

$18554220005177478453757717602843434024196636672 \cdot 2 = 37108440010354956907515435205686868048393273344$

$37108440010354956907515435205686868048393273344 \cdot 2 = 74216880020709913815030870411373736096786546688$

$74216880020709913815030870411373736096786546688 \cdot 2 = 148433760041419827630061740822747472193573093376$

$148433760041419827630061740822747472193573093376 \cdot 2 = 296867520082839655260123481645494944387146186752$

$296867520082839655260123481645494944387146186752 \cdot 2 = 593735040165679310520246963290989888774292373504$

$593735040165679310520246963290989888774292373504 \cdot 2 = 1187470080331358621040493926581979777548584747008$

$1187470080331358621040493926581979777548584747008 \cdot 2 = 2374940160662717242080987853163959555097169494016$

$2374940160662717242080987853163959555097169494016 \cdot 2 = 4749880321325434484161975706327919110194338988032$

$4749880321325434484161975706327919110194338988032 \cdot 2 = 9499760642650868968323951412655838220388677976064$

$9499760642650868968323951412655838220388677976064 \cdot 2 = 18999521285301737936647902825311676440777355952128$

$18999521285301737936647902825311676440777355952128 \cdot 2 = 37999042570603475873295805650623352881554711904256$

$37999042570603475873295805650623352881554711904256 \cdot 2 = 75998085141206951746591611301246705763109423808512$

$75998085141206951746591611301246705763109423808512 \cdot 2 = 151996170282413903493183222602493411526218847617024$

$151996170282413903493183222602493411526218847617024 \cdot 2 = 303992340564827806986366445204986823052437695234048$

$303992340564827806986366445204986823052437695234048 \cdot 2 = 607984681129655613972732890409973646104875390468096$

$607984681129655613972732890409973646104875390468096 \cdot 2 = 1215969362259311227945465780819947292209750780936192$

$1215969362259311227945465780819947292209750780936192 \cdot 2 = 2431938724518622455890931561639894584419501561872384$

$2431938724518622455890931561639894584419501561872384 \cdot 2 = 4863877449037244911781863123279789168839003123744768$

$4863877449037244911781863123279789168839003123744768 \cdot 2 = 9727754898074489823563726246559578337678006247489536$

$9727754898074489823563726246559578$

resoluções seguintes, ele aplicou corretamente até mesmo o raciocínio da combinação, no entanto, como já trazia resultados incorretos dos passos anteriores, acaba comprometendo todos os resultados. O aluno informou ter participado da aula expositiva sobre as temáticas.

Figura 15: Resoluções do “Aluno 5”

Chegou a hora do 3º PASSO onde iremos desta vez escolher o recheio (proteína) dentre os 5 sabores disponíveis pela loja que são os de: carne, frango, bacon, atum e peru.

Lembrando que podem ser apresentados em pães nos sabores Gergelim, Integral, Sírio e Grãos; sendo que os mesmos possuem versões de 28 cm 14 cm. Assim...

Quantas serão as possibilidades até este passo?

$4 \times 2 \times 5 = 40$        $4 \times 2 \times 5 = 40$

Temos 40 possibilidades de pães

4º PASSO: O sanduíche será aquecido?

( ) SIM      ( ) NÃO      (x) Depende da sua preferência.

.... 2 POSSIBILIDADES

DAÍ...

Quantas serão as possibilidades até agora?       $5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 80$

Serão 80 possibilidades

---

6º PASSO: Selecionar 2 tipos de molhos dentre os 5 disponíveis.

Quantas serão as possibilidades para este passo?

$\frac{20}{20} \frac{16}{13}$        $\frac{20}{6}$        $\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 2}$        $\frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 2}$        $\frac{20}{13}$

Finalizaaaaannndoooo.....

Quantas são as possibilidades de escolha para este lanche?

Temos ~~5800~~ 5280

Fonte: Dados da pesquisa

O “Aluno 5” aplicou corretamente o princípio multiplicativo e acertou os cálculos das multiplicações nas questões 3 e 4. No entanto, na questão 5, ao tentar utilizar potenciação ao invés de combinação, gerou o primeiro erro, que foi seguido de uma também incorreta exclusão na tentativa de atender à solicitação de possibilidades

distintas. Ele acertou a questão 6, trabalhando corretamente a combinação; porém, como possuía resultado incorreto no passo anterior, acabou finalizando de forma incorreta.

Figura 16: Resoluções do “Aluno 6”

Chegou a hora do 3º PASSO onde iremos desta vez escolher o recheio (proteína) dentre os 5 sabores disponíveis pela loja que são os de: carne, frango, bacon, atum e peru.

Lembrando que podem ser apresentados em pães nos sabores Gergelim, Integral, Sírio e Grãos; sendo que os mesmos possuem versões de 28 cm 14 cm. Assim...

Quantas serão as possibilidades até este passo?

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 5 \\ \hline 40 \end{array}$$

4º PASSO: O sanduíche será aquecido?

SIM                      ( ) NÃO

.... 2 POSSIBILIDADES

DAÍ...

Quantas serão as possibilidades até agora?

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 2 \\ \hline 80 \end{array}$$

6º PASSO: Selecionar 2 tipos de molhos dentre os 5 disponíveis.

Quantas serão as possibilidades para este passo?

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 4 = 20 \\ \underline{3 \downarrow} \quad 3 \\ 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20/3 \\ 20 \cdot 6,6 \\ -0- \end{array} \quad \begin{array}{r} 1600 \\ \hline 6600 \end{array}$$

Finalizaaaannndoooo.....

Quantas são as possibilidades de escolha para este lanche?

$$\begin{array}{r} 1600 \\ \times 6 \\ \hline 6600 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Nas resoluções do “Aluno 6”, que também participou da aula expositiva sobre as temáticas, nos faz pensar que apresentou uma perfeita compreensão e aplicação do princípio multiplicativo demonstrados nas resoluções das questões 3 e 4, no entanto, foi mais um aluno que teve dificuldade em relação à noção de agrupamentos necessária para a questão 6 e para a de finalização.

Após o pré-teste fizemos uma “roda de conversa” com os alunos onde foi realizada a escuta sobre o que eles acharam do que lhes foi proposto e quais foram as maiores dificuldades encontradas. Pelas resoluções constatamos ligeira e momentânea superioridade por parte dos alunos que assistiram à aula prévia e, de maneira geral, os relatos confirmaram o que expuseram no pré-teste; onde verificamos que tendo, ou não, aula expositiva antes do teste, a maioria encontrou facilidade na compreensão e aplicação do princípio multiplicativo, enquanto uma fração bem menor relatou semelhante opinião sobre agrupamentos.

Finalizada a escuta sobre as ponderações dos alunos, foi explicado a todos sobre a importância, ou não, da ordem dos elementos ao realizarmos cálculos com agrupamentos e, chamamos à atenção de como trabalharmos padrões para o cálculo das possibilidades; e também ficou acertada a realização de um posterior pós-teste.

#### 4.2.2 Sobre o pós-teste

Nesta fase do trabalho, objetivamos balizar o nível de compreensão e entendimento dos aprendentes, após o contato com parte do nosso material instrucional então “em produção”. Para isso, foi realizada uma busca nas edições anteriores do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, com o objetivo de selecionarmos itens que haviam figurado em provas de anos anteriores que abordassem as temáticas norteadoras deste nosso trabalho.

Selecionamos então três itens pertencentes, de forma respectiva, às versões dos anos de 2007, 2005 e 2013 deste exame, e que também podem ser solucionadas usando-se os temas processos de contagem e/ou combinatória.

Figura 17: Pós-teste

**(ENEM\_adaptada)** Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primates	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
<b>Total</b>	<b>209</b>

*T&C Amazônia, ano 1, nº 3, dez/2003.*

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos – uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

**(ENEM\_adaptada)** A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é

**(ENEM\_adaptada)** Um artesão de jóias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir jóias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma jóia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras. Com base nas informações fornecidas, quantas jóias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?



Fonte: ENEM/ 2007, 2005 e 2013 - adaptadas

Todos os itens escolhidos para o pós-teste buscaram majorar a abordagem que apresentou maior sucesso na etapa inicial da; logo, podiam ser resolvidos utilizando-se somente processos de contagem, em especial o princípio multiplicativo, onde apenas a segunda questão poderia ser também resolvida utilizando-se o conhecimento de combinação.

Vale ressaltar que os itens das questões objetivas foram adaptados, retirando-se as alternativas, a fim de que os alunos não ficassem a “perseguir” uma determinada

alternativa existente. Ressaltamos também que nesta etapa não ocorreu identificação de quem assistiu, ou não, aula expositiva sobre a temática. Vamos ver algumas resoluções apresentadas pelos alunos que denominaremos por A, B, C, e assim por diante; em que as letras não denotam ordem, capacidade ou algo do tipo.

Figura 18: Resoluções do “Aluno A”

PÓS\_TESTE

(ENEM\_adaptada) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primates	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
<b>Total</b>	<b>209</b>

*T&C Amazônia, ano 1, nº 3, dez/2003.*

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos – uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

$$\frac{20 \times 2}{2} + \frac{40 \times 33}{33} = 40 + 120 = 160$$

*R: há 1.320 espécies para esse estudo*

01.(ENEM\_adaptada) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por

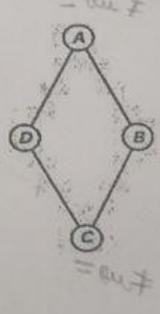


O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é

$$2^6 = 64$$

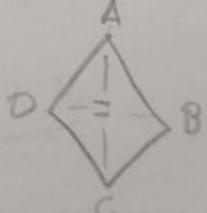
$$64 - 1 = 63$$

(ENEM\_adaptada) Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras. Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?



$$3^4 = 81$$

$$81 - 2 = 79$$



Fonte: Dados da pesquisa

Na solução da primeira questão o aluno aplicou o princípio multiplicativo em duas etapas de forma correta; mesmo princípio este foi aplicado corretamente na segunda questão, onde por apresentar mais situações, ele optou por se utilizar a linguagem de potências. Já na terceira questão, a aplicação do princípio multiplicativo na forma potencial não obteve êxito.

Figura 19: Resoluções do “Aluno B”

PÓS\_TESTE

(ENEM\_adaptada) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Rodadores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

*T&C, Amazônia, ano 1, nº 3, dez/2003.*

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos – uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Rodadores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

$2 \cdot 20 = 40$   
 $40 \cdot 33 = 1320$

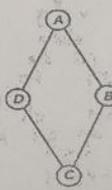
01.(ENEM\_adaptada) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é

$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$  caracteres

(ENEM\_adaptada) Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras. Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?



$3^3 = 27$   
 $4^3 = 64$   
 $27 - 5 = 22$

Fonte: Dados da pesquisa

Nestas soluções, também foi aplicado o princípio multiplicativo em duas etapas de forma correta na primeira questão; já na segunda questão, o mesmo princípio foi aplicado acertadamente, no entanto o aluno optou por apresentar as situações uma a uma, detalhadamente, sem utilizar a linguagem de potências; mas não concluiu

corretamente, pois esqueceu de excluir a possibilidade de não se destacar pontos. Já na terceira questão, a aplicação do princípio multiplicativo seguido de exclusões não obteve êxito.

Figura 20: Resoluções do “Aluno C”

PÓS\_TESTE

(ENEM\_adaptada) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primates	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
<b>Total</b>	<b>209</b>

*T&C Amazônia, ano 1, nº 3, dez/2003.*

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos – uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:-

$\frac{20 \times 2}{40}$        $\frac{40}{33 \times 120}$        $P = \text{Estudo é igual a } 1320$

$\frac{120 +}{1320}$

(ENEM\_adaptada) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por

```

••
••
••

```

O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é

$2^6$        $\frac{2 \times 4}{4}$        $\frac{8 \times 4}{8}$        $\frac{40}{32}$        $\frac{32 \times 2}{64}$

$P = 63$

(ENEM\_adaptada) Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras. Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$\frac{15}{3} = 5$

$\frac{15}{3} = 5$

Fonte: Dados da pesquisa

Mais uma vez a solução da primeira questão foi apresentada por meio do princípio multiplicativo em duas etapas aplicado de forma correta; bem como na segunda questão, onde o aluno apresentou o passo a passo das situações e posteriormente sua forma de potência com posterior exclusão diretamente na resposta do caso de não se



Figura 22: Resoluções do “Aluno E”

PÓS\_TESTE

(ENEM\_adaptada) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Parasodáctilos	1
Primates	20
Rodadores	33
Sirênios	1
Edentados	10
<b>Total</b>	<b>209</b>

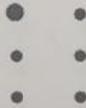
T&C Amazônia, ano 1, nº 3, dez/2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos – uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Rodadores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

Cetáceos: 2  
 Primatas: 20  
 Rodadores: 33

Podem ser formados 1320 grupos distintos

01.(ENEM\_adaptada) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por



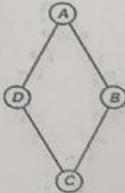
O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é

$2^6 = 64 - 1 = 63$

63 Caracteres

02.(ENEM\_adaptada) Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras. Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

3 cores: Vermelhas, azuis e verdes



Eu acho que serão 609 opções de joias

$4^3 = 64 - 1 = 63$

$63 \times 4 = 252$

$252 \times 4 = 1008$

$1008 - 4 = 1004$

$1004 - 4 = 1000$

$1000 - 4 = 996$

$996 - 4 = 992$

$992 - 4 = 988$

$988 - 4 = 984$

$984 - 4 = 980$

$980 - 4 = 976$

$976 - 4 = 972$

$972 - 4 = 968$

$968 - 4 = 964$

$964 - 4 = 960$

$960 - 4 = 956$

$956 - 4 = 952$

$952 - 4 = 948$

$948 - 4 = 944$

$944 - 4 = 940$

$940 - 4 = 936$

$936 - 4 = 932$

$932 - 4 = 928$

$928 - 4 = 924$

$924 - 4 = 920$

$920 - 4 = 916$

$916 - 4 = 912$

$912 - 4 = 908$

$908 - 4 = 904$

$904 - 4 = 900$

$900 - 4 = 896$

$896 - 4 = 892$

$892 - 4 = 888$

$888 - 4 = 884$

$884 - 4 = 880$

$880 - 4 = 876$

$876 - 4 = 872$

$872 - 4 = 868$

$868 - 4 = 864$

$864 - 4 = 860$

$860 - 4 = 856$

$856 - 4 = 852$

$852 - 4 = 848$

$848 - 4 = 844$

$844 - 4 = 840$

$840 - 4 = 836$

$836 - 4 = 832$

$832 - 4 = 828$

$828 - 4 = 824$

$824 - 4 = 820$

$820 - 4 = 816$

$816 - 4 = 812$

$812 - 4 = 808$

$808 - 4 = 804$

$804 - 4 = 800$

$800 - 4 = 796$

$796 - 4 = 792$

$792 - 4 = 788$

$788 - 4 = 784$

$784 - 4 = 780$

$780 - 4 = 776$

$776 - 4 = 772$

$772 - 4 = 768$

$768 - 4 = 764$

$764 - 4 = 760$

$760 - 4 = 756$

$756 - 4 = 752$

$752 - 4 = 748$

$748 - 4 = 744$

$744 - 4 = 740$

$740 - 4 = 736$

$736 - 4 = 732$

$732 - 4 = 728$

$728 - 4 = 724$

$724 - 4 = 720$

$720 - 4 = 716$

$716 - 4 = 712$

$712 - 4 = 708$

$708 - 4 = 704$

$704 - 4 = 700$

$700 - 4 = 696$

$696 - 4 = 692$

$692 - 4 = 688$

$688 - 4 = 684$

$684 - 4 = 680$

$680 - 4 = 676$

$676 - 4 = 672$

$672 - 4 = 668$

$668 - 4 = 664$

$664 - 4 = 660$

$660 - 4 = 656$

$656 - 4 = 652$

$652 - 4 = 648$

$648 - 4 = 644$

$644 - 4 = 640$

$640 - 4 = 636$

$636 - 4 = 632$

$632 - 4 = 628$

$628 - 4 = 624$

$624 - 4 = 620$

$620 - 4 = 616$

$616 - 4 = 612$

$612 - 4 = 608$

$608 - 4 = 604$

$604 - 4 = 600$

$600 - 4 = 596$

$596 - 4 = 592$

$592 - 4 = 588$

$588 - 4 = 584$

$584 - 4 = 580$

$580 - 4 = 576$

$576 - 4 = 572$

$572 - 4 = 568$

$568 - 4 = 564$

$564 - 4 = 560$

$560 - 4 = 556$

$556 - 4 = 552$

$552 - 4 = 548$

$548 - 4 = 544$

$544 - 4 = 540$

$540 - 4 = 536$

$536 - 4 = 532$

$532 - 4 = 528$

$528 - 4 = 524$

$524 - 4 = 520$

$520 - 4 = 516$

$516 - 4 = 512$

$512 - 4 = 508$

$508 - 4 = 504$

$504 - 4 = 500$

$500 - 4 = 496$

$496 - 4 = 492$

$492 - 4 = 488$

$488 - 4 = 484$

$484 - 4 = 480$

$480 - 4 = 476$

$476 - 4 = 472$

$472 - 4 = 468$

$468 - 4 = 464$

$464 - 4 = 460$

$460 - 4 = 456$

$456 - 4 = 452$

$452 - 4 = 448$

$448 - 4 = 444$

$444 - 4 = 440$

$440 - 4 = 436$

$436 - 4 = 432$

$432 - 4 = 428$

$428 - 4 = 424$

$424 - 4 = 420$

$420 - 4 = 416$

$416 - 4 = 412$

$412 - 4 = 408$

$408 - 4 = 404$

$404 - 4 = 400$

$400 - 4 = 396$

$396 - 4 = 392$

$392 - 4 = 388$

$388 - 4 = 384$

$384 - 4 = 380$

$380 - 4 = 376$

$376 - 4 = 372$

$372 - 4 = 368$

$368 - 4 = 364$

$364 - 4 = 360$

$360 - 4 = 356$

$356 - 4 = 352$

$352 - 4 = 348$

$348 - 4 = 344$

$344 - 4 = 340$

$340 - 4 = 336$

$336 - 4 = 332$

$332 - 4 = 328$

$328 - 4 = 324$

$324 - 4 = 320$

$320 - 4 = 316$

$316 - 4 = 312$

$312 - 4 = 308$

$308 - 4 = 304$

$304 - 4 = 300$

$300 - 4 = 296$

$296 - 4 = 292$

$292 - 4 = 288$

$288 - 4 = 284$

$284 - 4 = 280$

$280 - 4 = 276$

$276 - 4 = 272$

$272 - 4 = 268$

$268 - 4 = 264$

$264 - 4 = 260$

$260 - 4 = 256$

$256 - 4 = 252$

$252 - 4 = 248$

$248 - 4 = 244$

$244 - 4 = 240$

$240 - 4 = 236$

$236 - 4 = 232$

$232 - 4 = 228$

$228 - 4 = 224$

$224 - 4 = 220$

$220 - 4 = 216$

$216 - 4 = 212$

$212 - 4 = 208$

$208 - 4 = 204$

$204 - 4 = 200$

$200 - 4 = 196$

$196 - 4 = 192$

$192 - 4 = 188$

$188 - 4 = 184$

$184 - 4 = 180$

$180 - 4 = 176$

$176 - 4 = 172$

$172 - 4 = 168$

$168 - 4 = 164$

$164 - 4 = 160$

$160 - 4 = 156$

$156 - 4 = 152$

$152 - 4 = 148$

$148 - 4 = 144$

$144 - 4 = 140$

$140 - 4 = 136$

$136 - 4 = 132$

$132 - 4 = 128$

$128 - 4 = 124$

$124 - 4 = 120$

$120 - 4 = 116$

$116 - 4 = 112$

$112 - 4 = 108$

$108 - 4 = 104$

$104 - 4 = 100$

$100 - 4 = 96$

$96 - 4 = 92$

$92 - 4 = 88$

$88 - 4 = 84$

$84 - 4 = 80$

$80 - 4 = 76$

$76 - 4 = 72$

$72 - 4 = 68$

$68 - 4 = 64$

$64 - 4 = 60$

$60 - 4 = 56$

$56 - 4 = 52$

$52 - 4 = 48$

$48 - 4 = 44$

$44 - 4 = 40$

$40 - 4 = 36$

$36 - 4 = 32$

$32 - 4 = 28$

$28 - 4 = 24$

$24 - 4 = 20$

$20 - 4 = 16$

$16 - 4 = 12$

$12 - 4 = 8$

$8 - 4 = 4$

$4 - 4 = 0$

Fonte: Dados da pesquisa

As duas primeiras questões foram resolvidas de forma correta, utilizando formas de resoluções já apresentadas anteriormente. Já na terceira questão proposta, o aluno aplicou inicialmente a forma de potência, seguida de exclusão e princípio multiplicativo, mas não se obteve êxito.

Figura 23: Resoluções do “Aluno F”

PÓS\_TESTE

(ENEM\_adaptada) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Parisodáctilos	1
Primates	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
<b>Total</b>	<b>209</b>

T&C Amazônia, ano 1, nº 3, dez/2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos – uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

$$20 \times 2 = 40 \times 33 = \begin{array}{r} 33 \\ 40 \\ \hline 5320 \end{array}$$

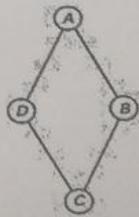
01.(ENEM\_adaptada) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é

$$2^6 = 2 \times 2 = 4 \times 2 = 8 \times 2 = 16 \times 2 = 32 \times 2 = 64 - 1 = 63$$

(ENEM\_adaptada) Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras. Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?



Pedras = 3  
Vértices = 4

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Mais uma vez, as duas primeiras questões foram resolvidas de forma correta por esse aluno que utilizou formas de resoluções já apresentadas aqui anteriormente. Já na terceira questão proposta, ele aplicou princípio multiplicativo, chegando ao resultado correto, mas nos pareceu que não foi bem compreendida a linha de raciocínio exposta.

### 4.3 Análises posteriores e validação

Nesta etapa terminante de nossa pesquisa, realizamos a conferência dos dados obtidos nas duas aplicações, buscando comparar os desempenhos e averiguando concebíveis legitimações dos prognósticos. Nosso objetivo foi o de examinar possíveis cooperações na busca de soluções das situações problemas que viessem demonstrar a universalização que validariam a finalidade da pesquisa.

Um dos objetivos desta pesquisa foi o de mostrar que a utilização do princípio multiplicativo pode se tornar eficaz para o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos alunos e, também mostrar que a utilização da resolução de problemas como ponto de partida, facilita o entendimento de alguns principais conceitos desse conteúdo, como por exemplo, a importância ou não da ordem dos elementos ao formarem determinado grupo.

Durante as duas aplicações, esperávamos que os alunos que tiveram aula expositiva tivessem maior facilidade nas resoluções se comparados aos alunos que apenas leram o material e analisaram questões resolvidas contidas nele. Fato este que foi confirmado de forma discreta na primeira aplicação, porém não se repetiu no segundo teste. Acreditamos que outros fatores podem ter influenciado nesse resultado, como, por exemplo a mais elevada qualidade escolar de alguns alunos que não assistiram à exposição.

Aparentemente, mesmo que de forma apenas intuitiva, as noções de princípio multiplicativo, combinação e arranjo já se faziam presentes no raciocínio da maioria deles. O maior desafio relatado foi o de compreender a forma de tratar essas diferenças durante os cálculos; pois os alunos disseram ser difícil perceber o padrão de desenvolvimento.

Ao reunirmos os alunos para aplicar o pós-teste, além de aparentemente mais “tranquilos e seguros”, nos deparamos com eles comentando sobre a leitura do material e suas resoluções expostas na primeira fase, bastante entusiasmados e ansiosos para a segunda aplicação, o que confirmou o bom desempenho dos alunos, sobretudo em relação ao tema Contagem.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao pesquisarmos sobre os temas, processos de contagem e combinatória, em dissertações, teses, livros e documentos normativos; encontramos que diversos pesquisadores e órgãos regulamentadores, reiteram que estes assuntos são de extrema importância para o desenvolvimento do discente e devem ter seus estudos iniciados desde os ciclos iniciais do Ensino Fundamental; procurando-se sempre relacionar estas temáticas com a vivência dos alunos em cada fase da Educação Básica.

Estudos relacionados a estes conteúdos indicaram que no decorrer de seu desenvolvimento, o aluno deverá ter repetidos contatos com estes assuntos, porém com abordagens e níveis de dificuldade diferentes. O que nos leva a crer que se oportunizarmos ao discente, momentos onde ele possa reexaminar tópicos já trabalhados e experimentações vivenciadas, objetivando sanar possíveis dúvidas; conseguiremos enraizar os conhecimentos e habilidades, na ânsia de alcançar a almejada aprendizagem.

Nosso trabalho por vezes se aproxima de ideias relacionadas à Engenharia Didática, de Michelle Artigue, que nos apresenta uma metodologia de pesquisa em didática da matemática, com conhecimentos detentores de relevância para a aplicação em sala de aula, mas que não são objetos de estudo desta dissertação e nem do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Profmat.

Relatamos que perante as argumentações expostas e resultados obtidos no decorrer da elaboração deste trabalho, consideramos ser legítima a conclusão de que o material produzido e testado representa uma ferramenta que pode auxiliar na compreensão das temáticas de forma jocosa, colaborando divertidamente com o desenvolvimento humano, em especial com a construção do raciocínio lógico-matemático do educando.

Esperamos que o livro paradidático, produto dessa dissertação tenha aplicabilidade em sala de aula da educação básica e que venha a se complementar posteriormente dando sequência aos mesmos temas pesquisados que foram processos de contagem e combinatória.

## REFERÊNCIAS

BASTOS, Antônio Carlos. O Ensino da Análise Combinatória em Sala de Aula, a Partir de Situações Problema e sob uma Abordagem Histórica. In: XVII **Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática**. Vitória - ES, 2013.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. **X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade**. Salvador/BA, 2010.

BRACKMANN, Christian Puhlmann. Desenvolvimento do Pensamento Computacional Através de Atividades Desplugadas Na Educação Básica. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação Em Informática Na Educação. Porto Alegre/RS: UFRGS, 2017.

BRASIL. **Parâmetros curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Orientações Curriculares Nacionais**. Brasília/DF: Ministério da Educação - Secretaria da Educação Básica, 2006.

BRASIL. **Matriz de Referência para o Enem 2009**. Brasília/DF: Ministério da Educação. Inep/MEC., 2009.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília/DF: Ministério da Educação - Inep/MEC, 2018.

BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática - tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

COSTA, Claudinei Aparecido da. Análise Combinatória: como abordá-la a partir do ensino fundamental? **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife: SBEM, 2004.

GONÇALVES, Rafaela Ramos Soares. **Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio: a utilização do princípio multiplicativo e da resolução de problemas como ferramenta didático-pedagógica**. Dissertação de Mestrado. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - ProfMat. Rio de Janeiro/RJ: IMPA, 2014.

LIMA, Francisco do Nascimento. Um Resgate aos Conceitos Matemáticos Através dos Paradidáticos e Mapas Conceituais. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades**. São Paulo/SP: SBEM, 2016

MENEZES, Ebenezer Takuno de; SANTOS, Thais Helena dos. Verbetes paradidáticos. **Dicionário Interativo da Educação Brasileira - Educabrazil**. São Paulo: Midiamix, 2001. Disponível em: <<https://www.educabrazil.com.br/paradidaticos/>>. Acesso em: 19 de mai. 2019.

OLIVEIRA, Carlos Alberto Lopes Dos Santos de. **Análise Combinatória: Raciocínio recursivo e processos de enumeração**. Dissertação de Mestrado. Programa de

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - ProfMat. UENF. Campos dos Goytacazes/RJ, 2015.

SILVA, Alzira Ferreira da. **RoboEduc Uma Metodologia de Aprendizado com Robótica Educacional**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Natal/RN: UFRN, 2009.

SILVA, Jessé Carvalho da. **A Álgebra Linear no Ensino Básico**. Dissertação de Mestrado. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - ProfMat. Mossoró/RN: UFRSA, 2013.

SONZA, Andréa Poletto. **Acessibilidade de Deficientes Visuais aos Ambientes Digitais/Virtuais**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós- Graduação em Educação. Porto Alegre/RS:UFRGS, 2004.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por meio de atividades orientadoras em uma escola do interior paulista**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas. São Carlos/SP: UFSCAR, 2011.

WIELEITNER, Heinrich. **Historia de la Matemática**. Barcelona: Labor, 1932.

**APÊNDICE****LIVRO PARADIDÁTICO**