
Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia



**Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT**

**Rotações em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 e a Álgebra dos
Quatérnios**

Fausto Magno de Araújo

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

São José dos Campos
Maio, 2019



PROFMAT

Título: *Rotações em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 e a Álgebra dos Quatérnios*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Maio, 2019

Araújo, F. M.

Rotações em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 e a Álgebra dos Quatérnios, Fausto Magno de Araújo – São José dos Campos, 2019.

viii, 62f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Rotations in \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}^4 and the Quaternions Algebra

1. Rotação. 2. Números complexos. 3. Quatérnios. 4. Vetor. 5. Álgebra.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:

Prof. Dr. Eduardo Antonelli

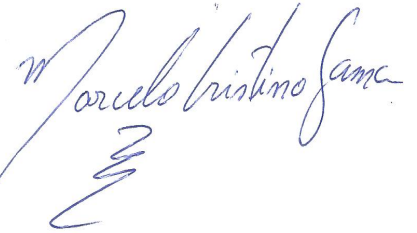
Coordenador do Programa de Pós-Graduação:

Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

FAUSTO MAGNO DE ARAÚJO

ROTAÇÕES EM \mathbb{R}^3 E \mathbb{R}^4 E A ÁLGEBRA DOS QUATÉRNIOS

Presidente da banca: Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama



Banca examinadora:

Prof.^ª. Dr.^ª. Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita

Prof. Dr. Michael Macedo Diniz

Prof.^ª. Dr.^ª. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

Data da Defesa: 28 de Maio de 2019

*“Dedico esse trabalho à minha esposa Sônia
e às minhas filhas Dayse e Nívia.”*

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos são direcionados à SBM, à CAPES e à UNIFESP pela implementação do programa PROFMAT visando a melhoria do ensino de Matemática através da qualificação dos professores da educação básica.

Agradeço aos professores que constituem o corpo docente do programa nessa instituição.

Agradeço ao professor orientador.

Agradeço à minha esposa e minhas filhas por compreenderem minha jornada nos últimos anos.

Agradeço à Juliana Reis pela amizade construída durante o curso.

RESUMO

Nesse trabalho estudaremos as rotações de vetores em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 através da Álgebra de Quatérnios, uma extensão do conjunto dos números complexos – \mathbb{C} . As rotações de vetores no plano (\mathbb{R}^2) são descritas pelo produto de números complexos de módulo unitário. Uma vez que a composição de rotações em \mathbb{R}^3 não é comutativa, torna-se necessário estabelecer um outro conjunto cujo produto não seja comutativo, mas seja associativo. Esse é o conjunto dos quatérnios. Tal conjunto é consistente com um espaço de quatro dimensões, motivo pelo qual descreve, também, rotações em \mathbb{R}^4 . Nesse trabalho estudaremos rotações no plano, o conjunto dos quatérnios e as rotações em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 . Utilizaremos um formalismo matricial, cuja manipulação é acessível aos estudantes do Ensino Médio. Apresentaremos, também, exemplos visuais que podem ser utilizados em sala de aula.

Palavras-chave: 1. Rotação. 2. Números complexos. 3. Quatérnios. 4. Vetor. 5. Álgebra.

ABSTRACT

In this work we will study the vector rotations in \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}^4 through the Algebra of Quaternions, an extension of the set of complex numbers – \mathbb{C} . The rotations of vectors in the plane (\mathbb{R}^2) are described by the product of complex numbers of unitary module. Since the composition of rotations in \mathbb{R}^3 is not commutative, it is necessary to establish another set whose product is not commutative, but be associative. This is the set of quaternions. Such a set is consistent with a space four dimensions, reason why it also describes rotations in \mathbb{R}^4 . In this work we will study rotations in the plane, the set of quaternions and rotations in \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}^4 . We will use a matrix formalism, whose manipulation is accessible to students from highschool. We will also present visual examples that can be used in the classroom.

Keywords: 1. Rotation. 2. Complex numbers. 3. Quaternions. 4. Vector. 5. Algebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	3
1 O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS – \mathbb{C}	4
1.1 Caracterização dos Números Complexos	4
1.2 Representação gráfica e a forma Trigonométrica	7
2 ROTAÇÕES NO PLANO – \mathbb{R}^2	13
3 OS QUATÉRNIOS DE HAMILTON	18
3.1 Caracterização dos Quatérnios	18
3.2 Quatérnios representados por matrizes	22
3.3 Quatérnio nas formas Trigonométrica e Polar	23
4 ROTAÇÕES NO ESPAÇO – \mathbb{R}^3	25
4.1 Rotações por Matrizes	25
4.2 Rotações por Quatérnios	29
5 ROTAÇÕES NO ESPAÇO – \mathbb{R}^4	38
6 PROPOSTA DIDÁTICA – ROTAÇÕES	41
6.1 Sequência Didática	41
6.1.1 Aula 1 - Rotações em \mathbb{R}^2	42
6.1.2 Aula 2 - Rotações em \mathbb{R}^3 com uso de material concreto	47
6.1.3 Aula 3 - Aplicando Matrizes de Rotação no cubo	48
6.1.4 Aula 4 - Aplicando quatérnios para rotacionar o cubo	50
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Pedra na Brougham Bridge do Royal Canal <small>Fonte: Maths Week Ireland.</small>	3
Figura 2	Representação de $z = a + bi$ no plano Argand-Gauss (Imagem obtida de [6]).	7
Figura 3	Produto de z por i (Imagem obtida de [6]).	13
Figura 4	Tesouro perdido (imagem obtida de [7])	14
Figura 5	Representação do vetor \vec{OP} em \mathbb{R}^3 .	25
Figura 6	Coordenadas da projeção de P após rotação do referencial.	26
Figura 7	Representação geométrica da rotação por um quatérnio (Imagem obtida de [9]).	34
Figura 8	Figura original - não recebeu rotação.	42
Figura 9	Figura rotacionada em 90° .	43
Figura 10	Rotação de 180° na Figura 8.	44
Figura 11	Rotação de 180° na Figura 8	46
Figura 12	Rotação de 90° sobre a Figura 11.	47
Figura 13	Sequência 1: Rotações em 3D (Imagens obtidas em [16])	48
Figura 14	Sequência 2: Rotações em 3D (Imagens obtidas em [16])	48
Figura 15	Identificação dos vértices do cubo	49
Figura 16	Rotação com quatérnio	52

INTRODUÇÃO

A Álgebra de Quatérnios é uma extensão do conjunto dos números complexos – \mathbb{C} , sendo assim, esse trabalho tem início com uma retomada do conjunto dos complexos, seguido das rotações de vetores no plano (\mathbb{R}^2), que são descritas pelo produto de números complexos de módulo unitário. Uma abordagem do conteúdo do 3º ano do Ensino Médio, acompanhada de uma abordagem com uso de matrizes.

Na sequência temos o trabalho de Hamilton (1805-1865) que contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Álgebra Moderna. Na tentativa de aplicar a ideia de número complexo para três dimensões, Hamilton desenvolveu a Álgebra dos Quatérnios. Seu trabalho possibilitou realizar rotações em \mathbb{R}^3 . Os quatérnios formam um conjunto consistente com um espaço de quatro dimensões portanto, descreve, também, rotações em \mathbb{R}^4 .

As rotações em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{R}^4 são realizadas com produtos de matrizes e também com produtos de quatérnios unitários e, em três dimensões, esse produto não é comutativo.

O objetivo é apresentar um texto com linguagem didática, de fácil leitura e contendo alguns fatos históricos. Um dos quais, está representado na Figura 1, é o local onde Hamilton passeava com sua esposa, no momento em que teve a inspiração de usar quádruplas para representar um quatérnio [1]. Na proposta didática estão apresentados exemplos de atividades de rotações que ilustram o conteúdo abordado, de forma a levar o aluno a compreender a utilização das rotações com matrizes no plano \mathbb{R}^2 e no espaço \mathbb{R}^3 , bem como as rotações em \mathbb{R}^3 com quatérnios, apresentadas neste trabalho.



Figura 1: Pedra na Brougham Bridge do Royal Canal Fonte: Maths Week Ireland.

O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS – \mathbb{C}

Até o início do século XVI equações que tinham como soluções raízes quadradas de números negativos eram ditas, simplesmente, “não resolúveis”[1]. Fato que ainda hoje praticamos com nossos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e iniciais do Ensino Médio quando são apresentados à resolução de equações de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$, usando a “fórmula de Bhaskara”. Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ dizemos que a equação não possui solução em \mathbb{R} .

Em 1545, Girolamo Cardano (1501-1576) publica a *Ars magna* com soluções caso a caso de várias equações cúbicas. Tal como al-Khowarismi, Cardano também pensava geometricamente. Suas soluções partiam da ideia de completar quadrados ou, nesse caso, cubos. Estas soluções levaram, inevitavelmente, às raízes quadradas de números negativos, uma nova espécie de números que Cardano denominava-os de “*numeri ficti* (números fictícios)”.

Nos séculos que se sucederam, esse novo conjunto de números impulsionou o estudo da álgebra e, matemáticos como Wessel, Argand, Gauss, Cauchy e Hamilton com seus estudos e suas publicações, deram ao conjunto dos números complexos a forma que conhecemos hoje.

1.1 CARACTERIZAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O conjunto dos números complexos – \mathbb{C} é apresentado aos alunos no 3º ano do Ensino Médio. Ávila[2] apresenta os números complexos partindo da equação de segundo grau com $\Delta < 0$, que no passado não possuía solução real e, a partir de agora, terá solução que pertence a esse novo conjunto numérico.

Tomando como exemplo a função

$$x^2 - 2x + 10$$

que, para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$, assumirá resultado sempre diferente de 0. Ao resolver a equação

$$x^2 - 2x + 10 = 0$$

usando a fórmula de Bhaskara, obtemos

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

sendo -36 o produto de 36 por (-1) e utilizando as propriedades da radiciação temos

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{36(-1)}}{2}$$

segue que

$$x = \frac{2 \pm 6\sqrt{-1}}{2}$$

que nos fornece como soluções

$$x' = 1 + 3\sqrt{-1}$$

e

$$x'' = 1 - 3\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad x'' = 1 + (-3\sqrt{-1})$$

tanto em x' como em x'' as parcelas não podem ser adicionadas por serem algebricamente distintas devido à $\sqrt{-1}$.

O símbolo $\sqrt{-1}$ por não possuir nenhum significado geométrico nem algébrico causava estranheza e incomodava os matemáticos. Euler (1707-1783) passa, então, a utilizar a letra i para designá-lo[1]. Sendo assim

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{e} \quad i^2 = -1$$

temos então

$$x' = 1 + 3i \quad \text{e} \quad x'' = 1 - 3i$$

Portanto, os números que se apresentam na forma algébrica

$$z = a + bi \tag{1}$$

são chamados de *Números Complexos*, onde a é sua parte real designada por $Re(z)$, b sua parte imaginária, $Im(z)$ e, i é a *unidade imaginária*, com a e $b \in \mathbb{R}$. Se $a = 0$ temos o número complexo $0 + bi$ ou simplesmente bi , denominado imaginário puro; se $b = 0$ temos $a + 0i$ ou apenas o número real a . Sendo assim, o conjunto dos números reais passa a ser um subconjunto do conjunto dos números complexos, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Dados os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos as seguintes definições:

Definição 1.1. *Igualdade*

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a = c \quad \text{e} \quad b = d$$

Definição 1.2. *Adição*

$$z_1 + z_2 \quad \Rightarrow \quad (a + c) + (b + d)i$$

Definição 1.3. *Multipliação*

$$z_1 \cdot z_2 \quad \Rightarrow \quad (ac - bd) + (ad + bc)i$$

aplica-se a propriedade distributiva e $i^2 = -1$;

Definição 1.4. *Oposto*

$$z_1 = a + bi \quad \Rightarrow \quad -z_1 = -a - bi$$

Definição 1.5. *Subtração*

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= z_2 + (-z_1) \\ (c + di) + (-a - bi) &= (c - a) + (d - b)i \end{aligned}$$

Definição 1.6. *Módulo*

$$z_1 = a + bi \quad \Rightarrow \quad |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Segue que

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Definição 1.7. *Conjugado*

$$z_1 = a + bi \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_1 = a - bi$$

segue que

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = a^2 + b^2 \quad \text{isto é} \quad z_1 \cdot \bar{z}_1 = |z_1|^2$$

O complexo conjugado permite calcular o quociente de dois números complexos z_1 e z_2

Definição 1.8. *Divisão*

$$z \cdot z_2 = z_1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{z_1}{z_2}, \quad \text{com } z_2 \neq 0 \text{ [2]}$$

multiplicando numerador e denominador pelo conjugado do denominador

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$$

As operações de Adição e Multiplicação em \mathbb{C} possuem as propriedades:

- Comutativa – para todos z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$,

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{e} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

- Associativa – para todos z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$,

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \text{e} \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

- Distributiva – para todos z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$,

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

- Elemento neutro – para todos z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$, com $z_2 = 0 + 0i$ e $z_3 = 1 + 0i$,

- na Adição $z_1 + z_2 = z_3$
- na Multiplicação $z_1 \cdot z_2 = z_3$

Segundo Hefez [3], “conjuntos munidos das operações de adição e multiplicação e que possuem as propriedades acima [...] estão sujeitos às leis básicas da aritmética, ou, na terminologia moderna, é o que se chama de anel”. São exemplos de anéis, os conjuntos dos números inteiros, racionais, reais, os complexos e também os quatérnios como veremos mais a frente.

1.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA E A FORMA TRIGONOMÉTRICA

Os números complexos foram representados graficamente em 1798 por Wessel (1745-1818) e em 1806 por Argand (1768-1822), mas essas publicações não receberam a devida importância. Trinta anos mais tarde, Gauss (1777-1855), também passa a representar um número complexo como um par ordenado em um plano cartesiano, com a parte real no eixo horizontal e a imaginária no eixo vertical[1]. A representação de um número complexo $z = a + bi$ por um ponto $Z = (a, b)$ possibilitou que os matemáticos aceitassem com maior naturalidade os números complexos.

Cada ponto no plano identifica um número complexo de coordenadas (a, b) e cada número complexo pode ser representado por um vetor \vec{Oz} , onde $|z|$ é a distância do ponto Z à origem, Figura 2.

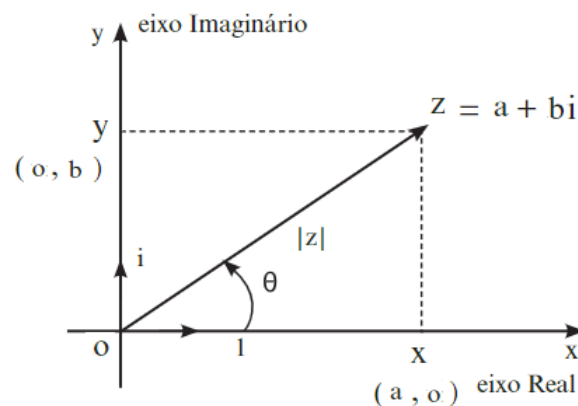


Figura 2: Representação de $z = a + bi$ no plano Argand-Gauss (Imagem obtida de [6]).

A representação gráfica permitiu escrever o número complexo na forma trigonométrica. Na Figura 2 o triângulo OZX é retângulo em X , o vetor \vec{Oz} é a hipotenusa desse triângulo e mede $|z|$, os segmentos OX medindo $|X| = a$ e $XZ = OY$ medindo $|Y| = b$ são os catetos e, θ é o argumento do número complexo z , definido somente quando $z \neq 0$. Usando as relações métricas temos:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \quad \Rightarrow \quad a = |z| \cos \theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|} \quad \Rightarrow \quad b = |z|\operatorname{sen}\theta$$

substituindo os valores de a e b na forma algébrica $z = a + bi$ obtemos:

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \quad (2)$$

esta é a forma Trigonométrica do número complexo. Quando fazemos $r = |z|$ e o argumento θ variando entre $0 \leq \theta \leq 2\pi$ temos a forma Polar.

A multiplicação e a divisão de dois números complexos na forma polar segue as definições (1.3.) e (1.8.) respectivamente. Assim, dados dois números complexos na forma polar

$$z_1 = r_1(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

e

$$z_2 = r_2(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

temos:

- $z_1 \cdot z_2$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [(\cos\theta \cos\alpha - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha) + i(\operatorname{sen}\theta \cos\alpha + \cos\theta \operatorname{sen}\alpha)]$$

resultado da adição de arcos trigonométricos[4], logo

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta + \alpha) + i\operatorname{sen}(\theta + \alpha)] \quad (3)$$

- $\frac{z_1}{z_2}$ com $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}{r_2(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)}$$

de (1.8.), segue

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)}{r_2(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)}$$

o produto do denominador resulta em $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, temos então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta \cos\alpha + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha) + i(\operatorname{sen}\theta \cos\alpha - \cos\theta \operatorname{sen}\alpha)$$

resultando em

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta - \alpha) + i\operatorname{sen}(\theta - \alpha)] \quad (4)$$

O produto de números complexos pode apresentar uma quantidade $n \in \mathbb{N}$ de fatores, dados $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]. [5]$$

Quando $z_1 = z_2 = \dots = z_n$ com $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n$, temos:

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)] \quad (5)$$

e, se o módulo dos fatores for unitário, obtemos a fórmula de *De Moivre* (1667-1754)[2]

$$z^n = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta).$$

Esta última também é válida para expoente negativo, como segue:

$$\begin{aligned} z^{-n} &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n} = \\ &= \frac{1}{\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)} = \cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta) \end{aligned}$$

assim

$$z^{-n} = \cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta) = \cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta). \quad (6)$$

De posse dos números complexos na forma trigonométrica podemos definir Raízes n -ésimas e Exponencial.

As raízes n -ésimas são as soluções para a equação $z^n = z'$, em que z' é conhecido; estamos à procura do número $z \in \mathbb{C}$ que ao ser multiplicado por ele mesmo n vezes tem como produto o número $z' \neq 0$ também \mathbb{C} , isto é, $\sqrt[n]{z'} \Rightarrow z^n = z'$. Tomando z' e z na forma trigonométrica

$$z' = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = \rho(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$$

substituindo na equação $z^n = z'$ e, da equação 5, temos:

$$\rho^n [\cos(n\phi) + i \operatorname{sen}(n\phi)] = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

da definição (1.1.) de igualdade segue

$$\rho^n \cos(n\phi) = r \cos \theta \quad e \quad \rho^n \operatorname{sen}(n\phi) = r \operatorname{sen} \theta.$$

As equações acima nos fornecem

$$\rho^n = r \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r}$$

e

$$n\phi = \theta + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo os valores de ρ e ϕ em z obtemos

$$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (7)$$

Como os possíveis restos da divisão de k por n são $0, 1, \dots, n-1$, o número complexo $z' \neq 0$ possui n raízes z_0, z_1, \dots, z_{n-1} , essas raízes possuem módulo $\rho = \sqrt[n]{r}$ e argumento $\phi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, com $k = 0, 1, \dots, n-1$ [2].

A equação 7 pode ser reescrita como segue:

$$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right) \quad (8)$$

para $z' = 1$ a equação 8 se resume a

$$z = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right) = \omega_k,$$

denominada raízes n -ésimas da unidade e que fornece as raízes $1, \omega, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ quando k assume os valores $0, 1, 2, \dots, n-1$. Substituindo ω_k em (8) obtemos

$$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \cdot \omega_k \quad (9)$$

e, para $k = 0$ na equação 9 temos a raiz z_0 de um número complexo

$$z_0 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right).$$

Desta forma todas as raízes n -ésimas de um número complexo podem ser obtidas através do produto

$$z = z_0 \cdot \omega_k, \quad \text{com } k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (10)$$

onde z_0 é uma raiz n -ésima de z' e ω_k as raízes n -ésimas da unidade.

A Exponencial é representada pela letra e , símbolo que apareceu impresso pela primeira vez na *Mechanica* de Euler de 1736, sendo usado para representar a base do sistema de logaritmos naturais [1]. Este símbolo representa o número irracional compreendido entre 2 e 3 ($e=2,71828\dots$), sendo obtido pela série

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (11)$$

quando $x=1$ [2], ou pelo limite

$$e = \lim_{n \rightarrow 0} (1+n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (12)$$

Dados o número e e o número complexo $z = a + bi$, definimos exponencial de um número complexo como segue

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}.$$

Tomando $x = bi$ e fazendo o desenvolvimento da série em 11, temos

$$\begin{aligned} e^{bi} &= 1 + bi + \frac{(bi)^2}{2!} + \frac{(bi)^3}{3!} + \frac{(bi)^4}{4!} + \frac{(bi)^5}{5!} + \frac{(bi)^6}{6!} + \frac{(bi)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + bi - \frac{b^2}{2!} - i\frac{b^3}{3!} + \frac{b^4}{4!} + i\frac{b^5}{5!} - \frac{b^6}{6!} - i\frac{b^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

admitindo a possibilidade de reagrupar os termos dessa série de forma que os termos reais fiquem separados dos termos imaginários, obtemos

$$e^{bi} = 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots + i \left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \dots \right)$$

juntamente com as séries das funções seno e cosseno, a parte imaginária e^{bi} pode ser escrita da forma

$$e^{bi} = \cos b + i \operatorname{sen} b$$

e a expressão para a exponencial de um número complexo é

$$e^z = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b) \quad (13)$$

Segue do desenvolvimento de e^{bi} que a forma polar do número complexo passa a ser representada por

$$z = r e^{i\theta} \quad (14)$$

e a fórmula de *De Moivre* por

$$z^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}. \quad (15)$$

Na sequência estão definidas as propriedades da exponencial complexa:

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
2. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
3. $(e^z)^n = e^{nz}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$4. e^z \neq 0, \quad \forall z$$

$$5. |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

$$6. e^z = 1 \quad \text{se e somente se} \quad z = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

cujas demonstrações encontram-se em [2].

ROTAÇÕES NO PLANO – \mathbb{R}^2

A expectativa do Currículo Oficial do Estado de São Paulo é que o aluno seja capaz de compreender o significado geométrico das operações com os números complexos [6]. Interpretando-as como transformações no plano: translações, ampliações e rotações. O documento destaca, ainda, que tais “transformações realizadas sobre regiões do plano complexo constituem terreno muito fértil para aplicações práticas,[...] que poderão ser apreciadas pelos alunos em leituras futuras ou em trabalhos complementares”. As transformações que resultam em rotações são as que farão parte desse estudo.

Algebricamente, o plano complexo – \mathbb{C} difere do plano euclidiano – $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por causa da multiplicação dos números complexos [2] (Definição 1.3.), no plano euclidiano não temos tal operação com os pares ordenados (x, y) . Sendo assim, geometricamente podemos considerar os planos \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 como espaços isomorfos.

Considerando uma região do plano complexo, cada ponto dessa região identifica um número complexo $z = x + yi$ e será objeto de uma transformação resultante da multiplicação por $z' = 0 + i$ ou simplesmente i . Ao efetuarmos o produto de z por z' , obtemos:

$$z \cdot z' = z \cdot i = xi + yi^2 = -y + xi \quad (1)$$

de 1 observamos que $|z| = |z \cdot i|$.

Sendo θ o argumento de z e θ' o argumento de $z \cdot i$, segue que $\theta' + (\frac{\pi}{2} - \theta) = \pi$, isto é, $\theta' - \theta = \frac{\pi}{2}$. Assim os vetores \vec{Oz} e \vec{Ozi} são ortogonais, ambos possuem o mesmo módulo, mas \vec{Ozi} foi rotacionado de $\frac{\pi}{2}$ radianos (90°) conforme Figura 3. Segue,

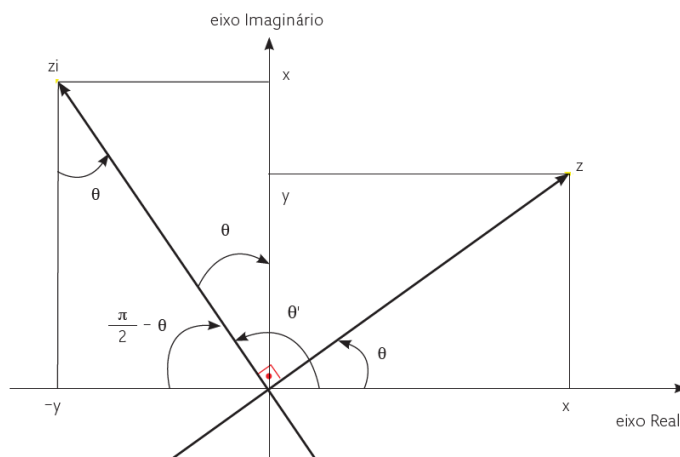


Figura 3: Produto de z por i (Imagem obtida de [6]).

sem maiores detalhes, que ao multiplicarmos todos os pontos de uma região pelo número complexo i seu tamanho não será alterado e sofrerá uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Santos [7], em sua dissertação, exemplifica a utilização de rotação para resolver o *Problema do Tesouro Perdido* (p. 44). Trata-se de um tesouro que foi escondido por um pirata em uma ilha, a única do arquipélago com duas rochas e uma palmeira, deixando um mapa com as instruções para localizá-lo. O portador do mapa, ao localizar o arquipélago, verifica que a palmeira não existe mais. Na Figura 4 as rochas estão representadas pelas letras R e Q e a palmeira pela letra P, a ausência da palmeira não interfere na localização do tesouro se o proprietário do mapa possuir os conceitos de rotação.

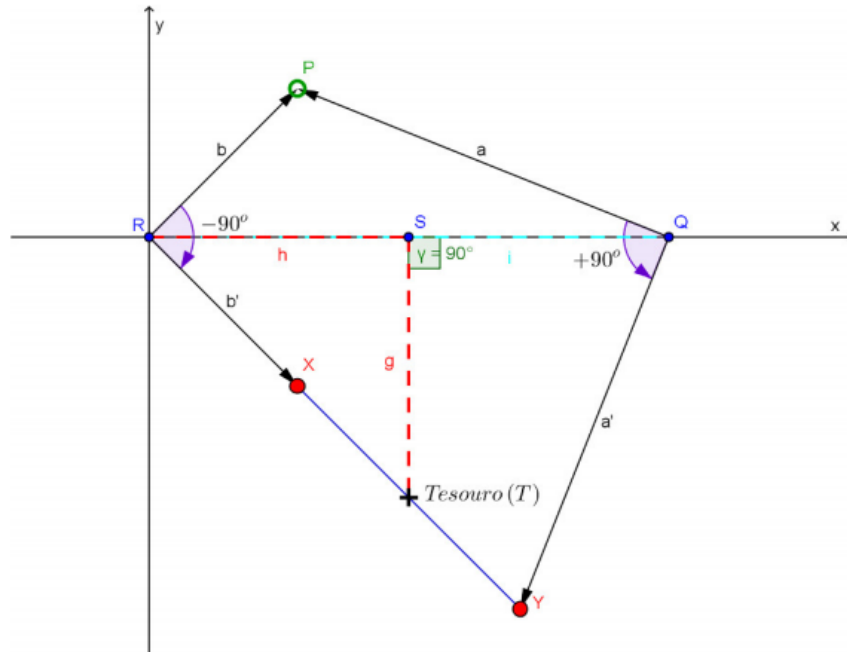


Figura 4: Tesouro perdido (imagem obtida de [7])

Do que foi ilustrado acima, temos um conjunto de transformações lineares de \mathbb{C} em \mathbb{C} que coincide com o próprio conjunto dos números complexos [8]. Para definir uma transformação linear em \mathbb{C} vamos tomar z e $w \in \mathbb{C}$, temos:

$$T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$w \longmapsto zw$$

Sendo $z = a + bi$ e $w = x + yi$, segue:

$$Tw = (a + bi)w = (a + bi)(x + yi) = ax - by + i(bx + ay)$$

Do fato de \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 serem espaços isomorfos a transformação $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ corresponde a uma transformação $T' : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T'(x, y) = (ax - by, bx + ay)$$

que possui a matriz de base canônica

$$T' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (2)$$

Segue de 2 Capítulo 1 que

$$T' = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$= r \cdot R_\theta \quad (4)$$

temos, então, um conjunto de rotações definido por $\mathfrak{R} = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, onde cada R_θ representa uma matriz de rotação no plano. O que nos leva a concluir que o produto do número complexo w por z , rotaciona w em θ radianos em relação à origem e o módulo de w será aumentado ou diminuído por r , que é o módulo de z .

Quando $r = 1$ em (3) temos

$$T' = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5)$$

com R_θ representando todas as matrizes ortogonais de rotação de dimensão 2, uma vez que satisfaz as condições:

- matrizes ortogonais são tais que $AA^t = A^tA = I$ e $\det A = 1$ [8];

Definição 2.1. *O conjunto das matrizes ortogonais com determinante igual a 1 é representado por $SO_{(2)}$ e denominado de grupo especial ortogonal de dimensão 2.*

Proposição 2.2. *$SO_{(2)}$ é o conjunto das matrizes de rotação no plano, [8]*

$$SO_{(2)} = \mathfrak{R} = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Demonstração:

$$(\Rightarrow) \mathfrak{R} \subset SO_{(2)}$$

Seja $\theta \in \mathbb{R}$, temos

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

então

$$\det R_\theta = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1.$$

Temos, também, que

$$\begin{aligned} R_\theta R_\theta^t &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta & \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e mais

$$\begin{aligned} R_\theta^t R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ -\operatorname{sen} \theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta & \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim $R_\theta \in SO_{(2)}$, logo $\mathfrak{R} \subset SO_{(2)}$;

(\Leftarrow) $SO_{(2)} \subset \mathfrak{R}$

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_{(2)}$$

por definição temos que $A^t = A^{-1}$, então

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

segue que $a = d$ e $b = -c$, assim

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

como $A \in SO_{(2)}$, $\det A = a^2 + c^2 = 1$,

então $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos \theta$ e $c = \operatorname{sen} \theta$, logo

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R_\theta$$

ou seja, $SO_{(2)} \subset \mathfrak{R}$

qcd.

As matrizes de rotação $R_\theta \in \mathfrak{R}$ são operadores ortogonais que preservam a norma e o ângulo entre os vetores [8], e a rotação resultante não depende da ordem de composição das rotações. A composição de rotações é uma rotação, e satisfaz:

$$R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = R_{\theta_1 + \theta_2}$$

Os números complexos considerados acima pertencem, na geometria do plano, à circunferência unitária de centro na origem, esse conjunto de números será denominado de esfera \mathfrak{S}^1 .

OS QUATÉRNIOS DE HAMILTON

O matemático irlandês Sir Willian Rowan Hamilton (1805-1865) apresentou à Academia Irlandesa, em 1833, um artigo no qual introduzia uma álgebra de pares de números complexos [1]. Nele continha, a importante regra da multiplicação de pares de números complexos, que o autor interpretava como uma operação envolvendo rotação, conforme foi descrito nos Capítulos anteriores.

Hamilton tentou aplicar a ideia de número complexo binário $a + bi$ para três dimensões usando os ternos $a + bi + cj$ e trabalhou por dez anos na tentativa de resolver a multiplicação de números com essa formação, sem sucesso. Até que, em 1843, teve a inspiração de usar quádruplas para representar esse conjunto de números. Sua fórmula fundamental foi registrada em uma pedra na *Brougham Bridge* do *Royal Canal* ^[1] [1].

Em 1853 publica *Lectures on Quaternions*, uma obra volumosa na qual descrevia a aplicação dos quatérnios na Geometria, na Geometria Diferencial e na Física. Hamilton apresentou uma teoria detalhada de um sistema algébrico não comutativo, fato que contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Álgebra moderna [1].

3.1 CARACTERIZAÇÃO DOS QUATÉRNIOS

Definição 3.1. Um Quatérnio é um elemento de \mathbb{R}^4 , sendo representado pela quádrupla:

$$q = a + bi + cj + dk,$$

onde suas componentes a, b, c e d são números reais e seu conjunto é representado pela letra \mathbb{H} .

Para desenvolver a álgebra dos quatérnios, Hamilton estabeleceu que:

$$\left\{ \begin{array}{l} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij = k = -ji \\ jk = i = -kj \\ ki = j = -ik \end{array} \right. \quad [9] \quad (1)$$

Um quatérnio é um par de números complexos. Dados z e $w \in \mathbb{C}$ escritos na forma algébrica, temos:

$$q = z + wj \quad (2)$$

¹ Figura 1 que aparece na introdução desse trabalho.

segue do exposto em 1 que

$$\begin{aligned} q &= (a + bi) + (c + di)j \\ &= a + bi + cj + dk \quad [9] \end{aligned} \quad (3)$$

Assim, o conjunto de todos os quatérnios será dado por:

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

e \mathbb{H}^* é o conjunto dos quatérnios não nulos:

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}.$$

Representando o quatérnio q com a forma

$$q = q_0 + \mathbf{q} \quad (4)$$

onde

$$\mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k \quad (5)$$

temos que:

q_0 é a parte real do quatérnio, $q_0 = \Re(q)$ e \mathbf{q} é a parte imaginária do quatérnio, $\mathbf{q} = \Im(q)$ também chamada de parte pura.

Quando $q_0 = 0$, o quatérnio $q = \mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$ é denominado de quatérnio puro e pertence ao conjunto

$$I\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H} \mid q_0 = 0\}$$

e pode ser identificado com o espaço \mathbb{R}^3 .

Portanto um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ com $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ pode ser representado em uma base de \mathbb{R}^4 com

$$1 = (1, 0, 0, 0); \quad i = (0, 1, 0, 0); \quad j = (0, 0, 1, 0); \quad k = (0, 0, 0, 1)$$

e um quatérnio $\mathbf{q} \in I\mathbb{H}$ com $\mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$ pode ser representado em uma base de \mathbb{R}^3 com

$$i = (1, 0, 0); \quad j = (0, 1, 0); \quad k = (0, 0, 1)$$

segue que q_0 é um escalar e \mathbf{q} é um vetor de \mathbb{R}^3 [9].

As operações com quatérnios são semelhantes às operações com os números complexos. Dados os quatérnios $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ e $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$, temos as seguintes definições:

Definição 3.2. *Igualdade*

$$q = p \quad \Leftrightarrow \quad q_0 = p_0, \quad q_1 = p_1, \quad q_2 = p_2 \quad e \quad q_3 = p_3$$

Definição 3.3. *Adição*

$$q + p \quad \Rightarrow \quad (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)i + (q_2 + p_2)j + (q_3 + p_3)k$$

Definição 3.4. *Multipliação*

- por um escalar $c = c_0 + \mathbf{0}$

$$cq = cq_0 + cq_1i + cq_2j + cq_3k$$

- por um quatérnio p

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i + \\ &\quad (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)j + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)k \end{aligned}$$

Segue que

$$pq = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (6)$$

onde $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ é o produto interno e $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ é o produto vetorial [2]. Segue que

$$\Re(pq) = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \quad e \quad \Im(pq) = p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$$

- entre dois quatérnios puros

$$\mathbf{p} = p_1i + p_2j + p_3k \quad e \quad \mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$$

resulta em

$$\mathbf{pq} = (-p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_2q_3 - p_3q_2)i + (p_3q_1 - p_1q_3)j + (p_1q_2 - p_2q_1)k$$

este resultado é a adição do produto vetorial com o simétrico do produto interno dos vetores \mathbf{p} e \mathbf{q}

$$\mathbf{pq} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}. \quad (7)$$

Segundo a nota de Delgado [10], o produto interno apareceu formalmente na literatura no livro *Vector Analysis* (1901) de Edwin B. Wilson, baseado nos seminários ministrados por Josiah Willard Gibbs (1839-1903) com o nome de *produto direto*, mas já havia sido empregado anteriormente por Lagrange (1736-1813) e por Hamilton.

²Sobre produto interno e produto vetorial consulte Camargo [11]

Definição 3.5. *Norma*

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

A expressão $N(q)$ também é usada para representar a Norma de um quatérnio. Quando $|q| = 1$ o quatérnio é unitário. Segue da definição que

$$|pq| = |p| \cdot |q|$$

Definição 3.6. *Conjugado*

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad \Rightarrow \quad \bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k = q_0 - \mathbf{q}$$

e, da definição de conjugado temos

$$q\bar{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = |q|^2$$

Definição 3.7. *Inverso Multiplicativo*

$$q^{-1}q = qq^{-1} = 1 \quad \text{para } q \in \mathbb{H}^*$$

assim

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

Definição 3.8. *Divisão*

Para $\frac{q}{p}$ temos duas possibilidades:

$$\left(\frac{q}{p}\right)_l = p^{-1}q \quad \text{e} \quad \left(\frac{q}{p}\right)_r = qp^{-1}, \quad \text{com } q \in \mathbb{H} \quad \text{e} \quad p \in \mathbb{H}^*$$

devido ao fato da multiplicação de quatérnios não ser comutativa temos a divisão à esquerda e a divisão à direita.

Dados os escalares c , c_1 e c_2 e os quatérnios p , q e $r \in \mathbb{H}$, as operações de Adição e Multiplicação possuem as propriedades:

- Comutativa em relação à adição

$$p + q = q + p$$

- Distributiva

$$(c_1 + c_2)q = c_1q + c_2q$$

$$c_1(p + q) = c_1p + c_1q$$

$$(p + q)r = pr + qr \quad \text{à direita}$$

$$p(q + r) = pq + pr \quad \text{à esquerda}$$

$$(cp)q = p(cq) = c(pq)$$

- Associativa

$$(pq)r = p(qr)$$

$$(p + q) + r = p + (q + r)$$

- Elemento Neutro

$$1q = q$$

$$q + \mathbf{0} = q$$

Como o produto vetorial $\mathbf{p} \times \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ a multiplicação de quatérnios não é comutativa.

3.2 QUATÉRNIOS REPRESENTADOS POR MATRIZES

Os quatérnios também podem ser representados na forma de matrizes complexas de ordem 2 ou matrizes reais de ordem 4, em que as operações de adição e multiplicação de quatérnios correspondem às respectivas operações de matrizes [9].

Dado o quatérnio $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = z + wj$, com $z = q_0 + q_1i$ e $w = q_2 + q_3i$, será associado à matriz

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + q_1i & q_2 + q_3i \\ -q_2 + q_3i & q_0 - q_1i \end{pmatrix} \quad (8)$$

sendo assim, o conjunto \mathbb{H} é isomorfo ao conjunto H

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbf{C} \right\}.$$

Temos, ainda, as identificações:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$A = q_01 + q_1I + q_2J + q_3K.$$

Segue que

- $\det A = |q|^2$
- se $q_2 = q_3 = 0$ então a matriz A é diagonal
- \bar{q} corresponde à $(\bar{A})^t$.

A partir da representação do quatérnio q como a matriz complexa $A_{2 \times 2}$ em 8, obtemos sua representação como uma matriz real de ordem 4, bastando substituir os números complexos pelas suas matrizes reais correspondentes:

$$\begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

e a base de \mathbb{H} para essa representação é:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. [9]$$

3.3 QUATÉRNIO NAS FORMAS TRIGONOMÉTRICA E POLAR

Sendo um quatérnio $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}^*$ podemos obter sua representação na forma trigonométrica a partir de:

$$\left(\frac{q_0}{|q|}\right)^2 + \left(\frac{|\mathbf{q}|}{|q|}\right)^2 = 1,$$

segue que existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que

$$\cos \theta = \frac{q_0}{|q|} \quad \text{e} \quad \text{sen} \theta = \frac{|\mathbf{q}|}{|q|}$$

então

$$\begin{aligned} q &= |q| \cos \theta + \frac{|q| \text{sen} \theta}{|\mathbf{q}|} \mathbf{q} \\ &= |q| \left(\cos \theta + \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \text{sen} \theta \right) \end{aligned} \quad (9)$$

se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ então o quatérnio será real, $q \in \mathbb{R}$. E, a adição e a multiplicação de quatérnios representados na forma trigonométrica serão efetuadas conforme a primeira definição de Hamilton [9].

Dados z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$ escritos na forma polar 14 (Cap.1), o quatérnio $q = z_1 + z_2j$ será representado na forma polar como segue:

$$q = r_1 e^{i\theta} + r_2 e^{i\alpha} j \quad [12] \quad (10)$$

ROTAÇÕES NO ESPAÇO – \mathbb{R}^3

Rotações em \mathbb{R}^3 são usualmente realizadas com a utilização de ângulos de Euler. Nesse Capítulo, no entanto, trataremos de rotações com uso de matrizes, uma extensão do Capítulo 2, e a ênfase será dada no uso de quatérnios como operadores de rotação no espaço [9].

4.1 ROTAÇÕES POR MATRIZES

Já sabemos que um quatérnio $\mathbf{p} \in \mathbb{H}$ com $\mathbf{p} = p_1i + p_2j + p_3k$, tal que $|\mathbf{p}| = 1$, é um vetor de \mathbb{R}^3 [9]. Tomando um sistema de eixos $OXYZ$ ortogonais entre si para representar o espaço \mathbb{R}^3 e um ponto $P = (x, y, z)$ nessa representação, conforme Figura 5, temos que: o vetor $\vec{OP} = \mathbf{p}$, a projeção ortogonal do ponto P no plano XOY é dada por P' , o vetor

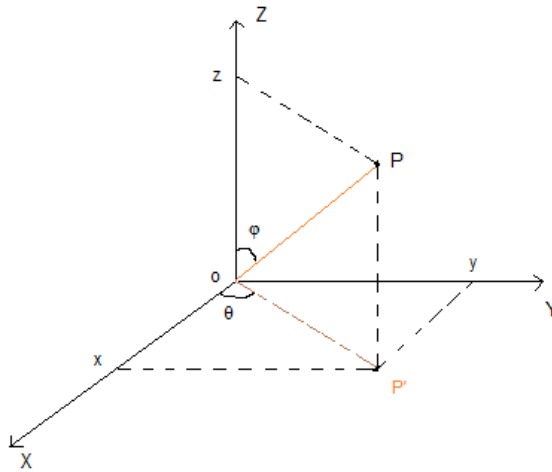


Figura 5: Representação do vetor \vec{OP} em \mathbb{R}^3 .

\vec{OP}' é a projeção do vetor \vec{OP} no plano XOY . Se realizarmos uma rotação do ponto P em torno do eixo Z de 2π radianos, sua projeção P' descreve no plano XOY uma circunferência de raio igual a $|\vec{OP}'|$. Ao realizar uma rotação no plano XOY de maneira que o semi-eixo OX coincida com o vetor \vec{OP}' , isto é, rotacionar o referencial no sentido anti-horário de um ângulo θ em torno do eixo Z , é o mesmo que rotacionar o vetor \vec{OP}' em sentido horário de um ângulo $-\theta$ até coincidir com o semi-eixo OX . Devido a este fato, ao escrevermos as matrizes dessas rotações, uma será a inversa da outra.

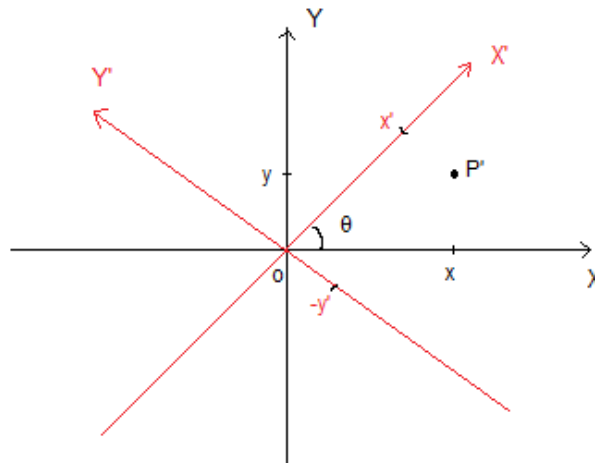


Figura 6: Coordenadas da projeção de P após rotação do referencial.

Rotacionando o referencial em torno do eixo Z a coordenada z do ponto não se altera, assim as alterações se darão no plano XOY . Após a rotação, as novas coordenadas do ponto P serão (x', y', z') com $z' = z$, obtidas por coordenadas polares, veja Figura 6. Logo, as novas coordenadas são:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta + z \cdot 0 \\ y' = -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta + z \cdot 0 \\ z' = x \cdot 0 + y \cdot 0 + 1 \cdot z \end{cases} \quad (1)$$

O sistema em 1 pode ser representado na forma de produto de matrizes conforme segue:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, a matriz que representa a rotação do referencial em torno do eixo Z é

$$R_{z,\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

e, a matriz que representa a rotação do ponto P em torno do eixo Z é dada por

$$R'_{z,\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De maneira análoga, podemos representar a matriz de rotação do referencial em torno do eixo Y mediante um ângulo α e a matriz de rotação em torno do eixo X mediante um ângulo φ , como segue:

- rotação do referencial em torno do eixo Y

$$R_{y,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3)$$

- rotação do ponto P em torno do eixo Y

$$R'_{y,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

- rotação do referencial em torno do eixo X

$$R_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \\ 0 & -\operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (4)$$

- rotação do ponto P em torno do eixo X

$$R'_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ 0 & \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Segue que $R'_{z,\theta}$ é a matriz inversa e também a matriz transposta de $R_{z,\theta}$ [9]

$$R'_{z,\theta} = (R_{z,\theta})^t = (R_{z,\theta})^{-1}$$

da mesma forma que

$$R'_{x,\varphi} = (R_{x,\varphi})^t = (R_{x,\varphi})^{-1}$$

e também

$$R'_{y,\alpha} = (R_{y,\alpha})^t = (R_{y,\alpha})^{-1}.$$

Do fato acima, segue que:

$$R_{z,\theta}(R_{z,\theta})^t = (R_{z,\theta})^t R_{z,\theta} = I \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para matriz de ordem dois, a demonstração foi realizada na proposição 2.2, o processo é análogo para as de ordem três $R_{z,\theta}$, $R_{x,\varphi}$ e $R_{y,\alpha}$.

E, do fato que:

$$\det R_{z,\theta} = \det R_{x,\varphi} = \det R_{y,\alpha} = 1$$

podemos concluir que esse conjunto de matrizes de ordem 3 são ortogonais e representam o conjunto das matrizes de rotação no espaço, a demonstração completa encontra-se em [8]

$$SO_{(3)} = \{R_{z,\theta}, R_{x,\varphi}, R_{y,\alpha} \mid \theta, \varphi, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Como as rotações preservam a norma dos vetores e os ângulos, segue que o produto interno também não se altera com as rotações, visto que

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{q}| |\mathbf{p}| \cos(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Dadas duas rotações de ângulos θ e β em torno do mesmo eixo, o resultado dessa composição será uma rotação com a soma dos ângulos:

$$R_{z,\theta} \circ R_{z,\beta} = R_{z,\theta+\beta}$$

$$R_{z,\theta+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \beta) & \text{sen}(\theta + \beta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta + \beta) & \cos(\theta + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [9]$$

Fazendo a representação do vetor $\vec{OP} = \mathbf{p}$, Figura 5, usando coordenadas esféricas temos:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{\text{sen} \varphi} \Rightarrow x = \text{sen} \varphi \cos \theta \\ \text{sen} \theta &= \frac{y}{\text{sen} \varphi} \Rightarrow y = \text{sen} \varphi \text{sen} \theta \end{aligned}$$

segue

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \text{sen} \varphi \cos \theta \\ \text{sen} \varphi \text{sen} \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (6)$$

que pode ser obtido pela composição das matrizes de rotação em \mathbb{R}^3 conforme segue:

$$\mathbf{p} = R'_{z,\theta} \circ R_{y,\varphi}(0, 0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \operatorname{sen} \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \vec{OP} = \mathbf{p}$$

recebendo o nome de eixo de rotação [8].

Temos, também, que uma matriz de rotação A , de ordem 3, com determinante igual a 1, é um operador linear de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que \mathbf{w} será a imagem do vetor \mathbf{v} conforme a equação a seguir:

$$\mathbf{w} = A\mathbf{v}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

4.2 ROTAÇÕES POR QUATÉRNIOS

Esta seção tem como referência o trabalho de Marinho [9]. Para rotacionarmos um vetor em \mathbb{R}^3 usando um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ qualquer vamos precisar determinar um operador de rotação. Vimos no Capítulo 3 que, o produto de dois quatérnios também é um quatérnio, pois o conjunto é fechado para a multiplicação. Vimos, também, que o produto de dois quatérnios puros não é um quatérnio puro.

Logo, para efetuarmos uma rotação de quatérnios em \mathbb{R}^3 temos que garantir que, de um quatérnio puro \mathbf{p} chegaremos a outro quatérnio, também puro, \mathbf{w} . Assim, tomando três quatérnios $q, r \in \mathbb{H}$ quaisquer e $\mathbf{p} \in \mathbb{H}$ puro. E, sabendo que a multiplicação não é comutativa, os possíveis resultados são:

$$\mathbf{pqr}, \quad \mathbf{prq}, \quad \mathbf{qrp}, \quad \mathbf{rqp}, \quad \mathbf{qpr} \quad \text{e} \quad \mathbf{rpq}.$$

As quatro primeiras possibilidades serão descartadas pois o produto qr e rq não nos fornece quatérnios puros conforme 6(Cap. 3). Vamos fazer a análise das outras duas possibilidades.

Tomando $q = q_0 + \mathbf{q}$, $r = r_0 + \mathbf{r}$ e $p = 0 + \mathbf{p}$, temos que o produto $q\mathbf{p}r$ será:

$$\begin{aligned}
 q\mathbf{p}r &= (q_0 + \mathbf{q})(0 + \mathbf{p})(r_0 + \mathbf{r}) \\
 &= (q_0\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{p})(r_0 + \mathbf{r}) \\
 &= [q_0\mathbf{p} + (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})](r_0 + \mathbf{r}) \\
 &= \underbrace{-r_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}}_{\text{escalar: } w_0} + \\
 &\quad \underbrace{r_0q_0\mathbf{p} + r_0(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r} + q_0(\mathbf{p} \times \mathbf{r}) + (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{r}}_{\text{vetor: } \mathbf{w}}
 \end{aligned} \tag{8}$$

para garantir que o resultado em 8 seja um quatérnio puro $w_0 = 0$, segue

$$-r_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r} = 0$$

nessa condição é necessário que $r_0 = q_0$ e $\mathbf{r} = -\mathbf{q}$, então

$$r = r_0 + \mathbf{r} = q_0 - \mathbf{q} = \bar{q},$$

e

$$q = \bar{r}.$$

Para o produto $r\mathbf{p}q$ o resultado é análogo.

Os produtos triplos dos quatérnios determinam, desta forma, dois operadores de rotação:

$$q\bar{p}\bar{q} \quad \text{e} \quad \bar{q}p\bar{q} \tag{9}$$

que produzirão um quatérnio puro \mathbf{w} sempre que p também for um quatérnio puro, vale ressaltar que $|q| = 1$.

Para representar esse operador de forma algébrica, tomamos $q = q_0 + \mathbf{q}$ um quatérnio tal que $|q| = 1$ e $v = 0 + \mathbf{v}$ um quatérnio puro, segue:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} &= q\bar{v}\bar{q} \\
 &= (q_0 + \mathbf{q})(0 + \mathbf{v})(q_0 - \mathbf{q}) \\
 &= (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + q_0^2\mathbf{v} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{q}
 \end{aligned}$$

aqui será utilizada a igualdade de Grassmman (p. 36)

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{r} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p}$$

obtendo assim:

$$\mathbf{w} = (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}). \quad (10)$$

A representação do operador $\mathbf{w} = \bar{q}\mathbf{v}q$ é análoga. Agora, temos que verificar se esses operadores são operadores lineares, se eles preservam a norma do vetor e se eles realmente representam uma rotação.

Teorema 4.1. *Sejam $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$ um quatérnio unitário com $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ (Cap. 3) e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. A ação do operador*

$$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q} \quad (11)$$

em \mathbf{v} pode ser interpretada geometricamente como a rotação do vetor \mathbf{v} em torno de \mathbf{q} como eixo de rotação e segundo um ângulo 2θ .

Demonstração: essa demonstração foi dividida em três lemas na publicação da autora[9]:

Lema 4.2. *O operador $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q}$ é linear.*

Demonstração: dados dois vetores \mathbf{a} e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, k um número real e q um quatérnio unitário, então:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(k\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= q(k\mathbf{a} + \mathbf{b})\bar{q} \\ &= (qk\mathbf{a} + q\mathbf{b})\bar{q} \\ &= kq\mathbf{a}\bar{q} + q\mathbf{b}\bar{q} \\ &= k\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}) + \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

cqd.

Lema 4.3. *Seja q um quatérnio unitário. A norma de um vetor de \mathbb{R}^3 não se altera com a aplicação do operador $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q}$.*

Demonstração: sejam \mathbf{v} um vetor de \mathbb{R}^3 e q um quatérnio unitário, então:

$$|\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v})| = |q\mathbf{v}\bar{q}| = |q||\mathbf{v}||\bar{q}| = |\mathbf{v}|$$

cqd.

Lema 4.4. *O operador $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q}$ representa uma rotação.*

Demonstração: tomando $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$ um quatérnio unitário com $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, dividindo \mathbf{v} em duas componentes ortogonais, sendo $\mathbf{v}_{\mathbf{q}}$ a componente na direção de \mathbf{q} , i.e. $\mathbf{v}_{\mathbf{q}} = k\mathbf{q}$ para algum escalar k e a componente $\mathbf{v}_{\mathbf{n}}$ normal ao vetor \mathbf{q} .

Segue a verificação que o vetor $\mathbf{v}_{\mathbf{q}} = k\mathbf{q}$ não sofre alterações pelo operador $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}$. Da equação 10 temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(k\mathbf{q}) &= q(k\mathbf{q})\bar{q} \\
&= (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)k\mathbf{q} + 2(\mathbf{q} \cdot k\mathbf{q})\mathbf{q} \\
&= kq_0^2\mathbf{q} + k|\mathbf{q}|^2\mathbf{q} \\
&= k(q_0^2 + |\mathbf{q}|^2)\mathbf{q} \\
&= k\mathbf{q}
\end{aligned}$$

cqd.

Assim, o vetor \mathbf{q} poderá ser o eixo de rotação. Continuando, temos que $\mathbf{v}_{\mathbf{n}}$ irá rotacionar em torno de \mathbf{q} , agora eixo de rotação, de um ângulo igual a 2θ . Novamente, tomando a equação 10 e efetuando a substituição $\mathbf{q} = \mathbf{u}|\mathbf{q}|$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}_{\mathbf{n}}) &= q(\mathbf{v}_{\mathbf{n}})\bar{q} \\
&= (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{v}_{\mathbf{n}} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}_{\mathbf{n}}) \\
&= (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{v}_{\mathbf{n}} + 2q_0|\mathbf{q}|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\mathbf{n}})
\end{aligned}$$

sendo $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\mathbf{n}}) = \mathbf{v}_{\mathbf{n}\perp}$, segue

$$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}_{\mathbf{n}}) = (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{v}_{\mathbf{n}} + 2q_0|\mathbf{q}|\mathbf{v}_{\mathbf{n}\perp}. \quad (12)$$

Como $\mathbf{v}_{\mathbf{n}}$ e $\mathbf{v}_{\mathbf{n}\perp}$ tem a mesma norma

$$|\mathbf{v}_{\mathbf{n}\perp}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\mathbf{n}}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}_{\mathbf{n}}|\text{sen}\frac{\pi}{2} = |\mathbf{v}_{\mathbf{n}}|$$

e, substituindo na equação 12 a representação trigonométrica 9(Cap. 3) do quatérnio q , obtemos:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}_{\mathbf{n}}) = (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)\mathbf{v}_{\mathbf{n}} + (2\cos\theta\text{sen}\theta)\mathbf{v}_{\mathbf{n}\perp}$$

e das fórmulas de arco duplo [4], temos:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}_{\mathbf{n}}) = \cos(2\theta)\mathbf{v}_{\mathbf{n}} + \text{sen}(2\theta)\mathbf{v}_{\mathbf{n}\perp}; \quad (13)$$

cqd.

Para concluir a demonstração do teorema, vimos que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} &= q\mathbf{v}\bar{q} \\
 &= \mathbf{W}_q(\mathbf{v}) \\
 &= \mathbf{W}_q(\mathbf{v}_q + \mathbf{v}_n) \\
 &= \mathbf{W}_q(\mathbf{v}_q) + \mathbf{W}_q(\mathbf{v}_n) \\
 &= \mathbf{v}_q + \mathbf{v}_m
 \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{W}_q(\mathbf{v}_n) = \cos(2\theta)\mathbf{v}_n + \text{sen}(2\theta)\mathbf{v}_{n\perp};$$

Sendo fácil verificar que a $N(\mathbf{v}_m)$ é igual a $N(\mathbf{v}_n) = N(\mathbf{v}_{n\perp})$, como segue:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{v}_m|^2 &= \mathbf{v}_m\mathbf{v}_m \\
 &= (\cos(2\theta)\mathbf{v}_n + \text{sen}(2\theta)\mathbf{v}_{n\perp})(\cos(2\theta)\mathbf{v}_n + \text{sen}(2\theta)\mathbf{v}_{n\perp}) \\
 &= (\cos^2(2\theta) + \text{sen}^2(2\theta))|\mathbf{v}_n|^2 \\
 &= |\mathbf{v}_n|^2 = |\mathbf{v}_{n\perp}|^2
 \end{aligned}$$

logo, $|\mathbf{v}_m| = |\mathbf{v}_n| = |\mathbf{v}_{n\perp}|$

cqd.

A demonstração para o operador $\mathbf{W}_{\bar{q}}$ segue os mesmos passos apresentados acima, resultando em

$$\mathbf{W}_{\bar{q}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_q + \cos(2\theta)\mathbf{v}_n - \text{sen}(2\theta)\mathbf{v}_{n\perp}$$

isto é,

$$\mathbf{W}_{\bar{q}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_q + \cos(-2\theta)\mathbf{v}_n + \text{sen}(-2\theta)\mathbf{v}_{n\perp}.$$

Podemos ver na Figura 7 o resultado da rotação após aplicação do operador quaterniônico \mathbf{W}_q no vetor \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_q + \mathbf{v}_n,$$

$$\mathbf{w} = q\mathbf{v}\bar{q} \quad e$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_q + \mathbf{v}_m$$

segue que os vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} podem ser interpretados geometricamente como as geratrizes de um cone que tem como eixo o vetor \mathbf{q} e sua base circular contém os vetores \mathbf{v}_n e \mathbf{v}_m .

Para finalizar, é possível verificar que as rotações obtidas pelos operadores \mathbf{W}_q e $\mathbf{W}_{\bar{q}}$ representam rotações inversas. Sendo a rotação do ponto obtida pelo operador $\mathbf{W}_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q}$ e a rotação do referencial obtida pelo operador $\mathbf{W}_{\bar{q}}(\mathbf{v}) = \bar{q}\mathbf{v}q$.

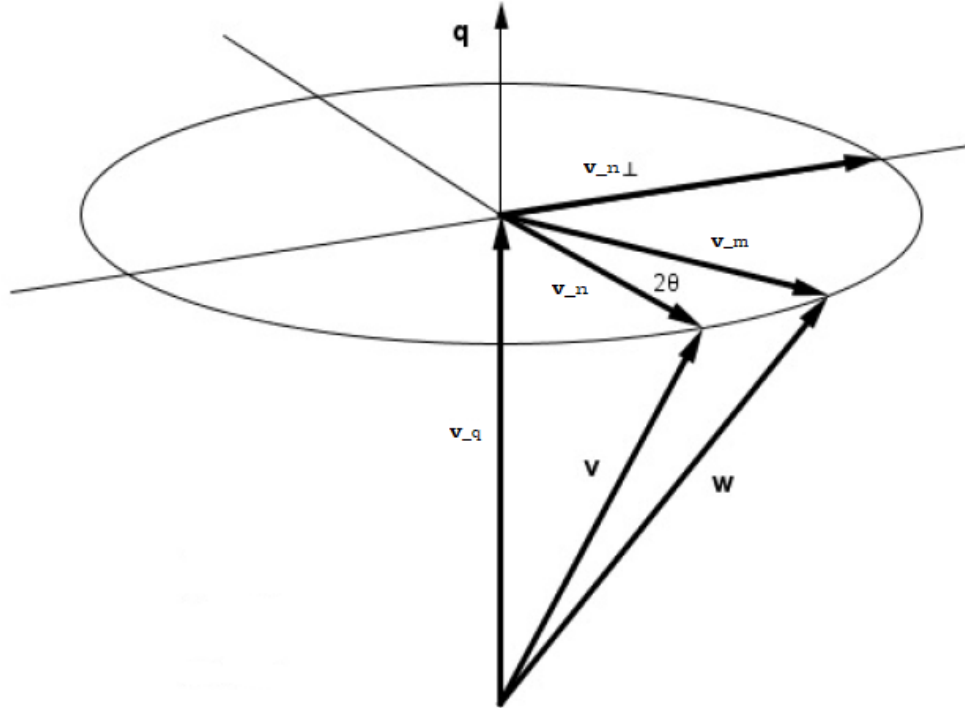


Figura 7: Representação geométrica da rotação por um quatérnio (Imagem obtida de [9]).

E, que a composição de dois operadores quaterniônicos é um operador quaterniônico

$$\mathbf{W}_q \circ \mathbf{W}_p = \mathbf{W}_{pq}.$$

Teorema 4.5. *Sejam p e q dois quatérnios unitários que definem dois operadores quaterniônicos*

$$\mathbf{W}_p(\mathbf{u}) = p\mathbf{u}\bar{p} \quad e \quad \mathbf{W}_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q}$$

então o produto pq define o operador quaterniônico \mathbf{W}_{pq} que representa a composição dos operadores \mathbf{W}_p seguido de \mathbf{W}_q , sendo o eixo e o ângulo de rotação representados pelo produto pq .

Demonstração: seja \mathbf{u} um quatérnio puro em \mathbb{R}^3 , então:

$$\begin{aligned}
 w &= (\mathbf{W}_q \circ \mathbf{W}_p)(\mathbf{u}) \\
 &= \mathbf{W}_q(p\mathbf{u}\bar{p}) \\
 &= q(p\mathbf{u}\bar{p})\bar{q} \\
 &= qp\mathbf{u}\bar{p}\bar{q} \\
 &= pq\mathbf{u}\bar{p}\bar{q} \\
 &= \mathbf{W}_{pq}(\mathbf{u})
 \end{aligned}$$

Sendo p e q quatérnios unitários, pq também é unitário. Segue que \mathbf{W}_{pq} é um operador quaterniônico de rotação com eixo e ângulo de rotação representados pelo produto pq .

cqd.

E, para a composição do operador $\mathbf{W}_{\bar{q}}(\mathbf{v}) = \bar{q}\mathbf{v}q$, a demonstração é análoga.

Identidade de Grassman

Dados \mathbf{p} , \mathbf{q} e \mathbf{r} quatérnios puros, temos:

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{r} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p}$$

Demonstração:

sendo $\mathbf{p} = p_1i + p_2j + p_3k$, $\mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$ e $\mathbf{r} = r_1i + r_2j + r_3k$, então

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} &= (p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3)(q_1i + q_2j + q_3k) \\ &= (p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3)q_1i + (p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3)q_2j + \\ &\quad + (p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3)q_3k \\ &= p_1r_1q_1i + p_2r_2q_1i + p_3r_3q_1i + p_1r_1q_2j + p_2r_2q_2j + p_3r_3q_2j + \\ &\quad + p_1r_1q_3k + p_2r_2q_3k + p_3r_3q_3k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} &= (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3)(p_1i + p_2j + p_3k) \\ &= (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3)p_1i + (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3)p_2j + \\ &\quad + (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3)p_3k \\ &= q_1r_1p_1i + q_2r_2p_1i + q_3r_3p_1i + q_1r_1p_2j + q_2r_2p_2j + q_3r_3p_2j + \\ &\quad + q_1r_1p_3k + q_2r_2p_3k + q_3r_3p_3k \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} &= p_1r_1q_1i + p_2r_2q_1i + p_3r_3q_1i + p_1r_1q_2j + p_2r_2q_2j + p_3r_3q_2j + \\ &\quad + p_1r_1q_3k + p_2r_2q_3k + p_3r_3q_3k - (q_1r_1p_1i + q_2r_2p_1i + q_3r_3p_1i + \\ &\quad + q_1r_1p_2j + q_2r_2p_2j + q_3r_3p_2j + q_1r_1p_3k + q_2r_2p_3k + q_3r_3p_3k) \\ &= p_2r_2q_1i - q_2r_2p_1i + p_3r_3q_1i - q_3r_3p_1i + \\ &\quad + p_1r_1q_2j - q_1r_1p_2j + p_3r_3q_2j - q_3r_3p_2j + \\ &\quad + p_1r_1q_3k - q_1r_1p_3k + p_2r_2q_3k - q_2r_2p_3k \\ &= (p_2q_1 - q_2p_1)r_2i + (p_3q_1 - q_3p_1)r_3i + \\ &\quad + (p_1q_2 - q_1p_2)r_1j + (p_3q_2 - q_3p_2)r_3j + \\ &\quad + (p_1q_3 - q_1p_3)r_1k + (p_2q_3 - q_2p_3)r_2k \end{aligned}$$

efetuando um pequeno ajuste nos sinais das parcelas, temos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p} &= (p_3q_1 - q_3p_1)r_3i - (q_2p_1 - p_2q_1)r_2i + \\ &\quad (p_1q_2 - q_1p_2)r_1j - (q_3p_2 - p_3q_2)r_3j + \\ &\quad (p_2q_3 - q_2p_3)r_2k - (q_1p_3 - p_1q_3)r_1k \end{aligned}$$

substituindo i, j e k conforme estabelecido por Hamilton (1, Cap. 3), segue:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p} &= (p_2q_3 - q_2p_3)r_2i \times j + (q_3p_2 - p_3q_2)r_3i \times k + \\ &\quad (q_1p_3 - p_1q_3)r_1j \times i + (p_3q_1 - q_3p_1)r_3j \times k + \\ &\quad (p_1q_2 - q_1p_2)r_1k \times i + (q_2p_1 - p_2q_1)r_2k \times j \\ &= [(p_2q_3 - q_2p_3)i + (q_1p_3 - p_1q_3)j + (q_2p_1 - p_2q_1)k] \times (r_1i + r_2j + r_3k) \end{aligned}$$

repetindo o procedimento acima, no primeiro fator da segunda parte da igualdade obtemos $(\mathbf{p} \times \mathbf{q})$ e o segundo fator é \mathbf{r} , logo:

$$(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p} = (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{r}$$

cqd.

ROTAÇÕES NO ESPAÇO – \mathbb{R}^4

No Capítulo 3, vimos que um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ com $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ pode ser representado em uma base de \mathbb{R}^4 com

$$1 = (1, 0, 0, 0); \quad i = (0, 1, 0, 0); \quad j = (0, 0, 1, 0); \quad k = (0, 0, 0, 1).$$

Os quatérnios unitários em \mathbb{R}^4 formam um conjunto de pontos $S^3 = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ que estão sobre a esfera S^3 de raio 1 com centro na origem.

As rotações em quatro dimensões formam um grupo denominado de $SO(4)$, essas rotações podem ser de dois tipos, simples ou duplas [13].

Uma rotação simples S sobre um centro de rotação O deixa um plano inteiro A fixo. Plano fixo é o plano que contém os vetores que permaneceram inalterados após uma rotação. Cada plano B que é completamente ortogonal ao plano A intersecta A em um ponto P . Cada um desses pontos P 's é o centro de uma rotação em duas dimensões (2D) induzida por S no plano B . Todas essas rotações em 2D tem o mesmo ângulo de rotação α .

Semi-eixos de O no plano A não são deslocados. Semi-eixos de O ortogonais ao plano A são deslocados de um ângulo α e, os demais semi-eixos são deslocados de um ângulo menor que α .

Rotações duplas de S em \mathbb{R}^4 (fixando a origem) produzem pelo menos um par de planos ortogonais A e B invariantes, com ângulo de rotação α no plano A e β no plano B , ambos não nulos e $-\pi < \alpha, \beta < \pi$. Planos invariantes são planos que tiveram seus vetores rotacionados mas estes permaneceram no mesmo plano.

Se os ângulos de rotação forem diferentes ($\alpha \neq \beta$), S é denominada de Rotação Dupla. Nesse caso A e B são o único par de planos invariantes. Semi-eixos de origem em A e B são deslocados de um ângulo α ou β , respectivamente. Já semi-eixos de origem fora de A e B serão deslocados de ângulos estritamente entre α e β .

Quando os ângulos de rotação forem iguais ($\alpha = \beta$), haverá uma infinidade de pares de planos invariantes e os semi-eixos de O serão deslocados pelo mesmo ângulo. Nesse caso as rotações recebem o nome de Isoclinicas ou Equiangulares (deslocamento de Clifford). Vale ressaltar que nem todos os planos através de O são invariantes sob rotações isoclinicas.

Rotações isoclinicas com sinais semelhantes são denotadas como isoclinicas à esquerda e aquelas com sinais opostos, como isoclinicas à direita. As rotações isoclinicas à esquerda e à direita são representadas, respectivamente, pela multiplicação à esquerda e à direita por quatérnios unitários.

Uma rotação em \mathbb{R}^4 dada pela sua matriz A será decomposta em uma rotação isoclinica à esquerda e à direita como segue. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

uma matriz de base ortogonal arbitrária. Se A for de fato uma matriz de rotação em \mathbb{R}^4 , existirão números reais a, b, c, d e p, q, r, s , tais que

$$M = \begin{pmatrix} ap & aq & ar & as \\ bp & bq & br & bs \\ cp & cq & cr & cs \\ dp & dq & dr & ds \end{pmatrix}$$

seja uma matriz de norma unitária euclidiana e

$$(ap)^2 + \dots + (ds)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = 1$$

e, também, dois conjuntos opostos um do outro

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \quad e \quad p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 1$$

que possibilitarão escrever a matriz de rotação como produto das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & -r \\ r & -s & p & q \\ s & r & -q & p \end{pmatrix}$$

O primeiro fator nesta decomposição representa uma rotação isoclinica esquerda e o segundo fator uma rotação isoclinica direita.

Ao rotacionar um quatérnio $v = v_0 + v_1i + v_2j + v_3k$ no espaço \mathbb{R}^4 vamos obter um quatérnio w por meio de uma rotação isoclinica esquerda:

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

e vamos obter um quatérnio w por meio de uma rotação isoclinica direita:

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & -r \\ r & -s & p & q \\ s & r & -q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Efetuando a multiplicação com um operador quaterniônico, temos:

$$w = \mathbf{w}_L v \mathbf{w}_R$$

onde

$$\mathbf{w}_L = a + bi + cj + dk$$

e

$$\mathbf{w}_R = p + qi + rj + sk$$

são quatérnios unitários, conforme exposto acima.

Podemos observar comparando 1 e 2 que a multiplicação de quatérnios em \mathbb{R}^4 é associativa, assim

$$w = (\mathbf{w}_L v) \mathbf{w}_R = \mathbf{w}_L (v \mathbf{w}_R)$$

que possibilita concluir que as rotações isoclinica esquerda e isoclinica direita comutam.

Rotações em \mathbb{R}^4 não serão contempladas na proposta didática devido à complexidade de representação em três dimensões e da necessidade de computação gráfica para representar figuras como o tesseracto ou o toróide.

Uma das vantagens de se usar quatérnios é que estes descrevem a rotação com um único movimento [9]. A utilização de quatérnios tem ganhado força na área de computação gráfica, na robótica, rotações de objetos em três dimensões e movimentação de câmeras para filmagens levando qualidade para as telas de cinema nas animações em 3D.

Os quatérnios eliminaram o problema do *Gimbal Lock*, que é a sobreposição dos eixos X e Z do instrumento Gimbal utilizado na aviação, causando a perda de um grau de liberdade e o bloqueio do sistema.

Seu uso na medicina vem sendo amplamente empregado, a robótica tem possibilitado o uso de robôs nas cirurgias, inclusive nas cirurgias à distância. Tem sido empregado, também, em dinâmica molecular, navegação, dinâmica de vôo e mecânica orbital de satélites.

Quatérnios é um leque de conhecimento que deve ser descortinado para os professores do Ensino Médio fazendo com que percebam a abrangência dos números complexos e possibilitando relacionar em suas aulas o uso da Matemática com a vida contemporânea.

PROPOSTA DIDÁTICA – ROTAÇÕES

Como vimos no início do Capítulo 2, o Currículo Oficial do Estado de São Paulo destaca que “transformações realizadas sobre regiões do plano complexo constituem terreno muito fértil para aplicações práticas,[...] que poderão ser apreciadas pelos alunos em leituras futuras ou em trabalhos complementares” [6]. Indo ao encontro dessa expectativa, apresentamos, neste Capítulo, uma sequência didática contendo exercícios exemplares de rotações de forma a levar o aluno a compreender a utilização das rotações com matrizes no plano \mathbb{R}^2 e no espaço \mathbb{R}^3 , bem como as rotações em \mathbb{R}^3 com quatérnios, apresentadas neste trabalho.

6.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1. Conteúdo

- Rotações em \mathbb{R}^2 ;
- Rotações em \mathbb{R}^3 com uso de material concreto;
- Aplicando Matrizes de Rotação no cubo;
- Aplicando Quatérnios para rotacionar o cubo;

2. Objetivos

- *levar o aluno a compreender as rotações em \mathbb{R}^2 como resultado do produto de matrizes, comparando-as com os resultados de produtos de números complexos e que esse resultado é comutativo;*
- *levar o aluno a compreender, por meio de visualização de figuras e manipulação de objetos (cubo), que as rotações no espaço \mathbb{R}^3 não são comutativas;*
- *levar o aluno a associar o produto de matrizes com as rotações em \mathbb{R}^3 realizadas no cubo e constatar, por meio da álgebra, que o resultado não é comutativo;*
- *levar o aluno a compreender a aplicação do operador quaterniônico na rotação do cubo em \mathbb{R}^3 , por meio da álgebra e da visualização de figuras;*

3. Público alvo

Alunos do 3º ano do Ensino Médio após terem aprendido o conteúdo dos Números Complexos.

4. Tempo estimado

De 4 aulas; sendo as aulas 1, 3 e 4 com duração de 100 minutos cada e a aula 2 com, 50 minutos.

6.1.1 Aula 1 - Rotações em \mathbb{R}^2

Objetivo: *levar o aluno a compreender as rotações em \mathbb{R}^2 como resultado do produto de matrizes, comparando-as com os resultados de produtos de números complexos e que esse resultado é comutativo.*

A partir do conhecimento de rotações no plano, obtidas pelo produto de números complexos de norma unitária, o aluno será levado a experimentar matrizes como ferramentas de rotação no plano. Como o conceito de matrizes foi apresentado no 2º ano, será solicitado aos alunos que façam uma revisão prévia do conteúdo de multiplicação de matrizes. Utilizando as figuras dos exercícios de rotação no plano com números complexos, propor aos alunos a atividade de rotacionar a figura usando matrizes. Na sequência temos um exemplo para ilustrar a atividade.

Exemplo 6.1. *Tomando como ponto de partida o desenho na Figura 8 de formato retangular, com os vértices identificados pelas letras A, B, C e D. Considerando, também, que o seguimento AB tenha 4 unidades de medida e o seguimento AD com 5 unidades de medida. Nestas condições as coordenadas dos vértices do desenho são: $A=(0,0)$; $B=(4,0)$; $C=(4,-5)$ e $D=(0,-5)$. Aplicando no desenho da Figura 8 uma rotação de $\theta = 90^\circ$ e, sendo*

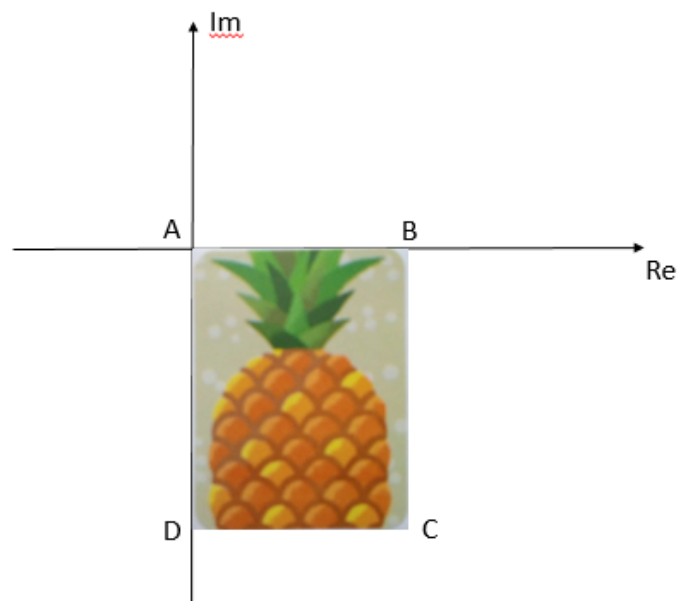


Figura 8: Figura original - não recebeu rotação.

$\text{sen}90^\circ = 1$ e $\text{cos}90^\circ = 0$, a matriz de rotação R_{θ_1} [5 Cap. 2] será:

$$R_{\theta_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ao multiplicarmos a matriz R_{θ_1} pelas coordenadas dos vértices do desenho obtemos as coordenadas dos vértices da Figura 9 rotacionada em 90° , como segue:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 + (-1).0 \\ 1.0 + 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = (0,0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 + (-1).0 \\ 1.4 + 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B' = (0,4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 + (-1).(-5) \\ 1.4 + 0.(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C' = (5,4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 + (-1).(-5) \\ 1.0 + 0.(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D' = (5,0)$$

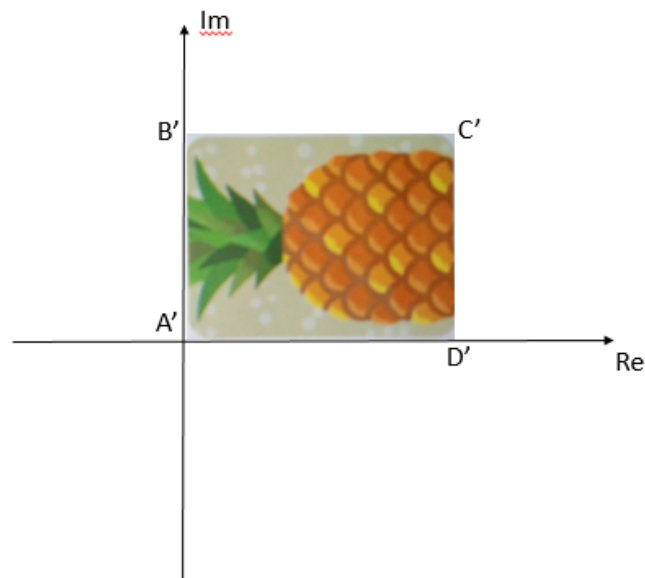


Figura 9: Figura rotacionada em 90° .

Na sequência será aplicada na Figura 9 uma rotação de 180° , como $\sin 180^\circ = 0$ e $\cos 180^\circ = -1$, a matriz de rotação R_{θ_2} será:

$$R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a matriz R_{θ_2} pelas coordenadas dos vértices da Figura 9 obtemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A''' = (0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow B''' = (0, -4)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 5 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow C''' = (-5, -4)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 5 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D''' = (-5, 0)$$

E o resultado está apresentado na Figura 10.

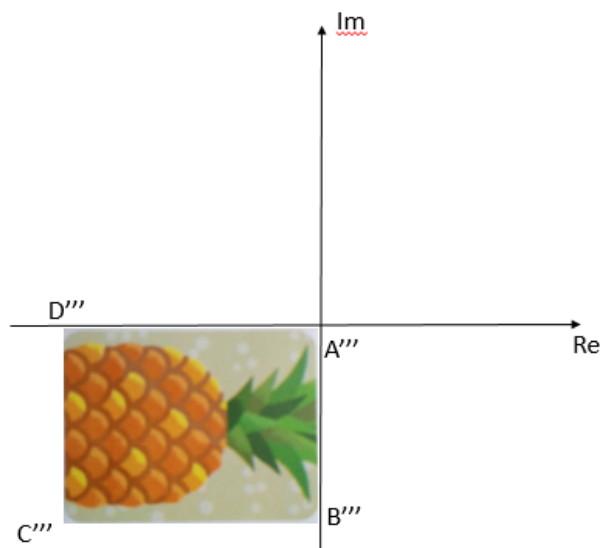


Figura 10: Rotação de 180° na Figura 8.

Rotação com números complexos: temos que os pontos $A=(0,0)$; $B=(4,0)$; $C=(4,-5)$ e $D=(0,-5)$ no plano Argand-Gauss, representando os vértices da Figura 8, são os números complexos $z_A = 0 + 0i$, $z_B = 4 + 0i$, $z_C = 4 - 5i$ e $z_D = 0 - 5i$ respectivamente. Uma rotação de 90° é obtida efetuando a multiplicação pelo número complexo $z_1 = 0 + i$ e uma rotação de 180° é obtida através da multiplicação por $z_2 = -1 + 0i$ ou simplesmente $z_1 = i$ e $z_2 = -1$. Assim, ao multiplicarmos os números complexos da 1ª coluna por z_1 obtemos os números da 2ª coluna, ao multiplicarmos os números da 2ª coluna por z_2 obtemos os números da 3ª coluna, esses estão representados na forma de ponto na 4ª coluna, como segue:

$$\begin{array}{llll}
 & z \cdot z_1 = z' & z' \cdot z_2 = z''' & \\
 z_A = 0 + 0i & z'_A = 0 + 0i & z'''_A = 0 - 0i & A''' = (0, 0) \\
 z_B = 4 + 0i & z'_B = 0 + 4i & z'''_B = 0 - 4i & B''' = (0, -4) \\
 z_C = 4 - 5i & z'_C = 5 + 4i & z'''_C = -5 - 4i & C''' = (-5, -4) \\
 z_D = 0 - 5i & z'_D = 5 + 0i & z'''_D = -5 - 0i & D''' = (-5, 0)
 \end{array}$$

o aluno será levado a constatar que esse resultado é exatamente igual ao obtido anteriormente pelo produto de matrizes.

Para finalizar esta atividade será aplicada na Figura 8 uma rotação de 180° e, em seguida, uma rotação de 90° .

Aplicando a rotação para $\theta = 180^\circ$, segue:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1).0 + 0.0 \\ 0.0 + (-1).0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'' = (0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1).4 + 0.0 \\ 0.4 + (-1).0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B'' = (-4, 0)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1).4 + 0.(-5) \\ 0.4 + (-1).(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C'' = (-4, 5)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1).0 + 0.(-5) \\ 0.0 + (-1).(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow D'' = (0, 5)$$

O resultado da rotação de 180° na Figura 8 está apresentado na Figura 11:

Aplicando sobre este resultado, Figura 11, uma rotação de $\theta = 90^\circ$ obtemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 + (-1).0 \\ 1.0 + 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A''' = (0, 0)$$

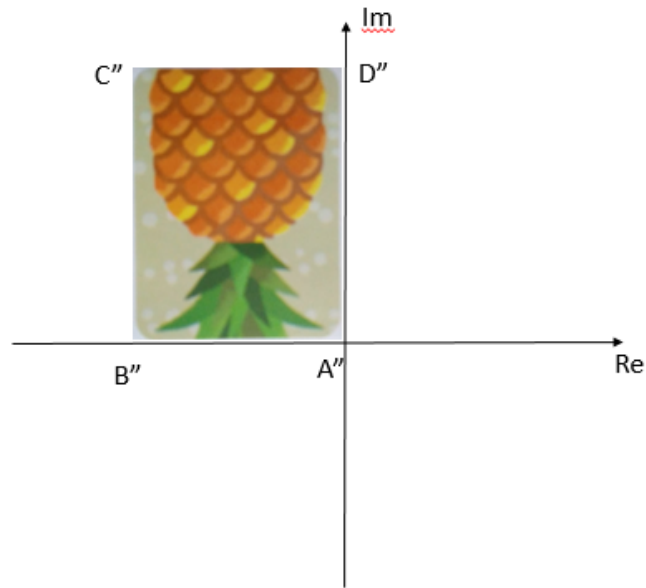


Figura 11: Rotação de 180° na Figura 8

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-4) + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow B''' = (0, -4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-4) + (-1) \cdot 5 \\ 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow C''' = (-5, -4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 5 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D''' = (-5, 0)$$

A Figura 12 a seguir representa o resultado de uma rotação de 90° sobre a Figura 11:

Rotação com números complexos: tomando, novamente, os números complexos que representam os vértices da Figura 8 vamos multiplicá-los por $z_2 = -1$ para obter uma rotação de 180° e, em seguida, efetuar a multiplicação por $z_1 = i$ para obter uma rotação de 90° . A 2ª coluna representa o resultado da multiplicação da 1ª coluna por z_2 e a 3ª coluna, o resultado da multiplicação da 2ª coluna por z_1 , como segue:

	$z \cdot z_2 = z''$	$z'' \cdot z_1 = z'''$	
$z_A = 0 + 0i$	$z''_A = 0 - 0i$	$z'''_A = 0 + 0i$	$A''' = (0, 0)$
$z_B = 4 + 0i$	$z''_B = -4 - 0i$	$z'''_B = 0 - 4i$	$B''' = (0, -4)$
$z_C = 4 - 5i$	$z''_C = -4 + 5i$	$z'''_C = -5 - 4i$	$C''' = (-5, -4)$
$z_D = 0 - 5i$	$z''_D = 0 + 5i$	$z'''_D = -5 + 0i$	$D''' = (-5, 0)$

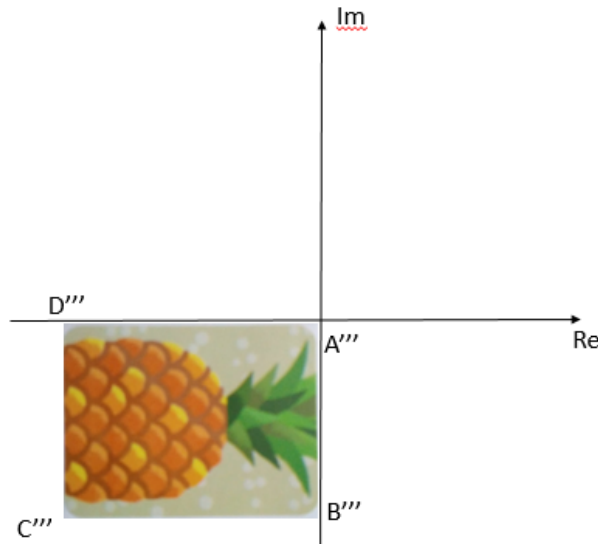


Figura 12: Rotação de 90° sobre a Figura 11.

A 4^a coluna representa os pontos no plano da Figura 12.

Fica fácil para o aluno perceber que as Figuras 10 e 12 são iguais, resultado do produto de matrizes e também do produto por números complexos, podendo concluir que esse resultado é comutativo. A atividade em questão é, também, uma composição de rotações:

$$R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$$

onde $\theta_1 = 90^\circ$ e $\theta_2 = 180^\circ$. O aluno poderá fazer o exercício de rotacionar a figura de $\theta = 270^\circ$ e constatar a igualdade dos resultados.

6.1.2 Aula 2 - Rotações em \mathbb{R}^3 com uso de material concreto

Objetivo: levar o aluno a compreender, por meio de visualização de figuras e manipulação de objetos (cubo), que as rotações no espaço \mathbb{R}^3 não são comutativas.

Os alunos que possuem um cubo mágico serão incentivados a trazê-lo para a sala de aula. O objeto pode ser outro, a opção pelo cubo foi por possuir faces coloridas que facilitam a visualização e a identificação de mudança de posição. Dependendo do número de cubos obtidos a atividade poderá ser realizada em duplas ou trios. O professor deverá solicitar ao aluno que faça rotações no cubo e que associe o cubo a um sistema de coordenadas \mathbb{R}^3 , lembrando que esse sistema é novidade para o aluno.

Para ilustrar as rotações no espaço seguem duas sequências de figuras^[1].

Exemplo 6.2. Na primeira sequência, o cubo girou de 90° em torno do eixo X , isto é, fixado o eixo X o cubo desloca-se sobre o plano YOZ , no sentido horário. Em seguida o

¹ Sequências criadas com base no trabalho de Vaz citado em [14], com acesso aos originais em [15]

giro é de 180° em torno do eixo Y , no sentido trigonométrico. O resultado é a última imagem da Figura 13.

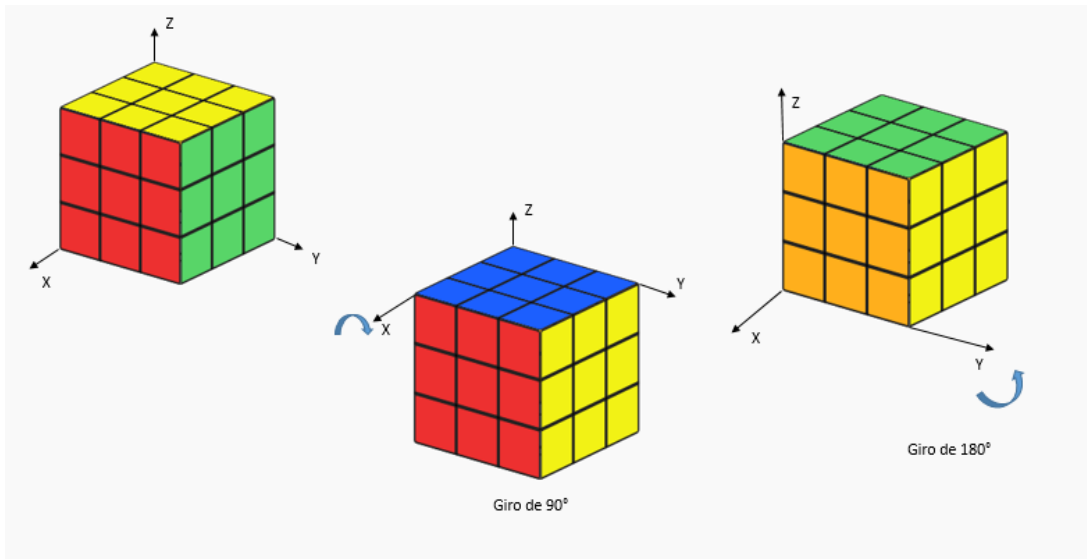


Figura 13: Sequência 1: Rotações em 3D (Imagens obtidas em [16])

Na segunda sequência trocamos a ordem em que os giros ocorreram. O primeiro foi de 180° em torno do eixo Y no sentido trigonométrico; em seguida, o cubo girou de 90° em torno do eixo X no sentido horário. Novamente, o resultado é a última imagem da figura, agora Figura 14. Nota-se que o resultado final em cada sequência é diferente, este fato ocorre porque as rotações no espaço não são comutativas.

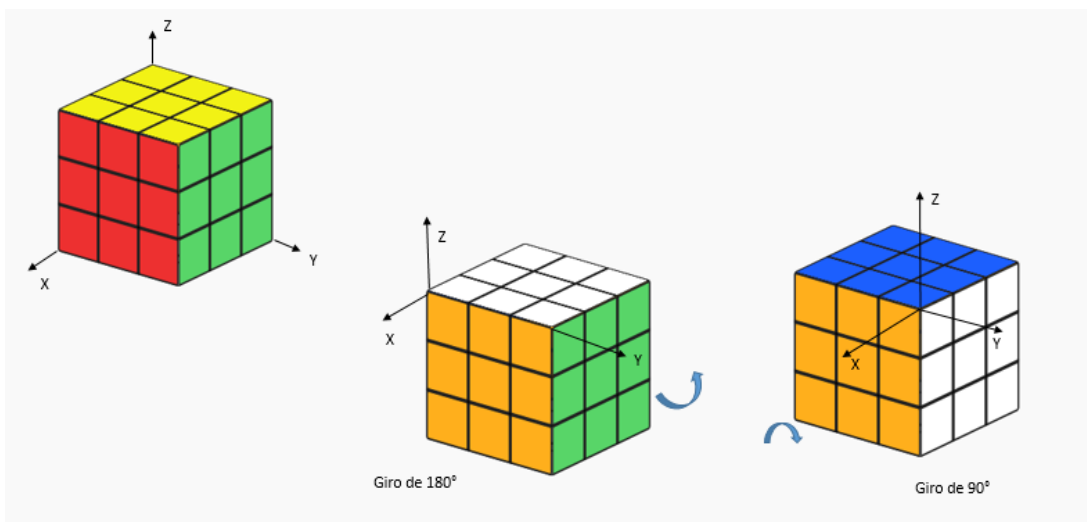


Figura 14: Sequência 2: Rotações em 3D (Imagens obtidas em [16])

6.1.3 Aula 3 - Aplicando Matrizes de Rotação no cubo

Objetivo: levar o aluno a associar o produto de matrizes com as rotações em \mathbb{R}^3 realizadas no cubo nas sequências 1 e 2 da aula 2 e constatar, por meio da álgebra, que o resultado não é comutativo.

Para essa atividade foi selecionado o cubo que aparece na primeira imagem das sequências 1 e 2, seus vértices foram identificados com letras de A a H, Figura 15. Dessa forma podemos associar a cada vértice as coordenadas (x, y, z) em um sistema de eixos ortogonais em 3 dimensões. Utilizando as peças do cubo como unidade de medida, suas arestas terão três unidades de medida e seus vértices terão as coordenadas: $A=(0, 0,3)$; $B=(0, 3, 3)$; $C=(3, 3, 3)$; $D=(3, 0, 3)$; $E=(0, 0, 0)$; $F=(0, 3, 0)$; $G=(3, 3, 0)$ e $H=(3, 0, 0)$.

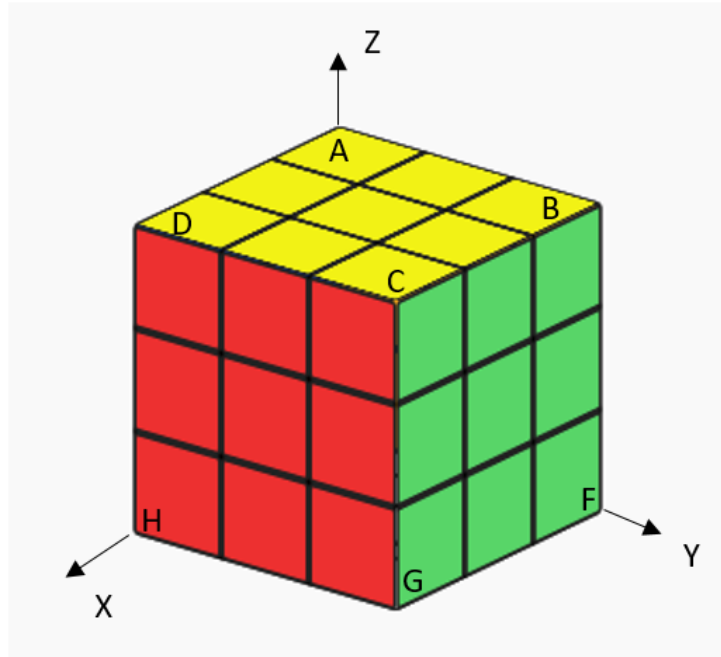


Figura 15: Identificação dos vértices do cubo

Para o exemplo a seguir, foi escolhido o vértice do cubo identificado pela letra C.

Exemplo 6.3. Aplicaremos as rotações no vértice $C=(3, 3, 3)$:

- Na sequência 1, usando a matriz $R_{x,\varphi}$ (4, Cap. 4) com $\varphi = 90^\circ$ e em seguida a matriz $R_{y,\alpha}$ (3, Cap. 4) com $\alpha = 180^\circ$, temos:

Rotação em torno do eixo X

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow C' = (3, 3, -3)$$

Rotação em torno do eixo Y aplicada no vértice $C' = (3, 3, -3)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C'' = (-3, 3, 3)$$

- Na sequência 2, usando a matriz $R_{y,\alpha}$ com $\alpha = 180^\circ$ e em seguida a matriz $R_{x,\varphi}$ com $\varphi = 90^\circ$, segue:

Rotação em torno do eixo Y

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow C' = (-3, 3, -3)$$

Rotação em torno do eixo X aplicada no vértice $C' = (-3, 3, -3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow C'' = (-3, -3, -3)$$

Novamente o aluno é levado a concluir que o ponto C'' na sequência 1 é diferente do ponto C'' na sequência 2 e que as rotações não são comutativas.

Fica a critério do professor solicitar que a atividade seja realizada em todos os vértices da figura ou que cada grupo faça a atividade tomando um dos vértices. É possível fazer uso das matrizes de rotação apresentadas no Capítulo 4 mesmo não tendo mencionado os quatérnios.

6.1.4 Aula 4 - Aplicando quatérnios para rotacionar o cubo

Objetivo:

- apresentar ao aluno o conjunto dos Quatérnios como uma extensão do conjunto dos números complexos;
- levar o aluno a compreender a aplicação do operador quaterniônico na rotação do cubo em \mathbb{R}^3 , por meio da álgebra e da visualização de figuras.

O conjunto dos Quatérnios será apresentado aos alunos como a soma de dois números complexos, de acordo com a equação 2 Capítulo 3. Para que o aluno compreenda a atividade apresentada no exemplo a seguir, as definições de conjugado, quatérnio puro e norma de um quatérnio deverão ser apresentadas aos alunos. Como essas definições são semelhantes às dos números complexos a apropriação desses conceitos não tomará tempo significativo da aula. Lembrando que quatérnios não é conteúdo do Ensino Médio e que o objetivo é de um trabalho complementar que amplie a visão do aluno sobre o uso dos números complexos e dos quatérnios.

Exemplo 6.4. Para aplicar o operador $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}$ no cubo da Figura 15, vamos considerar sua aresta com uma unidade de medida e uma rotação $2\theta = 120^\circ$ ou $\frac{2\pi}{3}$ radianos em torno do eixo $\vec{EC} = \mathbf{v} = i + j + k$, segue que $|\mathbf{v}| = \sqrt{3}$.

Substituindo em $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos\theta + \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\text{sen}\theta$ os dados acima temos:

$$\begin{aligned} q &= \cos \frac{\pi}{3} + \frac{i+j+k}{\sqrt{3}} \text{sen} \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{i+j+k\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2} \\ &= \frac{1}{2}(1+i+j+k) \end{aligned}$$

segue que

$$\bar{q} = \frac{1}{2}(1-i-j-k)$$

Nesse ponto é necessário explicar ao aluno o que é um operador e como ele funciona, não precisando detalhar o processo de multiplicação entre quatérnios.

Aplicando o operador no quatérnio puro $\mathbf{p} = hi + fj + ak$ temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) &= \mathbf{q}\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}} \\ \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(hi + fj + ak) &= \left[\frac{1}{2}(1+i+j+k)\right](hi + fj + ak)\left[\frac{1}{2}(1-i-j-k)\right] \end{aligned}$$

o resultado é

$$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(hi + fj + ak) = (ai + hj + fk)$$

que está representado na Figura 16 [2]

²Esta atividade foi adaptada do exemplo encontrado em [17], a última imagem da Figura 16 também pertence à essa referência.

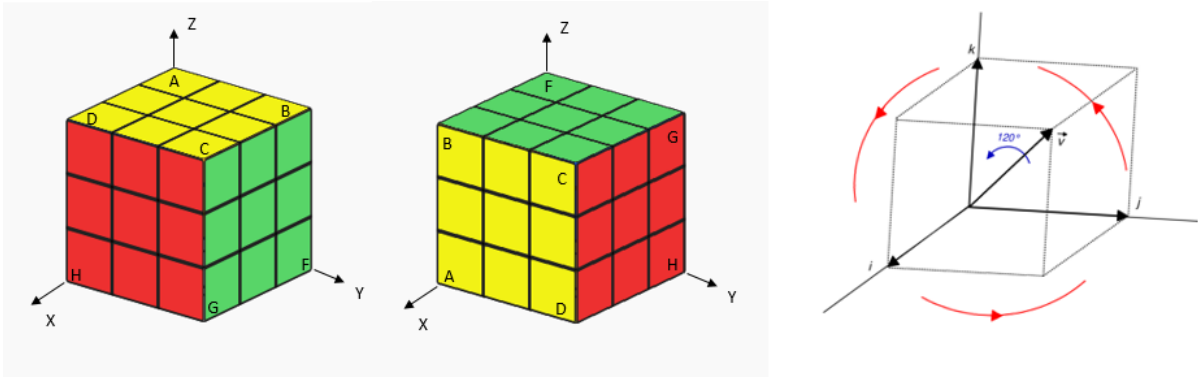


Figura 16: Rotação com quatérnio

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Boyer, Carl B., História da Matemática, Editora Edgard Blücher Ltda, (1996).
- [2] Ávila, Geraldo, Variáveis Complexas e Aplicações, Livros Técnicos e Científicos Editora, (1990)
- [3] Hefez, Abramo, Aritmética, SBM, Coleção PROFMAT (2014)
- [4] Lima, Elon Lages, Números e Funções Reais, SBM, Coleção PROFMAT (2014)
- [5] Balestre, Rodrigo Dias, Matemática: Interação e Tecnologia, Leya,(2016)
- [6] São Paulo. Secretaria Estadual de Educação. Currículo do Estado de São Paulo - Matemática: Material de Apoio - Caderno do Professor, 3ª série, volume 1 (2014-2017)
- [7] Santos, Marcelo de Jesus, Extensões do conceito de números com ênfase nos complexos e quaternios, FUFES, PROFMAT (2015)
https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=85387
- [8] Santos, Michel Valmor dos, Números Complexos, Quaternions e Rotações, UFSC (2012)
https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/126308/Michel_Valmor_dos_Santos.pdf?sequence=1
- [9] Marinho, Adília Maria Lúcia Teixeira Gomes, Os quaterniões e suas aplicações, Lusíadas (2013)
http://repositorio.ulusiada.pt/bitstream/11067/338/1/mm_adilia_marinho_dissertacao.pdf
- [10] Delgado, Jorge, Katia Frensel, Lhaylla Crissaff, Geometria Analítica SBM, Coleção PROFMAT (2013)
- [11] Camargo, Ivan de, Paulo Boulos, Geometria Analítica - um tratamento vetorial, Companion Website, 3ª edição (2005)
- [12] Santos, Davi José dos, A Álgebra dos Complexos/Quatérnios/Octônios e a construção de Cayley-Dickson, UFG, PROFMAT (2016)
https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=95612

- [13] Rotations in 4 dimensional Euclidean space (acesso em 22 de março de 2019)
https://en.wikipedia.org/wiki/Rotations_in_4-dimensional_Euclidean_space#Algebra_of_4D_rotations
- [14] Santos, Marcos André dos, Dos Números Complexos aos Quaternions: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações, UTFPR, PROFMAT (2013)
http://repositorio.utfpr.edu.br:8080/jspui/bitstream/1/705/1/CT_PROFMAT_M_Santos%2c%20Marcos%20Andr%C3%A9%20dos_2013.pdf
- [15] Vaz, Jayme Jr., Sequência de figuras que ilustram “não-comutatividade”
<http://www.ime.unicamp.br/~vaz/nc.htm>
- [16] Imagens do cubo mágico (acesso em 05 de março de 2019)
<https://rubiks-cube-solver.com/pt/>
- [17] Quaternions and spatial rotation (acesso em 22 de março de 2019)
https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation