
Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia



**Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT**

Uma evolução histórica do conceito de área

Carlos Corrêa da Silva Junior

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

São José dos Campos

Abril, 2019



PROFMAT

Título: *Uma evolução histórica do conceito de área*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos

Abril, 2019

Corrêa da Silva Junior, Carlos

Uma evolução histórica do conceito de área, Carlos Corrêa da Silva Junior – São José dos Campos, 2019.

xi, 79f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

A historical evolution of the area concept

1. Área 2. Geometria 3. Matemática 4. Cálculo 5. Figuras planas

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:

Prof. Dr. Eduardo Antonelli

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:

Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

CARLOS CORRÊA DA SILVA JUNIOR
UMA EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE ÁREA

Presidente da banca: Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama



Banca examinadora:

Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

Prof^a. Dr^a. Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita

Prof. Dr. Michael Macedo Diniz

Data da Defesa: 04 de abril de 2019

“A Matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o universo” (Galileu Galilei).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força e capacidade de aprendizagem durante esses anos de estudo.

Agradeço a minha esposa e filha por todo apoio e por compreenderem minha “ausência” devido as horas dedicadas ao estudo. Muito obrigado, amo vocês.

Aos meus familiares, que me motivaram a não desistir, nos momentos de grandes dificuldades; deixo a minha gratidão.

Agradeço ao Coordenador, Prof. Dr. Ângelo Calil Bianchi, pela maestria com a qual conduz o curso PROFMAT, pela dedicação para com os seus coordenados e por todo o conhecimento que me foi transmitido através da Aritmética.

Agradeço também à todos os professores que fizeram parte da minha vida acadêmica e aos meus amigos de curso.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama, um entusiasta da História da Matemática, motivo pelo o qual escolhi o tema dessa monografia, por todo seu apoio, incentivo, fornecimento de materiais e pelas horas dedicadas à minha orientação para que fosse possível o desenvolvimento desse trabalho.

RESUMO

O presente trabalho apresenta ao leitor a evolução histórica do conceito do cálculo de áreas, realizada através de uma linha do tempo, desde os primeiros registros até os tempos modernos, além de uma proposta de trabalho que envolve a dedução das fórmulas das áreas das principais figuras planas.

A história é iniciada por volta de 1 550 a.C., com a exposição do famoso Papiro de Rhind e de seu conteúdo, no qual são trabalhados alguns problemas práticos do cotidiano, tal qual suas resoluções, passando posteriormente por Euclides de Alexandria e Arquimedes de Siracusa, pelo surgimento de uma nova Geometria e enfim a criação do Cálculo Integral. Essa viagem pela História da Matemática é realizada através de um panorama que vai do século XVI a.C. ao século XVII d.C..

Por fim é apresentada uma abordagem didática para a compreensão, de maneira simples, das fórmulas das áreas das principais de figuras planas, por meio de relações de diversas figuras com a área de um retângulo previamente determinado.

Palavras-chave: 1. Área 2. Geometria 3. Matemática 4. Cálculo 5. Figuras planas

ABSTRACT

The present work presents to the reader the historical evolution of the concept of the calculation of areas, carried out through a timeline, from the first records to the modern times, besides a work proposal that involves the deduction of the formulas of the areas of the main plane figures.

The story begins about 1 550 BC, with the exhibition of the famous Papyrus of Rhind and its contents, in which are worked some practical problems of the daily life, as its resolutions, passing later by Euclides of Alexandria and Archimedes of Syracuse, by the appearance of a new Geometry and finally the creation of the Integral Calculus. This journey through the History of Mathematics is carried out through a panorama from the 16th century BC to the 17th century AD.

Finally, it presents a didactic approach for the simple comprehension of the formulas of the main areas of plane figures, by means of relations of several figures with the area of previously determined rectangle.

Keywords: 1. Area 2. Geometry 3. Mathematics 4. Calculus. 5. Plane figures

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Papiro de Rhind ^[34] .	5
Figura 2	Resolução original do Problema 48 do Papiro de Rhind. ^[45] .	7
Figura 3	Ilustração da resolução do Problema 48 do Papiro de Rhind.	7
Figura 4	Ilustração para demonstração da fórmula da área do círculo.	8
Figura 5	Problema 51 no Papiro de Rhind ^[45] .	9
Figura 6	Ilustração da resolução do Problema 51 do Papiro de Rhind.	9
Figura 7	Problema 52 no Papiro de Rhind ^[45] .	9
Figura 8	Ilustração da resolução do Problema 52 do Papiro de Rhind.	10
Figura 9	Tales de Mileto ^[33] .	11
Figura 10	Pitágoras de Samos ^[39] .	11
Figura 11	Suposta imagem de Euclides de Alexandria ^[29] .	13
Figura 12	<i>Papyrus Oxyrhynchus 29</i> - Fragmento com a Proposição 5 do Livro II de Euclides ^[35] .	14
Figura 13	Primeira versão impressa dos Elementos - Intitulada: <i>Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem geometrie incipit qua [m] foelicissime</i> ^[10] .	15
Figura 14	LIVRO I - Proposição 35 do manuscrito residente na Biblioteca Bodleiana, (Universidade de Oxford) datado de 888 d.C. ^[14] .	18
Figura 15	Ilustração da resolução da Proposição 35 - LIVRO I.	19
Figura 16	LIVRO I - Proposição 37 do manuscrito residente na Biblioteca Bodleiana, (Universidade de Oxford) datado de 888 d.C. ^[14] .	20
Figura 17	Ilustração da resolução da Proposição 37 - LIVRO I.	20
Figura 18	LIVRO I - Proposição 41 do manuscrito residente na Biblioteca Bodleiana, (Universidade de Oxford) datado de 888 d.C. ^[14] .	21
Figura 19	Ilustração da resolução da Proposição 41 - LIVRO I.	21
Figura 20	LIVRO II - Proposição 2 do manuscrito residente na Biblioteca Bodleiana, (Universidade de Oxford) datado de 888 d.C. ^[14] .	22
Figura 21	Ilustração da resolução da Proposição 2 - LIVRO II.	23
Figura 22	LIVRO II - Proposição 14 do manuscrito residente na Biblioteca Bodleiana, (Universidade de Oxford) datado de 888 d.C. ^[14] .	23
Figura 23	Ilustração da resolução da Proposição 14 - LIVRO II.	24
Figura 24	Suposta imagem de Arquimedes de Siracusa ^[31] .	25
Figura 25	Ilustração da proposição base para o método da exaustão.	29
Figura 26	Ilustração da definição de parábola.	30
Figura 27	Ilustração da Proposição 1.	30

Figura 28	Ilustração da Proposição 2.	31
Figura 29	Ilustração da Proposição 3.	31
Figura 30	Ilustração da Proposição 4.	32
Figura 31	Ilustração da Proposição 5.	33
Figura 32	Ilustração do processo da exaustão.	34
Figura 33	Ilustração da inscrição e circunscrição de hexágonos regulares e um polígono regular de 24 lados.	35
Figura 34	Os criadores da Geometria Analítica ^{[38][40]} .	37
Figura 35	Ilustração do Problema sobre multiplicação e divisão ^[32] .	39
Figura 36	Ilustração do Problema sobre a extração da raiz quadrada ^[32] .	40
Figura 37	Ilustração da resolução da extração da raiz quadrada.	40
Figura 38	Ilustração para demonstração da fórmula de Gauss.	42
Figura 39	Ilustração do hexágono do exemplo.	44
Figura 40	Ilustração do processo para o cálculo do pseudodeterminante.	44
Figura 41	Ilustração para demonstração do cálculo da área do paralelogramo no plano.	46
Figura 42	Ilustração para demonstração do cálculo da área do triângulo no plano.	47
Figura 43	Ilustração para demonstração do cálculo da área do paralelogramo no espaço.	48
Figura 44	Ilustração para demonstração do cálculo da área do triângulo no espaço.	48
Figura 45	Os criadores do Cálculo ^{[37][36]} .	50
Figura 46	Ilustração da região de área S .	53
Figura 47	Ilustração para demonstração da soma de Riemann.	53
Figura 48	Esboço das áreas P e T .	54
Figura 49	Ilustração do retângulo quadriculado.	57
Figura 50	Obtenção do quadrado.	58
Figura 51	Obtenção do paralelogramo.	58
Figura 52	Obtenção de dois triângulos retângulos.	59
Figura 53	Obtenção de dois triângulos isósceles.	59
Figura 54	Obtenção de dois trapézios retângulos.	60
Figura 55	Obtenção de dois trapézios isósceles.	60
Figura 56	Obtenção de dois losangos.	61
Figura 57	Obtenção de um “retângulo” através de dois círculos.	62

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	2
1 OS PRIMÓRDIOS	4
1.1 O Papiro de Rhind	4
1.2 A Geometria moderna	10
2 EUCLIDES E SEUS ELEMENTOS	13
2.1 A vida	13
2.2 Os Elementos	14
3 ARQUIMEDES E O CÁLCULO DE ÁREAS	25
3.1 A vida	25
3.2 Contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas	28
3.2.1 Método da exaustão	28
3.2.2 A quadratura da parábola	29
3.2.3 A medida do círculo	35
4 A REVOLUÇÃO NO CÁLCULO DE ÁREAS	37
4.1 O surgimento de uma nova Geometria	37
4.1.1 A fórmula de Gauss	42
4.1.2 A Geometria Analítica Vetorial	45
4.2 O cálculo de áreas por integral	49
4.2.1 A Integral de Riemann	52
5 AS ÁREAS DAS PRINCIPAIS FIGURAS PLANAS EM UMA ABORDAGEM DIDÁTICA	56
5.1 Sequência didática	56
Considerações finais	63
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	64

INTRODUÇÃO

O homem, desde os tempos mais remotos, vive em um espaço físico inundado pelas mais diversas formas geométricas, tendo sido praticamente obrigado a desenvolver técnicas e métodos para a resolução de inúmeros problemas em seu cotidiano, especialmente no tocante ao cálculo de áreas. Como principal resultado desse desenvolvimento tem-se o surgimento da Geometria.

Essa área fundamental do conhecimento matemático pode ser explorada, através da História da Matemática, fazendo com que o leitor perceba a sua importância e aplicabilidade, pois o mesmo é levado a refletir onde, como e o porquê do surgimento e da evolução de um conceito matemático.

De acordo com os fatos apresentados acima, este trabalho tem a proposta de explorar, de forma ordenada, a evolução dos conceitos da Geometria relacionados com o estudo de áreas e seus respectivos cálculos, partindo de uma Geometria rudimentar, passando pela Geometria Euclidiana, alguns problemas trabalhados por Arquimedes, a Geometria Analítica e, por fim, o Cálculo Integral. Além disso, é apresentada uma proposta de trabalho, por meio de uma abordagem didática, para a obtenção das fórmulas das áreas das principais figuras planas, dando assim mais significado a aprendizagem deste conteúdo.

Este trabalho, desenvolvido por meio de pesquisas bibliográficas, é composto por cinco capítulos, conclusão e as referências bibliográficas.

No primeiro capítulo são apresentados os primeiros registros dos cálculos de áreas, contidos no famoso Papiro de Rhind, além de uma breve explanação sobre a instituição de um padrão moderno para a Geometria, baseada no raciocínio lógico, atribuídas a Tales de Mileto e a Pitágoras de Samos.

O segundo capítulo traz a vida e a obra (Os Elementos) de Euclides de Alexandria. Essa primorosa obra contém a compilação e sistematização de todo o conhecimento matemático da época, sendo considerado o livro matemático mais influente de todos os tempos.

No terceiro capítulo são abordados alguns fatos a respeito da vida de Arquimedes e sobre suas contribuições para o cálculo de áreas, em especial, o método da exaustão (atribuído a Eudoxo de Cnido), a quadratura da parábola e a medida do círculo.

O quarto capítulo, relativo à revolução no cálculo de áreas, está dividido em duas partes. Na primeira parte, é feita uma abordagem sobre a conexão estabelecida entre Álgebra e Geometria, realizada de forma independente, por Pierre de Fermat e René Descartes, que culminou na invenção da Geometria Analítica. Na segunda parte deste capítulo, é apresentada a criação do Cálculo Integral, atribuída a Issac Newton e Leibniz. Onde, esses dois gênios, desafiados por problemas da Filosofia Natural (origem da Física moderna), fizeram o uso de ferramentas já utilizadas por Arquimedes, da Geometria Analítica e do desenvolvimento de técnicas infinitesimais, para a realização de tal feito.

No quinto e último capítulo, é desenvolvido um trabalho para a assimilação, de maneira mais simples, das fórmulas das áreas das principais figuras planas. Realizado por meio da comparação de diversas figuras com um retângulo, cuja fórmula da área foi deduzida inicialmente.

OS PRIMÓRDIOS

Desde os tempos mais remotos, a natureza fornecia ao homem primitivo uma quantidade variada de formas geométricas. Esse, por sua vez, já possuía uma capacidade natural de compreender esses elementos e compará-los quanto à forma e ao tamanho, sendo capaz de transformar, sem nenhuma base científica, a percepção do espaço à sua volta em conhecimento, criando uma espécie de Geometria rústica, a qual utilizou para fabricar suas primeiras ferramentas e objetos de uso doméstico, tecer, confeccionar vasos e potes, fazer pintura e ornamentos, construir moradias e fazer medições para o trabalho com a agricultura.

Não é possível saber ao certo quando surgiram as figuras geométricas e nem o cálculo de tais áreas, pois não existem registros e porque o conhecimento sobre as figuras geométricas compreende saberes diferentes: a percepção do desenho e o conceito matemático.

Apesar disso, Heródoto (historiador grego que viveu entre, aproximadamente, 484 e 425 a. C.) atribuiu a criação da Geometria aos egípcios. Segundo ele, a motivação foi à necessidade de remarcar as áreas de terras perdidas por conta das cheias periódicas do rio Nilo, a fim de taxar equitativamente o imposto a ser pago, e para isso faziam uso de técnicas apuradas de medição de comprimentos e áreas. Talvez esse fato é o que melhor explique a origem da palavra Geometria, que significa medida da terra, proveniente da união de dois radicais gregos: *geo* = terra e *metrein* = medir. Muitos desses registros encontram-se no Papiro de Rhind (antigo documento matemático), no qual são demonstrados problemas práticos da Matemática do Egito antigo, segundo Boyer (1974^[11]).

Sabe-se também que os primeiros registros de cálculos de áreas de círculos, retângulos e triângulos ocorreram um pouco depois de 2600 a.C, na época da construção da pirâmide de Gizé, no Egito, cuja base quadrada é bastante precisa, e posteriormente transcritas pelo escriba Ahmes no famoso Papiro de Rhind.

1.1 O PAPIRO DE RHIND

O Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1 550 a.C., onde um escriba de nome Ahmes reproduz 84 problemas de Geometria e de Aritmética acompanhados de suas soluções. Ele foi escrito em hierático (texto de difícil compreensão destinado a classe sacerdotal) e da direita para a esquerda. Hoje, segundo informações contidas no site *The British Museum* ^[34], esse documento é formado por um rolo contendo 14 folhas de papiros coladas em um de seus lados perfazendo aproximadamente 199,5 cm

de comprimento e 0,32 m de largura, mas especula-se que o rolo original continha 20 folhas.

Tal papiro foi descoberto por volta de 1850, provavelmente nas ruínas de uma pequena construção próxima ao templo mortuário de Ramssés II, em Tebas (cidade do antigo Egito) e seu nome homenageia o antiquário e arqueólogo escocês Alexander Henry Rhind, que o comprou em Luxor, cidade localizada no sul do Egito, por volta de 1858. Após a morte de Rhind, cinco anos mais tarde (1863), o papiro foi adquirido pelo *British Museum*, Museu Britânico de Londres em 1865. Esse documento também é designado Papiro de Ahmes, o escriba egípcio que o transcreveu.

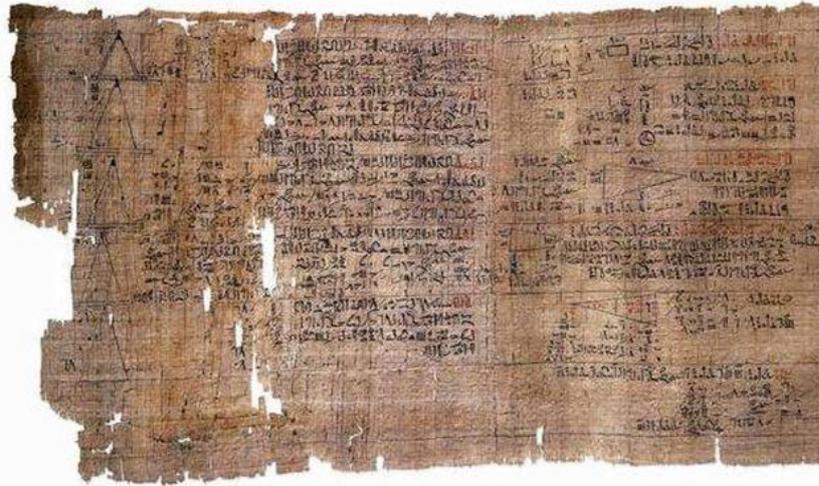


Figura 1: Papiro de Rhind^[34].

O Papiro de Rhind é uma espécie de manual do cálculo matemático com regras, questões organizadas por assuntos e muitas aplicações da Matemática a problemas práticos, provavelmente destinado a servir como um norte para os sacerdotes egípcios e conhecedores da especialidade. Pode-se observar ainda que, no tocante ao cálculo de áreas, era empregada, na maioria das vezes, a conversão da figura para posteriormente a analisar através de comparação com uma figura de área conhecida.

Além de tabelas contendo os resultados do número 2 dividido por cada um dos números ímpares de 5 a 101 e das divisões de cada número de 1 a 9 por 10, todos expostos como a soma das frações unitárias, segundo Veiga e Santos (2002^[45]), o Papiro de Rhind apresenta a seguinte lista de problemas:

- 1 a 6 - Divisão de 1, 2, 6, 7, 8 e 9 pães por 10 homens.
- 7 a 20 - Multiplicação das expressões $1 + 1/2 + 1/4$ ou $1 + 2/3 + 1/3$ por diferentes frações.
- 21 a 23 - Subtrações: $1 - (2/3 + 1/15)$, $1 - (2/3 + 1/30)$ e $2/3 - (1/4 + 1/8 + 1/10 + 1/30 + 1/45)$.
- 24 a 29 - Problemas de quantidades, envolvendo equações do 1º grau com uma incógnita, resolvidas pelo método da falsa posição.

- 30 a 34 - Problemas semelhantes aos anteriores, mas mais complicados (envolvendo frações) e resolvidos pelo método da divisão.
- 35 a 38 - Problemas de hekat (medida de capacidade), envolvendo equações do 1º grau com uma incógnita, mas ainda mais complexas que as anteriores, resolvidos pelo método da falsa posição.
- 39 - Divisão de pães.
- 40 - Divisão de pães envolvendo progressões aritméticas.
- 41 a 43 - Volumes de contentores cilíndricos de cereais.
- 44 a 46 - Volumes de contentores paralelepípedicos de cereais.
- 47 - Tabela das frações de 1 hekat, como frações do olho de Hórus.
- 48 a 53 - Áreas de triângulos, retângulos, trapézios e círculos.
- 54 e 55 - Divisão relacionada com área.
- 56 a 60 - Problemas relacionados com pirâmides (sekeds (equivalente à noção atual de cotangente de um ângulo), alturas e bases)
- 61 e 61B - Tabela de uma regra para encontrar $2/3$ de números ímpares e frações unitárias.
- 62 - Problema de proporções, sobre metais preciosos e o seu peso.
- 63 e 65 - Divisão proporcional de pães por um número de homens.
- 64 - Problema envolvendo uma progressão aritmética.
- 66 - Divisão de gordura.
- 67 - Proporção de gado devido a impostos.
- 68 - Divisão proporcional de cereais entre grupos de homens.
- 69 a 78 - Problemas de pesos de pão e cerveja. Proporção inversa.
- 79 - Progressão geométrica de razão 7.
- 80 e 81 - Tabelas das frações do olho de Hórus.
- 82 a 84 - Problemas (pouco claros) sobre a quantidade de comida de vários animais domésticos, como gansos e outras aves.
- 85 - Escritura enigmática
- 86 e 87 - Apontamento de certas contas e incidentes (em parte perdido)

Demonstraremos¹ a seguir resoluções de alguns dos problemas relacionados com áreas:

Problema 48: “Compare a área do círculo com o do quadrado circunscrito.”

Este é o único entre os 84 problemas do Papiro Rhind em que a solução é apresentada por meio de uma ilustração geométrica.

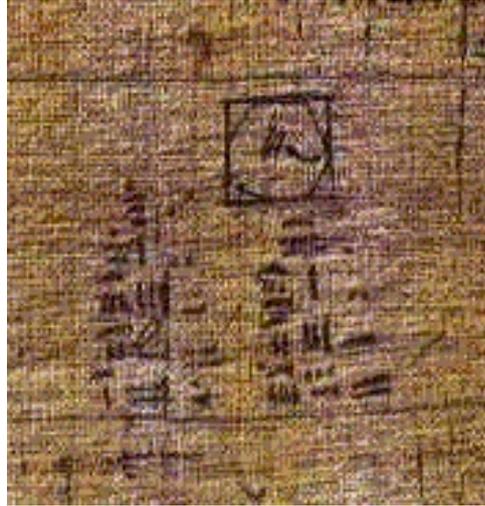


Figura 2: Resolução original do Problema 48 do Papiro de Rhind.^[45]

Resolução: Ahmes considera um quadrado de lado 9 khet (khet é a unidade básica de comprimento equivalente a 100 côvados e 1 côvado $\approx 52,5\text{cm}$) obtendo uma área de 81 setat (setat é a unidade de superfície equivalente a um quadrado de 100 côvados de lado $= 1 \text{ khet}^2$). A área do círculo é calculada através de uma aproximação com um octógono inscrito no quadrado formado quando é trissectado em partes iguais cada um dos lados do quadrado e os triângulos das extremidades são retirados.

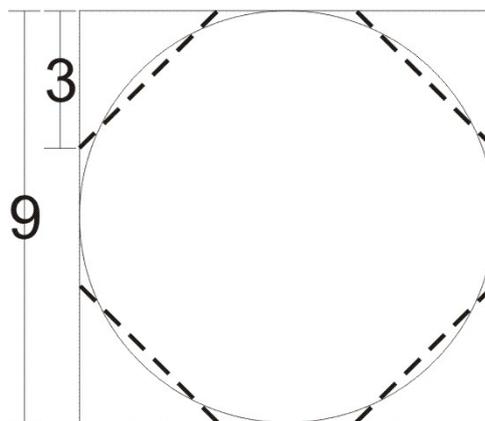


Figura 3: Ilustração da resolução do Problema 48 do Papiro de Rhind.

¹Demonstrações baseadas nos trabalhos de Veiga e Santos (2002^[45]), Gonçalves (2011^[18]) e López(2003^[21]).

Assim, a área do octógono é $9^2 - 2 \times 3^2 = 63$ setat e em seguida a área do círculo é aproximada para 64 setat. Portanto, a área do quadrado é maior que a do círculo.

Problema 49: É o calculo da área de um retângulo de 10 khet de comprimento e 1 khet de largura.

Resolução: O escriba obtem o valor da área de 10 setat através do produto do valor do comprimento pela do retângulo ($10 \text{ khet} \times 1 \text{ khet}$).

Problema 50: “Um campo circular tem 9 khet de diâmetro. Qual é a sua área?”

Resolução: “Tira $1/9$ do diâmetro do seu diâmetro, isto é 1 khet. O resto é 8 khet. Multiplica 8 por 8; o que faz 64. Por isso, contém 64 setat de terra.”

Ao analisarmos a descrição dessa resolução podemos concluir que o cálculo da área do círculo foi realizado por meio da fórmula:

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$$

Não sabemos como os egípcios chegaram a essa fórmula, mas podemos imaginar da seguinte maneira: Suponhamos que o círculo está inscrito em um quadrado de lado d e área d^2 . Dividindo esse quadrado, conforme figura 4, obtém-se nove quadrados menores de área $\frac{1}{9}d^2$.

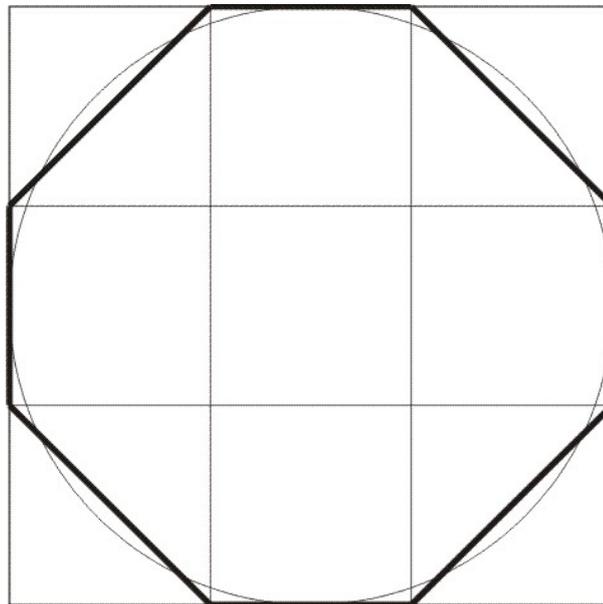


Figura 4: Ilustração para demonstração da fórmula da área do círculo.

Considerando que a área do círculo é igual a, aproximadamente, 7 desses quadrados, temos que sua área é $\frac{7}{9}d^2$, que é equivalente a $\frac{63}{81}d^2$. Fazendo o uso de $\frac{64}{81}d^2$ não nos desviamos muito do resultado e ainda ganhamos a vantagem de ser um quadrado perfeito. Logo, $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ pode ser escrito como $\left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$, a fórmula pretendida.

Conhecendo a relação entre o diâmetro e o raio de um círculo, podemos escrever:

$$\frac{64}{81}d^2 = \frac{64}{81}(2r)^2 = \frac{256}{81}r^2$$

Apesar do número π não ser mencionado em nenhum papiro explicitamente e mesmo sabendo que tal constante não era utilizada no método egípcio em seus cálculos, podemos perceber uma excelente aproximação de seu valor com a fração $\frac{256}{81} = 3,1605$, apresentando um erro de apenas 0,0189.

Problema 51: “Qual é a área de um triângulo de lado 10 khet e base 4 khet?”

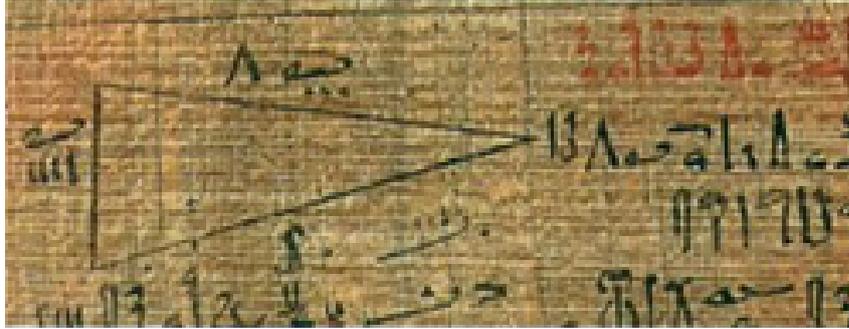


Figura 5: Problema 51 no Papiro de Rhind^[45].

Resolução: “Toma-se metade de 4, para formar um retângulo, obtendo-se. Multiplica-se 10 por 2 é o resultado de 20 é a área procurada.”

De acordo com a resolução apresentada, o escriba Ahmes dividia em duas partes iguais pela altura o triângulo, supostamente isósceles, obtendo dois triângulos retos que, ao serem justapostos, formavam um retângulo e sendo que Ahmes chamava a altura de lado, caso contrário, estaria comento um erro ao calcular a área.

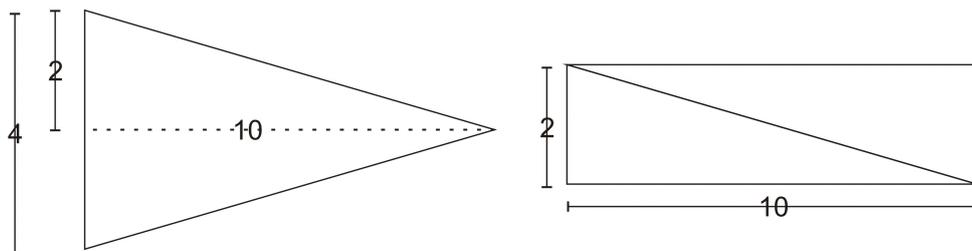


Figura 6: Ilustração da resolução do Problema 51 do Papiro de Rhind.

Problema 52: “Supõe que te é dito, qual é a área de um triângulo truncado de terra com 20 khet de lado, 6 khet na base, e 4 khet na linha de corte?”



Figura 7: Problema 52 no Papiro de Rhind^[45].

Resolução: “Some sua base ao seu segmento de corte; você obtém 10. Pegue metade de 10, que é 5, para formar um retângulo. Então multiplique 20 vezes 5 e o resultado, 100, é a área procurada.”

De acordo com a resolução apresentada, observa-se que o triângulo truncado é um trapézio obtido por meio de uma linha paralela à base, a partir da qual o retângulo é construído.

Caso o escriba Ahmes tivesse suposto um trapézio isósceles tendo chamado a altura de lado ou suposto um trapézio retângulo seus cálculos estão corretos, caso contrário, estaria comento um erro ao calcular a área.

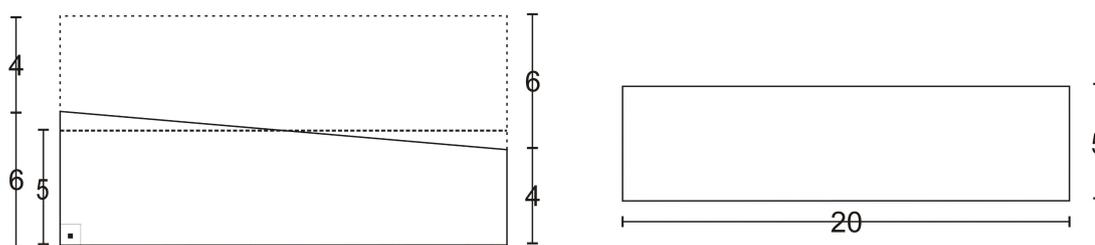


Figura 8: Ilustração da resolução do Problema 52 do Papiro de Rhind.

Além do famoso e mais significativo dos papiros, o Papiro de Rhind, existe outro que ajuda a compor grande parte dos nossos conhecimentos da Matemática egípcia: o Papiro de Moscovo (1850 a.C.). Existem ainda mais três documentos de Matemática egípcia com alguma importância: o Papiro de Kahun, o Papiro de Berlim e o Rolo de Couro.

Também é sabido que entre 2000 e 1600 a.C. os babilônios já conheciam as figuras básicas (o retângulo, o quadrado e o triângulo) e calculavam sua área, mas pouco sem tem conhecimento devido, principalmente, a utilização da argila como um meio de escrita.

1.2 A GEOMETRIA MODERNA

Após o declínio do poder do Egito e Babilônia, a Grécia assumiu a liderança intelectual do mundo antigo. E, notavelmente, com o tempo, os gregos acabaram inaugurando o padrão da Geometria moderna, baseada no raciocínio lógico dedutivo para dar suporte a um argumento e não na experiência e intuição.

É atribuída a Tales de Mileto (c. 640 - c. 550 a. C) a introdução do estudo da Geometria na Grécia, sendo assim intitulado o “pai da Geometria” ou o “primeiro matemático”, pois teria sido ele o primeiro a ir ao Egito e trazer esses conhecimentos para a Grécia. Posteriormente, ele próprio descobriu muitas proposições e justificou alguns resultados dispersos tais como: Todo círculo é dividido em duas partes iguais por seu diâmetro, os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, o ângulo inscrito em um semicírculo é reto, quando duas retas se interceptam, os ângulos opostos são iguais, os lados de triângulos semelhantes são proporcionais e que dois triângulos são congruentes se possuem dois ângulos e um lado iguais. Além desses fatos, acredita-se que o seu feito

mais espetacular foi a medição indireta da altura da Pirâmide de Quéops através da sua sombra, no período em que esteve no Egito.



Figura 9: Tales de Mileto^[33].

As contribuições de Pitágoras de Samos (c. 570 – c. 495 a.C.) e de sua escola (fundada em Crotona no sul da Itália, região conhecida como Magna Grécia em data desconhecida) foram de grande valia para o crescimento da Geometria moderna, pois estabeleceram o chamado método dedutivo, no qual as provas são realizadas a partir de postulados e que hoje fundamenta toda a Matemática, além da tentativa de organizar a teoria das retas paralelas por meio de ligação de resultados, que eram provados a partir de alguns conceitos e pressupostos básicos, mediante raciocínio lógicos. Acredita-se que por causa de sua genialidade, um importante cálculo matemático, já conhecido e utilizados anteriormente, leva seu nome: o Teorema de Pitágoras.

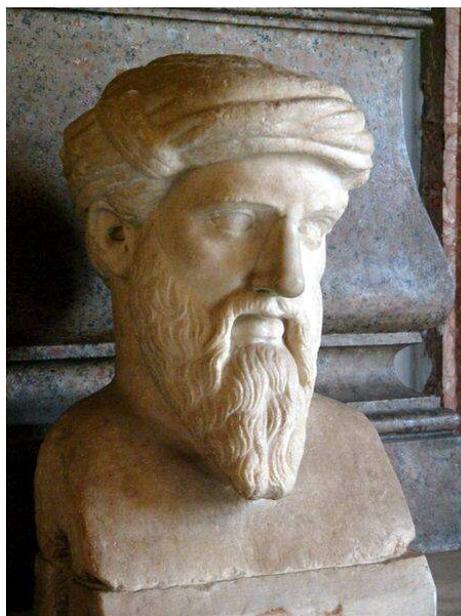


Figura 10: Pitágoras de Samos^[39].

Posteriormente, alguns matemáticos também escreveram obras que visavam apresentar toda a Geometria pelo método dedutivo.

Podemos considerar que a Matemática grega teve o seu período áureo no século III a.C, tanto pelos avanços técnicos e conceituais, quanto pelo magnífico trabalho de sistematização de conhecimentos. Mas, sem dúvida alguma, a célebre obra Os Elementos, de Euclides, representou o apogeu da produção Matemática na Grécia clássica, tornando-se a obra matemática grega mais brilhante de todos os tempos e que mais influenciou o desenvolvimento da Matemática e da Ciência.

Devido a enorme importância para a Matemática, em especial para a Geometria, a vida e obra (Os Elementos) de Euclides serão assuntos do próximo capítulo.

EUCLIDES E SEUS ELEMENTOS

Neste capítulo descreveremos alguns fatos a respeito da vida de Euclides e sobre sua grandiosa obra conhecida como Os Elementos, que contribuiu para evolução da Matemática e analisaremos, mais especificamente, o tocante ao cálculo de áreas.

2.1 A VIDA

Pouco se sabe sobre a vida pessoal de Euclides, onde e quando nasceu, ou sobre as circunstâncias de sua morte, a exemplo do que acontece com outros grandes matemáticos da Grécia antiga. Até mesmo as representações de Euclides em obras de arte são meras especulações, pois nenhuma imagem ou descrição da aparência física de Euclides foi feita durante sua vida.



Figura 11: Suposta imagem de Euclides de Alexandria^[29].

Euclides viveu em Alexandria, no Egito, durante o reinado de Ptolomeu I, o que representa o período da primeira metade do século III a.C.. Sabe-se ao certo que Euclides lecionava Matemática na Escola Real de Alexandria, uma academia recém fundada por Ptolomeu, fundou uma escola e que teria sido um dos estudiosos a ser convidado para trabalhar no museu de Alexandria.

Foi com Euclides que a Geometria do Egito tornou-se importante, fazendo de Alexandria o centro mundial do compasso e do esquadro. Tudo começou com o livro Os Elementos, com 13 volumes, no qual Euclides reuniu e organizou, num sistema coerente e compreensível, muitos trabalhos de Tales, Pitágoras, Platão, Eudoxo de Cnido, entre outros, e todo o conhecimento sobre Matemática, dos gregos e egípcios, que o precederam.

Outros fatos da vida de Euclides teriam ficado em segundo plano e, conseqüentemente, esquecidos, devido a importância e magnitude alcançada por sua principal obra: Os Elementos. Além disso, o prestígio de sua obra era tão grande que acabou por encobrir até mesmo seu nome, sendo referenciado, muitas vezes, como “O escritor dos Elementos” ou, simplesmente, “O Geômetra”.

2.2 OS ELEMENTOS

Os Elementos de Euclides é uma obra magnífica de compilação do conhecimento matemático da época, organizado como sistema dedutivo (axiomático), onde a partir de um conjunto pequeno de axiomas e postulados básicos é produzido um corpo significativo de resultados sobre Geometria e Aritmética.

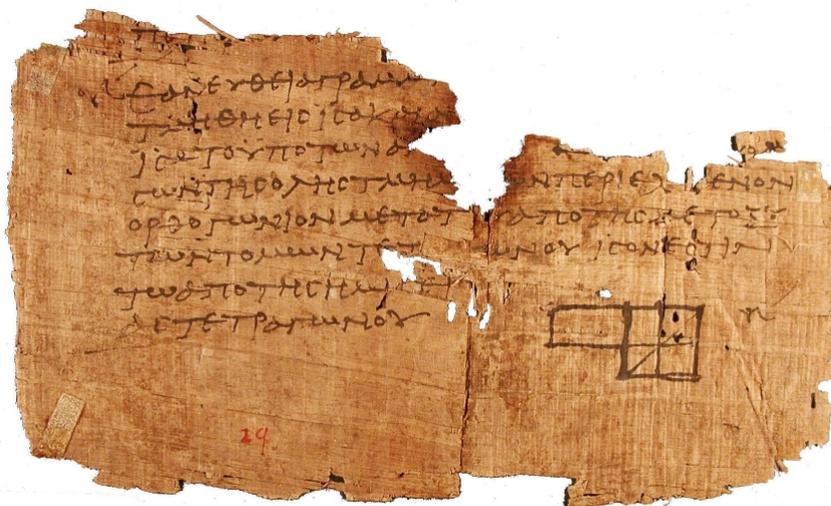


Figura 12: *Papyrus Oxyrhynchus 29* - Fragmento com a Proposição 5 do Livro II de Euclides^[35].

A obra é considerada o mais antigo tratado grego sobre Matemática que chegou até nós na sua totalidade. Provavelmente, por ter sido um dos livros mais editado e estudado em toda a história, sendo por muitos considerado o maior livro matemático de todos os tempos.

Cópias do manuscrito dominaram grande parte do ensino da Matemática na Europa na antiguidade e após a primeira versão impressa em Veneza em 1482 pelo alemão Erhard Ratdolt, surgiram mais de mil edições dos Elementos, sendo utilizado como, praticamente, única referência no ensino da Matemática até o final do século XIX e início do século XX. Infelizmente, não foi encontrada nenhuma cópia do trabalho que remonte ao tempo de Euclides. Vale a pena ressaltar que uma das mais famosas edições (Oliver Byrne - 1847), que compreende os seis primeiros livros ganhou uma versão interativa online em uma plataforma digital desenvolvida por Nicholas Rougeux que ser acessada e explorada através do endereço^[30]:

https://www.c82.net/euclid/?utm_medium=website&utm_source=archdaily.com.br#books



Figura 13: Primeira versão impressa dos Elementos - Intitulada: *Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem geometrie incipit qua [m] foelicissime*^[10].

Os Elementos é composto por treze livros que podem ser comparados a capítulos de um livro que possuem o seguinte conteúdo:

Os 4 primeiros livros tratam de Geometria Plana elementar e estudam propriedades de figuras retilíneas e do círculo, abordando problemas cuja solução se faz com régua e compasso.

- Livro I: O básico da Geometria: Definições, axiomas e postulados; teoria dos triângulos e das paralelas; relações entre áreas de paralelogramos, triângulos e quadrados e o Teorema de Pitágoras.
- Livro II: Álgebra Geométrica: Trata o que usualmente se designa por Geometria das áreas. São realizadas transformações de áreas e são estabelecidas equivalências geométricas de diferentes identidades algébricas e também uma generalização do Teorema de Pitágoras (Lei dos cossenos).
- Livro III: Teoria da circunferência: Consiste em definições e proposições relacionados à circunferência, às cordas, à medição de ângulos e às secantes e tangentes.
- Livro IV: Figuras inscritas e circunscritas: Construção, com régua e compasso, de alguns polígonos regulares, bem como a sua circunscrição.
- Livro V: Teoria das proporções abstratas: Contempla a forma puramente geométrica da teoria das proporções de Eudoxo.
- Livro VI: Figuras geométricas similares e proporcionais: Basicamente é a aplicação dos resultados do Livro V à Geometria Plana, tratando, particularmente, da semelhança de figuras.

- Livros VII, VIII e IX: Livros consagrados à Teoria dos Números.
- Livro X: Classificação de incomensuráveis: Este volume contém e trata os números irracionais, ou seja, os segmentos que são incomensuráveis em relação a um dado segmento retilíneo. É o Livro mais extenso deste conjunto e é, muitas vezes, considerado o mais difícil.

Os livros XI, XII e XIII são conhecidos pelo nome de livros estereométricos (o nome grego para secções cônicas), por neles serem consideradas figuras da Geometria Tridimensional.

- Livros XI: Geometria dos sólidos: É dedicado ao paralelismo e à perpendicularidade de rectas e planos e ao estudo de ângulos de sólidos e de prismas.
- Livro XII: Figuras de medição: Estabelece razões entre áreas de figuras planas e entre volumes de sólidos onde o método de exaustão comentado por Arquimedes é utilizado.
- Livro XIII: Sólidos regulares: Trata do estudo dos cinco poliedros regulares (tetraedro , hexaedro , octoedro , dodecaedro e icosaedro), conhecidos por sólidos platônicos.

De acordo com o objetivo desta pesquisa, que se restringe ao estudo de áreas de figuras planas, tomaremos como base para nossos estudos os Livros I e II dos Elementos de Euclides.

Nos Elementos não é definido o conceito de área, mas pode-se observar sua utilização através da noção de que área é a superfície (conteúdo) de uma figura, tratada como uma grandeza ou atributo geométrico da figura.

Pode-se ainda verificar a inexistência de fórmulas para cálculo de áreas e também sequer uma preocupação de atribuir valores numéricos a qualquer medida, pois, diferentemente, da Aritmética que lidava com os números, a Geometria se ocupava das formas e grandezas.

A abordagem nos Elementos de Euclides, no tocante a conceito de área, é realizada por meio da comparação entre as áreas de figuras geométricas envolvendo a decomposição e congruência, além de transformações de figuras em outras equivalentes (mesma área) através do processo de quadratura e, para isso, o livro I dos Elementos traz em seus postulados e axiomas condições que asseguram a existência de figuras geométricas básicas, tais como a reta e o círculo, a partir das quais as outras figuras geométricas são construídas, tornando possível a realização de tais comparações.

Demonstraremos a seguir, baseados nos trabalhos de Joyce (1996-1997^[19]), de Roque (2012^[27]), no blog Euclides.org (2003^[9]) e na versão digital da edição de Os Elementos de Euclides dos seis primeiros livros do undécimo e duodécimo da versão latina de Federico Commandino (1855^[24]), alguns problemas envolvendo áreas contidos nos Elementos de

Euclides e para isso serão utilizados alguns conceitos e definições contidos na obra sem as devidas demonstrações, mas para uma melhor compreensão enunciaremos tais conceitos:

Noções comuns: (NC)

- 1 - “Duas coisas que sejam iguais a uma terceira também são iguais entre si” (NC1);
- 2 - “Se dois iguais são somados a iguais, o resultado será o mesmo” (NC2);
- 3 - “Se dois iguais forem subtraídos a iguais, o resto será o mesmo” (NC3);
- 4 - “Coisas que coincidem umas com as outras são iguais umas com as outras” (NC4);
- 5 - “O todo é sempre maior que a parte” (NC5).

Postulados:

- LIVRO I - 1 - “Para desenhar uma linha reta de qualquer ponto para qualquer ponto.” (I.POST1);
- LIVRO I - 2 - “Para produzir uma linha reta finita continuamente em linha reta.” (I.POST2).

Definições:

- LIVRO I - 18 - “Semicírculo é uma figura, compreendida entre o diâmetro e aquela parte da circunferência do círculo, que é cortada pelo diâmetro.” (I.DEF18);
- LIVRO II - 1 - “Qualquer paralelogramo retangular é dito estar contido pelas duas linhas retas contendo o ângulo reto.” (II.DEF1).

Proposições:

- LIVRO I - 3 - “Dadas duas linhas retas desiguais, cortar da linha maior uma parte igual à linha menor.” (I.3);
- LIVRO I - 4 - “Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um; e os ângulos, compreendidos por estes lados, forem também iguais, as bases e os triângulos, e os mais ângulos, que são opostos a lados iguais, serão também iguais.” (I.4);
- LIVRO I - 10 - “Dividir em duas partes iguais uma linha reta de um comprimento dado.” (I.10);
- LIVRO I - 29 - “Uma linha reta, que corta duas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si; o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte igual a dois retos.” (I.29);

- LIVRO I - 31 - “De um ponto dado desenhar uma linha reta paralela a outra linha reta dada.” (I.31);
- LIVRO I - 34 - “Os lados e os ângulos opostos dos espaços formados com linhas paralelas, ou paralelogramos, são iguais; e todo o espaço paralelogramo, fica dividido pela diagonal em duas partes iguais.” (I.34);
- LIVRO I - 45 - “Construir um paralelogramo igual a uma figura retilínea qualquer dada, e com um ângulo igual a outro ângulo dado.” (I.45);
- LIVRO I - 46 - “Sobre uma linha reta dada descrever em quadrado.” (I.46);
- LIVRO I - 47 - “Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto.” (Teorema de Pitágoras) (I.47);
- LIVRO II - 5 - “Se uma linha reta é cortada em segmentos iguais e desiguais, então o retângulo contido pelos segmentos desiguais do todo junto com o quadrado na linha reta entre os pontos de seção é igual ao quadrado da metade.” (II.5).

Demonstrações:

LIVRO I - Proposição 35: “Os paralelogramos, que estão postos sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais” (I.35).

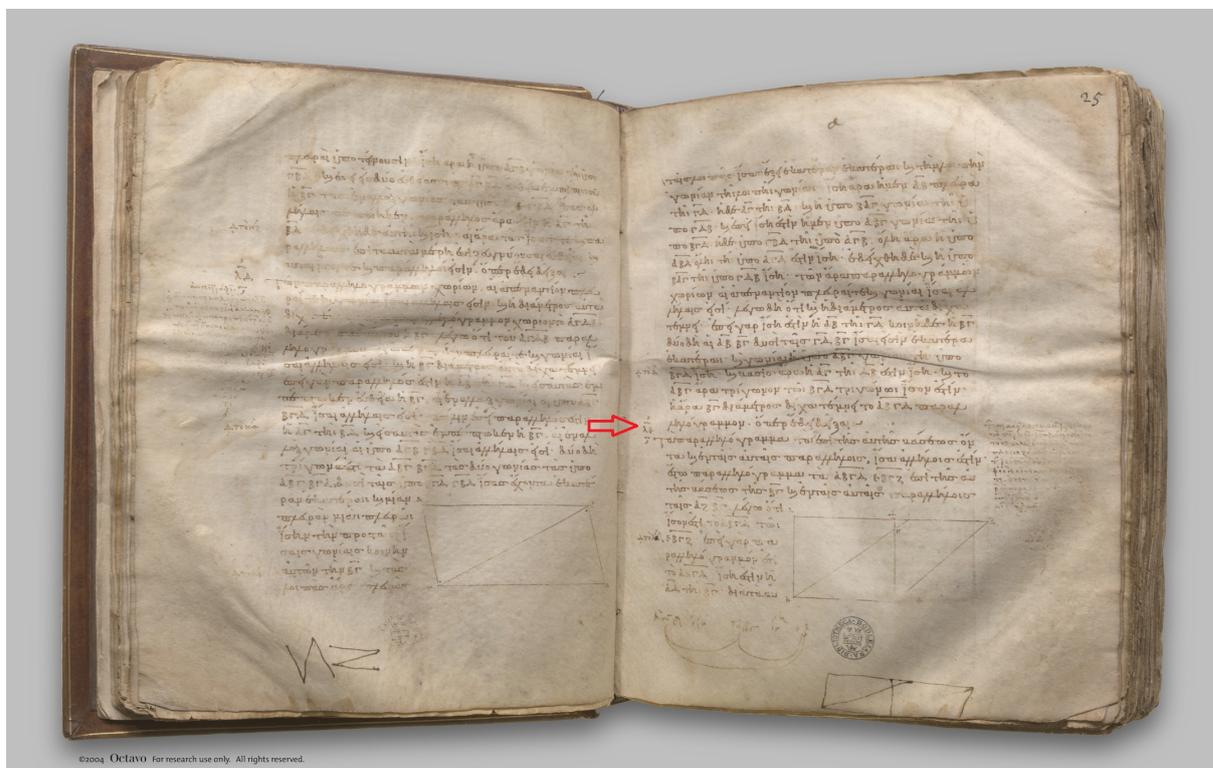


Figura 14: LIVRO I - Proposição 35 do manuscrito residente na Biblioteca Bodleiana, (Universidade de Oxford) datado de 888 d.C.[14].

Resolução da Proposição 35 - LIVRO I: “Deixe ABCD e EBCF serem paralelogramos na mesma base BC e nas mesmas paralelas AF e BC. Eu digo que ABCD é igual ao paralelogramo EBCF”.

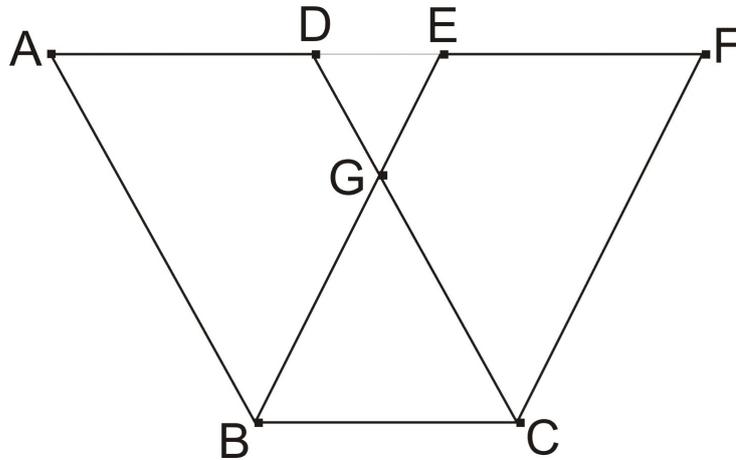


Figura 15: Ilustração da resolução da Proposição 35 - LIVRO I.

Sendo ABCD um paralelogramo, temos que AD é igual a BC (I.34). Pela mesma razão, EF é igual a BC, de modo que AD também é igual a EF (NC1) e como DE é comum, então, todo o AE é igual a todo o DF (NC2). Mas AB também é igual a DC (I.34). Portanto, os dois lados EA e AB são iguais aos dois lados FD e DC respectivamente, e o ângulo \widehat{FDC} é igual ao ângulo \widehat{EAB} (I.29). Portanto, a base EB é igual à base FC e, conseqüentemente, o $\triangle EAB$ é igual ao $\triangle FDC$ (I.4). Subtraindo o $\triangle GDE$ de cada um, temos que o trapézio ABGD permanece igual ao trapézio EGCF (NC3). Por fim, adicionando o $\triangle GBC$ a cada um, podemos concluir que todo o paralelogramo ABCD é igual a todo o paralelogramo EBCF (NC2). Portanto, paralelogramos que estão na mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si. **C.Q.D.**

Nos Elementos, praticamente em todas as demonstrações Euclides terminava com a célebre frase: “Como queríamos demonstrar”¹.

LIVRO I - Proposição 37: “Os triângulos, que estão postos sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais”.

¹ Essa frase foi utilizada, até o século XX, na versão latina: *Quod Eratum Demonstrandum (QED)*, quando o matemático Paul Richard Halmos (1916-2006) popularizou os símbolos \square e \blacksquare .

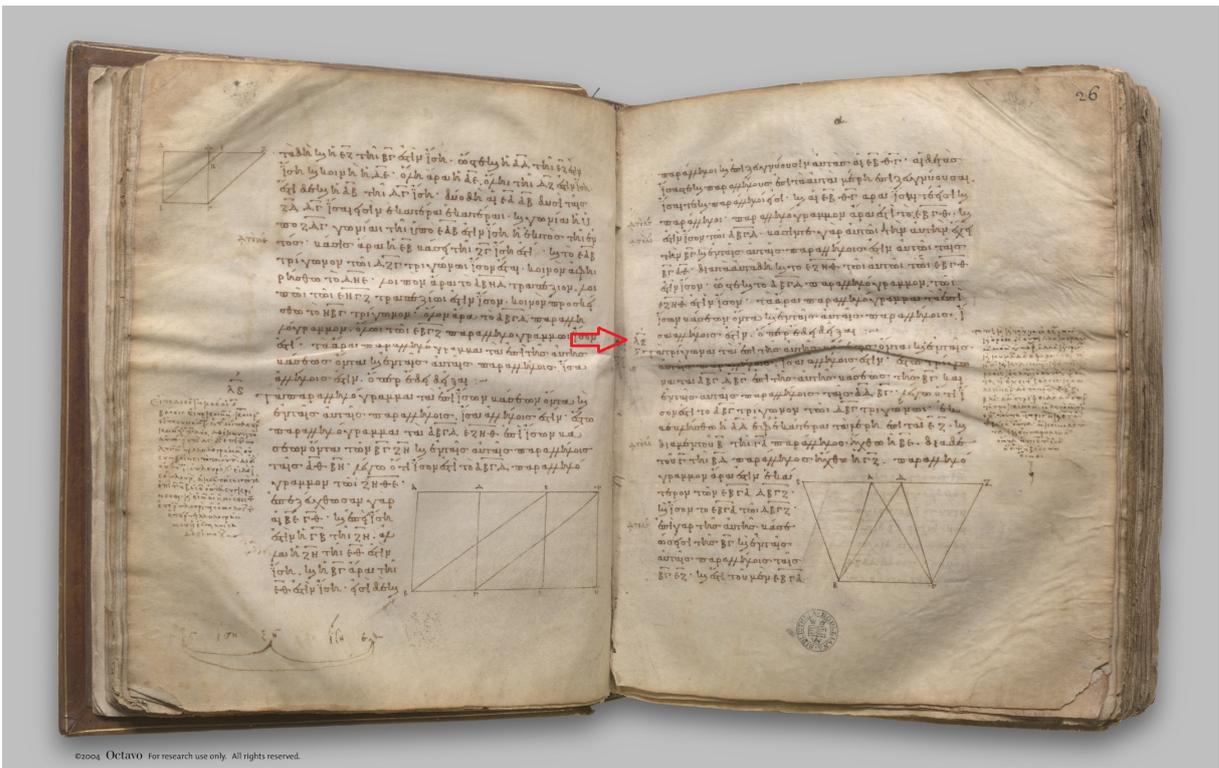


Figura 16: LIVRO I - Proposição 37 do manuscrito residente na Biblioteca Bodleiana, (Universidade de Oxford) datado de 888 d.C. [14].

Resolução da Proposição 37 - LIVRO I: “Sejam ABC e DBC triângulos na mesma base BC e nas mesmas paralelas AD e BC. Eu digo que o triângulo ABC é igual ao triângulo DBC”.

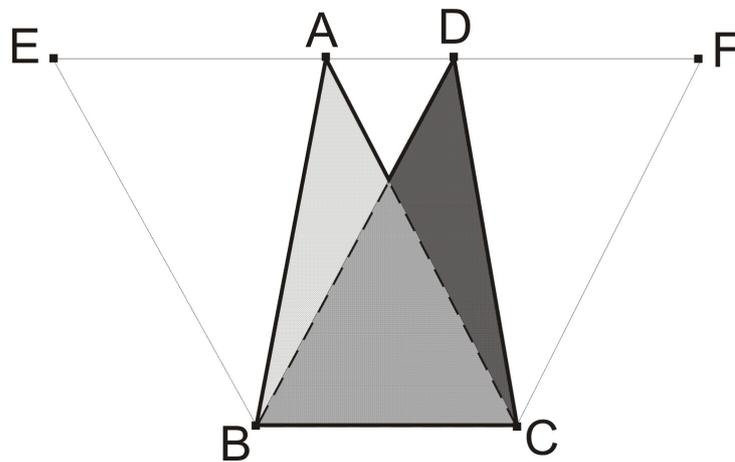


Figura 17: Ilustração da resolução da Proposição 37 - LIVRO I.

Prolongue AD em ambas as direções para E e F (I.POST2). Em seguida, trace o segmento BE por meio de B paralelo a CA e o segmento CF por meio de C paralelamente a BD (I.31). Logo, cada uma das figuras EBCA e DBCF é um paralelogramo, e elas são iguais, pois elas estão na mesma base BC e nas mesmas paralelas BC e EF (conforme demonstrado anteriormente (I.35)). Além disso, o $\triangle ABC$ é metade do paralelogramo EBCA, devido ao diâmetro (diagonal) AB que o divide. E, pelo mesmo motivo, o $\triangle DBC$ é metade do paralelogramo DBCF (I.34). Portanto, o $\triangle ABC$ é igual ao $\triangle DBC$ (NC). Logo,

os triângulos que estão na mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si. **C.Q.D.**

LIVRO I - Proposição 41: “Se um paralelogramo e um triângulo estiverem sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas; o paralelogramo será o dobro do triângulo”.

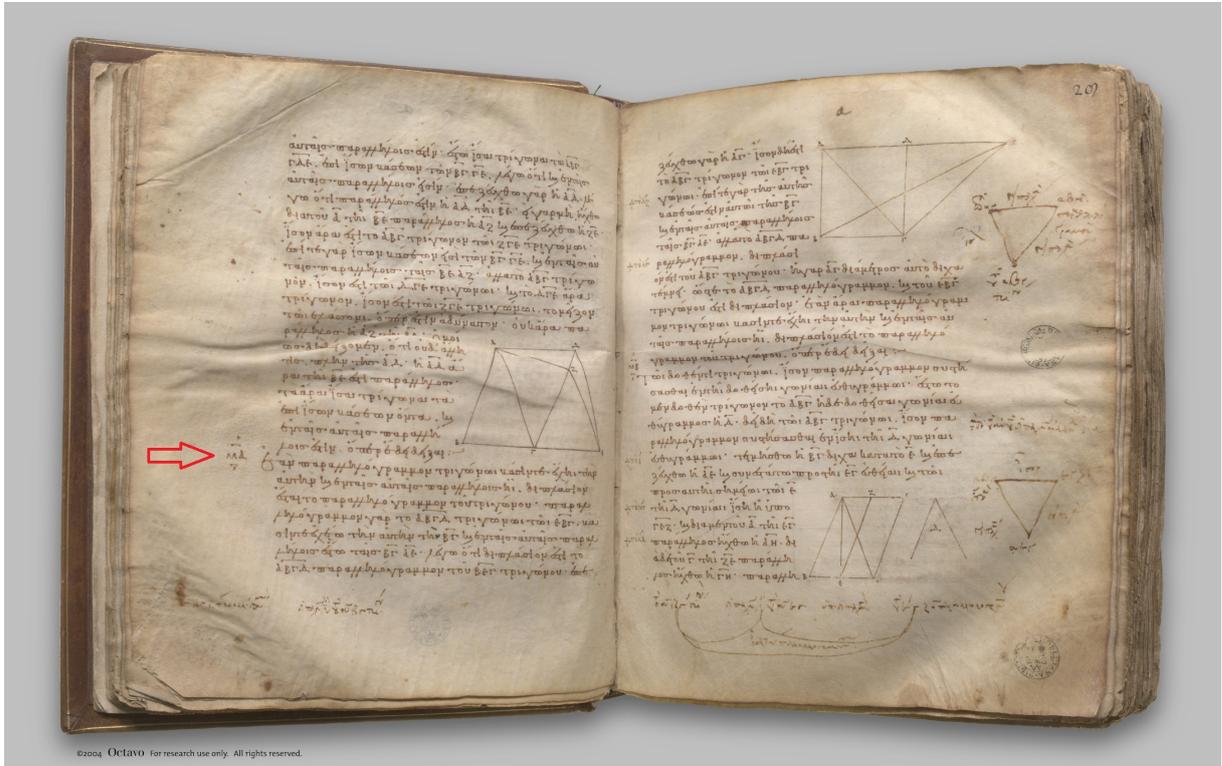


Figura 18: LIVRO I - Proposição 41 do manuscrito residente na Biblioteca Bodleiana, (Universidade de Oxford) datado de 888 d.C.[14].

Resolução da Proposição 41 - LIVRO I: “Deixe o paralelogramo ABCD ter a mesma base BC com o triângulo EBC, e deixe-o nas mesmas paralelas BC e AE. Eu digo que o paralelogramo ABCD é o dobro do triângulo BEC”.

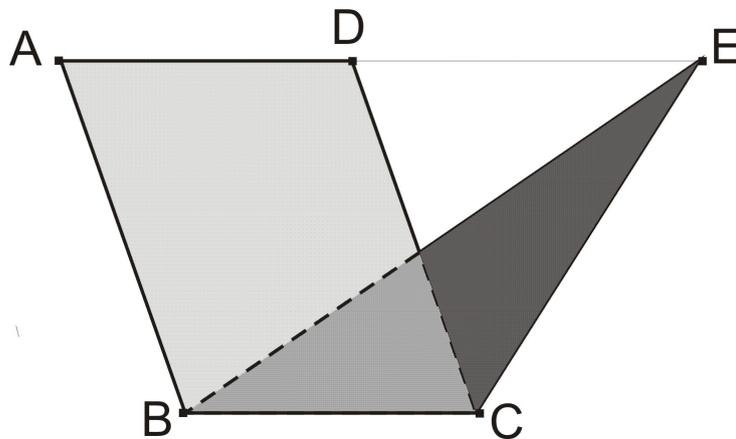


Figura 19: Ilustração da resolução da Proposição 41 - LIVRO I.

Junte A a C (diagonal do paralelogramo) (IPOST1). Então o $\triangle ABC$ é igual ao $\triangle EBC$, pois está na mesma base BC com ele e nas mesmas paralelas BC e AE. (conforme

demonstrado anteriormente (I.37)). Mas o paralelogramo ABCD é o dobro do $\triangle ABC$, devido ao diâmetro AC que o divide (I.34). Logo, temos que o paralelogramo ABCD é também o dobro do $\triangle EBC$. Portanto, se um paralelogramo tiver a mesma base com um triângulo e estiver nas mesmas paralelas, o paralelogramo será o dobro do triângulo. **C.Q.D.**

LIVRO II - Proposição 2: “Se uma linha reta é cortada aleatoriamente, então a soma dos retângulos contidos pelo todo e cada um dos segmentos é igual ao quadrado como um todo”.

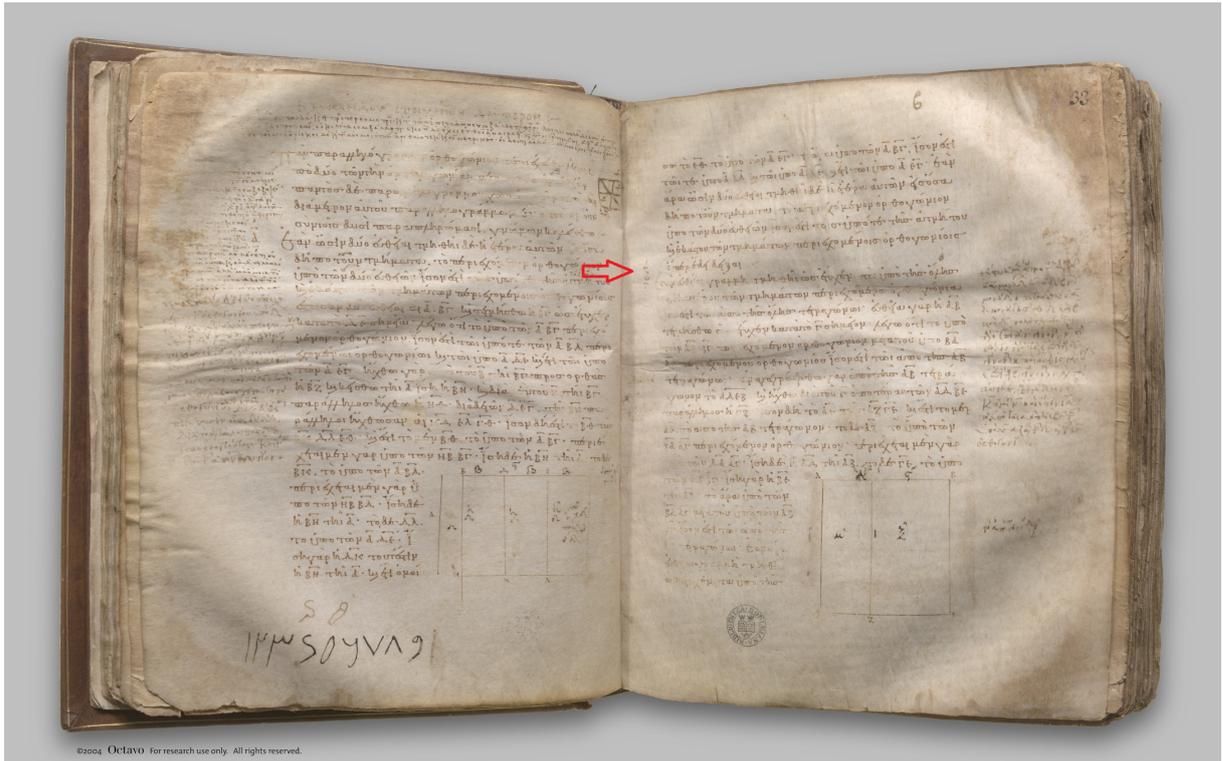


Figura 20: LIVRO II - Proposição 2 do manuscrito residente na Biblioteca Bodleiana, (Universidade de Oxford) datado de 888 d.C.[14].

Resolução da Proposição 2 - LIVRO II: “Deixe a linha reta AB ser cortada aleatoriamente no ponto C. Eu digo que a soma do retângulo BA por AC e o retângulo AB por BC é igual ao quadrado em AB”.

Construa o quadrado ADEB em AB (I.46) e desenhe, a partir do ponto C, um segmento em paralelo a AD ou BE (I.31), até encontrar DE no ponto F. Então, temos que o quadrado de diâmetro (diagonal) AE é igual a soma dos retângulos de diâmetros AF e CE. De sorte que o retângulo de diâmetro AF é o próprio retângulo BA por AC, pois está contido por DA e AC, com AD igual a AB, e também que o retângulo de diâmetro CE é o próprio retângulo AB por BC, pois está contido por EB e BC, com BE igual a AB (II.DEF1). Logo, podemos concluir que a soma do retângulo BA por AC e o retângulo AB por BC é igual ao quadrado em AB. Portanto, se uma linha reta é cortada aleatoria-

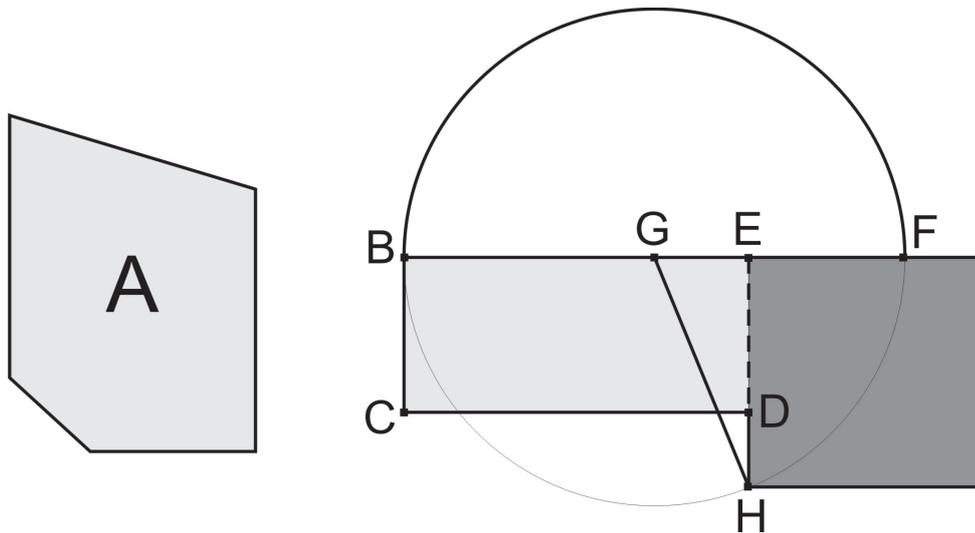


Figura 23: Ilustração da resolução da Proposição 14 - LIVRO II.

Construa o paralelogramo retangular de diâmetro BD igual à figura retilínea A (I.45). Então, se BE é igual a ED , então o que foi proposto é feito, pois um quadrado foi construído igual a figura retilínea A . Mas, se não, uma das linhas retas BE ou ED é maior. Sendo BE o segmento maior, prolongue-o para F (I.3), de modo que EF seja igual a ED . Divida ao meio BF em G (I.10). Descreva o semicírculo BHF com o centro G e o raio de uma das linhas retas GB ou GF (I.DEF18). Prolongue DE até o semicírculo obtendo H e junte G a H . Então, desde que a linha reta BF foi cortada em segmentos iguais em G e em segmentos desiguais em E , o retângulo BE por EF junto com o quadrado em EG é igual ao quadrado em GF (II.5). Mas GF é igual a GH , portanto o retângulo BE por EF junto com o quadrado em GE é igual ao quadrado em GH . Mas a soma dos quadrados em HE e EG é igual ao quadrado em GH (I.47 - Teorema de Pitágoras), portanto o retângulo BE por EF junto com o quadrado em GE é igual à soma dos quadrados em HE e EG . Subtraindo o quadrado da GE de cada um, temos que o retângulo restante BE por EF é igual ao quadrado em EH . De sorte que o retângulo de diâmetro BD é o próprio retângulo BE por EF , pois EF é igual a ED , portanto o paralelogramo de diâmetro BD é igual ao quadrado em EH e, conseqüentemente, é igual a figura retilínea A . Portanto, a figura retilínea A também é igual ao quadrado que pode ser descrito em EH . Logo, concluímos que o quadrado, aquele descrito em EH , foi construído igual à dada figura retilínea A . **C.Q.D.**

ARQUIMEDES E O CÁLCULO DE ÁREAS

Neste capítulo descreveremos alguns fatos a respeito da vida de Arquimedes e sobre suas contribuições para o cálculo de áreas.

3.1 A VIDA

Arquimedes é um dos maiores matemáticos de todos os tempos e, sem dúvida alguma, o maior da antiguidade, considerado o maior gênio criativo do mundo antigo.



Figura 24: Suposta imagem de Arquimedes de Siracusa^[31].

Pouco se sabe sobre o início da vida de Arquimedes. Estima-se que tenha nascido na cidade de Siracusa, na ilha da Sicília, por volta de 287 a.C. Filho do astrônomo e matemático Phidias, que costumava reunir em sua casa a elite de filósofos e homens da ciência, Arquimedes teria desde cedo desenvolvido uma curiosidade natural pelas estrelas, pelos planetas, pelas ciências e por outras maravilhas do universo e teria também demonstrado uma enorme propensão à solução de problemas.

Arquimedes teria iniciado seus estudos em sua cidade natal e após absorver uma gama de conhecimentos, foi encaminhado por seu pai para cidade de Alexandria, na época conhecida como o centro intelectual do mundo, onde daria continuidade em seus estudos e ganharia uma reputação de grande aprendizado e erudição.

Devido aos seus estudos em Alexandria, era de se esperar, que os trabalho de Euclides tivesse uma influência marcante em suas obras, mas isso não ocorreu. Arquimedes não se encaixava nos padrões euclidianos, pois utilizava em suas demonstrações o método de neusis¹, o qual admitia construção com régua graduada e métodos mecânicos de constru-

¹ Em uma construção por neusis deve-se ajustar um segmento dado entre duas curvas dadas, com a exigência de que o segmento passe por um ponto dado.

ção, como o caso de suas espirais. Logo, não pode ser considerado como um sucessor de Euclides.

Arquimedes teve contato com o que havia de mais avançado na ciência do seu tempo, estudando com os discípulos do renomado matemático Euclides e convivendo com grandes matemáticos e astrônomos, entre os quais estariam Conon de Samos que estudou eclipses e descobriu as constelações Coma Berenices e Eratóstenes de Cirene, o matemático que calculou com precisão a circunferência da Terra usando a extensão das sombras projetadas no solstício de verão, com o qual estabeleceu uma amizade ao longo da vida e frequentemente escreviam cartas uns com os outros, mesmo depois que este retornou a Siracusa.

Tendo completado seus estudos, Arquimedes retornou a Siracusa, onde passou o resto de sua vida. Não muito tempo após seu retorno, Arquimedes teria começado a trabalhar para a realeza, a convite de seu amigo de infância, o rei Hieron, onde dedicou sua vida aos seus pensamentos e invenções.

Ele desempenhou um papel fundamental na defesa de Siracusa, contendo as investidas do exército romano, durante as Guerras Púnicas, através do fortalecimento das muralhas e invenções de máquinas de guerra. Após anos, Siracusa finalmente caiu para o famoso general romano Marcus Claudius Marcellus, o qual tinha grande respeito e admiração por Arquimedes, enviando imediatamente soldados para capturá-lo, orientando-os que preservassem sua vida, mas, segundo a versão mais aceita sobre a morte de Arquimedes, um soldado romano ao encontrá-lo e ordenou que se apresentasse perante ao general, mas ele se recusou, pois contemplava um diagrama matemático e proferiu a famosa frase: “não perturbe meus círculos”. O soldado ficou furioso com isso e atravessou seu corpo com uma espada. Segundo Severino de Souza (1986^[43]), Arquimedes morreu em 212 a.C. com aproximadamente 75 anos.

Além de suas invenções, tais como o parafuso de Arquimedes (utilizado para bombear água) e catapultas com grande poder de destruição, e dos fatos descritos anteriormente, Arquimedes, através de suas obras, deixou um legado que influenciou a evolução histórica tanto da Matemática quanto da Física, estabelecendo uma profunda relação entre Matemática e Mecânica. Entre os principais trabalhos e obras se destacam:

- **Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas I e II.**

Esses dois tratados trazem os famosos estudos de Arquimedes sobre o princípio das alavancas e os cálculos dos centros de gravidade de várias figuras do plano retilíneo e segmentos da parábola e do parabolóide estão contidos nesta obra.

- **A Quadratura da Parábola.**

Arquimedes demonstra nessa sua obra, utilizando o método da exaustão, que área delimitada por uma parábola e uma linha reta é $4/3$ da área do triângulo inscrito correspondente.

- **Sobre a Esfera e o Cilindro.**

Nesse trabalho é calculado o volume de uma esfera através de uma relação entre uma esfera e um cilindro circunscrito, de mesma altura e diâmetro. Acreditasse que Arquimedes tenha ficado tão orgulhoso desse feito que teria deixado instruções para que seu túmulo fosse marcado com uma esfera inscrita em um cilindro.

- **Sobre as Espirais.**

Nessa obra é definida a espiral como o lugar dos pontos que se movem uniformemente em uma semirreta, enquanto a semirreta tem um movimento de rotação uniforme em torno de sua origem. São desenvolvidas também muitas propriedades de tangentes e áreas associadas à espiral de Arquimedes.

- **Sobre os Cones e os Esferóides.**

Nesse tratado, Arquimedes determina os volumes dos segmentos de sólidos formados pela revolução de uma seção cônica (círculo, elipse, parábola ou hipérbole) em torno de seu eixo.

- **Sobre os Corpos Flutuantes.**

Nesses livros, Arquimedes enuncia a lei dos fluídos em equilíbrio, através do princípio da flutuabilidade, com o seguinte enunciado:

“Qualquer corpo total ou parcialmente imerso em um fluído experimenta uma força para cima igual, mas em sentido oposto, ao peso do fluído deslocado”

e calcula as posições de equilíbrio de seções de parabolóides.

- **A Medida de um Círculo.**

Obra na qual Arquimedes obteve um valor aproximado para a constante π (símbolo adotado por Leonhard Euler em 1748) inscrevendo e circunscrevendo polígonos regulares com um grande número de lados e utilizando o método da exaustão.

Muitas histórias fantasiosas surgiram sobre Arquimedes, como aquela que ao resolver o problema da coroa do Rei Hieron enquanto se banhava saiu correndo sem roupa pela cidade, gritando “Eureka! Eureka!” (“Encontrei! Encontrei!”) e também aquela na qual tendo descoberto o princípio da alavanca proferiu a seguinte frase: “Dêem-me uma alavanca e um ponto de apoio e eu moverei o mundo”. Seu prestígio era tão grande, que lhe atribuíam improváveis façanhas, como a de ter montado um jogo de espelhos parabólicos capaz de convergir raios de sol e atear fogo aos navios inimigos.

Devido a originalidade e ao rigor na escrita matemática e demonstrações, apresentadas por intermédio de uma linguagem altamente acabada, técnica e objetiva, muito superior a qualquer outra usada em sua época, os trabalhos de Arquimedes são grandes obras primas de exposição matemática. Exploraremos agora um pouco das contribuições de Arquimedes

ao cálculo de áreas, mais especificamente, o método da exaustão, a quadratura da parábola e a medida do círculo, que representam praticamente o desenvolvimento inicial de alguns dos métodos do Cálculo Integral.

3.2 CONTRIBUIÇÕES DE ARQUIMEDES PARA O CÁLCULO DE ÁREAS

3.2.1 Método da exaustão

A ideia de calcular medidas de figuras, definidas por curvas, usando polígonos inscritos com um grande número de lados já existia, mas, segundo Arquimedes, foi Eudoxo através de um axioma, hoje conhecido como propriedade de Arquimedes, que eliminou um nebuloso argumento sobre segmentos de reta indivisíveis, ou infinitésimos fixos, que às vezes surgiam em meio as demonstrações, trazendo assim ferramentas técnicas para executar esse tipo de procedimento de maneira rigorosa, sendo criado o método da exaustão.

O axioma de Eudoxo (propriedade de Arquimedes) diz o seguinte:

“Dadas duas grandezas que têm uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer uma delas que seja maior que a outra”.

Utilizando a escrita matemática atual, segue a demonstração através da redução ao absurdo.

Demonstração: Dados dois números reais positivos a e b existe um número natural n tal que $na > b \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{a}{b}$. Conhecendo $\frac{a}{b}$ existem três possibilidades para uma fração $\frac{1}{n}$. Se $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$ nada mais tem a ser feito. Se $\frac{1}{n} = \frac{a}{b}$, então existe um natural $n + 1$ tal que $\frac{1}{n+1} < \frac{a}{b}$.

Agora, suponhamos por absurdo, que $\frac{1}{n} > \frac{a}{b}$ para todo n pertencente aos naturais. Logo, temos que $n < \frac{b}{a}$, ou seja, existe uma fração $\frac{b}{a}$ maior que qualquer número natural e, conseqüentemente, pode-se concluir que o conjunto dos números naturais (\mathbb{N}) é limitado, o que é um absurdo.

Portanto, dados dois números reais positivos a e b existe um número natural n tal que $na > b \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{a}{b}$.

Creditada sua autoria ao matemático Eudoxo de Cnidus (c. 408-355 a.C.) e aprimorado por Arquimedes, o chamado de método de exaustão tornou-se uma ferramenta essencial para se determinar áreas e volumes de figuras geométricas.

O método de exaustão consiste na aproximação da área de uma região curva por meio da inscrição de um polígono com área conhecida e a multiplicação do número de lados desse polígono até que a sua área seja a mais próxima possível da área da região curvilínea, ou seja, fazendo que diferença entre a área da curva e a do polígono inscrito seja tão pequena o quanto desejarmos.

A proposição que formava a base de método de exaustão dos gregos encontra-se no livro *X* dos Elementos de Euclides com o seguinte enunciado:

“Duas grandezas desiguais são estabelecidas, se da maior é subtraída uma magnitude maior que a sua metade, e daquela que é deixada uma magnitude maior que sua metade, e se este processo é repetido continuamente, então haverá alguma magnitude a menos do que a menor magnitude estabelecida. E o teorema pode ser comprovado da mesma forma, mesmo que as partes subtraídas sejam metades”.

A demonstração dessa proposição, baseada nos trabalhos de Joyce (1996-1997^[19]) e Roque (2012^[27]), será realizada nos mesmo moldes dos Elementos de Euclides, ou seja, geometricamente, através da comparação entre segmentos de reta.

Demonstração: Sejam AB e C dois segmentos desiguais das quais AB é o maior. Existe DE , múltiplo de C , de modo a ser maior que AB .

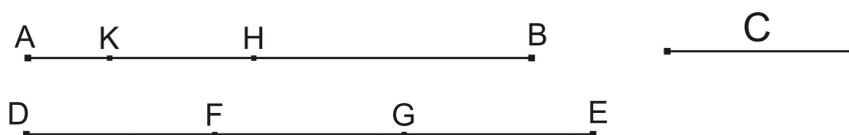


Figura 25: Ilustração da proposição base para o método da exaustão.

Divida DE nas partes DF , FG , e GE igual a C . De AB subtraia BH maior que sua metade, e de AH subtraia HK maior que sua metade, e repita este processo continuamente até que o número de divisões em AB esteja em igual quantidade as divisões em DE .

Agora, desde que DE é maior que AB , e de DE foi subtraído EG menos que sua metade, e, de AB , BH maior que sua metade, portanto, o restante GD é maior que o restante HA . E, como GD é maior que HA , subtraiu-se de GD metade GF , e de HA , HK maior que sua metade, portanto o restante DF é maior que o restante AK . Mas DF é igual a C , portanto C também é maior que AK . Portanto AK é inferior a C .

Portanto, não é deixado da magnitude AB a magnitude AK que é menor do que a menor magnitude definida, ou seja C .

Após essa breve explanação a respeito do método da exaustão, mostraremos a seguir dois importantes trabalhos de Arquimedes nos quais foram utilizados o referido método. São eles: A quadratura da parábola e a medida do círculo.

3.2.2 A quadratura da parábola

Esse famoso problema consistia basicamente na comparação entre uma secção de um cone circular reto (parábola) e um polígono de área conhecida, através do processo conhecido como quadratura, com o intuito da obtenção de sua área. Segundo Boyer (1974^[11]), as secções cônicas eram conhecidas havia já mais de um século quando Arquimedes escreveu, mas nenhum processo fôra feito no cálculo de suas áreas. Cabendo ao maior matemático da antiguidade (Arquimedes) o feito de quadrar uma secção cônica, coisa que ele realizou na Proposição 17 da obra em que o objetivo era a quadratura.

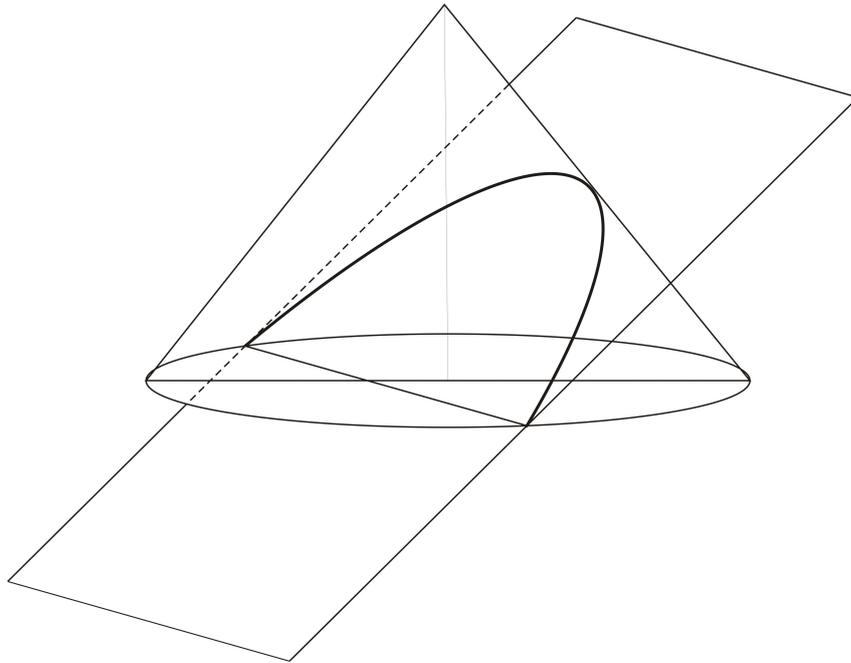


Figura 26: Ilustração da definição de parábola.

Nesse trabalho, Arquimedes demonstra que a área delimitada por uma parábola e uma linha reta é $\frac{4}{3}$ da área de um triângulo com a mesma base e a mesma altura. Para isso, ele utilizou três proposições já demonstradas na obra sobre cônicas de Euclides, o método da exaustão e, por fim, uma dupla prova pela redução ao absurdo.

As três proposições utilizadas por Arquimedes foram:

- **Proposição 1:** Seja P um ponto sobre a parábola. Por esse ponto é traçada uma reta PV (paralela ou coincidente ao eixo dessa parábola). Se uma corda Qq (paralela à reta tangente à parábola que passa por P) corta essa reta em V , então: $QV = Vq$. Reciprocamente, se $QV = Vq$, temos que a corda Qq é paralela à tangente que passa por P .

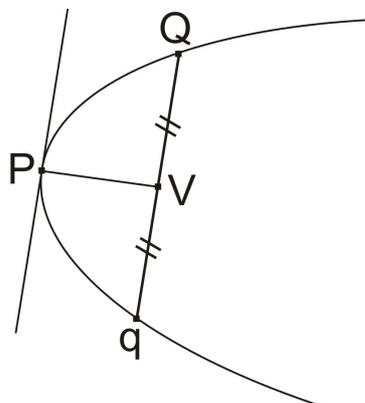


Figura 27: Ilustração da Proposição 1.

- **Proposição 2:** Seja P um ponto sobre a parábola e PV uma reta paralela ou coincidente ao eixo dessa parábola. Se essa reta é cortada em V por uma corda Qq (paralela a reta tangente à parábola que passa por P) e é cortada em T pela tangente à parábola que passa por Q, então $PV=PT$.

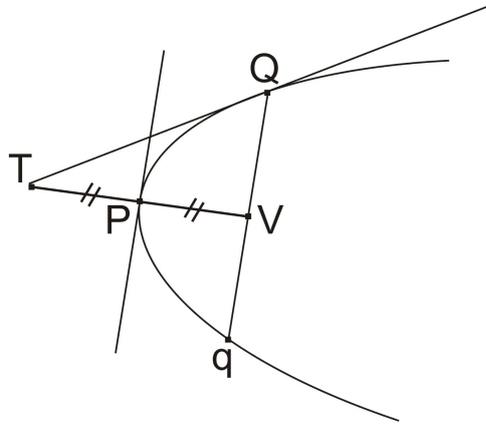


Figura 28: Ilustração da Proposição 2.

- **Proposição 3:** Sejam P, Q e R pontos sobre a parábola e PV uma reta paralela ou coincidente ao eixo dessa parábola. Se essa reta é cortada em V por uma corda Qq e em W pela corda Rr, onde essas cordas são paralelas à reta tangente à parábola que passa por P, então é válida a relação $PV : PW :: (QV)^2 : (RW)^2$.

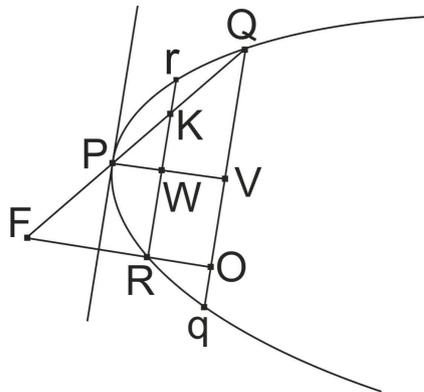


Figura 29: Ilustração da Proposição 3.

Passaremos agora para as demonstrações² das proposições essenciais para a quadratura da parábola as quais serão enumeradas sequencialmente e não conforme contidas no livro de Arquimedes. Para essas demonstrações serão considerados PV como um segmento sobre eixo da parábola, e Qq como sendo uma corda paralela à tangente à parábola por P.

²Demonstrações baseadas nos trabalhos de Silva (2017^[28]), de Pitombeira e Roque (2012^[25]) e de Mohnsam (2014^[23])

- **Proposição 4:** Sejam P o vértice e Q um ponto qualquer sobre a parábola e R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a PQ, e seja M o ponto em que a paralela ao eixo da parábola por R corta Qq, paralela à tangente em P. Então, $PV = \left(\frac{4}{3}\right)RM$.

Demonstração: Seja R um ponto sobre a parábola. Traçaremos por R uma reta paralela a PV que corta Qq em M. Seja Y o ponto de interseção de PQ e RM. Como RM é paralela ao eixo PV a Proposição 1 nos garante que Y é ponto médio de PQ. Como Y é ponto médio de PQ e pelo fato dos triângulos PQV e YQM serem semelhantes, por possuírem dois ângulos congruentes, podemos concluir que M é ponto médio de QV. Logo, $QV = 2MV$.

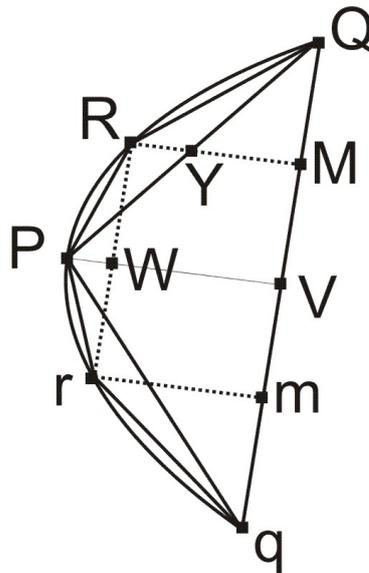


Figura 30: Ilustração da Proposição 4.

Agora, se por R traçarmos uma reta paralela a Qq que corta PV em W, temos, pela Proposição 3, que:

$$\frac{PV}{PW} = \frac{(QV)^2}{(RW)^2}$$

De acordo com as construções realizadas observamos a formação do paralelogramo RMVW e podemos concluir que $RW=MV$ e $WV=RM$. Compilando todas essas informações obtemos:

$$\frac{PV}{PW} = \frac{(QV)^2}{(RW)^2} = \frac{(2MV)^2}{(MV)^2} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow PW = \left(\frac{1}{4}\right)PV.$$

E assim, temos:

$$\begin{aligned} PV &= PW + WV \\ PV &= \left(\frac{1}{4}\right)PV + RM \\ PV - \left(\frac{1}{4}\right)PV &= RM \\ \left(\frac{3}{4}\right)PV &= RM \\ PV &= \left(\frac{4}{3}\right)RM. \end{aligned}$$

- **Proposição 5:** Sejam Qq a base e P o vértice de um segmento parabólico PQq . Seja R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a PQ . Então: $\triangle PQq = 8\triangle PRQ$.

Demonstração: Utilizando a construção da proposição anterior, notemos, inicialmente que o $\triangle QRY$ e o $\triangle PRY$ são iguais (apresentam a mesma área), pois possuem a mesma base (RY) e alturas de mesma medida (QM e MV , respectivamente). Traçando por Y uma reta paralela a Qq , que corta PV em Y' , podemos observar que o triângulo QPQ pode ser decomposto em quatro triângulos QYM , ou seja, $\triangle QPV = 4\triangle QYM$.

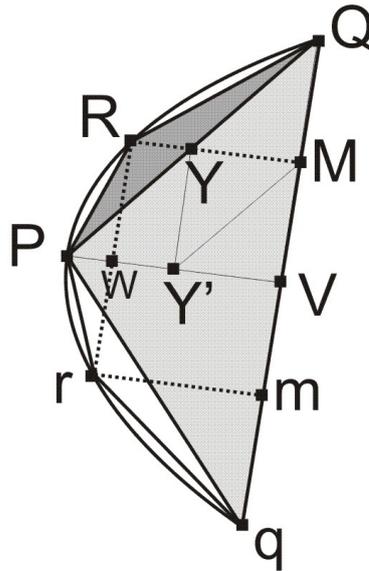


Figura 31: Ilustração da Proposição 5.

Como $RM = \left(\frac{3}{4}\right)PV$ (Proposição 4) e $2YM = PV$ (semelhança entre $\triangle QPV$ e $\triangle QYM$), podemos concluir que:

$$RY = RM - YM = \left(\frac{3}{4}\right)PV - YM = \left(\frac{3}{2}\right)YM - YM = \left(\frac{1}{2}\right)YM.$$

Considerando que a base do $\triangle QRY$ é metade da base do $\triangle QYM$ e que possuem a mesma altura (QM) temos que a área do $\triangle QYM = 2\triangle QRY$. De acordo com as informações acima podemos concluir que:

$$\triangle QPV = 4\triangle QYM = 4(2\triangle QRY) = 4(\triangle PRQ).$$

E como PV divide o $\triangle PQq$ em outros dois de mesma área ($\triangle QPV$ e $\triangle PqV$), chegamos ao resultado esperado:

$$\triangle PQq = 8\triangle PRQ.$$

Cabe observar ainda que a relação $\triangle PQq = 8\triangle Prq$ pode ser obtida de maneira análoga.

Mostremos agora como Arquimedes efetua a quadratura da parábola, usando o método da exaustão.

Como $\triangle PQq = 8\triangle PRQ = 8\triangle Prq$ temos que:

$$\triangle PRQ + \triangle Prq = \frac{\triangle PQq}{8} + \frac{\triangle PQq}{8} = \frac{\triangle PQq}{4}.$$

Repetindo o mesmo processo de construir triângulos na diferença entre a parábola e o polígono podemos obter que o $\triangle RR'Q + \triangle PR''R = \frac{\triangle PRQ}{4}$. Da mesma forma obtemos que $\triangle Pr'r + \triangle rr''q = \frac{\triangle Prq}{4}$. Logo, temos que:

$$\triangle RR'Q + \triangle PR''R + \triangle Pr'r + \triangle rr''q = \frac{\triangle PQq}{4^2}.$$

Continuando “indefinidamente” com este processo obteremos triângulos, cada vez menores, cuja soma de suas áreas sejam $\frac{\triangle PQq}{4^3}$, $\frac{\triangle PQq}{4^4}$, e assim por diante, “exaurindo” assim a figura da parábola. Chegando-se à conclusão de que a área do segmento parabólico será a soma das áreas de todos estes triângulos.

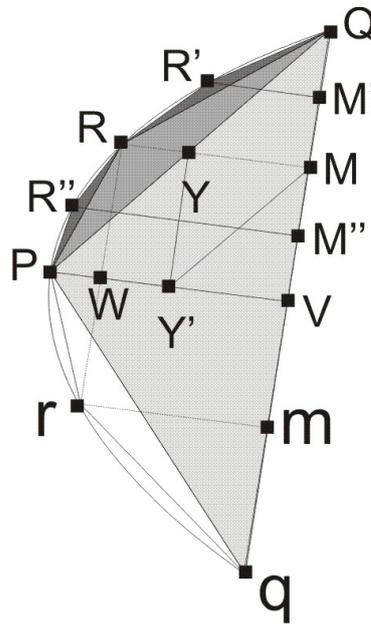


Figura 32: Ilustração do processo da exaustão.

Afim de não trabalhar com a soma de uma série infinita, pois processos infinitos eram mal vistos na época, Arquimedes calculou essa soma utilizando como ferramenta a seguinte proposição:

- **Proposição 6:** Dada uma sucessão finita de áreas, A, B, C, D, \dots, Z , das quais A é a maior, e cada uma das outras é quatro vezes sua sucessora, então,

$$A + B + C + D + \dots + Z + \left(\frac{1}{3}\right) Z = \left(\frac{4}{3}\right) Z.$$

Arquimedes aplica este resultado aos triângulos obtidos sucessivamente a partir do $\triangle PQq$, obtendo o seguinte resultado.

$$\triangle PQq + \frac{1}{4}\triangle PQq + \frac{1}{4^2}\triangle PQq + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\triangle PQq + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4^{n-1}}\triangle PQq = \left(\frac{4}{3}\right)\triangle PQq.$$

Com esse resultado em mãos, Arquimedes enuncia a seguinte na proposição:

- **Proposição 7:** Qualquer região limitada por uma parábola e uma corda Qq é igual a quatro terços do triângulo que tem base Qq e mesma altura dessa região.

Finalmente, Arquimedes provou por uma dupla redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*) que a área desse região parabólica não pode ser nem maior nem menor que $4/3$ da área do triângulo que tem a mesma base e mesma altura dessa região. Encerrando assim a demonstração da quadratura da parábola.

3.2.3 A medida do círculo

Em seu tratado sobre a medida do círculo, Arquimedes prova, utilizando o método da exaustão, que a área de um círculo de raio r é igual a de um triângulo cuja base é igual ao comprimento da circunferência do círculo e a altura é r . Mas essa demonstração não é considerada surpreendente, considerando que a quadratura do círculo já havia sido realizada por outros matemáticos.

O fato que realmente surpreendeu foi habilidade demonstrada por Arquimedes ao avaliar a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo. Onde, conhecendo que o perímetro de um círculo situa-se entre os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos com o mesmo número lados, e à medida que o número de lados aumenta, a diferença entre o perímetro do círculo e os outros dois perímetros torna-se cada vez menor, Arquimedes toma um círculo de diâmetro unitário e sobre ele inscreve e circunscribe polígono regulares, começando com um hexágono e dobrando progressivamente o número de lados até chegar a um polígono de 96 lados.

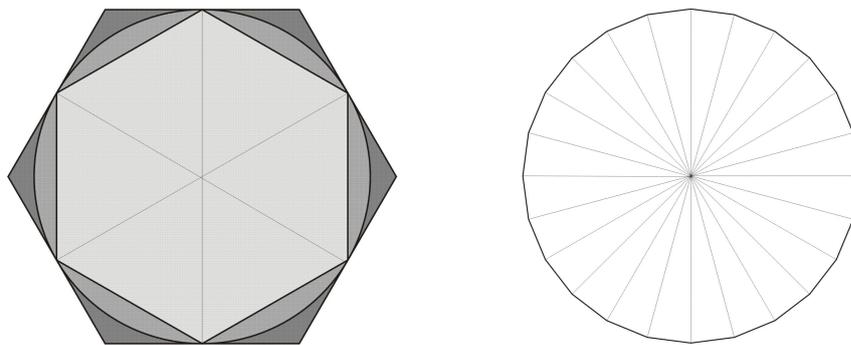


Figura 33: Ilustração da inscrição e circunscrição de hexágonos regulares e um polígono regular de 24 lados.

A primeira tentativa científica de calcular o valor de uma constante dos círculos (π) parece ter sido a de Arquimedes. E para a realização de tal feito, Arquimedes, primeiramente, calculou os perímetros dos polígonos regulares, acredita-se que através das seguintes fórmulas

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n} \text{ e } p_{2n} = (p_n P_{2n})^{\frac{1}{2}},$$

onde p_n e P_n representam, respectivamente, os perímetros dos polígonos regulares de n lados inscrito e circunscrito ao mesmo círculo. E, posteriormente, verificou que comprimento do círculo C , quando relacionado ao seu diâmetro d , estaria entre dois valores, obtendo a surpreendente relação:

$$3\frac{10}{71}d < C < 3\frac{10}{70}d, \text{ ou seja, } 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}, \text{ ou ainda, } 3,1408 < \pi < 3,1429.$$

Arquimedes através de conceitos inovadores revolucionou a forma de calcular e talvez a mais notável das contribuições feitas à Matemática por esse gênio se traduz no desenvolvimento inicial de alguns dos métodos do Cálculo Integral. Assunto que será retomado na Seção 2 do próximo capítulo.

A REVOLUÇÃO NO CÁLCULO DE ÁREAS

Neste capítulo descreveremos, baseados nos trabalhos de Bassalo^{[2][3][4][5][6][7]}, Bardi^[1], Boyer^[12] e Eves^[17], duas descobertas que revolucionaram a Matemática, em especial, no tocante ao cálculo de áreas. São elas: A Geometria Analítica e o Cálculo Integral.

4.1 O SURGIMENTO DE UMA NOVA GEOMETRIA

A Matemática sofrera no século XVII transformações muito importantes, em particular na Geometria, através de sua fusão com métodos algébricos e infinitesimais.

O centro dessas mudanças estão relacionadas com dois nomes: René Descartes (1596-1650) e de Pierre de Fermat (1601-1665), pois ambos estabeleceram, na mesma época e de modo independente, técnicas semelhantes para tratar problemas de lugares geométricos de modo algébrico.



(a) Pierre de Fermat



(b) René Descartes

Figura 34: Os criadores da Geometria Analítica^{[38][40]}.

Fermat e Descartes, influenciados pelas obras do matemático francês François Viète (1540 - 1603), começaram a aplicar a arte analítica ao estudo das curvas.

Em 1629, Fermat anunciou e enviou ao teólogo, filósofo natural e matemático francês Marin Mersenne sua *Introduction des lieux plans et solides* (Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos). Nesse trabalho não publicado, ele demonstra equações gerais da reta, circunferência, e equações mais simples para parábolas, elipses e hipérbolas, além de enunciar o que hoje conhecemos como o princípio fundamental da Geometria Analítica:

“Sempre que duas grandezas desconhecidas são encontradas na igualdade final, resulta em um lugar fixo, e o ponto final de uma dessas quantidades desconhecidas descreve uma linha reta ou uma curva”.

E, em 1637, Descartes surge, como um apêndice ao seu famoso livro Discurso sobre o método (tratado em que apresentou a base do seu sistema filosófico), com *La Géométrie* (A Geometria), no qual Descartes estabeleceu equivalências entre operações algébricas e construções geométricas, além de introduzir a prática moderna de denotar variáveis por letras do final do alfabeto (x, y, z), parâmetros por letras no início do alfabeto (a, b, c) e de usar a notação exponencial para indicar potências de $x(x^2, x^3, \dots)$.

Pode-se eliminar qualquer suspeita de interdependência entre seus trabalhos, pois suas apresentações eram suficientemente diferentes. Descartes mostrou que, se qualquer curva fosse mecanicamente construtível, poderia derivar sua equação. Por outro lado, Fermat começou com uma equação e depois estabeleceu as propriedades da curva.

Esse tipo de conexão, estabelecida por Fermat e Descartes, entre Álgebra e Geometria foi um grande avanço, e tais técnicas culminaram com a invenção do que chamamos hoje de Geometria Analítica.

A partir de agora, para a continuidade do nosso capítulo, tomaremos como base Descartes e sua obra A Geometria.

Descartes defendia a existência de uma Matemática Universal, onde o método matemático serviria como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos e também que o pensamento não se dedica a compreender todos os tipos de coisas, mas somente aquelas passíveis de serem quantificadas e medidas. Tais ideias filosóficas de Descartes se tornam evidentes na frase de abertura de sua obra A Geometria:

“Todos os problemas em Geometria podem facilmente serem reduzidos a termos tais que basta o conhecimento dos comprimentos de algumas retas para que sejam construídos”.

De acordo com esse pensamento, Descartes diante de um problema geométrico, o convertia em equações que eram em seguida simplificadas por métodos algébricos, para finalmente serem resolvidas geometricamente. Ao traduzir problemas geométricos em linguagem algébrica, ele visava compreender melhor as relações entre as grandezas do problema.

A Geometria, o famoso terceiro apêndice do Discurso sobre o método, ocupa cerca de cem páginas do trabalho completo e se divide em três partes.

- Livro I:

No *Livre Premier* (Primeiro Livro) Descartes faz uma explanação de alguns dos princípios da Geometria Algébrica. Suas construções geométricas são expostas sobre o produto e quociente de dois números, e a raiz quadrada de um número, podendo ser obtidos por meio de régua e bússola (compasso) e ainda são trabalhados a equação

do 2º grau e o problema de Pappus, que muitos acreditam ser o motivador de Descartes para a introdução de um sistema de coordenadas para representar equações indeterminadas (ferramenta fundamental para o plano cartesiano).

- Livro II: Nesse segundo livro é abordado, entre outras coisas, a classificação de algumas curvas (Oval de Descarte), conceito atualmente superado, e um método interessante de construção de tangentes.
- Livro III:

No terceiro e último dos livros de A Geometria, Descartes trata da resolução de equações de grau maior que dois, da raiz cúbica e faz uso do que chamamos agora regra de sinais de Descartes, cuja finalidade é determinar o número máximo de raízes positivas e de raízes negativas de um polinômio, ou seja, estabelecer um limites para o número de raízes. Esse volume é encerrado por Descartes com a seguinte frase:

“Os problemas do mesmo tipo, todos juntos, dei o caminho para reduzi-los a uma infinidade de outros diversos e, assim, resolver cada um deles de uma infinidade de maneiras”.

Seguem algumas demonstrações¹ dos problemas contidos no Livro I sobre a multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada, enumerados de forma sequencial.

Problema sobre multiplicação e divisão: “Seja AB a unidade, e BD deve ser multiplicado por BC, tenho apenas que unir os pontos A e C, então desenhar DE paralelo a CA, e BE é o produto desta multiplicação. Ou se tivermos que dividir BE por BD, juntando os pontos E e D, eu desenho AC paralelo a DE, e BC é o produto dessa divisão.”

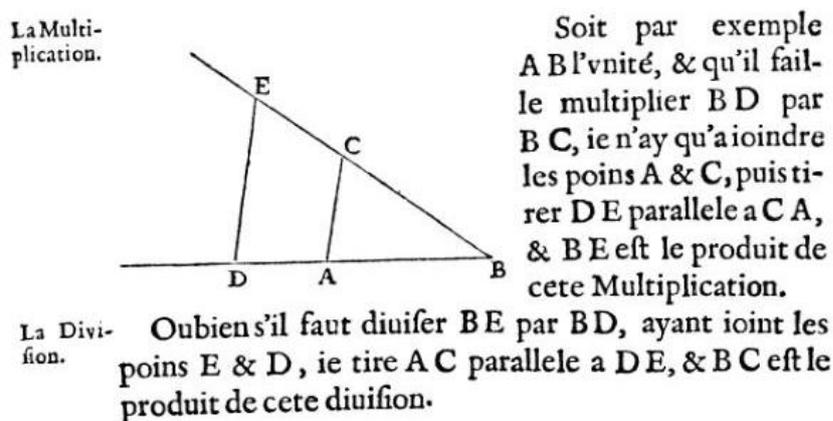


Figura 35: Ilustração do Problema sobre multiplicação e divisão^[32].

Resolução: Descartes começa sua geometria introduzindo a unidade em uma configuração do nosso teorema de Tales. Através da figura ele observa a igualdade entre as

¹ Demonstrações baseadas nos trabalhos de Debart (2001^[32])

razões $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{AB}$ e tomando como unidade $AB = 1$, obtém que $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{1}$ e, conseqüentemente, deduz que o produto é $BC \times BD = BE$. Da mesma forma, as razões $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{AB}$ é $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{1}$, podendo deduzir o quociente $BC = \frac{BE}{BD}$.

De acordo com a resolução nota-se a utilização do produto dos meios e dos extremos, uma vez que as operações foram realizadas com números e não mais com grandezas. Vencendo assim o problema da homogeneidade das grandezas da geometria de tradição euclidiana, que perdurou até a época de Viète, onde o produto de dois segmentos devia ser visto, necessariamente, como um retângulo, ou seja, como uma área.

Problema sobre a extração da raiz quadrada: “Ou se você tiver que desenhar a raiz quadrada de GH , eu adiciono a ela em uma linha reta FG , que é a unidade, e dividindo FH em duas partes iguais no ponto K , do centro K eu desenho o círculo FIH , então traçando a partir do ponto G uma linha reta até I , em ângulos retos em FH , é GI a raiz pesquisada.”

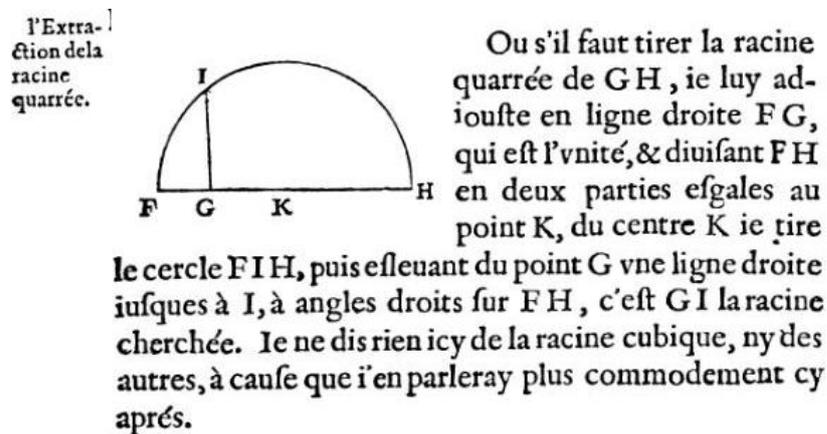


Figura 36: Ilustração do Problema sobre a extração da raiz quadrada^[32].

Resolução: “O quadrado da altura GI que vem do ângulo direito do triângulo FIH é igual ao produto $FG \times GH$ dos comprimentos dos segmentos cortados na hipotenusa”.

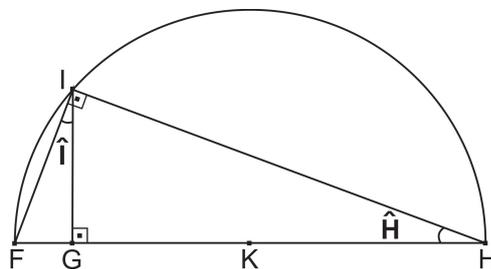


Figura 37: Ilustração da resolução da extração da raiz quadrada.

Notando que o $\triangle FIH$ é retângulo em I e que as tangentes dos ângulos \hat{H} e \hat{I} dos triângulos semelhantes $\triangle FIH$ e $\triangle FIG$ são iguais. Tem-se que: $tg\hat{H} = \frac{GI}{GH}$, $tg\hat{I} = \frac{FG}{GI}$. Logo, é válida a proporção $\frac{GI}{GH} = \frac{FG}{GI}$. Sabendo que o produto dos extremos é igual ao produtos dos meios chegamos a seguinte relação: $GI^2 = FG \times GH = 1 \times GH = GH$. Logo, conclui-se que $GI = \sqrt{GH}$. Pode-se observar ainda que GI é a média geométrica

entre FG e GH .

Após esse início revolucionário, a Geometria Analítica foi evoluindo e sendo complementadas por vários matemáticos ao longo dos anos, chegando até nós não como um simples ramo da Geometria, mas sim como um Método da Geometria . Alguns exemplos dessa evolução são:

- A introdução de um sistema polar. Aparentemente idealizada em 1691 pelo matemático suíço Jakob Bernoulli (1654-1705), o sistema passa a ter como referência uma semirreta e a localização de um ponto se faz por um par de números reais, que representam uma distância e um ângulo.
- O surgimento das coordenadas lineares. Apresentado em 1829 em um dos trabalhos do matemático e físico alemão Julius Plücker (1801-1868) em 1829, essas coordenadas contemplam a possibilidade de usar linhas, em vez de pontos, como elementos geométricos fundamentais.
- Sua abordagem através da análise vetorial. Nesse trabalho realizado pelo do físico e químico teórico norte-americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903), baseado nos trabalhos do matemático e astrônomo irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) e do matemático alemão Hermann Günther Grassmann (1809-1877), é introduzido o conceito gráfico de vetor como um segmento de reta orientado e são estabelecidos alguns conceitos de operacionalidade entre os mesmos, permitindo assim a exploração do espaço com certa facilidade.
- Podemos ainda relacionar o desenvolvimento da Geometria Analítica a muitos outros nomes, tais como o do engenheiro militar francês Lazare Carnot (1753-1823), do matemático e astrônomo teórico alemão Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868), do matemático francês Gaspard Monge (1746-1818), do matemático suíço Jean Robert Argand (1768-1822), do matemático francês Augustin-Louis Cauchy, do matemático alemão Johann Friedrich Carl Gauss (1777-1855), do matemático italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), do matemático suíço Leonhard Euler, entre outros.

Retomando o foco de nosso trabalho, realizaremos demonstrações de alguns métodos utilizados para o cálculo de áreas de polígonos. Primeiramente, será abordado o algoritmo conhecido como a fórmula de Gauss (ou método do cadarço), além de sua aplicação por meio de um exemplo, e, em seguida, através de uma abordagem vetorial, a demonstração da obtenção das fórmulas para o cálculo das áreas de paralelogramos e triângulos.

4.1.1 A fórmula de Gauss

A fórmula de Gauss² é um algoritmo prático para o cálculo de áreas de polígonos simples cujos vértices são descritos por suas coordenadas cartesianas no plano. Essa fórmula pode ser representada pela seguinte expressão:

$$A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i + x_1 y_n \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{pmatrix} \right|.$$

Onde:

- A é a área do polígono,
- n é o número de vértices do polígono e
- (x_i, y_i) representam as coordenadas dos vértices, com $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração: Seja A a área do triângulo cujos vértices são dados pelos pontos de coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) . Desenhemos o menor retângulo possível, de área R , que contenha esse triângulo, de maneira que seus lados fiquem paralelos aos eixos x e y .

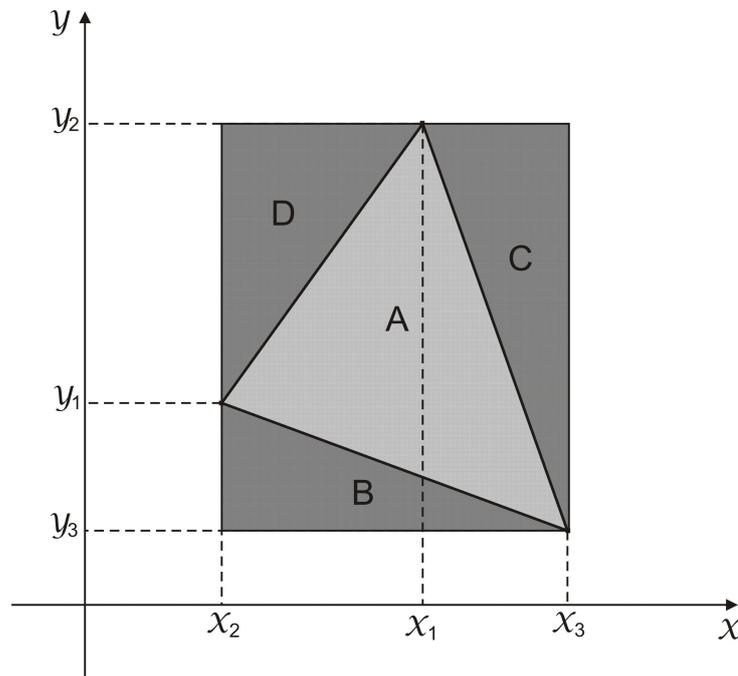


Figura 38: Ilustração para demonstração da fórmula de Gauss.

Podemos observar que pelo menos um dos vértices do triângulo irá coincidir com o do retângulo. Denominaremos de B , C e D as áreas dos três triângulos formados. De sorte temos que a área do retângulo é composta pela soma das áreas dos quatro triângulos, podendo ser representada pela relação: $R = A + B + C + D$. Conseqüentemente,

²Demonstração baseada nos trabalhos de Dahlke (2017^[15]), no Laboratório de Topografia de UNICAP (2014^[20]) e no Wikipedia (2003^[42][41]).

podemos concluir que o valor a área do triângulo A pode ser obtida através da equação $A = R - B - C - D$.

Pode-se verificar facilmente que os valores das áreas são dados por:

$$R = (x_3 - x_2) \times (y_1 - y_3) = (x_3y_1 + x_2y_3) - (x_3y_3 + x_2y_1)$$

$$B = \frac{1}{2} (x_3 - x_2) \times (y_2 - y_3) = \frac{1}{2} (x_3y_2 + x_2y_3) - \frac{1}{2} (x_3y_3 + x_2y_2)$$

$$C = \frac{1}{2} (x_3 - x_1) \times (y_1 - y_3) = \frac{1}{2} (x_3y_1 + x_1y_3) - \frac{1}{2} (x_1y_1 + x_3y_3)$$

$$D = \frac{1}{2} (x_1 - x_2) \times (y_1 - y_2) = \frac{1}{2} (x_1y_1 + x_2y_2) - \frac{1}{2} (x_1y_2 + x_2y_1).$$

Agora, substituindo esses valores na equação $A = R - B - C - D$ temos:

$$A = (x_3y_1 + x_2y_3) - (x_3y_3 + x_2y_1) - \left[\frac{1}{2} (x_3y_2 + x_2y_3) - \frac{1}{2} (x_3y_3 + x_2y_2) \right] \\ - \left[\frac{1}{2} (x_3y_1 + x_1y_3) - \frac{1}{2} (x_1y_1 + x_3y_3) \right] - \left[\frac{1}{2} (x_1y_1 + x_2y_2) - \frac{1}{2} (x_1y_2 + x_2y_1) \right]$$

$$A = \frac{1}{2} [2x_3y_1 + 2x_2y_3 - 2x_3y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_3y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 - x_1y_3 + \\ x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_1 - x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1]$$

$$A = \frac{1}{2} [x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2].$$

Chegando assim ao equivalente da fórmula de Gauss para o cálculo da área de um triângulo. A qual pode ser reescrita em módulo, afim de evitarmos o surgimento de números negativos e ainda ser escrita na forma da soma de determinantes.

$$A = \frac{1}{2} |x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^3 \det \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{pmatrix} \right|.$$

Finalmente, considerando que todo polígono simples pode ser dividido em triângulos podemos estender essa fórmula para a obtenção da área de qualquer polígono.

Logo,

$$A = \frac{1}{2} |x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_{n-1}y_n + x_ny_1 - x_2y_1 + x_3y_2 - \dots - x_ny_{n-1} - x_1y_n|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{pmatrix} \right|.$$

Devido a praticidade apresentada por esse algoritmo para a obtenção de áreas, é muito comum sua utilização na forma do método do cadarço (conhecido também como pseudo-determinante³). Como veremos no exemplo a seguir.

Calcule a área (H) do hexágono definido pelos pontos $(3, 5)$, $(5, 10)$, $(7, 11)$, $(12, 8)$, $(9, -2)$ e $(5, 6)$.

³Mecanismo para o cálculo de uma espécie de “determinante” para matrizes não quadradas.

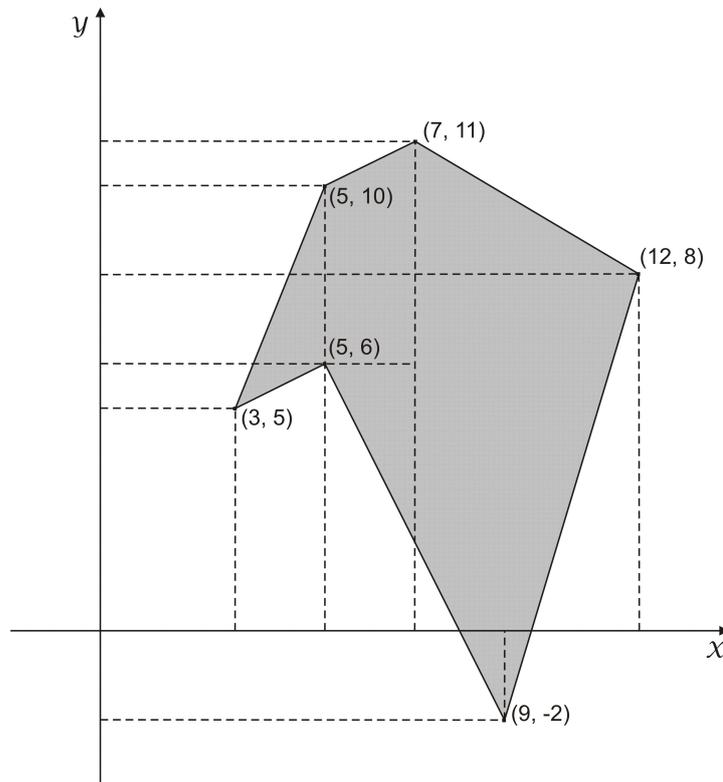


Figura 39: Ilustração do hexágono do exemplo.

Primeiramente, construiremos uma matriz (6×2) , escolhemos um dos vértices e em seguida contornamos a figura tomando todos os outros.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 10 \\ 7 & 11 \\ 12 & 8 \\ 9 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Em seguida, calculamos o pseudodeterminante dessa matriz ($196 - 307 = -111$).

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 10 \\ 7 & 11 \\ 12 & 8 \\ 9 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \\ \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -5 \times 5 - 10 \times 7 - 11 \times 12 - 8 \times 9 - (-2) \times 5 - 6 \times 3 \\ \hline -307 \end{array} & & \begin{array}{c} 3 \times 10 + 5 \times 11 + 7 \times 8 + 12 \times (-2) + 9 \times 6 + 5 \times 5 \\ \hline 196 \end{array} \end{array}$$

Figura 40: Ilustração do processo para o cálculo do pseudodeterminante.

Notemos que a figura formada pelo modelo utilizado para o cálculo do pseudodeterminante se assemelha ao cadarço de um sapato, justificando o nome atribuído ao método. Finalmente temos que a área H é a metade do valor do módulo desse pseudodeterminante. Logo,

$$H = \frac{1}{2} |-111| = 55,5.$$

Para as próximas demonstrações⁴ serão utilizados alguns conceitos e definições sem as devidas provas, mas para uma melhor compreensão enunciaremos a seguir:

4.1.2 A Geometria Analítica Vetorial

- **Norma de um vetor:** Representa o comprimento de um vetor. Seja $\vec{u} = (x_u, y_u)$ um vetor no plano. Então, sua norma será definida por:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$$

Tal conceito poderá ser ampliado para uma possível aplicação no espaço.

- **Produto interno:** O produto interno entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} , contidos no sistema de eixos ortogonais $0XY$ (plano), é o número real denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e definido por:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta, \text{ onde } \theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}).$$

O produto interno entre dois vetores está relacionado com a grandeza comprimento.

- **Proposição:** Sejam $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ dois vetores no plano. Então:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v$$

- **Produto vetorial:** O produto vetorial entre dois vetores $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, contidos no sistema de eixos ortogonais $0XYZ$ (espaço), é o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_u z_v - y_v z_u, -(x_u z_v - x_v z_u), x_u y_v - x_v y_u),$$

cuja norma é definida por:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\theta, \text{ onde } \theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}).$$

O produto vetorial entre dois vetores é um vetor e a representação geométrica de sua norma está relacionado com a grandeza área.

Demonstração da obtenção das fórmulas para o cálculo das áreas de paralelogramos e triângulos no plano (sistema de eixos ortogonais $0XY$) utilizando como ferramenta principal o produto interno.

⁴ Demonstrações baseadas nos trabalhos de Delgado, Frensel e Crissaff (2017^[16]), Miranda, Grisi e Lodovici (2015^[22]) e Souza (2007-2008^[44]).

Área de paralelogramos:

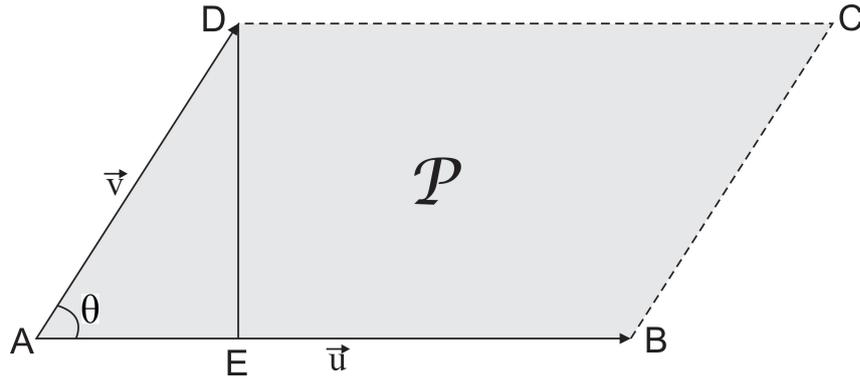


Figura 41: Ilustração para demonstração do cálculo da área do paralelogramo no plano.

Sabendo que a área de um paralelogramo qualquer (P) é sempre o produto comprimento da base pela altura. Temos que:

$$P = |AB| \cdot |AD| \cdot \text{sen}\theta, \text{ onde } \theta = \widehat{BAD}$$

Observando que $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$ e $\theta = \widehat{BAD} = \angle(\vec{u}, \vec{v})$, temos ainda que:

$$P = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \text{sen}\theta$$

Com o intuito de obtermos um dispositivo prático para o cálculo dessa área, realizaremos alguns passos a seguir:

$$(P)^2 = (\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \text{sen}\theta)^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \text{sen}^2\theta.$$

De conhecimento da identidade trigonométrica ($\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$) realizaremos a substituição, obtendo:

$$\begin{aligned} (P)^2 &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot (1 - \text{cos}^2\theta) = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \text{cos}^2\theta \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \end{aligned}$$

$$P = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}.$$

Sendo $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ dois vetores no plano (eixos ortogonais $0XY$). Então: $\|\vec{u}\|^2 = x_u^2 + y_u^2$, $\|\vec{v}\|^2 = x_v^2 + y_v^2$ e $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v$.

Assim,

$$\begin{aligned}
 (P)^2 &= (x_u^2 + y_u^2) \cdot (x_v^2 + y_v^2) - (x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v)^2 \\
 &= x_u^2 \cdot x_v^2 + x_u^2 \cdot y_v^2 + y_u^2 \cdot x_v^2 + y_u^2 \cdot y_v^2 - (x_u^2 \cdot x_v^2 + 2x_u \cdot x_v \cdot y_u \cdot y_v + y_u^2 \cdot y_v^2) \\
 &= \cancel{x_u^2 \cdot x_v^2} + x_u^2 \cdot y_v^2 + y_u^2 \cdot x_v^2 + \cancel{y_u^2 \cdot y_v^2} - \cancel{x_u^2 \cdot x_v^2} - 2x_u \cdot x_v \cdot y_u \cdot y_v - \cancel{y_u^2 \cdot y_v^2} \\
 &= x_u^2 \cdot y_v^2 - 2x_u \cdot y_v \cdot y_u \cdot x_v + y_u^2 \cdot x_v^2 = (x_u \cdot y_v - y_u \cdot x_v)^2 \\
 \\
 (P)^2 &= \left[\det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \right]^2 \Rightarrow P = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \right|.
 \end{aligned}$$

Logo, concluímos que a área do paralelogramo (P), no qual os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ representam dois de seus lados não paralelos, é igual ao módulo do determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas de \vec{u} e \vec{v} .

Área de triângulos:

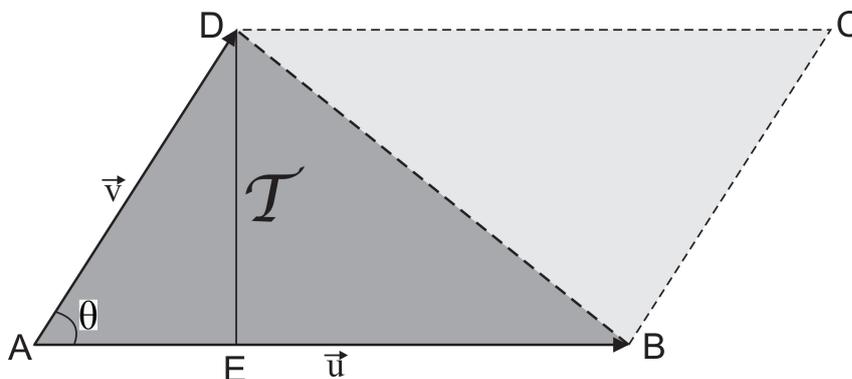


Figura 42: Ilustração para demonstração do cálculo da área do triângulo no plano.

De sorte temos que a área do triângulo (T) é a metade da área do paralelogramo (P). Então:

$$T = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \right|.$$

Logo, concluímos que a área do triângulo (T), no qual os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ representam dois de seus lados, é igual a metade do módulo do determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas de \vec{u} e \vec{v} .

Segue agora a demonstração da obtenção das fórmulas para o cálculo das áreas de paralelogramos e triângulos no espaço (sistema de eixos ortogonais $0XYZ$) utilizando como ferramenta principal a norma de um produto vetorial.

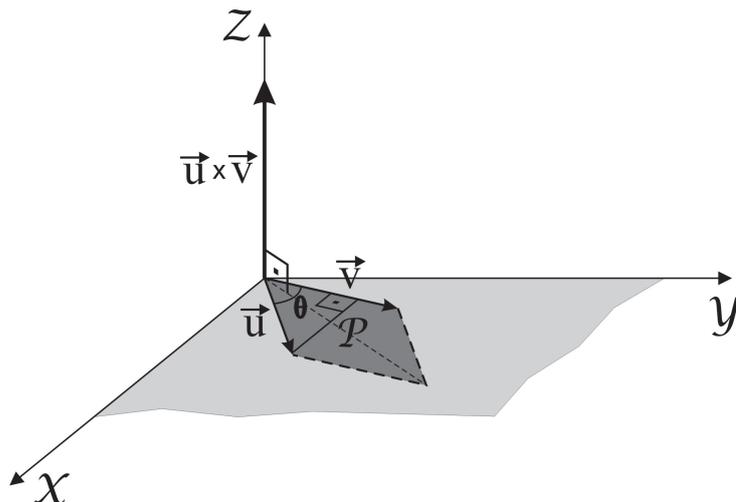
Área de paralelogramos:

Figura 43: Ilustração para demonstração do cálculo da área do paralelogramo no espaço.

Seja um paralelogramo de área (P), no qual os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ representam dois de seus lados não paralelos. Temos que a altura (h) desse paralelogramo é: $h = \|\vec{u}\| \cdot \text{sen}\theta$, com $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Logo, tomando $\|\vec{v}\|$ como o valor da base, podemos determinar sua área por:

$$P = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \text{sen}\theta = \|\vec{u} \times \vec{v}\|.$$

Observa-se que tal equação coincide com a norma do produto vetorial entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} . Logo, concluímos que a área do paralelogramo (P), no qual os vetores \vec{u} e \vec{v} representam dois de seus lados não paralelos, é igual a norma do produto vetorial entre \vec{u} e \vec{v} , ou seja, $P = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

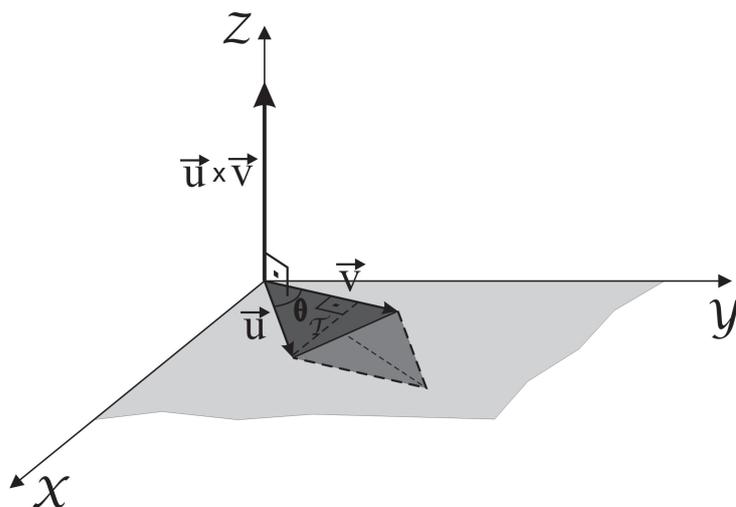
Área de triângulos:

Figura 44: Ilustração para demonstração do cálculo da área do triângulo no espaço.

Apropriando do mesmo raciocínio utilizado anteriormente, temos que a área do triângulo (T) é a metade da área do paralelogramo (P). Logo, concluímos que a área do

triângulo (T), no qual os vetores \vec{u} e \vec{v} representam dois de seus lados, é igual metade a norma do produto vetorial entre \vec{u} e \vec{v} , ou seja, $T = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

As novas notações desenvolvidas por Descartes e a evolução da Geometria Analítica serviram como ferramentas essenciais para a criação de muitos métodos e técnicas infinitesimais, tendo como consequência o surgimento do Cálculo Infinitesimal. Assunto que será abordado na próxima seção, mais especificamente, o Cálculo Integral desenvolvido por Newton.

4.2 O CÁLCULO DE ÁREAS POR INTEGRAL

Sem dúvida alguma, o grande estímulo para o desenvolvimento de conceitos e teorias que culminaram na criação do Cálculo Integral foi gerado através da necessidade de resolver problemas que envolvem o cálculo de áreas (figuras poligonais e de áreas limitadas por curvas), de volumes e de comprimento de arcos.

Essa necessidade, devido as suas aplicações práticas, já despertava grande interesse na antiguidade e, conforme discorrido no capítulo anterior, Arquimedes pode ser considerado o precursor desse desenvolvimento. Isso devido aos seus trabalhos relacionados a quantidades infinitamente grandes ou pequenas, indivisíveis ou com elementos de dimensionalidade menor e suas somas, além da utilização de duas ferramentas que atualmente são consideradas a base do Cálculo Integral, são elas: O método da exaustão, originado do princípio de Eudoxo e o método mecânico (criado por ele mesmo).

Porém, após esse *insight* de um dos maiores gênios matemáticos de todos os tempos, seus estudos praticamente não progrediram, sendo necessário aguardar até o século XVII para enfim serem dados os próximos passos. Essa lacuna de cerca de 2.000 anos já era de se esperar, considerando a complexidade dos cálculos e a falta de notações e ferramentas geométricas e algébricas.

Com o advento da Geometria Analítica e com o desenvolvimento de técnicas infinitesimais, voltadas para o tratamento de problemas da Filosofia Natural (origem da Física moderna), voltaríamos a caminhar na direção da criação do Cálculo Integral.

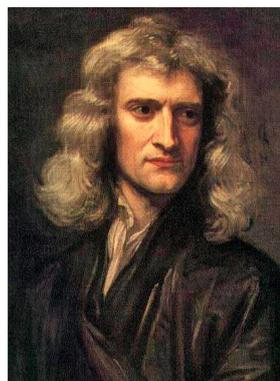
Dentre os muitos cientistas e matemáticos que contribuíram para essa criação, podemos destacar:

- Johannes Kepler - Astrônomo alemão (1571-1630): Desenvolveu ideias relativas a infinitésimos em trabalhos com a integração a fim calcular áreas de regiões elípticas, relacionadas a sua segunda lei do movimento planetário, e de volumes de sólidos formados pela revolução.
- Bonaventura Cavalieri - Matemático italiano (1598-1647): Em seu trabalho intitulado *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota* desenvolveu completamente o método de indivisíveis, cujas as teorias resultaram nos

chamados Princípios de Cavalieri, que representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes.

- John Wallis - Matemático inglês (1616-1703): Em seu livro *Arithmetica infinitorum*, Wallis realizou a aritmetização do método geométrico de Cavalieri, estimulando o estudo de outros matemáticos, entre eles Isaac Newton, pela realização da integração por meio de uma expansão em série. Contribuiu ainda com diversas quadraturas utilizando o método dos indivisíveis, além de instituir algumas notações e símbolos, tal como ∞ para representar o infinito.
- James Gregory - Matemático e astrônomo escocês (1638-1675): Em seus trabalhos encontrou as áreas do círculo e de seções da hipérbole utilizando o método da exaustão (forma modificada) e através da análise das sequências de polígonos inscritos e circunscritos deu início aos estudos sobre séries infinitas convergentes e divergentes.
- Isaac Barrow - Estudioso inglês clássico, teólogo e matemático (1630-1677): Em seu trabalho *Lectioe Geometricae* desenvolveu um método para encontrar tangentes através do limite de uma corda com os pontos aproximando-se entre si, processo bastante similar ao usado atualmente. Ainda teria sido ele o primeiro a notar a relação inversa existente entre a integração e a diferenciação, chegando muito próximo de enunciar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Após a sistematização de todas essas ideias, realizadas no final do século XVII e de forma independente por Sir Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz, pôde-se observar a concepção do Cálculo Integral. Desta forma, esses dois gênios entrariam para a história, sendo reconhecidos como os fundadores do Cálculo Infinitesimal ou Cálculo Diferencial e Integral como é conhecido hoje.



(a) Isaac Newton.



(b) Gottfried Wilhelm Leibniz.

Figura 45: Os criadores do Cálculo^{[37][36]}.

O físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727) é um dos maiores cientistas que a humanidade já viu, tendo realizado importantes descobertas relativas à ótica, à

mecânica dos fluidos, às leis do movimento, à teoria da gravitação universal, além de outras inúmeras contribuições para o desenvolvimento da Ciências. Ele é considerado o pai da Física moderna e também o criador, juntamente com Leibniz, do Cálculo Infinitesimal, que é apontado hoje como a base de todo desenvolvimento científico e tecnológico desde o século XVII.

Muitas obras de Newton não eram publicadas na época de seu desenvolvimento e circulavam por meio de manuscritos e folhetos. Acredita-se que no final década de 1660 e no início da de 1670, alguns desses manuscritos já descreviam o Cálculo de Newton. Destacam-se dentre eles a obra *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (Sobre a análise por meio de equações tendo um número infinito de termos) de 1669 e o tratado inacabado intitulado *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (Um tratado dos métodos das fluxões e das séries) de 1671.

Newton desenvolve seu Cálculo, chamado de método das fluxões (derivação) e dos fluentes (integração), de um ponto de vista geométrico. Formato diferente do analítico apresentado no Cálculo de Leibniz.

Gorrfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foi um filósofo, lógico, matemático, cientista, jurista e político alemão. É reconhecido como o último gênio universal devido ao domínio demonstrado relacionado a diversas áreas do conhecimento quando possuía apenas doze anos. Praticamente durante toda a sua vida, Leibniz esteve envolvido com o serviço diplomático e durante sua missão na cidade de Paris em 1672, entrou em contato, incentivado pelo matemático, astrônomo e físico holandês Christian Huyghens (1629-1695), com as obras de diversos matemáticos, em especial, os trabalho do matemático, físico e filósofo religioso francês Blaise Pascal (1623-1662). Um ano depois, em Londres, conheceria também a obra de Isaac Barrow.

Leibniz desenvolveu seu cálculo entre os anos 1672 e 1676. Divulgando seus principais resultados em forma de artigo no periódico científico *Acta Eruditorum*.

Nos dez anos que seguiram, Leibniz refinou sua descoberta, criando símbolos, métodos, algoritmos e representações gráficas. Devido a esses fatores, o Cálculo leibniziano se torna uma ferramenta muito prática, apresentando uma melhor aceitação comparado ao newtoniano.

Embora sua criação tenha sido posterior a de Newton, Leibniz foi o primeiro a publicar seu sistema de cálculo, o que fez em dois trabalhos, são eles: *Nova Methodus Pro Maximis et Minimis* (Novo método para máximos e mínimos) de 1684, no qual estabeleceu as regras para a diferenciação e *Calculus Summatorius* de 1686, sobre o Cálculo Integral.

Existem várias diferenças entre os trabalhos de Newton e Leibniz, mas devido ao foco do nosso estudo, cabe-nos destacar a diferença ligada ao conceito de integração. Para Newton, esta tinha como tarefa apenas a função de encontrar os fluentes para as fluxões dadas, ou seja, apenas como uma relação inversa entre a integral e a derivada, ao passo que para Leibniz era interpretado como um somatório, no qual representava a área de

uma figura pela soma das áreas de todos os retângulos infinitesimais (método similar ao utilizado por Cavalieri). Daí vem o símbolo \int (um “s” estilizado) para representar *summa*.

Newton e Leibniz se envolveram numa disputa que durou mais de dez anos, até o final de suas vidas pela autoria do Cálculo e John Wallis com o objetivo de por um fim a essa briga, comparou suas obras e em um de seus livros declarou: “*Aqui está apresentado o método das fluxões de Newton, para usar o nome dado por este, o qual é de natureza similar ao cálculo diferencial de Leibniz, para usar o nome dado por este*”, e continuou, “*como qualquer um que compare os dois métodos poderá observar bastante bem, embora seus criadores empreguem notações diferentes...*”.

Após o estabelecimento do Cálculo, muito ainda havia de ser feito, considerando que o mesmo carecia de uma base conceitual matemática mais rigorosa. E, com o intuito de consolidar os conceitos sobre a diferenciabilidade e a integrabilidade, além de uma ampliação de sua aplicabilidade, entraram em cena outros gigantes da Matemática. São eles: os matemáticos suíços Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli, o matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783), o matemático ítalo-francês Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), o matemático alemão Johann Friedrich Carl Gauss (1777-1855), o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), o matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), o matemático francês Henri-Léon Lebesgue (1875-1941), entre outros. Esses dois últimos revolucionaram o campo da integração.

Devido a sua importância e a recorrente abordagem nos livros de Cálculo, trabalharemos agora os conceitos da Integral de Riemann, baseados nos trabalhos de Bianchini e Santos^[8] e Recalde^[26].

4.2.1 A Integral de Riemann

Na integral que leva o seu nome, Riemann faz o uso de um mecanismo muito semelhante ao método de exaustão utilizado por Arquimedes, com uma diferença fundamental. Ele considera a área como a aproximação de uma soma quando n se torna muito grande, a medida que é aumentada indefinidamente a quantidade de retângulos (conceito de limites), enquanto em sua época, Arquimedes mostrava que duas áreas são iguais usando um raciocínio por absurdo, concluindo que a suposição de que uma é maior que a outra leva à contradição.

A integral de Riemann foi a primeira formalização adequada do conceito de integração. É considerada a definição mais simples de integral, porém extremamente rigorosa.

Para a demonstração dessa integral serão utilizados conceitos de funções, intervalos, somatórios, entre outros, cuja a apresentação formal será suprimida.

Considere a região de área S , delimitada pelo gráfico de uma função não negativa f , pelo eixo X e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

Inicialmente, será escolhido um subconjunto de $[a, b]$, denominado de partição P , da seguinte maneira:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

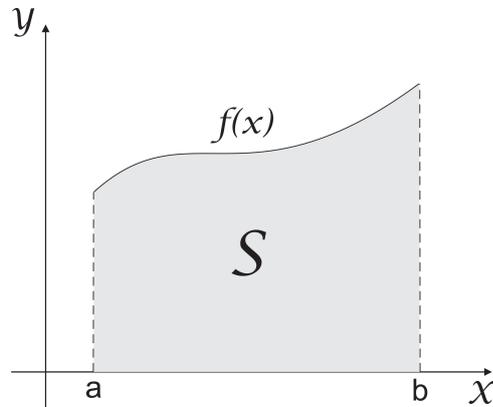


Figura 46: Ilustração da região de área S .

Em seguida, serão construídos retângulos R_i de base Δx_i e altura $f(c_i)$, onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (conforme Figura 47). De sorte, ganha-se que a área de cada um dos retângulos construídos pode ser determinado através da seguinte relação: $A(R_i) = f(c_i) \times \Delta x_i$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Denominado de S_n a soma da área de todos dos n retângulo construídos, obtém-se uma aproximação grosseira da área S .

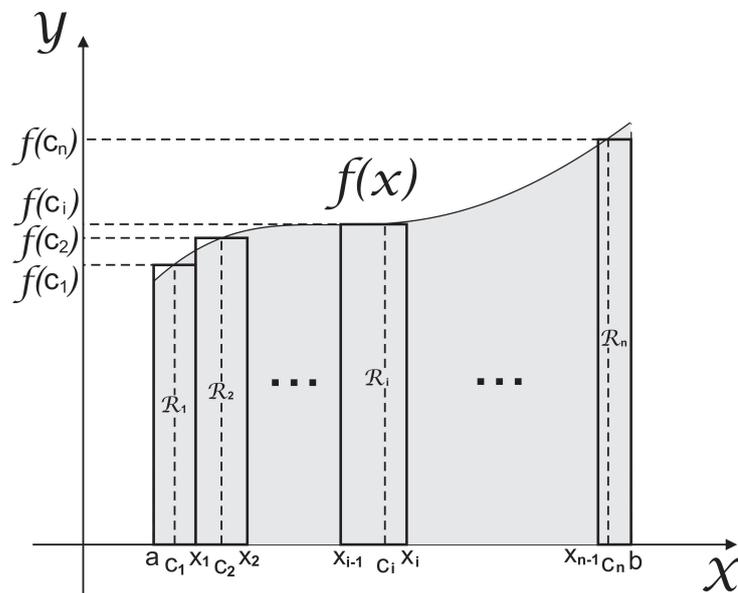


Figura 47: Ilustração para demonstração da soma de Riemann.

$$S_n = R_1 + R_2 + \cdots + R_i + R_n = \sum_{i=1}^n A(R_i) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \text{ (soma de Riemann)}$$

Riemann, então observou que conforme aumentasse indiscriminadamente a quantidade de retângulos ($n \rightarrow \infty$), melhor seria essa aproximação. Logo, ele, fazendo o uso do conceito de limites, define que a área da região S é dada por:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

E, finalmente chegamos na definição da Integral de Riemann.

Se existir o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$, dizemos que a função f é integrável em $[a; b]$ e que a integral definida dessa função, de a até b , denotada por $\int_a^b f(x) dx$ é este limite, isto é,

$$S = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Veremos agora um exemplo de cálculo de áreas através da Integral de Riemann.

Exemplo 1: Considere o segmento parabólico de área P delimitado pelo gráfico da parábola $f(x) = ax^2 + b$, com $a < 0$, e pelo eixo X . Considere também o triângulo de área T delimitado pelo eixo X e as funções $g(x) = (\sqrt{ab})x + b$ e $h(x) = -(\sqrt{ab})x + b$. Determine a razão $\frac{P}{T}$.

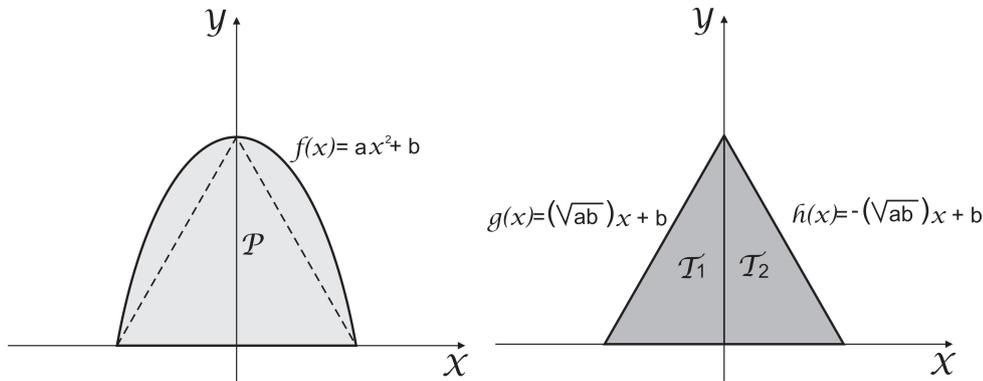


Figura 48: Esboço das áreas P e T .

Limites de integração:

- Segmento parabólico: $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ e $\sqrt{\frac{b}{a}}$
- Triângulo 1: $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ e 0
- Triângulo 2: 0 e $\sqrt{\frac{b}{a}}$

Após o esboço da regiões, a verificação dos limites da integração e sabendo que a área do triângulo é $T = T_1 + T_2$, será realizado o cálculo das áreas através da Integral de Riemann.

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (ax^2 + b) dx = \left[\frac{ax^3}{3} + bx \right]_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{8b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}} \\
 T_1 &= \int_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^0 [(\sqrt{ab})x + b] dx = \left[\frac{2bx + x^2\sqrt{ab}}{2} \right]_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^0 = \frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} \\
 T_2 &= \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} [-(\sqrt{ab})x + b] dx = \left[\frac{2bx - x^2\sqrt{ab}}{2} \right]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{3b\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} \\
 T &= T_1 + T_2 = \frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} + \frac{3b\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{2b\sqrt{b}}{\sqrt{a}}.
 \end{aligned}$$

Logo, temos que a razão entre o segmento parabólico e o triângulo é:

$$\frac{P}{T} = \frac{8b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}} \div \frac{2b\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{8b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{b}} = \frac{4}{3}.$$

Por fim, podemos ainda observar que o resultado obtido é a mesma relação da quadratura da parábola, provada por Arquimedes, na qual afirma que a área delimitada por uma parábola e uma linha reta é $4/3$ da área de um triângulo com a mesma base e a mesma altura.

Sendo a Matemática uma fonte inesgotável de conhecimento e em constante evolução, seria impossível que este material tivesse a pretensão de esgotar qualquer conteúdo, todavia atende sua intenção, que é a de apresentar uma evolução histórica do conceito de área, encerrada nesse momento.

A seguir, será exibida uma abordagem didática referente as áreas das principais figuras planas que poderá servir como material de apoio durante as aulas de Geometria na educação básica.

AS ÁREAS DAS PRINCIPAIS FIGURAS PLANAS EM UMA ABORDAGEM DIDÁTICA

Muitas vezes, dentro da Geometria, nos deparamos com cálculos que envolvem áreas de figuras planas e para isso precisamos reconhecer a figura com a qual estamos trabalhando e lembrarmos da fórmula de sua área. Mas isso nem sempre é uma tarefa simples, pois ao invés de compreendermos a origem de cada uma delas preferimos decorá-las, contrariando os métodos atuais do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, nos quais o aluno, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs ^[13]), deverá desenvolver o raciocínio lógico através da observação, percepção de semelhanças e diferenças, identificação de regularidades e do relacionamento entre figuras e objetos nas mais diversas situações-problema.

Com o intuito de assimilarmos melhor as fórmulas das áreas das principais figuras planas será feita uma simples demonstração, mas muito didática, para a obtenção das mesmas, tendo como referência a História da Matemática.

5.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Conteúdo:

- História da Matemática.
- Áreas de figuras planas.

Objetivos:

- Apresentar o conceito do cálculo de área por meio de equivalências através da História da Matemática.
- Compreender a origem das fórmulas das áreas das principais figuras planas.

Público alvo: Alunos dos 8º e 9º ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Tempo estimado: 2 aulas de 1h40min de duração cada.

Planejamento

Aula 1

Desenvolvimento: Inicialmente será apresentado um breve apanhado histórico sobre a vida e obras de Euclides de Alexandria e Arquimedes de Siracusa baseado nos conteúdos dos capítulos 2 e 3.

Em seguida, será trabalhado o conceito do cálculo de áreas por meio de equivalências através das demonstrações da Proposição 41 - LIVRO I e Proposição 2 - LIVRO II dos Elementos de Euclides e de uma forma simplificada da utilização do método da exaustão para a aproximação da área limitada por uma parábola e uma corda.

Aula 2

Desenvolvimento: Fazendo o uso do conceito de equivalência entre áreas apresentado na aula 1 e também de algumas manipulações algébricas, será aplicada a seguinte atividade para a obtenção das fórmulas das áreas das principais figuras planas.

- Retângulo:

Inicialmente, iremos considerar um retângulo quadriculado (conforme Figura 49), onde cada quadradinho assumirá o valor de 1 (uma) unidade de área.

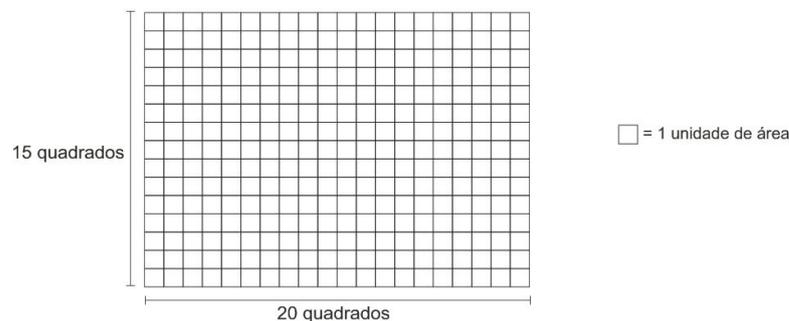


Figura 49: Ilustração do retângulo quadriculado.

Pode-se verificar, por uma simples contagem, que área total do retângulo será igual a soma das áreas dos 300 quadradinhos, ou seja, 300 unidades de área.

Agora, com o intuito de obtermos um método prático para realização do cálculo dessa área, observa-se que o retângulo é composto 15 fileiras e cada qual contendo 20 quadradinhos e que a quantidade total da área poderá ser obtida de forma simples, através de uma multiplicação ($20 \times 15 = 300$).

Diante da análise acima, e denominando de base (b) a medida formada por 20 quadradinhos e de altura (h) a medida formada por 15 quadradinhos, conclui-se que a área de um retângulo (A_r) pode ser encontrada através da fórmula:

$$A_r = \text{base} \times \text{altura} = b \times h \quad (1)$$

- Quadrado:

Utilizando o retângulo da demonstração anterior, pode-se obter facilmente um quadrado através de uma simples dobra e um recorte (conforme demonstrado na Figura 50)

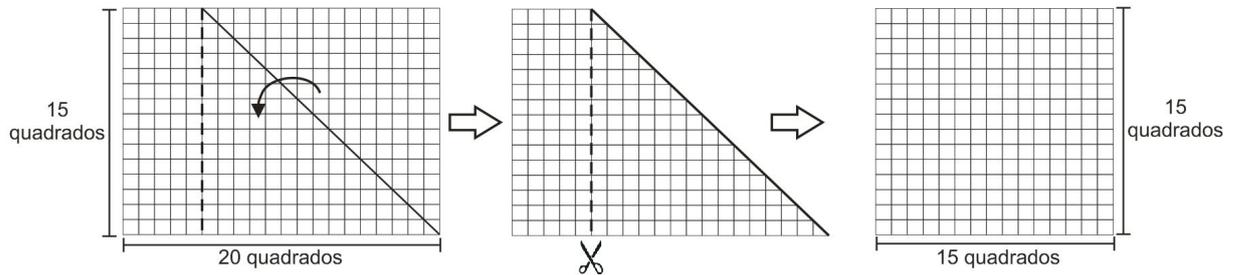


Figura 50: Obtenção do quadrado.

Sabendo que todo retângulo é uma figura geométrica plana formada por quatro lados (quadrilátero), que possui lados opostos paralelos, o caracterizando como paralelogramo e que apresenta os quatro ângulos internos congruentes (mesma medida) e retos (90°), pode-se considerar o quadrado, por possuir todas essas características, como um caso particular de retângulo, cuja base e a altura apresentam medidas iguais. Logo, a quantidade total da área poderá ser obtida através de uma multiplicação ($15 \times 15 = 225$).

Agora, denominando de lado a base e a altura do quadrado, conclui-se que a área de um quadrado (A_q) pode ser encontrada através da fórmula:

$$A_q = lado \times lado = lado^2 \quad (2)$$

Para as demonstrações das áreas do paralelogramo, triângulo, trapézio e losango será utilizado um retângulo qualquer cuja base mede b e a altura h .

- Paralelogramo:

Após a construção do paralelogramo a partir de um retângulo (conforme Figura 51), observa-se facilmente que a base e a altura do paralelogramo permaneceram as mesmas do retângulo que o gerou. Cabe lembrar essa hora o conceito de altura de um polígono (Altura é uma linha reta que liga um dos vértices ao seu lado oposto (ou a sua extensão) formando um ângulo de 90°).

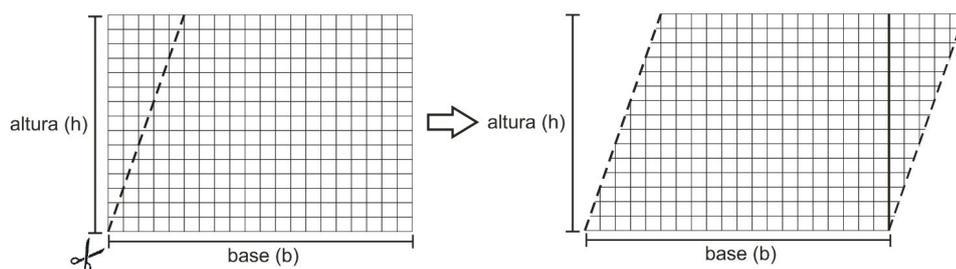


Figura 51: Obtenção do paralelogramo.

Considerando que nessa construção não foram subtraídas ou adicionada “partes” ao retângulo original, conclui-se que ambas as figuras possuem exatamente a mesma área. Logo, área de um paralelogramo (A_p) pode ser encontrada através da fórmula:

$$(A_p) = base \times altura = b \times h \quad (3)$$

- Triângulo:

Utilizando um retângulo qualquer de base b e altura h , pode-se obter facilmente dois triângulos através de uma dobra e um recorte (conforme demonstrado na Figura 52)

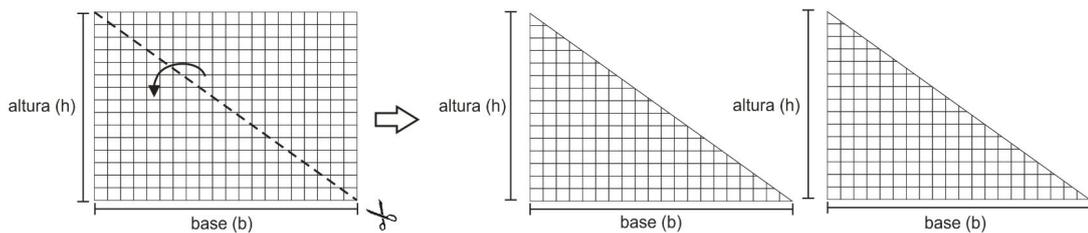


Figura 52: Obtenção de dois triângulos retângulos.

Sabendo que a divisão de um retângulo através de uma de suas diagonais gera duas figuras, de formato triangular, de mesma área, pode-se determinar a seguinte relação: *Área do retângulo* = $2 \times$ *área do triângulo* (A_t).

Como a área de um retângulo pode ser encontrada através da fórmula $A_r = b \times h$ e observando que a base e a altura dos triângulos são iguais a do retângulo, podemos aplicar esses fatos na relação acima obtendo: $2 \times A_t = b \times h$.

Logo, conclui-se que a área de um triângulo pode ser encontrada através da fórmula:

$$A_t = \frac{b \times h}{2} \quad (4)$$

Pode-se ainda realizar tal análise por meio de triângulos isósceles, construídos conforme Figura 53, obtendo-se a mesma relação.

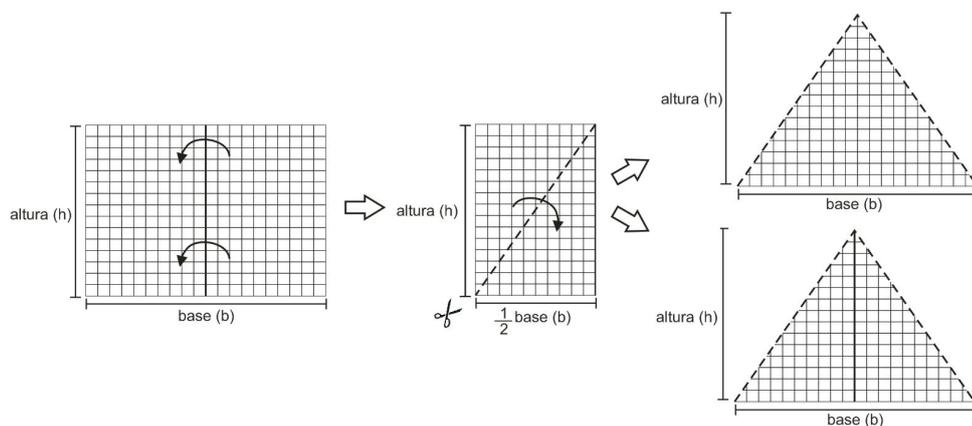


Figura 53: Obtenção de dois triângulos isósceles.

- Trapézio:

Utilizando um retângulo qualquer de base b e altura h , pode-se obter facilmente dois trapézios retângulos por meio de uma dobra, na qual são unidos dois vértices opostos, seguido por um recorte (conforme demonstrado na Figura 54)

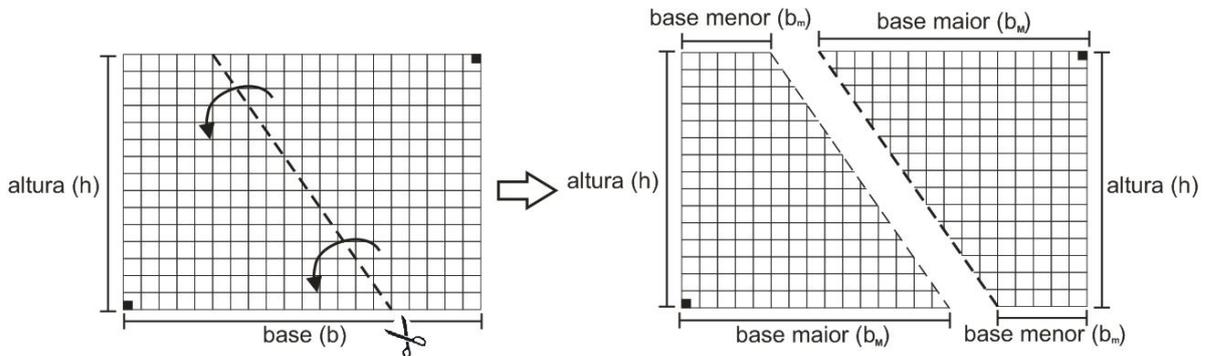


Figura 54: Obtenção de dois trapézios retângulos.

Observa-se que os trapézios obtidos possuem áreas congruentes através de uma simples sobreposição. Analisando tal fato de maneira similar ao do processo para a obtenção da fórmula para o cálculo da área do triângulo, ganhamos a seguinte relação: *Área do retângulo* = $2 \times$ *área do trapézio* (A_{tz}).

Denominando de base maior (b_M) e base menor (b_m) os lados paralelos do trapézio de maior e menor comprimento, respectivamente, e comparando-os com a base do retângulo, temos que: $b = b_M + b_m$.

Agora, sabendo que a área de um retângulo pode ser encontrada através da fórmula $A_r = b \times h$ e observando que os trapézios possuem a mesma altura do retângulo, podemos aplicar todos esses fatos na relação acima obtendo: $2 \times A_{tz} = b \times h = (b_M + b_m) \times h$.

Logo, conclui-se que a área de um trapézio pode ser encontrada através da fórmula:

$$A_{tz} = \frac{(b_M + b_m) \times h}{2} \quad (5)$$

Pode-se ainda realizar tal análise por meio de trapézios isósceles, construídos conforme Figura 55, obtendo-se a mesma relação.

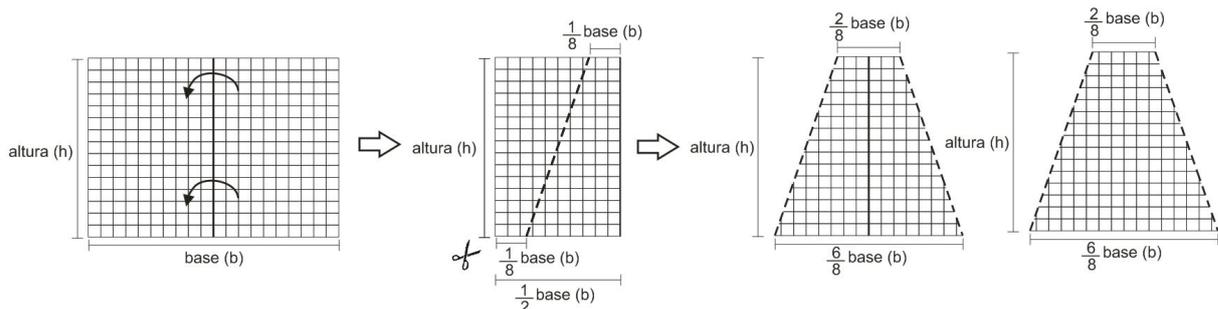


Figura 55: Obtenção de dois trapézios isósceles.

- Losango:

Utilizando um retângulo qualquer de base b e altura h , pode-se obter facilmente dois losangos por meio de duas dobras e um recorte (conforme demonstrado na Figura 56)

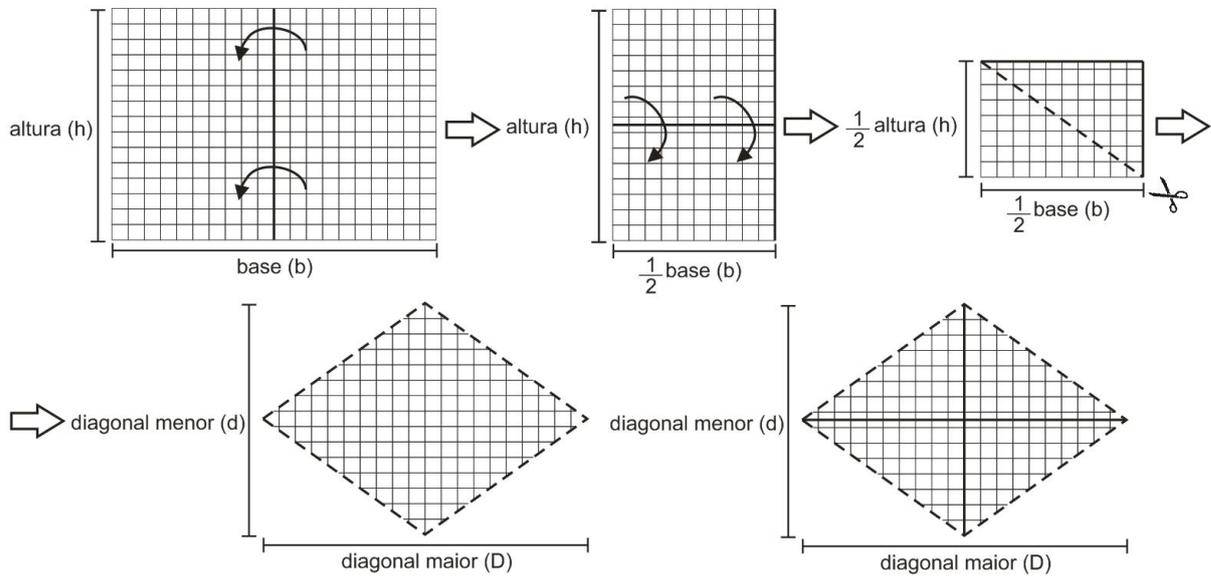


Figura 56: Obtenção de dois losangos.

Pode ser verificado de maneira simples, através de uma sobreposição, que os losangos obtidos possuem áreas iguais e, novamente, fazendo o uso de uma análise similar a realizada no processo para a obtenção da fórmula para o cálculo da área do triângulo, chegamos na seguinte relação: *Área do retângulo* = $2 \times$ *área do losango* (A_l).

Observa-se ainda que as diagonais desse losango, denominadas diagonal maior (D) e diagonal menor (d) são congruentes, respectivamente, a base e a altura do retângulo, ou seja, $D = b$ e $d = h$.

Agora, fazendo a junção das informações acima com a já conhecida fórmula da área de um retângulo ($A_r = b \times h$), obtemos: $2 \times A_l = b \times h = D \times d$.

Logo, conclui-se que a área de um losango pode ser encontrada através da fórmula:

$$A_l = \frac{D \times d}{2} \quad (6)$$

- Círculo:

A construção a ser realizada, para a obtenção da fórmula para o cálculo da área do círculo, difere das anteriores, pois será iniciada com o próprio círculo, chegando em uma área próxima a de um retângulo de base b e altura h , a qual utilizaremos para a obtenção de uma relação.

Inicialmente, divide-se cada círculo em 12 partes iguais e uma delas é dividida ao meio. Em seguida, os setores circulares obtidos no passo anterior são encaixados, conforme a

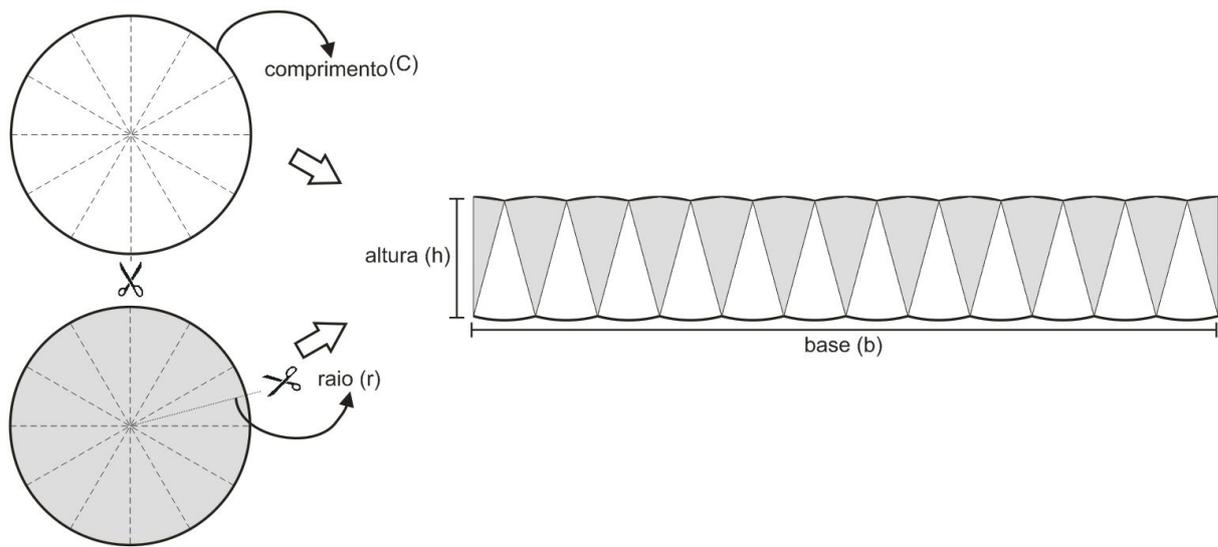


Figura 57: Obtenção de um “retângulo” através de dois círculos.

Figura 57, obtendo uma figura cuja área aproxima-se a de um retângulo de base b e altura h . Observa-se que essa aproximação está relacionada ao número de divisões do círculo, mas, afim de prosseguirmos com a demonstração, essa área será considerada retangular.

De acordo com construção realizada, chegamos na seguinte relação: *Área do retângulo* $= 2 \times$ *área do círculo* (A_c). E, considerando que base do retângulo é aproximadamente o comprimento do círculo ($2\pi r$) e que sua altura é o raio, temos que: $2 \times A_c = b \times h = 2\pi r \times r$

Logo, conclui-se que a área de um círculo pode ser encontrada através da fórmula:

$$A_c = \pi \times r^2 \quad (7)$$

Como já apresentado, o quadrado é um retângulo. E com o intuito de estimular o desenvolvimento do conhecimento relacionado ao tema desse capítulo, serão deixados alguns questionamentos finais para serem analisados, são eles: O quadrado é um trapézio? um losango? E caso a resposta seja afirmativa, seria possível obter a fórmula da área do quadrado através das fórmulas do trapézio ou losango?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer desse trabalho pôde ser observado o quão importante foi a evolução da Geometria, em especial, o cálculo de áreas, para o desenvolvimento de outras áreas, ciências, tecnologias e para a humanidade de modo geral.

Através da exposição da evolução do cálculo de áreas desde os primeiros registros, passando pela Geometria Euclidiana, alguns problemas trabalhados por Arquimedes, a Geometria Analítica e o Cálculo Integral, procurou-se demonstrar o caminho árduo percorrido por grandes gênios da matemática, tais como Euclides, Arquimedes, René Descartes, Newton, entre outros; até a consolidação dos métodos que hoje temos à disposição para o cálculo de áreas de maneira prática e eficaz.

O resgate realizado desses procedimentos históricos serve como uma ferramenta motivacional para o estudo da Geometria, uma vez que expõem a aplicabilidade de vários conceitos geométricos na resolução de problemas do dia-a-dia, fazendo que todo trabalho a ser desenvolvido, se torne mais dinâmico e atrativo, além de ressaltar a importância da Matemática em nossas vidas.

Por último, ainda foi oferecida uma proposta que pode em muito contribuir para o ensino de Geometria, mais especificamente do conteúdo de áreas de figuras planas. Onde, por meio da comparação de diversas figuras com um retângulo, cuja fórmula da área foi deduzida inicialmente, foi apresentado um trabalho para a assimilação, de maneira mais simples, das fórmulas para o cálculo dessas áreas.

Como herança, essa monografia pretende chamar a atenção para importância da História da Matemática como parte do processo e desenvolvimento do conhecimento e também para a elaboração e utilização de métodos mais didáticos em trabalhos desenvolvidos para o ensino da Geometria.

Por fim, são deixadas como sugestões para trabalhos futuros um aprofundamento no contexto histórico-matemático para o cálculo de áreas, além do desenvolvimento de novos trabalhos para uma maior atratividade no ensino da Geometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Bardi, J. S., *A guerra do cálculo*, Record, Rio de Janeiro (2008).
- [2] Bassalo, J. M. F., *A Crônica do Cálculo: I. Antes de Newton e Leibniz*, Revista Brasileira de Ensino de Física **18**, pp. 103–112 (1996).
Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v18_103.pdf
Acesso em: 06 fev. 2019.
- [3] Bassalo, J. M. F., *A Crônica do Cálculo: II. A Época de Newton e Leibniz*, Revista Brasileira de Ensino de Física **18**, pp. 181–190 (1996).
Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v18_181.pdf
Acesso em: 06 fev. 2019.
- [4] Bassalo, J. M. F., *A Crônica do Cálculo: III. Contemporâneos de Newton e Leibniz*, Revista Brasileira de Ensino de Física **18**, pp. 328–336 (1996).
Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/indice.php?vol=18&num=4>
Acesso em: 06 fev. 2019.
- [5] Bassalo, J. M. F., *A Crônica do Cálculo: IV. Após Newton e Leibniz - Século XVIII*, Revista Brasileira de Ensino de Física **19**, pp. 400–422 (1997).
Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v19_400.pdf
Acesso em: 06 fev. 2019.
- [6] Bassalo, J. M. F., *A Crônica do Cálculo: Va. Após Newton e Leibniz - Século XIX*, Revista Brasileira de Ensino de Física **19**, pp. 423–435 (1997).
Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v19_423.pdf
Acesso em: 06 fev. 2019.
- [7] Bassalo, J. M. F., *A Crônica do Cálculo: Vb. Após Newton e Leibniz - Século XIX*, Revista Brasileira de Ensino de Física **20**, pp. 48–55 (1998).
Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v20_48.pdf
Acesso em: 06 fev. 2019.
- [8] Bianchini, W. e Santos, A. R., *Aprendendo Cálculo de Uma Variável* (2018).
Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo1/aprendendocalculo/calculo1.pdf>
Acesso em: 19 jan. 2019.

- [9] Blog Euclides.org, *Los Elementos de Euclides* (2003).
Disponível em: <http://www.euclides.org/>
Acesso em: 25 nov. 2018.
- [10] Blog Internet Archive, *Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem geometrie incipit qua [m] foelicissime* (2015).
Disponível em: <https://archive.org/details/preclarissimusli00eucl/page/n3>
Acesso em: 24 nov. 2018.
- [11] Boyer, C. B. - Tradução: Gomide, E., *História da Matemática*, Edgard Blücher Ltda e Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo (1974).
- [12] Boyer, C. B., *The History of the Calculus and its Concertual Development (The Concepts of the Calculus)*, Dover Publications, Inc, New York (1959).
- [13] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, (1998).
Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>
Acesso em: 15 fev. 2018.
- [14] Clay Mathematics Institute Historical Archive, *The thirteen books of Euclid's Elements* (2008).
Disponível em: <https://www.claymath.org/library/historical/euclid/>
Acesso em: 25 nov. 2018.
- [15] Dahlke, K., Site Abstract Algebra and Discrete Mathematics, *The Shoelace Formula* (2017).
Disponível em: <http://book.mathreference.com/struct#shoe>
Acesso em: 06 jan. 2019.
- [16] Delgado, J., Frensel, K. e Crissaff, L., *Geometria Analítica*, 2ª edição, SBM, Rio de Janeiro (2017).
- [17] Eves, H. - Tradução: Domingues, H. H., *Introdução à história da matemática*, 5ª edição, Editora da Unicamp, Campinas (2011).
- [18] Gonçalves, I. M. F. L., *Os Problemas da Matemática - O seu papel na Matemática e nas aulas de Matemática*. Tese (Doutorado em Matemática - Ensino da Matemática), Universidade da Madeira, Funchal (2011).

- [19] Joyce, E. D., *Euclid's Elements* (1994).
Disponível em: <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/>
Acesso em: 18 nov. 2018.
- [20] Laboratório de Topografia de UNICAP, *Cálculo de Área*, Universidade Católica de Pernambuco, Recife (2014).
- [21] Lopez, F., *Matemática no antigo Egito* (1997).
Disponível em: http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/Papiro_rhind.htm
Acesso em: 10 nov. 2018.
- [22] Miranda, D., Grisi, R. e Lodovici, S., *Geometria Analítica e Vetorial*, versão 9, Universidade Federal do ABC, Santo André (2015).
Disponível em: <http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/ga/notasdeaulas/geometriaanaliticaevetorial-SGD.pdf>
Acesso em: 06 jan. 2019.
- [23] Mohnsam, J. C., *As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - Instituto de Matemática, Estatística e Física), Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande do Sul (2014).
- [24] NONIUS - Arquivo Electrónico de Matemática, *OS ELEMENTOS DE EUCLIDES* (1996).
Disponível em: <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html>
Acesso em: 25 nov. 2018
- [25] Pitombeira, J. B. e Roque, T. M., *Tópicos de História da Matemática*, SBM, Rio de Janeiro (2012).
- [26] Recalde, L., *Las raíces históricas de la integral de Lebesgue*, Matemáticas: Enseñanza Universitaria **15**, pp. 103–127 (2007).
Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46815209>
Acesso em: 15 jan. 2019.
- [27] Roque, T. M., *História da matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, Zahar, Rio de Janeiro (2012).
- [28] Silva, A. P. R. C., *Cálculo de Áreas no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Florestal (2017).

- [29] Site ebiografia, *Euclides - Matemático de Alexandria* (2000).
Disponível em: <https://www.ebiografia.com/euclides/>
Acesso em: 01 dez. 2018.
- [30] Site Byrne's Euclid, *The first six books of the elements of Euclid with coloured diagrams and symbols* (2000).
Disponível em: https://www.c82.net/euclid/?utm_medium=website&utm_source=archdaily.com.br#books
Acesso em: 01 dez. 2018.
- [31] Site Os Matemáticos da Grécia Antiga, *Arquimedes* (2011).
Disponível em: <https://sites.google.com/site/greciaantigamatematicos/home/arquimedes>
Acesso em: 26 nov. 2018.
- [32] Site Patrice Debart, *Descartes et les Mathématiques - René Descartes* (2003).
Disponível em: <http://debart.pagesperso-orange.fr/geometrie/index.html>
Acesso em: 07 jan. 2019.
- [33] Site Startupi, *Tales-de-Mileto* (2015).
Disponível em: <https://startupi.com.br/2015/03/talvez-o-governo-nao-deva-investir-em-ciencia/tales-de-mileto/>
Acesso em: 24 nov. 2018.
- [34] Site The British Museum, *The Rhind Mathematical Papyrus* (2006).
Disponível em: https://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details/collection_image_gallery.aspx?partid=1&assetid=413752001&objectid=110036
Acesso em: 17 nov. 2018.
- [35] Site Wikimedia Commons, *File:P. Oxy. I 29.jpg* (2006).
Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:P._Oxy._I_29.jpg?uselang=pt-br
Acesso em: 26 nov. 2018.
- [36] Site Wikipedia, *Gottfried Wilhelm Leibniz* (2017).
Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz
Acesso em: 27 jan. 2019.

- [37] Site Wikipedia, *Isaac Newton* (2018).
Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
Acesso em: 27 jan. 2019.
- [38] Site Wikipedia, *Pierre de Fermat* (2011).
Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat
Acesso em: 07 jan. 2019.
- [39] Site Wikipedia, *Pitágoras* (2007).
Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras>
Acesso em: 24 nov. 2018.
- [40] Site Wikipedia, *René Descartes* (2007).
Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes
Acesso em: 07 jan. 2019.
- [41] Site Wikipedia, *Shoelace formula* (2017).
Disponível em: [https://en.m.wikipedia.org/wiki/Shoelace_formula#
Definition](https://en.m.wikipedia.org/wiki/Shoelace_formula#Definition)
Acesso em: 06 jan. 2019.
- [42] Site Wikipedia, la enciclopedia de contenido libre, *Fórmula del área de Gauss* (2017).
Disponível em: [https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_del_%C3%A1rea_
de_Gauss](https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_del_%C3%A1rea_de_Gauss)
Acesso em: 06 jan. 2019.
- [43] Souza, S., *Arquimedes e a coroa do rei*, Revista Professor de Matemática - RPM **9** (1986).
Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/9/2.htm>
Acesso em: 02 dez. 2018.
- [44] Souza, S. A., *Curso de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica* (2013).
Disponível em: [http://www.mat.ufpb.br/bruno/wa_files/calculo_20vetorial_
20-20livro_20texto_20uab.pdf](http://www.mat.ufpb.br/bruno/wa_files/calculo_20vetorial_20-20livro_20texto_20uab.pdf)
Acesso em: 01 dez. 2018.
- [45] Veiga, A. e Santos, R., Site Olga Pombo, *Papiro de Rhind* (2002).
Disponível em: <http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/rhind/>
Acesso em: 10 nov. 2018.