UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PAULA CAROLINA CARLONI

O ESTUDO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Vitória – ES
2019

PAULA CAROLINA CARLONI

O ESTUDO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Profº. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Vitória – ES

2019

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Carloni, Paula Carolina, 1987-
C284e O estudo de probabilidade no ensino médio / Paula Carolina Carloni. - 2019.
59 f. : il.

Orientador: Valmecir Antonio dos Santos Bayer.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Probabilidade. 2. Probabilidade geométrica. 3. Resolução de problemas. I. Bayer, Valmecir Antonio dos Santos. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"O Estudo de Probabilidade no Ensino Médio"

Paula Carolina Carloni

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 16/05/2019 por:

Valmecir Bayer

Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Orientador – UFES

Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva
Membro Interno – UFES

Andrea Gomes Guimarães

Profª. Drª. Andréa Gomes Guimarães
Membro Externo – UFF

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, saúde e por ter me guiado pelo caminho certo nesta fase da minha vida.

Aos meus pais, Sérgio Oniz Carloni e Gerusa Panciere Carloni, que sempre estiveram ao meu lado nas horas mais difíceis e felizes da minha vida.

Ao meu esposo, Amós de Almeida, por todo carinho, amor e paciência que tem me dedicado, por estar sempre me apoiando nas minhas decisões e também por ser tão compreensivo.

Ao meu irmão, Fábio Oniz Carloni, pelo carinho e incentivo.

Agradeço também a todos os professores que de forma significativa contribuíram para minha formação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer, pela sua paciência, conselhos e orientação essenciais para a conclusão desse trabalho.

A todos os amigos que direta ou indiretamente participaram da minha formação, o meu eterno agradecimento.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar para o aluno a importância da probabilidade no dia a dia. Primeiramente foi feito um levantamento do conhecimento prévio dos alunos em relação a probabilidade. Logo em seguida, foram abordados os aspectos históricos da probabilidade e probabilidade geométrica. O próximo passo consistiu na construção dos conceitos e definições de probabilidade, foram analisados vários problemas, cujas soluções foram construídas com a intervenção do professor, induzindo os alunos a pensar e repensar os conceitos básicos. Em seguida, foi aplicada uma sequência didática sobre o assunto probabilidade, na perspectiva de produzir uma aprendizagem significativa e contextualizada. Finalizando, foi aplicada uma avaliação escrita sobre o tema abordado no trabalho.

Palavras - chave: Probabilidade, Probabilidade geométrica e resolução de problemas.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to show the student the importance of probability in everyday life. Firstly, a survey was made of students' prior knowledge of probability. Next, the historical aspects of probability and geometric probability were discussed. The next step was to construct the concepts and definitions of probability, analyzed several problems were, whose solutions were constructed with the intervention of the teacher, inducing the students to think and rethink these basic concepts. Then, a didactic sequence was applied on the subject probability, with the perspective of producing meaningful and contextualized learning. Finally, a written evaluation was applied on the topics addressed in the work.

Keywords: Probability, Geometric probability and problem solving.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A origem da probabilidade se deu na idade média e estava associada a jogos de azar, com o intuito de esquematizar estratégias em apostas. Outras situações envolvendo a incerteza de ocorrer ou não um evento despertou o interesse de matemáticos para um estudo mais sistemático, com a intenção de desenvolver novos aspectos teóricos da probabilidade, como por exemplo, a teoria da medida e o teorema da extensão de Kolmogorov.

Esse projeto tem por finalidade despertar interesse no aluno pela disciplina de matemática no que tange o assunto de probabilidade, apresentando uma sequência didática de forma lúdica para a construção dos conceitos matemáticos associados à probabilidade. Desta forma, serão analisados vários problemas, cujas soluções serão construídas com a mediação do professor, levando os alunos a pensarem e repensarem os conceitos básicos de probabilidade.

Batanero (em [12], p. 77) destaca a importância do ensino de probabilidade para educar o raciocínio probabilístico necessário para enfrentar o acaso na vida cotidiana e melhorar a intuição dos estudantes. De forma gradativa, mediante erros e acertos, os alunos conseguem construir seu conhecimento, assim o papel do professor é apenas de mediador nessa construção.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997) estabelecem que a principal finalidade do estudo de probabilidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos ([2], p. 56).

Batanero (em [12], p. 76) destaca que a probabilidade é parte da matemática e base de outras disciplinas e é essencial para preparar os estudantes, visto que o acaso e os fenômenos aleatórios estão presentes em nossas vidas. A probabilidade é extremamente útil no cotidiano do ser humano para que possa desenvolver estratégias, desde a possibilidade de que chova em um determinado período do dia ou mesmo acertar os números da Mega-Sena, por exemplo.

O enfoque deste trabalho é mostrar para o aluno a importância da probabilidade no dia a dia e que cada ação envolve possibilidades de resultados variados e, a partir de cada resultado obtido no experimento aleatório, ajudá-lo a tomar a decisão mais adequada para aquela situação-problema.

Inicialmente, abordaremos os aspectos históricos, a origem, o desenvolvimento e a evolução do estudo da probabilidade e probabilidade geométrica. Logo em seguida será apresentada a teoria do tema abordado no trabalho. O próximo passo consiste em uma sequência didática sobre probabilidade na perspectiva de uma aprendizagem significativa e contextualizada.

2. UM BREVE HISTÓRICO SOBRE A TEORIA DA PROBABILIDADE E DA PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

Os primeiros registros do surgimento da probabilidade aconteceram na Idade Média. E estavam associado a jogos de azar, com o propósito de planejar estratégias em apostas. Outras situações abrangendo a incerteza de ocorrer ou não um evento despertou o interesse de outros matemáticos para um estudo mais sistemático com o intuito de desenvolver novos aspectos teóricos da probabilidade.

De acordo com [5], o primeiro registro sobre o estudo de probabilidade surgiu com Girolamo Cardano (Itália, 1501-1576) que, em 1526 escreveu um trabalho notável sobre probabilidades, o Livro *Liber de Ludo Aleae (Livro* dos jogos de azar) no qual escreveu vários problemas de enumeração. A obra de Cardano, porém, só foi publicada em 1663.

Em torno de 1654, foi proposto um problema a Blaise Pascal (1623-1662) pelo monge franciscano Luca Paccioli (1445-1517) que, a partir da resolução do problema juntamente com Pierre de Fermat (1601-1665), iniciou-se um estudo mais aprofundado sobre probabilidade.

O problema proposto pelo monge Paccioli em 1494, conhecido como problema dos pontos, apresenta a seguinte situação: "*Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo. Quando o primeiro jogador tinha 4 pontos e o segundo tinha 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?"* Esse problema foi proposto a Pascal por Chevalier de Méré (França, 1607- 1684), que o apresentou a Pierre de Fermat (1601-1665). Havendo assim, uma aproximação entre esses dois matemáticos, cada um resolveu o problema a seu modo, utilizando métodos diferentes, apresentando naturalmente a mesma solução do problema.

Fundamentado nos trabalhos de Pascal e Fermat, Christiaan Huygens (1629-1695) escreveu, em 1657, a primeira publicação sobre a teoria das probabilidades. Posteriormente, Jakob Bernoulli (1654-1705) aprimorou em seus estudos/pesquisas o que até então se tinha de conhecimento a respeito de probabilidade. O seu trabalho estaria contido na obra Ars Conjectandi (A Arte da Conjectura). Jakob Bernoulli faleceu antes de finalizar o trabalho que foi concluído e publicado por seu sobrinho Nicolaus I Bernoulli (1687 – 1759).

Parece consenso que a noção de Probabilidade Geométrica foi introduzida pelo matemático e naturalista francês Georges Louis Leclerc, o conde de Buffon. Em 1777, Buffon apresenta em seu *Essai d' Arithmétique Morale* o seguinte problema que ficou conhecido como o *Problema da Agulha de Buffon*: "Considere uma família de retas paralelas num plano, em que duas paralelas adjacentes arbitrárias distam de *d* unidades. Tendo-se lançado, ao acaso, sobre o plano, uma agulha de comprimento l ($l \leq d$), determinar a probabilidade de que a agulha intercepte uma das retas." Segundo Tunala (1992), para um grande número de lançamento da agulha, a solução desse problema nos sugere um método experimental para o cálculo do valor aproximado de pi." (LOPES, SALVADOR, BALIEIRO FILHO, pág. 48) [13]

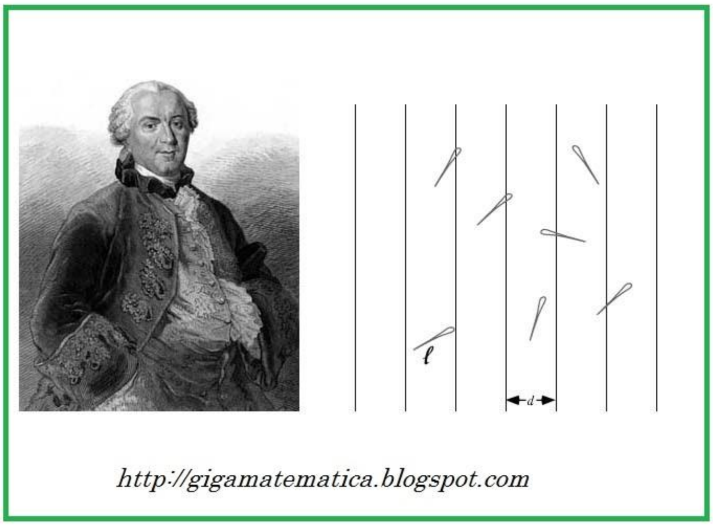


Figura 1: Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon

Buffon também apresenta no livro *Essai d' Arithmétique Morale*, o Jogo de Discos: "Em um plano pavimentado com quadrados de lado l é lançado aleatoriamente um disco de diâmetro d. Qual a probabilidade de o disco, depois de pousar no plano, não intersectar e nem tangenciar os lados de quadrado algum?”

Outros matemáticos deram continuidade ao estudo de probabilidade que até os dias atuais continua sendo desenvolvida, pesquisada e utilizada para muitas finalidades.

3. CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS E DEFINIÇÕES DE PROBABILIDADE

3.1 Introdução

De acordo com [14], a Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa *modelos* que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. A seguir, veremos alguns conceitos básicos de probabilidade com base nos textos [4], [8], [9], [14], [15], [16] e [18].

3.2 Conceitos Básicos de Probabilidade

Diremos que um experimento *aleatório* os fenômenos que, quando repetidos sob as mesmas condições produzem resultados imprevisíveis, ou seja, quando o resultado de cada realização é incerto. Por exemplo, no lançamento de uma moeda podemos obter dois resultados diferentes {coroa, cara}. Da mesma forma, se considerarmos no sorteio de um número entre 1 e 30, não teremos a certeza de qual número será sorteado, podemos ter várias ocorrências de resultados. Enquanto, os experimentos *determinístico, os fenômenos que,* quando repetido em condições semelhantes conduz a resultados essencialmente idênticos, isto é, são aqueles cujos resultados são previsíveis, por exemplo, a água aquecida a 100ºC, sob pressão normal, entra em ebulição.

Espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de um fenômeno aleatório. Vamos utilizar o símbolo Ω para representá-lo. Por exemplo: no lançamento de um dado, o espaço amostral é formado pelos números 1, 2, 3, 4, 5, e 6, assim caracterizado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Os subconjuntos do espaço amostral são chamados de *conjuntos de eventos*. Usaremos letras maiúsculas A, B, ..., para representá-los. Exemplo: Um baralho padrão com 52 cartas contém 4 naipes (espadas, copas, paus, ouros), cada um dos quais possuindo 13 cartas diferentes (ás, rei, dama, valete, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2). Se escolhermos aleatoriamente uma carta do baralho, qual a probabilidade da carta ser uma dama?

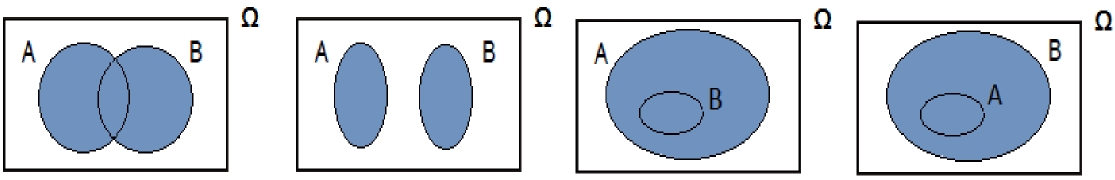
Ora,

Ω é o conjunto das 52 cartas,

A = {dama de espadas, dama de copas, dama de paus, dama de ouros}.

Dentre os conjuntos de eventos podemos considerar a *união* do conjunto de eventos de A com o conjunto de eventos de B, que será denotado por $A \cup B$, e equivale à ocorrência de um conjunto de eventos de A, ou um conjunto de eventos de B, ou um conjunto de eventos de ambos.

$$\mathbf{A \cup B = \{\, x \in \Omega \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}}$$

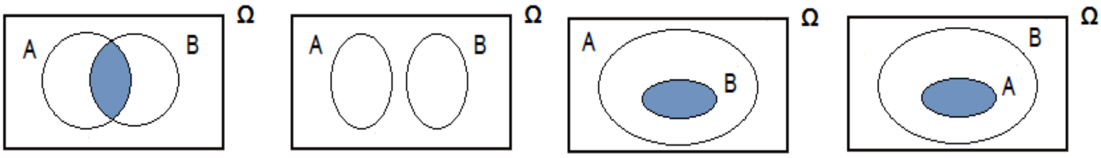


Toda a região hachurada representa A ∪ B.

Figura 2: Representação da união de dois conjuntos de eventos: A ∪ B.

A ocorrência simultânea de eventos do conjunto A e eventos do conjunto B será denotada por $A \cap B$ e será chamada de conjunto de eventos *intersecção* (de A com B).

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Toda a região hachurada representa A ∩ B.

Figura 3: Representação da intersecção de dois conjuntos de eventos: A ∩ B.

O conjunto *complementar* de eventos de A, denotado por Ā, é o conjunto de eventos que ocorrem se, e somente se, não ocorrem eventos de A.

$$\bar{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

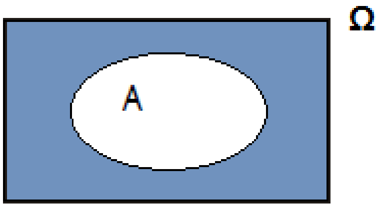


Figura 4: Representação do conjunto complementar de eventos de A = Ā.

Dois conjuntos de eventos A e B dizem-se *mutuamente exclusivos* ou *disjuntos*, quando a ocorrência de um deles impossibilita a ocorrência do outro. Os dois conjuntos de eventos não têm nenhum elemento em comum, isto é, $A \cap B = \emptyset$ (conjunto vazio).

Se $A \cap B = \emptyset$, então os conjuntos de eventos são mutuamente exclusivos.

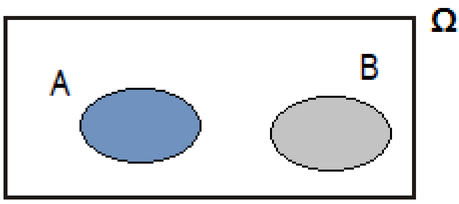


Figura 5: Representação do conjuntos de eventos mutuamente exclusivos: $A \cap B = \emptyset$

3.3 Probabilidade de um conjunto de eventos

Em fenômenos aleatórios tais como, lançamento de uma moeda, lançamento de um dado, extração de uma carta de um baralho entre outros, todos os resultados possíveis tem a mesma probabilidade de ocorrer. Tais fenômenos são chamados *fenômenos equiprováveis* ou *igualmente prováveis.* Assim, por exemplo, no lançamento de uma moeda a probabilidade do evento cara ou coroa ocorrer são igualmente prováveis, ou seja, a probabilidade de ocorrência de cada um é ½.

Sejam Ω um espaço amostral finito e equiprovável, e A um conjunto de eventos de Ω. A probabilidade de ocorrer algum elemento de A é indicada por P(A) é definida por:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis\ ao\ conjunto\ de\ eventos\ de\ \ A}{número\ de\ casos\ possíveis}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Onde n(A) e n(Ω) indicam, respectivamente, a quantidade de elementos de A e de Ω.

Exemplo: Considere o fenômeno aleatório lançamento de um dado e o evento A “sair número ímpar”. Qual a probabilidade deste evento ocorrer?

Solução:
Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
A = {1, 3, 5}

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5}$$

Portanto, a probabilidade deste evento ocorrer é 0,5 ou 50%.

Assim, pela definição, a probabilidade é uma função cujo domínio é o conjunto das partes do espaço amostral Ω e o contradomínio é [0,1] e, cada parte do Ω é um conjunto de eventos. Dessa forma:

i) Para todo conjunto de evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) Se A e B são conjuntos de eventos mutuamente exclusivos, ou seja, conjuntos de eventos que não podem ocorrer simultaneamente (isto é, $A \cap B = \emptyset$) então,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Exemplo 1: Em uma urna, há 7 bolas azuis, 4 verdes e 9 vermelhas. Retirando-se uma bola ao acaso, determine a probabilidade de ela ser:

a) azul.

b) verde.

c) vermelha.

d) azul ou vermelha.

Solução: O espaço amostral é o conjunto de todas as bolas que estão contidas na urna. Então, $n(\Omega)$ = número de casos possíveis = 20.

a) Se um elemento de A indica o evento “a bola retirada da urna é azul”, temos que $n(A) = 7$ e portanto;

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{20}.$$

b) Se um elemento de B denota o evento “a bola retirada da urna é verde”, temos que $n(B) = 4$ e portanto;

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

c) Se um elemento de C denota o evento “a bola retirada da urna é vermelha”, temos que $n(C) = 9$ e portanto;

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{9}{20}.$$

d) Se um elemento de A U C denota o evento “a bola retirada da urna é azul ou vermelha”, como A e C são conjuntos de eventos mutuamente exclusivos, então A ∩ C = Ø e, portanto, P (A U C) = P(A) + P(C). Assim,

$$P(\mathrm{A\ U\ C}) = \frac{7}{20} + \frac{9}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

Exemplo 2: Dois dados são lançados simultaneamente. Calcule a probabilidade de se obter 7 como soma dos resultados.

Solução: Há 6 x 6 = 36 resultados possíveis igualmente prováveis, logo n(Ω) = 36. Se um elemento de A indica o evento “obter 7 como soma dos resultados”, temos que: A = {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}, logo n(A) = 6 e portanto;

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Teorema 1: Sejam A e B conjuntos quaisquer de eventos de um espaço amostral Ω, então,

i) P(Ā) = 1 – P(A), onde Ā é o complementar de A;
ii) P(Ø) = 0, onde Ø é o conjunto vazio;
iii) P(A \ B) = P(A) – P(A ∩ B), onde A \ B é o conjunto dos elementos de A que não estão em B, (conjunto diferença entre A e B);
iv) P (A U B) = P(A) + P(B) – P (A ∩ B);
v) Se B ⊂ A então P(A) ≥ P(B).

Demonstração:

i) Segue da definição de probabilidade que P(Ω) = 1.
Além disso, A U Ā = Ω e A ∩ Ā = Ø, isto é, A e Ā são mutuamente excludentes.
Portanto,

1 = P(Ω) = P (A U Ā) = P(A) + P(Ā).

Segue que, P(Ā) = 1 – P(A).

ii) Podemos escrever, $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$, pois Ω e $\emptyset$ são mutuamente excludentes. Portanto, $P(\emptyset) = 0$.

iii) Observe que $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Além disso, $A \setminus B$ e $A \cap B$ são mutuamente excludentes. Portanto,

$$P(A) = P[(A \setminus B) \cup (A \cap B)] = P(A \setminus B) + P(A \cap B).$$

Segue que, $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iv) Observe que $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$. Além disso, $A \setminus B$ e B são mutuamente excludentes. Portanto, $P(A \cup B) = P[(A \setminus B) \cup B] = P(A \setminus B) + P(B)$. Como $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$. Daí resulta que,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

v) Segue do item (iii) acima que $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$. Mas, se $B \subset A$ então $A \cap B = B$. Logo, $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$. Como $P(A \setminus B) \geq 0$, temos que $P(A) \geq P(B)$.

Exemplo 1: Ao lançarmos dois dados, qual é a probabilidade de a soma dos números das duas faces que ficaram para cima ser igual a 14?

Solução: Isso caracteriza um evento impossível, uma vez que a soma máxima dos números de duas faces é 12, com as duas faces 6 voltadas para cima. Esse evento não ocorre, portanto o conjunto de eventos favoráveis é vazio. Assim, a probabilidade desse evento é zero.

Exemplo 2: Considere o experimento lançamento de um dado e os seguintes eventos: A = {5}, isto é, o evento de sair o número 5, B = {2, 4, 6}, isto é, o conjunto dos eventos de sair um número par e C = {2,3,5}, isto é, o conjunto dos eventos de sair um número primo. Determine o espaço amostral Ω e as probabilidades: $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$ e $P(\bar{A})$.

Solução: Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6};

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \ ;$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} \ ;$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} \ ;$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} \ ;$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \ ;$$

$$P\ (\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \ .$$

Exemplo 3: Retira-se uma carta de um baralho comum de 52 cartas. Qual a probabilidade desta carta ser um sete ou uma carta de espadas?

Solução: O espaço amostral Ω é o conjunto de todas as cartas. Assim temos que $n(\Omega)$ = 52. Se um elemento de A é identificado pelo evento “a carta retirada do baralho é um sete”, temos que $n(A)$ = 4 e portanto, $P(A) = \frac{4}{52}$. Enquanto, um elemento de B é identificado pelo evento “a carta retirada do baralho é uma carta de espadas”, temos que $n(B)$ = 13 e portanto, $P(B) = \frac{13}{52}$. Assim, temos que um elemento da intersecção de A com B indica o evento “a carta retirada do baralho é um sete de espadas”, então $n(A \cap B) = 1$. Logo, pelo teorema 1, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} \ .$$

Exemplo 4: Um número natural entre 1 e 300 é escolhido aleatoriamente. Calcule a probabilidade de que ele seja divisível por 3 ou por 5.

Solução: Sejam A e B os conjuntos de eventos que acontecem se o número escolhido for divisível por 3 e por 5 respectivamente. Precisamos calcular $P(A \cup B)$. Temos: $\mathrm{A} = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 100\}$, $\mathrm{B} = \{5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 60\}$ e $A \cap B = \{15 \cdot 1, 15 \cdot 2, 15 \cdot 3, \dots, 15 \cdot 20\}$. Logo, a quantidade de números naturais entre 1 e 300 divisíveis por 3 é 100; a quantidade de números naturais entre 1 e 300 divisíveis por 5 é 60, e a quantidade dos divisíveis por 3 e 5 simultaneamente é 20.

Temos portanto,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}\ ;$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{60}{300} = \frac{1}{5}\ ;$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}.$$

Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}.$$

3.4 Probabilidade Condicional

Existem situações em que a probabilidade de um determinado evento ocorrer depende da ocorrência de outro evento. Esta é chamada de probabilidade condicional que é então definida da maneira seguinte. A *probabilidade condicional* de A, dado que ocorreu B, é definida como sendo a divisão da probabilidade de ocorrência de ambos os conjuntos de eventos A e B pela probabilidade de ocorrência do conjunto de eventos B, a saber,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\ , se\ P(B) \neq 0.$$

Exemplo 1: Calcular a probabilidade de se obter soma 8 no lançamento de dois dados sabendo que o resultado do lançamento foi dois números ímpares.

Solução: Seja A o conjunto dos eventos tais que a soma dos números seja 8 e B o conjunto dos eventos tais que os dois números sejam ímpares. Assim, $P(A \cap B)$ é a probabilidade de se obter apenas números ímpares que somam 8 no lançamento de dois dados. As únicas combinações das 36 possíveis são: (3,5) e (5,3). Portanto, $P(A \cap B) = \ 2/36$.

Já P(B) é a probabilidade de obter somente números ímpares no lançamento de dois dados. As únicas combinações dentro das 36 possíveis são:

(1,1); (1,3); (1,5); (3,1); (3,3); (3,5); (5,1); (5,3) e (5,5).

Logo, $P(B) = \frac{9}{36}$.

Utilizando a fórmula para probabilidade condicional, teremos:

$$P(A/B) \ = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{2}{36} \cdot \frac{36}{9} = \frac{2}{9} \ .$$

Dizemos que um conjunto de eventos de A é *independente* de um conjunto de eventos de B se a probabilidade de A é igual a probabilidade condicional de A dado B, isto é, se $P(A) = P(A/B)$. Neste caso, $P(A \cap B) = P(A) \ \cdot \ P(B)$.

Exemplo 1: Uma moeda é lançada duas vezes. Vamos calcular a probabilidade de:

a) obtermos cara no segundo lançamento;

b) obtermos cara no segundo lançamento, sabendo que obtivemos cara no primeiro lançamento.

Solução:

a) O espaço amostral é:

Ω = {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, coroa),(coroa, cara)} ∴ n(Ω) = 4.

O evento que queremos é A = {(cara, cara), (coroa, cara)} ∴ n(A) = 2.

Logo,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

b) Temos dois conjuntos de eventos a considerar:

O conjunto de eventos B obter cara no primeiro lançamento, então B = {(cara, cara), (cara, coroa)} e o conjunto de eventos A obter cara no segundo lançamento, então A = {(cara, cara), (coroa, cara)}.

Como sabemos que ocorreu o conjunto de eventos B, temos que o conjunto de eventos A só pode ter ocorrido na intersecção de A e B:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$$

Observando as respostas dos itens (a) e (b), temos que $P(A/B) = P(A) = \frac{1}{2}$.

Por isso, dizemos que A e B são conjuntos de eventos independentes.

Exemplo 2: Uma urna tem 50 bolas, sendo 20 azuis e 30 brancas. Se sortearmos 2 bolas, 1 de cada vez e repondo a sorteada na urna, qual será a probabilidade de a primeira ser azul e a segunda ser branca?

Solução: O espaço amostral Ω é o conjunto de todas as bolas contidas na urna. Portanto, $n(\Omega) = 50$. Sejam A o conjunto dos eventos tais que a bola é azul e B o conjunto dos eventos tais que bola é branca. Temos que, $P(B/A) = P(B)$, porque o fato de sair bola azul na primeira retirada não influenciou na segunda retirada, já que ela foi reposta na urna. Logo, esses conjuntos de eventos são independentes.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{20}{50} \cdot \frac{30}{50} = \frac{6}{25} \ .$$

Exemplo 3: Considere cartões numerados de 1 a 100 em uma urna e misturados. Retiramos um cartão. Se o número do cartão é no mínimo 25, qual a probabilidade que ele seja 87?

Solução: O espaço amostral Ω é o conjunto de todos os cartões. Portanto, $n(\Omega)$ = 100. Vamos chamar de A o conjunto dos eventos tais que os números dos cartões que não são inferiores a 25, assim: $n(A) = 76$. E vamos chamar de B o conjunto de eventos tais que a probabilidade de que o número retirado seja 87. Então, $n(B) = 1$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B/A) = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{76}{100}} = \frac{1}{100} \cdot \frac{100}{76} = \frac{1}{76}.$$

Exemplo 4: Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se, sucessivamente, sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade de ambas serem brancas.

Solução: Sejam B_1 o conjunto dos eventos tais que a primeira bola é branca e B_2 o conjunto dos eventos tais que a segunda bola é branca. Então, temos

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}.$$

4. APLICAÇÕES DA PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

No estudo da probabilidade pode ser interessante trabalhar o conceito de probabilidade geométrica, pois os alunos podem conectar os estudos de probabilidade com os conhecimentos geométricos. Para a resolução dos problemas envolvendo a probabilidade geométrica é necessário o uso da geometria, utilizando-se os conceitos sobre comprimento, área e volume. Para isso, utilizaremos como base os textos [3], [5], [10] e [13].

4.1 Probabilidade envolvendo comprimento

Primeiramente, escolha um ponto de um determinado segmento.
Sejam X e Y pontos de um segmento de extremidades A e B.

Figura 6:Cálculo de probabilidade envolvendo comprimento.

Diremos que a probabilidade de um ponto do segmento AB pertencer ao segmento XY (contido em AB) é diretamente proporcional ao comprimento de XY e não depende da posição dos pontos X e Y sobre AB. Portanto, selecionado um ponto de AB, a probabilidade de que ele pertença a XY será:

$$\boldsymbol{P(XY) = \frac{medida\ do\ comprimento\ de\ XY}{medida\ do\ comprimento\ de\ AB}}$$

Exemplo 2. 1: Qual a probabilidade de, em uma corda de comprimento 4m, um ponto pertencer exatamente aos 10 cm iniciais?

Solução: Primeiro, converteremos todos os dados à mesma unidade de medida. Assim, em uma corda de 400 cm, queremos calcular a probabilidade de um ponto pertencer aos 10 cm iniciais.
Observe a figura:

Figura 7: Representação dada no exemplo 2.1.

Assim, a probabilidade pedida é a de um ponto do segmento AB, de 400 cm, pertencer ao segmento XY, de 10 cm. Logo,

$$P(XY) = \frac{medida\ do\ comprimento\ de\ XY}{medida\ do\ comprimento\ de\ AB}$$

$$P(XY) = \frac{10}{400} = \frac{1}{40} = 0{,}025$$

Portanto, a probabilidade do ponto pertencer aos 10 centímetros iniciais é 2,5%.

4.2 Probabilidade envolvendo área

Consideremos uma região X do plano, contida em uma região A.

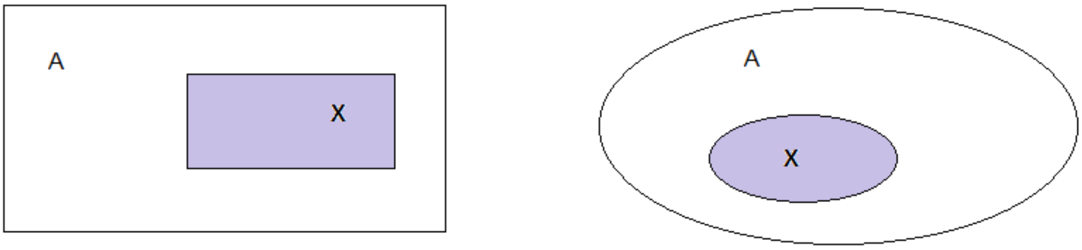
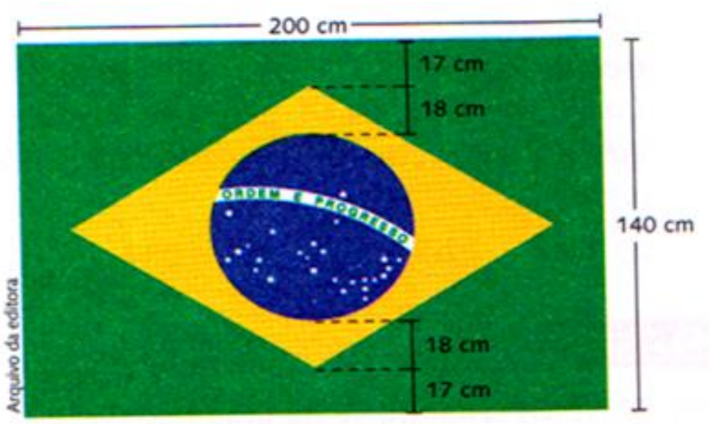


Figura 8: Cálculo de probabilidade envolvendo áreas.

Diremos que a probabilidade de um ponto da região A pertencer à região X é diretamente proporcional área de X e não depende da posição que X ocupa em A. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença a X será:

$$P(X) = \frac{medida\ da\ área\ de\ X}{medida\ da\ área\ de\ A}$$

Exemplo 2.2: Observe a representação da bandeira do Brasil. Nela estão indicadas algumas de suas dimensões oficiais (segundo o INMETRO). O retângulo pintado de verde mede 200 cm de comprimento por 140 cm de largura. Os vértices do losango pintado de amarelo distam 17 cm dos lados do retângulo. Determine, a probabilidade de, ao escolhermos um ponto ao acaso no interior do retângulo, esse ponto pertencer ao losango.



https://brainly.com.br/tarefa/1019515

Figura 9: Bandeira do Brasil.

Solução: Temos que a área do retângulo de comprimento 200 cm e largura 140 cm é 28 000 cm^2. Analisando o losango, temos que a diagonal maior mede 166 cm e a diagonal menor mede 106 cm. Logo, a área do losango é 8 798 cm^2. Assim, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{medida\ da\ área\ do\ losango\ inscrito}{medida\ da\ área\ do\ retângulo} = \frac{8798}{28000} \cong 0{,}3142$$

Portanto, escolhido um ponto ao acaso no retângulo, a probabilidade dele pertencer ao losango é de aproximadamente 31,42 %.

4.3 Probabilidade envolvendo volume

Suponhamos um sólido V' no espaço, contido em um sólido V.

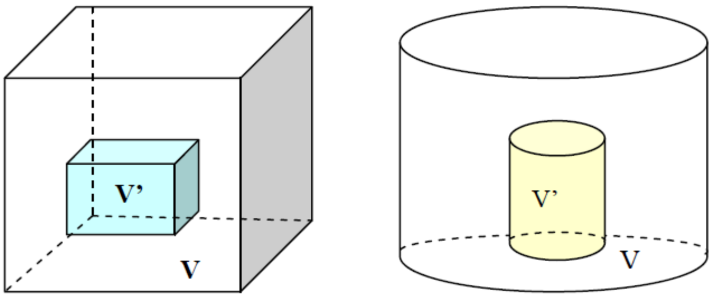


Figura 10: Cálculo de probabilidade envolvendo volumes.

Diremos que a probabilidade de um ponto do sólido de V (volume V) pertencer ao sólido V' (volume V') é diretamente proporcional ao volume de V' e não depende da posição que V' ocupa em V. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de V, a probabilidade de que ele pertença a V' será:

$$P(\mathrm{V}') = \frac{medida\ do\ volume\ de\ \mathrm{V}'}{medida\ do\ volume\ de\ V}$$

Exemplo 2.3: Em uma esfera de raio $\frac{25}{4}\ cm$, temos um cone circular reto inscrito de raio 6 cm e altura 8 cm, como mostra a figura a seguir:

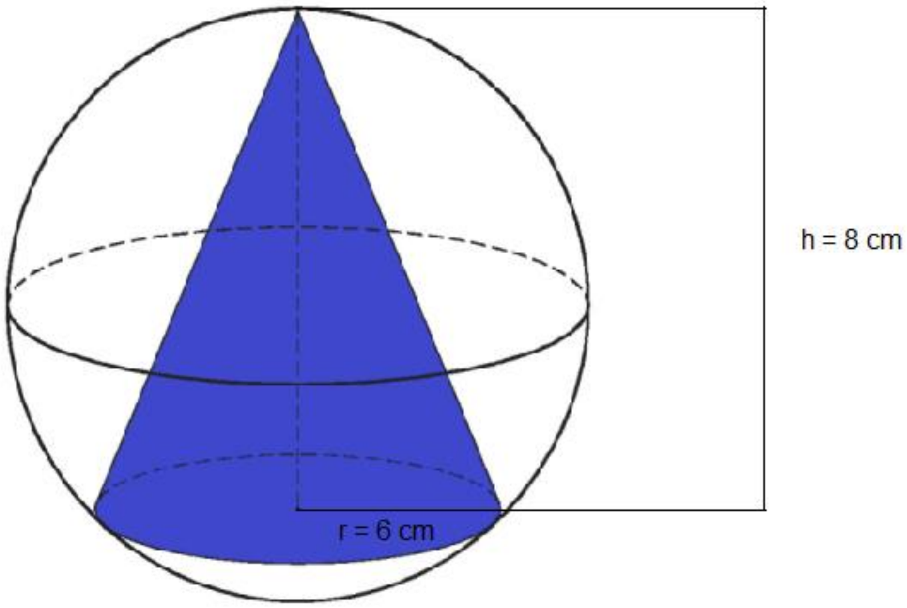


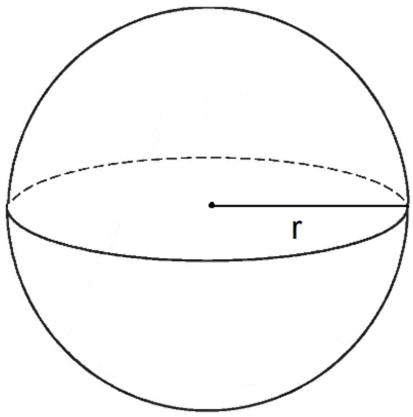
Figura 11: Representação dada no exemplo 2.3.

Qual a probabilidade de, ao pegarmos um ponto ao acaso no interior da esfera, esse ponto pertencer ao cone?

Solução: Para resolvermos esse problema, temos que saber como calcular o volume da esfera e o do cone.

O volume da esfera é dado em função do comprimento do raio, de acordo com a fórmula

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$



Onde,
V é o volume da esfera e *r* é o seu raio.

Figura 12: Volume de uma esfera.

O volume de um cone circular reto é dado, em função da área de sua base e de sua altura, pela fórmula abaixo

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Onde,
V é o volume do cone,
A_b é a área da sua base e
h é a sua altura.

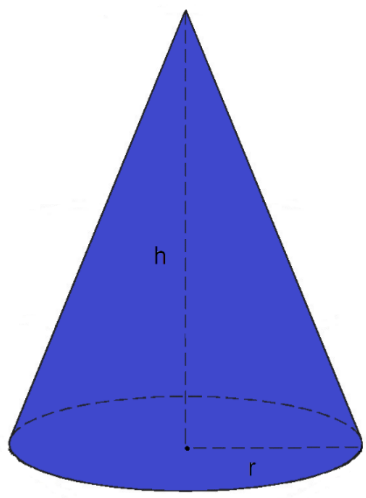
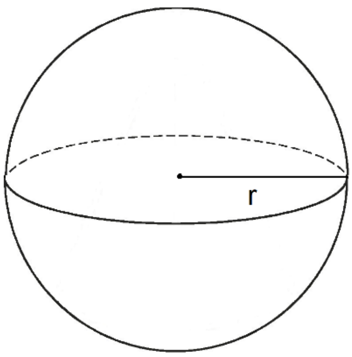


Figura 13: Volume de um cone circular reto.

Assim, o volume da esfera dada no exemplo é:

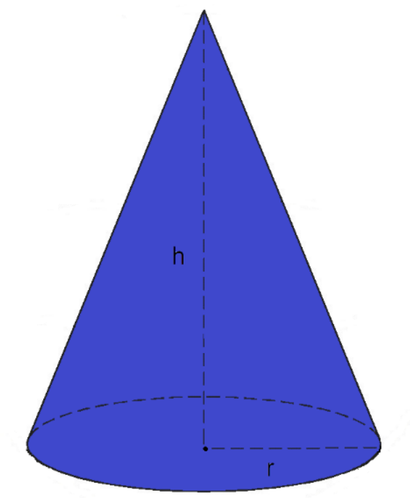


$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{25}{4}\right)^3$$

$$V = \frac{15625}{48} \cdot \pi \, cm^3.$$

Figura 14: Cálculo do volume da esfera do exemplo 2.3.

Por outro lado, o volume do cone circular reto dado no exemplo é



$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (6)^2 \cdot 8}$$

$$\boldsymbol{V = 96 \cdot \pi\, cm^3.}$$

Figura 15: Cálculo do volume do cone circular reto do exemplo 2.3.

Logo, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{medida\ do\ volume\ do\ cone\ circular\ reto}{medida\ do\ volume\ da\ esfera}$$

$$P = \frac{96\pi}{\frac{15625}{48}\pi} = \frac{4608}{15625} \cong 0{,}2949$$

Portanto, escolhido um ponto ao acaso na esfera, a probabilidade dele pertencer ao cone circular reto é de aproximadamente 29,49%.

5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

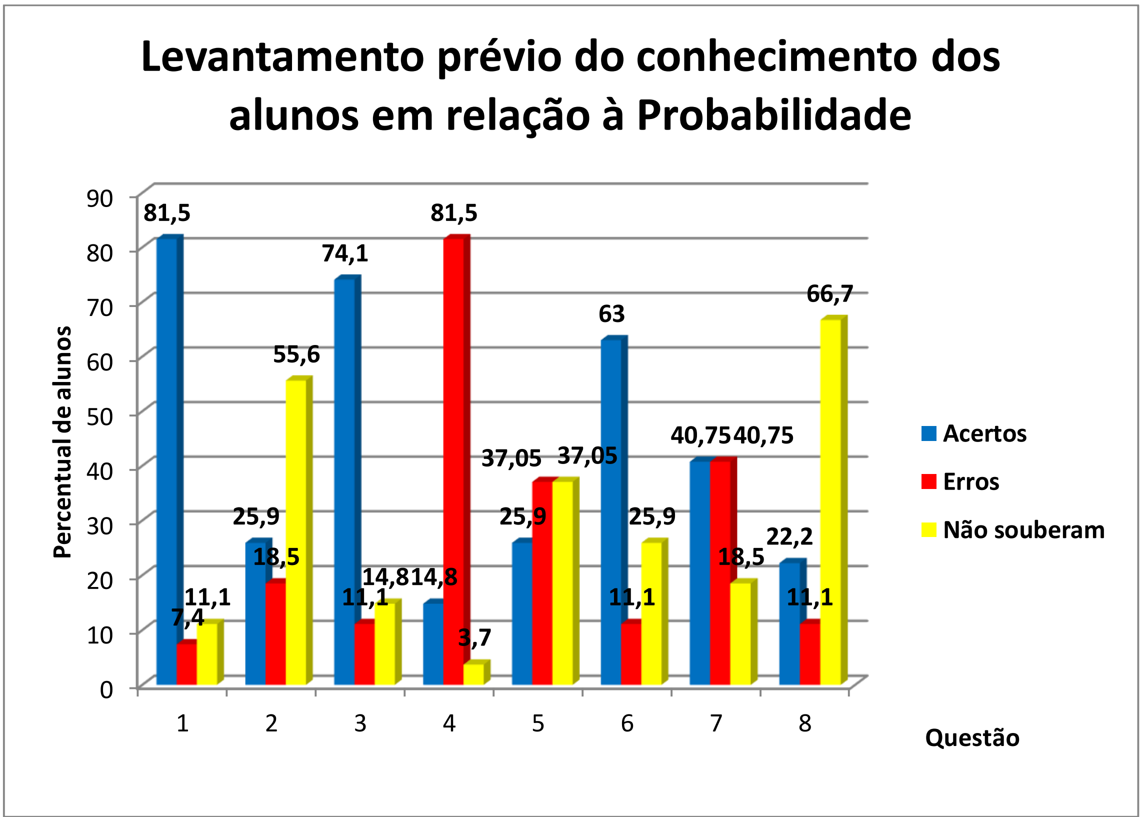
A sequência didática sobre probabilidade foi realizada com um grupo de 29 alunos da terceira série do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual de ensino do Espírito Santo, localizada na cidade de Serra. Inicialmente foi feita uma abordagem sobre o tema e um levantamento do conhecimento prévio dos alunos sobre probabilidade. O próximo passo foi o desenvolvimento da sequência didática onde foram utilizadas diferentes metodologias e ferramentas como, análise de questões de probabilidade e simulações computacionais no programa Geogebra. Foi finalizado com uma avaliação sobre o que os alunos absorveram sobre o tema.

5.1 Primeiro contato com a probabilidade em sala de aula

No primeiro momento foi feito um levantamento prévio do conhecimento dos alunos em relação à probabilidade, através de um questionário, contendo oito questões de múltipla escolha, com a finalidade de avaliar o grau de entendimento que os mesmos possuíam do que vem a ser probabilidade. O questionário diagnóstico aplicado aos educandos está no anexo I.

5.1.1 Tabulação e análise dos dados

Foram distribuídos 27 questionários para os alunos do 3º ano do Ensino Médio. Vale ressaltar que o questionário foi apresentado para os educandos antes mesmo de ser introduzido o conteúdo, com o intuito de identificar a “familiaridade” dos mesmos com a probabilidade.



Fonte: Sala de aula.

Gráfico 1: Levantamento do conhecimento prévio dos alunos

Analisando o gráfico, as questões relativas à comparação de probabilidade, que são as questões 1, 3 e 6, no anexo I, houve um maior número de acertos, revelando que os alunos possuíam um conceito intuitivo de probabilidade e foi constatado que o percentual de acertos foi superior a 60%.

Nas questões 2 e 5 os alunos não apresentaram um desempenho satisfatório, mostrando que os mesmos não conseguiam determinar a probabilidade de um evento. Nota-se também, que estas foram as questões em que houve o maior número de alunos que não souberam responder. O mesmo aconteceu com a questão 8.

Os alunos tiveram dificuldades na resolução da questão 4, onde aplica-se a probabilidade de um evento associado a um espaço amostral equiprovável, apontando o maior percentual de erro correspondendo a 81,5%.

Na questão 7, os alunos não conseguiram compreender que o fato de um evento ocorrer pode afetar a probabilidade de ocorrência de outro evento, pois obtivemos o mesmo percentual de acertos e erros nesta questão equivalente a 40,75%.

Analisando o gráfico é possível concluir que: Os alunos apresentaram um resultado razoável, sendo aproximadamente 43,5% de acertos, 27,3% de erros e 29,2% não souberam responder as questões.

Após a aplicação do questionário diagnóstico foi feito um breve relato sobre o surgimento, o desenvolvimento e a evolução do estudo da probabilidade. Em seguida, foi apresentada a probabilidade geométrica.

5.2 Desenvolvimento

O segundo momento consistiu em mostrar a teoria do tema abordado no trabalho aos alunos, e em seguida foram elaboradas questões para investigação do tema, sendo algumas destas atividades contidas no livro didático ([18], páginas 246 a 279) e outras retiradas da *internet ([6] e [7]).*

5.2.1 Atividades de probabilidade

Exemplos de atividades que foram desenvolvidas em sala de aula para a aprendizagem de probabilidade pelos estudantes.

Exercício 01: (ENEM – MEC) As 23 ex-alunas de uma turma que completaram o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico abaixo.

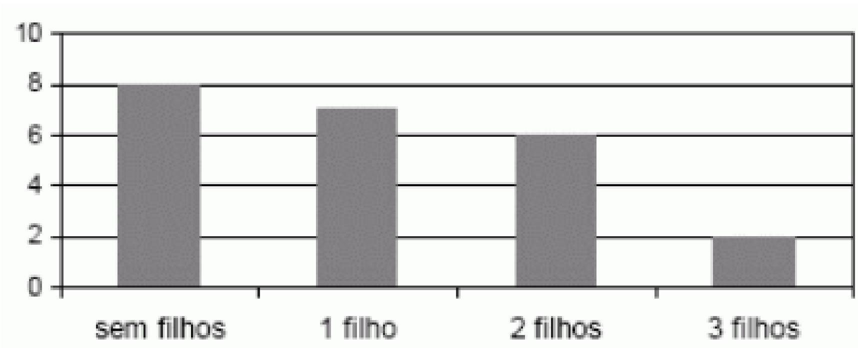


Gráfico 2: Modelo de atividade de probabilidade (exercício 01)

Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é

(A) 1/3 (B) 1/4. (C) 7/15. (D) 7/23. (E) 7/25.

Solução: O gráfico de barras acima mostra que 8 ex-alunas não têm filhos, 7 ex-alunas têm 1 filho cada, 6 ex-alunas têm 2 filhos cada e 2 ex-alunas têm 3 filhos cada. Então, o número total de filhos é:

$$n(\Omega) = 0 \cdot 8 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 0 + 7 + 12 + 6 = 25$$

Para o evento A, que representa “sortear uma criança que seja filho(a) único(a)”, há 7 casos possíveis, logo n(A) = 7. Desse modo, há 7 chances em 25 de que a criança sorteada seja filho(a) único(a), ou seja:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{25}$$

Assim, a alternativa correta é a opção (E).

<u>Exercício 02:</u> Uma pessoa joga uma moeda quatro vezes, qual a probabilidade de sair CARA nas quatro jogadas?

(A) 1/2 (B) 1/4 (C) 1/8 (D) 1/16 (E) 1

Solução 1 : O espaço amostral para essas jogadas possuirá $2^4 = 16$ elementos. O evento CCCC ocorrerá somente uma vez. Logo, $P(CCCC) = \frac{1}{16}$.

Solução 2: Como as jogadas são independentes, isto é, um resultado não depende do outro, temos pelo teorema da multiplicação:

$$P(C \cap C \cap C \cap C) = P(C) \cdot P(C) \cdot P(C) \cdot P(C) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} .$$

<u>Exercício 03:</u> (UPF) Uma urna contém 3 bolas brancas e 4 bolas pretas. Tira-se, sucessivamente, 2 bolas. Então a probabilidade das bolas serem da mesma cor, é:

(A) 1/7 (B) 2/7 (C) 3/7 (D) 4/7 (E) 5/7

Solução: Não há reposição, pois as retiradas são sucessivas.

$$P(mesma\ cor) = P(BB\ \cup PP) = P(B \cap B) + P(P \cap P) = \left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{3}{6}\right)$$

$$P(mesma\ cor) = \frac{6+12}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}.$$

OBS: Usando o espaço amostral:

$$P(mesma\ cor) = \frac{C_3^2}{C_7^2} + \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{3+6}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}.$$

<u>Exercício 04:</u> (VUNESP) Dois jogadores, A e B vão lançar um par de dados. Eles combinam que, se a soma dos números dos dados for 5, A ganha, e, se essa soma for 8, B é quem ganha. Os dados são lançados. Sabe-se que A não ganhou. Qual a probabilidade de B ter vencido?

(A) 10/36　　(B) 5/32　　(C)5/36

(D) 5/35　　(E) não se pode calcular

Solução: O espaço amostral do lançamento de dois dados é composto de 36 elementos (pares ordenados). O evento "soma 5" será A = {(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)}. Os eventos "soma 5" e soma "8" são disjuntos, logo não há interseção. Se A não ganhou o espaço amostral ficará reduzido para 36 – 4 = 32 elementos. O evento soma 8 será B = {(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)}.

Logo, a probabilidade de B vencer será: $P(soma\ 8) = \frac{5}{32}$.

<u>Exercício 05:</u> Os baralhos comuns com 52 cartas são divididos em quatro naipes distintos - copas, espadas, ouros e paus. Cada naipe possui 13 cartas, sendo que 9 delas são numeradas com os números naturais de 2 a 10. A carta que representa o 1 é aquela que contém a letra A, chamada de Ás, palavra originária do latim que significa "uma unidade". As outras três cartas – Valete, Dama e Rei, também conhecidos como figuras – são representadas pelas iniciais das palavras em inglês: J, de *jack* (valete), Q de *queen* (rainha) e K de *king* (rei). Ao se retirar uma carta aleatoriamente de um desses baralhos, qual é a probabilidade de essa carta ser:

a) um rei de paus?

b) uma carta com número 8?

c) um valete ou uma carta de ouros?

d) uma dama ou uma carta com o número 3?

e) uma carta de copas, que não seja figura?

Solução:

a) Há quatro reis em um baralho, mas somente um é de paus. Portanto,

$$P(rei\ de\ paus) = \frac{1}{52}.$$

b) Há quatro 8 em um baralho, um para cada naipe. Portanto,

$$P(número\ 8) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

c) Sejam A e B os eventos “a carta ser um valete” e “a carta ser uma carta de ouros”, respectivamente. Temos que:

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}\ ;$$

$$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}\ ;$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}\ ;$$

A probabilidade de que uma carta escolhida aleatoriamente seja um valete ou uma carta de ouros é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}.$$

d) Sejam C e D os eventos “a carta ser uma dama” e “a carta ser uma carta com o número 3”, respectivamente. Temos que:

$$P(C) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \; ;$$

$$P(D) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \; ;$$

Uma carta não pode ser dama e 3 ao mesmo tempo. Logo, $P\ (C \cap D) = 0$.

A probabilidade de que uma carta escolhida aleatoriamente seja uma dama ou uma carta com o número 3 é dada por:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D)$$

$$P(C \cup D) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}.$$

e) Cada naipe tem 13 cartas, sendo três delas figuras; portanto

$$P(\,carta\ de\ copas, que\ não\ seja\ figura) = \frac{13-3}{52} = \frac{10}{52} = \frac{5}{26}.$$

<u>Exercício 06:</u> (ENEM - MEC) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é:

(A) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

(B) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

(C) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

(D) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
(E) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

Solução: Probabilidade é encontrada através da razão entre o número de casos favoráveis pelo total de casos. Como o dado é lançado duas vezes e para cada lançamento temos 6 possibilidades, o total de possibilidades é de 6 x 6 = 36 possibilidades. Os casos favoráveis variam de acordo com o palpite de cada um, José acredita que a soma será 7. Nesse caso, os casos favoráveis são: (1,6); (6,1); (2,5); (5,2); (3,4); (4,3), totalizando 6. Paulo acredita que a soma é 4, sendo então os casos favoráveis (1,3); (3,1); (2,2), totalizando 3. Antônio acredita que a soma seria de 8, sendo então os casos favoráveis: (2,6); (6,2); (3,5); (5,3); (4,4), totalizando 5. Assim, quem tem a maior possibilidade de acertar a soma é José, já que há 6 possibilidades para formar a sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo. Portanto, a alternativa correta é D.

Exercício 07: De um grupo de 48 pessoas, 36 possuem cachorro como animal de estimação, 20 possuem gato, 12 possuem as duas espécies e os demais não possuem animal ou possuem outra espécie de animal de estimação. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa desse grupo, qual é a probabilidade aproximadamente dela possuir:
a) cachorro de estimação?
b) cachorro ou gato de estimação?
c) apenas gato de estimação?

Solução: Sejam C e G os eventos “possuir cachorro como animal de estimação” e “possuir gato como animal de estimação”, respectivamente.

a) A probabilidade de a pessoa possuir cachorro de estimação é dada por:

$$P(C) = \frac{36}{48} = 75\% .$$

b) Temos então: $(C) = \frac{36}{48}$; $P(G) = \frac{20}{48}$ e $P(C \cap G) = \frac{12}{48}$. Então:

$$P(C \cup G) = P(C) + P(G) - P(C \cap G) = \frac{36}{48} + \frac{20}{48} - \frac{12}{48} = \frac{44}{48}$$

$$\cong 0,9167 \ ou \ 91{,}67\%.$$

Portanto, a probabilidade, aproximadamente, dela possuir cachorro ou gato de estimação é 91,67%.

c) Temos 20 pessoas que possuem gatos, mas destas sabemos que 12 também possuem cachorros, assim:

Pessoas que só possuem gatos = 20 - 12 = 8 pessoas.

A probabilidade da pessoa possuir apenas gato de estimação é dada por:

$P(apenas\ gato\ de\ estimação) = \frac{8}{48} \cong 0{,}1667\ ou\ 16{,}67\%$.

<u>Exercício 08:</u> De cada lote de 20 peças produzidas por uma máquina que está com um pequeno problema de regulagem, 4 apresentam algum tipo de defeito. Retirando-se aleatoriamente 2 peças de um desses lotes, sem reposição, calcule a probabilidade de se retirar:

a) Duas peças perfeitas

b) Uma peça perfeita e um defeituosa

c) Duas peças defeituosas

Solução:

a) Duas peças perfeitas:

$$\mathrm{P} = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} = \frac{240}{380} = \frac{12}{19} \cong 0{,}6316\ ou\ 63{,}16\%.$$

Logo, a probabilidade de se retirar duas peças perfeitas é aproximadamente 63,16%.

b) O enunciado não fala uma ordem específica, portanto devemos calcular todas as ordens, nesse caso são apenas duas:

- Uma peça perfeita e uma defeituosa;
- Uma peça defeituosa e uma perfeita.

Então,

$$P_1 = \frac{16}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{64}{380} = \frac{32}{190} \text{ ;}$$

$$P_2 = \frac{4}{20} \cdot \frac{16}{19} = \frac{64}{380} = \frac{32}{190} \text{ ;}$$

$$\mathrm{P} = P_1 + P_2 = \frac{32}{190} + \frac{32}{190} = \frac{64}{190} = \frac{32}{95} \cong 0{,}3368 \ ou\ 33{,}68\%.$$

Logo, a probabilidade de se retirar uma peça perfeita e uma defeituosa, considerando todas as combinações possíveis é aproximadamente 33,68%.

c) Duas peças defeituosas:

$$\mathrm{P} = \frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} = \frac{12}{380} = \frac{3}{95} \cong 0{,}0316 \ ou\ 3{,}16\%.$$

Logo, a probabilidade de se retirar duas peças defeituosas é, aproximadamente 3,16%.

<u>Exercício 09:</u> (ENEM - MEC) Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em: “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.

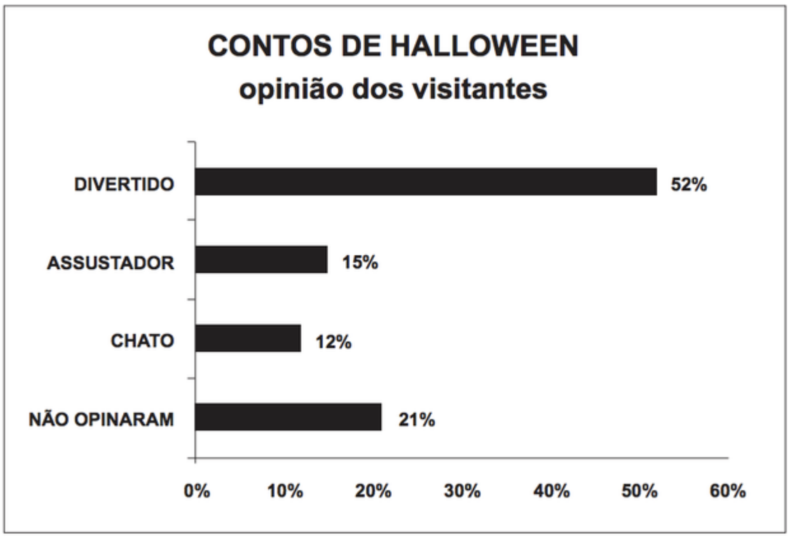


Gráfico 3: Modelo de atividade de probabilidade (exercício 09)

O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”.

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por:

(A) 0,09 (B) 0,12 (C) 0,14 (D) 0,15 (E) 0,18

Solução:

Trata-se de um problema de probabilidade condicionada, onde o espaço amostral não é o total de entrevistados, mas sim o total de pessoas que opinaram, já que esta foi a condição imposta pelo problema. Como o sorteio foi entre os que opinaram, vemos que o 21% não opinou, sobrando então 79% de opinantes.

Número total de opinantes = 0,79 · 500 = 395.

Número de opinantes que votou “chato” = 0,12 · 500 = 60.

Assim sendo, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso dentre as que opinaram, ter assinalado “chato” será:

$$P(Chato) = \frac{60}{395} \cong \ 0{,}15 \, .$$

Portanto, a alternativa correta é D.

Exercício 10: (UEL-PR) De um total de 500 estudantes da área de exatas, 200 estudam Cálculo Diferencial e 180 estudam Álgebra Linear. Esses dados incluem 130 estudantes que estudam ambas as disciplinas. Qual é a probabilidade de que um estudante escolhido aleatoriamente esteja estudando Cálculo Diferencial ou Álgebra Linear?

(A) 0,26 (B) 0,50 (C) 0,62 (D) 0,76 (E) 0,80

Solução: Sejam C e A os eventos "estudar Cálculo Diferencial" e "estudar Álgebra Linear", respectivamente. Temos então,

$$P(A) = \frac{180}{500} = \frac{9}{25}\ ;$$

$$P(C) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}\ ;$$

$$P(C \cap A) = \frac{130}{500} = \frac{13}{50}\ ;$$

A probabilidade de que um estudante escolhido aleatoriamente esteja estudando Cálculo Diferencial ou Álgebra Linear é dada por:

$$P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(A \cap C) = \frac{2}{5} + \frac{9}{25} - \frac{13}{50} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ ou\ 50\%.$$

Portanto, a alternativa correta é B.

5.2.2 Atividades para a compreensão de probabilidade geométrica com a utilização do programa Geogebra

Atividades de probabilidade geométrica utilizando o programa Geogebra, aplicado aos educandos. As atividades foram apresentadas no Datashow, utilizando o Geogebra.

Atividade 1

Essa atividade tem como proposta responder a duas questões: Qual é a probabilidade de que uma pessoa, (de olhos vendados) ao arremessar um dardo, atinja o disco central de 10 cm de raio (*r*) de um alvo circular de 45 cm de raio (*R*)? E se for agora um quadrado de 5 cm de lado (*l*), colocado no interior de um quadrado de lado 20 cm (*L*), qual a probabilidade que tenha atingido o quadrado menor?

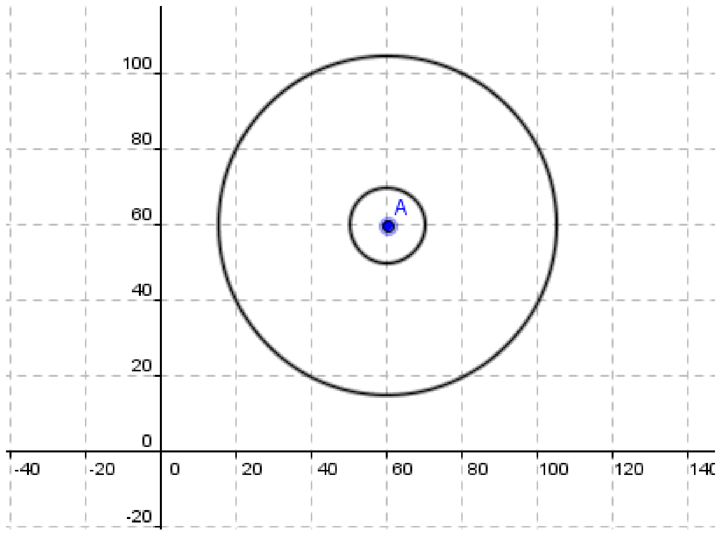


Figura 16: Atividade 1 de probabilidade geométrica no Geogebra.

Solução:

Para a primeira pergunta, a resposta será:

$$P_{G1} = \frac{área\ do\ circulo\ menor}{área\ do\ circulo\ maior} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{10^2}{45^2} = \frac{100}{2025} \cong 0{,}0494 \cong 4{,}94\%\,.$$

Para a segunda pergunta:

$$P_{G2} = \frac{área\ do\ quadrado\ menor}{área\ do\ quadrado\ maior} = \frac{l^2}{L^2} = \frac{5^2}{20^2} = \frac{25}{400} = 0{,}0625 = 6{,}25\%\,.$$

Atividade 2

Observe o gráfico e imagine ser um alvo:

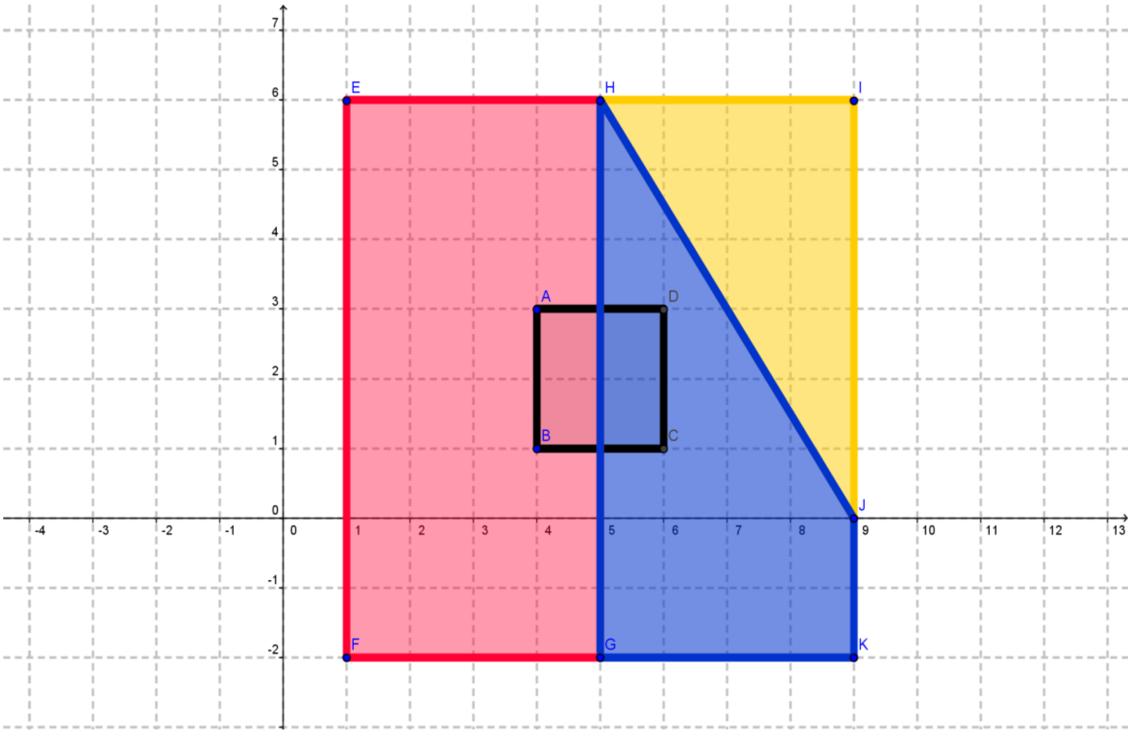


Figura 17: Atividade 2 de probabilidade geométrica no Geogebra.

a) Observando o gráfico, qual a região que o atirador atingirá com maior facilidade?

Solução: O atirador terá maior facilidade de acertar a região vermelha já que possui área maior, e menor probabilidade na região amarela, por ter área menor.

b) Calcule a probabilidade de o dardo atingir a região azul, faça o mesmo para as regiões amarela e vermelha;

Solução:

$$P(azul) = \frac{área\ da\ região\ azul}{área\ total} = \frac{20\ unidades}{64\ unidades} = 0{,}3125 = \ 31{,}25\%\,.$$

$$P(amarela) = \frac{área\ da\ região\ amarela}{área\ total} = \frac{12\ unidades}{64\ unidades} = 0{,}1875 = \ 18{,}75\%\,.$$

$$P(vermelha) = \frac{área\ da\ região\ vermelha}{área\ total} = \frac{32\ unidades}{64\ unidades} = 0{,}5 = 50\%\ .$$

c) Calcule a probabilidade de acertar área do quadrado ABCD;

Solução:

$$P(quadrado\ ABCD) = \frac{área\ do\ quadrado\ ABCD}{área\ total} = \frac{4\ unidades}{64\ unidades} = 0{,}0625 = 6{,}25\%.$$

d) Qual a probabilidade do atirador acertar a região vermelha e a área do quadrado ABCD?

Solução:

$$P(quadrado\ ABCD \cap região\ vermelha) = \frac{2\ unidades}{64\ unidades} = 0{,}03125 = 3{,}125\%.$$

e) Dado que o atirador acertou a área do quadrado ABCD, qual a probabilidade que ele acerte a região azul?

Solução:

$$P(região\ azul/quadrado\ ABCD) = \frac{P(quadrado\ ABCD \cap região\ azul)}{P(quadrado\ ABCD)} = \frac{3{,}125}{6{,}25}$$

$$= 50\%.$$

Atividade 3

O Tangram é um jogo chinês de origem milenar, composto por sete formas geométricas que, organizadas, podem formar cerca de 1700 silhuetas. Os chineses o chamam de “Tábua da sabedoria” ou “Tábua das sete sabedorias”. Considere o seguinte Tangram em um plano cartesiano.

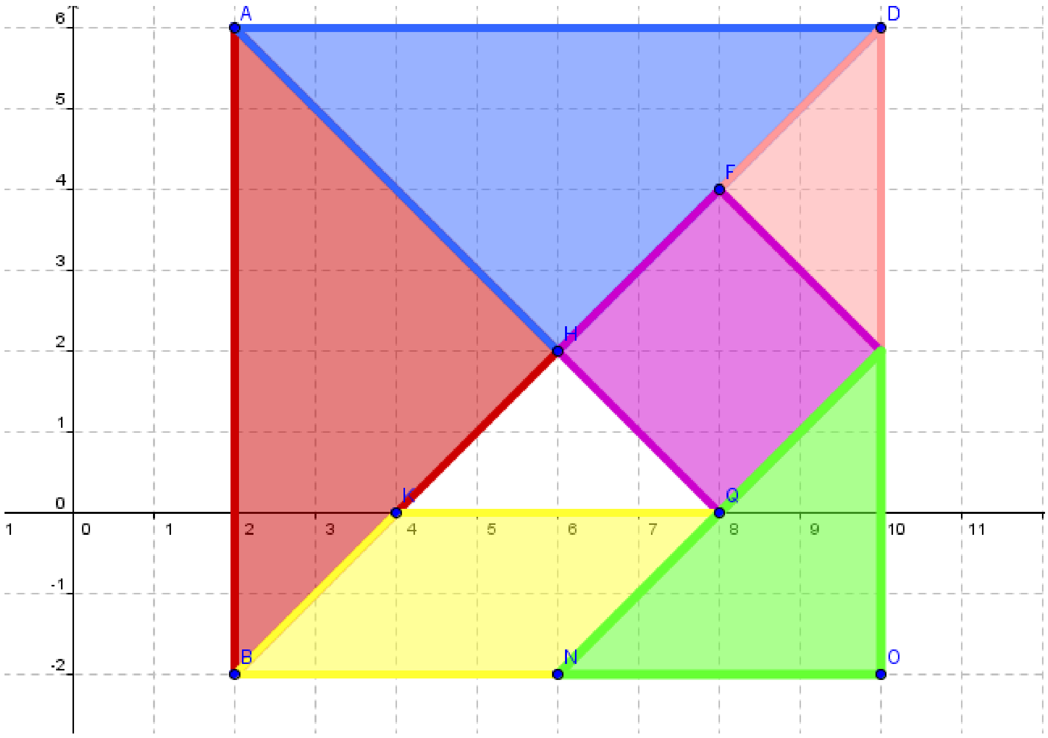


Figura 18: Atividade 3 de probabilidade geométrica no Geogebra.

a) Qual é a probabilidade de, ao marcarmos aleatoriamente um ponto pertencente ao Tangram, esse ponto:

- pertencer à região vermelha?
- pertencer à região roxa?
- não pertencer à região verde?
- não pertencer à região rosa?

Solução:

$$P(\textit{região vermelha}) = \frac{\textit{área da região vermelha}}{\textit{área total}} = \frac{16\ \textit{unidades}}{64\ \textit{unidades}} = 0{,}25$$

$$P(região\ vermelha) = 25\%.$$

$$P(região\ roxa) = \frac{área\ da\ região\ roxa}{área\ total} = \frac{8\ unidades}{64\ unidades} = 0{,}125 = 12{,}5\%.$$

$$P(não\ pertencer\ à\ região\ verde) = 1 - P\ (pertencer\ à\ região\ verde)$$

$$P(não\ pertencer\ à\ região\ verde) = 1 - \frac{8\ unidades}{64\ unidades} = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$$

$$P(não\ pertencer\ à\ região\ verde) = 87{,}5\%.$$

$$P(não\ pertencer\ à\ região\ rosa) = 1 - P\ (pertencer\ à\ região\ rosa)$$

$$P(não\ pertencer\ à\ região\ rosa) = 1 - \frac{4\ unidades}{64\ unidades} = 1 - 0{,}0625 = 0{,}9375$$

$$P(não\ pertencer\ à\ região\ rosa) = 93{,}75\%\ .$$

b) Ao marcarmos um ponto pertencente ao Tangram com ordenada negativa, qual é a probabilidade de esse ponto pertencer à região rosa?

Solução:

$$P(região\ rosa \backslash ordenada\ negativa) = 0\ .$$

c) Ao marcarmos um ponto pertencente ao Tangram com ordenada positiva, qual é a probabilidade de esse ponto pertencer à região azul?

Solução:

$$P(região\ azul \backslash ordenada\ positiva) = \frac{P(região\ azul\ \cap ordenada\ positiva)}{P(ordenada\ positiva)}$$

$$P(região\ azul \backslash ordenada\ positiva) = \frac{16}{48} = \frac{1}{3} \cong 33{,}33\%\ .$$

Observação: *Para elaboração dessas atividades utilizamos as referências [3], [11] e [18].*

5.2.3 Resultados das atividades de Probabilidade Geométrica e etapa final da sequência didática

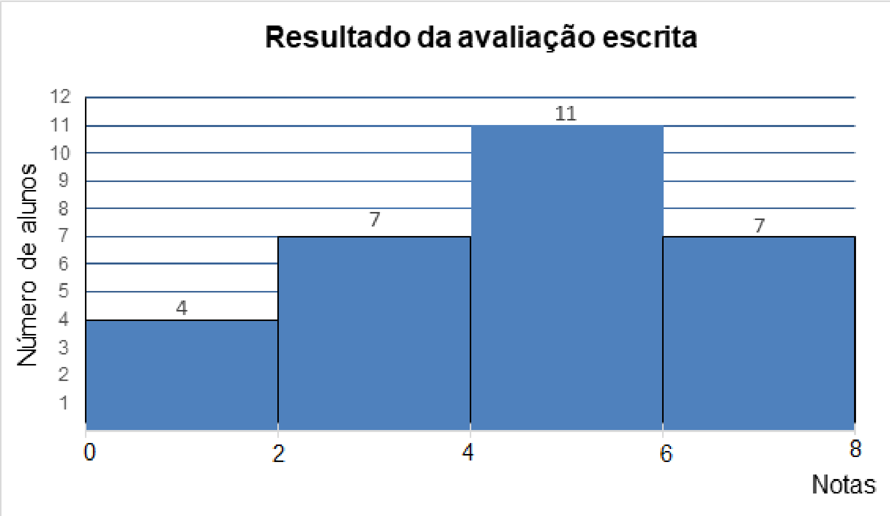
Na primeira atividade, a maioria dos alunos sentiram dificuldades na resolução, porque determinaram o evento e o espaço amostral de forma incorreta. Na primeira pergunta, no espaço amostral em vez de calcular a área da região do disco, consideraram apenas o comprimento do raio, de forma análoga na segunda pergunta, analisaram apenas o lado do quadrado.

Na segunda atividade os alunos demonstraram um bom desempenho, compreendendo o conceito de probabilidade. Conseguiram determinar o espaço amostral e os eventos de forma correta. A minoria errou o cálculo de probabilidade condicional, por falta de interpretação da questão.

Na atividade 3, a maioria dos educando entenderam como calcular a probabilidade de um evento complementar. De maneira análoga, poucos erraram sobre a probabilidade condicional. Os erros cometidos foram por falta de interpretação e cálculos básicos.

Em todo momento da aplicação da sequência didática, foram feitas observações em relação a participação e desenvolvimento das atividades por partes dos alunos. Finalizando com uma avaliação escrita individual e sem consulta (anexo II) no valor total de 8 pontos para averiguar o que os alunos assimilaram sobre o tema.

Na etapa final participaram 29 alunos e os resultados obtidos estão apresentados no histograma que segue abaixo:



Fonte: Sala de aula.

Gráfico 4: Resultado da avaliação escrita

Analisando o gráfico acima, podemos observar que aproximadamente 14% dos alunos apresentaram um resultado insatisfatório, enquanto 24% (7 alunos) deles obtiveram um resultado razoável. Do total de 29 alunos, aproximadamente 38% apresentaram um bom resultado. Percebemos que 7 alunos obtiveram uma nota maior ou igual a 6, aproximadamente 24% da turma.

6. CONCLUSÃO

Na educação básica, muitas vezes o ensino da probabilidade não recebe a devida atenção. Assim, é necessária uma metodologia que transforme a realidade da memorização de conteúdos e fórmulas em um ensino que desperte o real interesse por uma aprendizagem significativa.

Além disso, vivemos na era da tecnologia e informação, onde os estudantes convivem o tempo todo com a tecnologia, quer seja utilizando a *internet* em computadores, quer seja em aparelhos tipo *smartphone,* fazendo-se assim necessário e interessante aplicar alguns recursos que os fizessem despertar a curiosidade pelo conteúdo aplicado em sala. A partir desse conceito, por meio do programa Geogebra foram aplicadas atividades que pudessem envolver a geometria e a probabilidade.

O principal objetivo deste trabalho foi mostrar para o aluno a importância da probabilidade no dia a dia e, que cada ação envolve possibilidades de resultados variados e, a partir de cada resultado obtido no experimento aleatório, ajudá-lo a tomar a decisão mais adequada para aquela situação-problema.

Em todos os momentos os alunos estiveram interessados em apreender o conteúdo apresentado, porém, no decorrer da aplicação da sequência didática, os alunos demostraram maior interesse pela aula quando houve uma relação entre a probabilidade e a geometria, principalmente através do programa Geogebra.

7. REFERÊNCIAS

[1] BIAJOTI, Emerson Donizeti . *Experimentos Probabilísticos: Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II.* Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Departamento de Matemática). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[3] CARVALHO, Josivane da Silva e SANTOS, Rodrigo Medeiros dos. Atividades sugeridas para o ensino de probabilidade geométrica no ensino médio. In: Actas del VII CIBEM, Montevideo, Uruguay, 16 a 20 de setembro de 2013. Disponível em:..http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1314.pdf. Acesso em 17/06/2017.

[4] GADELHA, Augusto. *Notas de Aulas: Teoria de Probabilidade I.* Curso de Pós-Graduação em Estatística. DME/ IM/ UFRJ, Março 2004.

[5] GONDIM, Hellen Fernandes. *Probabilidade e Probabilidade Geométrica: Conceitos e Exemplos aplicáveis no Ensino Básico.* Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Departamento de Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

[6] Google - Questões Resolvidas de Matemática – ENEM 2012 – Prof. Carlos .... Disponível em: https://barbosadejesu.wordpress.com/2013/02/03/questoes-resolvidas-de-matematica-enem-2012-prof-carlos-andre/. Acesso em 24/06/2017.

[7] Google, Word – Gabarito - Professor Walter Tadeu. Disponível em: http://professorwaltertadeu.mat.br/GABProbabilidades2012.doc. Acesso em 25/02/21017.

[8] Google, PDF – Teoria das probabilidades. Disponível em: http://www.est.ufpr.br/ce003/material/cap2.pdf. Acesso em 02/04/2017.

[9] HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Vol. 5 - *Combinatória e Probabilidade*. 7ª Edição. São Paulo: Atual, 2004.

[10] LOPES, C. E.; MEIRELLES, E. *O desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística*. In: XVIII Encontro Regional dos Professores de Matemática, 2005, Campinas. Estocástica nas Séries Iniciais, 2005. p. 1-8. Disponível em:. http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf .
Acesso em 27/02/2017.

[11] LOPES, Camila Cristina e SILVA, Jackson Ricardo Pereira de Lucena. *Ensino de probabilidade: concepções a respeito da utilização do software winstats como facilitador da aprendizagem.* In: VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Ulbra – Canoas – Rio Grande do Sul – Brasil. 16,17 e 18 de outubro de 2013 . Relato de Experiência. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/822/491.
Acesso em 28/02/2017.

[12] LOPES, José Marcos, TEODORO, João Vitor e REZENDE, Josiane de Carvalho. *Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio p. (75-93) .* Zetetiké: Revista de Educação Matemática – FE/Unicamp – v. 19, n. 36 – jul/dez 2011. Disponível em: http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/3998/3317.
Acesso em 28/02/21017.

[13] LOPES, José Marcos, SALVADOR, José Antonio e BALIEIRO FILHO, Inocêncio Fernandes. *O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais*

e da resolução de problemas. Revista Eletrônica de Educação, v.7, n.3, p. 47-62 . Disponível em:
www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/download/500/291.
Acesso em 15/10/2017.

[14] MORGADO, Augusto C., CARVALHO, João B. P. , CARVALHO, Paulo C. P**.** e FERNANDEZ, Pedro. *Análise Combinatória e Probabilidade,* ed. 9ª, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2006. (Coleção do professor de matemática).

[15] MORGADO, Augusto César, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática Discreta,* ed.1ª, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2014. (Coleção do professor de matemática).

[16] PAIVA, Manoel. *Matemática (Ensino Médio) I,* ed. 1ª , São Paulo: Moderna, 1999.

[17] SILVA, Marcos Noé Pedro da. Estudo das Probabilidades. Disponível em:
http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/estudo-das
probabilidades.htm **.** Acesso em 28/02/2017.

[18] SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo Olhar Matemática: 2*, ed. 2ª, São Paulo: FTD, 2010.

8. ANEXO I

QUESTIONÁRIO DE PESQUISA SOBRE PROBABILIDADE

1ª Questão: Uma bola será retirada de uma sacola contendo 6 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Desta forma a probabilidade de se retirar ao acaso uma bola branca é maior do que uma bola vermelha?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

2ª Questão: Considere o lançamento de um dado. A probabilidade da face voltada para cima ser o número primo é 1/2.

( ) sim ( ) não ( ) não sei

3ª Questão: Considera um baralho de cartas comum com 52 cartas. Tirando ao acaso uma carta do baralho, a probabilidade de retirar uma carta de espadas é a mesma de retirar uma carta de ouros.

( ) sim ( ) não ( ) não sei

4ª Questão: A probabilidade de ocorrer no máximo uma coroa em dois lançamentos de uma moeda é 50%?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

5ª Questão: Em uma caixa há 9 bolas verdes, 5 bolas amarelas e 6 bolas azuis. A probabilidade de se retirar ao acaso uma bola amarela é 25%?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

6ª Questão: No lançamento um dado, a probabilidade de sair um número ímpar na face voltada para cima é a mesma de sair um número par na face voltada para cima.

( ) sim ( ) não ( ) não sei

7ª Questão: Uma caixa contém 9 bolas numeradas de 1 a 9. Retirando-se uma delas ao acaso, observa-se que a mesma traz um número par. A probabilidade de que esse número seja menor que 6 é 50%. .

( ) sim ( ) não ( ) não sei

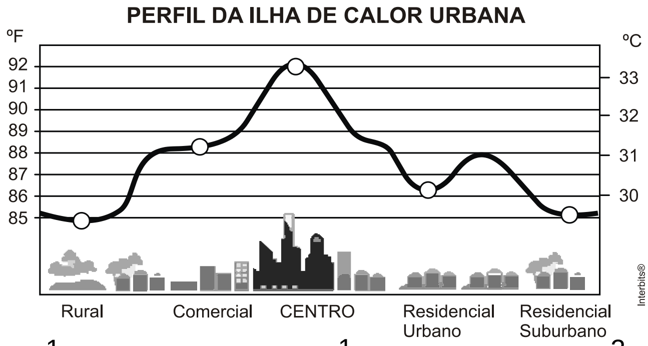
8ª Questão: Um número inteiro é escolhido aleatoriamente entre 1, 2, 3, ..., 30. A probabilidade de ser um múltiplo de 4 é 7/30.

( ) sim ( ) não ( ) não sei

9. ANEXO II

AVALIAÇÃO SOBRE PROBABILIDADE

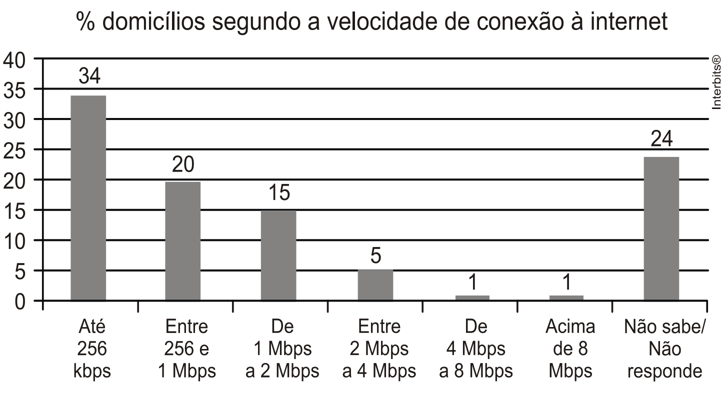
<u>1ª Questão:</u> (Enem 2011) Rafael mora no centro de uma cidade, mas, por recomendações médicas, decidiu se mudar para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele uma região que seja escolher adequada às recomendações médicas é

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{3}{4}$

<u>2ª Questão:</u> (Enem 2011) O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).



Disponível em: http://agencia.ipea.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio?

a) 0,45 b) 0,42 c) 0,30 d) 0,22 e) 0,15

3ª Questão: Um arquivo contém 24 fichas, numeradas de 1 a 24. Retira-se ao acaso uma ficha. Qual a probabilidade de se tirar uma ficha com o número maior ou igual a 15?

4ª Questão: (FGV) Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Sorteando-se uma bolinha, a probabilidade de que o número observado seja múltiplo de 8 é:

a) 3/25 b) 7/50 c) 1/10 d) 8/50 e) 1/5

5ª Questão: (EFOA- adaptada) Uma pessoa tem em mãos um chaveiro com 5 chaves parecidas, das quais apenas uma abre determinada porta. Escolhe uma chave ao acaso, tenta abrir a porta, mas verifica que a chave escolhida não serve. Na segunda tentativa, com as chaves restantes, qual a probabilidade de a pessoa abrir a porta?

6ª Questão: (Unesp- adaptada) João lança um dado sem que Antônio veja. João diz que o número mostrado pelo dado é par. Qual a probabilidade de Antônio descobrir esse número?

7ª Questão: (Mauá-SP- adaptada) Uma caixa contém 11 bolas numeradas de 1 a 11. Retirando-se uma delas ao acaso, observa-se que ela tem um número ímpar. Determine a probabilidade de esse número ser menor que 5.