UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EDUARDA SCHICKLING

A CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA: DE ZENÃO A CAUCHY

DOURADOS - MS
ABRIL - 2019

EDUARDA SCHICKLING

A CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA: DE ZENÃO A CAUCHY

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Lino Sanabria

DOURADOS - MS

ABRIL - 2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

S331c Schickling, Eduarda.
A CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA: DE ZENÃO A CAUCHY [recurso eletrônico] / Eduarda Schickling. -- 2019.
Arquivo em formato pdf.

Orientador: Lino Sanabria.
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Grande Dourados, 2019.
Disponível no Repositório Institucional da UFGD em: https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio

1. Convergência. 2. Sequências. 3. Série. I. Sanabria, Lino. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: **"A convergência de sequências e séries sob uma perspectiva histórica: de Zenão a Cauchy"**, de autoria de **Eduarda Schickling**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Prof. Dr. Lino Sanabria (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Rogério de Oliveira
Membro Examinador (UFGD)

Maristela Missio

Profa. Dra. Maristela Missio
Membro Examinador (UEMS)

Dourados/MS, 30 de abril de 2019

DEDICATÓRIA

A minha vó Sibila (*In Memoriam*), meu vô Vendelino, meus pais Judite e Eduardo e aos meus irmãos Murillo e Elloise.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada.

Agradeço aos meus pais, Judite e Eduardo, por me incentivarem a ser uma pessoa independente e sonhadora e ao Arnildo e Marilene.

Aos meus avós Sibila (*In Memoriam*) e Vendelino por me mostrarem o significado de persistência e amor.

Aos meus padrinhos Beatriz e Silvestre que são o meu exemplo de superação e a toda minha família.

Aos colegas de mestrado, mostrando-me que estudar em grupo é enriquecedor, pois podemos aprender uns com os outros.

A Marcia Teixeira, que sempre me motivou e me inspirou, não apenas como profissional mas como pessoa, uma mulher que considero uma mãe, obrigada!

Aos meus alunos do ensino médio e da universidade que compreenderam meus dias ruins e foram pacientes e incentivadores para realizar esse sonho.

A Escola Estadual Pedro Afonso Pereira Goldoni e ao diretor Marcelo Antonio Fontanive que sempre compreendeu e incentivou seus professores a persistirem nos estudos.

A Universidade Brasil e a diretora Marta Sulema Martins Gonzalez Biolchi que acreditou no meu trabalho e me proporcionou uma ótima oportunidade.

Aos melhores amigos que eu poderia ter: Willian, Danilo, Letícia, Fernanda, Matheus, Vinicius, Adriano, Luana, Camila, Daniela, Vanusa, Ireny, Merlim e Manoela que sempre me incentivaram e me compreenderam nesses anos de estudo. Em especial, Stephanie. As amigas Juliani e Caroline pela companhia nas inúmeras viagens que fizemos juntas.

Aos professores da UFGD - PROFMAT, pelo apoio e incentivo durante o curso, em especial ao Professor Lino que foi muito paciente e incentivador dos meus estudos, um homem que inspira pela sua trajetória acadêmica.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: Conjunto dos Números Naturais

$\mathbb{R}$: Conjunto dos Números Reais

x_n: Sequência de Números Reais

RESUMO

Neste trabalho propomos discutir a convergência de sequências e séries por intermédio de uma linha do tempo: partindo dos Paradoxos de Zenão no século V A.C. até Cauchy no século XVIII, construindo todos os pré-requisitos para a compreensão de convergência, como por exemplo: o infinito. O principal objetivo será analisar "erros" e "acertos" cometidos pelos matemáticos ao longo dos séculos e mostrar ao professor de matemática a importância do conhecimento histórico para o ensino aprendizagem em sala de aula. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Palavras-chave: Convergência. Sequências. Série.

ABSTRACT

In this work we propose to discuss the convergence of sequences and series by means of a time line: starting from the Paradoxes of Zeno in the fifth century BC to Cauchy in the eighteenth century, constructing all the prerequisites for the understanding of convergence, such as: infinite. The main goal will be to analyze "mistakes" and "hits" made by mathematicians over the centuries and to show the mathematics teacher the importance of historical knowledge for teaching classroom learning. This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Finance Code 001.

Keywords: Convergence. Sequences. Series.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Para chegarmos aos conceitos atuais da convergência de sequências e séries precisamos compreender alguns fatos históricos que colaboraram para a evolução desses conceitos.

Traçamos a linha do tempo, partindo de Zenão no século V A.C. com seus paradoxos, e concluindo com as modernas definições de Cauchy para convergência de sequências e séries, no século XVIII.

O trabalho tem como principais objetivos: traçar o histórico de "erros" e "acertos" cometidos pelos matemáticos ao longo dos anos; demonstrar os principais teoremas sobre convergências; salientar exemplos e mostrar ao professor de matemática a importância de compreender os fatos históricos.

Os professores de matemática, ao ministrarem suas aulas apresentam um conhecimento "pronto e acabado", cujo desenvolvimento de (em alguns casos) mais de 1.000 anos foram desafiadores para grandes matemáticos.

O professor que tenha isso em mente poderá traçar estratégias para que seu aluno possa atingir esse conhecimento de uma forma mais eficaz.

As dificuldades da evolução de uma ideia podem ser as dificuldades de aprendizagem dos alunos.

2. O INFINITO NA GRÉCIA ANTIGA

Antes de aprofundar o estudo da convergência de sequências e séries, serão expostas e analisadas as descobertas matemáticas dos gregos antigos, atentando-se as que têm conexão com o assunto, como o infinito. Partir-se-á dos Paradoxos de Zenão até o declínio da matemática na Grécia.

2.1. Paradoxos de Zenão

Os Paradoxos[1] de Zenão foram criados por Zenão de Eleia, que viveu por volta de 450 A.C. e era discípulo do filósofo grego Parmênides de Eleia, Zenão enunciou argumentos para provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade, com seu método dialético, partia das premissas de seus oponentes e as reduzia ao absurdo.

Os gregos tinham assumido que o espaço e o tempo podem ser pensados como consistindo de pontos e instantes, mas o espaço e o tempo também possuem uma propriedade mais fácil de intuir do que definir: "continuidade". Zenão, contra essa visão, propôs seus quatro paradoxos: da Dicotomia, de Aquiles, da Flecha e do Estádio.

Nos dois primeiros paradoxos Zenão argumenta que o movimento é impossível sob a hipótese de subdivisibilidade indefinida do espaço e do tempo. Nos paradoxos seguintes, ele argumenta que a subdivisibilidade do tempo e do espaço termina em indivisíveis, excluindo a ideia de dividir algo em infinitas partes, sendo assim, esses paradoxos não serão estudados em detalhes.

O paradoxo da Dicotomia, diz que: antes que um objeto possa percorrer uma distância $\overline{AB}$ dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disto, percorrer o primeiro quarto; e antes disso, o primeiro oitavo e assim consecutivamente, através de uma infinidade de subdivisões, de fato, o objeto que se colocar em movimento

[1] Paradoxo é um pensamento, proposição ou argumento que contraria os princípios básicos e gerais que costumam orientar o pensamento humano, ou desafia a opinião concebida, a crença ordinária e compartilhada pela maioria dos seres humanos.

precisará executar infinitas conexões num tempo finito, desse ponto de vista é impossível iniciar o movimento.

O Paradoxo de Aquiles, diz que: Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai com vantagem, é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não irá alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe, de fato, quando Aquiles chegar à posição inicial P_0 da tartaruga, ela já estará na posição P_1, quando Aquiles chegar a posição P_1, a tartaruga estará na posição P_2 e assim indefinidamente, ou seja, Aquiles nunca alcançará a tartaruga.

Esses paradoxos argumentam que o movimento seria impossível sob a hipótese de subdivisibilidade sucessiva do espaço e do tempo, onde o primeiro tem uma subdivisão infinita regressiva, quer dizer, o intervalo do espaço diminui e o segundo é progressiva, o intervalo do tempo aumenta.

2.1.1. Interpretação

Zenão desafiava a opinião advinda dos gregos sobre continuidade, subdividindo um intervalo de tempo em infinitas partes, contrariando os princípios básicos e tornando um movimento possível em aparentemente impossível. Por consequência dessa incoerência os paradoxos de Zenão tornaram-se populares.

Na Figura 1, observa-se uma interpretação do Paradoxo da Dicotomia, no qual a distância $\overline{AB} = 1$. Antes de percorrer a distância total, deve-se percorrer a primeira metade dessa distância: $\overline{AC} = \frac{1}{2}$; antes disto a metade de $\overline{AC}$: $\overline{AD} = \frac{1}{4}$ e assim indefinidamente, obtendo infinitos termos e cada termo finito. O paradoxo conclui que é impossível percorrer essa distância, pois seria impossível andar sob um espaço infinito de termos em um tempo finito, ou seja, se unirmos todos os infinitos termos obteríamos infinito e não a distância $\overline{AB} = 1$.

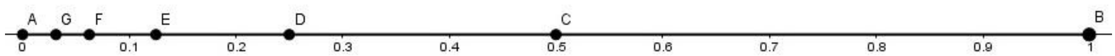

Figura 1: Dicotomia

Implicitamente, pode-se observar nessa interpretação do paradoxo da Dicotomia, que os gregos tinham convicção de que a soma de infinitos termos positivos é infinito.

Na Figura 2, podemos observar uma esquematização do paradoxo: Aquiles e a Tartaruga, em que P_0 é o ponto inicial. A distância de P_0 até P_1 é a distância que a tartaruga está em vantagem, quando a tartaruga chega no ponto P_2 Aquiles chegará no ponto P_1, quando a tartaruga chega no ponto P_3 Aquiles chegará no ponto P_2 e assim sucessivamente, obtendo uma sequência de pontos $P_0, P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, \cdots$.

A distância entre Aquiles e a tartaruga está diminuindo e a quantidade de intervalos aumentando indefinidamente, de modo que se pode dividir infinitamente o espaço antes do ponto de ultrapassagem, pois a tartaruga sempre terá alguma distância (mesmo que muito pequena) de vantagem.

Figura 2: Aquiles e a Tartaruga

A concepção de estudar um intervalo e dividi-lo foi usada pelos gregos em 500 A.C. quando estudavam a construção do pentagrama ou pentágono estrelado. Eles usaram as diagonais do pentagrama e dividiram em dois segmentos desiguais, onde a razão da diagonal toda para o maior é igual à deste para o menor. Os gregos a chamavam de "divisão de um segmento em média e extrema razão", que atualmente é conhecida como "secção áurea":

> Uma das propriedade importantes da "secção" é que, por assim dizer, ela se auto propaga. Se um ponto P_1, divide um segmento RS (Figura 3) em média e extrema razão, sendo RP_1 o segmento maior e se sobre esse segmento maior marcamos o ponto P_2 tal que $RP_2 = P_1S$, então o segmento RP_1 por sua vez ficará subdividido em média e estrema razão pelo ponto P_2. Novamente, se marcarmos em RP_2 o ponto P_3 tal que $RP_3 = P_2P_1$, o segmento RP_2 ficará subdividido em média e extrema razão por P_3. Esse processo iterativo, é claro, pode ser repetido tantas vezes quanto se queira, obtendo-se segmentos RP_n cada vez menores divididos em média e extrema razão por P_{n+1}. (BOYER, 1994, p. 37).

Figura 3: Secção Áurea

Contudo, não se tem conhecimento se os gregos observaram esse processo sem fim, ou se tiraram conclusões significativas dele. Ainda que tenham chegado perto de estudar o intervalo dividido em infinitas partes, mas o ignoraram.

2.2. Como os gregos entendiam a soma de infinitos termos

Os primeiros matemáticos gregos que estudaram a continuidade e o infinito encontraram dificuldades quando estudaram dois tipos de quantidades: o espaço e o tempo. Zenão utilizou essas quantidades para criar seus paradoxos e argumentou: ou o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis, ou existe um menor elemento indivisível de tempo e de espaço.

Outros matemáticos gregos compartilhavam das ideias de Zenão, que acreditava: "a soma de números infinitos de quantidades maiores que zero resultaria em um número suficientemente grande", (BOYER, 1994). Os gregos sabiam somar muitos termos e atingir uma aproximação, mas, tinham dificuldade sobre o conhecimento do infinito e segundo Boyer (1994) os gregos desenvolveram o que se chamou de "horror ao infinito", eles não aceitavam a ideia de que é possível somar uma quantidade infinita de números e obter um resultado finito. Isto é, acreditavam que a soma de infinitos termos positivos resulta em algo infinito.

Esse "horror ao infinito" ajudou a desenvolver outro ramo da matemática, a álgebra geométrica, que consistia na resolução de problemas algébricos ligados a grandezas contínuas sem necessidade de referência direta a números e suas representações.

2.3. Axioma: O todo é maior que a parte

Os Elementos, escrito por Euclides de Alexandria (300 A.C.) foi dividido em 13 capítulos, dos quais enunciou 10 pressuposições que estavam contidas na maioria dos manuscritos. Posteriormente Aristóteles[2] distinguiu axiomas e postulados, compreendendo que axiomas "devem ser convincentes por eles mesmos" e os postulados "são menos óbvios e não pressupõem o assentimento do estudante, pois dizem respeito somente ao assunto em discussão" (BOYER, 1994).

Euclides e demais matemáticos gregos acreditavam no axioma: o todo é maior que a parte, contido nas definições desde geometria a álgebra estudadas por Euclides:

> The first more serious argument claiming to justify the taboo on "actual infinity" is probably that to be found in the work of Galileo[3]: if we pair each natural number *n* with is square *n²*, then we define (in our language) a bijection of $\mathbb{N}^*$ onto a proper *subset* of $\mathbb{N}^*$; but, says Galileo, if there were "as many" squares as natural numbers, that would violate the axiom that "the whole is greater than the part"; therefore we cannot say that the natural numbers form a set! It is surprising to see Cauchy still citing this argument with approval. But, in 1859, there appeared the posthumous work of Bolzano, *Paradoxes of the Infinite*. This work is chiefly designed to expound the author's philosophical views; but is is here that we find, before Dedekind and Cantor, a clear distinction made between inclusion and equipotence: there is, he says, a bijection of the interval [0, 5] of the line $\mathbb{R}$ onto the interval [0, 12], namely, the mapping $x \to 12x/5$, even though the interval [0, 5] is a proper subset of [0, 12]. (DIEUDONNE, 1992, p. 219).[4]

Aproximadamente 2 mil anos após o surgimento do axioma "o todo é maior que a parte" Bernhard Bolzano (1781 - 1848) propôs em sua obra "Os Paradoxos do Infinito" uma contradição a esse axioma, em que fez correspondências bijetivas entre o todo e uma

---

[2] Filósofo grego que viveu entre 384 A.C. e 322 A.C.

[3] Galileu Galilei (1564 - 1642), físico, matemático, astrônomo e filosofo de origem italiana.

[4] O primeiro argumento mais sério que pretende justificar o tabu sobre "infinito real" é provavelmente o encontrado no trabalho de Galileu: se emparelharmos cada número natural *n* com o quadrado *n²*, então definiremos (em linguagem moderna) uma bijeção de $\mathbb{N}^*$ em um subconjunto apropriado de $\mathbb{N}^*$; mas, diz Galileu, se houvesse "tantos" quadrados quanto números naturais, isso violaria o axioma de que "o todo é maior que a parte"; portanto, não podemos dizer que os números naturais formam um conjunto! É surpreendente ver Cauchy ainda citando esse argumento com aprovação. Mas, em 1859, apareceu o trabalho póstumo de Bolzano, Os *Paradoxos do Infinito*. Este trabalho é projetado principalmente para expor as visões filosóficas do autor; mas é aqui que encontramos, antes de Dedekind e Cantor, uma clara distinção entre inclusão e equipotência: há, diz ele, uma bijeção do intervalo [0, 5] da linha $\mathbb{R}$ no intervalo [0, 12], a saber, o mapeamento $x \to 12x / 5$, mesmo que o intervalo [0, 5] seja um subconjunto apropriado de [0, 12]. (DIEUDONNE, 1992, p. 219). Tradução: a autora.

de suas partes. Em seguida Richard Dedekind (1831 - 1916) definiu que um conjunto é infinito se ele puder ser colocado em correspondência um a um com alguma de suas partes próprias, atualmente, adota-se esse conceito em Teoria dos Conjuntos.

2.4. Propriedade de Exaustão

O século IV A.C. teve seu auge matemático proveniente da Academia Platônica de Atenas, que produziu os principais mestres e pesquisadores. Desses, o mais importante: Eudoxo de Cnido (408 - 355 A.C.), que foi um discípulo de Platão e tornou-se o mais célebre matemático e astrônomo de seu tempo.

Eudoxo contribuiu para a matemática, primeiramente com o conceito de razão, agora era possível dar demonstrações satisfatórias dos teoremas sobre proporções, pois como existem infinitos números racionais os gregos se defrontavam com o conceito de conjunto infinito, que desejavam evitar.

Contudo, restava um problema não solucionado: comparação de configurações curvas e retilíneas; matemáticos anteriores tentaram, mas sem o conceito de Limite, não conseguiram concluir o argumento.

Segundo o axioma de Eudoxo, basta reduzir ao absurdo para provar uma proposição que forma a base do "método da exaustão" dos gregos, da seguinte forma:

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menos que a metade e esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie. (Elements of Euclid, 1956 apud BOYER, 1994, p. 67).

No qual, grandeza de mesma espécie é: comprimento, área e volume. Esse axioma, vale se substituirmos metade, por um terço, ou um quarto, ou qualquer fração própria.

Em linguagem moderna, essa proposição que chamaremos de "propriedade de exaustão" equivale a seguinte formulação:

"Se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza prefixada de mesma espécie e r é uma razão tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$, então podemos achar um inteiro N tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo o inteiro $n > N$" ou, equivalentemente:

$$\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$$

Os gregos utilizaram essa propriedade para provar teoremas sobre áreas e volumes de figuras curvilíneas.

2.5. Exemplo trivial: o quadrado de lado um tomando sempre a metade

Um exemplo trivial da aplicação da propriedade de exaustão é dada a seguir:

Seja um quadrado de lado 1. Se dividirmos o quadrado ao meio, teremos duas metades, em seguida dividimos uma das metades ao meio e assim sucessivamente até indefinidamente, como mostra a Figura 4:

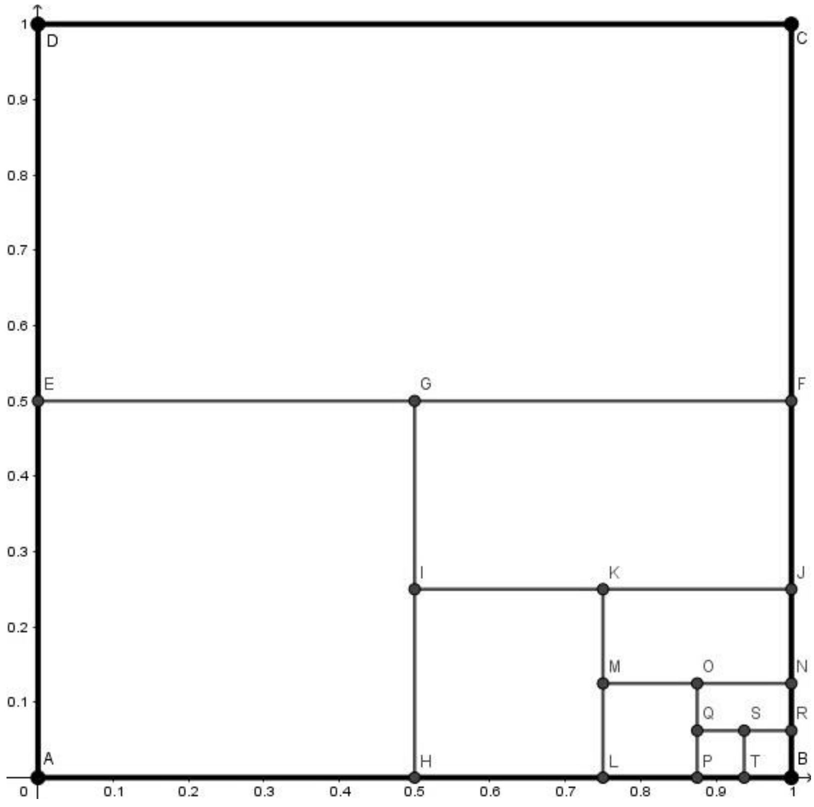

Figura 4: Quadrado de lado 1

Se somarmos todas as partes desse quadrado de lado 1, obtemos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots,$$

ou seja, uma soma com infinitos termos, utilizando a propriedade de exaustão. Os gregos provaram que uma soma infinita pode resultar em um número diferente de infinito, neste caso: 1. Concluindo que era possível somar uma quantidade infinita de números e obter um resultado finito.

Essa soma estava implícita no paradoxo da *dicotomia*, como analisado anteriormente. Efetuar a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ era impensável, visto que na concepção dos gregos o resultado seria infinito.

2.5.1. Aqui ocorre uma soma infinita?

Se observarmos a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$ pode ser subdividida da seguinte maneira:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, restando $\frac{1}{4}$ para obter soma 1;

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$, restando $\frac{1}{8}$ para obter soma 1;

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$, restando $\frac{1}{16}$ para obter soma 1.

E assim indefinidamente, quanto mais termos acrescentarmos nessa soma, mais próximo de 1 é o resultado, assim, é possível "chegar a um valor tão próximo de 1 quanto se queira" e "chegar a um valor tão próximo de X quanto se queira" é o que atualmente definimos de limite.

2.5.2. No cálculo de áreas ocorre uma soma infinita? Por que não há objeção por parte dos gregos?

Como no exemplo trivial, dividimos o quadrado tantas vezes quanto quiséssemos, encontrando uma soma infinita. Outro exemplo de área e soma infinita é a área do círculo que poderia ser encontrada inscrevendo nele um polígono regular e aumentando indefinidamente o número de lados, a propriedade da exaustão tornou esses métodos intuitivos em rigorosos.

Muito utilizado por Eudoxo, que aproximou a área de uma figura plana pelas somas parciais de uma série ou pelos termos de uma sequência. Contudo, ele não considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos e para definir uma soma de uma série infinita seria necessário desenvolver o conceito de número real, que nesse período os gregos não possuíam.

2.6. O fim de uma era

Por volta de 200 A.C. romanos e egípcios estenderam um poder político sobre a Grécia, que gerou impacto imediato na matemática. Após aproximadamente seis séculos do domínio grego na matemática, começou o ocaso as descobertas dos matemáticos e filósofos gregos.

3. PERÍODO ADORMECIDO DA MATEMÁTICA

Segundo Boyer (1994) progressos pouco significativos nortearam a matemática nos séculos seguintes ao declínio grego, alguns avanços na área de geometria e trigonometria. A matemática acabou sendo acompanhada por um movimento voltado para necessidades práticas do modo de vida dos cidadãos, como a construção civil.

As sequências e séries ficaram "abandonadas" pelos matemáticos. Esse declínio deve-se a perda da força na religião e na filosofia, que levou os gregos a buscar os cultos e misticismo. No mais, a trigonometria e a mensuração atraíram os hindus e os árabes, que serviram de elo para o mundo moderno.

O ano 529 D.C. é considerado o marco do fim do desenvolvimento da matemática na Europa na antiguidade. As escolas filosóficas em Atenas foram fechadas, pois era uma "ameaça" ao cristianismo ortodoxo, com isso os filósofos da época encontraram asilo no Oriente. A matemática não desapareceu da Europa, mas ficou "adormecida" por aproximadamente 600 anos, enquanto discutiam o caminho para a "salvação" em vez de geometria.

4. A SÉRIE ALTERNADA $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

Será feito neste capítulo um corte para destacar uma série que mostra quão desafiador foi no passado uma série que hoje passa despercebida nas aulas de Cálculo e até mesmo nas de Análise na Reta, pois a sua não convergência decorre do mais fraco dos testes, a saber, o "teste do limite do termo geral". Vamos nos deter na análise da série alternada $1-1+1-1+\cdots$, que passou a ser estudada no ano de 1703, ela é fundamental para compreendermos a diferença entre uma soma geométrica e uma soma algébrica, além de nortear os estudos anteriores e posteriores sobre *convergência*. Como já observado acima o termo geral não tende a zero, logo ela não é convergente.

O matemático italiano Guido Grandi (1671 - 1742) trocou correspondência com Leibniz[5], ele queria saber se podia ou não tomar como $\frac{1}{2}$ a soma da série infinita alternada: $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

O $\frac{1}{2}$ é sugerido por ser média aritmética dos dois valores das somas parciais dos n primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{n}(-1)^n$, tal que s_n é 1 se n é ímpar e s_n é zero se n é par.

Além disso, $\frac{1}{2}$ é a solução da função geradora $\frac{1}{1+x}$, quando $x=1$. Dela obtém-se a série: $1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$:

$$1=(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$$

fazendo $x=1$, do lado esquerdo temos $\frac{1}{2}$ e do lado direito a série que estamos analisando:

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-\cdots.$$

Grandi em 1703 sugeriu que era um "paradoxo comparável com os mistérios do cristianismo", pois agrupando os termos em pares ele obtia:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=\frac{1}{2}$$

que "lembra a criação do mundo a partir do nada".

Grandi utilizou da geometria para provar o seguinte teorema (Figura 5):

---

[5] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), matemático e filósofo alemão.

> Given a semicircle Γ with diameter IK, let us consider the tangent gI to circle at the point I, the intersection G of gI with the secant KZ. If GF_0 is equal and parallel to IK and the points F_n and GF_0 are such that $\frac{F_{n+1}G}{F_nG} = \frac{IG^2}{IK^2}$, then we have $\sum_{k=0}^{\infty} F_{2k}F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(F_{2k}G - F_{2k+1}G) = KX = GD$, where D is a point on the continuation of GF_0 such that $KX = GD$. (GRANDI, 1703 apud FERRARO, 2008, p. 133).[6]

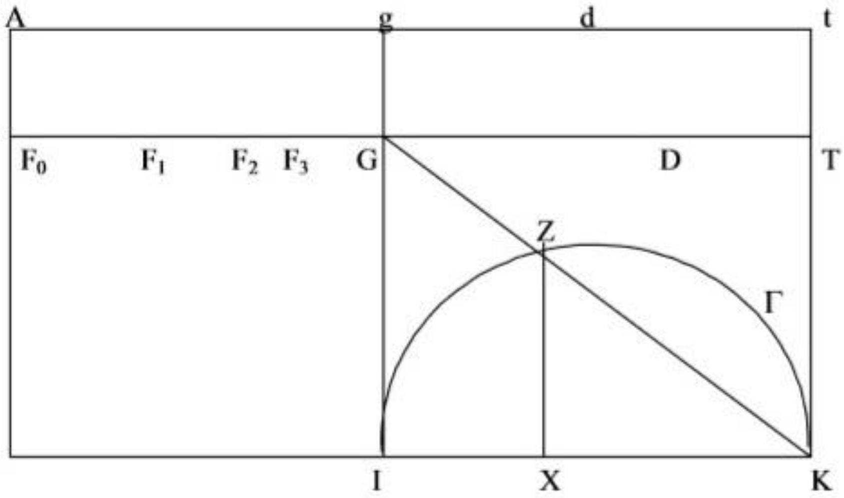

Figura 5: Série de Grandi

O ponto Z varia no semicírculo e os pontos F_n descrevem as curvas parabólicas e o ponto D descreve uma curva KDd. Com o princípio da continuidade Grandi afirmou que se GT coincide com o lado gt do quadrado $IKgt$ e IG se torna igual a IK, então o ponto D irá coincidir com d e o segmento GD é igual a $gd = \frac{IK}{2}$, dando origem a relação:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(IK - IK) = \frac{IK}{2}.$$

O princípio da continuidade induziu que essa relação é a versão geométrica da soma $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, destacou-se então um contraste entre princípios geométricos e algébricos.

Leibniz considerou válida a prova de Grandi com base no princípio da continuidade, mas não resolveu a questão do fracasso às regras algébricas na infinidade.

[6] Dado um semicírculo Γ com diâmetro IK, consideramos a tangente gI para circular o ponto I, a interseção G de gI com a secante KZ. Se GF_0 é igual e paralelo a IK e os pontos F_n e GF_0 são tais que $\frac{F_{n+1}G}{F_nG} = \frac{IG^2}{IK^2}$, então temos $\sum_{k=0}^{\infty} F_{2k}F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(F_{2k}G - F_{2k+1}G) = KX = GD$, onde D é um ponto na continuação de GF_0 tal que $KX = GD$. (GRANDI, 1703 apud FERRARO, 2008, p. 133). Tradução: a autora.

Atualmente essa soma é considerada sem sentido, pois podemos atribuir qualquer valor a ela, chegando a qualquer número, observe:

Se substituirmos $1 = \pi - (\pi - 1)$ na soma, obtemos:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$
$$= (\pi - (\pi - 1)) - (\pi - (\pi - 1)) + (\pi - (\pi - 1)) - (\pi - (\pi - 1)) + \cdots$$

considerando S a soma desses termos, obtemos:

$$S = \pi - \pi + 1 - \pi + \pi - 1 + \pi - \pi + 1 - \pi + \pi - 1 + \cdots$$

mudando os parênteses, temos:

$$S = \pi - (\pi - 1 + \pi) + (\pi - 1 + \pi) - (\pi - 1 + \pi) + (\pi - 1 + \pi) - \cdots$$

reorganizando:

$$S = \pi - (2\pi - 1) + (2\pi - 1) - (2\pi - 1) + (2\pi - 1) - \cdots$$
$$S = \pi + (1 - 2\pi) - (1 - 2\pi) + (1 - 2\pi) - (1 - 2\pi) + \cdots$$

assim, obtemos:

$$S = \pi + [(1 - 2\pi) - (1 - 2\pi)] + [(1 - 2\pi) - (1 - 2\pi)] + \cdots$$
$$S = \pi + 0 + 0 + \cdots = \pi$$

nesse contraexemplo, a soma pode ter valor igual a π.

Essa série é divergente, pois seu termo geral não tende para zero, suas reduzidas de ordem ímpar são iguais a 1 e as de ordem par são iguais a zero.

Essa série ficou conhecida como "série de Grandi". As propriedades associativa e comutativa da adição valem para somas finitas e devem ser usadas com cautela em somas infinitas.

Nos próximos capítulos veremos que apesar destas abordagens que hoje parecem ingênuas o progresso das sequências e séries avançou graças aos resultados visíveis no Cálculo. O rigor só aparece muito mais tarde.

5. A ASCENSÃO DA MATEMÁTICA

Após séculos de domínio romano, a Idade Média tem início com a queda do Império Romano no Ocidente, que perdurou até aproximadamente o ano de 1400. Um período considerado "hostil", o conhecimento era guardado em mosteiros, que funcionavam também como escolas. Novamente a matemática pouco se desenvolveu nesse período.

A partir daí, os conhecimentos matemáticos futuros vieram de países asiáticos, como Índia e Arábia, que foram influenciados por obras gregas, como *Os Elementos*, de Euclides. Outros países também contribuíram com os avanços matemáticos na área de sequências, como a China.

Os próximos capítulos terão influência de outros países, a partir daqui conheceremos as descobertas que norteiam as sequências e séries de matemáticos de outras etnias.

5.1. Triângulo de Pascal e Sequência de Fibonacci

Segundo Boyer (1994), Yang Hui (1238 - 1298) estudou os quadrados mágicos e o que atualmente é conhecido como "teorema binomial". Parte de suas obras foram preservada através do livro *Espelho Precioso* de Chu Shih-chieh (1249 - 1314), como alguns resultados de soma de séries:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

$$1 + 8 + 30 + 80 + \cdots + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{3!} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{5!}.$$

Podemos observar que os chineses possuíam interesse pela soma de sequências, encontrando a fórmula do termo geral.

Outra criação foi o "triângulo de Pascal", com coeficientes das expansões binomiais até a oitava potência, dadas em numerais em barra e um símbolo redondo para o zero. Yang Hui havia feito até a sexta potência e Chu Shih-chieh fez até a oitava potência como mostra a Figura 6. Através dessas informações pode-se acreditar que o triângulo aritmético tenha se originado na China.

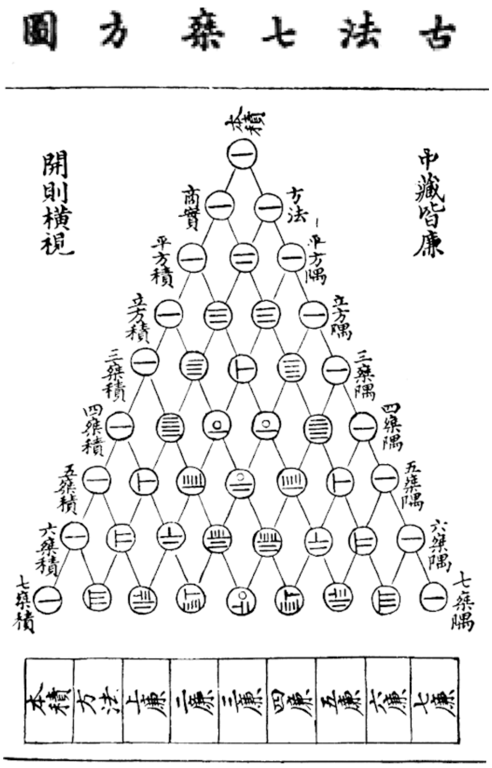

Figura 6: Triângulo de Pascal "Chinês"

Na França, Blaise Pascal (1623 - 1662) redescobriu o "triângulo de Pascal" quando ligou o estudo das probabilidades com o triângulo aritmético. Pascal se correspondia através de cartas com o matemático francês Pierre de Fermat (1601 - 1665). Fermat tinha pretensões de provocar o interesse de Pascal na teoria dos números e em 1654 ele lhe enviou o seguinte teorema: "Todo inteiro é composto de um, dois ou três números triangulares, de um, dois, três ou quatro quadrados, de um, dois, três, quatro ou cinco pentágonos, de um, dois, três, quatro, cinco, ou seis hexágonos, e assim ao infinito" (BOYER, 1994).

Esse teorema foi demonstrado apenas no século XIX, porém Pascal não se interessou por esse problema, mas interessou-se por "uma fórmula para a soma das potências m-ésimas dos primeiros n inteiros consecutivos" (BOYER, 1994), pois isso tinha ligação com: o triângulo aritmético, raciocínio por recorrência e análise infinitesimal. Pascal enunciou essa fórmula verbalmente, mas em simbolismo moderno equivale a:

$$ {}_{m+1}C_1 \sum i^m + {}_{m+1}C_2 \sum i^{m-1} + \cdots + {}_{m+1}C_m \sum i = (n+1)^{m+1} - (n+1) $$

em seguida, Pascal derivou e chegou a fórmula do cálculo:

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Na Itália, Leonardo de Pisa (1180 - 1250), conhecido como Fibonacci ou "filho de Bonaccio", ajudou a popularizar o "algarismo" no século XIII. Em 1202, Fibonacci descreve o novo algarismo em seu livro - *Liber Abaci*[7] - que trata sobre métodos e problemas algébricos.

Um desses problemas que mais inspirou aos futuros matemáticos foi o seguinte: "Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?" Boyer (1994). Esse problema deu origem à "sequência de Fibonacci": $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, u_n,$ ... onde $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, ou seja, cada termo após os dois primeiros é a soma dos dois anteriores.

O triângulo de Pascal e a sequência de Fibonacci são exemplos que exploraremos adiante.

5.2. Oresme e Calculator

Nicole Oresme (1323 - 1382) era francês e estudava a representação gráfica de funções. Havia imaginação e precisão de pensamento, mas faltava técnica algébrica e geométrica, assim não estendeu obras clássicas e sim novos pontos de vista, principalmente: séries infinitas.

Richard Suiseth (Aprox. 1350) era conhecido como Calculator e resolveu o seguinte problema:

> Se durante a primeira metade de um tempo dado, uma variação continua com uma certa intensidade, durante a quarta parte seguinte do intervalo continua com o dobro da intensidade, durante a oitava parte com o triplo da intensidade e assim *ad infinitum*; então a intensidade média para o intervalo todo será a intensidade de

[7] Tradução: "Livro do ábaco".

> variação durante o segundo subintervalo (ou o dobro da intensidade inicial). (BOYER, 1994, p. 194).

Ou seja, a soma da série infinita $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$ é 2. Calculator não tinha conhecimento de representação gráfica, logo sua prova foi verbal, mas Oresme usou seu processo gráfico para provar de maneira mais simples esse teorema.

Além disso, Oresme estudou outros casos de somas infinitas, como: $\frac{1\cdot 3}{4}+\frac{2\cdot 3}{16}+\frac{3\cdot 3}{64}+\cdots+\frac{n\cdot 3}{4^n}+\cdots$ em que a soma é $\frac{4}{3}$, também contribuiu com a primeira demonstração na história da matemática, de que a série harmônica é *divergente*:

Oresme agrupou os termos sucessivos da série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

colocando o primeiro termo no primeiro grupo, os dois termos seguintes no segundo grupo, os quatro termos seguintes no terceiro grupo e assim sucessivamente, o *m*-ésimo grupo contendo 2^{m-1} termos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{9}+\cdots\frac{1}{16}\right]+\cdots\\ &> 1+\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{16}+\cdots\frac{1}{16}\right]+\cdots\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots.\end{aligned}$$

Evidentemente, obteve uma infinidade de grupos e a soma dos termos em cada grupo é pelo menos $\frac{1}{2}$. Assim, somando um número suficiente de termos em ordem, pode superar qualquer número dado.

A palavra "convergir" foi utilizada no sentido de sequências e séries pelo matemático escocês James Gregory (1638 - 1675) quando estudava duas sequências: áreas inscritas e circunscritas, ambas convergindo para área da cônica.

Próximo ao ano de 1672, na Itália, Pietro Mengoli (1625 - 1686) estudava os indivisíveis e a área sob as hipérboles, no processo tornou-se evidente o uso de séries infinitas, por exemplo, a soma da série harmônica alternada $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}+\cdots$ é $\ln 2$, *convergente*.

Mengoli também redescobriu a conclusão de Oresme: a série harmônica *diverge*. Ele possuía conhecimento de que somas e produtos infinitos eram um passo fundamental para o desenvolvimento da matemática.

6. SEQUÊNCIAS E SÉRIES INFINITAS

Antes de continuarmos expondo os eventos cronológicos que norteiam as sequências e as séries infinitas, vamos explica-las utilizando a nomenclatura moderna.

Uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N}: \{ 1, 2, 3, ... \}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $x(n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado o *termo de ordem n*, ou *n-ésimo termo* da sequência.

Seja (a_n) uma sequência de números reais. A partir dela, formamos uma nova sequência (s_n) cujos elementos são as somas:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \cdots, s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

que chamaremos as *reduzidas* da série $\sum a_n$, onde a_n é chamada de *termo geral* da série. Se existir o limite

$$s = \lim s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

diremos que a série $\sum a_n$ é *convergente* e o limite *s* será chamado a *soma* da série. Escreveremos então

$$s = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

Se a sequência das reduzidas não convergir, diremos que a série $\sum a_n$ é *divergente*, como acontece com a série harmônica que vimos anteriormente.

Além de mostrar o desenvolvimento histórico, também demonstraremos a convergência de algumas séries, até as definições atuais de Cauchy.

6.1. Isac Newton

Até 1664, Isaac Newton (1642 - 1727) estudava o trabalho de outros matemáticos, como: Galileu, Euclides, Descartes e Fermat, entre outros. A partir de 1665, Newton começou a fazer suas próprias contribuições para a matemática. Dentre suas primeiras descobertas: exprimir funções em termos de séries infinitas (o mesmo que Gregory fazia na Itália, no mesmo período). Em seguida, ligou dois problemas: séries infinitas e taxas de variação.

Durante a proliferação da peste negra (1665 - 1666), Newton teve de se afastar; nesse período ele afirma ter feito quatro de suas principais descobertas: o teorema binomial, o cálculo, a lei da gravitação e a natureza das cores. Estudando uma série binomial, ele observou que seria possível operar com séries infinitas de modo semelhante ao usado para expressões polinomiais finitas, assim, as séries infinitas não seriam mais instrumentos de aproximação, ou seja, "indicam a designação de alguma quantidade particular por uma progressão regular de quantidades, que continuamente se aproximam dela, e que se prolongadas infinitamente, devem ser iguais a ela", concluiu Newton (BOYER, 1994).

Newton nunca publicou o teorema binomial, mas escreveu várias exposições de sua análise infinita. A primeira, em 1669: *De analysi per equationes numero terminorum infinitas*[8], que fora publicada em 1711, onde escreveu:

> E tudo que a análise comum [isto é, a álgebra] executa por meio de Equações com número finito de Termos (desde que possa ser feito) esse novo método sempre pode executar por Meio de Equações infinitas. Por isso não hesitei em dar a isso o nome de *Análise* também. Pois os raciocínios aqui não são menos certos que na outra; nem as Equações menos exatas; embora nós Mortais cujos Poderes de raciocínio estão restritos a Limites estreitos, não possamos nem exprimir, nem conceber todos os Termos dessas Equações de modo a saber exatamente delas as Quantidades que queremos... Para concluir, podemos decidir com justiça que pertence à *Arte Analítica*, aquilo por cuja ajuda as Áreas e Comprimentos etc. das Curvas podem ser exatamente e geometricamente determinados. (*De analysi* incluída em *Opera quae exstant omnia*, editado por Samuel Horsley (1779 - 1785) apud, BOYER, 1994, p. 289).

A partir dessa publicação, outros matemáticos não evitaram os processos infinitos, pois agora eram considerados como matemática legítima. O *De analysi* circulou entre amigos como John Collins (1625 - 1683) e Isaac Barrow (1630 - 1677), e a expansão binomial infinita foi enviada a Henry Oldenburg (1615 - 1677) e a Leibniz (1646 - 1716).

[8] Tradução: "A análise de equações com um número infinito de termos".

6.2. Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz, nascido em Leipzig na Alemanha, aos quinze anos ingressou na universidade e aos dezessete era bacharel, estudou teologia, direito, filosofia e matemática. Após conseguir seu doutorado e recusar um posto de professor de direito ele entrou no serviço diplomático, servindo durante quarenta anos os hanoverianos[9] e, por isso, Leibniz viajava muito.

Em uma viagem a Londres em 1673, Leibniz comprou um exemplar das *Lectiones Geometricae*[10] escrito por Barrow, também encontrou Collins e Oldenburg e tornou-se membro da Royal Society[11]. Nessa viagem ficou subentendido que Leibniz poderia ter visto a obra de Newton *De analysi* em manuscrito. Leibniz voltou a Londres em 1676 com mais preparo em geometria e análise; dentre essas visitas que o cálculo diferencial tomou forma.

Assim como Newton, os primeiros trabalhos de Leibniz foram baseados em séries infinitas. "Huygens (1629 - 1695) tinha-lhe proposto o problema de achar a soma dos recíprocos dos números triangulares, isto é, $\frac{2}{n(n+1)}$" (BOYER, 1994). Para resolver, Leibniz escreveu cada termo como a soma de duas frações: $\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

após escrever alguns termos, concluiu que a soma dos *n* primeiros termos é

$$2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

daí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n(n+1)} = 2.$$

[9] Família nobre Européia.
[10] Tradução: "Lições de Geometria".
[11] Instituição destinada à promoção do conhecimento científico, fundada em 28 de novembro de 1660, em Londres.

Após alcançar esse resultado, ele concluiu que seria capaz de achar a soma de quase todas as séries infinitas, obviamente, sem sucesso.

Leibniz fascinou-se pelo triângulo harmônico (Figura 7), que era semelhante ao triângulo aritmético ou comumente "de Pascal" (Figura 8) e novamente começou a somar séries.

$$\begin{array}{lllllll}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \cdots & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \cdots & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \cdots & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \cdots & & & & \\
\frac{1}{6} & \cdots & & & & &
\end{array}$$

Figura 7: Triângulo harmônico

$$\begin{array}{llllllll}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots & & \\
1 & 4 & 10 & 20 & \cdots & & & \\
1 & 5 & 15 & \cdots & & & & \\
1 & 6 & \cdots & & & & &
\end{array}$$

Figura 8: Triângulo Aritmético

No triângulo aritmético, "cada elemento (que não esteja na primeira coluna), é a diferença dos dois termos logo abaixo dele e à esquerda". No triângulo harmônico é similar: "cada termo (que não esteja na primeira linha) é a diferença dos dois termos logo acima dele e à direita". Percebe-se que o número de termos possíveis é infinito em ambos os casos e Leibniz teve muita habilidade ao somar séries infinitas.

Observando apenas o triângulo harmônico, como conferido anteriormente, a série na primeira linha é a série harmônica, que *diverge*; para todas as outras linhas a série *converge*. Analisando os números na segunda linha, conclui-se que "são a metade dos recíprocos dos números triangulares, Leibniz sabia que a soma dessa série é 1" (BOYER, 1994). Os números na terceira linha "são um terço dos recíprocos dos números piramidais: $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3}$, e o triângulo harmônico indica que a soma dessa série é $\frac{1}{2}$" (BOYER, 1994). Na quarta linha os números "são um quarto dos recíprocos dos números figurados que correspondem ao análogo em quatro dimensões do tetraedro, e a soma é $\frac{1}{3}$" (BOYER, 1994). E assim sucessivamente, ou seja, "os números na *n*-ésima diagonal desse triângulo são os recíprocos dos números na correspondente diagonal *n*-ésima do triângulo aritmético divididos por *n*" (BOYER, 1994).

Segundo Boyer (1994) "Leibniz sempre teve uma percepção aguda da importância de boas notações como ajuda ao pensamento, e sua escolha no caso do cálculo foi particularmente feliz."

6.3. A era Bernoulli

Leibniz precisava de discípulos que quisessem aprender o cálculo e em seguida transmitir esses conhecimentos a outros, a fim de propagar tais assuntos fora da Inglaterra. Assim, Leibniz conheceu Jacques Bernoulli (1654 - 1705) e Jean Bernoulli (1667 - 1748), dois irmãos suíços que estavam entusiasmados para adquirir e contribuir com o assunto.

Jean e Jacques pertenciam à família que mais produziu matemáticos reconhecidos na história, a família Bernoulli. Jacques interessou-se por séries infinitas, em 1689 escreveu seu primeiro artigo sobre o assunto e apresentou a "desigualdade de Bernoulli":

$(1+x)^n > 1+nx$, onde x é real, $x > -1$ e $x \neq 0$ e n é um inteiro $n > 1$.

Jacques acreditava que Jean teria sido o primeiro a observar que a série harmônica é divergente, pois desconhecia as provas de Oresme e Mengoli.

Jacques Bernoulli se encantou com a série dos recíprocos dos números figurados; ele sabia que a série dos recíprocos dos quadrados perfeitos convergia, porém, não conseguiu encontrar sua soma. Ele sabia que os termos $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$, são termo a termo, menores ou iguais aos $\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}\cdots+\frac{1}{n(n-1)}+\cdots$ e essa converge para 2, então era claro que a primeira também era convergente.

Os irmãos Jean e Jacques se interessaram por cálculo, mantendo comunicação com Leibniz. A palavra "integral" foi utilizada pela primeira vez por Jacques em 1690 e Leibniz concordou que cálculo integral seria melhor que cálculo somatório, como ele havia proposto para o inverso do cálculo diferencial.

Em 1713 foi publicado um tratado chamado *Ars conjectandi*[12], oito anos após a morte de seu autor, Jacques Bernoulli, cujo tema principal era probabilidade. Nele estava contido um artigo sobre séries infinitas; além das anteriores (série harmônica e soma dos recíprocos quadrados perfeitos), continha a seguinte série: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$. Bernoulli sabia que era uma série divergente e "observou o paradoxo que a razão da 'soma' de todos os termos ímpares para a 'soma' de todos os termos pares é a de $\sqrt{2}-1$ para 1, de onde se concluiria que a soma de todos os termos ímpares é menor que a soma de todos os termos pares" (BOYER, 1994), o que é absurdo pois termo a termo o primeiro é maior que o segundo.

A família Bernoulli produziu notórios matemáticos, mas nenhum comparado aos dois irmãos Jacques e Jean. O que teve uma maior notoriedade, após os irmãos, foi Daniel Bernoulli (1700 - 1782), filho de Jean, que estudou hidrodinâmica e é lembrado pelo "princípio de Bernoulli". Na matemática ele fez a distinção, na teoria das probabilidades, entre "esperança matemática" e "esperança moral". Nicholas Bernoulli (1695 - 1726) e Jean Bernoulli II (1710 - 1790), também filhos de Jean, ocuparam postos de professor de matemática.

6.4. Série de Taylor e Série de Maclaurin

Brook Taylor (1685 - 1731) era admirador de Newton, se graduou em Cambridge e era secretário da Royal Society, seu nome é lembrado por causa da *série de Taylor*:

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ de classe C^{∞}. Se a é interior ao intervalo I e $a + x \in I$, então podemos escrever, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

[12] Tradução: "Arte de Conjecturar."

$$f(a+x) = f(a) + f^{'}(a)\cdot x + \frac{f^{''}(a)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f^{'''}(a)}{3!}\cdot x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\cdot x^{(n-1)} + r_n(x)$$

onde $r_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_n x)}{n!}\cdot x^n$, com $0 < \theta_n < 1$, que foi publicada no seu livro *Methodus incrementorum*[13], em 1715.

A série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot x^n$ chama-se a *série de Taylor* da função f em torno do ponto a. Toda função C^{∞} num intervalo I possui uma série de Taylor em cada ponto interior $a \epsilon I$.

Essa série pode convergir ou divergir. Mesmo quando converge, sua soma pode ser diferente de $f(a+x)$.

Colin Maclaurin (1698 - 1746) teve resultados notáveis em geometria, porém é lembrado por causa de um resultado em análise: "série de Maclaurin" que é um caso especial da série de Taylor, apenas substituindo a por zero; ele a publicou em seu livro *Treatise of Fluxions*[14], em 1742.

Quarenta anos antes de Taylor publicar a "série de Taylor", James Gregory já à havia descoberto por um processo de diferenciação sucessiva. As séries de Maclaurin para $tg\ x$, $sec\ x$, $arctg\ x$ e para $arcsec\ x$ eram conhecidas por Gregory, mas apenas a $arctg\ x$ tem seu nome "série de Gregory":

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\, dx \ = \ arctg\ x \ = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Além de Gregory, Jean Bernoulli também havia descoberto a série de Taylor, mas Taylor não sabia disso.

[13] Tradução: "Progresso".
[14] Tradução: "Tradado de Fluxões".

7. CAUCHY

Edward Waring (1734 - 1793) era "senior wrangler[15]" em Cambridge em 1757 e "lucasian professor[16]" de matemática a partir de 1760. As obras escritas por ele contém resultados importantes, como o critério da razão para a convergência de séries, popularmente conhecido como "critério de Cauchy", que leva o nome de outro matemático, porém foi escrito por Waring no ano de 1776.

O matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) produziu tantos livros que é apenas inferior a Euler em quantidade. Cauchy tinha preferência pela matemática pura e fazia suas provas rigorosamente, elegantemente e atento aos detalhes, diferente de Waring.

Cauchy gostava de ensinar e sempre que conseguia algum resultado, apressava-se para publicá-lo, uma das razões pelas quais "a principal característica do século dezenove - a introdução do rigor - é atribuída a Cauchy" (BOYER, 1994). Escreveu três livros sobre cálculo: *Cours d' analyse de I'École Polytechnique*[17], *Résumé des leçons sur le calcul infiniteésimal*[18] e *Leçons sur le calcul différentiel*[19], nesses livros ele deu ao cálculo elementar o rigor, que é visto atualmente, além de tornar fundamental o conceito de limite de d'Alembert, mas com caráter aritmético de maior precisão. A definição um tanto precisa de limite: "Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a finalmente diferir deste de tão pouco quanto se queira, esse último chama-se limite de todos os outros." (*Oeuvres complètes* de Cauchy 1882-1932, 25 vols. apud, BOYER, 1994, p. 380).

Cauchy definiu o infinitésimo como uma variável dependente, diferente dos anteriores que definiam como um número fixo muito pequeno: "Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce indefinidamente de modo a convergir para o limite zero" (BOYER, 1994).

Quase simultaneamente as descobertas de Cauchy, o padre tcheco Bernhard Bolzano (1781 - 1848) também escreveu sobre cálculo: definições de limite, derivada, continuidade e convergência; semelhantes as escritas de Cauchy, sendo apenas coincidência, pois não há

[15] É a melhor licenciatura em matemática da Universidade de Cambridge.
[16] Cadeira pontifícia de matemática da Universidade de Cambridge.
[17] Tradução: "Curso de análise da Escola politécnica" (1821).
[18] Tradução: "Resumo das lições sobre cálculo infinitesimal" (1823).
[19] Tradução: "Lições sobre cálculo diferencial" (1829).

indícios que tivessem se encontrado, embora Cauchy tenha morado em Praga por um período, onde Bolzano vivia.

Diferente de seus contemporâneos como Gauss (1777 - 1855) ou Cauchy que evitavam os conjuntos infinitos, uma obra póstuma de 1850, intitulado *Paradoxien des Unendlichen*[20], Bolzano enuncia algumas propriedades importantes dos conjuntos infinitos. Ele passou a mostrar que correspondências semelhantes entre os elementos de um conjunto infinito e um subconjunto próprio são comuns, assimilando uma equação linear $y = 2x$ e elaborando uma correspondência um a um entre os números reais y no intervalo de 0 a 2 e os números reais x no intervalo de 0 a 1, isto é, há tantos números reais entre 0 e 1 quanto entre 0 e 2. Aproximadamente em 1840, Bolzano percebeu que: "a infinidade de números reais é de tipo diferente da infinidade dos inteiros, sendo não enumerável" (BOYER, 1994).

Cauchy e Gauss afirmaram que uma função y é infinita de ordem n com relação a x se: $\lim_{n\to\infty} \frac{y}{x^n} = K \neq 0$, fato que está escrito na obra sobre "ordens de infinito", diferente de Bolzano que fazia afirmações sobre as correspondências entre conjuntos.

Gauss usava o critério da razão para provar que a série hipergeométrica:

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\cdots(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n + \cdots$$

converge para $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$, critério esse que foi usado anteriormente por Edward Waring, mas que leva o nome de Cauchy.

Bolzano também foi responsável por escrever um importante critério para a convergência de uma série ou sequência infinita, que leva o nome de "critério de Cauchy":

> Tendo definido uma série como convergente se, para valores crescentes de n, a soma S_n dos n primeiros termos se aproxima de um limite S, chamado a soma da série. Cauchy provou que uma condição necessária e suficiente para que uma série infinita seja convergente é que, para n suficientemente grande e dado p qualquer, o valor da diferença entre S_n e S_{n+p} se torne menor que qualquer número dado. (BOYER, 1994, p. 382).

Em linguagem moderna, esse critério de Cauchy para séries é o teorema:

[20] Tradução: "Paradoxos do Infinito".

A fim de que a série $\sum a_n$ *seja convergente, é necessário e suficiente que, para cada* $\mathcal{E} > 0$*, exista* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon$ *quaisquer que sejam* $n > n_0$ *e* $p \in \mathbb{N}$. *Demonstração:* Basta observar que $\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| = \left|s_{n+p} - s_n\right|$, onde (s_n) é a sequência das reduzidas de $\sum a_n$ e aplicar o critério de Cauchy para sequências.

7.1. Critério de Dirichlet

O matemático Joseph Fourier (1768 - 1830) contribuiu com a matemática quando observou que qualquer função $y = f(x)$ pode ser representada por uma série da forma:

$$y = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots$$

conhecida atualmente como série de Fourier.

Com isso, as funções não precisavam mais ter a forma bem comportada com que os matemáticos estavam acostumados. O matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) no ano de 1837 sugeriu uma definição de função:

> Se uma variável *y* está relacionada com uma variável *x* de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a *x*, existe uma regra segundo a qual um valor único de *y* fica determinado, então diz-se que *y* é função da variável independentemente *x*. (BOYER, 1994, p. 405).

Essa definição é próxima da noção moderna de uma correspondência entre dois conjuntos de números, mas o conceito de "conjunto" e de "número real" ainda não havia sido estabelecido. Dirichlet propôs uma função: quando x é racional, $y = c$, quando x é irracional $y = d \neq c$, essa função não é contínua.

Uma série de Fourier nem sempre converge para o valor da função da qual deriva, contudo Dirichlet no Jornal de Crelle de 1828 deu a primeira prova rigorosa da convergência de série de Fourier para uma função com restrições provando o seguinte teorema:

> Se f(x) é periódica de período 2π, se para $-\pi < x < \pi$ a função f(x) tem um número finito de valores máximos e mínimos e um número finito de descontinuidades, e se $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ é finita, então a série de Fourier converge para f(x) em todos os pontos em que f(x) é contínua em pontos de salto converge para a média aritmética dos limites a direita e à esquerda da função." (BOYER, 1994, p. 405).

Outro teorema, conhecido como critério de Dirichlet: "se os termos da série $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n + \cdots$ são tais que os b_s são positivos e tendem monotonicamente a zero, e se existe um número M tal que $|a_1 + a_2 + \cdots + a_m| < M$ para todos os valores de m, então a série converge" (BOYER, 1994). Modernamente, equivale ao teorema: *Seja* $\sum a_n$ *uma série (não necessariamente convergente) cujas reduzidas* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ *formam uma sequência limitada. Seja* (b_n) *uma sequência não-crescente de números positivos com* $\lim b_n = 0$. *Então a série* $\sum a_nb_n$ *é convergente.* *Demonstração.* Temos:

$$
\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n \\
&= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) + \cdots \\
&+ (a_1 + \cdots + a_n)b_n \\
&= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n \\
&= \sum_{i=2}^{n} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i) + s_nb_n
\end{aligned}
$$

existe $k > 0$ tal que $|s_n| \leq k$ para todo n. Além disso, $\sum_{n=2}^{\infty}(b_{n-1} - b_n)$ é uma série convergente de números reais não-negativos (soma: b_1). Logo, a série $\sum s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Como $\lim s_nb_n = 0$, segue-se que existe $\lim (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)$, isto é, a série $\sum a_nb_n$ converge. ∎

A partir dos estudos de Cauchy a convergência das sequências e séries ganhou o formato que estudamos atualmente.

8. CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES

Os subcapítulos 8.1, 8.2. e 8.3 tratam as sequências e séries na nomenclatura moderna.

8.1. Sequências

No capítulo 6 definimos uma sequência de números reais (x_n), essa sequência pode ser *limitada* (quando o conjunto do seus termos é limitado, ou seja, $a \leq x_n \leq b, \forall\, n \in \mathbb{N}$), ou *ilimitada* (quando a sequência não é limitada). A sequência pode ser *limitada inferiormente* (quando $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$) ou *limitada superiormente* (quando $\exists\, b \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq b, \forall\, n \in \mathbb{N}$).

Uma sequência (x_n) chama-se *crescente* quando $x_n < x_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. E diz-se *não-decrescente* quando $x_n \leq x_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Analogamente, *decrescente* quando $x_n > x_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. E *não-crescente* quando $x_n \geq x_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Essas sequências são chamadas de *monótonas*.

Diz-se que o número real a é *limite* da sequência x_n de números reais, e escreve-se $a = \lim\, x_n$, quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$.

Uma sequência que possui limite chama-se *convergente*, caso contrário, ela se chama *divergente*.

Teoremas importantes que norteiam as sequências:

TEOREMA 1. *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subsequência de* (x_n) *converge para o limite* a.

Demonstração. Seja $(x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{ni}, \cdots)$ uma subsequência de (x_n). Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Como os índices da subsequência formam um conjunto infinito, existe entre eles um $n_{i0} > n_0$. Então $n_i > n_{i0} \Rightarrow |x_{ni} - a| < \varepsilon$. Logo $\lim x_{ni} = a$. ■

TEOREMA 2. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração. Seja $a = \lim\, x_n$. Então, tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Consideremos o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \dots, x_{n0}, a-1, a+1\}$. Sejam c o menor e d o maior elemento de F. Então todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[c, d]$. Logo a sequência é limitada. ■

TEOREMA 3. Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração. Para fixar as ideias, seja $(x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots)$ uma sequência não-decrescente limitada. Tomemos $a = \sup\{x_n; n = 1, 2, \dots\}$. Afirmamos que $a = \lim\, x_n$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n. Logo existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n0}$. Como a sequência é monótona, $n > n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto, $a - \varepsilon < x_n$. Como $x_n \leq a\ \forall\, n$, vemos que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Assim, temos de fato $\lim x_n = a$. ■

EXEMPLOS:

1. Toda sequência constante $(a, a, a, \dots, a, \dots)$ é evidentemente convergente e tem limite a.

2. A sequência $(1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ não converge porque não é limitada.

3. A sequência $(1, 0, 1, 0, \dots)$ é divergente, pois admite duas subsequências constantes que convergem para limites diferentes.

4. Temos $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Então $n > n_o \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

5. A sequência $(1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots)$ não é convergente porque é ilimitada. Note-se que ela possui uma subsequência convergente $(0, 0, 0, \dots)$.

6. Quando $a = 0$ ou $a = 1$ a sequência (a^n) é constante, logo converge. Quando $a = -1$, a sequência (a^n) diverge, pois é igual a $(-1, +1, -1, +1, \dots)$. Quando $a > 1$, (a^n) é monótona crescente e ilimitada, logo é divergente. Quando $a < -1$, (a^n) é ilimitada, então é divergente. E se $0 < a < 1$, então a sequência $(a, a^2, a^3, \dots)$ é monótona (decrescente) limitada e, portanto, a sequência converge.

8.2. Sequências de Cauchy

Seja (x_n) uma sequência de números reais. Ela é chamada de *sequência de Cauchy* quando cumpre a seguinte condição: dado arbitrariamente um número real $\varepsilon > 0$, pode-se obter $n > n_0$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implicam $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Os temos x_m e x_n, para valores suficientemente grandes dos índices m, n, se aproximem arbitrariamente uns dos outros (uma condição sobre os termos da própria sequência).

TEOREMA 4. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0 \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, o que mostra ser (x_n) uma sequência de Cauchy. ■

TEOREMA 5. Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Como toda sequência de Cauchy é limitada, a sequência (x_n) é limitada. Como toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente, então (x_n) possui uma subsequência convergente. Se uma sequência de Cauchy (x_n) possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{R}$ então $\lim x_n = a$, portanto (x_n) converge. ■

Esses teoremas são estudados quando tratamos de convergência de sequências.

8.3. Séries

Série é o nome atribuído para a "soma" de uma sequência infinita de números reais. Seja a_n uma sequência de números reais, a partir daí formamos uma nova sequência s_n cujos elementos são as somas: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2, \ldots,$ $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ que chamaremos de *reduzidas* da série $\sum a_n$, em que a_n é chamado de *termo* *geral* da série. Se existir o limite de s_n $(s = \lim\ s_n)$, diremos que a série $\sum a_n$ é *convergente* e o limite s será chamado a *soma* da série. Se a sequência não convergir, diremos que a série $\sum a_n$ é *divergente*.

TEOREMA 6. Se $\sum a_n$ é uma série convergente então $\lim a_n = 0$.

Demonstração. Seja $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Então existe $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Evidentemente, tem-se também $s = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$. Logo, $0 = s - s = \lim s_n - \lim s_{n-1} = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim\ a_n$. ■

A recíproca do teorema 6 é falsa, basta tomarmos como exemplo a *série harmônica*, seu termo geral é $\frac{1}{n}$, seu limite tende para zero mas a série diverge.

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao acompanhar a evolução de um conceito matemático dos primórdios à atualidade, não só vemos os percalços que grandes estudiosos enfrentaram para chegar à consolidação dos mesmos, como também vemos que a falta de precisão inicial não constituiu um impedimento para o avanço das ideias. O professor que conheça a evolução das ideias matemáticas pode balancear o rigor com a aplicação dos resultados, explorar as aplicações e depois mostrar que a falta de precisão nos conceitos pode levar a desastres na aplicação, isto é, a aplicação incorreta pode levar a resultados "paradoxais".

Por fim, e talvez o mais importante, saber que grandes gênios demoraram séculos para amadurecer conceitos e conhecer as dificuldades desta caminhada, podem fazer com que o professor tenha mais paciência e habilidade para reconhecer as dificuldades de seus alunos que hoje têm que aprender, em pouco tempo, conhecimentos "prontos e acabados", que são apresentados nos textos escolares como se tivessem “brotado” na vida tal qual são hoje apresentados.

10. REFERÊNCIAS

[1] BOYER, C. B. **História da Matemática**. 11ª reimpressão, tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, 1994.

[2] DIEUDONNE, J. **Mathematics - The Music of Reason**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.

[3] FERRARO, G. **Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences**. Springer Science+Business Media, LLC, 2008.

[4] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 7ª Ed, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.