UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

AS DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

ALBERTON FAGNO ALBINO DO VALE

MOSSORÓ
2013

ALBERTON FAGNO ALBINO DO VALE

AS DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues – UFERSA.
Co-orientador: Prof. Dr. Josildo José Barbosa da Silva

MOSSORÓ
2013

ALBERTON FAGNO ALBINO DO VALE

AS DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM : 05/07/2013

BANCA EXAMINADORA

Walter Martins Rodrigues

Profº. Dr. Walter Martins Rodrigues - UFERSA

Presidente

Josildo José Barbosa da Silva

Profº. Dr. Josildo José Barbosada Silva - UERN

Primeiro Membro

ARG

Profº. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA

Segundo Membro

ERLlanos

Profº. Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal - UFERSA

Terceiro Membro

MOSSORÓ/RN, 05 DE JULHO DE 2013

Dedico este trabalho aos meus pais Antônio Batista e Maria Elza, que nunca deixaram de acreditar em mim, durante toda minha vida e o tempo que durou este curso, sempre me dando coragem e mensagens de incentivo e otimismo.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida, e por todos os dons concedidos gratuitamente a mim e que foram essenciais para poder produzir este trabalho.

A meus pais, Antônio Batista do Vale e Maria Elza Batista Albino, pela educação que me deram e por todos os princípios e valores éticos e morais transmitidos a mim e que nortearam toda minha vida pessoal e profissional.

A minha esposa Francismelry Francisca e meus dois filhos Fagner Vinicius e Ananda Sofia pela paciência e compreensão pelos momentos que não puderam ser vividos com eles em virtude do tempo dedicado ao PROFMAT.

Ao coordenador do Curso (PROFMAT – UFERSA) Ronaldo Garcia pela brilhante ideia de trazer o PROFMAT para a cidade de Mossoró e por todo incentivo dado durante o curso, por não medir esforços para que seus alunos pudessem alcançar o sucesso.

Ao meu orientador, professor Walter Martins Rodrigues e ao meu co-orientador, professor Josildo José Barbosa da Silva pela paciência que tiveram comigo e por todas as orientações tão valiosas para este trabalho.

A Todos meus colegas de curso por todos os momentos difíceis que enfrentamos e vencemos juntos e também todos os momentos de alegria compartilhados por todos. Em especial aos colegas João Paulo, Otoniel Maria, Francisco Derilson e Ênio Virgílio que fizeram parte do meu grupo de estudos e ao colega Adriano Jorge que não mediu esforços para nos ajudar.

A todos os meus professores do (PROFMAT – UFERSA) que me ajudaram a crescer profissionalmente durante todo o curso.

Ao meu primo João Pereira Neto que me ajudou nos desenhos de todas as figuras contidas nesse trabalho, aos meus amigos Elias das Neves e Djair Eduardo pelas palavras de apoio que tanto me motivaram nessa caminhada e a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com o desenvolvimento do mesmo.

"A principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas, não simplesmente repetir o que outras gerações já fizeram. Homens que sejam criadores, inventores, descobridores. A segunda meta da educação é formar mentes que estejam em condições de criticar, verificar e não aceitar tudo que a elas se propõe".

(Jean Piaget)

RESUMO

Atualmente o ensino relativo á resoluções de equações do segundo grau tem se restringido praticamente á apresentação da fórmula resolutiva e as relações entre seus coeficientes e suas raízes. É raro encontra no Brasil um livro que fale de equações do segundo grau de forma satisfatória para aqueles alunos que querem se aprofundar nesse conteúdo. Por isso o presente trabalho mostra as diversas estratégias de se resolver uma equação do segundo grau ao longo da história, mostrando quais foram as civilizações e os matemáticos que contribuíram na solução desse tipo de equação através de diferentes métodos. Para isto foi feito um estudo histórico do desenvolvimento da equação do 2º grau partindo das civilizações antigas e as contribuições dos matemáticos egípcios, babilônios, gregos, hindus, árabes e europeus por meio de uma pesquisa bibliográfica. Usamos a história da matemática para possibilitar ao aluno um estimulo para aprendizagem. Ao final da pesquisa observamos que o estudo de conteúdos nesta perspectiva poderá contribuir para melhoria do ensino e aprendizagem em matemática.

Palavras-chave: Equação do segundo grau; Métodos de resolução; História da matemática.

ABSTRACT

Currently teaching on resolutions second degree equation has been restricted presentation will practically solving the formula and the relations between its roots and coefficients. It is rare to find in Brazil a book that speaks of quadratic equations satisfactorily for those students who want to deepen this content. Therefore the present work shows the different strategies to solve a quadratic equation throughout history, showing what were the civilizations and mathematicians who contributed to the solution of such equation via different methods. For this was made a historical study of the development of the equation of 2nd degree starting from the ancient civilizations and the contributions of mathematicians Egyptians, Babylonians, Greeks, Hindus, Arabs and Europeans through a literature search. We use the history of mathematics to enable the student a stimulus for learning. At the end of this research we observed that the study of contents in this perspective can contribute to improving teaching and learning in mathematics.

Keywords: Second degree equation; Methods of Resolution; History of mathematics.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1 TENDÊNCIAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	13
1.1 ETNOMATEMÁTICA	13
1.2 RECURSOS TECNOLÓGICOS	14
1.3 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	15
1.4 JOGOS MATEMATICOS	16
1.5 O USO DE MATERIAIS CONCRETOS	17
1.6 MODELAGEM MATEMÁTICA	17
1.7 RESOLUÇÃODE PROBLEMAS	18
2 UMA BREVE HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU	19
2.1 TIPOS DE EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU	24
3 EQUAÇÕES COMPLETAS E OS MÉTODOS ALGÉBRICOS DE RESOLUÇÃO	26
3.1 MÉTODO DE RESOLUÇÃO CONVENCIONAL	26
3.2 MÉTODO DA SEMI-SOMA E DO PRODUTO	29
3.3 MÉTODO ALTERNATIVO	29
3.3.1 DEMONSTRAÇÃO INDEPENDENTE DO CONHECIMENTO DA FÓRMULA RESOLUTIVA	30
3.4 MÉTODO DO QUADRADO E DA DIFERENÇA	31
3.5 MÉTODO DE VIÉTE	32
3.5.1 MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO DE VARIÁVEIS	34
3.6 MÉTODO DE EULER	35
3.7 MÉTODO DIFERENCIAL OU DAS COODERNADAS DO VÉRTICE	37
3.8 MÉTODO FAN-FAN OU MÉTODO DE HORNER	38
3.9 MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO	39
4 EQUAÇÕES COMPLETAS E OS MÉTODOS NÃO ALGÉBRICOS DE RESOLUÇÃO	41
4.1 MÉTODOS GRÁFICOS	41
4.1.1 MÉTODO GRÁFICO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES	41
4.2 MÉTODO CARTESIANO	43
4.3 MÉTODO DE DESCARTES	44

4.4 MÉTODOS GEOMÉTRICOS DE EUCLIDES 48
4.4.1 MÉTODO GEOMETRICO BASEADO NO DE EUCLIDES 50
4.5 MÉTODO GEOMÉTRICO DE COMPLETAR QUADRADO 54
4.5.1 MÉTODO GEOMETRICO DE COMPLETAR O QUADRADO-ALTERNATIVO 55
4.5.2 OUTRO MÉTODO GEOMÉTRICO 56
4.6 MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO DUPLA 57
5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU 59
5.1 MÁXIMO E MÍNIMO DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA DO SEGUNDO GRAU 63
5.2 GIRARD E AS RELAÇÕES ENTRE OS COEFICIENTES E A AS RAÍZES DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU 65
5.3 OS RETÂNGULOS DE OURO E AS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU 67
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 71
REFERÊNCIAS 73

INTRODUÇÃO

> “Por mais antigo, tradicional e repisado que seja o assunto que estamos ensinando, convém sempre procurar novos ângulos para focalizá-lo, outras maneiras de abordá-lo, não somente buscando tornar mais atraentes nossas aulas, mas até mesmo para nos dar um pouco mais de entusiasmo, quebrando a monotonia de repetir todos os anos a mesma história” (LIMA, 1988).

Este trabalho tem o propósito de inserir as técnicas de resoluções de equações do segundo grau como recurso metodológico auxiliador no processo ensino/aprendizagem deste conteúdo de forma a diminuir os bloqueios que a Matemática exerce sobre alguns alunos e conseguir mostrar como a matemática é importante e como está presente no cotidiano dos estudantes. Pois há um grande distanciamento entre o que se ensina e o que é usado pelos jovens em seu dia-a-dia e a apresentação de conteúdos por parte dos professores em sala de aula. Grande parte dos professores de matemática das escolas públicas e particulares não usam a história da matemática como recurso para facilitar a aprendizagem dos seus alunos e nem conhecem muitas aplicações dos conteúdos programados o que torna suas aulas desmotivadas causando pouco interesse por parte dos discentes. Diante desta realidade nos deparamos com a seguinte questão: Como fazer para motivar os alunos no ensino e aprendizagem de matemática no ambiente de sala de aula, visando à motivação dos jovens e aproveitando os conhecimentos e a experiência dos professores?

A carência de projetos e metodologias para a disciplina nas suas especificidades reforça a importância desta proposta para o crescimento e desenvolvimento de outros projetos pedagógicos tão necessários para o ensino e aprendizagem da Matemática no ensino fundamental e médio. O enfoque deste trabalho é utilizar a história da matemática para mostrar as inúmeras estratégias de se resolver equações do segundo grau e ao fazê-lo conseguir, de modo objetivo e claro, demonstrar quanto a matemática é útil, eu diria fundamental para todas as ciências. Deve haver um trabalho para tornar a Matemática mais atraente, interessante e agradável, já que é uma disciplina indispensável e fundamental na formação de cidadãos, que hoje se encontram nas nossas salas de aulas e em breve estarão inseridos na sociedade brasileira. Os estudantes de hoje futuros profissionais em um país que busca arduamente a racionalização de seu desenvolvimento.

Este trabalho tem justamente esta intenção, mostrar as aplicações das equações quadráticas e as diversas maneiras de encontrar suas raízes através de diversos métodos de resolução e que o aluno conheça os diversos matemáticos que contribuíram de alguma forma nas diversas soluções dessas equações ao longo da história dessa ciência e perceba que quanto mais evoluem nossos conhecimentos sobre a importância da matemática e a estreita relação entre as ciências e suas tecnologias necessitamos de fundamentação matemática pra analisar e quantificar determinados problemas. Pois pretendemos com a análise de elementos históricos sobre o conteúdo “Equações do 2º grau” destacar a importância do desenvolvimento de atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a autoestima e de perseverar na busca de soluções. Adotando como critérios para este conteúdo sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno.

É de grande relevância o engajamento de professores de Matemática para tornarem suas aulas mais motivadoras mostrando as diversas aplicações dos conteúdos ministrados e proporcionando aos seus alunos outra perspectiva na sala de aula e de contato com conteúdos de Matemática mais “vivos” dentro do contexto destes alunos. O papel do professor, mediando de forma adequada, a experiência traria um aprendizado significativo e produziria resultados satisfatórios dentro das propostas do ensino-aprendizagem destes conteúdos.Com certeza, a formulação lógica dos problemas de aplicação, com suas possíveis soluções, não irá substituir os resultados experimentais; mas, sem dúvida alguma, pode otimizá-los e torna-los mais eficientes e isso contribuíra muito para reduzir a distancia que separa a matemática de suas aplicações na mente dos nossos alunos.

O respeito à individualidade, ritmo e diversidade colaboram para que esta proposta seja mais uma possibilidade de desenvolvimento das potencialidades do indivíduo, permitindo que sua criatividade faça parte da construção, valorizando as iniciativas e participações, contribuindo para a construção coletiva de conhecimento e que possa ser compartilhada com o mundo. As experiências até aqui compartilhadas chamam a atenção por terem revelado que o método também trabalha a auto-estima dos indivíduos, que se sentem parte importante dentro de todo o processo, e faz com que suas atitudes mudem significativamente diante dos conteúdos de Matemática, produzindo assim resultados satisfatórios dentro das propostas do ensino-aprendizagem destes conteúdos.

1 TENDÊNCIAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo abordaremos sucintamente as tendências em educação matemática, especialmente a história da matemática e a resolução de problemas, pois são recursos pedagógicos plenamente utilizados nesta pesquisa. Sabemos que nas últimas décadas há um interesse crescente por parte de educadores, pesquisadores e matemáticos para com a Educação Matemática. É inegável nesse campo as contribuições advindas das comunidades acadêmicas. Essa afirmação é comprovada anualmente em publicações, relatórios, anais de congressos, encontros e seminários em nível nacional e internacional. Tais trabalhos e produções levaram educadores matemáticos a buscarem cada dia mais alternativas pra o ensino da matemática em todos os níveis, a se contraporem ao modelo tradicional .

Na defesa de suas ideias filosóficas e metodológicas educadores matemáticos se definem a favor ou contra cada pensamento e ideais. Confrontam-se em debates, teorias dividindo-se e formando várias tendências no campo da Educação Matemática. É sobre essas tendências que faremos algumas reflexões e pontuaremos a sua importância, significado e pesquisa pra o ensino-aprendizagem da Matemática.

Assim, as tendências no campo da Matemática são desafios que englobam professores matemáticos a debaterem perspectivas históricas e epistemológicas no contexto da sala de aula da matemática a uma abordagem de ensino-aprendizagem mais eficaz, mudando muitas vezes modos de educadores matemáticos ensinarem. Vejamos cada uma:

1.1 ETNOMATEMÁTICA

No campo da educação matemática a Etnomatemática é uma das tendências de maior interesse por pesquisadores e estudiosos. Ela é uma importante contribuição no processo ensino-aprendizagem da matemática. Isso por ser um trabalho teórico que procura desvendar a matemática sóciocultural própria de vários grupos sociais, levando à compreensão e ao entendimento da realidade de forma cognitiva e natural.

Existem duas posições de pensamento dominante sobre a Etnomatemática: uma posição é do educador matemático D'Ambrosio (1985) e outra posição do casal americano antropólogos Ascher (1986).

D'Ambrosio (2002) metodologicamente considera Etnomatemática um programa abrangente que focaliza a geração, a organização intelectual e social, como também a institucionalização e a difusão do conhecimento.

Já a concepção do casal Robert Ascher e Márcia Ascher define a Etnomatemática como um estudo de ideias matemáticas de pessoas "não letradas".

Fossa e Mendes (1997, p. 14) vêem a Etnomatemática como o "estudo da matemática usada e criada por um grupo sociocultural". Entendem que a Etnomatemática busca recuperar o fazer de cada grupo cultural para poder resgatar esse conhecimento e utilizá-los no seu ensino-aprendizagem.

No modo escolar, os autores reforçam que o aluno parte para os seus estudos matemáticos de uma base cognitiva já bem constituída: através da sua própria convivência com sua cultura, fazendo com que o conhecimento matemático seja contextualizado.

Atualmente Fossa (2004) vem definindo a Etnomatemática como uma ramificação da história da matemática que procura investigar as diversas atividades protomatemáticas. Mendes (2006) acredita não ser possível responder a definição ou conceito de Etnomatemática, visto que considera uma pergunta que contém vários elementos complexos em torno de sua elaboração.

Nosso entendimento é que a Etnomatemática tem evidências importantes para o ensino-aprendizagem da matemática, por contrapor a Matemática tradicional pelo fato de provocar diálogos e caminhos, indo além da linguagem disciplinar e do ensino formal (COSTA, 2005).

1.2 RECURSOS TECNOLÓGICOS

Hoje é uma tendência que vem sendo muito debatida por pesquisadores chamando a atenção para o uso de computadores, calculadoras e outras ferramentas referentes às Novas Tecnologias da Informação e Comunicação - NTIC.

Na Educação Matemática, o estudo do uso do computador no ensino da matemática é uma ferramenta de investigação cognitiva ou uma maneira de renovar os cursos tradicionais (FOSSA; MENDES, 1997, p. 16). Muitos são os programas usados com esse recurso, o matlab, o cabri-geometre e o geogebra são exemplos de alguns deles.

De acordo com os PCNs de Matemática (1998) resumimos que a utilização de recursos como o computador e a calculadora pode:

> Contribuir para que o processo de ensino-aprendizagem e a Matemática se torne uma atividade experimental mais rica. Os alunos sejam encorajados a desenvolver seus processos metacognitivos e sua capacidade crítica. O professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental da condução e aperfeiçoamento das situações de aprendizagem (BRASIL, 1998, p. 49)

Portanto, com o avanço da tecnologia e sabendo da facilidade e o entusiasmo que o aluno tem pela informática e sabendo ainda que a internet se bem explorada é uma fonte enorme de conhecimento entendemos o uso desses recursos na sala de aula de matemática tornará o ensino desse componente curricular mais prazeroso para o aluno e o professor.

1.3 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A história da matemática é uma das reflexões didáticas mais recentemente feitas nessas últimas décadas por educadores matemáticos, chamando à atenção para o uso da História na sala de aula de Matemática e é um dos focos do nosso trabalho sobre as equações do segundo grau.

Estudiosos da área apontam a história da Matemática como um possível recurso proveitoso para entender os processos de formação do pensamento matemático do aluno. Isso é revisto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs): “O recurso a História da Matemática que estão sendo construídos pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns ‘porquês’ e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento”. (BRASIL, 1999).

A história da matemática pode ser abordada no contexto escolar em atividades pelo professor de forma implícita ou explicita. É o que realça Mendes (2006):

> As atividades históricas devem ser elaboradas de modo a imprimir maior significação à Matemática escolar, pois o conhecimento histórico pode estar implícito nos problemas suscitados na atividade, ou explícito nos textos históricos resgatadas de fontes primárias (textos originais, documentos ou outros artefatos histórico ou secundárias / informações de livros de história da matemática ou de livros paradidáticos (MENDES, 2006, p. 56)

Essas são estratégias possíveis de integrar a dimensão histórica de forma eficiente no ensino-aprendizagem da matemática.

Barbin (2000, p. 59) discutindo sobre a integração da história da matemática como perspectiva de pesquisa explica que as razões mais comuns apresentadas para a sua inclusão nas grades curriculares é que a historia da matemática fornece a oportunidade para desenvolver uma visão do que seja Matemática, mudando a forma de como ela é ensinada e até modificar a maneira do aluno perceber e entender a Matemática.

Essa metodologia pode ser utilizada nas academias de matemática, nos cursos de formação de professores e no próprio ensino fundamental e Médio.

1.4 JOGOS MATEMÁTICOS

Os jogos matemáticos na sala de aula de Matemática é uma forma lúdica de o aluno construir os seus próprios conceitos matemáticos. Para os PCNs (1998) “os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de resolução e busca de solução”.

Segundo Fossa e Mendes (1997), os jogos podem ser classificados em jogos de aprendizagem e como jogos de fixação. O primeiro tem a finalidade de viabilizar a aprendizagem de conceitos matemáticos e o segundo evidencia o exercício necessário para que conhecimento matemático venha acontecer.

O uso dessa metodologia é bastante aplicado na educação infantil e nas séries iniciais. Hoje essa tendência é objeto de estudo de educadores e psicólogos, diante de sua importância para a criança aprender à matemática brincando. O jogo pode tornar-se uma estratégia didática quando as situações são planejadas e orientadas pelo adulto visando a uma finalidade de aprendizagem, isto é, proporcionem à criança algum tipo de conhecimento, alguma relação ou atitude (BRASIL, 2000).

1.5 O USO DE MATERIAIS CONCRETOS

O uso de material concreto é uma metodologia própria para ser realizada com a intervenção do professor, junto com os alunos utilizando materiais em atividades de grupos. Esses materiais devem ser do convívio diário do aluno. Eles, muitas vezes devem ser confeccionado pelos grupos em atividades de sala ou extra-classe.

De acordo com Mendes (2006, p. 16) “essas atividades têm uma estrutura matemática a ser redescoberta pelo aluno que, assim, se torna um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento matemático”.

O material para a confecção de instrumentos ou jogos podem ser os mais diversos possíveis. Hoje como defesa ao meio ambiente, o professor deverá fazer uso de sucatas (materiais reaproveitável ou reciclável) como: jornais, pet’s, caixas, plásticos para fazer seus jogos, tangrans, máquina de somar, geoplano (da tabuada e da geometria), teodolitos e outros. Isso, além de ser uma tarefa de saber cuidar do planeta é uma tarefa de estímulo de criação e capacidade de ação do aluno na aula de Matemática.

O uso dessa tendência é bastante aplicado nas séries iniciais e no ensino fundamental.

1.6 MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática é uma metodologia que parte de um problema prático ou empírico e busca a sua resolução na sistematização matemática. Nesse sentido, comungamos com Fossa e Mendes (1997) que “assim, a metodologia consiste em uma análise de problemas reais e a busca de modelos apropriados para resolvê-los”.

No pensamento de Biembengut (2000, p. 13) a modelagem matemática é uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que sejam úteis não apenas para uma solução particular, mas também sirva posteriormente como suporte para outras aplicações e teorias.

1.7 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

É outra tendência de grande destaque em estudos de pesquisadores no campo de Educação Matemática. Sobre esses estudos e essas pesquisas, Fossa e Mendes (1997, p. 15), apontam duas concepções complementares da atividade de resolver problemas: A primeira é uma tentativa de entender e descrever como o aluno resolve problemas. A segunda é uma tentativa de ensinar o aluno a ser um bom resolvedor de problemas, através da elaboração de certas sequências didáticas sistematicamente usada pelo aluno.

Os primeiros trabalhos desse estudo devem-se a Polya (1971) ao abordar maneiras como planejar e resolver problemas através da resolução de problemas.

No PCN de Matemática Brasil (1998) define que um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Pressupõe que o aluno ao resolver um problema deve:

1. elaborar um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
2. compreender seus resultados com os de outros alunos;
3. validar seus procedimentos.

Desse modo o ensino-aprendizagem tomará um rumo mais dinâmico e significativo em todos níveis escolar. Portanto, encerramos este capítulo sobre um pequeno resumo das principais tendências da educação matemática como foi proposto inicialmente.

2 UMA BREVE HISTORIA DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Agora mostraremos um pouco da história das equações do segundo grau e quais foram algumas das civilizações que contribuíram ao longo da história para o seu desenvolvimento. A matemática antiga sempre precisou de embasamentos práticos para se desenvolver e para evolução de formas mais avançadas de sociedade é que ela foi se evoluindo. Com o desenvolvimento da agricultura e a necessidade de projetos extensivos dessa natureza era preciso conhecimentos de engenharia, administração desses projetos, comercio etc. Assim podemos dizer que a origem da matemática em certas partes do Oriente Antigo se deu para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. No meio desse contexto sóciocultural surge as equações do segundo grau sem muitas aplicações práticas para época e o primeiro registro desse tipo de equação que se tem notícia foi feito pelos babilônios cerca de 1700 a.C. aproximadamente, feito numa tábua de argila através de palavras. Os babilônios tinham uma álgebra bem desenvolvida pra época e resolviam essas equações por métodos semelhantes aos atuais ou pelo método de completar quadrados. Naquela época não se falavam em raízes negativas.

> Os escribas da babilônia nunca poderiam imaginar que um dia os matemáticos inventariam os números negativos. Mas é impressionante a exatidão dos cálculos efetuados por aqueles escribas para extrair a raiz quadrada positiva de um número (GUELLI, 2001, p.10).

Como eles não utilizavam coeficientes negativos, distinguiam as equação em diferentes tipos:

$$i)\ x^2 + px = q \qquad ii)\ x^2 + p = px \qquad iii) x^2 = px + q$$

O caso $x^2 + px + q = 0$ com $p\ e\ q$ positivos obviamente não teria solução. Segundo Fragosso (2000) mesmo não sendo encontrados registros do tratamento desse tipo de equação pelos historiadores matemáticos no Egito, eles suspeitam que os egípcios dominavam alguma técnica de resolução, já que foram encontradas no papiro de Kahun (Papiro da 12ª dinastia egípcia 1991-1786 a.C.)

uma resolução da equação $x^2 + y^2 = k$, onde k é um numero natural e para isso eles usaram uma técnica conhecido na época como Método da falsa posição. Na Grécia, a matemática tinha um cunho filosófico e pouco prático e o como os gregos tinham um gosto natural pela geometria, isso levou essa civilização (500 a 200 a.C.) a resolver problemas matemáticos usando geometria, dentre os quais a solução das equações do segundo grau, uma das técnicas que se tem notícia é o método de Euclides o qual demonstraremos adiante.

> Em sua álgebra geométrica os gregos se utilizavam de dois métodos principais para resolver certas equações simples - métodos das proporções e o método da aplicação de áreas.Há indícios que ambos os métodos se originaram com os pitagóricos (EVES,2004,p.110).

O matemático Diophanto contribuiu para mais um avanço na busca da resolução de equações do segundo grau ao apresentar uma outra representação para as equações introduzindo alguns símbolos, pois até então a equação e sua solução eram representados em forma discursiva. Segundo Howard Eves (2004). Apesar de a maioria dos historiadores situá-lo no século III da nossa era, nada se sabe com certeza qual era sua nacionalidade, apenas que sua carreira floresceu em Alexandria na Grécia e que sua álgebra teve grande influência sobre os europeus que posteriormente se dedicaram a teoria dos números.

Na índia as equações polinomiais do segundo grau eram resolvidas também completando quadrados. Esta forma de resolução foi apresentada geometricamente por Al-Khowârizmi, no século IX. Os hindus descartavam as raízes negativas, por serem inadequadas; mas aceitava as raízes irracionais, tinha também uma maneira própria para solução desse tipo de equação puramente algébrica. Na Índia do século XII também se destacam outros grandes matemáticos que contribuíram com os estudos das equações do segundo grau que são Bhaskara de Akaria e Sridhara. Os dois tem forte influência na regra que originou a fórmula atual.

Durante a Baixa Idade Média, no Islam, os árabes tornaram-se patronos da cultura, traduzindo para o Árabe manuscritos hindus e gregos como por exemplo “Os Elementos de Euclides” e o “Almagesto” de Ptolomeu além de vários trabalhos das mais variadas ciências dentre desse inúmeros trabalhos vários eram de astronomia, medicina e filosofia grega, que posteriormente foram traduzidas para o latim e outros idiomas por intelectuais europeus. Em Bagdá foi criada a casa da sabedoria comparável ao antigo Museu de Alexandria, onde encontravam-se mestres como o matemático e astrônomo Mohammedibu-Musa Al-Khowarizmi que escreveu algumas obras de astronomia, tabelas sobre o astrolábio, relógio do sol, aritmética e álgebra. Estas últimas tiveram papéis importantes na história da Matemática. O livro *De numero hindorum* que relata a arte hindu de calcular, alguns historiadores relatam que esse livro foi provavelmente baseado numa tradução Árabe de Brahmagupta, e trata de uma exposição completa dos números hindus.

> Ao estudar as obras dos matemáticos hindus traduzidos para a língua árabe, o brilhante matemático Árabe Al-khowarizmi tomou conhecimento dos fantásticos cálculos realizados na Índia. E qual não foi sua surpresa ao verificar que os hindus faziam todos aqueles cálculos utilizando apenas dez símbolos, por sinal bem estranhos (GUELLI, 2001, p.15).

A tradução para o latim desta obra *De numero hindorum* contribuiu na Europa, para a divulgação destes numerais que posteriormente vieram a ser chamados de algorismos ou algoritmos, palavras que originalmente deriva do nome do matemático Árabe Al-Khowarizmi. Foi com o livro “HisabAl-jabrwa-al-mugabalah” desse brilhante matemático que ficou mais fácil e completo o estudo das equações do segundo grau já que os antigos matemáticos da babilônia resolviam essa equações mas não se preocupavam de explicar o método e os Gregos pro muito tempo preferiram a geometria à álgebra.

Neste livro *De numero hindorum* Al-Khowarizmi expressa-se inteiramente com palavras, mesmos os números são escritos com palavras em vez de símbolos. O texto contém uma exposição direta e elementar da resolução de equações do segundo grau. Não se sabe os significados certos dos termos Al-jabr e Muqabalah, supõe-se que *al-jabr* tenha como significado “restauração ou completação” e refere-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação, a palavra Muqabalah tem como significado ‘redução ou equilíbrio” e refere-se ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação. No livro Al-jabr o matemático Al-Khowarizmi separou e classificou as equações polinomiais do segundo grau da seguinte maneira:

I) Quadrado igual a raízes

$$x^2 = bx \text{ ou } ax^2 = bx$$

II) Quadrados e números iguais a raízes

$$x^2 + c = bx \text{ ou } ax^2 + c = bx$$

III) Raízes e números iguais a quadrados

$$bx + c = x^2 \text{ ou } bx + c = ax^2$$

IV) Quadrados e raízes iguais a números

$$x^2 + bx = c \text{ ou } ax^2 + bx = c$$

Vejamos um exemplo de como brilhante matemático Árabe resolvia as equações do segundo grau usando somente palavra.

Dada a equação do segundo grau:

$$x^2 + 10x = 39$$

Veja que somando em primeiro lugar a área do quadrado de lado x com dez raízes, encontraremos trinta e nove. Portanto devemos determinar a metade das raízes e multiplicar essa metade por si mesma, o que dá vinte e cinco. Vinte e cinco somado ao quadrado e às dez raízes resulta sessenta e quatro. Compreendam, então, que o número que multiplicado por si mesmo dá sessenta e quatro é oito. E se do oito diminuirmos cinco unidades, vamos descobrir que uma raiz vale três unidades.

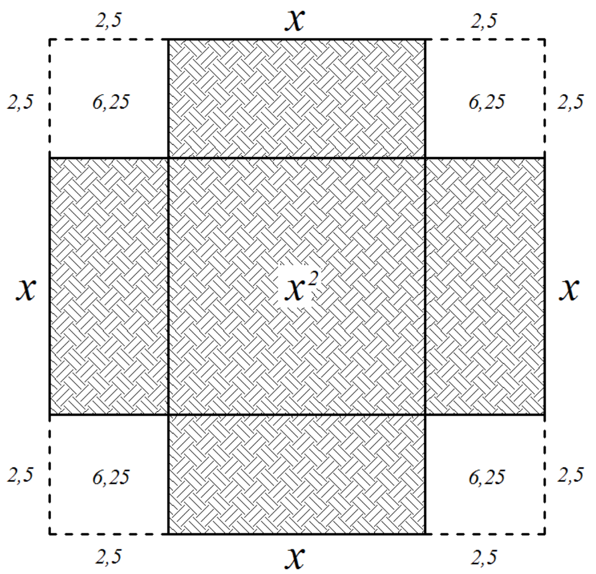
É fato que se fossemos ensinar nossos alunos a resolver equações do segundo grau dessa maneira seria uma tarefa muito complicada. Isso mostra quão brilhantes eram os matemáticos dos povos antigos. As soluções apresentadas são regras práticas de completar quadrados, aplicadas a exemplos específicos. Al-Khowârizmî após expor e resolver as equações demonstrava geometricamente seus resulta dos através da álgebra de Euclides.

Como exemplo, vamos resolver novamente a equação:

$$x^2 + 10x = 39,$$

perceba que ela pode ser representada por um quadrado de lado x, e sobre os quatro lados constroem-se retângulos de largura $2{,}5$ unidades.Para completar o quadrado maior precisamos construir quatro quadrados menores nos cantos da Figura 1,cada um com área igual a $6{,}25$ unidades.Portanto para completar o quadrado somamos 4 vezes $6{,}25$ unidades ou seja $6{,}25$ unidades, obtemos então um quadrado com área total $39 + 25 = 64$. Concluímos que o lado do quadrado maior mede 8 unidades e se subtrairmos 2 vezes $2{,}5$ unidades, ou seja, 5 unidades, achamos $x = 3$, que é a raiz da equação dada. Veja abaixo a **Figura 1** construída com a situação citada.

Figura 1: Método de completar quadrado.



Fonte: Guelli, 2001

A estratégia chinesa para a resolução das equações do segundo grau foi o método fan-fan em 1303 pelo grande matemático chinês da quela época, Chu Shih-chieh e apresentou na obra "*Ssu-yuan yú-chien"* que quer dizer precioso espelho dos quatro elementos é uma técnica baseada em aproximações sucessivas de raízes de grande precisão. Na Europa do século XV ao XVII muitos foram os matemáticos que desenvolveram formas distintas de representação e resolução da equação do segundo grau. O matemático François Viéte utilizou-se de simbolismo para representar equações dando um caráter geral, pois não se usava o formalismo atual. Ele representava uma equação do segundo grau da seguinte forma:

$$B\ in\ A\ \text{área} + C\ in\ A + D\ \text{é}\ igual\ a\ \ 0.$$

Nesta mesma época o matemático francês René Descartes (1596-1650) encontrou um modo mais prático para expressar os símbolos de Viéte e diversos matemáticos da época foram descobrindo muitas propriedades das equações. Atualmente usamos a representação $ax^2 + bx + c = 0$ que herdamos dos europeus e a solução fornecida pelos hindus. Este foi um sucinto resumo da história das equações do segundo grau que pode servir como material de apoio para as aulas de matemática sobre este assunto.

2.1 TIPOS DE EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Agora falaremos da definição e dos tipos de equações do segundo grau. Chama-se equação do segundo grau, toda função polinomial do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ onde devemos ter, necessariamente $a \neq 0$, pois em caso contrário, teríamos uma equação do primeiro grau da forma $bx + c = 0$. Quando a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$tiver seus coeficientes, $b = 0$ ou $c = 0$ *ou* ainda $b = c = 0$ dizemos que ela está em sua forma incompleta. Quando a equação tiver a forma $ax^2 = 0$, esse tipo de equação não tem aplicação prática tendo em vista que as raízes sempre serão nulas, são, portanto uma mera formalidade matemática. Ou seja, se o produto de dois números é igual a zero $(a.x^2 = 0)$, existem três possibilidades: $a = 0$; $x^2 = 0$ ou $a = x^2 = 0$. Logo, podemos concluir que as raízes serão $x' = 0\ e\ x" = 0$.Se as equações são da forma $ax^2 + c = 0$, para encontrar suas raízes temos:

$$ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\ ,$$

logo suas raízes são:

$$x' = +\sqrt{-\frac{c}{a}}\ \text{e}\ x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}\ .$$

Mas se as equações tem a forma $ax^2 + bx = 0$, para encontrar suas raízes vamos colocá-la na forma fatorada:

$$x(ax + b) = 0.$$

Como o produto dos dois números é igual a zero temos o seguinte:

$x = 0$ ou $ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ que são as raízes da equação.

Ao longo da história varias civilizações tentaram resolver essas equações. Os gregos realizavam demonstrações por meio de construções geométricas, os babilônios apresentavam soluções algébricas, os árabes apresentaram a equação do 2º grau e sua resolução ampliando horizontes entre o método geométrico e algébrico. Em fim, ficou aqui definido o que é uma equação do segundo grau e quando ela é completa ou incompleta nos próximos capítulos vamos dá ênfase aos métodos de resolução das equações completas do segundo grau.

3 EQUAÇÕES COMPLETAS E OS MÉTODOS ALGEBRICOS DE RESOLUÇÃO

É indiscutível que não é de hoje que a álgebra tem um lugar de destaque no ensino da matemática e sabemos que não é fácil para o aluno compreender as idéias da álgebra e nem todas as suas manipulações algébricas. Por isso desejamos simplesmente que o aluno seja capaz de manipular as equações do segundo grau de uma forma diferente da usada tradicionalmente, usando apenas propriedades básicas e que perceba que existem varias maneiras de se resolver um problema algébrico.

> A álgebra começa com a arte de manipular somas, produtos e potências de números. As regras para essas manipulações valem para todos os números, de modo que as manipulações podem ser levadas a efeito com letras que representem os números. Revela-se então que as regras valem para diferentes espécies de números[...] e que as regras inclusive se apliquem a coisas [...] que de maneira nenhuma são números. Um sistema algébrico por exemplo, consiste em um conjunto de elementos de qualquer tipo sobre os quais operam funções como a adição e a multiplicação, contanto apenas que essas operações satisfaçam certar regras básica. (ZalmanUsiskim)

Mostraremos agora diversas maneiras de encontrar as raízes de equações da forma $ax^2 + bx + c = 0$ fazendo apenas manipulações algébricas e desejamos que os alunos não só tenham referenciais numéricos quando ultilizam as variáveis, mas também desejamos que eles sejam capazes de operar com variáveis sem ter valores numéricos.

3.1 MÉTODO DE RESOLUÇÃO CONVENCIONAL

A primeira descrição da regra geral para achar as raízes da equação do 2º grau parece ser encontrada em um trabalho de Sridhara matemático hindu que viveu entre 850 e 950 a.C. Foi ele quem enunciou a regra que originou a fórmula atual para a resolução de equações do segundo grau. Após sua descoberta batizou-a como “Fórmula geral para resolução da equação polinomial do segundo grau”. Nesta época havia plena consciência de que números negativos não são quadrados, e de que o número de raízes de uma equação do 2º grau pode ser 0, 1 ou 2. O matemático indiano Bhaskara também mostra como resolver esse tipo equação da seguinte maneira:

> Multiplique ambos os lados da equação por uma quantidade igual a quatro vezes o coeficiente do quadrado da incógnita; adicione a ambos os lados uma quantidade igual ao quadrado do coeficiente da incógnita; então extraia a raiz quadrada. (Pitombeira, 2004, p.25)

A técnica usada aqui é a de completar o quadrado. Se multiplicarmos a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por $4a$ teremos:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Observe que só teremos um trinômio quadrado perfeito se adicionarmos um termo igual a b^2 aos dois lados da equação. Então:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$

Ou seja,

$$(2ax + b)^2 + 4ac = b^2$$

Portanto,

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

e isolando a incógnita temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ ,$$

que é a fórmula resolutiva de equações do segundo grau.

Sabe-se que hábito de dar o nome de Bhaskara para essa fórmula resolutiva da equação do segundo grau é uma característica somente do ensino brasileiro e que se estabeleceu por volta da década de sessenta Na literatura internacional não se encontra o nome de Bhaskara para essa formula, porque não é adequado, já que problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos atrás, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos o que se tinha era uma receita escrita em prosa, sem uso de símbolos que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos. Bhaskara foi um matemático indiano que nasceu em 1114 e viveu até 1185 ele é considerado um dos mais importantes matemáticos do século XII. No ramo da matemática os seus trabalhos mais conhecidos são Lilavati e Vijaganita que tratam de aritmética e álgebra respectivamente, e contém vários problemas sobre equações lineares e quadráticas. No entanto até o fim do século XVI não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, pois não se usava letras para representar os coeficientes de uma equação. Essa representação começou a ser feita por François Viéte, matemático francês que viveu entre os séculos XVI e XVII. Mas é claro que não devemos negar a importância nem a riqueza da obra de Bhaskara para matemática.

Podemos fazer uma manipulação com a equação do segundo graue encontrar uma dedução alternativa, diferente da aplicada por Bhaskara. para encontra a fórmula resolutiva da equação do segundo grau. Para isso devemos fazer o seguinte:

Vamos dividir toda a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por a.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Agora subtraindo o termo independente em ambos os lados da equação, temos que:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = -\frac{c}{a}$$

Ou seja

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Somando o termo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os membros temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Como o primeiro membro da equação é agora um trinômio quadrado perfeito, fatorando chegamos a:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

logo

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

Ou seja,

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, que é a formula geral de resoluçãodo trinômio do segundo grau.

3.2 MÉTODO DA SEMI-SOMA E DO PRODUTO

Quando dividimos toda a equação $ax^2 + bx + c = 0$por $a$temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

e fazendo

$$s = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad p = \frac{c}{a}$$

Obtemos

$$x^2 - 2sx + p = 0$$

e a solução é dada por :

$$x = s \pm \sqrt{s^2 - p}.$$

Segundo Boyer essa era a maneira dos Babilônios resolver equações do tipo $x^2 - px = q$, onde a solução era dada por:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

Vejamos por exemplo como resolver a equação $2x^2 - 5x + 3 = 0$,usando esse método. Dividiremos primeiro toda equação por 2 e ficamos com :

$$x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{2}{3} = 0$$

ou

$$x^2 - 2.\frac{5x}{4} + \frac{2}{3} = 0\ ,$$

onde temos que:

$$s = \frac{5}{4} \quad e \quad p = \frac{3}{2}$$

Aplicando na fórmula deduzida temos que:

$$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25-24}{16}} \Rightarrow x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}.$$

Portanto as raízes são:

$$x' = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x'' = 1.$$

3.3 MÉTODO ALTERNATIVO

Em toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, a expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de descriminante da equação, pois quando temos $b^2 - 4ac > 0$ a equação apresenta duas raízes reais e diferentes, quando temos $b^2 - 4ac < 0$ a equação não apresenta raízes reais e quando $b^2 - 4ac = 0$ temos apenas uma raíz real.

Seja a expressão:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Então

$$b^2 - \Delta = 4ac$$

e fatorando obtemos que

$$\left(b \pm \sqrt{\Delta}\right)\left(b \mp \sqrt{\Delta}\right) = 2a.2c\ ,$$

portanto:

$$\frac{\left(b \mp \sqrt{\Delta}\right)}{2a} = \frac{2c}{\left(b \pm \sqrt{\Delta}\right)}$$

e multiplicando por (-1) temos:

$$\frac{\left(-b \mp \sqrt{\Delta}\right)}{2a} = \frac{2c}{\left(-b \pm \sqrt{\Delta}\right)}$$

ou seja

$$x = \frac{2c}{\left(-b \pm \sqrt{\Delta}\right)}$$

que é a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Vamos aplicar a fórmula encontrada para resolver a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Como $a = 1,\ b = -5,\ c = 6\ e\ \Delta = 1$, temos que:

$$x = \frac{2.6}{\left(5 \pm \sqrt{1}\right)}$$

Logo

$$x = \frac{12}{(5 \pm 1)}$$

portanto as raízes são: $x' = 2 \quad e \quad x'' = 3$.

3.3.1 DEMONSTRAÇÃO INDEPENDENTE DO CONHECIMENTO DA FÓRMULA RESOLUTIVA

Multiplicando toda a equação $ax^2 + bx + c = 0$por $4c$, temos:

$$4acx^2 + 4cbx + 4c^2 = 0.$$

Adicionando $(-b^2x^2)$ em ambos os lados da equação chegamos a

$$4acx^2 + 4cbx + 4c^2 - b^2x^2 = -b^2x^2.$$

Colocando o fator x^2 em evidência no primeiro membro obtemos:

$$-x^2(b^2 - 4ac) + 4cbx + 4c^2 = -b^2x^2$$

Colocando tudo para o primeiro membro temos:

$$-x^2(b^2 - 4ac) + 4cbx + 4c^2 + b^2x^2 = 0$$

e fatorando encontramos que :

$$-x^2(b^2 - 4ac) + (bx + 2c)^2 = 0$$

logo,

$$\pm x\sqrt{b^2 - 4ac} = bx + 2c$$

ou

$$\pm x\sqrt{b^2 - 4ac} - bx = 2c \Rightarrow x\left(\pm\sqrt{b^2 - 4ac} - b\right) = 2c.$$

Assim concluímos que a solução será:

$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

3.4 MÉTODO DO QUADRADO E DA DIFERENÇA

Sabemos que

$$(x' + x'')^2 = (x')^2 + 2x'x'' + (x'')^2$$

e,

$$(x' - x'')^2 = (x')^2 - 2x'x'' + (x'')^2.$$

Subtraindo membro a membro a primeira identidade da segunda obtemos a seguinte identidade:

$$(x' + x'')^2 - 4x'x'' = (x' - x'')^2.$$

Podemos agora resolver qualquer equação do segundo grau seguindo o seguinte procedimento: Sabendo que $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ e $x'.x'' = \frac{c}{a}$ e de posse desses dados podemos calcular a diferença entre as raízes e através de um sistema de equações do primeiro grau teremos a solução. Em outras palavras temos que $s^2 - 4p = d^2$, podemos formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' - x'' = d \\ x' + x'' = s \end{cases}.$$

Somando as duas equações temos:

$$2x' = d + s \Rightarrow x' = \frac{d+s}{2} \text{ e } x'' = \frac{d-s}{2}.$$

De outra forma,

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = d^2 \Rightarrow d = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}$$

portanto

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

3.5 MÉTODO DE VIÉTE

François Viéte foi um matemático francês que nasceu em Fontenay-le-Comte no ano de 1540 e morreu em Paris no ano de 1603.Estudou direito e foi membro do parlamento da Bretanha, ou seja, não era um matemático por profissão. Porém seu lazer era dedicado a matemática dentro da qual fez contribuições á Àritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria, mas, sem dúvida, foi na Álgebra que ocorreram suas mais importantes contribuições, pois aqui Viéte chegou mais próximo das ideias modernas.

Em sua obra foi encontrada, pela primeira vez em Álgebra, uma diferença clara entre o conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida que chamamos de incógnita. Viéte utilizou uma vogal para representar uma grandeza ou um número supostamente conhecido ou dado. Na época de Viéte, a álgebra árabe já havia sido aperfeiçoada, tanto pelas resoluções das equações quadráticas, cúbicas e quárticas, como por um uso parcial de símbolos.

Viéte teve uma participação muito efetiva na renovação do simbolismo e na resolução das equações quadráticas, cúbicas e quárticas. Também desenvolveu novos métodos de solução, percebeu algumas relações entre coeficientes e raízes de uma equação, embora seu trabalho tivesse ficado tolhido por sua recusa em aceitar coeficientes ou raízes negativas.

Uma maneira de demonstrar a fórmula resolutiva da equação de 2º grau, segundo Amaral (1988, p.18-20), é o método de Viéte, que consistia em considerar duas novas variáveis ou incógnitas que chamaremos aqui de incógnitas auxiliares.

Vamos descrever o método de Viéte para resolução de equações do segundo grau. Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Fazendo, $x = m + n$, onde m e n são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, temos:

$$a(m+n)^2 + b(m+n) + c = 0$$

E, desenvolvendo o produto notável, obtemos:

$$a(m^2 + 2mn + n^2)^2 + b(m+n) + c = 0$$

Agora, escrevendo essa igualdade como uma equação na incógnita n, temos o seguinte:

$$an^2 + (2am + b)n + am^2 + bm + c = 0.$$

Viéte transformou essa equação numa equação incompleta do segundo grau, anulando o coeficiente de n, isto é, escolhendo $m = -\frac{b}{2a}$ e substituindo na equação :

$$an^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0.$$

Assim, temos:

$$an^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

Ou,

$$4a^2n^2 + b^2 - 2b^2 + 4ac = 0$$

Somando $b^2 - 4ac$ em ambos os membros encontramos:

$$4a^2n^2 = b^2 - 4ac$$

Ou seja

$$n^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Logo,

$$n = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como

$$x = m + n$$

Substituindo, temos que:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau.

Portanto, se estamos querendo saber quais são as raízes da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, usando o método de Viéte, basta fazer $x = m + n$ e substituir na equação dada. Ou seja:

$$(m + n)^2 - 3(m + n) + 2 = 0.$$

Desenvolvendo teremos:

$$n^2 + (2m - 3)n + m^2 - 3m + 2 = 0.$$

Fazendo $m = \frac{3}{2}$, para anular o coeficiente de n, temos que:

$$n^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = 0,$$

segue que

$$n^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow n = \pm\frac{1}{2}$$

Como $x = m + n$, vem que:

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Portanto as raízes são $x' = 2 \ e \ x'' = 1$.

3.5.1 MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO DE VARIÁVEIS

Usando o método de Viéte e fazendo uma substituição de variável mais adequada nos permitirá encontrar a fórmula resolutiva com mais rapidez.

Sendo a equação do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, vamos substituir nessa equação o valor de x por $y - \frac{b}{2a}$, o que nos leva a seguinte expressão:

$$a\left(y - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(y - \frac{b}{2a}\right) + c = 0,$$

daí

$$a\left(y^2 - \frac{yb}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(y - \frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

Consequentemente,

$$ay^2 - yb + \frac{b^2}{4a} + by - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

ou

$$ay^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

logo

$$ay^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0.$$

Somando $\frac{b^2}{4a} - c$ em ambos os membros da equação temos que:

$$ay^2 = \frac{b^2}{4a} - c,$$

ou seja,

$$ay^2 = \frac{b^2-4ac}{4a} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

e, por fim,

$$y = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Como estamos querendo saber o valor de x, é só substituirmos na equação:

$$x = y - \frac{b}{2a}$$

Concluímos que:

$$x = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

que é a fórmula resolutiva do trinômio do segundo grau.

3.6 MÉTODO DE EULER

Euler, matemático do século XVII, para resolver a equação do segundo grau, segundo Assis (2006 p.43-44), usou uma técnica muito conhecida entre os matemáticos, que é a substituição de variável; ele também fez uso dos seus conhecimentos de sistemas lineares e determinantes. Vejamos sua demonstração, a seguir.

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, e fazendo $x = u + v$ e, elevando ao quadrado ambos os membros, temos $x^2 = (u + v)^2$. Obtemos, assim, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ x - (u + v) = 0 \\ x^2 - (u + v)x = 0 \end{cases}$$

Multiplicando todas as equações do sistema homogêneo por x, ficamos com um novo sistema semelhante ao supracitado:

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx = 0 \\ x^2 - x(u + v) = 0 \\ x^3 - x^2(u + v) = 0 \end{cases}$$

Usando a teoria dos determinantes, Euler sabia que uma das soluções seria a trivial ou nula por se tratar de um sistema homogêneo; a outra só iria existir se o determinante de seus coeficientes fosse igual a zero. Assim, estabeleceu que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & -(u+v) \\ 1 & -(u+v) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, obtemos:

$$a[-(u + v)^2] - b(u + v) - c = 0.$$

Daí vem que

$$-au^2 - 2auv - v^2 - bu - bv - c = 0.$$

Multiplicando por -1 toda equação e depois formando uma equação na variável u, temos:

$$au^2 + (2av + b)u + av^2 + bv + c = 0.$$

Para transformar a equação anterior em uma equação incompleta em u, Euler usou da seguinte estratégia, $2av + b = 0$, e encontrou o valor $v = -\frac{b}{2a}$. Substituindo-o na equação

$$au^2 + (2av + b)u + av^2 + bv + c = 0,$$

obtemos:

$$au^2 + \left[2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right]u + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

que ficou reduzida a

$$au^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

e, portanto,

$$u^2 = -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a},$$

que é equivalente a

$$u^2 = \frac{-b^2+2b^2-4ac}{4a^2} \ ,$$

ou seja,

$$u = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \ .$$

Substituindo os valores de v e u em $x = u + v,$ obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e as raízes são:

$$x' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Como esse método faz o uso de determinantes, é claro que não podemos usá-lo no ensino fundamental, mas pode ser mostrado como curiosidade no ensino médio.

3.7 MÉTODO DIFERENCIAL OU DAS COODERNADAS DO VÉRTICE

Dada a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0,$ com $a \neq 0$, o valor de x pode ser expresso da seguinte forma:

$$x = [f'(x) = 0] \pm \sqrt{\frac{-f[x_v=(f'(x)=0)]}{a}},$$

onde

$$[x_v = (f'(x) = 0)] = \frac{-b}{2a} \text{e} f[x_v = (f'(x) = 0)]$$

é o valor que a função assume no ponto

$$x_v = (f'(x) = 0) = \frac{-b}{2a},$$

ou seja,

$$f[x_v = (f'(x) = 0)] = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Como

$$x_v = (f'(x) = 0) = \frac{-b}{2a}$$

é também chamado de x_v. Ou seja, abscissa do vértice. A ordenada do vértice será

$$f[x_v = (f'(x) = 0)] = \frac{-\Delta}{4a}$$

é da mesma forma igual a y_v, que é a ordenada do vértice. Então, a fórmula resolutiva pode ser escrita em função das coordenadas do seu vértice. Logo o valor de x será:

$$x = x_v \pm \sqrt{\frac{-f[x_v = (f'(x) = 0)]}{a}} \text{ ou } x = x_v \pm \sqrt{\frac{-y_v}{a}}.$$

Portanto, para encontrar as raízes de um trinômio do segundo grau da forma $f(x) = ax^2 + bx + c,$ faremos o seguinte. Encontramos a primeira derivada de $f(x)$, ou seja, $f'(x) = 2ax + b$, se $f'(x) = 0$, temos que:

$$x_v = \frac{-b}{2a}.$$

Logo,

$$x = x_v \pm \sqrt{\frac{-f(\frac{-b}{2a})}{a}} .$$

Daí, temos

$$x = x_v \pm \sqrt{\frac{-\left(\frac{-\Delta}{4a}\right)}{a}},$$

ou seja,

$$x = x_v \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} .$$

Portanto, temos que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3.8 MÉTODO FAN-FAN OU MÉTODO DE HORNER

Em 1803, o grande matemático chinês Chu shih-chich, escreveu a obra Ssu-Yuan (precioso espelho dos quatro elementos), uma técnica especial para a resolução da equação polinomial do segundo grau, baseada em aproximações sucessivas, de grande precisão, denominada método fan-fan. Em 1819, o matemático inglês William George Horner reivindicou a descoberta do método, rebatizando-o de método de Horner.

O método consiste em descobrir a solução aproximada da equação original e efetuar a transformação $y = x - x_0$. Suponhamos que com essa transformação obtenhamos a seguinte equação do segundo grau:

$$y^2 + vy + z = 0.$$

Analisando essa equação transformada, perceba que a medida que a aproximação anterior tende para a solução, $y \to 0$. Logo, nesse intervalo podemos considerar que $y^2 \cong y$ e obtemos a aproximação final $y = \frac{-z}{1+v}$. O processo é repetido até que se encontre uma solução com a precisão que se deseje.

Vamos resolver a equação:

$$x^2 + 252x - 5292 = 0 \text{ ,}$$

com o método citado acima. A solução positiva dessa equação está entre 19 e 20. Utilizando a aproximação inicial $x_0 = 19$, fazendo a transformação $y_1 = x - 19$ e substituindo na equação original, obtemos:

$$(x - 19)^2 + 252(x - 19) - 5292 = 0,$$

portanto

$$y_1^2 + 290y_1 - 143 = 0$$

e obtemos a aproximação $y_1 = \frac{143}{291} = 0{,}49$ o que conduz a $x_1 = 19 + \frac{143}{291} = 19{,}49$. Fazendo-se agora $y_2 = x - 19{,}49$ obtemos uma nova equação:

$$y_2^2 + 290{,}98 - 0{,}66 = 0$$

e a nova aproximação será: $y_2 = \frac{0{,}66}{291{,}98} = 0{,}0022.$

A nova aproximação será $x_2 = 19{,}49 + 0{,}0022 = 19{,}4922.$ E assim sucessivamente até a aproximação desejada.

3.9 MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO

Seja o trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0,$ com $a \neq 0$. Agora, multiplicando por a toda equação, obtemos:

$$a^2x^2 + abx + ac = 0$$

e fazendo $y = ax \;\; e \;\; m = ac$ a equação transforma-se em $y^2 + by + m = 0$.

Agora vamos fazer a dedução da formula resolutiva:

$$y^2 + by + m = 0,$$

segue que

$$y^2 + by = -m \; .$$

Somando $by + b^2$ em ambos os lados da equação temos que:

$$y^2 + by + by + b^2 = -m + by + b^2 \Rightarrow y^2 + 2by + b^2 = -m + by + b^2,$$

portanto

$$(y + b)^2 = -m + by + b^2.$$

Sabemos que

$$(y + b + w)^2 = (y + b)^2 + 2(y + b)w + w^2.$$

Sendo w um parâmetro qualquer. Logo

$$(y + b + w)^2 = -m + by + b^2 + 2yw + 2bw + w^2,$$

ou seja,

$$(y + b + w)^2 = -m + b^2 + y(2w + b) + 2bw + w^2.$$

Para eliminar a incógnita no segundo membro da equação acima, é necessário que façamos:

$$2w + b = 0 \Rightarrow w = \frac{-b}{2} \; .$$

Então,

$$\left(y + b - \frac{b}{2}\right)^2 = -m + b^2 - b^2 + \frac{b^2}{4}$$

e

$$\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - m,$$

sendo o valor de y igual a:

$$y = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{-m + \frac{b^2}{4}}.$$

Finalmente, como $y = ax \;\; e \;\; m = ac$, substituindo esses valores na equação anterior, ficamos com:

$$ax = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{-ac + \frac{b^2}{4}} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que é a fórmula resolutiva da equação do segundo grau.

4 EQUAÇÕES COMPLETAS E OS MÉTODOS NÃO ALGÉBRICOS DE RESOLUÇÃO

Mostraremos agora diversas maneiras de encontrar as raízes de equações da forma $ax^2 + bx + c = 0$ através de construções geométricas utilizando apenas régua e compasso, pelos métodos de completar quadrados, usando métodos gráficos e por fim usando técnicas de aproximação de raízes. Portanto desejamos que os alunos conheçam as relações que existem entre a álgebra e a geometria na resolução das equações do segundo grau.

4.1 MÉTODOS GRÁFICOS

São métodos bastante eficientes, pois, além de fazer o aluno colocar em prática seu aprendizado sobre construção de gráficos e resolução de sistemas, é possível a visualização do conjunto solução procurado. Para este tipo de método, o professor pode usar algum tipo de programa computacional que construa gráficos, tornando suas aulas mais dinâmicas.

4.1.1 MÉTODO GRÁFICO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES

Seja a equação do segundo grau definida por $ax^2bx + c = 0$. Temos que:

$$x(ax+b) = -c \Rightarrow (ax+b) = \frac{-c}{x}.$$

Fazendo

$$f(x) = ax + b \;\; e \;\; g(x) = \frac{-c}{x}$$

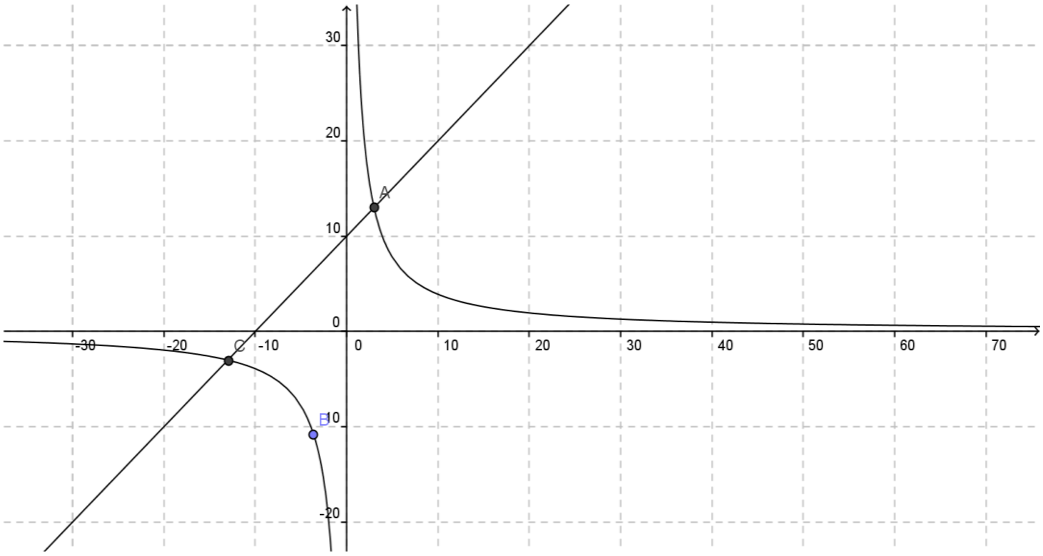
E construindo-se os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$, os pontos de intercessão nos fornecerá a solução da referida equação do segundo grau.

Vamos resolver a equação $x^2 + 10x - 39 = 0$, usando o método gráfico, para isso, faremos o seguinte:

$$x^2 + 10x = 39 \Leftrightarrow x(x+10) = 39 \Leftrightarrow (x+10) = \frac{39}{x}.$$

Sendo $f(x) = x + 10 \; e \; g(x) = \frac{39}{x}$, basta agora construir os gráficos das funções $f(x) \; e \; g(x)$ no mesmo plano e teremos a solução da equação $x^2 + 10x - 39 = 0$, onde $x' = 3 \; e \; x'' = -13$ são as raízes da equação. Vejamos abaixo a visualização geométrica na **Figura 2**.

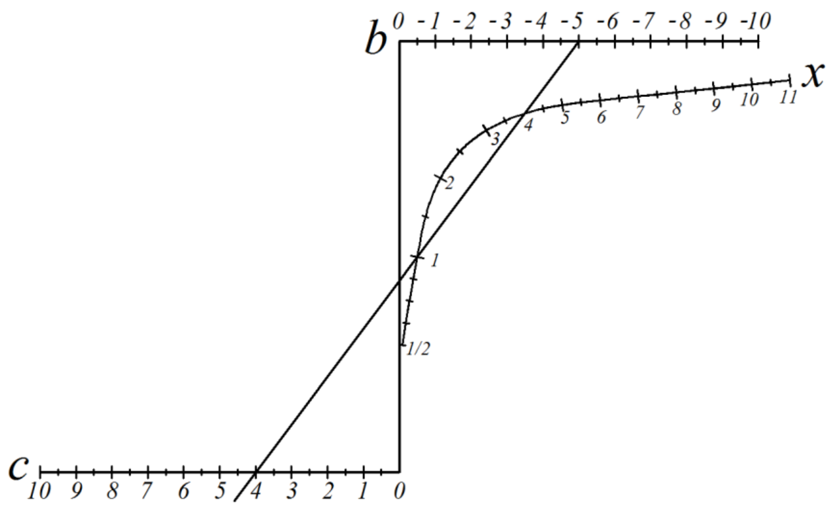
Figura 2: Construção dos gráficos de f(x) e g(x) e seu ponto de intersecção



Fonte: o autor

Usando métodos gráficos, os docentes também podem ensinar aos seus alunos, como forma motivadora no ambiente de sala de aula, o método para resolver equações do segundo grau que foi publicado em um livro de Jerome S. Meyer, editado nos Estados Unidos em 1963. Vamos mostrar a técnica através de um exemplo. Considere a equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ e observemos que, nesta equação, temos $a = 1$, $b = -5$ e $c = 4$ são os valores dos coeficientes da equação. Para obtermos sua soluções, utilizarmos a seguinte figura estratégica:

Figura 3: Gráfico para resolver equações do segundo grau.



Fonte: Imenes (1992)

Agora, basta ligar o ponto correspondente a $b = -5$, na linha b, com o ponto correspondente a $c = 4$, na linha c. As soluções são $1\ e\ 4$ que correspondem aos pontos em que a reta intercepta a linha x. É claro que este método tem suas limitações, pois só funcionará para equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde b é um número negativo maior que ou igual -10 e c é um número positivo menor que ou igual a 10 e devemos ter $a = 1$. No entanto, mesmo com todas essas limitações, o docente conseguirá chamar a atenção do seu aluno.

4.2 MÉTODO CARTESIANO

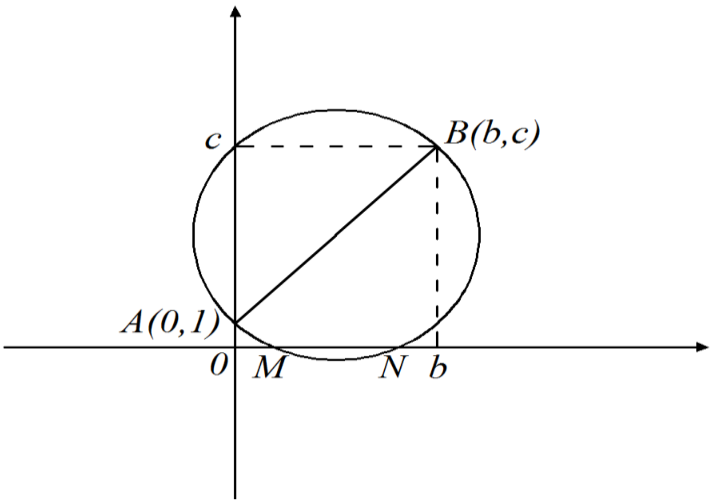
O método que apresentaremos agora foi demonstrado no século XVIII pelo inglês Sir John Leslie, em *Elements of Geometry.*

Seja resolver a equação $x^2 - bx + c = 0$. Sobre o sistema de coordenadas cartesianas, marquemos os pontos: $A(1\,,0)\ e\ B(b\ ,\ c)$. Construímos um círculo de diâmetro $\overline{AB}$. Os pontos que o círculo tocar o eixo da abscissa serão as raízes da equação dada. Ou seja, a equação da circunferência construída é dada por:

$$\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\boldsymbol{y} - \frac{\boldsymbol{c}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} = \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\boldsymbol{c}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}}$$

e quando $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, tem-se $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}$.vejamos a visualização geométrica do método apresentado acima.

Figura 4: Gráfico do método cartesiano



Fonte: Revista do professor de matemática

4.3 MÉTODO DE DESCARTES

Segundo Fragoso (2000), em1637 o francês René Descartes desenvolveu um método geométrico para a obtenção da solução positiva da equação do segundo grau. No apêndice *La Géométrie* de sua obra *O discurso do método,* René Descartes resolveu equações do *tipo*:

$$x^2 = bx + c^2,\ x^2 = c^2 - bx\ \ e\ x^2 = bx - c^2.$$

Vamos usar o método para resolver cada uma das equações citadas.

Começaremos com a equação do tipo $x^2 = bx + c^2$. Este método consiste em traçar um segmento $\overline{LM}$de comprimento ce em L traça-se uma perpendicular de comprimento $\frac{b}{2}$. Com centro em Nconstrói-se um círculo de raio $\overline{LN}$e traça-sea reta passando por M e N que corta o circulo no ponto P até interceptar o ponto O. O segmento OMé a solução positiva da equação.

Com efeito, no triângulo retângulo MLN,da figura abaixo temos que:

$$(NM)^2 = (NL)^2 + (LM)^2.$$

Como $NL = \frac{b}{2}$ e $LM = c,$ se $\overline{OM} = x$, e sabendo que $NL = ON$, já que são raios da circunferência, e $OM = ON + NM,$ temos que:

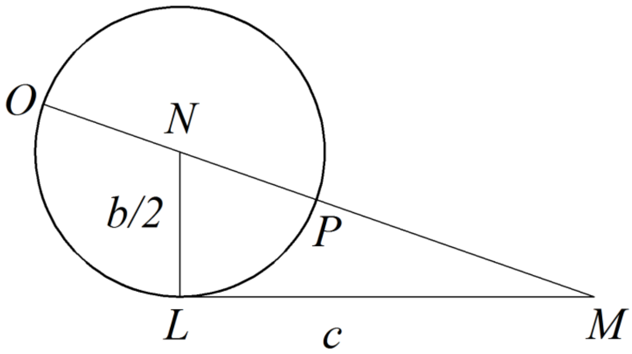
$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2,$$

que implicará em

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2},$$

que é a raiz positiva da equação dada. Sabemos que a outra raiz é $-\overline{PM}$, todavia essa raíz não foi considerada por Descartes na época.

Figura 5: Figura do método de Descarte



Fonte: Revista do professor de matemática

Vamos agora resolver a equação da forma $\boldsymbol{x^2 = c^2 - bx}$. Para tal, usaremos a **Figura 5** na qual podemos destacar que:

$$\boldsymbol{PM = MN - NP}$$

e também

$$\boldsymbol{MN = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}}.$$

Por construção, temos que

$$\boldsymbol{NP = \frac{b}{2}}.$$

Portanto,

$$\boldsymbol{PM = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2} - \frac{b}{2} \Rightarrow PM = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2},}$$

ou seja, a raiz será:

$$\boldsymbol{x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}}\ .$$

Como na época Descartes não considerava a raiz negativa, ele usava a seguinte estratégia: se a equação fosse da forma $\boldsymbol{x^2 = bx + c^2}$, ele usava a fórmula

$$\boldsymbol{x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}}.$$

Mas, se fosse da forma

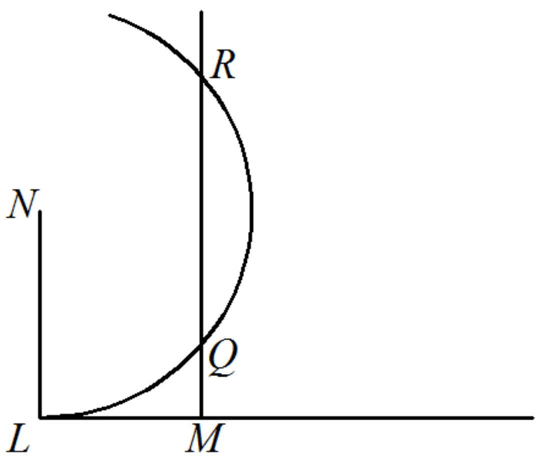
$$\boldsymbol{x^2 = c^2 - bx,}$$

ele aplicava a seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{x = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}.}$$

Caso a equação tivesse o formato $\mathrm{x}^2 = \mathrm{bx} - \mathrm{c}^2$, a estratégia seria a seguinte: traçava-se um segmento LM de medida c, em L, levantava-se um segmento NL, de medida b/2, e em M levantava-se uma paralela a NL. Com centro em N e raio LN constrói-se um círculo; nas intersecções do círculo, com a reta que passa por M que é paralela à LN marcam-se os pontos Q e R. O valor de x procurado, neste caso, pode ser MQ ou MR porque pode ser expresso de duas maneiras. Veja como ficaria a figura da situação citada:

Figura 6: Figura do método de Descarte



Fonte: Revista do professor de matemática

Vejamos porque o valor da raiz pode ser a medida do segmento MQ ou a medida do segmento MR. Na figura abaixo, temos que:

MR = MZ + ZR.

Por construção, temos $MZ = NL = \frac{b}{2}$. Como o triângulo RZNé retângulo em Z, usando o teorema de Pitágoras temos que:

$$(NR)^2 = (NZ)^2 + (ZR)^2 \;\Rightarrow (ZR)^2 = (NR)^2 - - (NZ)^2,$$

Logo,

$$(ZR) = \sqrt{(NR)^2 - (NZ)^2}.$$

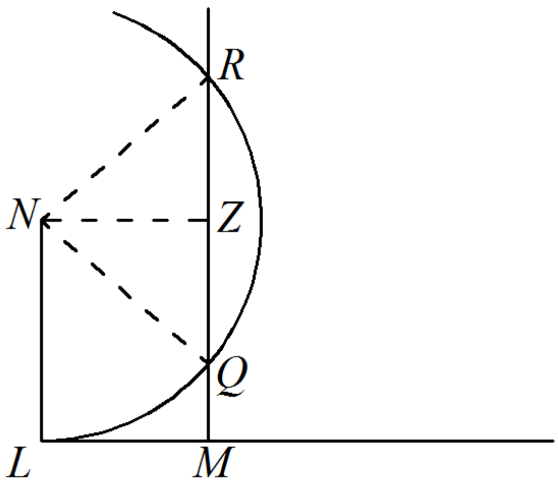
Como NR *é* o raio da circunferência, portanto $NR = NL = \frac{2}{b}$e também que $NZ = LM = c$*. Então,*

$$(ZR) = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (c)^2} \;\Rightarrow\; (ZR) = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}\text{e}(MR) = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2},$$

ou seja, a raiz da equação será:

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}.$$

Figura 7: Figura do método de Descarte



Fonte: Revista do professor de matemática

Para a outra raiz ser MQ, temos:

$$MQ = MZ - ZQ.$$

Como vimos anteriormente,

$$MZ = \frac{b}{2} \text{ e } NZ = c.$$

Assim, temos que

$$(NQ)^2 = (NZ)^2 + (ZQ)^2 \Rightarrow (ZQ)^2 = (NQ)^2 - - (NZ)^2$$

já que o triângulo NZQ é retângulo em z. Substituindo as medidas dos segmentos na relação, encontramos que:

$$(ZQ)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2 \Rightarrow ZQ = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}.$$

Portanto, a medida do segmento $MQ = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}$ é o valor da raíz positiva da equação dada. Descartes forneceu as duas raízes porque são positivas.

4.4 MÉTODOS GEOMÉTRICOS DE EUCLIDES

Seja resolver a seguinte equação $x^2 + bx = b^2$. Inicialmente, traçamos um quadrado de lado b e unamos o ponto c ao ponto médio do lado oposto definindo o ponto E.Com um compasso centrado em E e com EC como medida encontramos o ponto F localizado no prolongamento de AB. O valor de BF é uma raiz da equação dada.

De fato, se observarmos a **Figura 8**, veremos que o valor de BF é dado por:

$$BF = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{b}{2}.$$

Assim

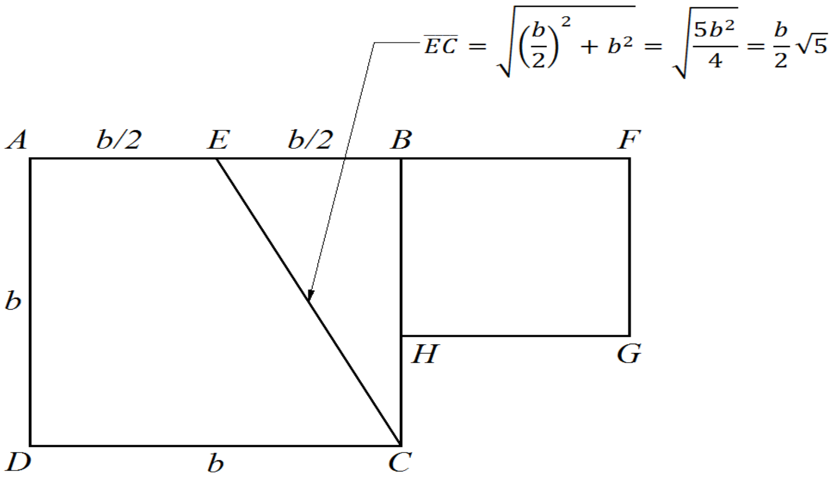
$$BF = \sqrt{\frac{5b^2}{4}} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Ou, ainda, raciocinando de outra forma, temos que:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2,$$

onde $x = -\frac{b}{2} \pm \frac{b}{2}\sqrt{5}$ são as raízes da equação dada.

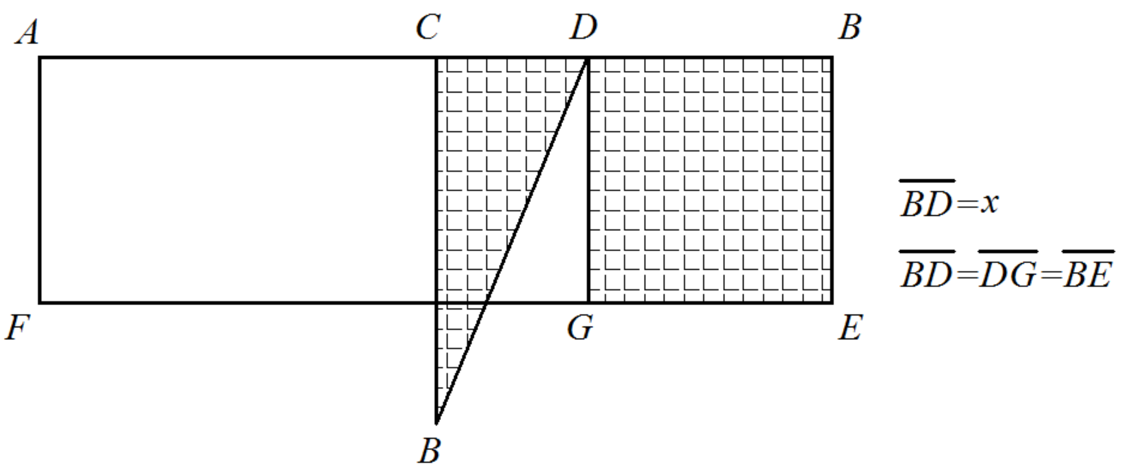
Figura 8: Figura do método geométrico de Euclides



Fonte: Revista do professor de matemática

Se a equação for da forma $bx - x^2 = c$, que é equivalente a equação $bx = = x^2 + c$, Euclides sugeria o seguinte: tracemos o segmento AB e o dividamos ao meio no ponto C. Em seguida, tracemos o segmento CP perpendicular a AB cujo comprimento é igual a $\sqrt{c}$ e unamos o ponto P ao ponto D de modo que $PD = \frac{b}{2}$. Construímos o quadrado $(DBEG)$ cujo lado é uma raiz da equação dada. Podemos completar também o retângulo $(ABEF)$ de modo a visualizar melhor a construção com a equação dada.

Figura 9: Figura do método geométrico de Euclides



Fonte: Revista do professor de matemática

Observando a construção acima, podemos concluir que a área do retângulo $(ABEF)$ é igual a bx e a área do quadrado $(DBEG)$ é igual a x^2. Logo, o retângulo $ADGF$ tem área igual aC. Se o segmento DB é igual a x, então o segmento CD é igual a$\frac{b}{2} - x$ e, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo, temos:

$$\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

E, resolvendo, obtemos:

$$\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \Rightarrow \frac{b}{2} - x = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

Portanto,

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \Rightarrow x = \frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

4.4.1 MÉTODO GEOMETRICO BASEADO NO DE EUCLIDES

Usando um método semelhante ao do matemático Euclides, a equação do segundo grau do tipo$x^2 + bx + c = 0$ foi resolvida usando apenas régua e compasso por Nelson Tunala (1988), professor do Centro Tecnológico do Exército e do Instituto Militar de Engenharia. Ele dividiu suas soluções em dois casos: o primeiro, as raízes têm os mesmo sinais; no segundo, as raízes têm sinais contrários. Veja discrição abaixo:

Neste caso as raízes $x' \ e \ \ x''$ da equação do segundo grau têm o mesmo sina,l ou seja:

$$|x'| + |x''| = |b|$$

$$|x'|.|x''| = |c|$$

O problema consiste em determinar dois segmentos de reta cuja soma seja $|b|$ e o produto seja c. Assim, faremos o seguinte:

Tracemos uma reta r e, sobre ela, marquemos os segmentos MN de medida c, NO demedida igual a 1 e OP de comprimento $|b|$. Agora, tracemos duas semicircunferências de diâmetros $MO\ e\ OP$tangentes no ponto O. Por N levantamos uma reta s perpendicular à reta r, e determinamos o ponto Q na circunferência de diâmetro MO. Desse modo temos que:

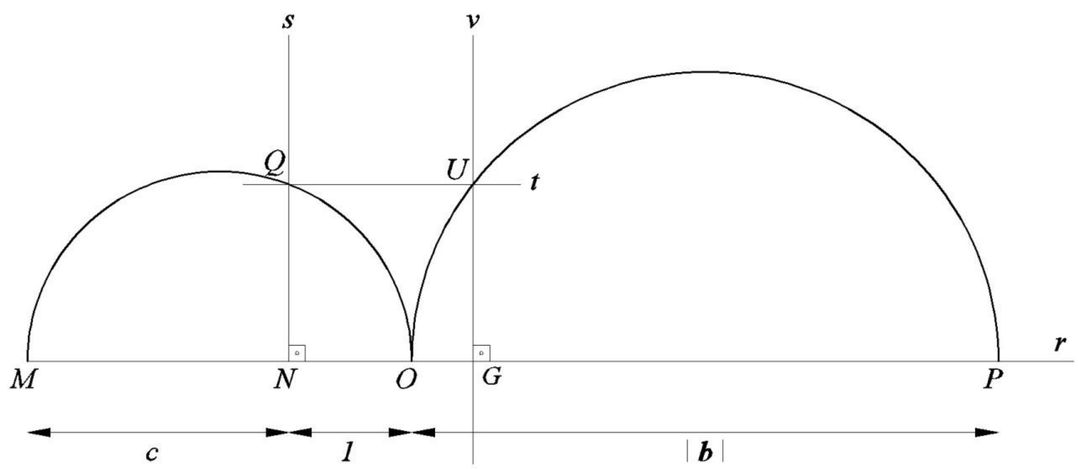
$$(NQ)^2 = (MN).(NO) = 1.c \Rightarrow (NQ)^2 = c \Rightarrow NQ = \sqrt{c}$$

Agora por Q tracemos a reta t, paralela a r e encontramos o ponto U na semicircunferência de diâmetro OP. Por U tracemos a reta $v$perpendicular a r, determinando G em r.

Os segmentos $OG\ e\ GP$ são os valores absolutos das raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$.

De fato, veja a **Figura 10** da situação- problema, construída abaixo.

Figura 10: Figura do método geométrico baseado no de Euclides



Fonte: Revista do professor de matemática

Nela temos que:

$$GU = NQ = \sqrt{c} \text{ e } (GU)^2 = (OG).(GP).$$

Ora,

$$(OG).(GP) = c.$$

E além disso, por construção,$|b| = (OG) + (GP)$.

Portanto, OGe GP são dois segmentos cujo a soma é $|b|$ e o produto é c.Logo se $b < 0$,as raízes são $x' = OG$ e $x'' = GP$ e se $b > 0$,são $x' = -OG$ e $x'' = -GP$.Observe ainda que caso a reta t , suporte de QU,não interceptar-se a circunferência de diâmetro OP, ou seja, se $\sqrt{c} > \frac{|b|}{2}$ as raízes da equação não saõ reais e a construção não permite determiná-las. O mesmo ocorrerá, caso $b > 0$ e $c > 0$.

Podemos também resolver a equação do segundo grau da forma

$$x^2 + bx + + c = 0,$$

onde $c < 0$. Neste caso, as raízes têm sinais contrários e, sendo x' a raiz de maior valor absoluto, teremos o seguinte:

$$|x'| - |x''| = |b|$$

$$|x'|.|x''| = |c|$$

Agora basta-nos encontrar dois segmentos de reta, cuja diferença seja $|b|$ e o produto seja $|c|$.

De modo análogo, na construção acima, determinaremos os pontos $M, N, O \; e \; P$ numa reta r e o ponto Q. Sendo $NQ = \sqrt{c}$, translademos NQ numa direção paralela a s e obtemos o segmento OU. Ligando U ao centro I da circunferência determinamos o diâmetro GH. Assim, temos que os segmentos $UH \; e \; UG$ representam as raízes da equação:

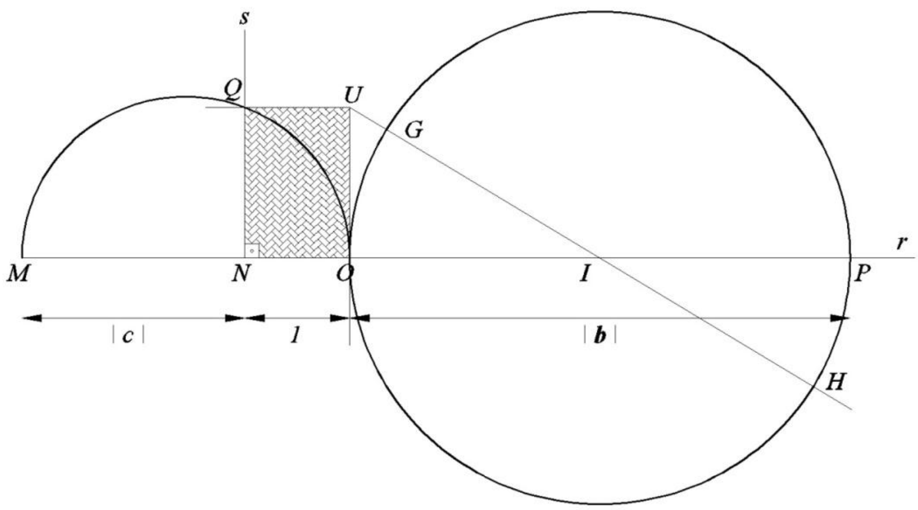
$$x^2 + bx + c = 0.$$

Veja, na **Figura 11** construída abaixo, que:

$$UH - UG = GH = |b|,$$

é o diâmetro da circunferência de centro I.

Figura 11: Figura do método geométrico baseado no de Euclides



Fonte: Revista do professor de matemática

No entanto, como o segmento OU é tangente e o segmento UH é secante ao círculo de diâmetro OP:

$$(OU)^2 = (NQ)^2 = |c| = (UH).(UG).$$

Ora, sendo UH e UG dois segmentos cuja diferença é $|b|$, e o produto é $|c|$, podemos afirmar que: se $b < 0$, as raízes são:

$$x' = UH \text{ e } x'' = -UG;$$

caso tenhamos $b > 0$, são:

$$x' = -UH \text{ e } x'' = UG.$$

É claro que, neste caso, o problema sempre tem solução e, no caso em que $b = 0$, temos uma circunferência degenerada em que o raio $\overline{IO}$ é zero e as raízes serão UO e $-UO$.

Todos esses métodos de resolução de equação do segundo grau, usando régua e compasso, apresentados aqui podem servir para motivar os alunos nas aulas de geometria, desenho geométrico e também serem usadas como curiosidade em aulas de Matemática de modo geral. Depois, pode-se pedir aos alunos que encontrem uma justificativa algébrica para cada uma das soluções dadas de maneira que aproximará a álgebra da geometria e despertará o interesse de Matemática pelos alunos.

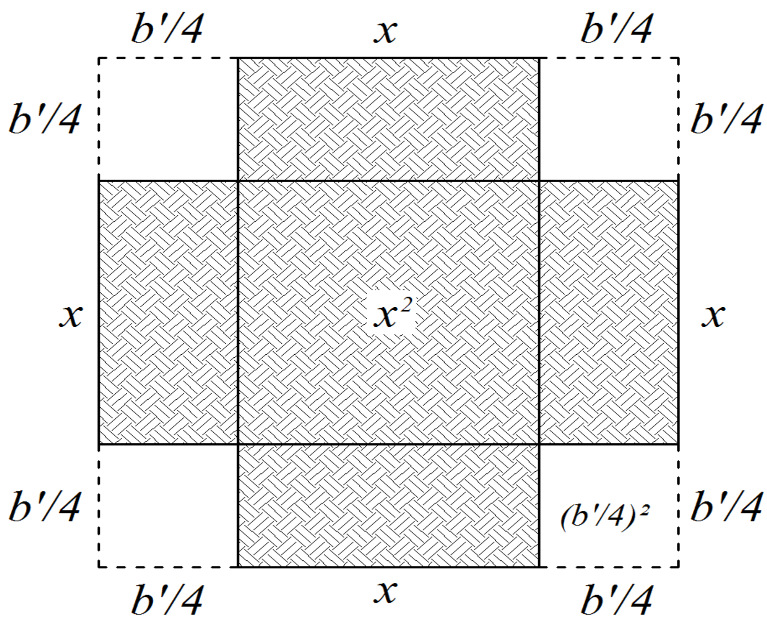
4.5 MÉTODO GEOMÉTRICO DE COMPLETAR QUADRADO

Vamos resolver a seguinte equação:

$$x^2 + b'x = c \text{ , onde } c > 0.$$

Precisamos raciocinar como se a expressão acima fosse um somatório de áreas. Logo, sendo x^2 representado pela área de um quadrado de lado x e $b'x$ pela área de um retângulo com dimensões b e x, conforme a figura abaixo:

Figura 12:Método geométrico de completar quadrado



Fonte: O autor

Observe que a área da **Figura 12**, hachurada, é igual a c. Como podemos observar, se completarmos o quadrado maior estaremos formando quatro quadrados menores de lados b/4 e com área medindo $\left(\frac{b\prime}{4}\right)^2$. A área dos quatro quadrados menores é dada por:

$$4\left(\frac{b\prime}{4}\right)^2 = \left(\frac{b\prime}{2}\right)^2.$$

Logo, a área total do quadrado externo será igual a $c + \left(\frac{b\prime}{2}\right)^2$ e p lado será portanto a raiz quadrada da área que é igual a:

$$\pm\sqrt{c + \left(\frac{b\prime}{2}\right)^2}.$$

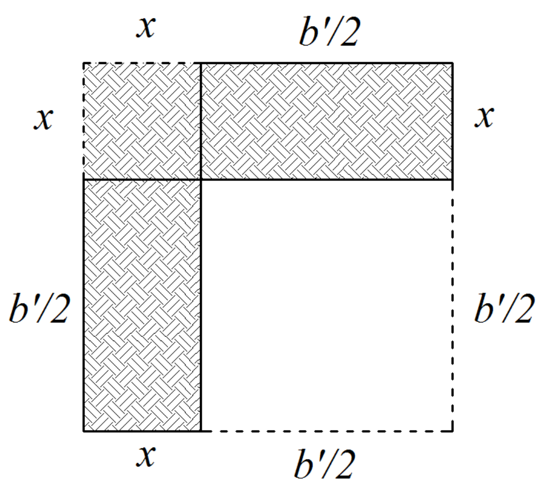
O valor procurado é o lado do quadrado subtraído de duas vezes o lado do quadrado menor, ou seja:

$$x = \pm\sqrt{c + \left(\frac{b'}{2}\right)^2} - 2.\frac{b'}{4} \Rightarrow x = -\frac{b'}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b'}{2}\right)^2}$$

4.5.1 MÉTODO GEOMETRICO DE COMPLETAR O QUADRADO-ALTERNATIVO

O método alternativo consiste em dividir o retângulo em duas partes e não mais em quatro como foi visto anteriormente. Veja a **Figura13** abaixo:

Figura 13: Figura do método geométrico de completar quadrado



Fonte: O autor

A área da **Figura 13**, hachurada, acima é igual a c. Se completarmos o quadrado maior, estaremos formando um quadrado menor de lado $\frac{b'}{2}$, cuja área é $\left(\frac{b'}{2}\right)^2$. Logo, a área total do quadrado externo é igual a $c + \left(\frac{b'}{2}\right)^2$. Como podemos encontra essa área fazendo $\left(x + \frac{b'}{2}\right)^2$, obteremos que:

$$\left(x + \frac{b'}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b'}{2}\right)^2 \Rightarrow x = -\frac{b'}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b'}{2}\right)^2},$$

que é a solução da equação do segundo grau $x^2 + b'x = c$ onde $c > 0$.

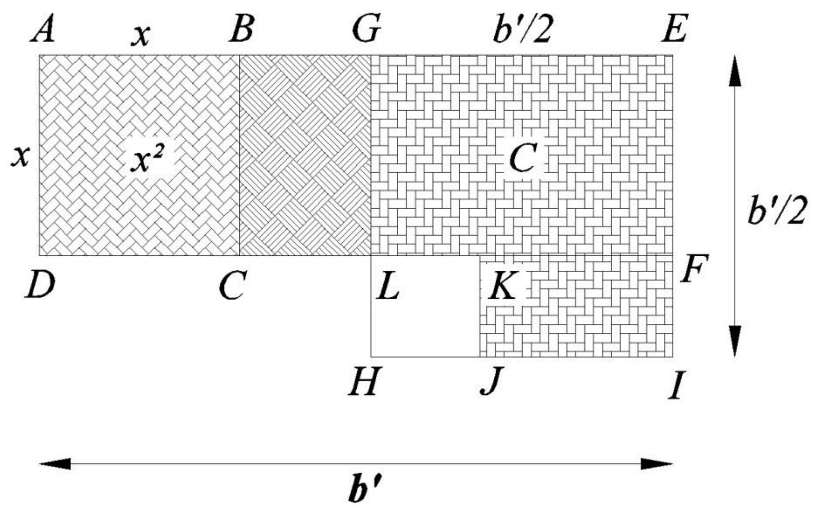
4.5.2 OUTRO MÉTODO GEOMÉTRICO

Vamos usar a ideia de completar o quadrado para resolver equações do segundo grau quando apresentarem a seguinte forma:

$$x^2 + c = b'x, \quad \text{onde} \quad b'x > 0.$$

Traçamos o quadrado $(ABCD)$ para representar x^2 e o retângulo $(BEFC)$ para representar c unidades de área. Logo, o retângulo $(AEFD)$, como mostra a figura abaixo, tem área igual a $b'x$, de modo que $AE = DF = b'$. Tendo como medida o ponto médio de AE, e construindo um quadrado de lado $\frac{b'}{2}$, teremos formado o quadrado $(GEIH)$, e o quadrado $(LHJK)$, como ilustra a **Figura 14**, abaixo:

Figura14: Figura do método geométrico



Fonte: Guelli (1993)

Note que $(BEFC)$ difere de $(GHIE)$, por $(LHJK)$. Isso nos leva a concluir que:

$$(LH) = \sqrt{\left(\frac{b\prime}{2}\right)^2 - c}\ ,$$

como $AG = GE$, se, e somente se, $AB + BG = GE$, e decorre daí que:

$$x + \sqrt{\frac{b\prime^2}{4} - c} = \frac{b\prime}{2}.$$

Generalizando, temos:

$$x = \frac{b\prime}{2} \pm \sqrt{\frac{b\prime^2}{4} - c}.$$

4.6 MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO DUPLA

O “método da falsa posição dupla” constitui-se como um método bastante antigo de aproximação de raiz de uma equação qualquer. Conhecido como *regula duorum falsorum*, é possível ser aplicado até as equações transcendentais. O método provavelmente se originou na China, percorreu a Índia, a Arábia e finalmente chegou até nós. Em notação moderna temos:

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)},$$

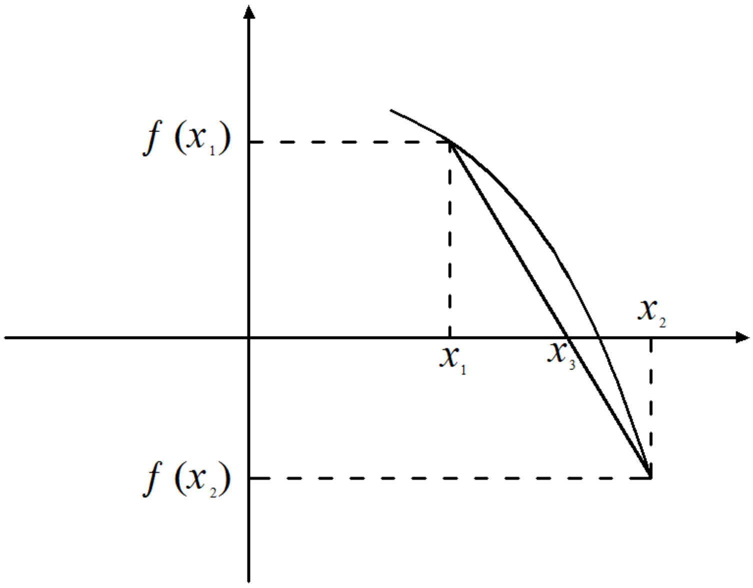
onde x_1 e x_2 são as raízes por falta ou por excesso e x_3 é uma aproximação melhor. O processo pode ser repetido indefinidamente até obter-se a precisão requerida. No gráfico abaixo, sabendo que,

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1) - (x_2)} = \frac{f(x_1) - f(x_3)}{(x_1) - (x_3)}.$$

e fazendo $f(x_3) = 0,$ chegamos a:

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}.$$

Figura 15: Gráfico do método da falsa posição dupla



Fonte: Revista do professor de matemática

Segundo Garbi (2007), os egípcios não sabiam resolver por nossos métodos nem mesmo as equações do primeiro grau e é claro que eles não adotavam simbologia algébrica moderna, já que foi inventada há poucos séculos. Entretanto, usavam um artifício muito parecido com o citado acima para encontrar raízes de equações e que veio a ser chamado de "*Regra da Falsa Posição".* Vejamos um exemplo: qual é o número que, somado à sua terça parte, é igual a 16?

Para a resolução da questão dada acima, e utilizando a *Regra da Falsa Posição*, eles faziam uma hipótese inicial a respeito do número e verificava o que ocorria. Suponhamos que, neste caso que o resultado fosse 6. Ora, 6 somado com sua terça parte dá 88, exatamente a metade dos 16 que deveríamos encontrar. Todavia o número procurado é o dobro e 8. Ou seja, 16. Era uma forma legítima, mas tornava um problema de fácil solução muito difícil de se resolver.

5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Nesta parte mostraremos algumas aplicações das equações do segundo grau e falaremos resumidamente sobre a resolução de problemas desse tipo de equações segundo os parâmetros curriculares nacionais como também faremos um breve comentário sobre as estratégias de resolução de problemas segundo Polya no seu livro "*A Arte de Resolver problemas*".

Os Parâmetros Curriculares Nacionais traz as equações do segundo grau dentro do bloco Números e operações, e orienta que o docenteprocure apresentá-lo através de situações-problema, para que proporcione ao alunouma melhor compreensão deste conteúdo. Segundo os PCN Brasil (1998, p.84) é fundamental "[...] a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da 'sintaxe' (regras para resolução) de uma equação". Portanto, percebemos que, quando conhecemos as aplicações desse conteúdo podemos criar situações-problema, inserindo as variáveis e aplicando os nossos conhecimentos por meio das regras, e assim teremos um resultado mais satisfatório e significativo, pois as fórmulas passarão a ter sentido nas resoluções. Vejamos algumas situações- problema onde podemos usar nossos conhecimentos sobre equações do segundo grau.

Problema 1: Fagno comprou algumas garrafas de um bom vinho por 540 reais. Por ter obtido um desconto de 15 reais no preço de cada garrafa, ele conseguiu comprar 3 garrafas a mais do que previra originalmente.quantas garrafas de vinho Fagno comprou?

Solução do problema:

Vamos chamar o preço inicial de cada garrafa de y e Fagno compraria $x$garrafas, pagando um total de $x.y = 540$ reais. Tendo obtido o desconto, o preço da garrafa passou a ser $y - 15$ e, com isto, ele conseguiu comprar $x + 3$ garrafas pelo mesmo valor. Portanto$(y - 15).(x + 3) = 540$. Como podemos escrever $y = \frac{540}{x}$, temo que $\left(\frac{540}{x} - 15\right).(x + 3) = 540$. Desenvolvendo e simplificando chegamosao trinômio $x^2 + 3x - 108 = 0$ cujas raízes são $x' = -12\ ex'' = 9$.Como o preço não pode ser negativo, concluímos que $x'' = 9$é a solução procurada. Assim, Fagno comprou12 garrafas de vinho por 540 reais e cada garrafa custou 45 reais.

Esse tipo de problema mostra ao discente a importância se estudar esse tipo de conteúdo, dando assim um significado ao ensino das equações, é por isso que ao Parâmetros Curriculares Nacionais falam que:

> Resolução de situações-problema que podem ser desenvolvidas por uma equação de segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração,discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta (BRASIL, 1998, p.88).

É evidente que este procedimento deve proporcionar discussões entre os resultados encontrados e o problema proposto, pois é importante que o aluno seja estimulado a pensar, a refletir sobre o que está fazendo e não apenas executar de forma mecânica uma situação, visto que assim o conteúdo perderá o sentido para o aluno. Vejamos outro problema onde podemos usar as equações do segundo grau.

Problema 2: Três homens, A, B e C, trabalhando juntos, realizam uma tarefa em x horas. Se trabalhassem sozinhos, A executaria a tarefa em $x+1$ horas; B, em $x+6$ hora; C, em $2x$ horas. Calcule x.

Solução do problema:

Vamos fazer o cálculo do trabalho realizado por cada um deles em uma hora. Temos que em uma hora, A, B e C, trabalhando sozinhas fariam $\frac{1}{(x+1)}$, $\frac{1}{(x+6)}$, e $\frac{1}{2x}$ da tarefa, respectivamente.se o trabalho fosse realizado junto, fariam $\frac{1}{x}$ da tarefa. Portanto,

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \Rightarrow \frac{x+6+x+1}{(x+1)(x+6)} = \frac{2-1}{2x}$$

$$\frac{2x+7}{(x^2+7x+6)} = \frac{1}{2x} \Rightarrow 3x^2 + 7x - 6 = 0.$$

As raízes dessa equação são: $x' = -3 \ e \ x'' = \frac{2}{3}$. Como a raiz negativa não serve como solução do problema a resposta é $x = \frac{2}{3}$.

Segundo Lima (2006) equações do tipo $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}$ recebem o nome de equações fracionárias e algumas não parecem ser do segundo grau mas podem ser transformadas de modo a sê-lo.

Problema 3:O produto da idade de Fagner pela idade de Ananda é igual a 374. Fagner é 5 anos mais velho que Ananda. Quantos anos tem cada um deles?
Solução do problema:

Chamando de xa idade de Fagner, teremos que $x-5$ será a idade de Ananda. Como o produto das idades é igual a 374, temos que:

$$x(x-5)=374 \Rightarrow x^2-5x-374=0 \text{ ,}$$

onde suas raízes são $x'=-17$ e $x''=22$.Como estamos calculando idades , a raiz $x'=-17$ deve ser descartada. Logo a idade de Fagner é de 22 anos. Portanto como Fagner é 5 anos mais velho que Ananda, sua idade é 17 anos.

Problema 4: Uma tela retangular com área de 9600cm^2 comprimento igual a três meios da altura. Quais são as dimensões desta tela?
Solução do problema:

Chamando de x altura da tela, temos que $\frac{3x}{2}$ será o seu comprimento. Sabemos que a área de uma figura geométrica retangular é calculada multiplicando-se a medida do seu comprimento, pela medida da sua altura. Escrevendo o enunciado na forma de uma sentença matemática temos:

$$x.\frac{3x}{2}=9600cm^2$$

Que pode ser expressa como: $\frac{3x^2}{2}-9600=0 \Rightarrow 3x^2-19200=0.$

Note que temos uma equação do 2° grau incompleta, que terá duas raízes reais opostas, situação que ocorre sempre que o coeficiente b é igual a zero. Vamos aos cálculos:

$$3x^2=19200 \Rightarrow x^2=\frac{19200}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{6400} \Rightarrow x=\pm 80$$

As raízes reais encontradas são -80 e 80, no entanto como uma tela não pode ter dimensões negativas, devemos desconsiderar a raiz -8.

Sabendo que $\frac{3x}{2}$ representa o comprimento da tela, temos então que ela será de $\frac{3}{2}$ de 80que é igual a 120. Portanto a tela tem dimensões de $80cm$ de altura por $120cm$ de comprimento.

Problema 5: Comprei 4 lanches a um certo valor unitário. De outro tipo de lanche, com o mesmo preço unitário, a quantidade comprada foi igual ao valor unitário de cada lanche. Paguei com duas notas de cem reais e recebi $R\$\ 8{,}00$ de troco. Qual o preço unitário de cada produto?
Solução do problema:

O enunciado nos diz que os dois tipos de lanche têm o mesmo valor unitário. Vamos denominá-lo então de x. Ainda segundo o enunciado, de um dos produtos eu comprei 4 unidades e do outro eu comprei x unidades. Sabendo-se que recebi R$ 8,00 de troco ao pagar R$ 200,00 pela mercadoria, temos as informações necessárias para montarmos a seguinte equação:

$$x^2 + 4x + 8 = 200.$$

Como x representa o valor unitário de cada lanche, vamos solucionar a equação:

$$x^2 + 4x - 192 = 0$$

para descobrimos que valor é este. As raízes reais da equação são

$$x' = -16 \text{ e } x'' = 12\ .$$

Como o preço não pode ser negativo, a raiz igual $x' = -16$ deve ser descartada. Assim o preço unitário de cada produto é de R$ 12,00.

Problema 6: O triplo do quadrado do número de filhos de Fagno é igual a 63 menos 12 vezes o número de seus filhos. Quantos filhos, Fagno tem?
Solução do problema:

Se x é o número de filhos de Fagno, temos que $3x^2$ equivale ao triplo do quadrado do número de filhos e que $63 - 12x$ equivale a 63 menos 12 vezes o número de filhos. Montando a sentença matemática temos:

$$3x^2 = 63 - 12x \Rightarrow 3x^2 + 12x - 63 = 0.$$

Uma equação do segundo grau onde suas raízes são, $x' = 3\ e\ x'' = -7.$ Mas como o número de filhos de uma pessoa não pode ser negativo, descartamos então a raiz $x'' = -7.$Portanto, Pedro tem 3 filhos.

Os PCN Brasil (1998, p.116) também afirmam que é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as 'manipulações' com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. "É importante que os alunos percebam que as equações facilitam muito as resoluções de problemas difíceis". (BRASIL, 1998, P.121)

5.1 MÁXIMO E MÍNIMO DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA DO SEGUNDO GRAU

Sabe-se que toda expressão algébrica do segundo grau em uma variável pode ser expressa da seguinte forma $P = ax^2 + bx + c,$ onde a , b e c são constantes reais, com $\underline{a}$ diferente de zero. Daí temos que:

$$P = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \Rightarrow$$

$$P = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$é um quadrado perfeito, então $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Portanto, o sinal do termo $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ depende exclusivamente do sinal do coeficiente a. Se $a > 0$ então $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e se $a < 0$ então $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ .Além disso, pode-se notar que se $x = -\frac{b}{2a}$ tem-se que $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Logo podemos concluir que:

Sendo $a > 0$ temos que:

$$P = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

e o valor mínimo de P é $-\frac{\Delta}{4a}$ e assumirá este valor somente quando,

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0,$$

que ocorre para $x=-\frac{b}{2a}$.

Sendo $a<0$ temos que:

$$P=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\leq-\frac{\Delta}{4a}$$

e o valor máximo de P é $-\frac{\Delta}{4a}$e assumirá este valor somente quando

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0,$$

que ocorre para $x=-\frac{b}{2a}$.

Ou seja toda expressão algébrica do segundo grau em uma variável que tenha a forma:

$$P=ax^2+bx+c \text{ , com } a\neq 0$$

admite um valor real mínimo se $a>0$ ou um valor real máximo se $a<0$ .Independentemente do sinal de a, este valor extremo será:

$$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(b^2-4ac)}{4a} \text{ ,}$$

que ocorre quando $x=-\frac{b}{2a}$.

Veremos agora algumas aplicações envolvendo valores de máximos e de mínimos da expressão algébrica do segundo grau.

Problema 7: Entender as propriedades do milho, um dos mais importantes cereais produzidos no mundo é fundamental para o aumento de sua produção. Estudos recentes indicam que a área total em metros quadrados das folhas de uma plantação de um hectare de milho é aproximada pela função $A(h)=-3h^2+900h,$ sendo h a altura da planta em centímetros. Com base nesta informação , qual é a altura para que a planta tenha área máxima e o valor de sua área máxima?

Solução do problema:

Perceba que o valor do coeficiente de h^2 é negativo, fazendo com que $A(h)$ admita um valor máximo. Este valor máximo de $A(h)$ ocorre para:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{900}{2(-3)} = 150cm.$$

O valor máximo de $A(h)$ será:

$$A(h) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{900^2 - 4(-3).0}{4(-1)} = 202500cm^2.$$

Problema 8: Um comerciante comprou a unidade de certo artigo por $R\$\,20{,}00$, e calculou que se o comercializasse por x reais, cada venderia por dia $(60 - x)$ unidades desses artigos. Considerando $0 < x < 60$ e as condições apresentadas, podemos concluir que para maximizar o seu lucro, o comerciante terá que vender quantos artigos e a que preço.

Solução do problema:

Comprando por $R\$\,20{,}00$ e vendendo por $R\$\,x$ o lucro unitário é dado por $R\$\,(x - 20)$. Como o comerciante vendeu $(60 - x)$ unidades, o lucro total é dado por: $l = (x - 20)(60 - x) = -x^2 + 80x - 1200$.Como o coeficiente de x^2 é negativo tem-se que l assume um valor máximo. Esse máximo ocorre para $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2(-1)} = 40$reais.Logo o número de artigos vendidos é igual a 20.

5.2 GIRARD E AS RELAÇÕES ENTRE OS COEFICIENTES E A AS RAÍZES DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Através de estudos, o matemático Albert Girard definiu relações entre as equações do segundo grau e suas raízes. Estas relações nos permitem obter a equação original a partir de suas raízes como também a nos auxiliar na resolução de alguns problemas que envolvem equações do segundo grau.

Albert Girard nasceu em 1595 em St Mihiel (França) e morreu no dia 8 de dezembro de 1632 em Leiden (Holanda). Era francês, mas emigrou como refugiado religioso para a Holanda. Frequentou, pela primeira vez, a Universidade de Leiden, aos 22 anos, onde estudou Matemática. Porém, seu primeiro interesse foi a música. Trabalhou em álgebra, trigonometria e aritmética. Em 1626 publicou um tratado sobre trigonometria contendo as primeiras abreviaturas $sen, \cos\ e\ tag$. Também forneceu fórmulas para o cálculo da área do triângulo.

Em álgebra, desenvolveu esboços do Teorema Fundamental da Álgebra e traduziu os trabalhos de Stevin, em 1625. É também famoso por ser o primeiro a formular $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, que é a definição da famosa sucessão ou sequencia de Fibonacci.

Albert Girard dedicou grande parte do seu tempo à engenharia no Exército Holandês, apesar de este ter provavelmente sido após a publicação do seu trabalho sobre trigonometria. Em 1629, escreveu *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629), demonstrando que as equações podiam ter raízes negativas e imaginárias. Como professor, ensinou Matemática, Engenharia, Óptica e Música. Patrocinado pela corte, também pesquisou a lei da refração e dedicou muito do seu tempo à Engenharia no Exército Holandês, especialmente nos projetos de fortificações e na cartografia. É famoso na Matemática do ensino médio pela relação entre coeficientes e raízes de equações polinomiais.

As raízes de uma equação do segundo podem ser expressas da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Somando $x_1 + x_{2,}$ temos que: $x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$; e fazendo $x_1 . x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) . \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \left(\frac{b^2-b^2+4ac}{4a}\right) = \frac{c}{a}$, que são as relações de Girard para a soma e produto das raízes de uma equação do segundo grau. Podemos, portanto, a partir das raízes de uma equação, chegar a equação.

Sabendo-se que a soma das raízes e o produto entre elas são dados, respectivamente, por $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2}$ e $x_1 . x_2 = \frac{c}{2}$, e que a equação do segundo grau tem a forma $ax^2 + bx + c = 0$ que é igual a $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, logo temos que a equação pode ser escrita da seguinte maneira: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 . x_2 = 0$

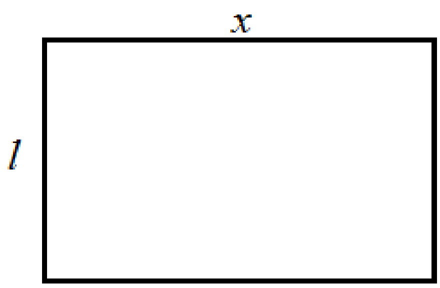
5.3 OS RETÂNGULOS DE OURO E AS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Entre todas as formas retangulares, existe uma que, desde os tempos antigos, causa nas pessoas uma agradável sensação estética de beleza. Essa forma recebe o nome de retângulo áureo. Podemos ter uma ideia desse retângulo, por exemplo, ao observarmos o contorno imaginário do "Partenom", construído na Grécia no século V a.C. , um dos grandes monumentos da antiguidade.

Para descobrirmos as medidas de tal retângulo, faremos o uso das equações do segundo grau.

Seja o retângulo áureo, na **Figura 16**, e vamos dividi-lo em um quadrado e um retângulo como observados, respectivamente, nas **Figuras 17 e 18**.

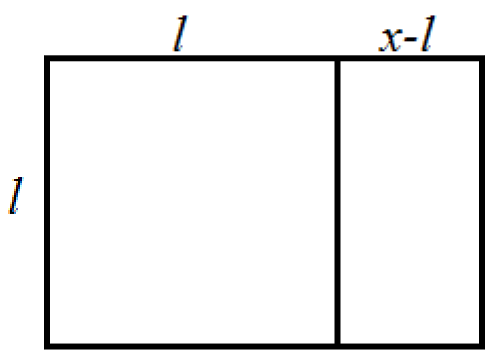
Figura 16: Retângulo



Fonte: Imenes (1992)

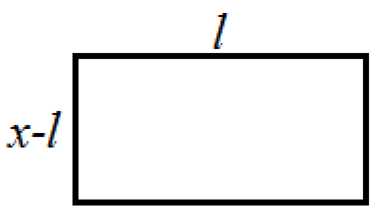
Figura 17: O retângulo áureo

x



Fonte:Imenes (1992)

Figura 18: O retângulo áureo



Fonte: Imenes (1992)

O retângulo áureo é semelhante ao retângulo menor, acima dado, que é parte dele. Como as figuras são semelhantes, seus lados são proporcionais:

$$\frac{x}{l} = \frac{l}{x-l} \Rightarrow x(x-l) = l^2 \Rightarrow x^2 - lx - l^2 = 0$$

Logo,

$$x = \frac{l \pm \sqrt{(-l)^2 + 4l^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{l \pm \sqrt{5l^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{l(1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Como x é um lado do retângulo, não pode ser negativo, e então teremos, $x = \frac{l(1+\sqrt{5})}{2}$. Portanto, um retângulo é áureo quando o maior de seus lados for o igual ao menor multiplicado por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Podemos ainda construir o retângulo áureo usando apenas régua e compasso seguindo os seguintes passos:

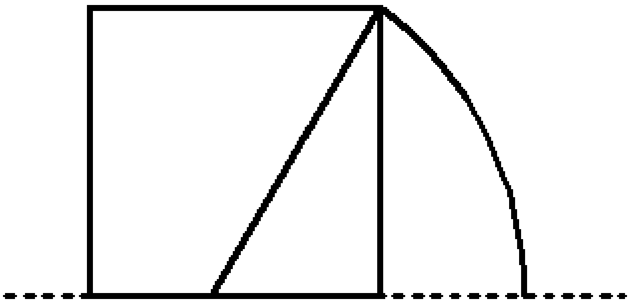
i) Desenhe um quadrado.

Figura 19: Quadrado para construção do retângulo áureo

Fonte: Imenes (1992)

ii) Centre o compasso no ponto que está na metade da base

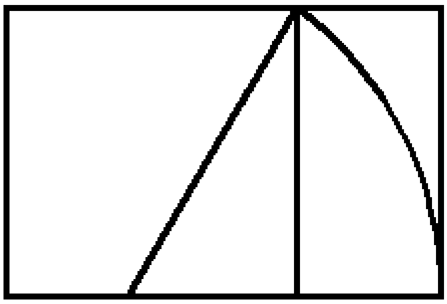
Figura 20: Quadrado para construção do retângulo áureo



Fonte: Imenes (1992)

iii) Complete o retângulo . Trata-se de um retângulo áureo e podemos justificar esse procedimento aplicando o teorema de Pitágoras

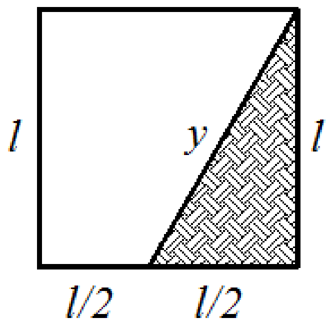
Figura 21: O retângulo áureo



Fonte: Imenes (1992)

Podemos justificar esse procedimento supracitado aplicando o teorema de Pitágoras. Vejamos, a seguir:

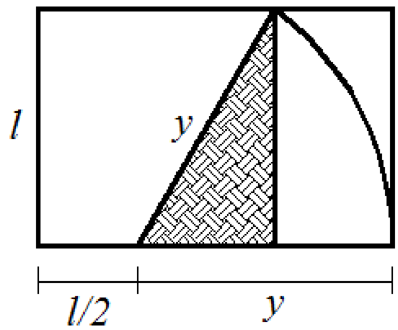
Figura 22: Quadrado para construção do retângulo áureo



Fonte: Imenes (1992)

Do teorema de Pitágoras, temos que, pela Figura 22, $y^2 + l^2 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow y = \frac{l\sqrt{5}}{2}$. Com o compasso, transportamos a medida de y para a base da figura.

Figura 23: O retângulo áureo



Fonte: Imenes (1992)

Observe que o comprimento da base do retângulo da **Figura 23** é $\frac{l}{2} + \frac{l\sqrt{5}}{2} = \frac{l(1+\sqrt{5})}{2}$. Que é exatamente a raíz da equação do segundo grau dada por : $x^2 - lx - l^2 = 0$.

Portanto, percebe-se que quando o assunto a ser ministrado for equações do segundo grau teremos varias maneiras de abordá-lo, na tentativa de tornar as aulas mais atrativas para os alunos, dando uma visão diferente daquelas abordadas nos livros didáticos adotados no ensino básico brasileiro.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Todos os métodos de resolução e suas demonstrações tiveram a sua importância ao longo da história da matemática seja ele algébrico, gráfico, cartesiano ou geométrico e atualmente não podemos ficar resumido a apenas a um método de resolução. É de fundamental importância o ensino de varias maneiras de se resolver o mesmo problema mostrando sua aplicabilidade pois diversifica os ângulos de visão do aluno e ampliam a assimilação do assunto. A utilização de alguns desses métodos deve ser trabalhado em sala de aula de maneira a motivar ou tentar despertar o interesse do aluno pela matemática fazendo com que ele perceba que a álgebra, a geometria e a aritmética são conteúdos que podem e devem ser trabalhados juntos. Usando apenas equações do segundo grau através desses métodos o aluno pode calcular medidas dos lados de uma figura geométrica, determinar a variação de valores de uma equação, esboçar gráficos, resolver sistemas, conhecer as aplicações da matemática nas diversas ciências e muitas outras atividades inerentes ao conteúdo.

Sabe-se que uma das maneiras de facilitar o ensino-aprendizagem de qualquer conteúdo em matemática é utilizando situações problemas e expondo a importância desse conteúdo em varias áreas do conhecimento. É claro que quando o professor se propõe a trabalhar esses métodos de resolução para equação de grau dois é necessário verificar os conhecimentos prévios do aluno e se ele já tem fundamentos para assimilação do conteúdo em foco, pois alguns desses métodos exposto nesse trabalho não poderá ser apresentado numa turma de ensino fundamental ao não ser que seja numa turma de preparação para olimpíadas de matemática, mas você pode utiliza como curiosidade numa turma de ensino médio. O fato de muitos alunos já terem aversão à disciplinar e só tratá-la como algo que não se aplica à sua realidade deve ser encarado pelo professor como desafiador e esse deve mostrar que matemática não é somente um mundo de fórmulas prontas e é aí que se faz necessário o professor conhecer muito bem o que está ensinando para tentar motivar esse aluno. Por isso o docente deve, ser conhecedor da história desse conteúdo, das aplicações desse conteúdos e das diversas maneiras de se resolver problemas desse conteúdo, e ainda, enfatizar a necessidade deste conteúdo para assuntos futuros, uma vez que a matemática é uma ciência interligada com as demais disciplinas, fazendo parte do universo educacional como uma das principais ferramentas.

Portanto o ensino de vários métodos de resolução de equação além de tornar as aulas de matemáticas mais ricas de informações, tornando uma aula mais motivadora, facilita a aplicabilidade desse conteúdo em varias tarefas realizadas na vida escolar desse aluno, bem como ajuda o desenvolvimento do raciocínio lógico, fazendo com que esse aluno deixe ter apenas aquela aula tradicional sobre equações do segundo grau onde é mostrado apenas uma maneira de se resolver esse tipo de equação sem dizer nem se quer como surgiu essa fórmula resolutiva. Não podemos negar que mesmo ciente da importância do ensino das equações do segundo grau através da história da matemática e seus diversos métodos de resolução, será encontrada dificuldades e pouca aceitabilidades por parte de alguns docentes, mas sendo o professor um profissional reflexivo não pode negar que ele tendo essas técnicas de resolução como aliadas no ambiente de sala de aula, facilitará ao ensino-aprendizagem dos seus alunos. Por tudo isso esperamos que esse trabalho sirva como material da apoio aos profissionais de ensino de matemática para que eles consigam mudar as suas estratégias de ensino sobre esse conteúdo ou que sirva para despertar melhorias significativas e decisivas nas suas aulas de forma que o discente possa adquirir mais confiança em seu aprendizado, além de tornar suas aulas mais dinâmicas. Não tenho interesse aqui em defender se existe um método melhor do que outro ou que cause maior facilidade na aprendizagem seja ela algébrico ou não, apenas que o professor faça uso de cada um deles como aliado no processo de ensino aprendizagem como forma motivadora.

REFERÊNCIAS

AMARAL, J. T.. Método de Viéte para resolução de equação do segundo grau. **Revista do Professor de Matemática**, [s.l.], n. 13, p.18-20, 01 dez. 1988.

BIEMBENGUT, Maria Salete. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Matemática:** Ensino de quinta a oitava série. Brasília: Ministério da Educação, 1998.

CARL, B. Boyer**. História da matemática.**2.ed. [S.l.]: Edgard blucherltda., 1999.

COSTA, Francisca Vandilma. **Pedagogia de Projetos e Etnomatemática:** caminhos e diálogos na zona rural de Mossoró-RN.Natal: [S.d.], 2005. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.**3.ed.Campinas: Unicamp, 2002.

FOSSA, John A.; MENDES, Iran Abreu. Tendências atuais na educação matemática: experiência e perspectivas. In: Encontro de Pesquisa Educacional do NE, 13. **Anais**..., 1999.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. **Uma abordagem histórica da equação do 2º grau.**In:REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l..]: [s.d.], n. 43, 01 dez. 2000.

GILBERTO, G. Garbi.**A Rainha das ciências**. 2.ed. São Paulo: Editora livraria da física,2007.

GILBERTO, G. Garbi**. O Romance das equações algébricas**. 2.ed. São Paulo:Editora livraria da física, 2007.

GUELLI, Oscar.Contando a história da matemática: história da equação do 2º grau. 2.ed. São Paulo: Ática, 1993.

LUCHETTA, Valéria OsteteJannis. **Resolução de Equações de 2.o grau.** Disponível em: <http://www.matematica.br/historia/requacoes.html>. Acesso em: 01 mar. 2013.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**: complexos, polinômios e equações.São Paulo: Atual, 2000. V.6.

IMENES,Jakubo e lellis.Equação do segundo grau. 17ª ed. São Paulo,1992.

LIMA, E. L.. A equação do segundo grau. **Revista do Professor de Matemática**, [s.l.], n. 13, p.21-23, 01 dez. 1988.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar pinto de;VAGNER, Eduardo;MORGADO, Augusto César. **Temas e problemas elementares**, 2.ed. [S.l.]: Editora SBM, 2006

LIMA, Elon Lages; VARVALHO, Paulo Cezar pinto de; WAGNER, Eduardo;MORGADO, Augusto César.**Temas e problemas**.3.ED. . [S.l.]: Editora SBM, 2010.

MENDES, Iran de Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1998).

PASTOR, A. P. (1985). Revista do professor de matemática, n°6, Equação do segundo grau:completando quadrado, p.p.36-38;

POLYA, Georg. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. São Paulo: Hermann, 1995.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1983.n. 2.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1983.n. 3.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1984.n. 4.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1985.n. 6.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1988.n. 13.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1991.n. 19.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1994.n. 25.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1995.n. 27.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 1999.n. 39.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 2000.n. 43.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. [s.l.]: Alciléa Augusto, 01 jan. 2006.n. 64.

WAGNER, E. (1991), Revista do professor de matemática, n°19, Um pouco sobre Descartes,p.p.9-14.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.).**As ideias da álgebra.** São Paulo: Atual, [199?].

POLYA, G.. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.