



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PPG



PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

APLICAÇÃO DA GEOMETRIA PARA O CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA

IZANILSON SILVA LIMA

São Luís - MA
2019

APLICAÇÃO DA GEOMETRIA PARA O CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA

IZANILSON SILVA LIMA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Estadual do Maranhão, para obtenção do grau de mestre.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa.

São Luís - MA
2019

Lima, Izanilson Silva.
Aplicação da geometria para o cálculo do momento de inércia /
Izanilson Silva Lima.- São Luís, 2019.
xxxii, 54 folhas : il., fig., tab.

Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática,
Universidade Estadual do Maranhão, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa.

1.Geometria. 2.Centro de massa. 3.Momento de inércia. I.Título
CDU: 514:530.152.1

APLICAÇÃO DA GEOMETRIA PARA O CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA.

IZANILSON SILVA LIMA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Estadual do Maranhão, para obtenção do grau de mestre.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa.

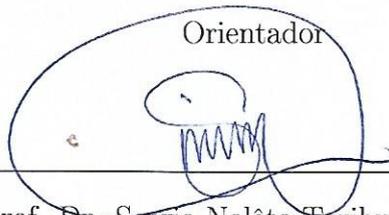
Aprovada em: 05 de Julho de 2019.

Banca Examinadora:

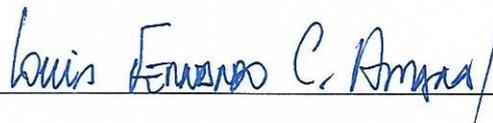


Prof. Dr. Felix Silva Costa - UEMA

Orientador



Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus - UEMA



Prof. Dr. Luís Fernando Coelho Amaral - UFMA

São Luís - MA

2019

Dedico este trabalho a Deus, a minha esposa e a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, por me conceder a vida, e dar força e inspiração para vencer todas as etapas do mestrado e conseguir chegar até aqui.

Ao meu querido pai, Francisco Filinto Lima, meu exemplo de honestidade e perseverança.

À minha mãe, Francisca Silva Lima, que, além de me dar a vida, é meu exemplo de pessoa e de professora, que sempre me motivou e me apoiou em todas as minhas decisões.

À minha esposa Ana Chaves, pelo seu apoio e compreensão, e por ser a minha dose diária de alegria e motivação na busca de um futuro melhor.

Aos demais familiares, irmãs, primos e tia, que acreditaram em mim e na minha capacidade.

À UEMA e à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pela oportunidade de qualificação do docente de matemática no Estado do Maranhão.

À Fundação de Amparo à Pesquisa e ao desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (Fapema), pela bolsa concedida, pois sem ela não seria possível chegar até aqui. Ao coordenador do Profmat - UEMA, o prof. Dr. João Coelho Silva Filho, que tanto se empenha pelo curso, estando sempre presente e buscando melhorias para o programa.

Ao meu orientador, o prof. Dr. Felix Silva Costa, pela colaboração na realização deste trabalho.

Ao professor Dr. Sergio Noletto Turibus, que durante todo o curso se mostrou mais que um professor competente e responsável, não medindo esforços para ajudar a todos, principalmente na preparação para o Exame Nacional de Qualificação (ENQ).

À secretária Annanda Crystina, pela eficiência e apoio dispensados a todos os discentes.

RESUMO

Apesar da matemática ter um importante papel na formação dos indivíduos, as avaliações do Ministério da Educação (MEC) tem mostrado um ensino brasileiro bastante defeituoso, principalmente em matemática. A Geometria é um dos assuntos dos quais os alunos têm mais dificuldades. Apesar disso, apresentamos um estudo sistemático envolvendo geometria plana aplicada no cálculo de centro de massa e momento de inércia. Conceitos estes, cruciais para o entendimento do equilíbrio de um corpo.

Palavras Chave: Geometria, Centro de Massa, Momento de Inércia.

ABSTRACT

Although mathematics has an important role in the formation of individuals, the evaluations of the Ministry of Education (MEC) have shown a rather defective Brazilian teaching, mainly in mathematics. Geometry is one of the subjects that students have the most difficulty with. Despite this, we present a systematic study involving applied flat geometry in the calculation of mass center and moment of inertia. These concepts are crucial for understanding the balance of a body.

Keywords: Geometry, Mass Center, Moment of Inertia.

Sumário

| | |
|---|----|
| Lista de Figuras | ix |
| INTRODUÇÃO | 1 |
| 1 CENTRO DE GRAVIDADE, CENTRO DE MASSA E CENTROIDE | 2 |
| 1.1 Centro de Gravidade (CG) | 3 |
| 1.2 Centro de Massa (CM) | 4 |
| 1.3 Momentos e Centros de Massa | 4 |
| 1.4 Centro de Massa numa placa plana (lâmina). | 7 |
| 1.5 Simetria em áreas de figuras planas. | 15 |
| 1.6 Centro Geométrico (Centroide) de figuras planas simples. | 17 |
| 1.7 Centro Geométrico (Centroide) de figuras planas compostas. | 20 |
| 2 MOMENTO DE INÉRCIA | 27 |
| 2.1 Momento de inércia ou momento de segunda ordem de uma superfície plana. | 27 |
| 2.2 Determinando o momento de inércia de uma superfície plana por integração. | 29 |
| 2.3 Momento de inércia de uma superfície dada. | 30 |
| 2.4 Teorema dos eixos paralelos. | 32 |
| 2.5 Momento de inércia de superfície composta. | 35 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS | 39 |
| Referências Bibliográficas | 40 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 40 |

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| 1.1 Aço (Material Homogêneo) | 2 |
| 1.2 Granito (Material Heterogêneo) | 3 |
| 1.3 Centro de Gravidade. | 3 |
| 1.4 Centro de massa. | 4 |
| 1.5 Bastão sobre um apoio. | 4 |
| 1.6 Bastão apoiado em x. | 5 |
| 1.7 n partículas no plano xy. | 6 |
| 1.8 Centro de massa. | 7 |
| 1.9 Placa qualquer. | 8 |
| 1.10 Região R. | 9 |
| 1.11 Região R dividida. | 9 |
| 1.12 Região semicircular. | 11 |
| 1.13 Região limitada entre duas curvas. | 12 |
| 1.14 Região limitada pelas curvas. | 13 |
| 1.15 Eixo de simetria. | 15 |
| 1.16 Simetria de Área. | 16 |
| 1.17 Figuras com eixos de simetria. | 16 |
| 1.18 Retângulo e seu centroide. | 17 |
| 1.19 Retângulo e seu centroide. | 18 |
| 1.20 Centroides de áreas de formas usais. | 19 |
| 1.21 Figuras planas compostas. | 20 |
| 1.22 Figuras planas compostas. | 21 |
| 1.23 Área da superfície plana composta. | 22 |
| 1.24 Tabela resumo das coordenadas do centroide. | 22 |
| 1.25 Centroide de figura assimétrica. | 25 |
| 2.1 Seção transversal de uma viga. | 28 |
| 2.2 Momento de inércia. | 29 |
| 2.3 Momento de inércia de um retângulo. | 30 |
| 2.4 Momento de inércia de uma superfície dada. | 31 |
| 2.5 Teorema dos eixos paralelos. | 32 |
| 2.6 Aplicação do teorema do eixos paralelos. | 33 |
| 2.7 Aplicação do teorema do eixos paralelos. | 35 |
| 2.8 Tabela de momento de inércia de formas geométricas simples. | 36 |
| 2.9 Viga T (seção). | 37 |
| 2.10 Viga T decomposta. | 37 |

INTRODUÇÃO

Durante toda a vida a humanidade tem que interagir com objetos num espaço físico. A geometria teve e tem um papel importante nisso tudo, devido a sua imensa aplicação. Os conceitos geométricos podem ser utilizados na física, engenharias, práticas esportivas, lazer (parque de diversões) entre outros.

Vejam os um exemplo simples, mas que nos mostra como ela tem um impacto na vida de cada pessoa. Intuitivamente, temos uma noção do que seja o Centro de Gravidade (C.G). Podemos observar uma régua qualquer. Supondo que essa régua fosse dividida em pedaços, haverá uma força de atração gravitacional em cada um deles.

Mas podemos representar a força de atração total (peso da régua) em seu Centro de Gravidade. Para localizá-lo, amarramos a régua em um fio e, cuidadosamente, afastamos o fio até o ponto médio, que é o meio da régua. Com este conhecimento, e outros citados posteriormente, verificaremos que a Geometria do corpo, seu Centro de Gravidade e seu Momento de Inércia são importantes para entendermos como um corpo se comporta num movimento qualquer ou parado, haja vista que estes itens citados acima são condições indispensáveis para equilíbrio estático e dinâmico de qualquer objeto.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: O primeiro capítulo aborda os conceitos de centro de gravidade, centro de massa e centroide, assim como suas particularidades, e ainda a importância da simetria no estudo do equilíbrio estático de um objeto, além de exemplos para fixar melhor tais conceitos. O segundo capítulo faz uma abordagem sobre os conceitos de momento de inércia e suas aplicações, como também exemplos em forma de exercícios, comuns ao dia-dia.

Capítulo 1

CENTRO DE GRAVIDADE, CENTRO DE MASSA E CENTROIDE

"A Estática lida com a descrição das condições necessárias e suficientes para manter um corpo em equilíbrio [...]" (MERIAM; KRAIGE, 2004, p.69) estático. Mas, para que isso ocorra é necessário conhecer as características do material que é feito o corpo. Podemos analisar se um material é homogêneo ou heterogêneo. Material Homogêneo: possui as mesmas propriedades físicas e mecânicas em todo o seu volume. Material Heterogêneo: há variações físicas e mecânicas em todo o seu volume. As figuras [1.1](#) e [1.2](#) ilustram cada um dos dois tipos de materiais citados acima.

Figura 1.1: Aço (Material Homogêneo)



Fonte: <http://engenheirodealtorendimento.com.br/?p=180>

Figura 1.2: Granito (Material Heterogêneo)

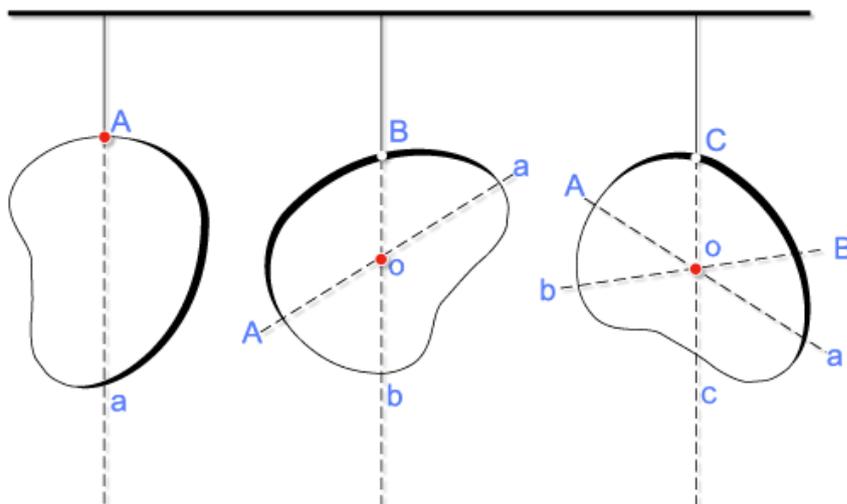


Fonte:<http://tamparoofer.co/imagens-de-granito.html>

1.1 Centro de Gravidade (CG)

Vamos considerar um corpo de forma e tamanho genérico com massa m . Se colocarmos o corpo suspenso por um fio, como mostra a Figura 1.3, de qualquer ponto ele ficará em equilíbrio, sob a ação da Gravidade e da força de tração do fio. Em quaisquer pontos que escolhermos, essas linhas de ação da força gravitacional e da força de tração do fio passarão em um único ponto, chamado como Centro de Gravidade (CG) do corpo.

Figura 1.3: Centro de Gravidade.



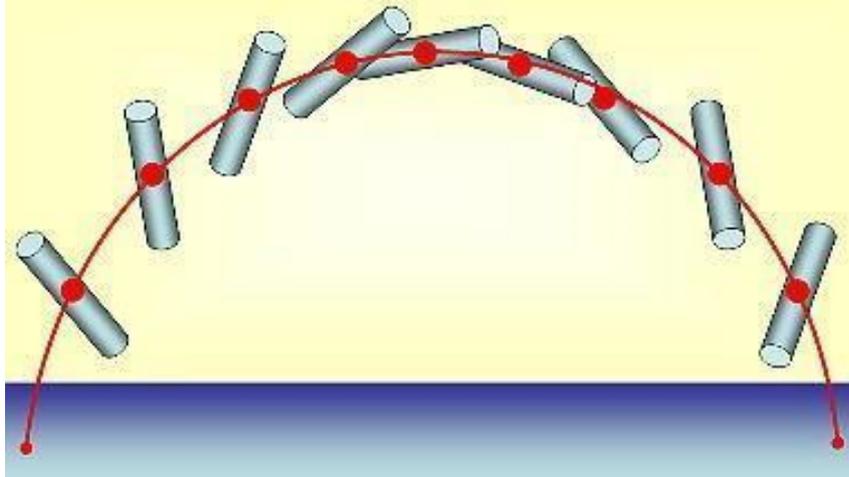
Fonte:<http://efisica.if.usp.br/mecanica/basico/centrogravidade/intro/>

Logo, define-se, conforme destacam(DOCA et al, 2016), ao afirmarem que "Centro de Gravidade de um corpo ou de um sistema de pontos materiais, é um determinado ponto onde podemos considerar aplicado o peso total do corpo ou do sistema".

1.2 Centro de Massa (CM)

O Centro de Massa de um corpo ou de um sistema é o ponto que se move como se toda a massa do sistema se concentrasse nesse ponto e todas as forças externas fossem aplicadas nesse mesmo ponto. Veja Figura 1.4:

Figura 1.4: Centro de massa.



Fonte: <https://www.infoescola.com/mecanica/centro-de-massa/>

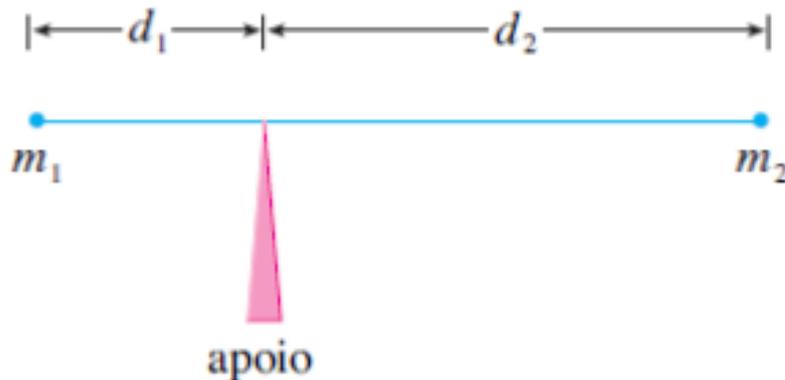
Portanto, Centro de massa não está relacionado com o Campo Gravitacional, como é o caso do Centro de Gravidade. Apesar da diferença conceitual entre os dois pontos, eles coincidem quando o corpo está submetido a um Campo Gravitacional uniforme. Analisaremos, a partir de agora, o Centro de Massa (DOCA, et al 2016).

1.3 Momentos e Centros de Massa

Vamos considerar a situação mais simples mostrada na Figura 1.5 cuja duas massas m_1 e m_2 são fixadas num bastão a massa desprezível em lados opostos a um apoio e a distâncias d_1 e d_2 do apoio. O bastão se equilibrará somente se,

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \quad (1.1)$$

Figura 1.5: Bastão sobre um apoio.



Fonte: Stewart. 2016 p.503

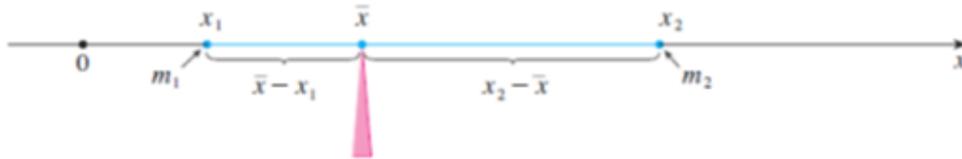
Este experimento foi descoberto por Arquimedes e denominado por Lei da alavanca. Como exemplo podemos ter duas pessoas brincando numa gangorra. Uma pessoa mais leve equilibrando uma pessoa mais pesada. Suponha que o bastão esteja ao longo do eixo x com m_1 em x_1 e m_2 em x_2 e o centro de massa em \bar{x} . Se fizermos uma comparação das Figuras [1.5](#) e [1.6](#), verificamos que $d_1 = (\bar{x} - x_1)$ e $d_2 = (x_2 - \bar{x})$ e logo a equação [\(1.1\)](#) fica:

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x}) \quad (1.2)$$

$$m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2 \quad (1.3)$$

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad (1.4)$$

Figura 1.6: Bastão apoiado em x .



Fonte: Stewart. 2016 p.504

Os momentos m_1x_1 e m_2x_2 são chamados de momentos de massas de m_1 e m_2 (em relação à origem) e \bar{x} é o centro de massa. Generalizando, temos um sistema de n partículas com massas m_1, m_2, \dots, m_n localizadas nos pontos x_1, x_2, \dots, x_n sobre o eixo x , podemos concluir que o centro do sistema ilustrado na Figura [1.6](#), está localizado em

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} \quad (1.5)$$

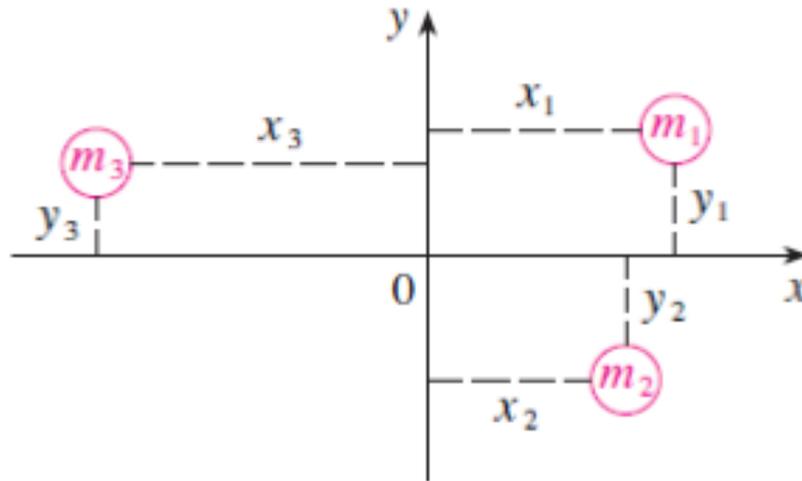
Sendo $m = \sum_{i=1}^n m_i$ a massa total do sistema, e a massa dos momentos individuais

$$M = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (1.6)$$

é denominada momento do sistema em relação à origem. Então, a equação [\(1.6\)](#) pode ser reescrita como $m\bar{x} = M$, que diz que, se a massa total fosse considerada como concentrada no centro de massa \bar{x} , então seu momento deveria ser o mesmo que o momento do sistema.

Agora, considere um sistema de n partículas com massas m_1, m_2, \dots, m_n nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ no plano xy conforme a Figura [1.7](#).

Figura 1.7: n partículas no plano xy .



Fonte: Stewart. 2016 p.504

Estendendo o caso unidimensional para o bidimensional, definimos o momento do sistema em relação ao eixo y como:

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (1.7)$$

E o momento do sistema em relação ao eixo x como

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad (1.8)$$

Portanto, M_y mede a tendência de o sistema girar em torno do eixo y e M_x mede a tendência de ele girar em torno do eixo x . Analogamente ao caso unidimensional, temos as coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do centro de massa são dadas em termos dos momentos pelas fórmulas

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad (1.9)$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} \quad (1.10)$$

Onde $m = \sum_{i=1}^n m_i$ é a massa total. Como $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$, o centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) é o ponto em que uma partícula única de massa m teria os mesmos momentos do sistema. Reescrevendo as equações (1.9) e (1.10) podemos ter as seguintes equações:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1.11)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1.12)$$

Exemplo 1: Encontre o centro de massa (CM) do sistema de partículas que têm massas iguais a 2, 5, 7 e 8 nos pontos $A = (2, -1)$, $B = (-1, -2)$, $C = (-3, 4)$ e $D = (4, 1)$, respectivamente.

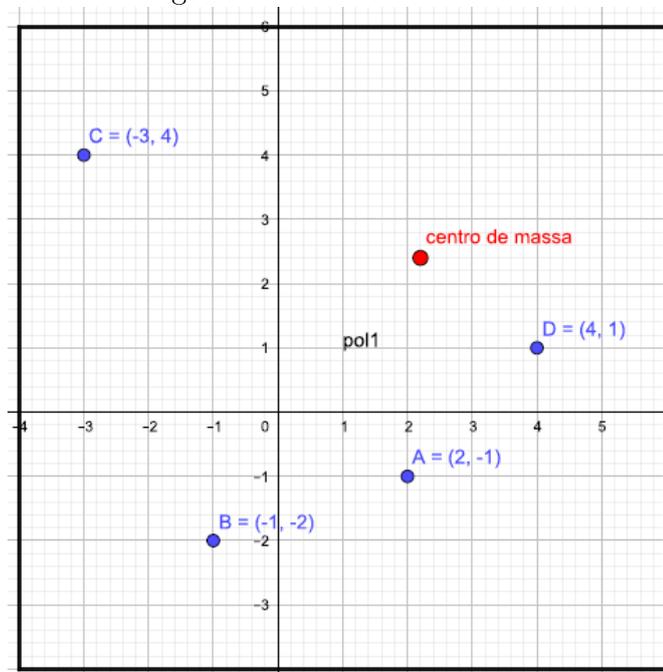
Usando as equações (1.11) e (1.3) encontramos os valores \bar{x} e \bar{y}

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{2(2) + 5(-1) + 7(-3) + 8(4)}{2 + 5 + 7 + 8} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{2(-1) + 5(-2) + 7(4) + 8(1)}{2 + 5 + 7 + 8} = \frac{24}{22} = \frac{12}{11}$$

Portanto o centro de massa (CM) é $(\frac{5}{11}, \frac{12}{11})$, conforme figura 1.8.

Figura 1.8: Centro de massa.

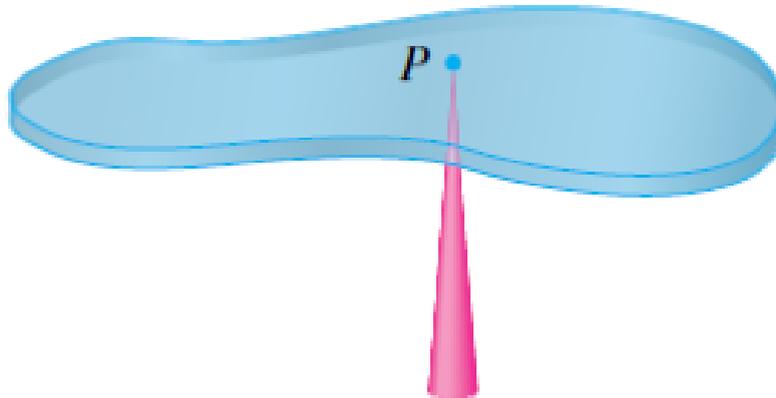


Fonte: Elaborada pelo autor.

1.4 Centro de Massa numa placa plana (lâmina).

O objetivo aqui é localizar um ponto P no qual uma placa fina de um formato qualquer fique equilibrada na horizontal, conforme Figura 1.9. Esse ponto é denominado de Centro de massa (ou centro de gravidade) da placa (STEWART, 2013).

Figura 1.9: Placa qualquer.



Fonte: Stewart. 2016 p.503

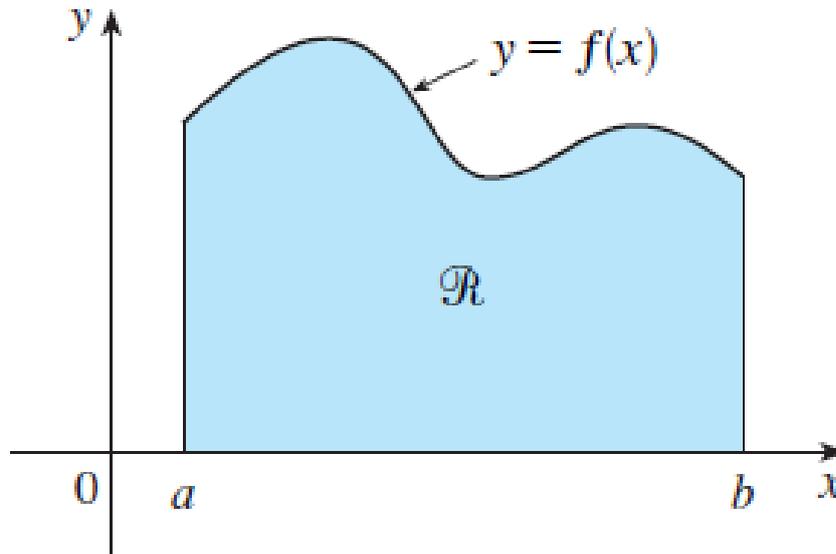
Para este estudo, consideramos uma placa fina plana (denominada lâmina) com densidade uniforme ρ e que ocupa uma região R do plano. Para encontrarmos o centro de massa da placa, da região R , usaremos o conhecimento de simetria da região R em relação a uma reta r para definirmos o centroide (STEWART, 2013).

Quando algo pode ser dividido em duas partes exatamente iguais ele é simétrico; quando um objeto é girado em torno de um de seus eixos imaginários sem que sua forma se altere, esse objeto é simétrico em relação a este eixo de movimento; quando um objeto é deslocado de um ponto a outro sem que se altere, ele é simétrico em relação àquele deslocamento.

O centro geométrico pertence ao eixo de simetria, se ele existir. Portanto, em figuras com eixos de simetria, o centroide ficará no encontro desses eixos. Por exemplo, o retângulo tem seu centroide no encontro desses eixos de simetria, o triângulo no encontro das medianas. Os momentos são definidos, de tal forma que, se a massa total da região está concentrada no centro de massa, então seus momentos ficam inalterados. Portanto, o momento de uma região é igual a soma dos momentos individuais de cada parte da região dividida.

Supondo que a região R seja como a Figura [1.10](#) ilustrada. A região R está limitada, entre as retas $x = a$ e $x = b$ e o gráfico da função f , sendo f contínua.

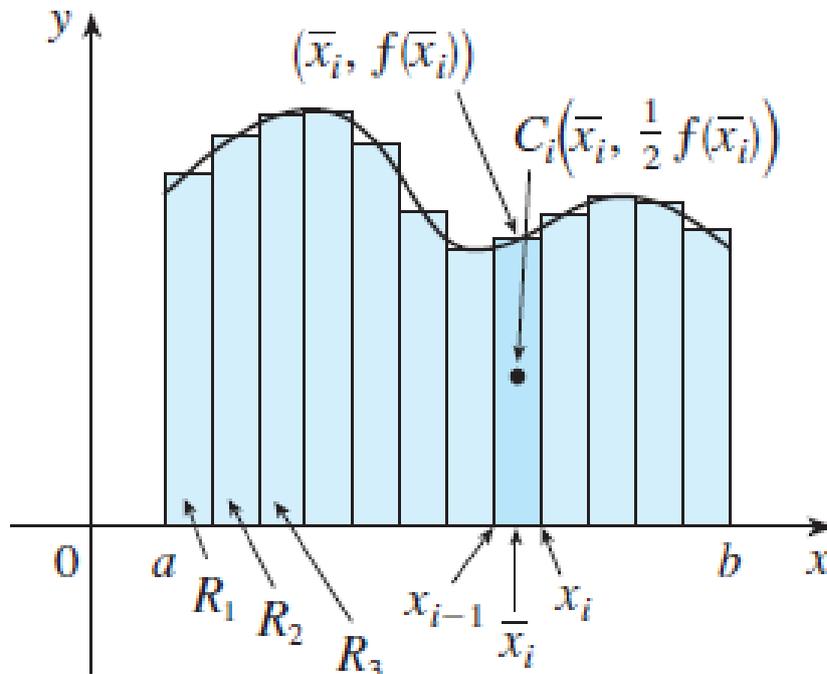
Figura 1.10: Região R.



Fonte: Stewart. 2016 p.505

Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com extremidades x_0, x_1, \dots, x_n e larguras iguais, definidas como Δx . Escolhemos um ponto x_i como ponto médio \bar{x}_i do i -ésimo subintervalo definido pela expressão $\bar{x}_i = \frac{(x_{i-1} + x_i)}{2}$. Com isso, determinamos a aproximação da poligonal de R mostrada na Figura [1.11](#).

Figura 1.11: Região R dividida.



Fonte: Stewart. 2016 p.505

O centroide do i -ésimo retângulo R_i é $C_i(\bar{x}_i, f(\bar{x}_i))$. Sua área é dada por $f(\bar{x}_i)\Delta x$. Como sua densidade superficial constante é $\rho = \frac{m}{A}$, temos sua massa definida por $m =$

$\rho f(\bar{x}_i)\Delta x$.

O momento de R_i em relação ao eixo y é o produto de sua massa pela distância de C_i ao eixo y que é \bar{x}_i . Portanto,

$$M_y(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\Delta x]\bar{x}_i = \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x \quad (1.13)$$

Somando esses momentos, obtemos o momento da aproximação poligonal R , conforme a soma de Riemann. Portanto, o limite quando n tende ao infinito é o momento da própria região R em relação ao eixo y :

$$M_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x = \rho \int_a^b x f(x) dx \quad (1.14)$$

Analogamente, calculamos o momento de R_i em relação ao eixo x como o produto de sua massa e da distância de C_i ao eixo x :

$$M_x(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\Delta x]\frac{1}{2}f(\bar{x}_i) = \rho \frac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2 \Delta x \quad (1.15)$$

Novamente, aplicando a soma de Riemann, temos o momento de R em relação ao eixo x :

$$M_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \frac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2 \Delta x = \rho \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx \quad (1.16)$$

Assim como no caso do sistema de partículas, o centro de massa da placa é definido usando as expressões $m\bar{x} = M$ e $m\bar{y} = M$. Entretanto, massa da placa m é o produto de sua densidade constante ρ por sua área A . Assim temos:

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x) dx \quad (\text{densidade constante}) \quad (1.17)$$

E podemos concluir que,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x f(x) dx}{\rho \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad (1.18)$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx}{\rho \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad (1.19)$$

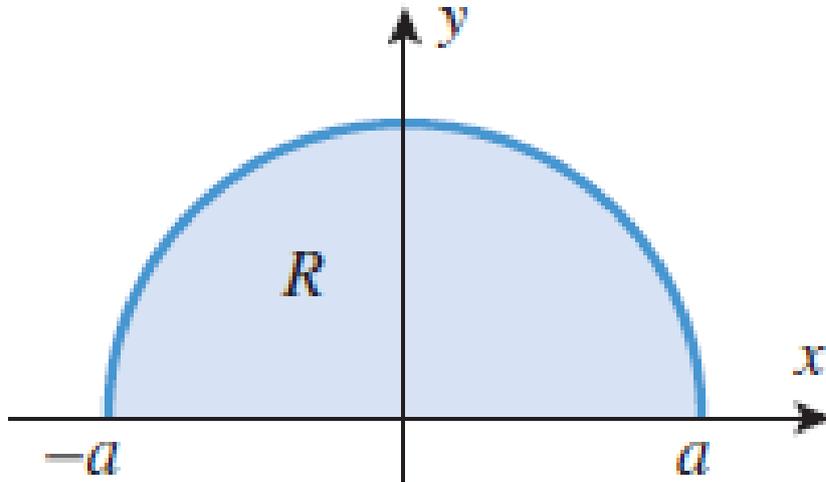
Portanto, a posição do centro de massa independe da densidade, desde que ela seja constante. Resumidamente, o centro de massa da placa (centroide de R) está localizado no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , cujo valores são calculados conforme as equações (1.20) e (1.21) (STEWART, 2013):

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x f(x) dx \quad (1.20)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx \quad (1.21)$$

Exemplo 2: Encontre o centroide da região semicircular, conforme Figura 1.12:

Figura 1.12: Região semicircular.



Fonte: Anton; Bivens; Davis. 2014 p.462

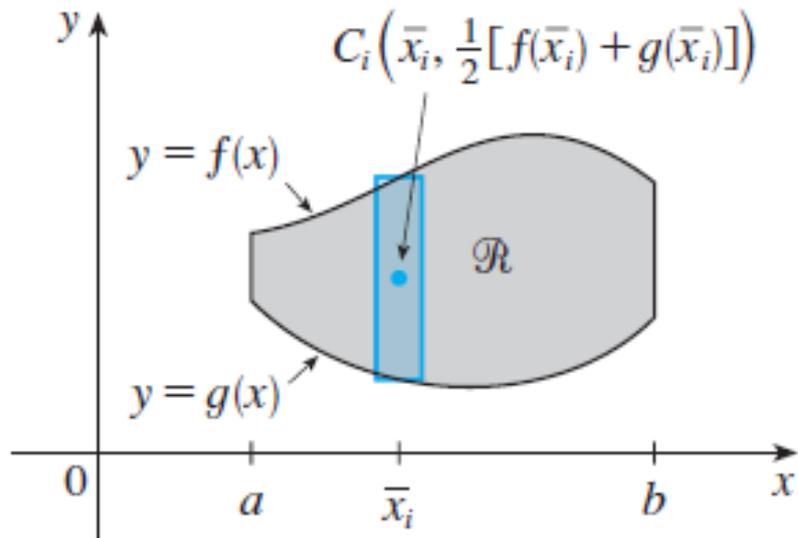
Por simetria, temos $\bar{x} = 0$, pois o eixo y é de simetria. Para encontrarmos \bar{y} , observe inicialmente que a equação do semicírculo é $y = f(x) = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ e sua área é $A = \frac{1}{2}\pi a^2$. Usando as equações (1.20) e (1.21) temos:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{A} \int_{-a}^a \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi a^2} \int_{-a}^a \frac{1}{2} (a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \left[\left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \left[\frac{4a^3}{3} \right] \\ \bar{y} &= \frac{4a}{3\pi} \end{aligned}$$

Portanto, o centroide é $(0, \frac{4a}{3\pi})$.

Se a região R está entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, com $f(x) \geq g(x)$, como ilustrado na Figura 1.13, então o mesmo tipo de raciocínio pode ser usado para definir o centroide (\bar{x}, \bar{y}) de R , e assim temos as equações (1.22) e (1.23) (STEWART, 2013):

Figura 1.13: Região limitada entre duas curvas.



Fonte: Stewart. 2016 p.507

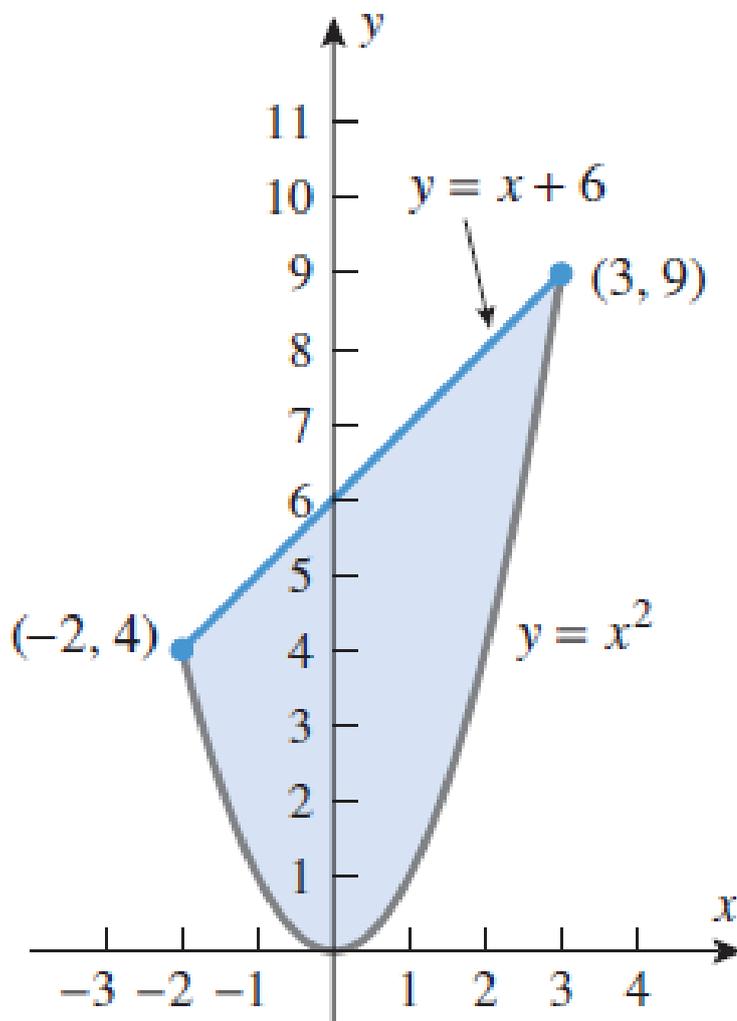
$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx \quad (1.22)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [[f(x)]^2 - [g(x)]^2] dx \quad (1.23)$$

Note que a densidade não aparece nas equações (1.22) e (1.23). Isso mostra que o centroide é uma propriedade geométrica da região R .

Exemplo 3: Encontre o centroide da região R delimitada pelas curvas $y = f(x) = x+6$ e $y = g(x) = x^2$, mostrada na Figura 1.14

Figura 1.14: Região limitada pelas curvas.



Fonte: Anton; Bivens; Davis. 2014 p.463

Primeiramente, vamos analisar os pontos de interseção em $x = -2$ e $x = 3$. Para $f(x) \geq g(x)$, temos $x + 6 \geq x^2$. A área da região R é:

$$A = \int_{-2}^3 [(x + 6) - x^2] dx = \frac{125}{6}$$

usando as equações (1.22) e (1.23) temos,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx \\ &= \frac{1}{A} \int_{-2}^3 x[(x + 6) - x^2] dx \\ &= \frac{6}{125} \left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-2}^3 \end{aligned}$$

$$= \frac{6}{125} \cdot \frac{125}{12}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}$$

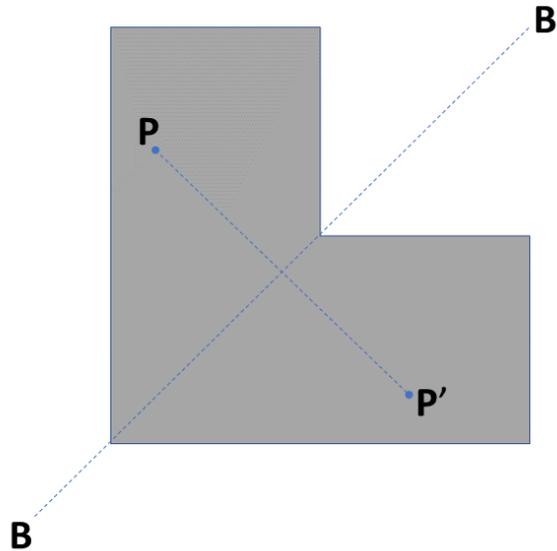
$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [[f(x)]^2 - [g(x)]^2] dx \\ &= \frac{6}{125} \int_{-2}^3 \frac{1}{2} [(x+6)^2 - (x^2)^2] dx \\ &= \frac{6}{125} \cdot \frac{1}{2} \int_{-2}^3 (x^2 + 12x + 36 - x^4) dx \\ &= \frac{6}{125} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + 6x^2 + 36x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^3 \\ &= \frac{6}{125} \cdot \frac{250}{3} \\ \bar{y} &= 4\end{aligned}$$

Portanto, o centroide de R é $(\frac{1}{2}, 4)$.

1.5 Simetria em áreas de figuras planas.

Primeiramente, o eixo BB' divide a Figura [1.15](#) em partes rigorosamente iguais, portanto trata-se de um eixo simétrico. Uma área A é simétrica em relação a um eixo BB' se para cada ponto P da área existir um ponto P' da mesma área tal que a linha PP' seja perpendicular a BB' e fique dividida em duas partes iguais por esse eixo, conforme Figura [1.15](#) (BEER, 2012).

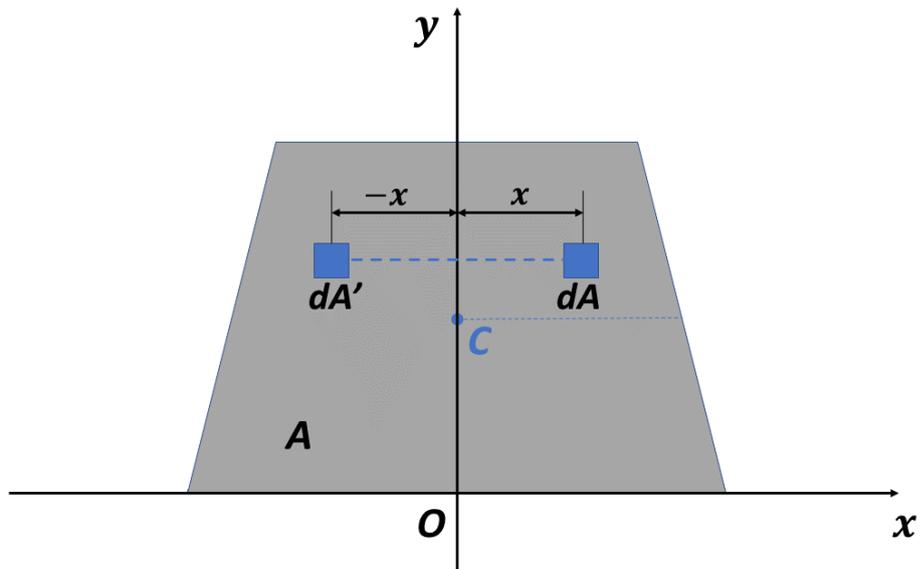
Figura 1.15: Eixo de simetria.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos também que uma linha L (representada por PP') é simétrica em relação a um eixo BB' se satisfizer condições semelhantes. Quando uma área A ou uma linha L possuem um eixo de simetria BB' , seu momento de primeira ordem em relação a BB' é zero, e seu centroide está sobre esse eixo. Vendo a Figura [1.16](#), que é simétrica em relação ao eixo y , verificamos que cada elemento infinitesimal dA de abscissa x existe um elemento dA' de igual área e com abscissa $-x$. Tendo a equação (??) igual a zero, ou seja, $Q_y = 0$. Daí resulta $\bar{x} = 0$.

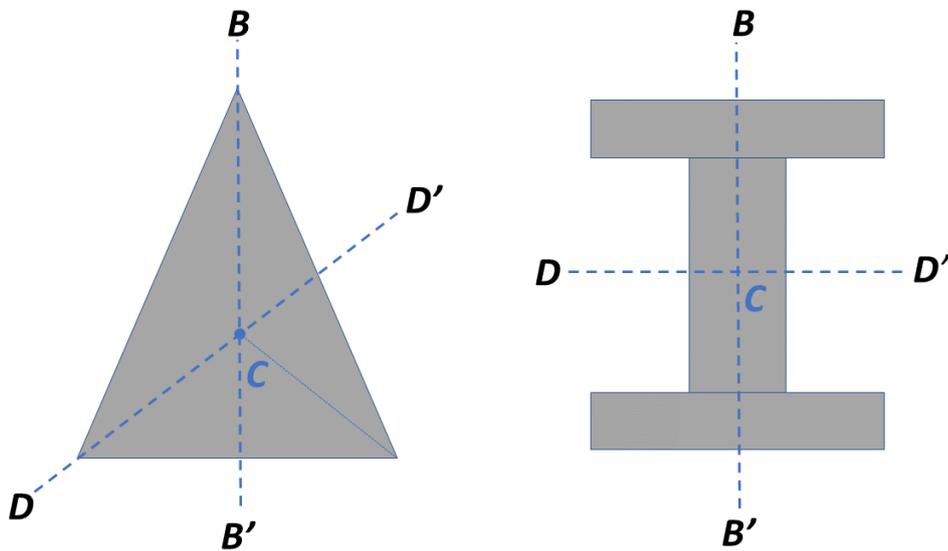
Figura 1.16: Simetria de Área.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, se uma área A ou uma linha L tiverem um eixo de simetria, seu centroide C ficará localizado sobre esse eixo. Se tiver dois eixos, então seu centroide C será na interseção deles, como mostra as Figuras [1.17](#).

Figura 1.17: Figuras com eixos de simetria.

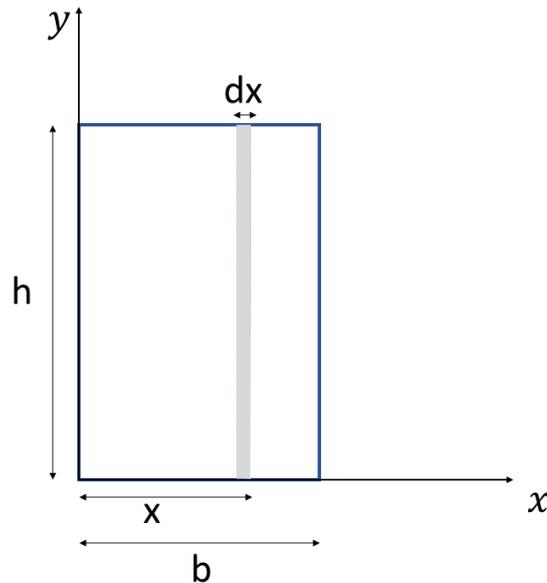


Fonte: Elaborada pelo autor.

1.6 Centro Geométrico (Centroide) de figuras planas simples.

A forma geométrica de um corpo nos ajuda no cálculo do seu centroide. Mas para isso precisamos demonstrá-la. A maior parte dos problemas será resolvida com elemento de área em forma de uma faixa retangular, como mostrada na Figura [1.18](#).

Figura 1.18: Retângulo e seu centroide.



Fonte: Elaborada pelo autor.

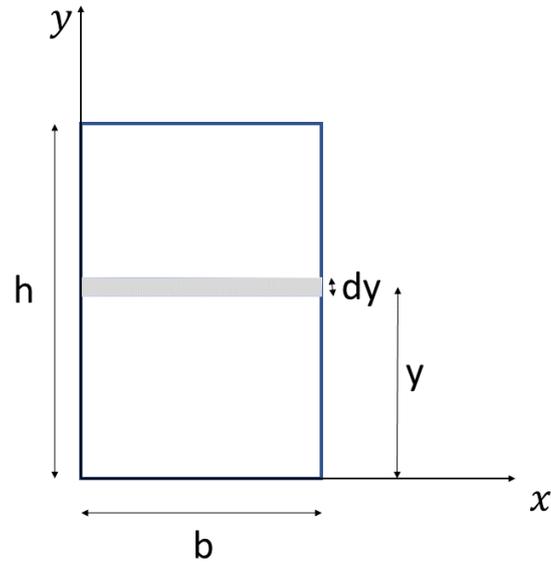
Vejamos as demonstrações dos valores de \bar{x} e \bar{y} nos retângulos das Figuras [1.18](#) e [1.19](#) respectivamente:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

$$dA = y \cdot dx$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^b x \cdot y \cdot dx}{\int_0^b y \cdot dx} = \frac{\int_0^b x \cdot h \cdot dx}{\int_0^b h \cdot dx} = \frac{h \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^b}{h \cdot x \Big|_0^b} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{b} = \frac{b}{2}$$

Figura 1.19: Retângulo e seu centroide.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

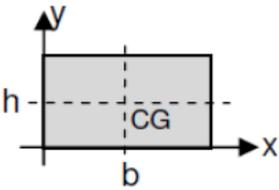
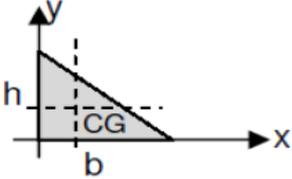
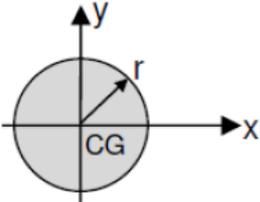
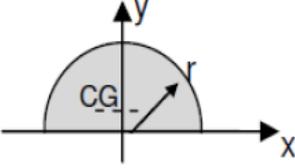
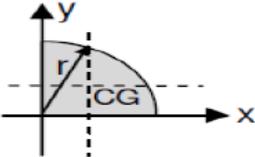
$$dA = x \cdot dy$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h y \cdot x \cdot dy}{\int_0^h x \cdot dy} = \frac{\int_0^h y \cdot b \cdot dy}{\int_0^h b \cdot dy} = \frac{b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^h}{b \cdot y \Big|_0^h} = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{1}{h} = \frac{h}{2}$$

As outras formas geométricas simples da Figura [1.20](#) são demonstradas de modo análogo.

Abaixo será mostrada a Figura 1.20 com centroides de áreas de formas mais comuns:

Figura 1.20: Centroides de áreas de formas usais.

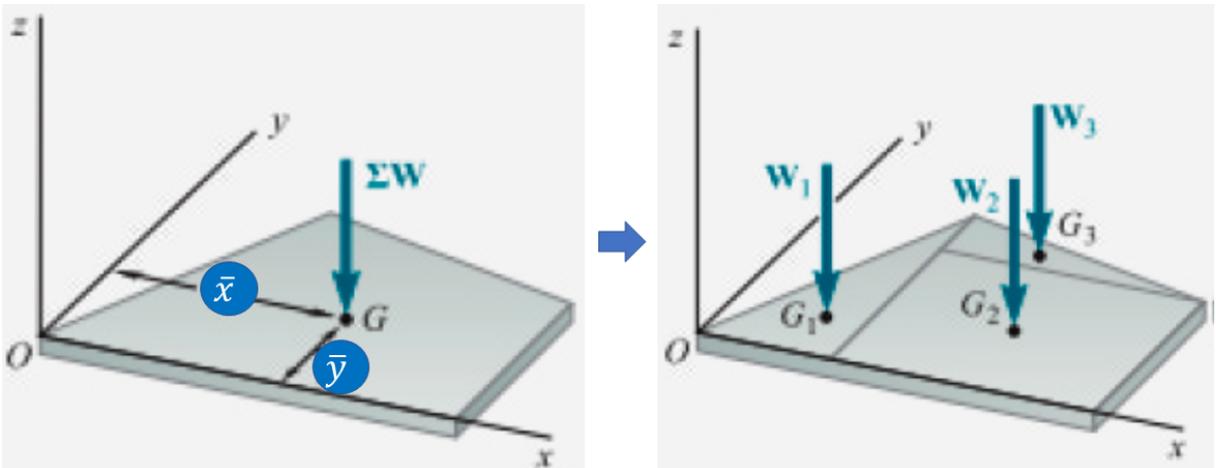
| Superfície Plana | | \bar{x} | \bar{y} | Área |
|----------------------|---|-------------------|-------------------|---------------------------|
| Retângulo / Quadrado |  | $\frac{b}{2}$ | $\frac{h}{2}$ | $b \cdot h$ |
| Triângulo retângulo |  | $\frac{b}{3}$ | $\frac{h}{3}$ | $\frac{b \cdot h}{2}$ |
| Círculo |  | 0 | 0 | $\pi \cdot r^2$ |
| Semicírculo |  | 0 | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{\pi \cdot r^2}{2}$ |
| ¼ Círculo |  | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{\pi \cdot r^2}{4}$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

1.7 Centro Geométrico (Centroide) de figuras planas compostas.

Em situações corriqueiras, uma placa plana pode ser dividida em figuras simples, como mostrada na Figura 1.20. Pode-se calcular a abscissa \bar{x} do seu centro de gravidade G a partir das abscissas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ dos centros de gravidades de diversas partes representando que o momento do peso de toda placa em relação ao eixo y é igual à soma dos momentos dos pesos das diversas partes em relação ao mesmo eixo, conforme Figura 1.21. Sua ordenada \bar{y} do centro de gravidade da placa é calculada de forma similar, igualando-se o momento em relação ao eixo x . Equacionando temos (BEER, 2012):

Figura 1.21: Figuras planas compostas.



Fonte: Beer, 2012 p.196

$$\sum M_y : \bar{x}(W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{x}_1W_1 + \bar{x}_2W_2 + \dots + \bar{x}_nW_n$$

$$\sum M_x : \bar{y}(W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{y}_1W_1 + \bar{y}_2W_2 + \dots + \bar{y}_nW_n$$

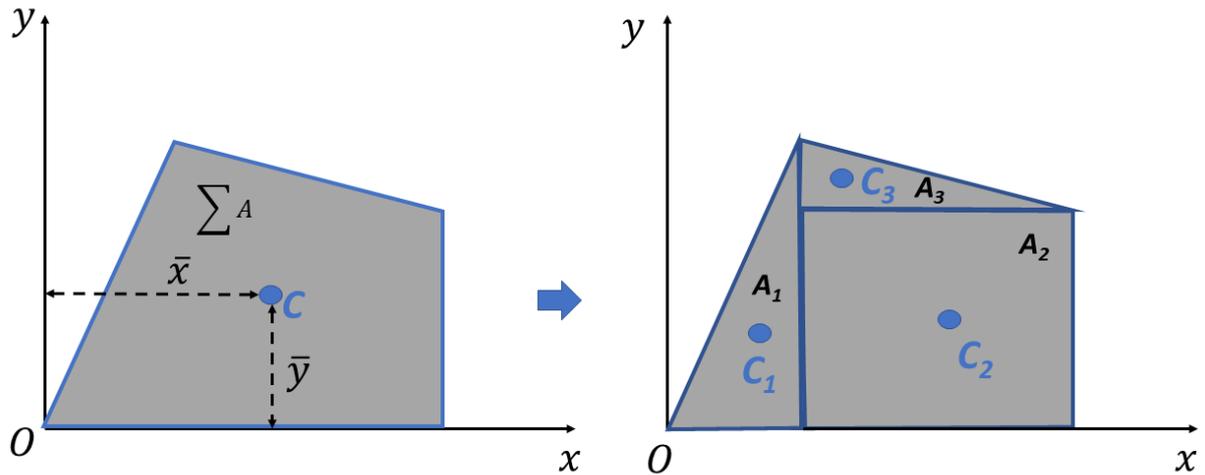
De forma, resumida obtemos:

$$\bar{x} \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i W_i \quad (1.24)$$

$$\bar{y} \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i W_i \quad (1.25)$$

As equações podem ser resolvidas para as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do centro de gravidade da placa, como mostra a Figura 1.22.

Figura 1.22: Figuras planas compostas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando a placa homogênea e de espessura uniforme, o centro de gravidade coincide com o centroide C da sua superfície. A abscissa \bar{x} do centroide da superfície pode ser calculada, analisando-se que o momento de primeira ordem Q_y da superfície composta com relação ao eixo y pode ser escrito tanto como o produto de \bar{x} pela área total quanto como a soma dos momentos de primeira ordem das áreas elementares em relação ao eixo y , conforme figura 1.22. A ordenada \bar{y} do centroide é calculada de forma similar, considerando o momento de primeira ordem Q_x da área composta. Temos:

$$Q_y = \bar{x}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \dots + \bar{x}_n A_n$$

$$Q_x = \bar{y}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \dots + \bar{y}_n A_n$$

De forma, resumida, temos as equações (1.26) e (1.7) :

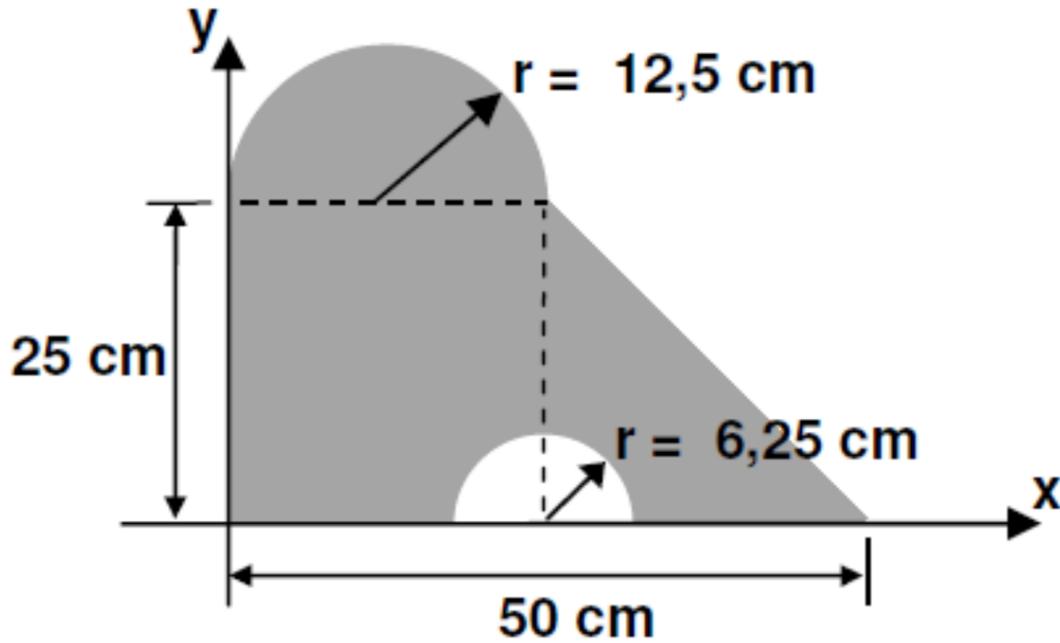
$$Q_y = \bar{x} \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i \quad (1.26)$$

$$Q_x = \bar{y} \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i \quad (1.27)$$

As equações fornecem os momentos de primeira ordem da superfície plana composta ou podem se usadas para calcular as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do seu centroide.

Exemplo 4: Determine as coordenadas do centroide da Figura 1.23 e os momentos de primeira ordem em relação aos eixos x e y .

Figura 1.23: Área da superfície plana composta.



Fonte: Notas de aula - Resitências dos Materiais II.

Divida a superfície plana em forma geométricas simples de centroide já conhecidos, conforme a Figura 1.24.

Figura 1.24: Tabela resumo das coordenadas do centroide.

| TABELA - 2 | | | | | | | | | |
|------------------|---------------|-----------------|---------------|-------------|-----------------|--------------|--------------|------------------|------------------|
| FIGURAS | dimensões | | | | A _i | \bar{x}_i | \bar{y}_i | $\bar{x}_i A_i$ | $\bar{y}_i A_i$ |
| | base "b" (cm) | Altura "h" (cm) | raio "r" (cm) | const. (cm) | | | | | |
| Semicirculo | | | 12,50 | 3,14 | 245,31 | 12,50 | 30,31 | 3.066,41 | 7.434,90 |
| Retângulo | 25,00 | 25,00 | | | 625,00 | 12,50 | 12,50 | 7.812,50 | 7.812,50 |
| Triângulo | 25,00 | 25,00 | | | 312,50 | 33,33 | 8,33 | 10.416,67 | 2.604,17 |
| Semicirculo | | | 6,25 | 3,14 | -61,33 | 25,00 | 2,65 | -1.533,20 | -162,76 |
| SOMATÓRIO | | | | | 1.121,48 | 17,62 | 15,77 | 19.762,37 | 17.688,80 |

| Tabela 1 | \bar{x} | \bar{y} | Área |
|----------|-------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| | $\bar{x} = \frac{b}{2}$ | $\bar{y} = \frac{h}{2}$ | $A = b \cdot h$ |
| | $\bar{x} = \frac{b}{3}$ | $\bar{y} = \frac{h}{3}$ | $A = b \cdot h / 2$ |
| | $\bar{x} = 0$ | $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$ | $A = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$ |

| | |
|-----------|----------|
| \bar{x} | 17,62 cm |
| \bar{y} | 15,77 cm |

| | |
|----------------|---------------------------|
| Q _x | 17.688,80 cm ³ |
| Q _y | 19.762,37 cm ³ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

Cálculos:

A_1 é a área do semicírculo de raio $r_1 = 12,50 \text{ cm}$

$$A_1 = \frac{\pi \cdot (12,5)^2}{2} = 254,31 \text{ cm}^2$$

A_2 é a área do retângulo de base $b_2 = 25,00 \text{ cm}$ e $h_2 = 25,00 \text{ cm}$

$$A_2 = 25 \cdot 25 = 625,00 \text{ cm}^2$$

A_3 é a área do triângulo de base $b_3 = 25,00 \text{ cm}$ e $h_3 = 25,00 \text{ cm}$

$$A_3 = \frac{25 \cdot 25}{2} = 312,50 \text{ cm}^2$$

A_4 é a área do semicírculo de raio $r_4 = 6,25 \text{ cm}$

$$A_4 = \frac{\pi \cdot (6,25)^2}{2} = 61,33 \text{ cm}^2$$

Coordenadas do semicírculo A_1 :

$$\bar{x}_1 = 12,50 \text{ cm}$$

$$\bar{y}_1 = 25,00 + \frac{4 \cdot (12,50)}{3 \cdot \pi} = 30,31 \text{ cm}$$

Coordenadas do retângulo A_2 :

$$\bar{x}_2 = \frac{25,00}{2} = 12,50 \text{ cm}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{25,00}{2} = 12,50 \text{ cm}$$

Coordenadas do triângulo A_3 :

$$\bar{x}_3 = 25,00 + \frac{25,00}{3} = 33,33 \text{ cm}$$

$$\bar{y}_3 = \frac{25,00}{3} = 8,33 \text{ cm}$$

Coordenadas do semicírculo A_4 :

$$\bar{x}_4 = 25,00 \text{ cm}$$

$$\bar{y}_4 = \frac{4 \cdot (6,25)}{3 \cdot \pi} = 2,65 \text{ cm}$$

utilizando as equações (1.26) e (1.40), encontramos as coordenadas do centroide e os momentos de primeira ordem da Figura 1.23:

$$\bar{x} = \frac{A_1 \cdot \bar{x}_1 + A_2 \cdot \bar{x}_2 + A_3 \cdot \bar{x}_3 - A_4 \cdot \bar{x}_4}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4}$$

$$\bar{x} = \frac{(254,31 \cdot 12,50) + (625,00 \cdot 12,50) + (312,50 \cdot 33,33) - (61,33 \cdot 25,00)}{254,31 + 625,00 + 312,50 - 61,33} = 17,62 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{A_1 \cdot \bar{y}_1 + A_2 \cdot \bar{y}_2 + A_3 \cdot \bar{y}_3 - A_4 \cdot \bar{y}_4}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4}$$

$$\bar{y} = \frac{(245,31 \cdot 30,31) + (625,00 \cdot 12,50) + (312,50 \cdot 8,33) - (61,33 \cdot 2,65)}{245,31 + 625,00 + 312,50 - 61,33} = 15,77 \text{ cm}$$

$$Q_y = \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n A_i$$

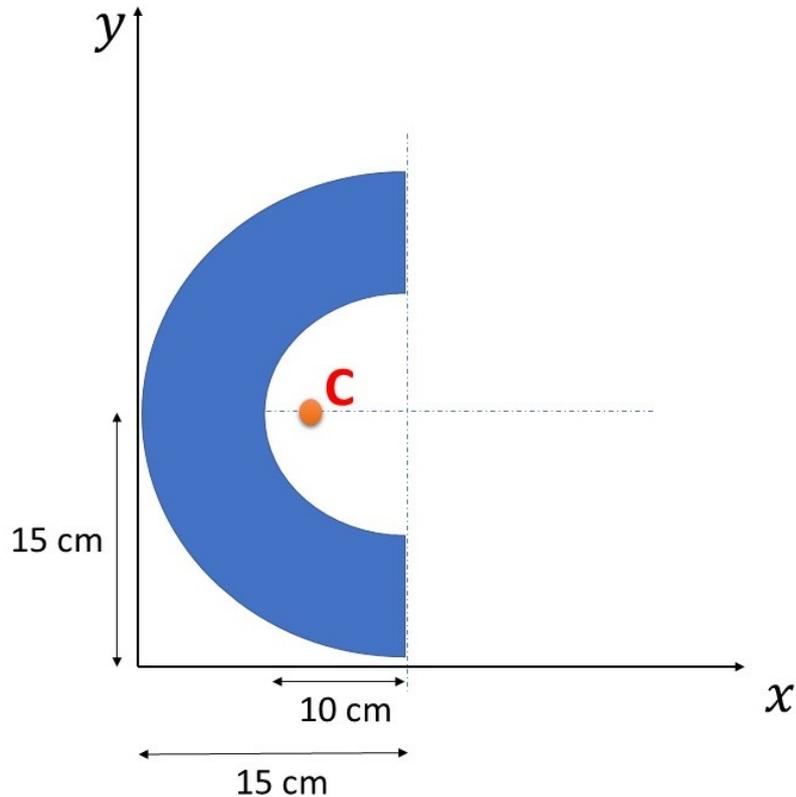
$$Q_y = 17,62 \cdot (245,31 + 625,00 + 312,50 - 61,33) = 19.762,37 \text{ cm}^3$$

$$Q_x = \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^n A_i$$

$$Q_x = 15,77 \cdot (245,31 + 625,00 + 312,50 - 61,33) = 17.688,80 \text{ cm}^3$$

Exemplo 5: Determine as coordenadas do centroide da Figura 1.25.

Figura 1.25: Centroide de figura assimétrica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A_1 é a área do semicírculo de raio $r_1 = 15,00 \text{ cm}$

$$A_1 = \frac{\pi \cdot (15,00)^2}{2} = 353,43 \text{ cm}^2$$

A_2 é a área do semicírculo de raio $r_2 = 10,00 \text{ cm}$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot (10,00)^2}{2} = 157,08 \text{ cm}^2$$

Coordenadas do semicírculo A_1 :

$$\bar{x}_1 = 15 - \frac{4 \cdot (15)}{3 \cdot \pi} = 8,63 \text{ cm}$$

$$\bar{y}_1 = 15,00 \text{ cm}$$

Coordenadas do semicírculo A_2 :

$$\bar{x}_2 = 15 - \frac{4 \cdot (10)}{3 \cdot \pi} = 10,76 \text{ cm}$$

$$\bar{y}_2 = 15,00 \text{ cm}$$

$$\bar{x} = \frac{A_1 \cdot \bar{x}_1 - A_2 \cdot \bar{x}_2}{A_1 - A_2}$$
$$\bar{x} = \frac{(353,43 \cdot 8,63) - (157,08 \cdot 10,76)}{353,43 - 157,08} = 6,93 \text{ cm}$$
$$\bar{y} = \frac{A_1 \cdot \bar{y}_1 - A_2 \cdot \bar{y}_2}{A_1 - A_2}$$
$$\bar{y} = \frac{(353,43 \cdot 15,00) - (157,08 \cdot 15,00)}{353,43 - 157,08} = 15,00 \text{ cm}$$

A figura [1.25](#) mostra que o centro de massa pode ficar fora da área do desenho.

Capítulo 2

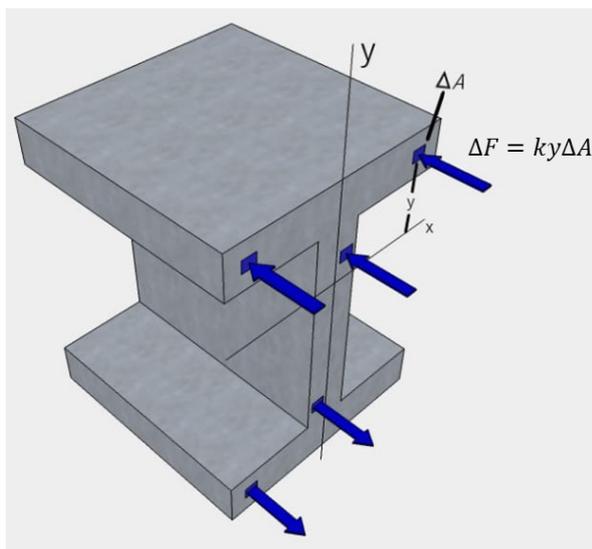
MOMENTO DE INÉRCIA

O Momento de Inércia é uma medida da resistência inercial do corpo para movimentos de rotações em torno de um eixo. Como depende da distância, quanto mais afastado do eixo está um elemento de massa, maior será sua contribuição ao Momento de Inércia em relação ao eixo. Portanto, além de saber da massa do corpo, temos que entender como sua massa é distribuída. Essa característica geométrica do momento de inércia é importantíssima no dimensionamento dos elementos de construção (vigas, pilares, lajes e outros), pois fornece uma noção de resistência da peça (BEER, 2012).

2.1 Momento de inércia ou momento de segunda ordem de uma superfície plana.

Consideramos forças distribuídas como ΔF cujas intensidades são proporcionais aos elementos de área ΔA sobre as quais, elas atuam e variam linearmente com a distância entre ΔA e um eixo específico. Como exemplo, uma viga de seção transversal uniforme sujeita a dois binários iguais e opostos aplicados em cada extremidade da viga, estando assim, sob flexão. Tal efeito, estudado em mecânica dos materiais, mostra que as forças internas em qualquer seção da viga são forças distribuídas cujas intensidades $\Delta F = ky\Delta A$ variam linearmente com a distância y entre o elemento de área ΔA e um eixo que passa pelo centroide da seção, conforme Figura 2.1. Esse eixo é definido como eixo neutro da seção, ou seja, é uma superfície de um corpo deformado por flexão que separa a zona comprimida da zona tracionada (BEER, 2012).

Figura 2.1: Seção transversal de uma viga.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As forças sobre um dos lados da seção dividida pelo eixo neutro são forças de compressão, ao passo que, sobre o outro lado, são forças de tração; sobre o próprio eixo, as forças são nulas.

A intensidade da resultante R das forças elementares ΔF que atuam sobre toda seção é:

$$R = \int ky \, dA = k \int y \, dA$$

A última integral é definida como momento de primeira ordem Q_x da seção em relação ao eixo x ; essa integral vale $\bar{y}A$ e, portanto, é igual a zero, pois o centroide da seção localiza-se sobre o eixo x . Logo, sistema de forças ΔF reduz a um binário. A intensidade M desse binário (momento fletor) deve ser igual à soma dos momentos $\Delta M_x = y\Delta F = ky^2\Delta A$ das forças elementares. Integrando sobre toda a seção, obtemos:

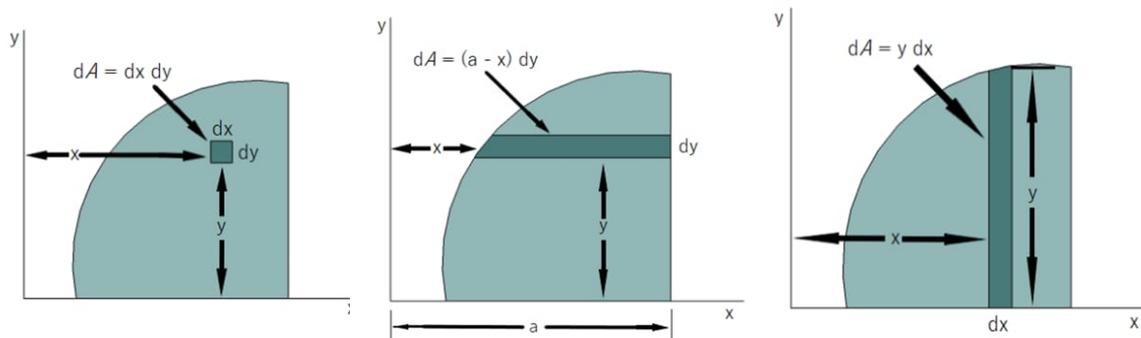
$$M = \int ky^2 \, dA = k \int y^2 \, dA$$

A última integral é definida como o momento de segunda ordem, ou momento de inércia, da seção da viga em relação eixo x , representado por I_x . Ele é obtido quando se multiplica cada elemento de área dA pelo quadrado de sua distância do eixo x e quando ele é integrado sobre a seção da viga. Como $y^2 dA$ é positivo, a integral I_x será sempre positiva.

2.2 Determinando o momento de inércia de uma superfície plana por integração.

Na seção anterior, determinamos o momento de segunda ordem, ou momento de inércia, de uma superfície plana A em relação ao eixo x . De forma análoga, determinamos o momento de inércia I_y da superfície A em relação ao eixo y , conforme a Figura 2.2 (BEER, 2012).

Figura 2.2: Momento de inércia.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos então as equações (2.1) e (2.2):

$$I_x = \int y^2 dA \quad (2.1)$$

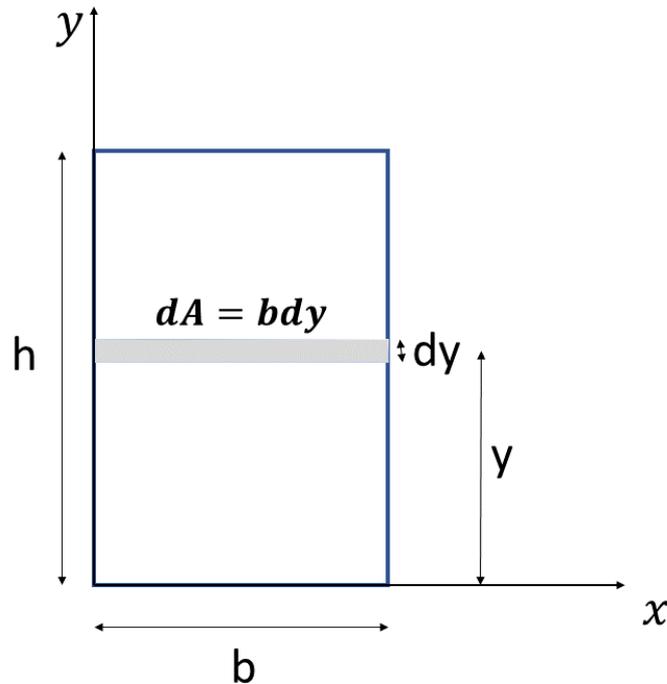
$$I_y = \int x^2 dA \quad (2.2)$$

As integrais são os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados da superfície A e podem ser calculados, de forma fácil, se escolhermos dA como uma seção retangular paralela a um dos eixos coordenados. Para calcular I_x , escolhe-se a seção retangular paralela ao eixo x de modo que todos os pontos estejam à mesma distância y do eixo x . O momento de inércia dI_x é calculado multiplicando a área dA por y^2 . De forma análoga, calculamos I_y escolhe-se seção retangular paralela ao eixo y de modo que todos os pontos estejam à mesma distância x do eixo y . O momento de inércia dI_y é $x^2 dA$.

2.3 Momento de inércia de uma superfície dada.

Vamos determinar o momento de inércia de um retângulo em relação à sua base, conforme Figura 2.3 (BEER, 2012).

Figura 2.3: Momento de inércia de um retângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dividindo o retângulo em faixas paralelas ao eixo x , temos:

$$dA = bdy$$

$$dI_x = y^2 bdy$$

$$I_x = \int_0^h by^2 dy = \frac{1}{3}bh^3 \quad (2.3)$$

A fórmula que acabamos de deduzir pode ser usada para definir o momento de inércia dI_x em relação ao eixo x de uma faixa retangular paralela ao eixo y , tal como na Figura 2.3. Tomando $b = dx$ e $h = y$ na equação (2.3), temos:

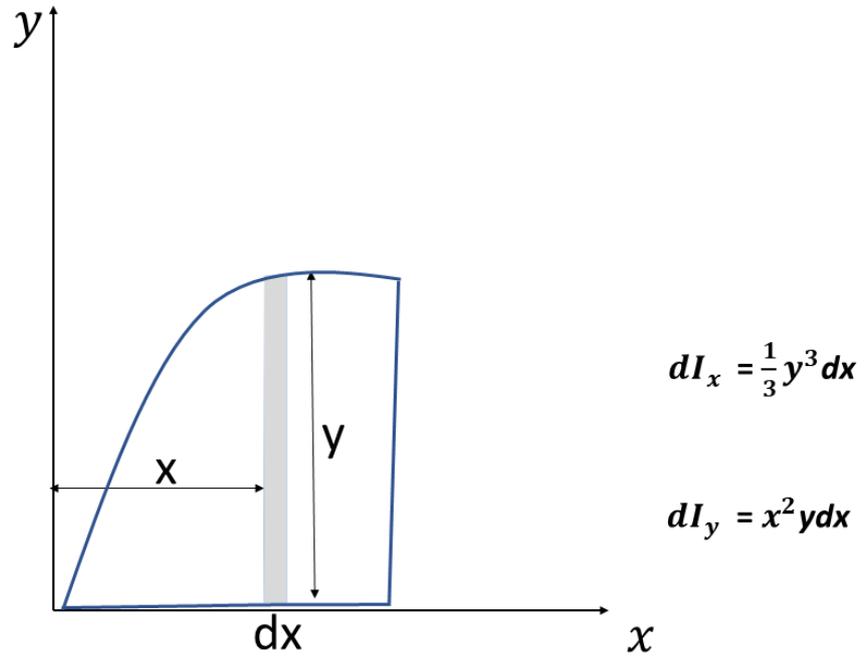
$$dI_x = \frac{1}{3}y^3 dx$$

e

$$dI_y = x^2 dA = x^2 y dx$$

Portanto, o mesmo elemento pode ser usado para determinar os momentos de inércia I_x e I_y de uma superfície dada, como mostra a Figura 2.4.

Figura 2.4: Momento de inércia de uma superfície dada.



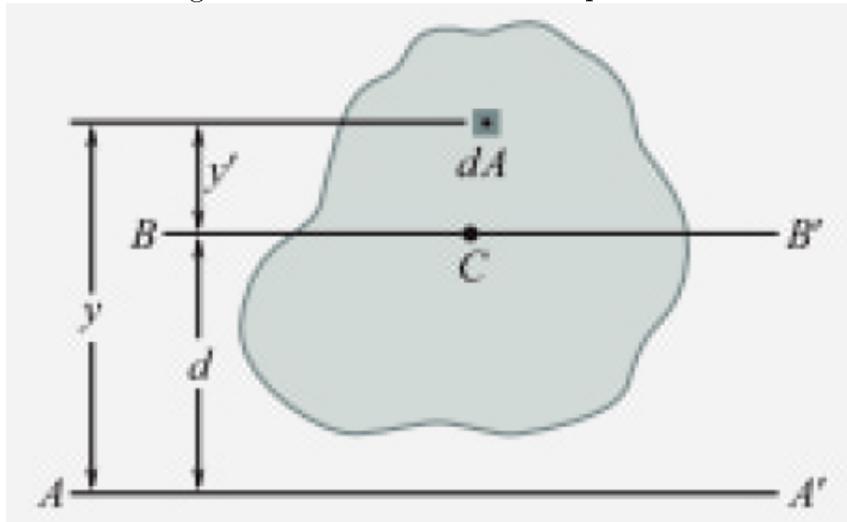
Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4 Teorema dos eixos paralelos.

Considere o momento de inércia $I_{AA'}$ de uma superfície plana A em relação a um eixo, como mostra a Figura 2.5. Definindo y como a distância entre um elemento de superfície de área dA e AA' , escrevemos (BEER, 2012):

$$I_{AA'} = \int y^2 dA$$

Figura 2.5: Teorema dos eixos paralelos.



Fonte: Beer. 2012 p.289

Vamos traçar um eixo BB' paralelo a AA' passando pelo centroide C ; o eixo é definido por eixo centroidal. Representando por y' a distância entre o elemento dA e BB' escrevemos $y = y' + d$, onde d é a distância entre os eixos AA' e BB' . Eliminando y nessa integral, escrevemos

$$\begin{aligned} I_{AA'} &= \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA \\ &= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA \end{aligned}$$

A primeira integral representa o momento de inércia $\bar{I}_{BB'}$ da superfície em relação ao eixo centroidal BB' . A segunda representa o momento de primeira ordem da superfície em relação BB' ; como o centroide C da superfície está localizado sobre o eixo, a segunda integral deve ser nula. Finalmente, observamos que a última integral é igual à área total A da superfície. Logo, temos

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2 \quad (2.4)$$

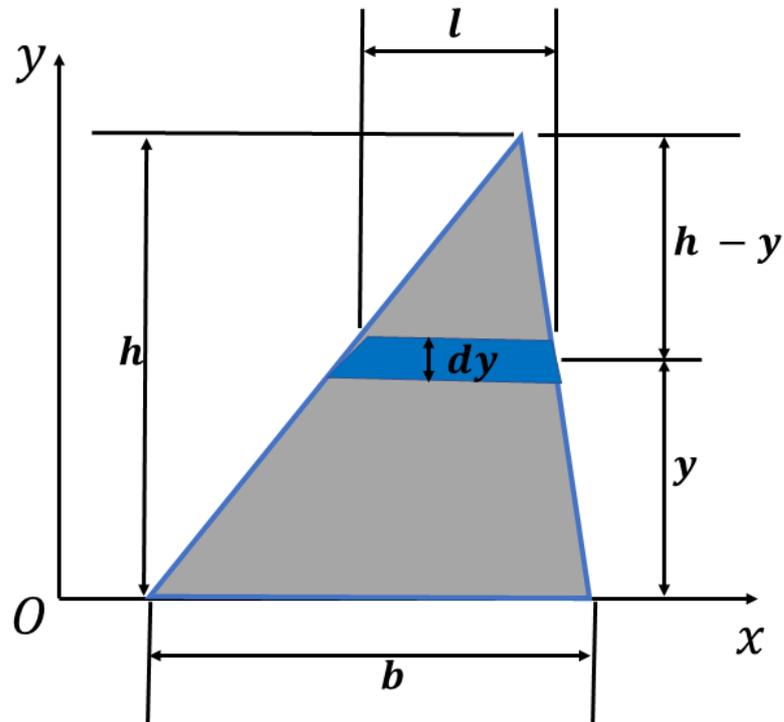
Essa fórmula expressa que o momento de inércia $I_{AA'}$ de uma superfície em relação a um dado eixo AA' é igual ao momento de inércia $\bar{I}_{BB'}$ da superfície em relação ao eixo

centroidal BB' paralelo a AA' mais o produto da área A da superfície e do quadrado da distância d entre os dois eixos. Esse teorema é definido como teorema dos eixos paralelos. Substituindo $I_{AA'}$ por $k^2 A$ e $\bar{I}_{BB'}$ por $\bar{k}^2 A$, o teorema pode ser expresso como:

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (2.5)$$

Exemplo 4 - Calcule o momento de inércia de um triângulo em relação à base. Considere a Figura 2.6.

Figura 2.6: Aplicação do teorema dos eixos paralelos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tendo o triângulo de base b e altura h , e com o eixo x coincidindo com a base. Uma faixa diferencial paralela ao eixo x é definida com área dA . Como todas as porções da faixa estão à mesma distância do eixo x , temos:

$$dI_x = y^2 dA$$

$$dA = l dy$$

Usando a relação de semelhanças de triângulos, obtemos:

$$\frac{l}{b} = \frac{(h - y)}{h}$$

$$l = b \cdot \frac{(h - y)}{h}$$

$$dA = b \cdot \frac{(h - y)}{h} \cdot dy$$

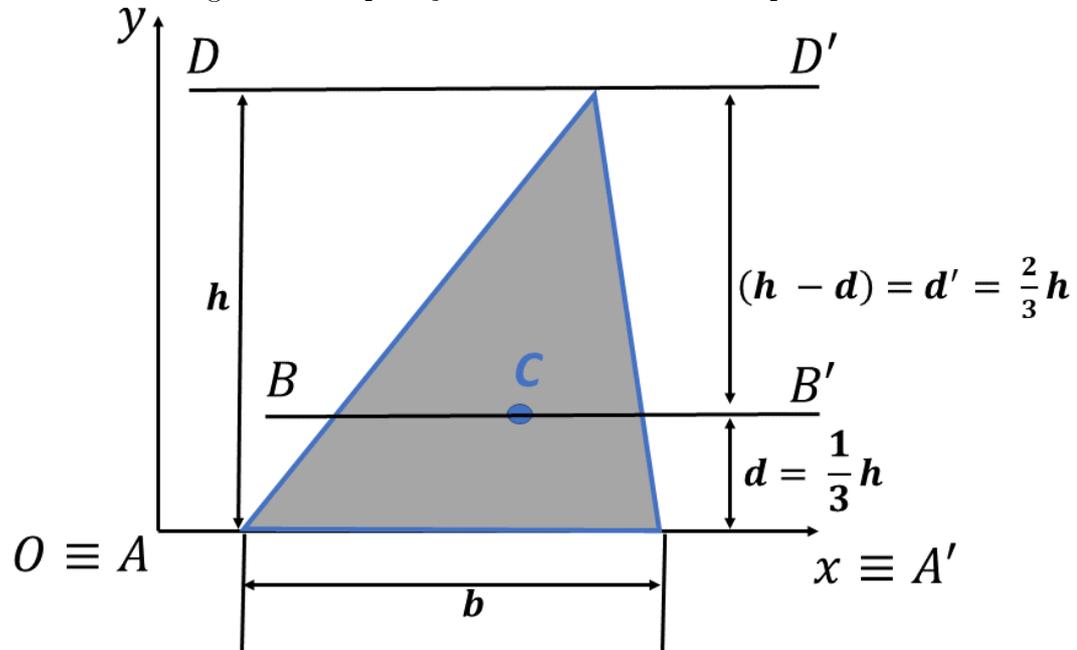
Integrando dI_x de $y = 0$ até $y = h$, obtemos:

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot \frac{(h - y)}{h} \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \int_0^h (hy^2 - y^3) \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \left[h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Exemplo 5 - Considere uma superfície triangular, como mostra a Figura 2.7. Determine o momento de inércia centroidal da superfície.

Figura 2.7: Aplicação do teorema dos eixos paralelos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Usando o teorema dos eixos paralelos temos:

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$

$$\bar{I}_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \left(\frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 \right) - \left[\frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot \left(\frac{1}{3}h \right)^2 \right] = \frac{1}{36}bh^3$$

Observe que o momento de inércia de uma superfície é sempre menor em relação a um eixo centroidal do que em relação a qualquer outro eixo paralelo. Analisando ainda a Figura 2.7, o momento de inércia em relação ao eixo DD' é obtido através de:

$$I_{DD'} = \bar{I}_{BB'} + Ad'^2 = \left(\frac{1}{36} \cdot b \cdot h^3 \right) + \left[\frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot \left(\frac{2}{3}h \right)^2 \right] = \frac{1}{4}bh^3$$

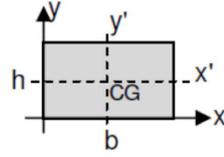
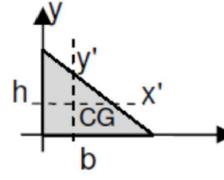
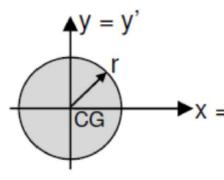
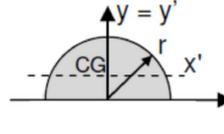
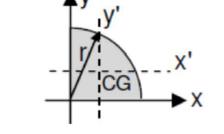
Podemos observar que $I_{DD'}$ não é obtido diretamente de $I_{AA'}$. O teorema dos eixos paralelos só pode ser aplicado se um dos eixos paralelos passa pelo centroide da superfície.

2.5 Momento de inércia de superfície composta.

O momento de inércia de uma superfície A pode ser calculado, dividindo a superfície em figuras de geométricas simples e somando seus momentos de inércia de cada figura.

Veamos uma superfície A formada por diversas superfícies $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. O momento de inércia de A é obtido pela soma dos momentos de inércia de cada superfície simples que tem seus momentos já tabelados, como mostra a Figura 2.8 (BEER, 2012).

Figura 2.8: Tabela de momento de inércia de formas geométricas simples.

| Superfície Plana | | $\bar{I}_{x'}$ | $\bar{I}_{y'}$ | I_x | I_y | Área |
|----------------------|---|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|---------------------------|
| Retângulo / Quadrado |  | $\frac{bh^3}{12}$ | $\frac{hb^3}{12}$ | $\frac{bh^3}{3}$ | $\frac{hb^3}{3}$ | $b \cdot h$ |
| Triângulo retângulo |  | $\frac{bh^3}{36}$ | $\frac{hb^3}{36}$ | $\frac{bh^3}{12}$ | $\frac{hb^3}{12}$ | $\frac{b \cdot h}{2}$ |
| Círculo |  | $\frac{\pi r^4}{4}$ | $\frac{\pi r^4}{4}$ | $\frac{\pi r^4}{4}$ | $\frac{\pi r^4}{4}$ | $\pi \cdot r^2$ |
| Semicírculo |  | $0,1098r^4$ | $\frac{\pi r^4}{8}$ | $\frac{\pi r^4}{8}$ | $\frac{\pi r^4}{8}$ | $\frac{\pi \cdot r^2}{2}$ |
| ¼ Círculo |  | $0,0549r^4$ | $0,0549r^4$ | $\frac{\pi r^4}{16}$ | $\frac{\pi r^4}{16}$ | $\frac{\pi \cdot r^2}{4}$ |

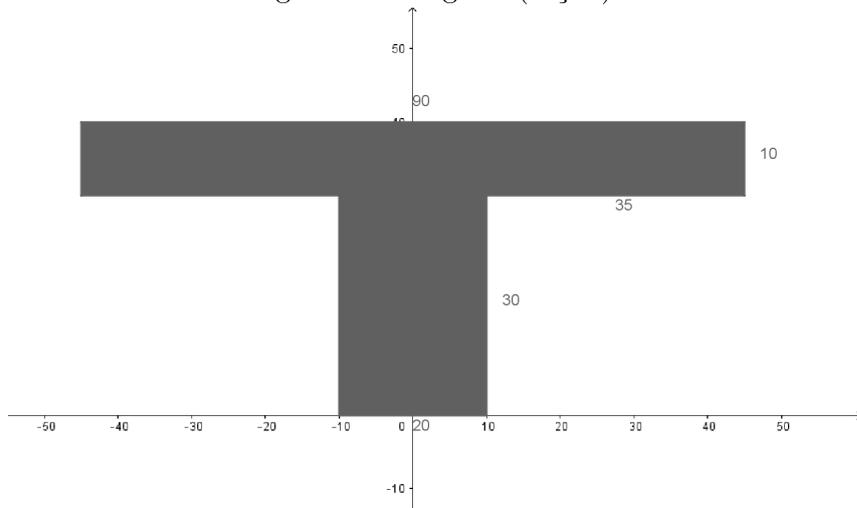
Fonte: Elaborada pelo autor

Entretanto, antes de os momentos de inércia das superfícies simples serem somados, talvez seja necessário aplicar o teorema dos eixos paralelos para transportar cada momento de inércia para o eixo escolhido.

O cálculo do momento de inércia de uma seção da viga em relação ao seu eixo neutro é fortemente relacionado ao cálculo do momento fletor nessa viga. Portanto, a determinação de momentos de inércia é um pré-requisito para a análise e o projeto de elementos estruturais.

Exemplo 6 - Determine o centroide C da área da seção transversal da viga T , mostrada na figura 2.9, e calcule os momentos de inércia em relação aos eixos centroidais.

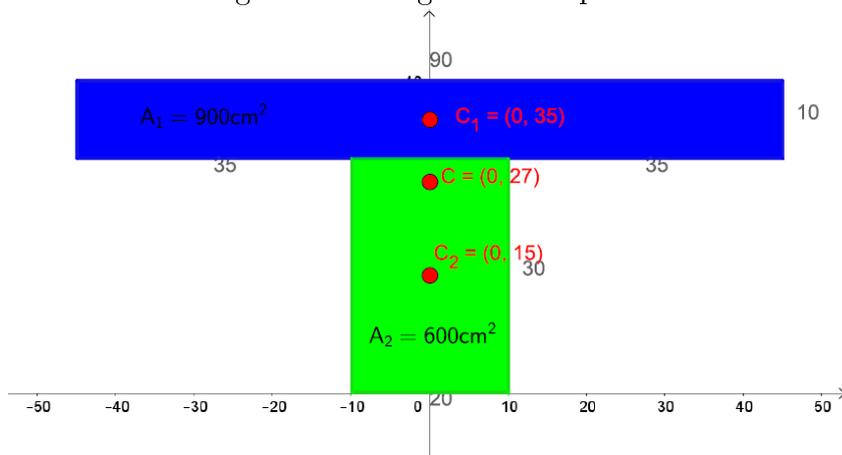
Figura 2.9: Viga T (seção).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiramente, dividiremos a superfície plana em superfícies de geometria mais simples de centroide conhecido, conforme Figura [2.10](#).

Figura 2.10: Viga T decomposta.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora vamos calcular os valores das áreas de cada figura:

$$A_1 = 90 \cdot 10 = 900 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 20 \cdot 30 = 600 \text{ cm}^2$$

As distâncias entre os eixos centroidais de cada superfície até os eixos de referência x e y :

$$d_{x_1} = 0,0 \text{ cm}$$

$$d_{x_2} = 0,0 \text{ cm}$$

$$d_{y_1} = 8,0 \text{ cm}$$

$$d_{y_2} = 12,0 \text{ cm}$$

Cálculo de \bar{x} e \bar{y} :

$$\bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i$$

$$\bar{x} = \frac{A_1 \cdot \bar{x}_1 + A_2 \cdot \bar{x}_2}{A_1 + A_2} = \frac{(900 \cdot 0) + (600 \cdot 0)}{(900 + 600)} = 0,0 \text{ cm}$$

$$\bar{y} \cdot \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i$$

$$\bar{y} = \frac{A_1 \cdot \bar{y}_1 + A_2 \cdot \bar{y}_2}{A_1 + A_2} = \frac{(900 \cdot 35) + (600 \cdot 15)}{(900 + 600)} = 27,0 \text{ cm}$$

Portanto o centroide fica localizado no ponto $C = (0, 27)$.

Cálculo dos momentos de inércia em relação ao baricentro:

$$I_x = \sum_{i=1}^n (\bar{I}_{x_i} + A_i d_{y_i}^2) = (\bar{I}_{x_1} + A_1 d_{y_1}^2) + (\bar{I}_{x_2} + A_2 d_{y_2}^2)$$

$$\bar{I}_{x_1} = \frac{b_1 \cdot (h_1)^3}{12} = \frac{90 \cdot (10)^3}{12} = 7.500,0 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{x_2} = \frac{b_2 \cdot (h_2)^3}{12} = \frac{20 \cdot (30)^3}{12} = 45.000,0 \text{ cm}^4$$

$$I_x = [7.500,0 + 900 \cdot (8,0)^2] + [45.000,0 + 600 \cdot (12,0)^2] = 196.500,0 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n (\bar{I}_{y_i} + A_i d_{x_i}^2) = (\bar{I}_{y_1} + A_1 d_{x_1}^2) + (\bar{I}_{y_2} + A_2 d_{x_2}^2)$$

$$\bar{I}_{y_1} = \frac{h_1 \cdot (b_1)^3}{12} = \frac{10 \cdot (90)^3}{12} = 607.500,0 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{y_2} = \frac{h_2 \cdot (b_2)^3}{12} = \frac{30 \cdot (20)^3}{12} = 20.000,0 \text{ cm}^4$$

$$I_y = [607.500,0 + 900 \cdot (0,0)^2] + [20.000,0 + 600 \cdot (0,0)^2] = 627.500,0 \text{ cm}^4$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observamos o quanto estão presentes a física e matemática no estudo do equilíbrio de um corpo, onde destacamos o uso da geometria para o caso de corpos homogêneos.

Com a realização deste trabalho, foi possível analisar de forma mais detalhada a aplicação da geometria para a identificação dos conceitos físicos de centro de massa e momento de inércia. Sendo possível concluir o quanto a geometria é importante no desenvolvimento dessa teoria, e portanto, determinam formas geométricas de cada objeto, por exemplo, carros, pontes, edifícios, etc.

A partir desta análise, pode-se afirmar que uma parcela significativa das descobertas e feitos realizados pelo homem, principalmente para facilitar a nossa vida, foram desenvolvidos graças aos conhecimentos físicos e matemáticos que foram tratados aqui, e que questões de centro de massa e de momento de inércia são resolvidos, em geral, com a aplicação de geometria simples, que são ensinadas na Educação Básica. Apesar de citarmos tais conceitos nas aplicações em engenharia, é importante colocarmos que existem diversas outras aplicações.

Referências Bibliográficas

- [1] BEER, F. P.; JOHNSTON, J. E.; MAZUREK, D. F.; EISENBERG, E. R. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*, 1. ed. Porto Alegre. Bookman, 2012.
- [2] DOCA, R. H.; BISCUOLA, G. J.; BÔAS, N. V. *Física Mecânica 1*, 3. ed. São Paulo. Saraiva, 2017.
- [3] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física* , 8. ed. Rio de Janeiro. LTC, 2011.
- [4] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio* , 7. ed. Rio de Janeiro. SBM, 2016.
- [5] MERIAM, J. L.; KRAIGE L. G. *Mecânica para engenharia - Estática*, 6. ed. Rio de Janeiro. LTC, 2004.
- [6] NETO, A. C. *Geometria*, 1. ed. Rio de Janeiro. SBM, 2013.
- [7] TORRES, C. M.; FERRARO, N. G., SOARES, P. A., PENTEADO, P. C. *FÍSICA: Ciência e Tecnologia* , 4. ed. São Paulo. Moderna, 2016.