Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem superior e suas relações

Juliano Sanquite Gomes
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Ruikson Sillas Oliveira Nunes**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Julho de 2019

Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem superior e suas relações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Juliano Sanquite Gomes e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 10 de julho de 2019.

Prof. Dr. Ruikson Sillas Oliveira Nunes
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ruikson Sillas Oliveira Nunes
Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Edgar Nascimento

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

G633p Gomes, Juliano Sanquite.
Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem superior e suas relações / Juliano Sanquite Gomes. -- 2019
ix, 40 f. ; 30 cm.

Orientador: Ruikson Sillas Oliveira Nunes.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Operador diferença e quociente. 2. termo geral. 3. soma e produto. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática em Rede Nacional - Profmat
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - 78.060900 - Cuiabá/MT
Tel: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Progressões aritméticas e geométricas de ordem superior e suas relações"

Autor: Juliano Sanquite Gomes

defendida e aprovada em 10/07/2019.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutora Ruikson Sillas de Oliveira Nunes
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Reinaldo de Marchi
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Edgar Nascimento
Instituição: Instituto Federal de Mato Grosso

Cuiabá, 10/07/2019.

Dedico aos meus pais

Aguinaldo Rocha Gomes e Rosimeire Mariano Sanquite Gomes,

a minha esposa Marcela Duque Ferreira Farias Pinto

e aos meus avós

Julia Mariano Sanquite e Orlando Sanquite (que já se foi).

Agradecimentos

Desejo expressar o meu agradecimento a todos aqueles que tornaram possível a concretização deste trabalho. A Deus, por permitir a acontecimentos.

Agradeço ao meu orientador Professor Dr Ruikson Sillas Oliveira Nunes que sabiamente orientou a execução desta dissertação, pela sua disponibilidade, incentivo, compreensão e confiança que me transmitiu ao longo de toda a pesquisa.

Muito obrigado ao professores deste programa, pelo aprendizado imprescindível para conclusão deste trabalho. Agradeço aos membros da banca pelas valiosas contribuições.

Obrigado aos colegas de turma pelo convívio prazeroso, pelas disciplinas compartilhadas e pelas contribuições direta e indireta para a realização deste curso de mestrado e especialmente pela amizade.

Obrigado a toda a minha família, em especial a meu pai Aguinaldo Rocha Gomes, minha mãe Rosimeire Mariano Sanquite Gomes e a minha esposa Marcela Duque Ferreira Farias Pinto pela paciência e compreensão, pois sem vosso apoio e carinho tudo seria certamente mais difícil.

Obrigado a todas as pessoas que contribuíram para esta realização pessoal e profissional que infelizmente não foram mencionadas.

"A educação é a arma mais
poderosa que você pode usar
para mudar o mundo."
Nelson Mandela.

Resumo

Este trabalho apresenta um breve estudo a respeito das Progressões Aritméticas e Geométricas, focando especialmente as de ordem superior. O objetivo principal deste trabalho é mostrar a relação existente entre Progressões Aritméticas e Geométricas de uma ordem k, sendo k um número natural qualquer. Mais especificamente, mostramos que a função do tipo exponencial transforma Progressão Aritmética de ordem k em Progressão Geométrica de ordem k. Reciprocamente, função logarítmica transforma Progressão Geométrica de ordem k, de termos positivos, em Progressão Aritmética de ordem k, e por fim elaboramos um software onde é possivel criar progressões aritmética e geométrica de ordem 2 e 3, e reciprocamente ao inserirmos nele uma sequência numérica ele tem a capacidade de dizer se tal sequência é uma progressão aritmética ou geométrica, e se positivo, dizer o primeiro termo de suas sequências de diferenças ou quocientes respectivamente, além de sua ordem.

Palavras chave: Operador diferença e quociente, termo geral, soma e produto.

Abstract

This paper presents a brief study on Arithmetic and Geometrical Progressions, focusing especially on higher order ones. The main objective of this work is to show the relation between Arithmetic and Geometric Progressions of a k order, with k being any natural number. More specifically, we show that the exponential-type function transforms Arithmetic Progression of order k into Geometric Progression of order k. Conversely, logarithmic function transforms Geometric Progression of order k, of positive terms, into Arithmetic Progression of order k, and finally we elaborate a software where it is possible to create arithmetic and geometric progressions of order 2 and 3, and vice versa when inserting in it a numerical sequence it has the ability to tell whether such sequence is an arithmetic or geometric progression, and if positive, say the first term of its sequence of differences or quotients respectively, in addition to its order.

Keywords: Operator difference and quotient, general term, sum and product.

Sumário

Introdução

Os estudos das Progressões Aritméticas e Geométricas contribuíram para o desenvolvimento da Matemática. Inclusive, possibilitaram diversas aplicações em outras áreas de conhecimento tais como Biologia, Contabilidade, Economia, entre outras. Mais precisamente, apresentam aplicabilidades relacionadas ao mercado financeiro, ao cálculo de tributos, a analise econômica e financeira das entidades. De modo geral, o juro simples, montante, descontos simples e valor atual são exemplos da aplicabilidade da progressão aritmética, enquanto o juro composto, desconto composto, valor atual e rendas referem a aplicabilidade da progressão geométrica. Em outras palavras, caracterizam-se como um recurso alternativo para construção de modelos tais como: cálculos atuariais e previdenciários, análise do poder aquisitivo do dinheiro no tempo, entre outros.

Tendo em vista a grande importância do assunto é que este trabalho se propõe a investigar algumas propriedades matemáticas com respeito a progressões aritméticas e geométricas de ordem superior. Este tema, é importante devido a riqueza de suas propriedades, porém são pouco exploradas didaticamente tanto no ensino médio quanto na graduação.

Podemos encontrar muitos trabalhos que, de alguma maneira, tem abordado progressões geométricas e aritméticas de ordem superior. Para citar algumas veja Nobre (2018), Lopes (2017) e Morgado (2013).

Em Lopes (2017), o autor explora com bastante êxito as principais propriedades das progressões geométricas e aritméticas de segunda ordem, e mostra como elas se relacionam por meio de funções logarítmicas e exponenciais. Mais especificamente é mostrado que função do tipo exponencial transforma uma progressão aritmética de segunda ordem em uma progressão geométrica de segunda ordem. No presente trabalho é feito uma prova que o resultado acima, apresentado em Lima et al. (2001) , ainda é válido quando consideramos progressões aritméticas e geométricas de ordem k, sendo k um inteiro positivo qualquer. Além disso, é mostrado aqui fórmulas explícitas do n-ésimo termo de tais progressões, e também soma e produto de seus n primeiros termos.

Para uma melhor exposição do trabalho, o mesmo foi dividido em quatro capítulos. O primeiro é dedicado ao estudo das principais propriedades das progressões geométricas e aritméticas. Além disso, ainda no primeiro capítulo, há uma parte dedicada ao estudo de algumas propriedades de números binomiais que serão essenciais para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

Nos capítulos 2 e 3 dedicamos aos estudos das progressões aritméticas e geométricas de ordens 2 e 3 respectivamente. Determinamos uma fórmula para o n-ésimo termo, para o produto e soma de seus n primeiros termos. Por fim, em cada um dos capítulos mostramos que função do tipo exponencial transforma progressão aritmética de segunda e terceira ordem em progressão aritmética de segunda e terceira ordem respectivamente. Os trabalhos realizados nos capítulos 2 e 3 podem a primeira vista, parecer repetitivos, no entanto entendemos que eles são ilustrações didáticas da generalização que é feita no capítulo 4.

O capítulo 4 é dedicado ao estudo das progressões aritméticas e geométricas de ordem k. É mostrado a fórmula que determina os seus n-ésimos termos e também da soma e produto de seus n primeiros termos. Por fim, mostramos que uma progressão aritmética de ordem k é transformada por meio de uma função tipo exponencial, em progressão geométrica de ordem k. Reciprocamente, uma progressão geométrica de ordem k, com com termos positivos é transformada numa progressão aritmética de ordem k.

Enfim finalizamos este trabalho propondo a construção de um software onde alunos do ensino médio podem usar para trabalhar progressões aritméticas e geométricas de ordem superior.

Capítulo 1

Progressões Aritméticas e Geométricas

Nessa seção faremos uma revisão das principais propriedades das progressões aritméticas e geométricas. Além disso, na última seção deste capítulo trabalharemos algumas propriedades de números binomiais, que serão utilizadas nos capítulos posteriores.

Este capitulo está baseado nas referências Iezzi e Hazzan (1977), Morgado (2013), Benevides (2005).

1.1 Progressões Aritméticas

Definição 1. *Uma sequência numérica* $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ *é uma Progressão Aritmética, quando podemos obter cada termo, a partir do segundo, como soma do termo anterior com uma constante* r*. Isto é,* $x_{i+1} = x_i + r$*, para todo* $i = 1, 2, \cdots$*. A constante* r *é chamada de razão da Progressão Aritmética e ela pode ser um número positivo, negativo ou zero.*

Exemplo 1. *A sequência* $(3, 5, 7, 9, 11, \cdots)$ *é uma progressão aritmética de razão 2.*

Uma progressão aritmética (x_n) é um *sequência crescente* se $m < n$ implica $x_m < x_n$. Em geral isso ocorre sempre que a constante $r > 0$. O (exemplo 1) é uma progressão crescente. De modo análogo, uma progressão aritmética (x_n) é uma *sequência decrescente* se $m < n$ implica $x_m > x_n$, isso ocorre sempre quando $r < 0$.

Exemplo 2. *A sequência* $(3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \cdots)$ *é uma progressão aritmética decrescente de razão* $-\frac{1}{2}$.

Obs. Se a razão for nula a progressão aritmética será uma *sequência constante*, isto é, $(x_1, x_1, x_1, \cdots, x_1, \cdots)$.

Afim de obter uma fórmula para o termo geral podemos resolver a seguinte recorrência:

$x_1 = x_1$

$x_2 = x_1 + r$

$x_3 = x_2 + r = x_1 + r + r = x_1 + 2r$

$x_4 = x_3 + r = x_1 + r + r + r = x_1 + 3r$

....

$x_n = x_{n-1} + r = x_1 + \underbrace{r + r + ... + r}_{(n-1) vezes} = x_1 + (n-1)r$

Assim, segue que o n-ésimo termo de uma progressão aritmética (x_n) de razão r é dado pela seguinte fórmula:

$$x_n = x_1 + (n-1)r \tag{1.1}$$

Propriedade: 1. *A soma de duas progressões aritméticas x_n e y_n de razões r_1 e r_2 respectivamente é uma progressão aritmética de razão $(r_1 + r_2)$.*

Demonstração: 1. *Seja $x_n = x_1 + (n-1)r_1$ e $y_n = y_1 + (n-1)r_2$, então:*

$x_n + y_n = [x_1 + (n-1)r_1] + [y_1 + (n-1)r_2] = (x_1 + y_1) + (n-1)(r_1 + r_2)$

De forma análoga, essa afirmação também é valida para subtração de progressões aritméticas, a razão da progressão resultante será $(r_1 - r_2)$.

Observação 1. *A multiplicação de duas progressões aritmética, **não** é uma progressão aritmética.*

Demonstração: 2. *Seja $x_n = x_1 + (n-1)r_1$ e $y_n = y_1 + (n-1)r_2$, então:*

$x_n.y_n = [x_1 + (n-1)r_1].[y_1 + (n-1)r_2]$

$x_n.y_n = x_1.y_1 + (n-1)(x_1.r_2 + y_1.r_1) + (n-1)^2(r_1.r_2)$

Logo, por (1.1) não é uma progressão aritmética. Note que, a expressão $x_n.y_n$ é uma polinômio de grau 2 em n.

Denota-se por S_n a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ cuja razão é r, ou seja, $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$. Assim:

$S_1 = x_1$

$S_2 = x_1 + x_2 = x_1 + (x_1 + r) = 2x_1 + r$

$S_3 = x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (x_1 + r) + (x_1 + 2r) = 3x_1 + 3r$

$S_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + (x_1 + r) + (x_1 + 2r) + (x_1 + 3r) = 4x_1 + 6r$

....

$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 + (x_1 + r) + (x_1 + 2r) + \cdots + (x_1 + (n-1)r) = \underbrace{x_1 + x_1 + \cdots + x_1}_{n \quad vezes} + r + 2r + \cdots + (n-1)r = nx_1 + (1+2+\cdots+(n-1))r = nx_1 + \frac{n(n-1)}{2}r$

Assim, segue que a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (x_n) de razão r, é dada pela seguinte fórmula:

$$S_n = nx_1 + \left[\frac{n(n-1)}{2}\right] r \tag{1.2}$$

Exemplo 3. *A soma dos termos da sequência* $(1, 2, 3, \cdots, 100)$ *é 5050, pois*

$$S_{100} = 100.(1) + \left[\frac{100(100-1)}{2}\right].1 = 5050$$

1.2 Progressões Geométricas

Definição 2. *Uma sequência numérica* $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ *é uma Progressão Geométrica, quando podemos obter cada termo, a partir do segundo, como produto do termo anterior com uma constante* q*. Isto é,* $x_{i+1} = x_i.q$*, para todo* i *= 1, 2,* $\cdots$*. A constante* q *é chamada de razão da Progressão Geométrica e ela pode ser um número positivo, negativo ou zero.*

Exemplo 4. *A sequência* $(16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \cdots)$ *é uma progressão geométrica de razão* $\frac{1}{4}$.

Uma progressão geométrica (x_n) é uma *sequência crescente* se $m < n$ implica $x_m < x_n$, em geral isso ocorre sempre que a constante $q > 1$. De modo análogo, uma progressão geométrica (x_n) é uma *sequência decrescente* se $m < n$ implica $x_m > x_n$, isso ocorre sempre quando $0 < q < 1$. As progressões geométricas que possuem $q < 0$ são chamadas de *alternadas*, pois seus termos são alternadamente negativos e positivos.

Exemplo 5. *A sequência* $(1, -2, 4, -8, 16, -32, \cdots)$ *é uma progressão geométrica alternada de razão* -2.

Observação 2. *Se a razão* q *for igual a* 1*, a progressão geométrica será uma sequência constante, isto é,* $(x_1, x_1, x_1, \cdots, x_1, \cdots)$.

Observação 3. *Se a razão q for igual a 0, a progressão geométrica será composta do primeiro termo e os demais serão zeros. ou seja, a sequência será $(x_1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$.*

Afim de encontrar uma fórmula para o termo geral podemos resolver a seguinte recorrência:

$$x_1 = x_1$$

$$x_2 = x_1.q$$

$$x_3 = x_2.q = x_1.q.q = x_1.q^2$$

$$x_4 = x_3.q = x_1.q.q.q = x_1.q^3$$

....

$$x_n = x_{n-1}.q = x_1.\underbrace{q.q.\cdots.q}_{(n-1)vezes} = x_1.q^{(n-1)}$$

Assim, segue que o n-ésimo termo de uma progressão geométrica (x_n) de razão q é dada pela seguinte fórmula:

$$x_n = x_1.q^{(n-1)} \tag{1.3}$$

Exemplo 6. *As progressões geométricas são muito utilizadas no mercado financeiro para o cálculo de juros compostos.*

$$M = C.(1+i)^n$$

Essa é a fórmula para cálculo do montante, onde M é o montante, C o capital inicial, "i" a taxa de juros e "n" o tempo em que o capital será aplicado, logo vemos que se trata de uma progressão geométrica de razão (1 + i).

Denota-se por S_n a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ cuja razão é q, ou seja:

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \tag{1.4}$$

Note que, se multiplicarmos a equação acima por q, obtemos:

$$q.S_n = x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{n+1} \tag{1.5}$$

Subtraindo as equações 1.5 e 1.4 obtemos :

$$q.S_n - S_n = x_{n+1} - x_1$$

Daí, sendo $q \neq 1$, temos que,

$$S_n = \frac{x_{n+1} - x_1}{q-1} \tag{1.6}$$

Reescrevendo, temos:

$$S_n = \frac{x_1.(q^n - 1)}{q-1}$$

Assim, segue que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (x_n) é dada pela seguinte fórmula:

$$S_n = x_1.\frac{q^n - 1}{q-1} \tag{1.7}$$

Denota-se por P_n o produto dos n primeiro termos de uma progressão geométrica $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ de razão q, isto é, $P_n = x_1.x_2.x_3.\cdots.x_n$. Desta forma temos:

$P_1 = x_1$

$P_2 = x_1.x_2 = x_1.x_1.q = x_1^2.q$

$P_3 = x_1.x_2.x_3 = x_1.x_1.q.x_1.q^2 = x_1^3.q^{(1+2)}$

$P_4 = x_1.x_2.x_3.x_4 = x_1.x_1.q.x_1.q^2.x_1.q^3 = x_1^4.q^{(1+2+3)}$

....

$P_n = x_1.x_2.x_3.\cdots.x_n = x_1.x_1.q.x_1.q^2.\cdots.x_1.q^{n-1} = x_1^n.q^{(1+2+3+\cdots+(n-1))} = x_1^n.q^{\frac{n.(n-1)}{2}}$

Assim concluímos que o produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é dada pela seguinte fórmula:

$$P_n = x_1^n.q^{\frac{n.(n-1)}{2}} \tag{1.8}$$

Com o intuito de relacionar uma progressão aritmética com uma progressão geométrica, considere a e b números reais positivos com $a \neq 1$ e b um número real positivo. Uma função $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = b.a^x$ é chamada tipo exponencial. A relação para qual falamos é mostrada em Lima (2013) em que uma função do tipo exponencial transforma uma progressão aritmética em uma progressão geométrica, como estabelecido no teorema abaixo.

Teorema 1. *Sejam $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n, \cdots)$ uma progressão aritmética de razão r e $f(x) = b.a^x$ uma função do tipo exponencial. Então a sequência $(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_{n-1}),$ $f(x_n), \cdots)$ é uma progressão geométrica de razão a^r.*

Demonstração: 3. *Como $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n, \cdots)$ é uma progressão aritmética de* *razão r, podemos reescreve-la como $(x_1, x_1+r, x_2+r, \cdots, x_{n-2}+r, x_{n-1}+r, \cdots)$, aplicando a função $f(x) = b.a^x$ na sequência temos como resultado:*

$$(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_{n-1}), f(x_n), \cdots)$$

Isto é,

$$(b.a^{x_1}, b.a^{x_2}, b.a^{x_3}, \cdots, b.a^{x_{n-1}}, b.a^{x_n}, \cdots)$$

Reescrevendo a sequência temos:

$$(b.a^{x_1}, b.a^{x_1+r}, b.a^{x_2+r}, \cdots, b.a^{x_{n-2}+r}, b.a^{x_{n-1}+r}, \cdots)$$

Separando as potências a^r temos,

$$(b.a^{x_1}, b.a^{x_1}.a^r, b.a^{x_2}.a^r, \cdots, b.a^{x_{n-2}}.a^r, b.a^{x_{n-1}}.a^r, \cdots)$$

De modo que:

$$\frac{b.a^{x_n+r}}{b.a^{x_{n-1}+r}} = a^{x_n - x_{n-1}} = a^r$$

Que é uma constante.

Considere b um número real positivo com $b \neq 1$. Uma função $f : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_b x$ é chamada *função logarítmica*. As funções logarítmicas relacionam progressões geométricas com aritméticas, como pode ser observado no teorema a seguir.

Teorema 2. *Se uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ de termos positivos é uma progressão geométrica de razão q, então $\log_b x_n$ é uma progressão aritmética de razão $\log_b q$.*

Demonstração: 4. *Como $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n, \cdots)$ é uma progressão geométrica de razão q, podemos reescreve-la como $(x_1, x_1.q, x_1.q^2, \cdots, x_1.q^{(n-2)}, x_1.q^{(n-1)}, \cdots)$, aplicando a função logarítmica $f(x) = \log_b^x$ na sequência temos como resultado:*

$$(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_{n-1}), f(x_n), \cdots)$$

Isto é,

$$(\log_b x_1, \log_b x_1.q, \log_b x_1.q^2, \cdots, \log_b x_1.q^{(n-2)}, \log_b x_1.q^{(n-1)}, \cdots)$$

Usando a propriedade de logaritmo $\log_b x.y = \log_b x + \log_b y$*, temos:*

$(\log_b x_1, \log_b x_1 + \log_b q, \log_b x_1 + \log_b q^2, \cdots, \log_b x_1 + \log_b q^{(n-2)}, \log_b x_1 + \log_b q^{(n-1)}, \cdots)$

Usando a propriedade de logaritmo $\log_b x^n = n.\log_b x$

$(\log_b x_1, \log_b x_1{+}\log_b q, \log_b x_1{+}2.\log_b q, \cdots, \log_b x_1{+}(n{-}2).\log_b q, \log_b x_1{+}(n{-}1).\log_b q, \cdots)$

Concluísse que:

$$(\log_b x_1 + (n-1).\log_b q) - (\log_b x_1 + n.\log_b q) = [n - (n-1)]\log_b q = \log_b q$$

Que é uma constante, portanto $\log_b x_n$ *é progressão aritmética de razão* $\log_b q$*.*

1.3 Números Binomiais

Nesta seção vamos recordar algumas propriedades dos números binomiais que serão úteis nas seções posteriores.

Definição 3. *Um número binomial é representado da forma* $\binom{m}{r}$ *e tem seu valor numérico dado pela seguinte expressão:*

$$\binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!}$$

para todo m,r $\in \mathbb{N}^*$ *e com* $r \leq m$*. Lembramos que* $n! = n.(n-1).(n-2).\cdots.2.1$ *e que é convencionalmente definido que* $1! = 1$ *e* $0! = 1$*.*

Exemplo 7. *O valor numérico de* $\binom{3}{1} = \dfrac{3!}{(3-1)!1!} = 3$.

Lema 1. *Sejam inteiros não negativos n e p. A soma binomial é dada por:*

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

Demonstração: 5. *Considerando a soma* S_n *da progressão geométrica*

$$(x(1+x)^n, x(1+x)^{n+1}, x(1+x)^{n+2}, \cdots, x(1+x)^{n+p})$$

de razão igual a $(1+x)$ e a fórmula (1.6), temos que:

$$x(1+x)^n + x(1+x)^{n+1} + \cdots + x(1+x)^{n+p} = \frac{x(1+x)^{n+p+1} - x(1+x)^n}{x}$$

$$= (1+x)^{n+p+1} - (1+x)^n$$

Assim,

$$x(1+x)^n + x(1+x)^{n+1} + \cdots + x(1+x)^{n+p} = (1+x)^{n+p+1} - (1+x)^n \tag{1.9}$$

Temos que encontrar o coeficiente do termo x^{n+1}, usando o Binômio de Newton, o termo x^{n+1} do lado direito da equação (1.9) temos:

$$(1+x)^{n+p+1} = \binom{n+p+1}{0}1 + \binom{n+p+1}{1}x + \cdots + \binom{n+p+1}{n+1}x^{n+1} + \cdots + \binom{n+p+1}{n+p+1}x^{n+p+1}$$

Agora quando olhamos para a soma da parte esquerda de (1.9) observando qua cada uma das p parcelas desta soma tem um termo x^{n+1}, daí temos que encontrar seus coeficientes.

O coeficiente de x^{n+1} na parcela $x(1+x)^n$ é $\binom{n}{n}$, da parcela $x(1+x)^{n+1}$ é $\binom{n+1}{n}$, da parcela $x(1+x)^{n+2}$ será $\binom{n+2}{n}$, e por fim, da parcela $x(1+x)^{n+p}$ será $\binom{n+p}{n}$. Assim, o coeficiente do termo x^{n+1} do lado esquerdo de (1.9) será:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n}$$

Daí concluímos que:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

.

Exemplo 8. *O valor da soma* $\left[\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \cdots + \binom{20}{3}\right]$ *é* $\binom{21}{4} = 5985$.

Observação 4. *Note que, pela (Definição 3) o valor do termo superior do binomial deve ser maior ou igual ao termo inferior, assim as parcelas do somatório $\sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{j}$ só irá contemplar os números em que o termo superior for maior ou igual ao inferior. Isto* *significa que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{j}=\sum_{i=j+1}^{n}\binom{i-1}{j}$.

Lema 2. *Dados inteiros não negativos n e i. A subtração dos números binomiais é dada por:*

$$\binom{n}{i}-\binom{n-1}{i}=\binom{n-1}{i-1}$$

Demonstração: 6. *Segue que:*

$$\binom{n}{i}-\binom{n-1}{i}=\left[\frac{n!}{i!(n-i)!}\right]-\left[\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}\right]$$

Reescrevendo temos,

$$\left[\frac{n(n-1)!}{i!(n-i)(n-1-i)!}\right]-\left[\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}\right]$$

Colocando em evidência os termos semelhante, temos:

$$\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}\left[\frac{n}{n-i}-1\right]=\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}\left[\frac{n-n+i}{n-i}\right]=\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}\left[\frac{i}{n-i}\right]$$

Assim,

$$\frac{(n-1)!.i}{i(i-1)!(n-i)(n-1-i)!}$$

Logo,

$$\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}$$

Portanto,

$$\frac{(n-1)!}{(i-1)!\left[(n-1)-(i-1)\right]!}=\binom{n-1}{i-1}$$

Exemplo 9. *O valor de* $\left[\binom{10}{4}-\binom{9}{4}\right]$ *é* $\binom{9}{3}=84$.

Capítulo 2

Progressões Aritméticas e Geométricas de segunda ordem

Nesse capítulo trataremos do conceito de progressões aritméticas e geométricas de segunda ordem, destacando algumas propriedades como soma, produto e a fórmula do n-ésimo termo. Além disso, mostraremos que uma função do tipo exponencial transforma progressão aritmética de segunda ordem em progressão geométrica de segunda ordem.

Este capítulo está baseado nas referências Nobre (2018), Lopes (2017).

2.1 Progressões Aritméticas de segunda ordem

Definição 4. *Dada uma sequência* $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ *denotaremos por* $\triangle$ *o operador diferença, definido por:*

$$\triangle x_n = x_{n+1} - x_n \tag{2.1}$$

Assim, segue da definição de progressão aritmética que uma sequência x_n *é uma progressão aritmética se, e somente se,* $\triangle x_n$ *é constante.*

Definição 5. *Uma sequência numérica* $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ *é uma Progressão Aritmética de segunda ordem, quando a sequência de diferenças* $(\triangle x_1, \triangle x_2, \cdots, \triangle x_n, \cdots)$*, for uma progressão aritmética.*

Exemplo 10. *A sequência (1, 3, 7, 13, 21,* $\cdots$*) é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois a sequência de diferenças (2, 4, 6, 8, 10,* $\cdots$*) é uma progressão aritmética de razão igual a 2.*

Para deduzir a fórmula do n-ésimo termo de uma progressão aritmética de segunda ordem, consideramos que a sequência $(\triangle x_1, \triangle x_2, \triangle x_3, \cdots, \triangle x_n, \cdots)$ seja uma progressão aritmética de razão r. Pela fórmula 1.2, segue que a soma dos (n - 1) primeiros termos de uma progressão aritmética $(\triangle x_1, \triangle x_2, \triangle x_3, \cdots, \triangle x_n, \cdots)$ é:

$$(\triangle x_1) + (\triangle x_2) + (\triangle x_3) + \cdots + (\triangle x_{n-1}) = (n-1) \triangle x_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} r \tag{2.2}$$

Agora, note que:

$$(\triangle x_1)+(\triangle x_2)+(\triangle x_3)+\cdots+(\triangle x_{n-1}) = (x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_4-x_3)+\cdots+(x_n-x_{n-1})$$

Veja que o primeiro termo de cada parenteses se cancela com o segundo termo do parenteses posterior. assim,

$$(\triangle x_1) + (\triangle x_2) + (\triangle x_3) + \cdots + (\triangle x_{n-1}) = x_n - x_1 \tag{2.3}$$

Daí, igualando as equações 2.2 e 2.3, temos:

$$x_n - x_1 = (n-1)(\triangle x_1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} r$$

Assim, o termo geral do n-ésimo termo de uma progressão aritmética de segunda ordem é:

$$x_n = x_1 + (n-1)(\triangle x_1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} r \tag{2.4}$$

A expressão 2.4 pode ser escrita sob a forma binomial da seguinte maneira:

$$x_n = \binom{n-1}{0} x_1 + \binom{n-1}{1} (\triangle x_1) + \binom{n-1}{2} r$$

Pois, $1 = \binom{n-1}{0}, (n-1) = \binom{n-1}{1}$ e $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}$.
Aplicando somatório em ambos os lados, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{0} x_1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{1} (\triangle x_1) + \sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{2} r$$

Logo pela Observação 4, temos mais especificamente que:

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{1}=\sum_{i=2}^{n}\binom{i-1}{1} e \sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{2}=\sum_{i=3}^{n}\binom{i-1}{2}$$

Daí:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{0}x_1+\sum_{i=2}^{n}\binom{i-1}{1}(\triangle x_1)+\sum_{i=3}^{n}\binom{i-1}{2}r$$

Assim, pelo Lema 1, temos:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\binom{n}{1}x_1+\binom{n}{2}(\triangle x_1)+\binom{n}{3}r$$

Logo a soma dos n-primeiros termos de uma progressão aritmética de segunda ordem é obtida pela fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n.x_1+\frac{n.(n-1)}{2}(\triangle x_1)+\frac{n.(n-1).(n-2)}{6}r \tag{2.5}$$

Definiremos o operador diferença de ordem k, com $k>1$ recursivamente por

$$\triangle^2 x_n=\triangle(\triangle x_n)=(\triangle x_{n+1})-(\triangle x_n)$$

$$\triangle^3 x_n=\triangle(\triangle^2 x_n)=(\triangle^2 x_{n+1})-(\triangle^2 x_n)$$

e

$$\triangle^k x_n=\triangle(\triangle^{k-1} x_n)=(\triangle^{k-1} x_{n+1})-(\triangle^{k-1} x_n)$$

Pela fórmula 2.4 vemos que o n-ésimo termo de uma progressão aritmética de segunda ordem é um polinômio de grau 2 em n. O próximo teorema conta que a recíproca também é verdadeira. Se x_n é polinômio do segundo grau em n, então a sequência $(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Teorema 3. *x_n é uma progressão aritmética de segunda ordem se, e somente se, $x_n = an^2+bn+c$.*

Demonstração: 7. *($\Rightarrow$) Como x_n é uma progressão aritmética de segunda ordem, logo pela Equação 2.4, temos:*

$$x_n=x_1+(n-1)(\triangle x_1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}r$$

Resolvendo as multiplicações obtemos:

$$x_n = x_1 + n(\triangle x_1) - (\triangle x_1) + \frac{rn^2}{2} - \frac{3rn}{2} + r$$

Reescrevendo, temos:

$$x_n = (\frac{r}{2})n^2 + ((\triangle x_1) - \frac{3r}{2})n + (x_1 - (\triangle x_1) + r)$$

Logo x_n é um polinômio de grau 2 na variável n.

($\Leftarrow$) Calculando $\triangle x_n$ temos,

$$\triangle x_n = x_{n+1} - x_n = [a(n+1)^2 + b(n+1) + c] - [an^2 + bn + c]$$

Daí,

$$\triangle x_n = 2an + a + b$$

Calculando $\triangle^2 x_n$,

$$\triangle^2 x_n = \triangle x_{n+1} - \triangle x_n = [2a(n+1) + a + b] - [2an + a + b]$$

Assim,

$$\triangle^2 x_n = 2a$$

Que é uma constante, logo x_n é uma progressão aritmética de segunda ordem.

2.2 Progressões Geométricas de segunda ordem

Definição 6. *Seja $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ uma sequência, denotamos por $\bigtriangledown$ o operador quociente, definido por:*

$$\bigtriangledown x_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \tag{2.6}$$

Assim segue da definição de progressão geométrica que uma sequência x_n é uma progressão geométrica se, e somente se, $\bigtriangledown x_n$ é constante.

Observação 5. *Para utilização do operador quociente a sequências necessita que nenhum de seus termos seja 0, pois assim geraríamos uma indefinição.*

Definição 7. *Uma sequência numérica* $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ *é uma Progressão Geométrica de segunda ordem, quando a sequência de quocientes* $(\bigtriangledown x_1, \bigtriangledown x_2, \cdots, \bigtriangledown x_n, \cdots)$, *com* $\bigtriangledown x_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, *for uma progressão geométrica.*

Exemplo 11. *A sequência (1, 3, 18, 216, 5184, $\cdots$) é uma progressão geométrica de segunda ordem, pois a sequências de quocientes (3, 6, 12, 24, $\cdots$) é uma progressão geométrica de razão igual a 2.*

Afim de formular uma expressão para o termo geral de uma progressão geométrica de segunda ordem $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ observamos que a sequência de quocientes $(\bigtriangledown x_1, \bigtriangledown x_2, \bigtriangledown x_3, \cdots, \bigtriangledown x_n, \cdots)$ é uma progressão geométrica, digamos de razão q, usando a fórmula (1.8) segue que:

$$\prod_{i=1}^{n-1} \bigtriangledown x_i = (\bigtriangledown x_1).(\bigtriangledown x_2).(\bigtriangledown x_3).\cdots.(\bigtriangledown x_{(n-1)}) = (\bigtriangledown x_1)^{(n-1)}.q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

Agora, note que:

$$(\bigtriangledown x_1).(\bigtriangledown x_2).(\bigtriangledown x_3).\cdots.(\bigtriangledown x_{(n-1)}) = \frac{x_2}{x_1}.\frac{x_3}{x_2}.\cdots.\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_n}{x_1}$$

Assim,

$$\frac{x_n}{x_1} = (\bigtriangledown x_1)^{(n-1)}.q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

Logo a fórmula do n-ésimo termo de uma progressão geométrica de segunda ordem é dada por:

$$x_n = x_1.(\bigtriangledown x_1)^{(n-1)}.q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \tag{2.7}$$

Para obtermos a fórmula do produto dos n-primeiros termos de uma progressão geométrica de segunda ordem é conveniente reescrevermos a Equação 2.7 em notação binomial.

$$x_n = x_1^{\binom{n-1}{0}}.(\bigtriangledown x_1)^{\binom{n-1}{1}}.q^{\binom{n-1}{2}}$$

Daí fazendo o produto dos n primeiros termos, temos:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1^{\sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{0}}.(\bigtriangledown x_1)^{\sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{1}}.q^{\sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{2}}$$

Pela Observação 4, temos:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1^{\sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{0}} . (\triangledown x_1)^{\sum_{i=2}^{n}\binom{i-1}{1}} . q^{\sum_{i=3}^{n}\binom{i-1}{2}}$$

Pelo Lema 1, tem-se:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1^{\binom{n}{1}} . (\triangledown x_1)^{\binom{n}{2}} . q^{\binom{n}{3}}$$

Assim,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1^{n} . (\triangledown x_1)^{\frac{n(n-1)}{2}} . q^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \tag{2.8}$$

Teorema 4. *Se uma sequência* $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ *de termos positivos é tal que* $\log_b x_n$ *é uma progressão aritmética, então* x_n *é uma progressão geométrica.*

Demonstração: 8. *Como* $(\log_b x_1, \log_b x_2, \cdots, \log_b x_n, \cdots)$ *é uma progressão aritmética, então:*

$$\log_b x_n = x_1 + (n-1)r$$

Aplicando a função do tipo exponencial $f(x) = d.b^x$*, com* d *e* $b \in \mathbb{R}$ *e* $b \geq 1$*, em ambos os lados, temos:*

$$d.x_n = d.b^{x_1+(n-1)r}$$

Daí,

$$x_n = b^{x_1+(n-1)r}$$

Calculando $\triangledown x_n$*, temos:*

$$\triangledown x_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{b^{x_1+nr}}{b^{x_1+(n-1)r}} = b^r$$

que é uma constante, logo pela Definição 6, $\log_b x_n$ *é uma progressão geométrica.*

Teorema 5. *Sejam* $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ *uma progressão aritmética de segunda ordem e* $f(x) = b.a^x$ *uma função do tipo exponencial. Então a sequência* $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots,$ $f(x_n), \cdots)$ *é uma progressão geométrica de segunda ordem.*

Demonstração: 9. *Como* x_n *é uma progressão aritmética de segunda ordem, segue de (2.4) que :*

$$x_n = x_1 + (n-1)(\triangle x_1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} r$$

Assim,

$$(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots) = (b.a^{x_1}, b.a^{x_1+\triangle x_1}, \cdots, b.a^{x_1+(n-1)\triangle x_1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}r})$$

Considerando a sequência de quocientes,

$$(\triangledown f(x_1), \triangledown f(x_2), \triangledown f(x_3), \cdots, \triangledown f(x_n), \cdots) = (\frac{f(x_2)}{f(x_1)}, \frac{f(x_3)}{f(x_2)}, \frac{f(x_4)}{f(x_3)}, \cdots, \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})}, \cdots)$$

$$= (a^{\triangle x_1}, a^{\triangle x_1 + r}, a^{\triangle x_1 + 2r}, \cdots, a^{\triangle x_1 + (n-1)r}, \cdots)$$

Que é uma progressão geométrica de razão a^r. Logo pela Definição 7, $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_n), \cdots)$ é uma progressão geométrica de segunda ordem.

Definiremos o operador quociente de ordem k, com $k > 1$ recursivamente por

$$\triangledown^2 x_n = \triangledown(\triangledown x_n) = \frac{\triangledown x_{n+1}}{\triangledown x_n}$$

$$\triangledown^3 x_n = \triangledown(\triangledown^2 x_n) = \frac{\triangledown^2 x_{n+1}}{\triangledown^2 x_n}$$

e

$$\triangledown^k x_n = \triangledown(\triangledown^{k-1} x_n) = \frac{\triangledown^{k-1} x_{n+1}}{\triangledown^{k-1} x_n}$$

Teorema 6. *Uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ de termos positivos é uma progressão geométrica de segunda ordem se, e somente se, $\log_b^{x_n}$ é uma progressão aritmética de segunda ordem.*

Demonstração: 10. *($\Rightarrow$) Como x_n uma progressão geométrica de segunda ordem, logo pela Equação 2.4, temos:*

$$x_n = x_1.(\triangledown x_1)^{(n-1)}.r^{\frac{(n-1).(n-2)}{2}}$$

Aplicando a função logarítmica $f(x) = \log_b x$, em ambos os lados temos:

$$\log_b x_n = \log_b x_1.(\triangledown x_1)^{(n-1)}.r^{\frac{(n-1).(n-2)}{2}}$$

Usando a propriedade de logaritmo $\log_b x.y = \log_b x + \log_b y$, temos:

$$\log_b x_n = \log_b x_1 + \log_b (\triangledown x_1)^{(n-1)} + \log_b r^{\frac{(n-1).(n-2)}{2}}$$

Usando a propriedade de logaritmo $\log_b x^n = n.\log_b x$

$$\log_b x_n = \log_b x_1 + (n-1).\log_b(\bigtriangledown x_1) + \frac{(n-1).(n-2)}{2}.\log_b r$$

Resolvendo os produtos, tem-se:

$$\log_b x_n = \log_b x_1 + n.\log_b(\bigtriangledown x_1) - \log_b(\bigtriangledown x_1) + n^2.\frac{\log_b r}{2} + n.\frac{-3\log_b r}{2} + \log_b r$$

Reescrevendo:

$$\log_b x_n = [\frac{\log_b r}{2}].n^2 + [\log_b(\bigtriangledown x_1) + \frac{-3\log_b r}{2}].n + [-\log_b(\bigtriangledown x_1) + \log_b r + \log_b x_1]$$

Logo $\log_b x_n$ *é um polinômio de grau 2 na variável* n*. Portanto pelo Teorema 3,* $\log_b x_n$ *é uma progressão aritmética de segunda ordem.*

(⇐) Demonstração realizada no teorema anterior.

Capítulo 3

Progressões Aritméticas e Geométricas de terceira ordem

Nesse capítulo trataremos o conceito de progressões aritméticas e geométricas de terceira ordem. De forma análoga ao que foi feita no capítulo anterior, mostraremos que a função do tipo exponencial transforma progressão aritmética de terceira ordem em progressão geométrica de terceira ordem. Reciprocamente, função logarítmica transforma progressão geométrica de terceira ordem, de termos positivos, em progressão aritmética de terceira ordem.

3.1 Progressões Aritméticas de terceira ordem

Definição 8. *Uma sequência numérica* $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ *é uma Progressão Aritmética de terceira ordem, quando a sequência de diferenças* $(\triangle x_1, \triangle x_2, \cdots, \triangle x_n, \cdots)$*, com* $\triangle x_n = x_{n+1} - x_n$*, for uma progressão aritmética de segunda ordem.*

Exemplo 12. *A sequência (4, 5, 8, 15, 28, 49,* $\cdots$*) é uma progressão aritmética de terceira ordem, pois a sequências de diferenças (1, 3, 7, 13, 21,* $\cdots$*) é uma progressão aritmética de segunda ordem.*

Para deduzir a fórmula do n-ésimo termo de uma progressão aritmética de terceira ordem, notemos primeiramente que a sequência de diferenças $(\triangle x_1, \triangle x_2, \cdots, \triangle x_n, \cdots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, e a sequência $(\triangle^2 x_1, \triangle^2 x_2, \cdots, \triangle^2 x_n, \cdots)$ é uma progressão aritmética de razão r. Como $(\triangle x_1, \triangle x_2, \cdots, \triangle x_n, \cdots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, então segue da Equação 2.4 que:

$$\triangle x_n = (\triangle x_1) + (n-1)(\triangle^2 x_1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} r$$

Além disso, pela Fórmula 2.5, a soma dos (n - 1) primeiros termos de uma progressão aritmética de segunda ordem $(\triangle x_1, \triangle x_2, \cdots, \triangle x_n, \cdots)$ é

$$\sum_{i=1}^{n-1} \triangle x_i = (n-1).(\triangle x_1) + \frac{(n-1).(n-2)}{2}(\triangle^2 x_1) + \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{6} r$$

Por outro lado,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \triangle x_i = (\triangle x_1)+(\triangle x_2)+\cdots+(\triangle x_{n-1}) = (x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1}) = x_n-x_1$$

Daí,

$$x_n - x_1 = (n-1).(\triangle x_1) + \frac{(n-1).(n-2)}{2}(\triangle^2 x_1) + \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{6} r$$

Assim, o n-ésimo termo de uma progressão aritmética de terceira ordem é:

$$x_n = x_1 + (n-1).(\triangle x_1) + \frac{(n-1).(n-2)}{2}(\triangle^2 x_1) + \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{6} r \tag{3.1}$$

Usando a notação binomial podemos reescrever a Equação 3.1 como:

$$x_n = \binom{n-1}{0} x_1 + \binom{n-1}{1}(\triangle x_1) + \binom{n-1}{2}(\triangle^2 x_1) + \binom{n-1}{3} r$$

Somando os n primeiros termos da progressão arimética de terceira ordem, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} x_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{0} x_1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{1}(\triangle x_1) + \sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{2}(\triangle^2 x_1) + \sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{3} r$$

Pela Observação 4, temos que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{0} x_1 + \sum_{i=2}^{n} \binom{i-1}{1}(\triangle x_1) + \sum_{i=3}^{n} \binom{i-1}{2}(\triangle^2 x_1) + \sum_{i=4}^{n} \binom{i-1}{3} r$$

Daí, levando em consideração o Lema 1 ,temos:

$$\sum_{i=1}^{n} x_n = \binom{n}{1}x_1 + \binom{n}{2}(\triangle x_1) + \binom{n}{3}(\triangle^2 x_1) + \binom{n}{4}r$$

Assim, a soma dos n primeiros termos de uma progressão arimética de terceira ordem é dada pela seguinte fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = nx_1 + \frac{n(n-1)}{2}(\triangle x_1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}(\triangle^2 x_1) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}r \quad (3.2)$$

Teorema 7. *x_n é uma progressão aritmética de terceira ordem se, e somente se, $x_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.*

Demonstração: 11. *($\Rightarrow$) Como x_n é uma progressão aritmética de terceira ordem, logo pela Equação 3.1, temos:*

$$x_n = x_1 + (n-1).(\triangle x_1) + \frac{(n-1).(n-2)}{2}(\triangle^2 x_1) + \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{6}r$$

Resolvendo os produtos, temos:

$$x_n = x_1 + n(\triangle x_1) - (\triangle x_1) + (\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1)(\triangle^2 x_1) + (\frac{n^3}{6} - n^2 + \frac{5n}{3} - \frac{1}{2})r$$

Reescrevendo obtemos:

$$x_n = (\frac{r}{6}).n^3 + (\frac{(\triangle^2 x_1)}{2} - r).n^2 + ((\triangle x_1) - \frac{3(\triangle^2 x_1)}{2} + \frac{5r}{3}).n + ((\triangle^2 x_1) + x_1 - (\triangle x_1) - \frac{r}{2})$$

Assim concluímos que x_n é um polinômio de grau 3 na variável n.

($\Leftarrow$) Calculando $\triangle x_n$ temos,

$$\triangle x_n = x_{n+1} - x_n = [a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + cn + d] - [an^3 + bn^2 + cn + d]$$

$$\triangle x_n = 3an^2 + 3an + a + 2bn + b$$

Calculando $\triangle^2 x_n$,

$$\triangle^2 x_n = \triangle x_{n+1} - \triangle x_n = [3a(n+1)^2 + 3a(n+1) + a + 2b(n+1) + b] - [3an^2 + 3an + a + 2bn + b]$$

$$\triangle^2 x_n = 6an + 6a + 2b$$

Calculando $\triangle^3 x_n$,

$$\triangle^3 x_n = \triangle^2 x_{n+1} - \triangle^2 x_n = [6a(n+1) + 6a + 2b] - [6an + 6a + 2b] = 6a$$

Que é uma constante, logo x_n *é uma progressão de terceira ordem.*

3.2 Progressões Geométricas de terceira ordem

Definição 9. *Uma sequência numérica* $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ *é uma Progressão Geométrica de terceira ordem, quando a sequência de quocientes* $(\triangledown x_1, \triangledown x_2, \cdots, \triangledown x_n, \cdots)$, *com* $\triangledown x_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, *for uma progressão geométrica de segunda ordem.*

Exemplo 13. *A sequência (1, 3, 54, 11664, 60466176, $\cdots$) é uma progressão geométrica de terceira ordem, pois a sequências de quocientes (3, 18, 216, 5184, $\cdots$) é uma progressão geométrica de segunda ordem.*

De forma análoga a que fizemos no caso da segunda ordem, vamos determinar a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica de terceira ordem, $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ cuja sequência de quocientes $(\triangledown x_1, \triangledown x_2, \triangledown x_3, \cdots, \triangledown x_n, \cdots)$, é uma progressão geométrica de segunda ordem e $(\triangledown^2 x_1, \triangledown^2 x_2, \triangledown^2 x_3, \cdots, \triangledown^2 x_n, \cdots)$ é uma progressão geométrica de razão q. Pela fórmula do produto de uma progressão geométrica de segunda ordem estabelecido na Equação 2.8, segue que:

$$\prod_{i=1}^{n} \triangledown x_i = (\triangledown x_1)^n . (\triangledown^2 x_1)^{\frac{n(n-1)}{2}} . q^{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}$$

Por outro lado,

$$\prod_{i=1}^{n-1} \triangledown x_i = (\triangledown x_1).(\triangledown x_2).(\triangledown x_3). \cdots .(\triangledown x_{(n-1)}) = \frac{x_2}{x_1}.\frac{x_3}{x_2}. \cdots .\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_n}{x_1}$$

Assim,

$$\frac{x_n}{x_1} = (\triangledown x_1)^{(n-1)} . (\triangledown^2 x_1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} . q^{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}}$$

Logo a fórmula do n-ésimo termo de uma progressão geométrica de terceira ordem é:

$$x_n = x_1.(\bigtriangledown x_1)^{(n-1)}.(\bigtriangledown^2 x_1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}.q^{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}} \tag{3.3}$$

Afim de obter uma fórmula para o produto dos n primeiros termos da progressão geométrica de terceira ordem, reescreveremos a Equação 3.3 em forma binomial, assim temos que:

$$x_n = x_1^{\binom{n-1}{0}} + (\bigtriangledown x_1)^{\binom{n-1}{1}}.(\bigtriangledown^2 x_1)^{\binom{n-1}{2}}.q^{\binom{n-1}{3}}$$

Aplicando o produto, temos:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1^{\sum\limits_{i=1}^{n}\binom{n-1}{0}} + (\bigtriangledown x_1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}\binom{n-1}{1}}.(\bigtriangledown^2 x_1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}\binom{n-1}{2}}.q^{\sum\limits_{i=1}^{n}\binom{n-1}{3}}$$

Pela Observação 4, temos:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1^{\sum\limits_{i=1}^{n}\binom{n-1}{0}} + (\bigtriangledown x_1)^{\sum\limits_{i=2}^{n}\binom{n-1}{1}}.(\bigtriangledown^2 x_1)^{\sum\limits_{i=3}^{n}\binom{n-1}{2}}.q^{\sum\limits_{i=4}^{n}\binom{n-1}{3}}$$

Considerando o Lema 1 e resolvendo os somatórios obtemos:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1^{\binom{n}{1}} + (\bigtriangledown x_1)^{\binom{n}{2}}.(\bigtriangledown^2 x_1)^{\binom{n}{3}}.q^{\binom{n}{4}}$$

Assim, o produto dos n primeiros termos da progressão geométrica de terceira ordem é dado pela seguinte fórmula:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1^n.(\triangle x_1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.(\triangle^2 x_1)^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}.q^{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}} \tag{3.4}$$

Teorema 8. *Sejam* $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ *uma progressão aritmética de terceira ordem e* $f(x) = b.a^x$ *uma função do tipo exponencial. Então a sequência* $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots,$ $f(x_n), \cdots)$ *é uma progressão geométrica de terceira ordem.*

Demonstração: 12. *Como* x_n *é uma progressão aritmética de terceira ordem, segue da*

Equação 2.4 que :

$$x_n = x_1 + (n-1).(\triangle x_1) + \frac{(n-1).(n-2)}{2}(\triangle^2 x_1) + \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{6}r$$

Assim,

$(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_n), \cdots) = (b.a^{x_1}, b.a^{x_1+(\triangle x_1)}, b.a^{x_1+2(\triangle x_1)+(\triangle^2 x_1)}, \cdots,$
$b.a^{x_1+(n-1).(\triangle x_1)+\frac{(n-1).(n-2)}{2}(\triangle^2 x_1)+\frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{6}r})$

Por outro lado,

$$(\triangledown f(x_1), \triangledown f(x_2), \cdots, \triangledown f(x_n), \cdots) = (\frac{f(x_2)}{f(x_1)}, \frac{f(x_3)}{f(x_2)}, \frac{f(x_4)}{f(x_4)}, \cdots, \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}, \cdots) =$$

$$= (a^{(\triangle x_1)}, a^{(\triangle^2 x_1)+(\triangle x_1)}, a^{(\triangle^2 x_1)+(\triangle x_1)+r}, \cdots, a^{(\triangle x_1)+(n-1)(\triangle^2 x_1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}r}, \cdots)$$

Calculando a sequência $(\triangledown^2 f(x_n))$, temos:
$(\triangledown^2 f(x_1), \triangledown^2 f(x_2), \cdots, \triangledown^2 f(x_n), \cdots) = (a^{(\triangle^2 x_1)}, a^{(\triangle^2 x_1)+r}, a^{(\triangle^2 x_1)+2r}, \cdots, a^{(\triangle^2 x_1)+(n-1)r},$
$\cdots)$

Que é uma progressão geométrica de razão a^r. Logo pela Definição 9 $(f(x_1),$ $f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_n), \cdots)$ é uma progressão geométrica de terceira ordem.

Teorema 9. *Uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ de termos positivos é uma progressão geométrica de terceira ordem se, e somente se, $\log_b x_n$ é uma progressão aritmética de terceira ordem.*

Demonstração: 13. *($\Rightarrow$) Como x_n uma progressão geométrica de terceira ordem, logo pela Equação 3.3, temos:*

$$x_n = x_1.(\triangledown x_1)^{(n-1)}.(\triangledown^2 x_1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}.q^{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}}$$

Aplicando a função logarítmica $f(x) = \log_b x$, em ambos os lados temos:

$$\log_b x_n = \log_b x_1.(\triangledown x_1)^{(n-1)}.(\triangledown^2 x_1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}.q^{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}}$$

Usando a propriedade de logaritmo $\log_b x.y = \log_b x + \log_b y$, temos:

$$\log_b x_n = \log_b x_1 + \log_b (\triangledown x_1)^{(n-1)} + \log_b (\triangledown^2 x_1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} + \log_b q^{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}}$$

Usando a propriedade de logaritmo $\log_b x^n = n.\log_b x$

$$\log_b x_n = \log_b x_1 + (n-1).\log_b(\bigtriangledown x_1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}.\log_b(\bigtriangledown^2 x_1) + \\ + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}.\log_b q$$

Resolvendo as multiplicações, temos:

$$\log_b x_n = \log_b x_1 + n.\log_b(\bigtriangledown x_1) - \log_b(\bigtriangledown x_1) + \frac{n^2}{2}.\log_b(\bigtriangledown^2 x_1) - \frac{3n}{2}.\log_b(\bigtriangledown^2 x_1) + \\ + \log_b(\bigtriangledown^2 x_1) + \frac{n^3}{6}.\log_b q - n^2.\log_b q + \frac{5n}{3}.\log_b q - \frac{1}{2}.\log_b q$$

Reescrevendo temos:

$$\log_b x_n = (\frac{\log_b q}{6}).n^3 + (\frac{1}{2}.\log_b(\bigtriangledown^2 x_1) - \log_b q).n^2 + (\log_b(\bigtriangledown x_1) + \frac{5}{3}.\log_b q - \\ - \frac{3}{2}.\log_b(\bigtriangledown^2 x_1)).n + (\log_b x_1 - \log_b(\bigtriangledown x_1) + \log_b(\bigtriangledown^2 x_1) - \frac{1}{2}.\log_b q)$$

Logo $\log_b x_n$ *é um polinômio de grau 3 na variável* n*. Portanto pelo Teorema 7,* $\log_b x_n$ *é uma progressão aritmética de terceira ordem.*

($\Leftarrow$*) Seja* y_n *uma progressão aritmética de terceira ordem, logo pelo Teorema 7:*

$$y_n = a_1 n^3 + a_2 n^2 + a_3 n + a_4, \text{ com } a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$$

E seja x_n *tal que,*

$$\log_b x_n = y_n$$

Aplicando a função do tipo exponencial $f(x) = d.b^x$*, com* d *e* $b \in \mathbb{R}$ *e* $b \geq 1$*, em ambos os lados, temos:*

$$d.x_n = d.b^{y_n}$$

Assim,

$$x_n = b^{y_n}$$

Daí,

$$x_n = b^{a_1 n^3 + a_2 n^2 + a_3 n + a_4}$$

E,

$$x_{n+1} = b^{a_1(n+1)^3+a_2(n+1)^2+a_3(n+1)+a_4}$$

Calculando $\bigtriangledown x_n$, *temos:*

$$\bigtriangledown x_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{b^{a_1(n+1)^3+a_2(n+1)^2+a_3(n+1)+a_4}}{b^{a_1n^3+a_2n^2+a_3n+a_4}} = b^{3a_1n^2+3a_1n+a_1+2a_2n+a_2+a_3}$$

Calculando $\bigtriangledown^2 x_n$, *temos:*

$$\bigtriangledown^2 x_n = \frac{\bigtriangledown x_{n+1}}{\bigtriangledown x_n} = \frac{b^{3a_1(n+1)^2+3a_1(n+1)+a_1+2a_2(n+1)+a_2+a_3}}{b^{3a_1n^2+3a_1n+a_1+2a_2n+a_2+a_3}} = b^{6a_1n+6a_1+2a_2}$$

Calculando $\bigtriangledown^3 x_n$, *temos:*

$$\bigtriangledown^3 x_n = \frac{\bigtriangledown^2 x_{n+1}}{\bigtriangledown^2 x_n} = \frac{b^{6a_1(n+1)+6a_1+2a_2}}{b^{6a_1n+6a_1+2a_2}} = b^{6a_1}$$

Que é uma constante, logo x_n *é uma progressão geométrica de terceira ordem com razão* b^{6a_1}.

Capítulo 4

Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem superior

Este capítulo será dedicado ao estudo de progressão aritmética e geométrica de ordem $k > 1$, como foi feito nos capítulos anteriores, mostraremos que funções do tipo exponencial transforma progressões aritméticas de ordem k em progressões geométricas de ordem k. Mutuamente, função logarítmica transforma progressão geométrica de ordem k, de termos positivos, em progressão aritmética de ordem k.

4.1 Progressões Aritméticas de ordem k

Definição 10. *Uma sequência numérica $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ é uma Progressão Aritmética de ordem k, com $k \in \mathbb{N}$ e $k > 1$, quando a sequência de diferenças $(\triangle x_1, \triangle x_2, \cdots, \triangle x_n, \cdots)$, com $\triangle x_n = x_{n+1} - x_n$, for uma progressão aritmética de ordem (k - 1).*

Teorema 10. *Seja $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ é uma Progressão Arimética de ordem $k > 1$. então o n-ésimo termo, isto é, o x_n é determinado pela seguinte fórmula:*

$$x_n = \binom{n-1}{0}x_1 + \binom{n-1}{1}(\triangle x_1) + \cdots + \binom{n-1}{k-1}(\triangle^{k-1}x_1) + \binom{n-1}{k}r \tag{4.1}$$

Sendo r a razão da progressão aritmética de primeira ordem calculada a partir de x_n.

Demonstração: 14. *A demonstração será feita através de indução matemática.*

i) Se k = 2, então:

$$x_n = \binom{n-1}{0}x_1 + \binom{n-1}{1}(\triangle x_1) + \binom{n-1}{2}r$$

Que é a fórmula do n-ésimo termo de uma progressão aritmética de segunda ordem, conforme Equação 2.4.

ii) Suponhamos por hipótese que a fórmula seja válida para a ordem (k -1). Assim, sendo $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ *uma Progressão Aritmética de ordem k , segue que a sequência de diferenças* $(\triangle x_1, \triangle x_2, \cdots, \triangle x_n, \cdots)$ *é uma progressão aritmética de ordem (k - 1). Logo, pela hipótese de indução temos que:*

$$\triangle x_n = \binom{n-1}{0}(\triangle x_1) + \binom{n-1}{1}(\triangle^2 x_1) + \cdots + \binom{n-1}{k-2}(\triangle^{k-1}x_1) + \binom{n-1}{k-1}r$$

Note que [$\triangle^{k-1}x_1$*] é a (k - 1)-ésima diferença de termos em relação a sequência* x_n*, mas em relação a sequência* $\triangle x_n$ *ele é a (k - 2)-ésima diferença.*

Fazendo o somatório dos (n- 1) primeiros termos da sequência $\triangle x_n$*, temos:*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \triangle x_i = (\triangle x_1) + (\triangle x_2) + \cdots + (\triangle x_{n-1}) = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_1$$

Por outro lado,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \triangle x_i = \sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{0}(\triangle x_1) + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{1}(\triangle^2 x_1) + \cdots + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{k-2}(\triangle^{k-1}x_1) + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{k-1}r$$

Assim, levando em consideração o Lema 1 e a Observação 4, temos:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \triangle x_i = \binom{n-1}{1}(\triangle x_1) + \binom{n-1}{2}(\triangle^2 x_1) + \cdots + \binom{n-1}{k-1}(\triangle^{k-1}x_1) + \binom{n-1}{k}r$$

Logo,

$$x_n - x_1 = \binom{n-1}{1}(\triangle x_1) + \binom{n-1}{2}(\triangle^2 x_1) + \cdots + \binom{n-1}{k-1}(\triangle^{k-1}x_1) + \binom{n-1}{k}r$$

Note que $x_1 = \binom{n-1}{0}x_1$*, logo reescrevendo a equação anterior, temos:*

$$x_n = \binom{n-1}{0}x_1 + \binom{n-1}{1}(\triangle x_1) + \binom{n-1}{2}(\triangle^2 x_1) + \cdots + \binom{n-1}{k-1}(\triangle^{k-1}x_1) + \\ + \binom{n-1}{k}r$$

Como queríamos demonstrar.

Por meio da Equação 4.1, podemos obter a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de ordem k. Pois,

$$x_n = \binom{n-1}{0}x_1 + \binom{n-1}{1}(\triangle x_1) + \binom{n-1}{2}(\triangle^2 x_1) + \cdots + \binom{n-1}{k-1}(\triangle^{k-1}x_1) + \\ + \binom{n-1}{k}r$$

Daí, aplicando somatório em ambos os lados, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{0}x_1 + \sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{1}(\triangle x_1) + \sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{2}(\triangle^2 x_1) + \cdots + \\ + \sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{k-1}(\triangle^{k-1}x_1) + \sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{k}r$$

Assim, levando em consideração o Lema 1 e a Observação 4, temos que a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de ordem k é dada pela seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \binom{n}{1}x_1 + \binom{n}{2}(\triangle x_1) + \binom{n}{3}(\triangle^2 x_1) + \cdots + \binom{n}{k}(\triangle^{k-1}x_1) + \binom{n}{k+1}r \quad (4.2)$$

Lema 3. *Se (x_n) é uma progressão aritmética de ordem k e cujo termo de ordem n é $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, então S_n é uma progressão aritmética de ordem (k + 1).*

Demonstração: 15. *Como $S_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}$, logo:*

$$\triangle S_n = S_{n+1} - S_n = [x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}] - [x_1 + x_2 + \cdots + x_n] = x_{n+1}$$

que por hipótese é uma progressão aritmética de ordem k, portanto pela Definição 10, S_n

é uma progressão aritmética de ordem (k + 1).

Lema 4. *Seja $p(n) = n^t$ um polinômio de grau t, então $\sum_{n=1}^{x} n^t$ é polinômio de grau (t + 1).*

Demonstração: 16. *Provaremos por indução matemática.*

i) Para t = 1, temos:

$\sum_{n=1}^{x} n = 1 + 2 + \cdots + x$, *que é a soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 1, que pelo Lema 3 é um polinômio de grau 2.*

ii) Suponhamos que essa afirmação seja verdadeira para todo $t \in \{1, 2, \cdots, k\}$ provaremos para (k + 1), observe que:

$(n+1)^{k+1} = \binom{k+1}{0} n^{k+1} + \binom{k+1}{1} n^k + f(n)$, *onde $f(n)$ é um polinômio de grau (k - 1) em n. Aplicando somatório em ambos os lados, temos:*

$$\sum_{n=1}^{x} (n+1)^{k+1} = \sum_{n=1}^{x} n^{k+1} + (k+1) \sum_{n=1}^{x} n^k + F(n)$$

Note que pela hipótese de indução $F(n)$ é um polinômio de grau k. Daí,

$$\left[2^{k+1} + 3^{k+1} + \cdots + x^{k+1} + (x+1)^{k+1}\right] = \left[1^{k+1} + 2^{k+1} + \cdots + x^{k+1}\right] + (k+1) \sum_{n=1}^{x} n^k + F(n)$$

Simplificando os termos comuns aos dois somatórios, temos:

$$(x+1)^{k+1} = 1 + (k+1) \sum_{n=1}^{x} n^k + F(n)$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{x} n^k = \frac{(x+1)^{k+1} - 1 + F(n)}{(k+1)}$$

Logo $\sum_{n=1}^{x} n^k$ é um polinômio de grau (k + 1).

Lema 5. *x_n é uma progressão aritmética de ordem k se, e somente se, x_n é uma polinômio de grau k em n.*

Demonstração: 17. *($\Rightarrow$) A demonstração será feita através de indução matemática.*

i) Para $k = 1$, basta observar a Equação 1.1, que é um polinômio de grau 1 em n.

$$x_n = (r)n + (x_1 - r)$$

ii) Suponhamos por hipótese que seja verdadeira para todo $k \in \{1, 2, \cdots, k\}$, mostraremos que essa afirmação é verdadeira para $(k+1)$.

Se x_n é uma progressão arimética de ordem (k + 1), então $\triangle x_n = x_{n+1} - x_n$ é uma progressão aritmética de ordem k, e por hipótese de indução, $\triangle x_n$ é uma polinômio de grau k em n.

Assim pelo Lema 4, temos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \triangle x_i = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n+1} - x_n) = x_{n+1} - x_1$ e como x_1 é uma constante, segue que, x_n é um polinômio de grau $(k+1)$.

($\Leftarrow$) A demonstração também será feita através de indução matemática.

i) Para $k = 1$, basta observar que $x_n = an + b$, então:

$$\triangle x_n = x_{n+1} - x_n = [a(n+1) + b] - [an + b] = a$$

que é uma constante, logo x_n é uma progressão aritmética.
ii) Suponhamos por hipótese que seja verdadeira para todo $k \in \{1, 2, \cdots, k\}$, mostraremos que essa afirmação é verdadeira para $(k+1)$.

Se x_n é um polinômio de grau $(k+1)$ em n, então:

$$x_n = a_1 n^{k+1} + a_2 n^k + a_3 n^{k-1} + \cdots + a_{k+2}$$

Logo,

$$\triangle x_n = [a_1(n+1)^{k+1} + a_2(n+1)^k + \cdots + a_{k+2}] - [a_1 n^{k+1} + a_2 n^k + \cdots + a_{k+2}]$$

Assim,

$$\triangle x_n = a_1(n+1)^{k+1} - a_1 n^{k+1} + f(n)$$

Observe que $f(n)$ é um polinômio de grau (k − 1). Daí,

$$\triangle x_n = a_1 \left[\binom{k+1}{0} n^{k+1} + \binom{k+1}{1} n^k + \cdots + \binom{k+1}{k+1} n^0 \right] - a_1 n^{k+1} + f(n)$$

De modo que,

$$\triangle x_n = a_1 n^{k+1} + a_1 \left[\binom{k+1}{1} n^k + \cdots + \binom{k+1}{k+1} n^0 \right] - a_1 n^{k+1} + f(n)$$

Portanto,

$$\triangle x_n = a_1 \left[\binom{k+1}{1} n^k + \cdots + \binom{k+1}{k+1} n^0 \right] + f(n)$$

Logo ($\triangle x_n$) é uma polinômio de grau k, logo por hipótese de indução $\triangle x_n$ é uma progressão aritmética de grau k, e pela Definição 10, (x_n) é uma progressão aritmética de ordem $(k+1)$.

4.2 Progressões Geométricas de ordem k

Definição 11. *Uma sequência numérica $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ é uma Progressão Geométrica de ordem k, com k > 1, quando a sequência de quocientes $(\triangledown x_1, \triangledown x_2, \cdots, \triangledown x_n, \cdots)$, com $\triangledown x_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, for uma progressão geométrica de ordem (k - 1).*

A fórmula do n-ésimo termo de uma progressão geométrica de ordem k é estabelecida no seguinte teorema.

Teorema 11. *Seja $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ é uma Progressão geométrica de ordem k, com $k \geq 2$. então o n-ésimo termo, isto é, o x_n é determinado pela seguinte fórmula:*

$$x_n = x_1^{\binom{n-1}{0}}.(\triangledown x_1)^{\binom{n-1}{1}}.(\triangledown^2 x_1)^{\binom{n-1}{2}}.\cdots.(\triangledown^{k-1} x_1)^{\binom{n-1}{k-1}}.q^{\binom{n-1}{k}} \tag{4.3}$$

Sendo q a razão da progressão geométrica de primeira ordem calculada a partir de x_n.

Demonstração: 18. *A demonstração deste teorema será feita pro indução matemática.*
i) Se $k = 2$, então:

$$x_n = x_1^{\binom{n-1}{0}}.(\triangledown x_1)^{\binom{n-1}{1}}.q^{\binom{n-1}{2}}$$

que é a fórmula do n-ésimo termo de uma progressão geométrica de segunda ordem, conforme Equação 2.4.
ii) Suponhamos que a afirmação seja válida para a ordem $(k-1)$. Assim, sendo $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ uma progressão geométrica de ordem k, segue que a sequências de quocientes $(\triangledown x_1, \triangledown x_2, \cdots, \triangledown x_n, \cdots)$ é uma progressão aritmética de ordem $(k-1)$. Assim, pela hipótese de indução, segue que:

$$\triangledown x_n = (\triangledown x_1)^{\binom{n-1}{0}}.(\triangledown^2 x_1)^{\binom{n-1}{1}}.\cdots.(\triangledown^{k-1} x_1)^{\binom{n-1}{k-2}}.q^{\binom{n-1}{k-1}}$$

Note que [$\bigtriangledown^{k-1}x_1$] é o (k - 1)-ésimo quociente de termos em relação a sequência x_n, mas em relação a sequência $\bigtriangledown x_n$ ele é o (k - 2)-ésimo quociente.

Fazendo o produto dos (n - 1) primeiros termos da progressão $\bigtriangledown x_n$, temos:

$$\prod_{i=1}^{n-1} \bigtriangledown x_i = (\bigtriangledown x_1)^{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{0}} . (\bigtriangledown^2 x_1)^{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{1}} . \cdots . (\bigtriangledown^{k-1} x_1)^{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{k-2}} . q^{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{k-1}}$$

Assim, levando em consideração o Lema 1 e a Observação 4, temos:

$$\prod_{i=1}^{n-1} \bigtriangledown x_i = (\bigtriangledown x_1)^{\binom{n-1}{1}} . (\bigtriangledown^2 x_1)^{\binom{n-1}{2}} . \cdots . (\bigtriangledown^{k-1} x_1)^{\binom{n-1}{k-1}} . q^{\binom{n-1}{k}}$$

Por outro lado,

$$\prod_{i=1}^{n-1} \bigtriangledown x_i = (\bigtriangledown x_1).(\bigtriangledown x_2). \cdots .(\bigtriangledown x_{(n-1)}) = \frac{x_2}{x_1}.\frac{x_3}{x_2}. \cdots .\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_n}{x_1}$$

Desta forma,

$$\frac{x_n}{x_1} = (\bigtriangledown x_1)^{\binom{n-1}{0}} . (\bigtriangledown^2 x_1)^{\binom{n-1}{1}} . \cdots . (\bigtriangledown^{k-1} x_1)^{\binom{n-1}{k-2}} . q^{\binom{n-1}{k-1}}$$

Finalmente,

$$x_n = x_1.(\bigtriangledown x_1)^{\binom{n-1}{1}} . (\bigtriangledown^2 x_1)^{\binom{n-1}{2}} . \cdots . (\bigtriangledown^{k-1} x_1)^{\binom{n-1}{k-1}} . q^{\binom{n-1}{k}}$$

Como queríamos demonstrar.

Em busca de obter uma fórmula para expressar o produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de ordem k, considerasse a Equação 4.3, logo:

$$x_n = x_1^{\binom{n-1}{0}} . (\bigtriangledown x_1)^{\binom{n-1}{1}} . (\bigtriangledown^2 x_1)^{\binom{n-1}{2}} . \cdots . q^{\binom{n-1}{k}}$$

Então, fazendo o produto dos (n - 1) primeiros termos da sequência x_n, temos:

$$\prod_{i=1}^{n-1} x_i = x_1^{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{0}} . (\bigtriangledown x_1)^{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{1}} . (\bigtriangledown^2 x_1)^{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{2}} . \cdots . q^{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{k}}$$

Assim, obtêm-se que o produtos dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de ordem k é:

$$\prod_{i=1}^{n} x_n = x_1^{\binom{n}{1}}.(\triangledown x_1)^{\binom{n}{2}}.(\triangledown^2 x_1)^{\binom{n}{3}}.\cdots.q^{\binom{n}{k+1}} \tag{4.4}$$

Teorema 12. *Sejam $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ uma progressão aritmética de ordem k e $f(x) = b.a^x$ uma função do tipo exponencial. Então a sequência $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_n), \cdots)$ é uma progressão geométrica de ordem k.*

Demonstração: 19. *Como x_n é uma progressão aritmética de ordem k, então pela Equação 4.1 temos:*

$$x_n = \binom{n-1}{0}x_1 + \binom{n-1}{1}(\triangle x_1) + \binom{n-1}{2}(\triangle^2 x_1) + \cdots + \binom{n-1}{k-1}(\triangle^{k-1}x_1) + \binom{n-1}{k}r$$

Aplicando a função do tipo exponencial temos que:

$$f(x_n) = ba^{\left[\binom{n-1}{0}x_1 + \binom{n-1}{1}(\triangle x_1) + \binom{n-1}{2}(\triangle^2 x_1) + \cdots + \binom{n-1}{k-1}(\triangle^{k-1}x_1) + \binom{n-1}{k}r\right]}$$

Veja que,

$$\triangledown f(x_n) = \frac{f x_{n+1}}{f(x_n)} = \frac{ba^{\binom{n}{0}x_1}.a^{\binom{n}{1}(\triangle x_1)}.\cdots.a^{\binom{n}{k}r}}{ba^{\binom{n-1}{0}x_1}.a^{\binom{n-1}{1}(\triangle x_1)}.\cdots.a^{\binom{n-1}{k}r}}$$

Note que os dois primeiros termos do quociente se cancelam, e para as outras potências, usaremos o Lema 2. Assim,

$$\triangledown f(x_n) = a^{\binom{n-1}{0}(\triangle x_1)}.a^{\binom{n-1}{1}(\triangle^2 x_1)}.\cdots.a^{\binom{n-1}{k-1}r}$$

Agora,

$$\triangledown^2 f(x_n) = \frac{\triangledown f(x_{n+1})}{\triangledown f(x_n)} = \frac{a^{\binom{n}{0}(\triangle x_1)}.a^{\binom{n}{1}(\triangle^2 x_1)}.\cdots.a^{\binom{n}{k-1}r}}{a^{\binom{n-1}{0}(\triangle x_1)}.a^{\binom{n-1}{1}(\triangle^2 x_1)}.\cdots.a^{\binom{n-1}{k-1}r}}$$

Veja que os dois primeiros termos do quociente se cancelam, e para as outras potências, novamente usaremos o Lema 2. Assim,

$$\triangledown^2 f(x_n) = a^{\binom{n-1}{0}(\triangle^2 x_1)}.a^{\binom{n-1}{1}(\triangle^3 x_1)}.\cdots.a^{\binom{n-1}{k-1}r}$$

De uma forma geral, note que o n-ésimo termo da $\triangledown^i f(x_n)$ não terá as potências *de* $a^{\triangledown^s}$ *com* $s < i$. *Assim, concluímos que:*

$$\triangledown^k f(x_n) = a^{\binom{n-1}{0} r} = a^r$$

Como r é uma constante, segue que:

$$(\triangledown^k f(x_1), \triangledown^k f(x_2), \cdots, \triangledown^k f(x_n), \cdots) = (a^r, a^r, \cdots, a^r, \cdots)$$

é uma sequência constante, o que significa que $(\triangledown^{k-1} f(x_1), \triangledown^{k-1} f(x_2), \cdots, \triangledown^{k-1} f(x_n), \cdots)$ *é uma progressão geométrica, e que* $(\triangledown^{k-2} f(x_1), \triangledown^{k-2} f(x_2), \cdots, \triangledown^{k-2} f(x_n), \cdots)$ *é uma progressão geométrica de segunda ordem, e sucessivamente, que* $(\triangledown f(x_1), \triangledown f(x_2), \cdots, \triangledown f(x_n), \cdots)$ *é uma progressão geométrica de ordem (k - 1) e, enfim,* $(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots)$ *é uma progressão geométrica de ordem k.*

Teorema 13. *Uma sequência* $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ *de termos positivos é uma progressão geométrica de ordem k se, e somente se,* $\log_b x_n$ *é uma progressão aritmética de ordem k.*

Demonstração: 20. *(⇒) Como* x_n *uma progressão geométrica de ordem k, logo pela Equação 4.3, temos:*

$$x_n = x_1^{\binom{n-1}{0}}.(\triangledown x_1)^{\binom{n-1}{1}}.(\triangledown^2 x_1)^{\binom{n-1}{2}}.\cdots.(\triangledown^{k-1} x_1)^{\binom{n-1}{k-1}}.q^{\binom{n-1}{k}}$$

Aplicando a função logarítmica $f(x) = \log_b x$, *em ambos os lados temos:*

$$\log_b x_n = \log_b \left[x_1^{\binom{n-1}{0}}.(\triangledown x_1)^{\binom{n-1}{1}}.(\triangledown^2 x_1)^{\binom{n-1}{2}}.\cdots.(\triangledown^{k-1} x_1)^{\binom{n-1}{k-1}}.q^{\binom{n-1}{k}} \right]$$

Usando a propriedade de logaritmo $\log_b x.y = \log_b x + \log_b y$, *temos:*

$$\log_b x_n = \log_b x_1^{\binom{n-1}{0}} + \log_b (\triangledown x_1)^{\binom{n-1}{1}} + \log_b (\triangledown^2 x_1)^{\binom{n-1}{2}} + \cdots + \log_b (\triangledown^{k-1} x_1)^{\binom{n-1}{k-1}} + \\ + \log_b q^{\binom{n-1}{k}}$$

Usando a propriedade de logaritmo $\log_b x^n = n.\log_b x$*, temos que:*

$$\log_b x_n = \binom{n-1}{0}.\log_b x_1 + \binom{n-1}{1}.\log_b(\bigtriangledown x_1) + \binom{n-1}{2}.\log_b(\bigtriangledown^2 x_1) + \cdots +$$
$$+ + \binom{n-1}{k-1}.\log_b(\bigtriangledown^{k-1} x_1) + \binom{n-1}{k}.\log_b q$$

Considerando $\log_b x_1 = x_1', \log_b \bigtriangledown x_1 = \bigtriangledown x_1', \cdots, \log_b q = r$*, temos:*

$$\log_b x_n = \binom{n-1}{0}.x_1' + \binom{n-1}{1}.(\bigtriangledown x_1') + \binom{n-1}{2}.(\bigtriangledown^2 x_1') + \cdots + \binom{n-1}{k-1}.(\bigtriangledown^{k-1} x_1') +$$
$$+ \binom{n-1}{k}.r$$

Note que,

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!.k!} = \frac{\overbrace{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-(k-1))}^{k\ vezes}(n-1-k)!}{(n-1-k)!.k!}$$

Logo, como temos k *parcelas de* n *se multiplicando, isso resultara em polinômio de grau* k *em* n*. Portanto,* $\log_b x_n$ *é uma polinômio de grau* k *em* n*.*

Logo, pelo Lema 5, $(\log_b x_1, \log_b x_2, \cdots, \log_b x_n, \cdots)$ *é uma progressão aritmética de ordem* k*.*

($\Leftarrow$*) Demonstração realizada no Teorema 12.*

Considerações finais

No ensino regular o tema de Progressões Aritméticas e Geométricas é abordado no ensino médio. No entanto, percebemos que em muitos casos este tema é subaproveitado, no sentido de que apenas alguns tópicos de progressões de primeira ordem são abordados.

As progressões de ordem superior não são consideradas no Ensino Básico. Pensando nisso, que este trabalho se propõe a contribuir com ideias formais sobre progressões aritméticas e geométricas de ordem superior.

Caso algum professor tenha interesse em trabalhar este tema com seus alunos, nós elaboramos neste trabalho um software que ajuda construir Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem 2 e 3. O leitor pode encontrar o software acessando:
https://mega.nz/#!WuhmgIaR!q4n-058z0EUNnaBIrnsrv8HbH8okyyFHYannXLlreQY
o software tem tamanho de (68 KB) e é desenvolvido utilizando linguagem java, por isso necessita que o pacote java esteja instalado em seu sistema operacional.

Neste software é possível encontrar os termos de uma progressão aritmética e geométrica de ordem 2 e 3 e reciprocamente ao inserirmos nele uma sequência numérica ele terá capacidade de dizer se tal sequência é uma progressão aritmética ou geométrica, apresentando também os primeiros termos de suas sequência de diferenças no caso de progressão aritmética ou quocientes no caso de progressão geométrica, além sua ordem.

Para construirmos uma Progressão Aritmética de ordem 2 ou 3 usando o software precisaremos informar qual será o primeiro termo da sequência, no caso de ordem 2 precisaremos ainda informar o primeiro termo da sequência de diferenças e a sua razão. Caso seja de ordem 3, além do primeiro termo, deveremos informar o primeiro termo da primeira sequência de diferenças, o primeiro termo da segunda sequência de diferenças, e também a razão desta ultima.

Para construirmos progressões geométricas de ordem 2 e 3 usando o software o procedimento será análogo como foi feito para as progressões aritméticas, porém, tomamos os quocientes ao invés das diferenças.

Referências Bibliográficas

Benevides, F. S. (2005). Material teórico - Módulo binômio de Newton e triângulo de Pascal. *Portal da Obmep*, página 7. URL: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/5foogerl3joc8.pdf Acesso em: 27/05/2019.

Iezzi, G. e Hazzan, S. (1977). *Fundamentos de Matemática Elementar 4, 2. ed.* Editora Atual, São Paulo.

Lima, E. L. (2013). *Número e funções reais.* SBM, Rio de Janeiro.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., e Morgado, A. C. (2001). *A matemática no ensino médio, Vol. 2, 6. ed.* SBM, Rio de Janeiro.

Lopes, F. H. (2017). O ensino de progressão geométrica de segunda ordem no ensino médio. Dissertação de Mestrado, UNESP, São José do Rio Preto.

Morgado, A. C. (2013). *Matemática Discreta, 1. ed.* SBM, Rio de Janeiro.

Nobre, J. F. F. e Rocha, R. A. (2018). Progressões aritméticas de ordem superior. *Revista Professor de Matemática Online*, 5(1):1–13.