UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gilberto de Oliveira Santana

O Teorema de Sarkoviskii e seu Recíproco

Ouro Preto

2019

S232t Santana, Gilberto de Oliveira .
O teorema de Sarkoviskii e seu recíproco [manuscrito] / Gilberto de Oliveira Santana. - 2019.
68f.: il.: color; grafs.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Área de Concentração: Matemática Com Oferta Nacional.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Funções contínuas. I. Ferreira, Geraldo César Gonçalves . II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 517.938

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT

O Teorema de Sarkoviskii e seu Recíproco

Autor(a): Gilberto de Oliveira Santana

Dissertação defendida e aprovada, em **28 de março de 2019**, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Geraldo César G. Ferreira

Geraldo César Gonçalves Ferreira - Orientador
Universidade Federal de Ouro Preto

Luciano Coutinho dos Santos

Luciano Coutinho dos Santos
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Wenderson Marques Ferreira
Universidade Federal de Ouro Preto

O insucesso é apenas uma oportunidade para recomeçar com mais inteligência.

Henry Ford

Agradecimentos

A Deus por abençoar o meu caminho durante essa caminhada.

A minha esposa Gláucia pelo companheirismo, paciência e compreensão durante esses anos de mestrado. Foi uma longa caminhada e só ela sabe o quanto foi complicado e o que precisamos ceder para esta conclusão. Apesar da minha cabeça dura tudo que você me diz me faz refletir e melhorar. Te amo, meu primeiro amor. Agradeço aos meus amados filhos, Heitor e Ícaro, que por mais que tudo estivesse complicado um sorriso já era o suficiente para restabelecer minhas forças e prosseguir.

A minha mãe Nilza por sempre nos acolher com muito carinho, dedicação e com seus deliciosos almoços em nossas visitas em Porto Firme. Te amo Mãe.

Ao meu pai, Gilberto, por todo o incentivo com meus estudos. Pai desde criança você me mostrou que o estudo era importante, você foi meu primeiro mestre, com você me ensinou a tabuada comigo trancado no banheiro e me mostrou que não precisava mais temer os números. Foi você meu alicerce durante a graduação e me mostrou que sou capaz de vencer e que mesmo que nosso mundo parecesse errado conseguiríamos consertá-lo. Todo seu apoio e carinho me tornaram mais forte para encarar o mestrado sem medo. Te amo pai.

Ao meu melhor amigo Caetano pelas conversas, companheirismo, pelos goles e pelas churrascadas. Pode parecer bobagem mas em alguns momentos só simples a presença de um verdadeiro amigo nos dá força e energia para sustentar tudo. Doidão obrigado por tudo.

Aos meus colegas e amigos de curso do PROFMAT pela troca de experiencias e pelo aprendizado. Em especial agradeço: Marília, Mayara e Jânio pela amizade e companheirismo.

Ao corpo docente do PROFMAT na UFOP pelos ensinamentos e inspiração. Principalmente meu orientador Geraldo, pela paciência, dedicação, por todas as críticas construtivas, sugestões e discussões que foram fundamentais para meu aprendizado e amadurecimento. Geraldo você conseguiu abrir meu mundo para uma área nova, à pensar fora da caixa. Muito obrigado meu amigo e orientador.

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é demonstrar o Teorema de Sarkovskii e seu recíproco. Este estudo apresenta conceitos de composição de funções e grafos além de definir elementos básicos da teoria de Sistemas Dinâmicos. O Teorema do Valor Intermediário é uma ferramenta importante na prova do Teorema de Sarkovskii.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos; Teorema de Sarkovskii; Recíproco do Teorema de Sarkovskii .

Abstract

The main goal of this dissertation is to demonstrate Sarkovskii's Theorem and its converse. This study presents concepts of composition of functions and graphs besides defining basic elements of the theory of Dynamic Systems. The Intermediate Value Theorem is an important tool in proving the Sarkovskii's Theorem.

Keywords: Dynamical systems; Sarkovskii's theorem; Converse of Sarkovskii's Theorem.

Conteúdo

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é demonstrar o Teorema de Sarkovskii e seu recíproco, bem como melhorar os conhecimentos adquiridos no decorrer do curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto - PROFMAT UFOP. Também gostaríamos de abordar um conteúdo que seja útil e interessante para professores, estudantes e entusiastas na área de matemática visto que os conceitos prévios para o entendimento deste trabalho basicamente são os de funções, composição de funções e alguns teoremas abordados no conteúdo dos cursos de Cálculo.

O principal assunto abordado é o Teorema de Sarkovskii que, segundo (3), foi publicado em Russo no ano de 1964 pelo matemático A. N. Sarkovskii. Curiosamente a publicação ficou desconhecida pelo ocidente por aproximadamente dez anos até que os matemáticos Li e Yorke publicaram um resultado que, mais tarde, foi descoberto que é um caso particular do Teorema de Sarkovskii. Atualmente Sarkovskii trabalha como professor no Instituto de Matemática em Kiev, na Ucrânia e é um dos principais matemáticos da área de sistemas dinâmicos unidimensionais.

Como requisitos necessários para alcançar os objetivos, no Capítulo 2, os conceitos de funções e composições de funções serão usados para definir alguns elementos básicos dos sistemas dinâmicos. Tais elementos são propriedades sobre as funções compostas e as iteradas de suas composições.

No Capítulo 3 serão definidas propriedades sobre os pontos periódicos, órbitas e a demonstração do Teorema de Tien-Yien Li e James A. Yorke. Tal teorema originalmente afirma que "Período três implica caos" ou seja, se uma função real contínua possui ponto periódico de período três então possui pontos periódicos de todos os períodos. A demonstração que será apresentada no usará uma aplicação dos conceitos do Capítulo 2 o que torna seu entendimento mais simples. Um leitor que tenha interesse pode consultar o artigo (5), que foi publicado em 1975, para ver a prova original.

A partir daí, no Capítulo 4, serão abordados alguns conceitos de Grafos orientados juntamente com as noções de cobertura de intervalos para definir propriedades que garantirão a existência de pontos periódicos em determinadas condições.

No Capítulo 5, após breve contextualização histórica, será definida a relação de ordem dos números naturais conhecida como ordem de Sarkovskii e a partir daí demonstraremos o Teorema de Sarkovskii que afirma:

Teorema (Teorema de Sarkovskii)**.** *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to I$ uma função contínua definida no Intervalo I. Se f possui um ponto l-periódico e $l \triangleright m$ na ordem de Sarkovskii então f possui ponto m-periódico.*

No Capítulo 6, será apresentado e demonstrado um teorema que é conhecido como inverso ou recíproco do Teorema de Sarkovskii. Baseado no estudo sobre o teorema de Sarkovskii iremos mostrar que:

Teorema (O inverso do Teorema de Sarkovskii)**.** *Dado $r \in \mathbb{N}$ existe uma função contínua definida em um intervalo I_r, $f : I_r \to I_r$, tal que f possui ponto r-periódico mas não possui ponto s-periódico em I_r, para todo s que precede r na ordem de Sarkovskii isto é $s \triangleright \cdots \triangleright r$.*

2 Conceitos Básicos e Definições

Segundo Devaney (3), a teoria de sistemas dinâmicos procura entender o comportamento de processos iterativos. Por exemplo, se tal processo for modelado por uma equação diferencial com o tempo como variável independente então tentamos prever o que acontece no futuro ou aconteceu no passado. Se o processo for discreto, como a iteração da composição de uma função real consigo mesma, então tentamos entender o comportamento dos pontos x, $f(x)$, $f^2(x)$, $\cdots$, $f^n(x)$ quando n é suficientemente grande.

Neste trabalho, estudaremos e abordaremos uma das classes mais simples de sistemas dinâmicos determinados pelas funções de uma única variável real. As funções que determinam sistemas dinâmicos também são chamadas de mapeamento ou mapas. Em resumo, essa terminologia conota o processo geométrico de levar um ponto a outro e para fazer o mapeamento usando a composição de funções.

Sabe-se que a composta de uma função $f : I \to I$ com ela mesma normalmente é representada por $f \circ f(x) = f(f(x))$. Estudaremos as iterações que compõem f com f em um número n de vezes que, nesse texto, será tratado como a n-ésima composição de f e definida da seguinte maneira.

Definição 2.1. *A n-ésima iterada de f, desde que exista, será representada pela função $f^n(x)$ tal que*

$$f^n(x) = \begin{cases} f(f^{n-1}(x)) & \text{, se } n \in \mathbb{N}^*, \\ x & \text{, se } n = 0. \end{cases}$$

Apesar de ser um conceito simples, as funções obtidas após apenas algumas iteradas podem ser extremamente difíceis de terem sua lei de formação explicitada. A exemplo disto uma função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ após ser iterada quatro vezes passa a ter grau 16.

2.1 Pontos periódicos

Alguns pontos de uma função, ao serem iterados sucessivas vezes, apresentam algumas características peculiares como a produção de ciclos. Nesta subseção vamos destacar o ponto fixo e o ponto periódico.

Definição 2.2. *Dizemos que x é um ponto fixo de f quando $f(x) = x$.*

Observação 2.1. *Geometricamente o ponto fixo é dado pela intersecção do gráfico da função f com a reta $y = x$.*

Exemplo 2.1. *Seja $f(x) = x^3 - 3x$ vamos encontrar os pontos fixos dessa função*

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 - 3x = x \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \cdot (x-2) \cdot (x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \{-2,\ 0,\ 2\} \end{aligned}$$

Deste modo temos que $-2, 0, 2$ são os pontos fixos da função f. A reta y=x intercepta o gráfico de f em $A = (-2,-2)$, $B = (0,0)$ e $C = (2,2)$. Observe a representação gráfica

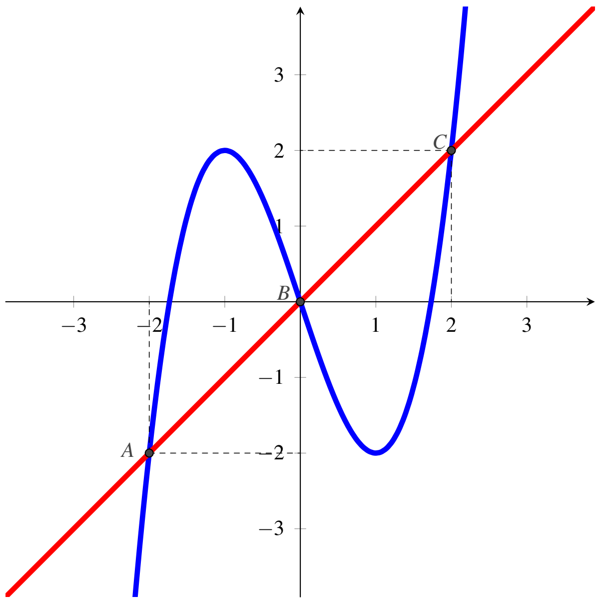

Figura 2.1: Gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$ e $y = x$ no qual podemos identificar os pontos fixos de f.

Definição 2.3. *Dizemos que x_0 é um ponto de período n ou n-periódico de f se x_0 for um ponto fixo de f^n mas não for um ponto fixo de f^i para todo $i \in \{1,2,\cdots,n-1\}$, ou seja,*

$$\begin{cases} f^n(x_0) &= x_0, \\ f^i(x_0) &\neq x_0, \quad \forall i \in \{1,2,\cdots,n-1\}. \end{cases}$$

Consequentemente, se $n = 1$*, então* $f(x_0) = x_0$*, ou seja* x_0 *é um ponto fixo de* f*.*

Exemplo 2.2. *Seja* $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 2$*. Temos que* $f(1) = 2$*,* $f(2) = 3$ *e* $f(3) = 1$*. Observe os pontos* H, I *e* J *no gráfico*

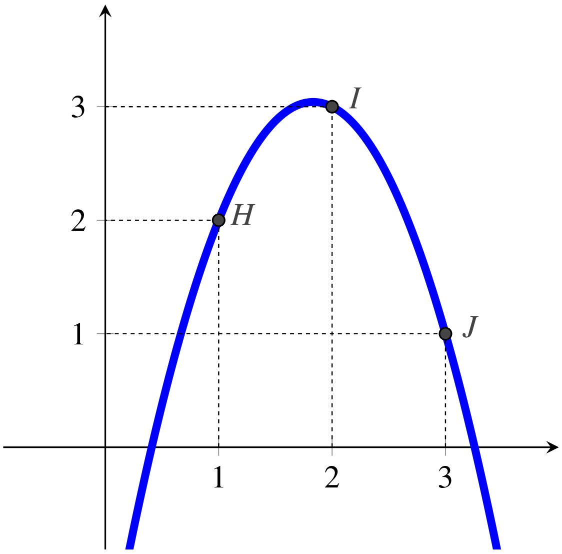

Figura 2.2: Gráfico de $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 2$
.

Neste exemplo, 1 *é ponto* 3*-periódico de* f *uma vez que*

$$f^3(1) = f^2(f(1)) = f^2(2) = f(f(2)) = f(3) = 1.$$

De forma análoga os pontos 2 *e* 3 *são pontos* 3*-periódicos de* f*.*

2.2 Órbitas

Definição 2.4. *Seja* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Definimos a órbita de* x_0 *por* f *como o conjunto* $O_f(x_0)$ *formado pelos elementos resultantes de todas as iterações de* x_0 *pela função* f*, ou seja,*

$$O_f(x_0) = \{x_0,\ f(x_0),\ f^2(x_0),\ \cdots,\ f^n(x_0),\ \cdots\}$$

Exemplo 2.3. *Sejam $f(x) = x^2 + 1$ e $x_0 = 0$ temos que*

$$\begin{array}{rcccccl} f(0) & = & 1, & & & & \\ f^2(0) & = & f(1) & = & 1^2+1 & = & 2, \\ f^3(0) & = & f(f^2(0)) & = & f(2) = 2^2+1 & = & 5, \\ f^4(0) & = & f(f^3(0)) & = & f(5) = 5^2+1 & = & 26, \\ f^5(0) & = & f(f^4(0)) & = & f(26) = 26^2+1 & = & 677. \end{array}$$

Portanto a órbita de x_0 em f é dada por

$$O_f(0) = \{0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 26,\ 677,\ \cdots,\ f^n(0),\ \cdots\}.$$

2.3 Tipos de Órbita

Ao analisarmos as possíveis órbitas dos pontos de uma função podemos encontrar conjuntos que são finitos ou infinitos. Estaremos mais interessados em estudar um subconjunto de órbitas que são finitas. Vejamos as definições e exemplos, sempre considerando f com sendo uma função real contínua.

Definição 2.5 (Órbita cíclica ou periódica)**.** *Uma órbita cíclica ou periódica é um conjunto finito formado por todas as iterações de um ponto periódico. Desta maneira se x_0 for ponto n-periódico de f então temos a órbita*

$$O_f(x_0) = \{\ x_0,\ f(x_0),\ f^2(x_0),\ \cdots,\ f^{n-1}(x_0)\}.$$

Podemos representar a $O_f(x_0)$ por um conjunto formado por uma sequência em que

$$O_f(x_0) = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}\}, \text{ com } x_i = f^i(x_0).$$

Desta maneira, qualquer elemento desse conjunto possui a mesma órbita de x_0, ou seja,

$$O_f(x_i) = O_f(x_0) \text{ para todo } i < n.$$

Exemplo 2.4. *Pelo exemplo 2.2 temos que $O_f(1) = \{1,\ 2,\ 3\}$ e ainda $O_f(1) = O_f(2) = O_f(3)$.*

Observação 2.2 (Órbita do ponto fixo)**.** *A órbita de um ponto fixo é um conjunto unitário cujo elemento é o ponto fixo em questão.*

Exemplo 2.5. *No exemplo 2.1 vimos que os pontos -2 e 2 são fixos logo*

$$O_f(-2) = \{-2\} \text{ e } O_f(2) = \{2\}.$$

Observação 2.3 (Órbita eventualmente fixa)**.** *Um ponto x_0 é dito eventualmente fixo se x_0 não é um ponto fixo, mas algum ponto da órbita de x_0 é ponto fixo.*

Exemplo 2.6. *Seja $f(x) = x^2 - 2$ e $x_0 = 0$. A órbita de x_0 é eventualmente fixa e dada por*

$$0,\ -2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots$$

Observação 2.4 (Órbita eventualmente periódica)**.** *Um ponto x_0 é dito eventualmente periódico se x_0 não é um ponto periódico, mas algum ponto da órbita de x_0 é periódico.*

Exemplo 2.7. *Seja $f(x) = x^2 - 1$ e $x_0 = 1$. A a órbita de x_0 é eventualmente periódica e dada por*

$$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ \cdots$$

2.4 Análise Gráfica

Nesta seção vamos descrever um processo chamado análise gráfica, descrito por Devaney (3), como uma importante ferramenta usada para a compreensão da dinâmica unidimensional e que permite utilizar o gráfico de uma função para visualizar o comportamento das órbitas de seus pontos.

Inicialmente considere o gráfico de uma função contínua f e a reta diagonal $y = x$ como mostrado na figura 2.3 .

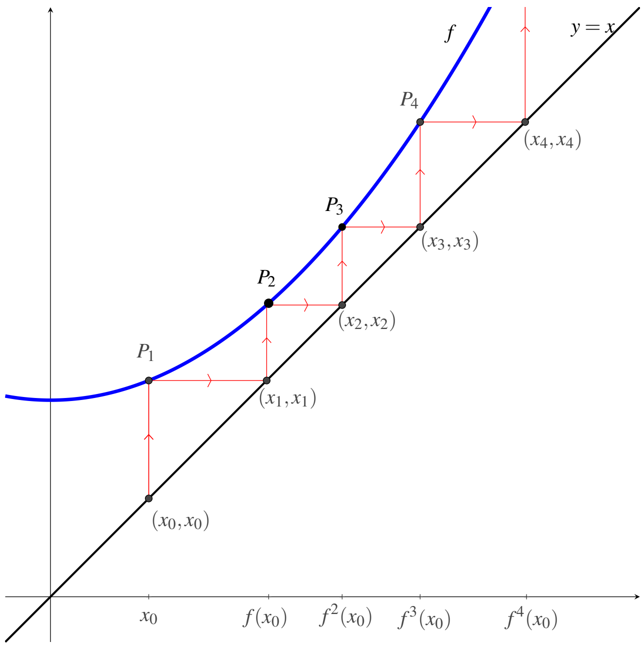

Figura 2.3: Análise gráfica da órbita de x_0 quando iterada usando a função f.

Para traçar graficamente a órbita de x_0 iniciaremos com o ponto $(x_0,\ x_0)$ que pertence à reta diagonal. Em seguida, a partir desse ponto, traçamos uma reta vertical até tocar o gráfico de f no ponto $P_1 = (x_0, f(x_0))$. Prosseguindo, traçamos uma reta horizontal de P_1 até a reta diagonal no ponto $(f(x_0); f(x_0))$. Como foi feito anteriormente, a partir desse ponto, traçamos uma reta vertical até tocar o gráfico de f no ponto $P_2 = (f(x_0), f^2(x_0))$ em seguida traçamos a reta horizontal de P_2 até o ponto $(f^2(x_0),\ f^2(x_0))$ da reta diagonal. Assim, repetindo este processo sucessivas vezes, iremos obter a representação gráfica da órbita de x_0.

Em resumo, para traçar o gráfico da órbita de x_0 pela função f, primeiramente traçamos uma linha vertical da reta diagonal até o gráfico de f. Em seguida traçamos uma linha horizontal do gráfico de f até reta diagonal. Observe a construção feita na figura 2.3, na qual $O_f(x_0) = \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots\}$ e $f^i(x_0) = x_i$.

O gráfico resultante é conhecido como gráfico de Lamerey e pode ter formato de "escada" como na figura do exemplo 2.9 ou de "teia de aranha", como no exemplo a seguir.

Exemplo 2.8. *O gráfico da função $f(x) = x^2 - 1$ e o gráfico formado pelas iterações do ponto $x_0 = 0,7$. O formato deste gráfico de Lamerey é de uma "teia de aranha".*

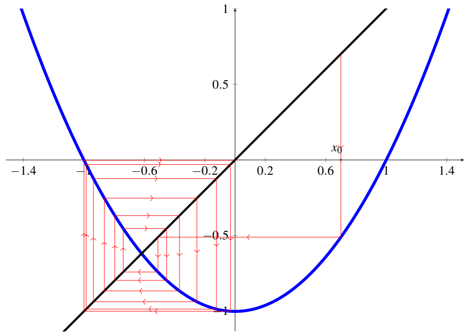

Figura 2.4: Gráfico de Lamerey em forma de teia de aranha para a função $f(x) = x^2 - 1$ e $x_0 = 0,7$.

Exemplo 2.9. *Usando a mesma função do exemplo anterior mas iterando o ponto $x_0 = -1,7$ obtemos um gráfico de Lamerey que tem formato de escada.*

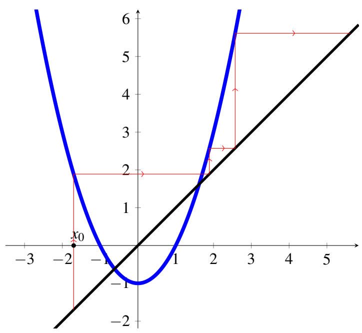

Figura 2.5: Gráfico de Lamerey em forma de escada para a função $f(x) = x^2 - 1$ e $x_0 = -1,7$.

Anteriormente vimos que um ponto periódico satisfaz $f^n(x_0) = x_0$ para algum n. Assim, graficamente, podemos perceber que um ponto periódico, ao ser iterado um certo número de vezes, retorna ao estado inicial (x_0, x_0) e isto gera um "circuito fechado".

Exemplo 2.10. *Seja* $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ *com* $x > 0$. *Se* $x_0 = 1$ *então* $f(1) = \dfrac{1}{3}$ *e* $f(\dfrac{1}{3}) = 1$ *e desta forma* $f^2(x_0) = x_0$. *Graficamente temos*

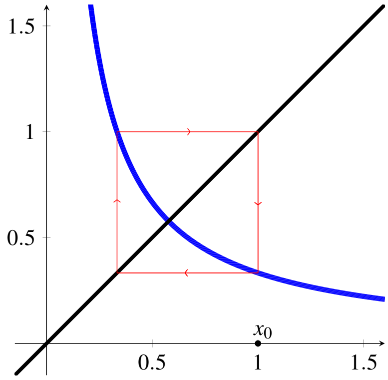

Figura 2.6: Gráfico de Lamerey para a função $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ e $x_0 = 1$.

Apesar de ser uma ferramenta didática importante, esse estudo gráfico não cobre todos os casos possíveis e também se mostra ineficiente em casos de pontos periódicos de períodos muito grandes ou até mesmo para analisar um número grande de pontos. Temos ainda que ela se mostra eficiente em diagramar e tem forte apelo visual contudo não se destina à demonstrações formais.

3 Órbitas Periódicas e Intervalos

A busca por pontos fixos ou periódicos de funções contínuas é de extrema importância para o entendimento de sistemas dinâmicos mas, por diversas vezes, encontrá-los pode ser árduo e complicado. Os conceitos apresentados ao longo deste capítulo nos darão diretrizes para garantir a existência de pontos fixos ou periódicos em um determinado intervalo sem determiná-los.

3.1 Desenvolvimento

A proposição a seguir é uma ferramenta que será usada exaustivamente nos teoremas seguintes uma vez que, sob certas condições, garante a existência de um ponto fixo em um intervalo.

Primeiramente vamos enunciar o Teorema do Valor Intermediário (TVI) que será fundamental para as demonstrações deste capítulo. Sua demonstração pode ser encontrada em (10).

Teorema 3.1 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e seja d um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um $c\in(a,b)$ tal que*

$$f(c)=d.$$

Proposição 3.1. *Considere a função contínua f e sejam I e J intervalos reais compactos tais que $I\subset J$. Se $f(I)\supset J$ então f possui ponto fixo em I.*

Demonstração. Sejam $I=[a,b]$, $J=[c,d]$ e $c\le a\le b\le d$. Por hipótese $J\subset f(I)$ e como $I\subset J$, temos que $I\subset f(I)$. Sendo assim existem x_a e $x_b\in I$ tais que $f(x_a)=a$ e $f(x_b)=b$.

Se $x_a=a$ ou $x_b=b$ nada temos a fazer pois um deles já seria ponto fixo de f. Sejam $x_a\ne a$ e $x_b\ne b$ então, como x_a e $x_b\in I$, temos $a<x_a<b$ e $a<x_b<b$. A figura 3.1 esboça a situação descrita.

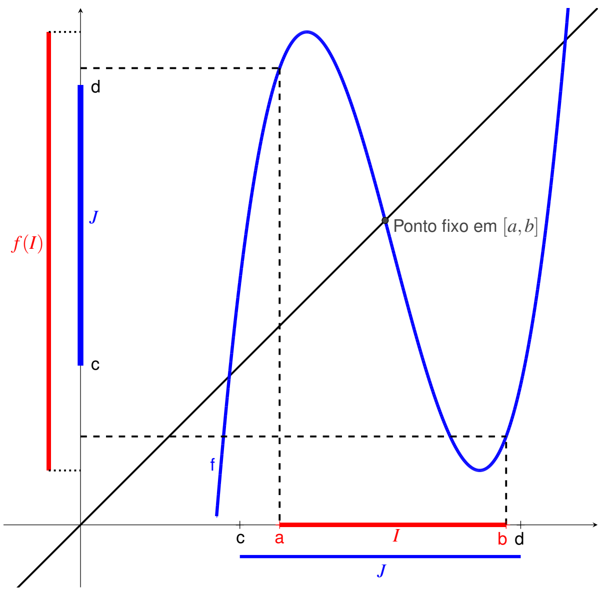

Figura 3.1: Gráfico exemplo e imagens dos intervalos I e J

Considere a função contínua $h(x) = f(x) - x$. Desta forma,

$$h(x_a) = f(x_a) - x_a = a - x_a, \text{ e como } a < x_a \text{ temos } h(x_a) < 0,$$

$$h(x_b) = f(x_b) - x_b = b - x_b, \text{ e como } x_b < b \text{ temos } h(x_b) > 0.$$

Como $h(x)$ é uma função contínua, $h(x_a) < 0$ e $h(x_b) > 0$ temos que, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in I$ tal que $h(c) = 0$ e assim

$$h(c) = 0 \Rightarrow f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$$

Por definição, temos que c é um ponto fixo de f em I. $\square$

Notação: Quando $f(I) \supset J$ diremos que $f(I)$ cobre J e usaremos a seguinte notação:

$$I \to J.$$

No Capítulo 4 ampliaremos o uso dessa notação bem como os conceitos envolvidos. Por hora precisaremos apenas desta notação para a cobertura de intervalos.

Nas condições da Proposição 3.1, em que $f(I) \supset J$, será que existe algum intervalo contido em I tal que sua imagem é justamente o intervalo J? A proposição a seguir responde a esta pergunta e estabelece uma maneira de escolher-lo caso haja mais de um intervalo que satisfaça a condição.

Proposição 3.2. *Sejam I e J intervalos reais compactos e $f(I) \supset J$. Então há um subintervalo compacto $\tilde{I} \subset I$ tal que $f(\tilde{I}) = J$.*

Demonstração. Seja $J = [a,b]$ assim $\{a,b\} \subset J \subset f(I)$ então existem dois pontos distintos p, q em I tais que $f(p) = a$ e $f(q) = b$. Temos duas possibilidades para p e q:

Se $p < q$ tome $c = max\{p \leqslant x \leqslant q : f(x) = a\}$ e $d = min\{c \leqslant x \leqslant q : f(x) = b\}$.

Se $p > q$ tome $c = max\{q \leqslant x \leqslant p : f(x) = b\}$ e $d = min\{c \leqslant x \leqslant p : f(x) = a\}$.

A figura 3.2 ilustra a situação descrita pelo teorema.

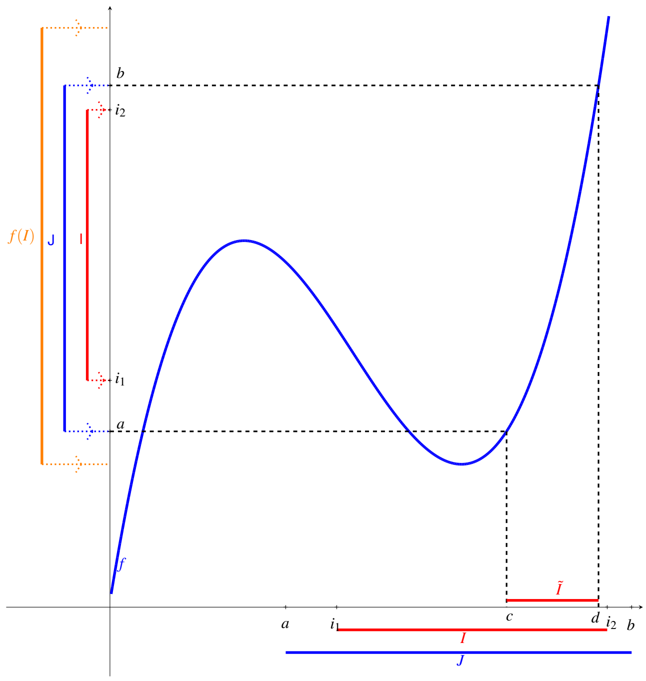

Figura 3.2: Gráfico exemplo e imagens dos intervalos I, J e $\tilde{I}$.

Em ambos casos, basta tomarmos $\tilde{I} = [c,d]$ logo, pela continuidade de f, temos $f(\tilde{I}) = [a,b] = J$.

Observe que não existe elemento pertencente ao intervalo (c,d) que possui imagem a ou imagem b.

De fato, sem perda de generalidade, suponha $p < q$ e $K = [c,d]$ com c e d nas condições anteriores. Suponha por absurdo que exista i com $c < i < d$ tal que $f(i) = a$. Observe que $p \leqslant c < i < d \leqslant q$ implicando $p < i < q$, com $f(i) = a$ e $i > c$. Mas c, por construção, é elemento máximo cuja imagem por f é a. Logo temos uma contradição. $\square$

Notação: Se $f(I) = J$ usaremos a seguinte notação

$$I \rightarrowtail J\ .$$

De posse das duas proposições anteriores e de mais algumas afirmações poderemos estabelecer condições para garantir a existência de pontos periódicos de uma função em um determinado intervalo.

Proposição 3.3. *Seja f uma função contínua no intervalo $I = [a,b]$ e sejam I_0, I_1, ..., I_{n-1} subintervalos compactos de $I = [a,b]$. Se*

$$I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$$

então a equação $f^n(x) = x$ tem pelo menos uma solução $x_0 \in I_0$ tal que $f^k(x_0) \in I_k$ para $k = 0,1,...,n-1$.

Demonstração. O caso em que $n = 1$ foi demonstrado na Proposição 3.1, provemos então a proposição para os casos em que $n > 1$.

Por hipótese $I_{n-1} \to I_0$. Então, pela Proposição 3.2, existe $\tilde{I}_{n-1} \subset I_{n-1}$ tal que $f(\tilde{I}_{n-1}) = I_0$.

Procedendo de forma análoga temos que $f(I_{n-2}) \supset I_{n-1} \supset \tilde{I}_{n-1}$ portanto existe $\tilde{I}_{n-2} \subset I_{n-2}$ tal que $f(\tilde{I}_{n-2}) = \tilde{I}_{n-1}$, ou seja $\tilde{I}_{n-2} \rightarrowtail \tilde{I}_{n-1}$. Analogamente $f(I_{n-3}) \supset I_{n-2} \supset \tilde{I}_{n-2}$ logo existe $\tilde{I}_{n-3} \subset I_{n-3}$ tal que $f(\tilde{I}_{n-3}) = \tilde{I}_{n-2}$. Prosseguindo sucessivamente desta maneira teremos que existe

$$\tilde{I}_j \subset I_j \text{ tal que } f(\tilde{I}_j) = \tilde{I}_{j+1} \text{ para todo } j \in \{0,1,\ldots,n-2\} \text{ e}$$
$$f(\tilde{I}_{n-1}) = I_0 \supset \tilde{I}_0$$

Generalizando temos que

$$\tilde{I}_0 \rightarrowtail \tilde{I}_1 \rightarrowtail \tilde{I}_2 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail \tilde{I}_{n-2} \rightarrowtail \tilde{I}_{n-1} \rightarrowtail I_0$$

Desta forma teremos

$$f^k(\tilde{I}_0) = \tilde{I}_k \text{ com } k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$$

e

$$f^n(\tilde{I}_0) = f(f^{n-1}(\tilde{I}_0)) = f(\tilde{I}_{n-1}) = I_0 \supset \tilde{I}_0.$$

Assim, pela Proposição 3.1, a função f^n possui ponto fixo em $\tilde{I}_0$ ou seja, existe $x_0 \in \tilde{I}_0 \subset I_0$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Portanto a equação $f^n(x) = x$ possui solução em I_0 e como $x_0 \in \tilde{I}_0$ e $f^k(\tilde{I}_0) = \tilde{I}_k$ com $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ temos que $f^k(x_0) \in I_k$. □

Na busca por pontos fixos de uma função apresentaremos um teorema que garante a sua existência desde que haja algum ponto periódico.

Teorema 3.2. *Seja uma função contínua $f : I \to I$ com $I \subset \mathbb{R}$. Se f possui ponto n-periódico tal que $n > 1$ então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Seja $\tilde{x}$ um ponto n-periódico de f e considere o conjunto $O_f(\tilde{x})$ que representa sua órbita. Podemos ordenar seus elementos da seguinte maneira

$$O_f(\tilde{x}) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

em que $x_1 < x_2 < ... < x_n$ e $\tilde{x} = x_i$ para algum $i \in \{2,3,...,n\}$.

Temos ainda que $f(x_1) = x_i$ para algum $i \in \{2,3,...,n\}$ e $x_1 < x_i$ sempre que $i \in \{2,3,...,n\}$. Sendo assim,

$$x_i - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_1) - x_1 > 0 \ .$$

Por outro lado $f(x_n) = x_j$ para algum $j \in \{1,2,...,n-1\}$ e $x_n > x_j$ sempre que $j \in \{1,2,...,n-1\}$. Logo,

$$x_j - x_n < 0 \Rightarrow f(x_n) - x_n < 0.$$

Considere a função contínua $H(x) = f(x) - x$ temos que $H(x_1) < 0$ e $H(x_n) > 0$. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, temos que existe $x_0 \in I$ tal que $H(x_0) = 0$, ou seja, $f(x_0) - x_0 = 0$ o que implica em $f(x_0) = x_0$ e concluímos que f possui ponto fixo. □

3.2 O Teorema de Li e Yorke

A demonstração do teorema de Li York foi publicada em 1975, no The American Mathematical Monthly, pelos matemáticos Tien-Yien Li e James A. Yorke (5). A demonstração intitulada "Period Three Implies Chaos" foi de grande importância na época mas curiosamente ela é apenas um caso particular do Teorema de Sarkovskii. A seguir enunciaremos o teorema de forma diferente, uma vez que o conceito de caos não é abordado neste texto.

Teorema 3.3 (Teorema de Li e Yorke). *Seja f uma função real contínua em um intervalo compacto I tal que $I \to I$. Se f possui ponto periódico de período 3 então f tem pontos periódicos de todos os outros períodos.*

Demonstração. Sejam $x_1 \in I$, um ponto periódico de período 3 de f, x_2 e $x_3 \in I$ tais que $x_2 \neq x_3 \neq x_1$ com $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ e $f(x_3) = x_1$ e, sem perda de generalidade, suponha $x_1 < x_2 < x_3$.

Considere os conjuntos $I_0 = [x_1, x_2]$ e $I_1 = [x_2, x_3]$. Pela continuidade de f e pelo Teorema do Valor Intermediário temos que $f(I_0) \supset I_1$ e $f(I_1) \supset \{I_0 \cup I_1\}$ consequentemente $f(I_1) \supset I_0$ e $f(I_1) \supset I_1$ assim

$$I_0 \to I_1, I_1 \to I_0 \text{ e } I_1 \to I_1.$$

A figura 3.3 representa tal situação.

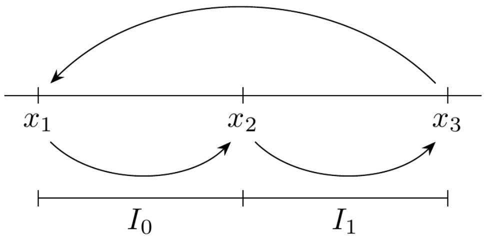

Figura 3.3: Cobertura dos Intervalos

Considerando os conjuntos $J_0, J_1, \cdots, J_{n-2}$ tais que $J_i = I_1$ para todo $i \in \{0, 1, \cdots, n-2\}$ e $J_{n-1} = I_0$, temos que

$$J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{n-2} \to J_{n-1} \to J_0.$$

Portanto, pelo Teorema 3.3, existe $x_0 \in J_0 = I_1$ tal que $f^n(x_0) = x_0$, $f^k(x_0) \in J_k = I_1$ para $k \in [0, 1, \cdots, n-2]$ e $f^{n-1}(x_0) \in J_{n-2} = I_0$.

Vamos mostrar que x_0 é um ponto n-periódico. Suponha por absurdo que x_0 não seja um ponto n-periódico. Então existe $r \in \{0, 1, \cdots, n-2\}$ tal que $f^{n-1}(x_0) = f^r(x_0)$.

Sabemos que $f^{n-1}(x_0) \in I_0$ e $f^r(x_0) \in I_1$. Além disso, $I_0 \cap I_1 = \{x_2\}$ e assim $f^{n-1}(x_0) = f^r(x_0) = x_2$. Por outro lado temos que $f^n(x_0) = x_0$ logo

$$x_0 = f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0)) = f(x_2) = x_3$$

Desta maneira $f(x_0) = f(x_3) = x_1 \notin I_1$ e isto é um absurdo pois $f(x_0) \in I_1$. Logo x_0 é um ponto n-periódico de f. $\square$

4 Fundamentação para o Teorema de Sarkovskii

Neste capítulo usaremos conceitos da teoria de grafos para estudar as relações entre a cobertura de intervalos e a existência de pontos fixos e periódicos em uma função. Tal uso traz dois benefícios imediatos na parte visual e na notação para o tratamento de coberturas de intervalos.

As definições e demonstrações aqui apresentadas são baseadas nos artigos de Jean-Ives (2), Moitinho e Barros (8) e Nascimento (11) .

4.1 Grafos

Em síntese um grafo é uma estrutura utilizada para representar relações entre elementos de um determinado conjunto, é formado por vértices (ou nós) e arestas que os unem através de uma determinada relação.

Os vértices normalmente são representados graficamente por pontos e as arestas por segmentos (ou arcos) orientados que têm origem e término em algum vértice, vejamos uma definição mais formal.

Definição 4.1. *Um grafo orientado, que será tratado apenas como grafo, é uma estrutura $G = (V,E)$ em que $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots\}$, $V \neq \varnothing$, cujos elementos são chamados nós ou vértices de G e $E = \{e_{ij} = (v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V\}$ é o conjunto das arestas de G.*

Definição 4.2. *Um caminho entre os vértices v_i e v_j é qualquer sequência de nós $C = [v_i = u_1, u_2, \cdots, u_m = v_j]$ de modo que $(u_k, u_{k+1}) \in E$. Dizemos que m é o comprimento ou tamanho do caminho.*

Exemplo 4.1. *Sejam $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ em que $a_1 = (v_1, v_2)$, $a_2 = (v_2, v_1)$, $a_3 = (v_3, v_3)$, $a_4 = (v_3, v_5)$, $a_5 = (v_5, v_4)$, $a_6 = (v_1, v_5)$ e $a_7 = (v_2, v_4)$ podemos representar o grafo de $G = (V,E)$ por*

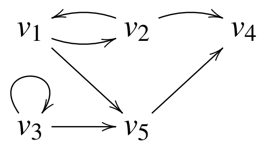

Figura 4.1: Grafo G

Perceba que existem vários caminhos possíveis entre v_1 e v_4 dentre eles:

$C_1 = [v_1, v_2, v_4]$ *com comprimento 3,*

$C_2 = [v_1, v_5, v_4]$ *com comprimento 3,*

$C_3 = [v_1, v_2, v_1, v_5, v_4]$ *com comprimento 5 e*

$C_4 = [v_1, v_2, v_1, v_2, v_1, v_2, v_5, v_4]$ *com comprimento 8.*

O Grafo é uma representação gráfica prática para a cobertura de intervalos. Definimos anteriormente que se um intervalo A, através de uma função f, cobre um intervalo B ou seja $f(A) \supset B$ então podemos representar tal situação por

$$A \longrightarrow B.$$

Associando essa notação à definição de grafos observe que A e B são os vértices e temos a formação de um caminho de A para B onde A e B são os vértices de um grafo.

Para as demonstrações que virão na seção 4.2 considere uma função contínua $f : I \to I$ e o intervalo $I = [p_1, p_n]$, particionado pelos elementos da $O_f(p_1) = \{p_1,\ p_2,\ \ldots, p_n\}$ com p_1 sendo um ponto n-periódico de f de forma que

$$I_i = [p_i, p_{i+1}], \quad I = \bigcup_{i=1}^{n-1} I_i \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^{n-1} (p_i, p_{i+1}) = \emptyset.$$

O grafo associado à função f e aos intervalos $I_1, I_2 \ldots, I_n$ é o grafo orientado $G = (V, E)$ tal que

$$V = \{I_1, \ldots, I_n\}$$

$$E = \{(I_j, I_k) \mid I_j \longrightarrow I_k \text{ e } f(I_J) \supseteq I_k\}$$

Exemplo 4.2. *Seja* $f : [1,5] \to [1,5]$ *uma função contínua tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \in [1,2] \\ -x+7, & \text{se } x \in [2,3] \\ -2x+10, & \text{se } x \in [3,4] \\ -x+6, & \text{se } x \in [4,5] \end{cases}$$

A função f *pode ser representada pelo gráfico:*

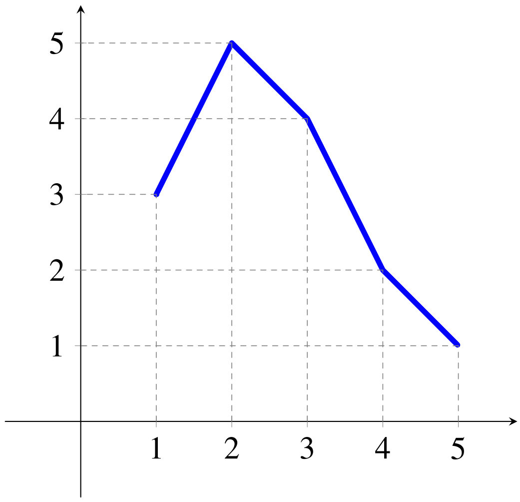

Figura 4.2: Gráfico da função f.

Note que $f(1) = 3,\ f(2) = 5,\ f(3) = 4,\ f(4) = 2$ *e* $f(5) = 1$. *Então temos que* $O_f(1) = \{1,2,3,4,5\}$. *Podemos particionar* $I = [1,5]$ *pelos elementos de* $O_f(1)$ *em que* $I_1 = [1,2]$, $I_2 = [2,3]$, $I_3 = [3,4]$ *e* $I_4 = [4,5]$. *Assim temos*

$$\begin{array}{lclcl} f(I_1) & \supseteq & [3,5] & \supseteq & I_3 \cup I_4, \\ f(I_2) & \supseteq & [4,5] & \supseteq & I_4, \\ f(I_3) & \supseteq & [2,4] & \supseteq & I_2 \cup I_3, \\ f(I_4) & \supseteq & [1,2] & \supseteq & I_1. \end{array}$$

Logo temos que $V = \{I_1,I_2,I_3,I_4\}$ *são os vértices,* $E = \{(I_1,I_3),(I_1,I_4),(I_2,I_4),(I_3,I_2),(I_3,I_3),(I_4,I_1)\}$ *são as arestas e podemos representar as coberturas através do grafo* $G = (V,E)$ *da seguinte maneira*

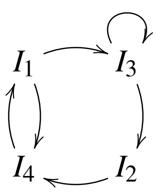

Figura 4.3: Grafo G.

4.2 Preparação para o Teorema de Sarkovskii

Os lemas e teoremas nesta seção se baseiam na análise das propriedades de grafo G associado à função $f : I \to I$ e aos $n-1$ intervalos I_i, $i \in \{1,...,n-1\}$, juntamente com as propriedades estudadas nos capítulos anteriores e na seção 4.1.

O lema a seguir garante a existência de um intervalo, nomeado I_1, que possui propriedades fundamentais para as próximas demonstrações desta seção.

Lema 4.1. *Existe um intervalo $[p_a, p_{a+1}]$ em $I = [p_1, p_n]$, ao qual chamaremos de I_1, para o qual a aresta $I_1 \longrightarrow I_1$ está em G.*

Demonstração. Consideremos o conjunto ordenado crescentemente $O_f(p_1) = \{p_1, \cdots, p_n\}$ que descreve a órbita de p_1 em f. Então temos que

$$f(p_1) > p_1 \text{ e } f(p_n) < p_n.$$

Sejam $p_a = max\{p_i \mid f(p_i) > p_i\}$ e $I_1 = [p_a, p_{a+1}]$ deste modo $f(p_a) > p_a$ e como p_a pertence à órbita temos $f(p_a) \geq p_{a+1}$. Ainda, por p_a ser máximo, temos $f(p_{a+1}) < p_{a+1}$ ou seja $f(p_{a+1}) \leq p_a$.

Finalmente, usando o fato que f é uma função contínua, $f(p_a) \geq p_{a+1}$ e $f(p_{a+1}) \leq p_a$, concluímos que $f(I_1) \supseteq I_1$ consequentemente a aresta $I_1 \longrightarrow I_1$ está em G. $\square$

Em seguida demonstraremos uma propriedade interessante de uma partição de I formada pelos elementos do conjunto $O_f(p_1)$. Tal propriedade garante a existência de pelo menos um caminho de I_1 até $I_j = [p_j, p_{j+1}]$ para qualquer $j \in \{1,2,...,n-1\}$.

Nos próximos lemas consideremos I_1 como definido no Lema 4.1.

Lema 4.2. *Partindo de I_1, é possível chegar a qualquer vértice de G.*
Em outras palavras:
Partindo de I_1 sempre existe um caminho de I_1 até I_j para todo $j \in \{1,2,\cdots,n\}$.

Demonstração. Seja I_1 conforme visto no lema 4.1 e V_i o conjunto de intervalos $I_1,...,I_{n-1}$ que são extremidades de algum caminho de tamanho i partindo de I_1. Mostremos que $\varnothing \neq V_i \subseteq V_{i+1}$.

Pelo Lema 4.1, $I_1 \longrightarrow I_1$ então $V_i \neq \varnothing$ pois podemos construir um caminho com i vértices I_1 da seguinte maneira

$$\underbrace{I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_1}_{i \text{ vezes}}$$

Temos ainda que se $I_K \in V_i$ existe um caminho C de tamanho i ligando I_1 a I_k, ou seja

$$I_1 \longrightarrow I_{K_2} \longrightarrow I_{K_3} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{K_{i-1}} \longrightarrow I_K, \text{ com } I_{k_j} \in \{I_1, \ldots, I_{n-1}\},$$

é possível adjuntar o laço $I_1 \longrightarrow I_1$ no início do caminho C formando um novo caminho

$$I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_{K_2} \longrightarrow I_{K_3} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{K_{i-1}} \longrightarrow I_K$$

que possui tamanho $i+1$, que se inicia com I_1 e tem I_K na outra extremidade, logo $I_K \in V_{i+1}$ para todo $I_K \in V_i$ e assim $V_i \subseteq V_{i+1}$.

Seja U_i o conjunto formado pela união de todos os pontos dos intervalos $I_1, \ldots, I_{n-1}$ que pertençam a V_i. Observe que V_i e U_i são conjuntos de natureza de formação distinta pois V_i é uma coleção de intervalos de I e U_i é uma coleção de todos os pontos pertencentes a cada uma dos intervalos contidos em V_i.

Como $V_i \neq \varnothing$ temos $U_i \neq \varnothing$ e podemos observar que $U_i = \cup\{x \in I_k \mid I_k \in V_i\}$. Além disso, como para todo $I_k \in V_i$, temos que $I_k \in V_{i+1}$ assim $U_i \subseteq U_{i+1}$.

Seja $\#V_i$ a cadinalidade conjunto V_i. Como $V_i \subseteq V_{i+1}$ temos $1 \leq \#V_i \leq n-1$ para todo $i \geq 1$ pois $V_1 \neq \varnothing$ e o número máximo de partições que podemos obter é $n-1$.

Afirmação: Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que que, para todo $i \geq n_0$, temos $V_i = V_{i+1}$.

De fato. Suponha, por absurdo, que para todo n existe $i > n$ tal que $V_i \neq V_{i+1}$. Portanto, como $V_i \subset V_{i+1}$, obtemos $\#V_i < \#V_{i+1}$. Deste modo, fixado i_0:

Tome $n_1 > i_0$, por hipótese existe, $i_1 > n_1$ tal que $\#V_{i_1} < \#V_{i_1+1}$, com $i_0 < n_1 < i_1$.

Analogamente:

Tome $n_2 > i_1$ então existe $i_2 > n_2$ tal que $\#V_{i_2} < \#V_{i_2+1}$, com $i_1 < n_2 < i_2$.

E prosseguindo sucessivamente da mesma maneira:

Tome $n_k > i_{k-1}$ então existe $i_k > n_k$ tal que $\#V_{i_k} < \#V_{i_k+1}$, com $i_{k-1} < n_k < i_k$.

Assim concluímos que:

$$\#V_{i_0} < \#V_{i_1} < \#V_{i_2} < ... < \#V_{i_j} < ...$$

Se $j = n$ teremos $\#V_{i_j} \geq n$ pois em cada etapa da desigualdade obtemos $\#V_{i_{j+1}} \geq \#V_{i_j} + 1$ ou seja a cada iteração da desigualdade aumentamos pelo menos um elemento. Assim temos um absurdo pois $1 \leq \#V_i \leq n-1$.

De posse da validade da afirmação anterior podemos prosseguir e mostrar a seguinte afirmação.

Afirmação: Se existe n_0 tal que para todo $i \geq n_0$ temos $V_i = V_{i+1}$ então temos que $U_i = U_{i+1}$.

Em quais condições $V_i \neq V_{i+1}$, isto é , em quais condições existe $I_k \in V_i \neq V_{i+1}$?

Se existir $I_j \in V_i$ tal que $f(\partial I_j) \not\subset Ui$, isso ocorre.

De fato, se $f(z) \notin U_i$ para algum $z \in \partial I_j$ então $f(I_j)$ contém um vértice, digamos V_{i+1}, que tem $f(z)$ como extremidade e este vértice não está contido em V_i, ou seja,$V_{i+1} \not\subset V_i$. Portanto, $V_{i+1} \neq V_i$

Afirmação: Se, a partir de um certo i, $f(U_i \cap O_f(p_1)) \subset U_i$ então $f(U_i \cap O_f(p_1)) = O_f(p_1)$

Observe que $p_a \in U_i \cap O_f(p_1)$ logo pela hipótese temos que $f(p_a) \in U_i$. Aplicando novamente a hipótese teremos $f(f(p_a)) = f^2(p_a) \in U_i$. Repetindo o procedimento temos que $p_a, f(p_a), f^2(p_a), ...$, $f^{n-2}(p_a), f^{n-1}(p_a) \in U_i$. Assim todos os elementos da órbita pertencem à U_i, ou seja $\{p_1, p_2, ..., p_n\} \subset U_i$ portanto

$$f(U_i \cap O_f(p_1)) = f(\{p_1, p_2, ..., p_n\}) = \{p_1, p_2, ..., p_n\} = O_f(p_1).$$

Usando o que vimos até agora vamos mostrar que, a partir de um certo i, teremos $U_i = [p_1, p_n]$.

De fato, vimos que a partir de um certo i teremos

$$U_i \cap O_f(p_i) = O_f(p_1) = \{p_1, p_2, ..., p_n\} = f(U_i \cap O_f(p_i))$$

deste modo, para algum i teremos $f^i(I_1) \supset \{p_1,...,p_n\}$ e pela continuidade de f obtemos $f^i(I_1) \supset [p_1,p_n]$ assim $U_i \supset [p_1,p_n]$ e, por construção, $U_i \subset [p_1,p_n]$ portanto $U_i = [p_1,p_n]$.

Observe ainda $f^i(I_1)$ chega em todos os pontos de cada intervalo assim é possível chegar a qualquer vértice de G partindo de I_1. □

O Lema 4.3 será de grande valia, principalmente se considerando sua forma contra positiva, que garantirá a existência de uma partição I_j, com $j \geq 2$, tal que $I_j \longrightarrow I_1$.

Lema 4.3. *Suponha que, para todo $j > 1$, não exista um caminho em G ligando I_j a I_1 então as afirmações abaixo ocorrem:*

i. n é par
ii. f possui ponto 2-periódico
iii. f leva elementos da órbita à esquerda de I_1 em elementos da orbita à direita de I_1 e vice-versa.

Demonstração. Seja I_1 como no Lema 4.1 e $O_f(p_1) = \{p_1,p_2,...,p_n\}$ assim

$$I_1 = [p_a,p_{a+1}],\ f(p_a) \geq p_{a+1},\ f(p_{a+1}) \leq p_a \text{ e } f(I_1) \supset I_1.$$

Suponha, por absurdo, a existência de $p_j < p_a$ tal que $f(p_j) \leq p_a$ com $1 \leq j < a$. Tome i o maior índice que isso ocorre logo, $f(p_{i+1}) > p_a$ e, consequentemente, $f(p_{i+1}) \geq p_{a+1}$. Deste modo teríamos $f([p_i,p_{i+1}]) \supset I_1$ o que formaria uma aresta $[p_i,p_{i+1}] \longrightarrow I_1$ e por hipótese isto não pode ocorrer. Logo, para todo $1 \leq j < a$, temos que $f(p_j) > p_a$ ou seja $f(p_j) \geq p_{a+1}$.

Analogamente vamos supor, por absurdo, a existência de $p_j > p_a$ tal que $f(p_j) \geq p_a$ com $a < j < n$. Tome i o menor índice tal que isso ocorra. Logo $f(p_{i-1}) \leq p_a$. Deste modo teríamos $f([p_{i-1},p_i]) \supset I_1$ o que formaria uma aresta $[p_{i-1},p_i] \longrightarrow I_1$ e por hipótese isto não pode ocorrer. Portanto, para todo $a < j \leq n$, temos que $f(p_j) < p_{a+1}$ ou seja $f(p_j) \leq p_a$.

Em resumo, se $p_j < p_a$ temos que $f(p_j) \geq p_{a+1}$ e se $p_j \geq p_{a+1}$ temos $f(p_j) \leq p_a$. Desta forma f leva elementos da órbita à esquerda de I_1 em elementos da órbita à direita de I_1 e vice-versa o que prova o item iii.

Observando que $\#\{p_1,...,p_a\} = a$ e também que f é uma função injetora quando aplicada nos elementos da órbita concluímos que $\#f(\{p_1,...,p_a\}) = a$. Pelo que foi mostrado temos que $f(\{p_1,...,p_a\}) \subset \{p_{a+1},...,p_n\}$ e como $\#\{p_{a+1},...,p_n\} = n-(a+1)+1$ obtemos:

$$a \leq n-(a+1)+1 \implies a \leq n-a \implies 2a \leq n \implies n \geq 2a.$$

Por outro lado $f(\{p_{a+1},...,p_n\}) \subset \{p_1,...,p_a\}$ então $\#\{f(\{p_{a+1},...,p_n\})\} \leq \#\{p_1,...,p_a\}$

$$n-(a+1)+1 \leq a \implies n-a \leq a \implies n \leq 2a.$$

Logo concluímos que $n = 2a$, ou seja n, é par e portanto o item i. está provado.

Nos resta provar o item ii.. Para tal, sejam $J_1 = [p_1, p_a]$ e $J_2 = [p_{a+1}, p_n]$ então $f(J_1) \supset J_2$ e $f(J_2) \supset J_1$ com isso $f^2(J_1) \supset J_1$ logo existe $p \in J_1$ tal que $f^2(p) = p$.
Como $f(p) \in J_2$ e $J_1 \cap J_2 = \varnothing$ segue-se que p não é ponto fixo de f e, portanto, p é ponto 2-periódico em f. $\square$

O próximo lema juntamente com o seu corolário nos darão suporte direto para demonstração do Teorema de Sarkovskii pois poderemos prever o que ocorre com os pontos quando a função possui ponto periódico de período ímpar.

Lema 4.4. *Suponha que a função contínua f possua um ponto de período ímpar. Sejam $n \geq 3$ o menor desses valores, $\tilde{p}$ um ponto n-periódico de f e $O_f(\tilde{p}) = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ com $\tilde{p} = p_i$ para algum i em $\{1,2,\cdots,n\}$. O Grafo G associado a esta órbita contém $n-1$ vértices e satisfaz simultaneamente às seguintes afirmações:*

i. Existe um ciclo de tamanho $n-1$: $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow ... \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1$,
ii. Nenhuma aresta $I_j \longrightarrow I_{j+k}$, $j \geq 1$ e $k > 1$, está em G,
iii. Toda aresta $I_{n-1} \longrightarrow I_j$, $j < n$, j ímpar, está em G.

Demonstração. i. Considere o ciclo C de menor tamanho contendo I_1 e pelo menos outro vértice diferente dele, suponha que C é da forma

$$I_1 \longrightarrow I_{j_2} \longrightarrow ... \longrightarrow I_{j_k} \longrightarrow I_1 \text{ , com } 2 \leq k \leq n-1.$$

Tal ciclo existe: basta observar que como n é ímpar o Lema 4.3 garante a existência de pelo menos um vértice I_{j_k} que se liga em I_1 e pelo Lema 4.2 temos que I_1 também se liga à I_{j_k}.

Para mostrar que o $k = n-1$. Suponha, por absurdo, que $k < n-1$ assim, se k for ímpar haverá um ponto k-periódico ímpar de f que é menor do que n o que contraria a minimalidade de n. Se k for par poderemos adjuntar uma aresta I_1 ao ciclo C formando o seguinte ciclo

$$I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_{j_2} \longrightarrow ... \longrightarrow I_{j_k} \longrightarrow I_1$$

que possui ponto periódico com período ímpar $k+1$ tal que $k+1<n$, o que novamente contraria a minimalidade de n. Logo $k=n-1$ e garantimos a existência de um ciclo de tamanho $n-1$:

$$I_1 \longrightarrow I_{j_2} \longrightarrow ... \longrightarrow I_{j_{n-1}} \longrightarrow I_1.$$

Para fins didáticos, vamos renomear os elementos do ciclo da seguinte maneira: $I_{j_m} = I_m$ para todo $m \in \{2,3,...,n-1\}$ então temos

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow ... \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1 \ .$$

Mais adiante, no item iii., definiremos cada um dos intervalos: $I_2,\ I_3,\ ...\ ,I_{n-1}$.

ii. Suponha que exista uma aresta I_j em G tal que $I_j \longrightarrow I_{j+k}$ com $j \geq 1$ e $k>1$ desta maneira teríamos

$$I_1 \longrightarrow ... \longrightarrow I_j \longrightarrow I_{j+k} \longrightarrow ... \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1$$

que é um caminho de tamanho $n-1-k$ que por sua vez é menor que $n-1$ e no item anterior mostramos que tal suposição recai em absurdo. Portanto nenhuma aresta $I_j \longrightarrow I_{j+k}$, $j \geq 1$ e $k>1$, está em G.

iii. Pelo item ii. temos que de I_1 partem somente duas arestas $I_1 \longrightarrow I_1$ e $I_1 \longrightarrow I_2$. Observe que $I_1 = [p_a, p_{a+1}]$ com $f(p_a) \geq p_{a+1}$, $f(p_{a+1}) \leq p_a$ e suponha, por absurdo que, $f(p_a) = p_{a+1}$ e $f(p_{a+1}) = p_a$ então

$$f^2(p_a) = f(f(p_a)) = f(p_{a+1}) = p_a$$

desta maneira p_a seria um ponto 2-periódico, contrariando o fato de p_a ser n-periódico com n ímpar. Portanto $f(p_a) \neq p_{a+1}$ ou $f(p_{a+1}) \neq p_a$ e assim $f(p_a) > p_{a+1}$ ou $f(p_{a+1}) < p_a$.

Sem perda de generalidade, demonstraremos o caso em que $f(p_{a+1}) \neq p_a$, o caso em que $f(p_a) \neq p_{a+1}$ se dá de forma análoga.

Seja $f(p_{a+1}) \neq p_a$ então $f(p_a) \geq p_{a+1}$, $f(p_{a+1}) < p_a$ e consequentemente $f(p_{a+1}) \leq p_{a-1}$. Assim, suponha por absurdo que $f(p_{a+1}) < p_{a-1}$. Então

$$f(I_1) \supset [p_{a-2}, p_{a-1}] \cup [p_{a-1}, p_a] \cup I_1$$

ou seja

$$I_1 \longrightarrow [p_{a-2}, p_{a-1}], I_1 \longrightarrow [p_{a-1}, p_a] \text{ e } I_1 \longrightarrow I_1$$

o que contraria o item ii., logo $f(p_{a+1}) = p_{a-1}$.

Por outro lado temos que $f(p_a) = p_{a+1}$ pois, caso contrário, se $f(p_a) > p_{a+1}$ teremos $f(I_1) \supset [p_{a-1}, p_a] \cup I_1 \cup [p_{a+1}, p_{a+2}]$ ou seja

$$I_1 \longrightarrow [p_{a-1}, p_a], I_1 \longrightarrow I_1 \text{ e } I_1 \longrightarrow [p_{a+1}, p_{a+2}]$$

o que novamente contraria o item ii.

Tome $I_2 = [p_{a-1}, p_a]$ e dessa maneira temos, como era esperado, que $I_1 \longrightarrow I_1$ e $I_1 \longrightarrow I_2$.

Pelo item anterior, item ii., $I_2 \longrightarrow I_3$ então vamos definir I_3 com base em $f(I_2)$. Observe que $f(p_{a-1}) \geq p_{a+2}$ pois se $f(p_{a-1}) < p_{a+2}$, como $f(p_{a-1}) \neq p_{a+1}$, concluímos que $f(p_{a-1}) \leq p_a$. Nesse caso teríamos $f(I_2) \supset I_1$ e $I_2 \longrightarrow I_1$ o que novamente contraria o item ii.

Por outro lado se $f(p_{a-1}) > p_{a+2}$, ou melhor $f(p_{a-1}) \geq p_{a+3}$, teremos

$$I_2 \longrightarrow [p_{a+1}, p_{a+2}] \text{ e } I_2 \longrightarrow [p_{a+2}, p_{a+3}]$$

o que é absurdo. Então $f(p_{a-1}) = p_{a+2}$ e vamos tomar $I_3 = [p_{a+1}, p_{a+2}]$ pois desta maneira temos $I_2 \longrightarrow I_3$.

Assim temos que I_2 é o primeiro intervalo da partição à esquerda de I_1 e I_3 como o primeiro intervalo da partição à direita de I_1. Prosseguindo desta maneira teremos à esquerda de I_1 os intervalos I_2, I_4, ..., I_{n-1} e à sua direita I_3, I_5, ..., I_{n-2}. Formando a seguinte configuração para os intervalos:

$$I_{n-1}, \cdots, I_4, I_2, I_1, I_3, I_5, \cdots, I_{n-2}.$$

Vamos mostrar que o comportamento dos intervalos, visto anteriormente, é válido para todo número natural j tal que $1 \leq j \leq \frac{n-3}{2}$ sendo assim considere as seguintes afirmações:

$$\begin{cases} I_{2j} & = & [p_{a-j}, p_{a-j+1}], \\ I_{2j+1} & = & [p_{a+j}, p_{a+j+1}], \\ f(p_{a+j}) & = & p_{a-j}, \\ f(p_{a-j}) & = & p_{a+j+1}. \end{cases}$$

Suponha a validade de tal afirmação para todo $i \leq j$. Vamos mostrar sua validade para $i = j+1$. Matematicamente veremos que

$$\left\{\begin{array}{rcl} I_{2(j+1)} & = & [p_{a-(j+1)}, p_{a-(j+1)+1}] \\ I_{2(j+1)+1} & = & [p_{a+(j+1)}, p_{a+(j+1)+1}] \\ f(p_{a+(j+1)}) & = & p_{a-(j+1)} \\ f(p_{a-(j+1)}) & = & p_{a+(j+1)+1} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} I_{2j+2} & = & [p_{a-j-1}, p_{a-j}] \\ I_{2j+3} & = & [p_{a+j+1}, p_{a+j+2}] \\ f(p_{a+j+1}) & = & p_{a-j-1} \\ f(p_{a-j-1}) & = & p_{a+j+2} \end{array}\right.$$

Vamos iniciar verificando o que ocorre com $f(p_{a+j+1})$. Para tal observe que como a afirmação é válida para todo $i \leq j$ teremos duas possibilidades:

a) $f(p_{a+j+1}) \geq p_{a+j+2}$
b) $f(p_{a+j+1}) \leq p_{a-j-1}$

Se o item a) ocorre então temos $f([p_{a+j}, p_{a+j+1}]) \supset [p_{a-j}, p_{a+j+1}] \supset I_1$ o que é absurdo. Para o item b), suponha por absurdo que $f(p_{a+j+1}) < p_{a-j-1}$. Então

$$f([p_{a+j}, p_{a+j+1}]) \supset [p_{a-j-2}, p_{a-j-1}] \cup [p_{a-j-1}, p_{a-j}].$$

Sendo assim

$$[p_{a+j}, p_{a+j+1}] \longrightarrow [p_{a-j-2}, p_{a-j-1}] \text{ e } [p_{a+j}, p_{a+j+1}] \longrightarrow [p_{a-j-1}, p_{a-j}]$$

o que contraria o item ii. Logo $f(p_{a+j+1}) = p_{a-j-1}$. Tome $I_{2j+2} = [p_{a-j-1}, p_{a-j}]$.

De forma semelhante aos argumentos anteriores, verifica-se que $f(p_{a-j-1})$ tem duas possibilidades: $f(p_{a-j-1}) < p_{a-j-1}$ ou $f(p_{a-j-1}) \geq p_{a+j+2}$.

Caso $f(p_{a-j-1}) < p_{a-j-1}$ teremos um absurdo pois $f([p_{a-j-1}, p_{a-j}]) \supset [p_{a-j-1}, p_{a+j+1}] \supset I_1$ e assim $f(p_{a-j-1}) \geq p_{a+j+2}$. Suponha que $f(p_{a-j-1}) > p_{a+j+2}$ ou seja $f(p_{a-j-1}) \geq p_{a+j+3}$. Teremos então que

$$f([p_{a-j-1}, p_{a-j}]) \longrightarrow [p_{a+j+1}, p_{a+j+2}] \text{ e } f([p_{a-j-1}, p_{a-j}]) \longrightarrow [p_{a+j+1}, p_{a+j+2}]$$

o que recai em absurdo. Logo $f(p_{a-j-1}) = p_{a+j+2}$.

Tome $I_{2j+3} = [p_{a+j+1}, p_{a+j+2}]$ assim temos $I_{2j} \longrightarrow I_{2j+1} \longrightarrow I_{2j+2} \longrightarrow I_{2j+3}$. Daí, pelo que foi visto anteriormente: para todo j tal que $1 \leq j \leq \dfrac{n-3}{2}$ temos $I_{2j} \longrightarrow I_{2j+1}$ e $I_{2j+1} \longrightarrow I_{2j+2}$ onde os intervalos I_{2j} estão à esquerda de I_1 e os intervalos I_{2j+1} estão à direita.

Nos resta mostrar o que ocorre com a primeira e a última partição de $[p_1, p_n]$. Como o grafo em questão possui $n-1$ vértices e $O_f(p_1) = \{p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n\}$ temos que I_{n-2} é a última partição de índice ímpar no intervalo $[p_1, p_n]$ logo $I_{n-2} = [p_{n-1}, p_n]$. Para I_{n-1} resta apenas o intervalo $[p_1, p_2]$ logo $I_{n-1} = [p_1, p_2]$ e como $I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1}$ temos que $f(p_{n-1}) = p_2$ e $f(p_n) = p_1$.

Vamos concluir usando o fato que $I_{n-1} \longrightarrow I_1$ o que implica em $f([p_1, p_2]) \supset [p_a, p_{a+1}]$. Agora observe que $f(p_2) = p_n$ pois $I_{n-3} \longrightarrow I_{n-2}$ e $f(p_1) = p_a$ pois p_a é o último elemento da órbita que ainda não foi coberto. Assim $f(I_{n-1}) \supset [p_a, p_n] = [p_a, p_{a+1}] \cup [p_{a+1}, p_{a+2}] \cup ... \cup [p_{n-1}, p_n]$ e consequentemente $f(I_{n-1}) \supset I_1 \cup I_3 \cup I_5 \cup ... \cup I_{n-2}$.

Concluímos que todas arestas $I_{n-1} \longrightarrow I_j$, com $j < n$ e j ímpar estão em G. $\square$

Ressaltamos que no lema que acabamos de demonstrar n dever ser o menor de todos os períodos ímpares da função.

Corolário 4.0.1. *Se f possui um ponto n-periódico, com n ímpar e $n \neq 1$ então f possui pontos periódicos de todos os períodos maiores que n e todos os períodos pares menores que n.*

Demonstração. Seja m um número inteiro tal que $m > n$. Pelo lema anterior temos a existência de um caminho C_1 do comprimento n tal que

$$\underbrace{I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow ... \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1}_{C_1:\ n \text{ vértices}}.$$

Como $I_1 \longrightarrow I_1$ construímos um caminho C_2 de tamanho $m-n$ da seguinte maneira

$$\underbrace{I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow ... \longrightarrow I_1}_{C_2:\ m-n \text{ vértices}}$$

Em seguida basta adjuntar C_2 a C_1 obtendo um caminho de tamanho m:

$$\underbrace{I_1 \longrightarrow ... \longrightarrow I_1}_{C_2:\ m-n \text{ vértices}} \longrightarrow \underbrace{I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow ... \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1}_{C_1:\ n \text{ vértices}}$$

Desta maneira podemos encontrar ponto m-periódico para todo $m > n$.

Seja $m < n$ e $m = 2i$. Assim $n - 2i$ é ímpar e pelo item iii. do Lema 4.4 temos $I_{n-1} \longrightarrow I_{n-2i}$ então podemos construir o seguinte caminho de tamanho $2i$:

$$I_{n-1} \longrightarrow I_{n-2i} \longrightarrow I_{n-2i+1} \longrightarrow ... \longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1}$$

Deste modo concluímos que existe um ponto periódico de período $m = 2i$. Portanto f possui pontos periódicos de todos os períodos pares menores que n. □

Proposição 4.1. *Se f possui ponto periódico de período par então f possui ponto 2-periódico*

Demonstração. Seja $n \geq 2$ o menor inteiro tal que f tenha um ponto n-periódico.

Suponhamos, por contradição, que $n > 2$. Temos que n é par pois se fosse ímpar, pelo Corolário 4.0.1, f teria ponto de período 2.

Pelo Lema 4.3, como f não possui ponto 2-periódico, existe um vértice I_k diferente de I_1 tal que $I_k \longrightarrow I_1$. Seja $k > 1$ o menor inteiro tal que o exista o caminho:

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow ... \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1.$$

Como f não tem pontos periódicos de período menor que n, procedemos como na prova do Lema 4.4 e concluímos que $k = n - 1$ e não existe aresta do tipo $I_i \longrightarrow I_{i+j}$ se $j > 1$. Ainda usando os mesmos argumentos da demonstração do Lema 4.4, temos que a aresta I_{n-1} se conecta a todos os vértices de índice par.

Em particular, como $n - 2$ é par, $I_{n-1} \longrightarrow I_{n-2}$. Mas $I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1}$, logo temos o caminho $I_{n-1} \longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1}$. Sendo assim f possui ponto periódico de período 2 o que contraria o a suposição de que $n > 2$ é o menor inteiro tal que f possua ponto n periódico portanto f possui ponto 2-periódico. □

Lema 4.5. *Se x_0 é um ponto n-periódico de f e h um número inteiro positivo qualquer. Então x_0 é um ponto de período $n/mdc(n,h)$ de f^h, sendo $mdc(n,h)$ o máximo divisor comum entre n e h.*
Reciprocamente se x_0 é um ponto m-periódico de f^h então x_0 é um ponto de período mh/d de f, em que d divide h mas é primo com m.

Demonstração. Por hipótese x_0 é um ponto n-periódico de f. Logo

$$f^n(x_0) = x_0 \text{ e } f^j(x_0) \neq x_0, \{1 \leq j \leq n-1\}.$$

Temos $(f^h)^k(x_0) = f^{hk}(x_0)$ e que se $f^{hk}(x_0) = x_0$ então $n|hk$ e portanto $hk = an$. Queremos o menor k tal que $f^{hk}(x_0) = x_0$, ou seja, precisamos encontrar o menor k tal que

$$hk = an.$$

Em outras palavras, queremos que hk seja o menor múltiplo de n, o que implica em

$$hk = mmc(h,n).$$

Como $mmc(h,n)\cdot mdc(h,n) = h\cdot n$, obtemos $mmc(h,n) = \dfrac{h\cdot n}{mdc(h,n)}$ e assim

$$hk = mmc(h,n) = \frac{h\cdot n}{mdc(h,n)} \implies hk = \frac{h\cdot n}{mdc(h,n)} \implies k = \frac{n}{mdc(h,n)}$$

Desta maneira concluímos que x_0 é um ponto de período $n/mdc(n,h)$ em f^h .

Reciprocamente x_0 é um ponto m-periódico em f^h, logo

$$(f^h)^m(x_0) = x_0 \text{ e } (f^h)^j(x_0) \neq x_0,\ 1 \leq j \leq n-1.$$

Seja n o período de x_0 em f então $n|hm$. Sendo assim existe d tal que $nd = hm$. Pela demonstração anterior temos que $m = \dfrac{n}{mdc(h,n)}$ portanto

$$nd = \frac{hn}{mdc(h,n)} \implies h = d\cdot mdc(h,n) \implies d|h.$$

Até aqui temos que $h = d\cdot mdc(h,n)$ e $m = \dfrac{n}{mdc(h,n)}$ ou seja $n = m\cdot mdc(h,n)$ logo

$$mdc(h,n) = mdc\left(d\cdot mdc(h,n), m.mdc(h,n)\right) \implies mdc(h,n) = mdc(d,m)\cdot mdc(h,n) \implies (d,m) = 1.$$

Assim x_0 é um ponto de período mh/d em f, $d|h$ e $mdc(d,m) = 1$ $\square$

No capítulo seguinte apresentaremos uma reordenação dos números naturais e usaremos os conceitos aqui estabelecidos para realizar a demonstração do Teorema de Sarkovskii.

5 O Teorema de Sarkovskii

Neste capítulo discorremos de forma resumida sobre alguns dos feitos do matemático Sarkovskii. Em seguida enunciaremos e provaremos seu teorema. Os principais artigos usados para as demonstrações aqui contidas foram: Briend (2), Moitinho (8), Nascimento (11), Lima (6) e Benoist (1).

5.1 Um pouco da historia de Sarkovskii

Segundo o site MacTutor History of Mathematics archive (12), o matemático Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky tem seu nome citado de várias maneiras. Às vezes seu primeiro nome aparece como Aleksandr ou Alexander, enquanto seu sobrenome aparece como Sharkovskii ou Sarkovskii. Neste texto vamos nos referir à ele, preferencialmente, como Sarkovskii.

Figura 5.1: Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky Fonte: MacTutor (12)

Nascido 7 de dezembro de 1936 em Kiev na Ucrânia, o matemático Sarkovskii venceu a competição de Olimpíadas de Matemática de Kiev em 1952 e logo em seu primeiro ano de graduação produziu seus primeiros resultados originais de matemática, escrevendo sobre as assíntotas de curvas algébricas. Em 1958 concluiu seu mestrado no Departamento de Mecânica e Matemática da Universidade Estadual de Kiev (Department of Mechanics and Mathematics of

Kiev State University) e trabalhou em sua tese no Instituto de Matemática (Institute of Mathematics at the Ukrainian) uma filial ucraniana da Academia de Ciências da URSS (USSR Academy of Sciences). Em 1961 foi premiado com um título equivalente ao Ph.D e já havia publicado uma série de artigos de alta qualidade (todos em russo), tais como :

- Necessary and sufficient conditions for convergence of one-dimensional iterative processes (1960)
- Rapidly converging iterative processes (1961), Solutions of a class of functional equations (1961)
- The reducibility of a continuous function of a real variable and the structure of the stationary points of the corresponding iteration process (1961).

Em 1967 defendeu sua tese de doutorado e em 1974 foi nomeado chefe do Departamento de Equações Diferenciais no Instituto de Matemática da filial ucraniana da Academia de Ciências da URSS. Ajudou na criação de um Departamento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos na Academia e tornou-se chefe do departamento em 1986. As principais áreas de interesse de Sarkovskii são a teoria dos sistemas dinâmicos, da estabilidade e das oscilações. Ele também trabalha na teoria de equações diferenciais funcionais e no estudo de equações de diferenças e suas aplicações. Para mais informações sobre premiações consulte seu perfil acadêmico em (14).

5.2 A ordem de Sarkovskii

Para a demonstração de seu teorema, Sarkovskii reordenou os números naturais como definido a seguir:

Definição 5.1 (Ordem de Sarkovskii)**.** *Definimos a ordenação de Sarkovskii dos números naturais positivos da seguinte maneira*

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 3 & \rhd & 5 & \rhd & 7 & \rhd & \cdots & \rhd & 2n+1 & \rhd & \cdots \\ \rhd & 2\cdot 3 & \rhd & 2\cdot 5 & \rhd & 2\cdot 7 & \rhd & \cdots & \rhd & 2\cdot(2n+1) & \rhd & \cdots \\ \rhd & 2^2\cdot 3 & \rhd & 2^2\cdot 5 & \rhd & 2^2\cdot 7 & \rhd & \cdots & \rhd & 2^2\cdot(2n+1) & \rhd & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\ \rhd & 2^m\cdot 3 & \rhd & 2^m\cdot 5 & \rhd & 2^m\cdot 7 & \rhd & \cdots & \rhd & 2^m\cdot(2n+1) & \rhd & \cdots \\ \rhd & 2^m & \rhd & 2^{m-1} & \rhd & 2^{m-2} & \rhd & \cdots & \rhd & 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 & \rhd & 1 \end{array}$$

Se a precede b na ordem de Sarkovskii denotamos por $a \rhd b$. Por outro lado se a sucede b na ordem de Sarkovskii $a \lhd b$.

Tal reordenação dos números naturais servirá de base para a aplicação do seu teorema, como veremos a seguir.

5.3 O Teorema de Sarkovskii

Teorema 5.1 (O Teorema de Sarkovskii)**.** *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to I$ uma função contínua definida no Intervalo I. Se f possui um ponto n-periódico e $n \triangleright m$ na ordem de Sarkovskii então f possui ponto m-periódico.*

Inicialmente vejamos a demonstração para $n = 2^k$, em seguida veremos os casos que cobrem os demais números naturais.

Proposição 5.1. *Se f possui ponto n-periódico com $n = 2^k$ então f possui ponto m-periódico com $m = 2^l$ e para todo $0 \leq l < k$*

Demonstração. Como f possui ponto 2^k-periódico pelo Teorema 3.2 temos que f possui ponto de período 1. Logo o teorema é válido para $l = 0$. Mostremos a validade para $0 < l < k$. Por hipótese temos que

$$f^n(c) = c \text{ e } f^j(c) \neq c,\ 1 \leq j \leq n-1.$$

Pelo Lema 4.5 temos que c é um ponto de período $\tilde{k}$ em $f^{m/2}$ em que

$$\tilde{k} = \frac{n}{mdc(n, m/2)} = \frac{2^k}{mdc(2^k, 2^{l-1})} = \frac{2^k}{2^{l-1}} = 2^{k-l+1}.$$

Dessa maneira c é ponto de período par de $f^{m/2}$. Logo, pela Proposição 4.1, existe z tal que z é ponto 2-periódico de $f^{m/2}$ e portando, pelo Lema 4.5, z é um ponto periódico de f com período

$$\frac{2.(m/2)}{d} = \frac{m}{d},$$

em que $d|(m/2)$ e $mdc(d, 2) = 1$.

Temos que $d|(m/2)$ portanto $d = 2^i$, $0 \leq i \leq 2^{l-1}$ ora mas $mdc(d, 2) = 1$ logo $d = 1$. Temos então que z é um ponto periódico de f com período $\dfrac{m}{d} = m = 2^l$ para todo $0 \leq l < k$. □

Proposição 5.2. *Se f possui ponto n-periódico com $n = p2^k$, p ímpar e $k \geq 0$ então f possui ponto m periódico em que :*

i. $m = q.2^k$, para todo inteiro q par e positivo *ii.* $m = q.2^k$*, para todo* $q > p$ *e* q *ímpar*

iii. $m = 2^l$*, para todo* $l \leq k$

Demonstração. i. Pela hipótese f possui ponto n-periódico com $n = p.2^k$, p ímpar então f^{2^k} possui ponto p-periódico e, pelo Corolário 4.0.1, f^{2^k} possui ao menos um ponto q-periódico com $q > 0$ e q par. Assim, usando o Lema 4.5, temos que este ponto possui período $\tilde{k}$ em f em que

$$\tilde{k} = \frac{q.2^k}{d}, \, d|2^k \text{ e } mdc(d,q) = 1.$$

Temos $d|(2^k)$ portanto $d = 2^i$, $0 \leq i \leq l-1$ ora mas $mdc(d,q) = 1$ e q é par logo $d = 1$.

Portanto temos a existência de um ponto $\tilde{k}$-periódico de f em que $\tilde{k} = q.2^k$, q par.

ii. Pela hipótese f possui ponto n-periódico com $n = p.2^k$ então f^{2^k} possui ponto p-periódico. Como p é ímpar, pelo Lema 4.4, f^{2^k} possui ponto q-periódico com $q > p$ e q ímpar. Assim, usando o Lema 4.5, temos este ponto possui período $\tilde{k}$ em f onde:

$$\tilde{k} = \frac{q.2^k}{d}, \, d|2^k \text{ e } mdc(d,q) = 1$$

Temos que $d|(2^k)$ portanto $d = 2^i$, $0 \leq i \leq k$. Seja $l = k - i$ assim temos:

$$\tilde{k} = \frac{q.2^k}{d} = \frac{q.2^k}{2^i} = q.2^{k-i} = q.2^l$$

Se $l = k$ teremos $\tilde{k} = q.2^k$ por outro lado se $l < k$ existe ponto de período $q.2^l$ em f. Pelo item i desta demonstração podemos encontrar qualquer ponto de período par em f. Em particular, f possui ponto de período par $(q.2^{k-l}).2^l = q.2^k$.

iii. Pelo item i. temo que f possui pontos periódicos de período $m = q.2^k$, $q > 0$ e q par. Se $q = 2$ temos $m = 2^{k+1}$ e pelo que vimos no item i. concluímos que f possui período 2^l para todo $0 \leq l \leq k+1$. □

Assim pelo Corolário 4.0.1 e as Proposições 5.1 e 5.2 cobrimos todas as possibilidades da ordenação de Sarkovskii portanto está demonstrado o Teorema de Sarkovskii.

6 O Recíproco do Teorema de Sarkovskii

Neste capítulo provaremos um teorema que é conhecido como inverso ou recíproco do Teorema de Sarkovskii no qual estaremos interessados em responder ao seguinte questionamento: Dados $r, s \in \mathbb{N}$, com $s \triangleleft r$ na ordem de Sarkovskii, existe uma função contínua, definida num certo intervalo, que possui pontos r-periódicos, mas não tem possui pontos s-periódicos?

As demonstrações que faremos neste capítulo se baseiam nas publicações de Elaydi (4), Moitinho (9), Ochoa (13) e McKinney (7).

6.1 Conceitos prévios

Nessa seção faremos algumas demonstrações que serão fundamentais para entendimento e demonstração do recíproco.

Lema 6.1. *Se para algum $m \in \mathbb{N}$, $f^m([a,b]) = [c,d]$ e f não possui ponto k-periódico no intervalo $[c,d]$ então f não possui ponto k-periódico no intervalo $[a,b]$.*

Demonstração. Usando o algorítimo da divisão de Euclides temos que existem $d,\ s \in \mathbb{N}$ tais que $m = dk + s$, com $0 \leq s < k$. Suponha, por absurdo, que f possua ponto k periódico em [a,b] ou seja, existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f^k(x_0) = x_0$ e $f^t(x_0) \neq x_0$ para todo $t \in \{1, 2, ..., k-1\}$. Assim temos que

$$f^m(x_0) = f^{dk+s}(x_0) = f^s(f^{dk}(x_0)) = f^s(x_0).$$

Pela hipótese temos $f^m(x_0) = f^s(x_0) \in [c,d]$ e $[c,d]$ não possui ponto k-periódico de f. Temos que pode ocorrer apenas uma das duas situações possíveis:

i. Ou $f^k(f^s(x_0)) \neq f^s(x_0)$,
ii. Ou existe $0 < t < k$ tal que $f^t(f^s(x_0)) = f^s(x_0)$ ou seja $f^s(x_0) = f^{t+s}(x_0))$.

Vamos mostrar que nos dois casos ocorrem contradições.

Primeiramente observe que:

$$f^k(f^s(x_0)) = f^{k+s}(x_0) = f^{s+k}(x_0).$$

como $f^k(x_0) = x_0$ temos que

$$f^k(f^s(x_0)) = f^s(x_0).$$

Logo a situação $i.$ não pode ocorrer.

Vamos supor que a situação $ii.$ ocorra. Observe que

$$\begin{aligned} x_0 &= f^k(x_0) \\ &= f^{k-s}(f^s(x_0)). \end{aligned}$$

Como, por $ii.$, $f^s(x_0) = f^{t+s}(x_0)$ temos

$$\begin{aligned} x_0 &= f^{k-s}(f^{t+s}(x_0)) \\ &= f^{k-s+t+s}(x_0) \\ &= f^{k+t}(x_0) \\ &= f^{t+k}(x_0) \\ &= f^t(f^k(x_0)) \\ &= f^t(x_0) \end{aligned}$$

Chegamos então em uma contradição pois $f^t(x_0) \neq x_0$ portanto f não possui ponto k-periódico no intervalo $[a,b]$. □

O lema demonstrado nos auxiliará em demonstrações futuras, uma vez que primeiramente encontraremos um intervalo $I_j \subset I$ que não possui pontos de determinado período de uma função f e, em seguida, podemos iterar por f os demais intervalos de I de modo que suas imagens recaiam sobre I_j. Por fim aplicar o Lema 6.1 para concluir a inexistência de pontos de determinado período em f para todo intervalo I.

Lema 6.2. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com* $f(x) = ax + b$ *então* $f^k(x) = a^k x + b\left(\frac{a^k - 1}{a-1}\right)$ *para* $k \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração. Vamos provar o teorema usando o Princípio de Indução Finita.
Considere a hipótese de indução: $f^k(x) = a^k x + b\left(\frac{a^k - 1}{a-1}\right)$ mostremos por indução sua validade para todo $k \in \mathbb{N}^*$.
Temos que a hipótese de indução é válida para k = 1 pois

$$f^1(x) = f(x) = ax + b = a^1 x + b\left(\frac{a^1 - 1}{a-1}\right).$$

Suponha que seja válida a hipótese de indução para k. Vamos provar sua validade para $k+1$ ou seja $f^{k+1}(x) = a^{k+1}x + b\left(\dfrac{a^{k+1}-1}{a-1}\right)$. Temos que

$$\begin{aligned}
f^{k+1}(x) &= f^k(f(x)) \\
&= f^k(ax+b) \\
&= a^k(ax+b) + b\left(\frac{a^k-1}{a-1}\right) \\
&= a^{k+1}x + a^k b + b\left(\frac{a^k-1}{a-1}\right) \\
&= a^{k+1}x + b\left(a^k + \frac{a^k-1}{a-1}\right) \\
&= a^{k+1}x + b\left[\frac{a^k.(a-1) + a^k - 1}{a-1}\right] \\
&= a^{k+1}x + b\left[\frac{a^{k+1} - a^k + a^k - 1}{a-1}\right] \\
&= a^{k+1}x + b\left(\frac{a^{k+1}-1}{a-1}\right).
\end{aligned}$$

Logo $f^k(x) = a^k x + b\left(\dfrac{a^k-1}{a-1}\right)$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Lema 6.3. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = ax+b$, $|a| > 1$ e $p = -\frac{b}{a-1}$ o ponto fixo de f. Se existem um intervalo $I = [c,d]$ e $x \in I$ tais que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos $f^k(x) \in I$ então $\lim\limits_{k\to+\infty} f^k(x) = p$.*

Demonstração. Temos que $|a| > 1$, sem perda de generalidade vamos supor $a > 1$. Por hipótese temos que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos $f^k(x) \in I$ assim

$$\begin{aligned}
c \le f^k(x) \le d \quad &\Longrightarrow \quad c \le a^k x + b\left(\frac{a^k-1}{a-1}\right) \le d \\
&\Longrightarrow \quad \frac{c}{a^k} \le \frac{a^k x}{a^k} + \frac{b}{a^k}\left(\frac{a^k-1}{a-1}\right) \le \frac{d}{a^k} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{c}{a^k} \le x + \frac{b}{a-1}\left(1 - \frac{1}{a^k}\right) \le \frac{d}{a^k}
\end{aligned}$$

Desta maneira quando quando $k \to +\infty$ temos

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{c}{a^k} \le \lim_{k\to+\infty}\left[x + \frac{b}{a-1}\left(1 - \frac{1}{a^k}\right)\right] \le \lim_{k\to+\infty} \frac{d}{a^k}$$

ou seja

$$0 \le x + \frac{b}{a-1} \le 0$$

Assim, pelo Teorema do Confronto, temos que

$$x + \frac{b}{a-1} = 0 \implies x = -\frac{b}{a-1} = p.$$

Logo $\lim_{k \to +\infty} f^k(x) = p$. □

O lema demonstrado será amplamente utilizado nas condições dadas, o mesmo garante que não existem pontos k-periódicos no intervalo I.

6.2 Inverso do Teorema de Sarkovskii

No capítulo anterior apresentamos a seguinte ordem de Sarkovskii

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 3 & \triangleright & 5 & \triangleright & 7 & \triangleright & \cdots & \triangleright & 2n+1 & \triangleright & \cdots \\
\triangleright & 2\cdot 3 & \triangleright & 2\cdot 5 & \triangleright & 2\cdot 7 & \triangleright & \cdots & \triangleright & 2\cdot(2n+1) & \triangleright & \cdots \\
\triangleright & 2^2\cdot 3 & \triangleright & 2^2\cdot 5 & \triangleright & 2^2\cdot 7 & \triangleright & \cdots & \triangleright & 2^2\cdot(2n+1) & \triangleright & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\
\triangleright & 2^m\cdot 3 & \triangleright & 2^m\cdot 5 & \triangleright & 2^m\cdot 7 & \triangleright & \cdots & \triangleright & 2^m\cdot(2n+1) & \triangleright & \cdots \\
\triangleright & 2^m & \triangleright & 2^{m-1} & \triangleright & 2^{m-2} & \triangleright & \cdots & \triangleright & 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 & \triangleright & 1
\end{array}$$

E provamos que se uma função possui ponto periódico de período l, em que l precede k na ordem de Sarkovskii, ou seja $l \triangleright k$, então essa função também possuirá ponto de período k.

Por outro lado, dados quaisquer inteiros positivos r e s, com $s \triangleright r$, é possível definir uma função contínua que possui ponto de período r e não possui ponto do período s?

Para responder a tal pergunta vamos enunciar e demonstrar um teorema conhecido como O inverso do Teorema de Sarkovskii.

Teorema 6.1 (O inverso do Teorema de Sarkovskii)**.** *Dado $r \in \mathbb{N}$ existe uma função contínua definida em um intervalo I_r, $f : I_r \to I_r$, tal que f possui ponto r-periódico mas não possui ponto s-periódico em I_r, para todo s que precede r na ordem de Sarkovskii isto é $s \triangleright \cdots \triangleright r$.*

Para demonstrar este teorema iremos particionar os períodos em três conjuntos:

1. Períodos ímpares
2. Períodos da forma $2^m \cdot p$, com p ímpar
3. Períodos que são potências de 2.

Como fizemos para o Teorema de Sarkovskii, cobriremos todas as possibilidades de períodos, que são números naturais maiores que zero. Em cada um dos casos vamos criar funções lineares definidas por partes que atendem ao teorema e como estratégia, subdividiremos cada caso em duas partes: inicialmente mostraremos um caso base em seguida generalizamos e, caso necessário, demonstramos usando o Princípio de Indução Finita (PIF).

As demonstrações usando o PIF são extensões dos casos anteriores e usam os mesmos conceitos e definições que, apesar de parecerem repetitivos, se fazem necessárias para manter o rigor matemático.

6.3 Períodos ímpares

Inicialmente vamos construir uma função f que possui pontos 5-periódicos mas não possui pontos 3-periódicos. Em seguida a usaremos para construir uma função que possui ponto de período $r = 2n+1$ e não possui ponto de período $s = 2n-1$. E por fim concluir que tal propriedade é valida para todo s ímpar que precede r na ordenação de Sarkovskii.

Seja $f : [1,5] \to [1,5]$ uma função contínua tal que

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \in [1,2] \\ -x+7, & \text{se } x \in [2,3] \\ -2x+10, & \text{se } x \in [3,4] \\ -x+6, & \text{se } x \in [4,5] \end{cases}$$

Observe que $f(1) = 3,\ f(2) = 5,\ f(3) = 4,\ f(4) = 2$ e $f(5) = 1$ e temos a seguinte órbita 5-periódica:

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1$$

assim os pontos $1,\ 2,\ 3,\ 4$ e 5 não são 3-periódicos

A função f pode ser representada pelo gráfico da figura 6.1 .

Dessa maneira observe, por exemplo, que o intervalo intervalo $[1,2]$ possui o seguinte caminho

$$[1,2] \longrightarrow [3,5] \longrightarrow [1,4] \longrightarrow [2,5] \longrightarrow [4,5] \longrightarrow [1,2].$$

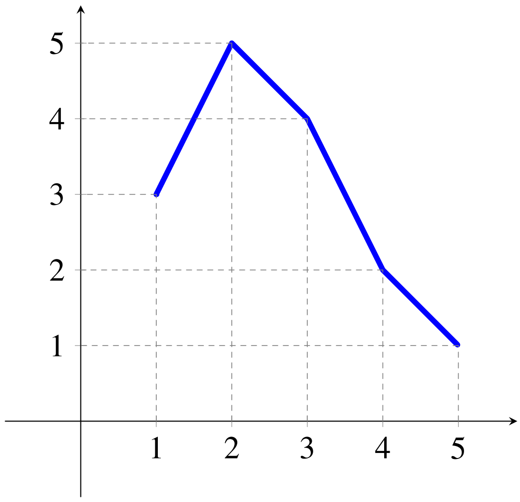

Figura 6.1: Gráfico da função f.

Iniciaremos um estudo sobre o que ocorre com os pontos de período 3 em cada uma das partições formadas pelos elementos $1,\ 2,\ 3,\ 4$ e 5 ou seja: $[1,2],\ [2,3],\ [3,4]$ e $[4,5]$.

Iniciemos pelo intervalo $[1,2]$ no qual a função f não possui pontos 3-periódicos. Basta notar que $f^3([1,2]) = [2,5]$ logo $f^3([1,2]) \not\supset [1,2]$. Além disso $[1,2] \cap [2,5] = 2$ e já vimos que 2 é 5-periódico em f.

Obtemos o intervalo $[1,2]$ que não possui ponto 3-periódico em f assim podemos usá-lo como sendo o intervalo $[c,d]$ na demonstração do lema 6.1.

Ao iterarmos os intervalos $[2,3]$ e $[4,5]$ temos $f^2([2,3]) = [1,2]$, $f([4,5]) = [1,2]$ e como $[1,2]$ não possui ponto 3-periódico o Lema 6.1 nos garante que f não possui ponto 3-periódico nestes intervalos.

Resta verificarmos o intervalo $[3,4]$, observe as suas iterações até $f^3[3,4]$

$$[3,4] \longrightarrow [2,4] \longrightarrow [2,5] \longrightarrow [1,5]$$

Até a terceira iteração, todos os vértices do Grafo cobrem o intervalo $[3,4]$ e ainda não podemos concluir nada sobre a periodicidade dos pontos. Ora mas, $f[3,4] = [2,4]$ assim se $x \in [3,4]$ então $f(x) \in [2,3]$ ou $f(x) \in [3,4]$.

Caso $f(x) \in [2,3]$, como f não possui ponto 3-periódico em $[2,3]$, basta aplicar o Lema 6.1 que concluímos que x não é 3-periódico em f. Por outro lado se $f(x) \in [3,4]$ teremos $f^2(x) \in [2,3]$ ou $f^2(x) \in [3,4]$. Novamente se $f^2(x) \in [2,3]$ então x não é 3-periódico em f no intervalo $[3,4]$. Se $f^2(x) \in [3,4]$ teremos as mesmas possibilidades vistas anteriormente. Podemos então fazer uma pequena generalização.

Seja $x \in [3,4]$ se, para algum $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) \in [2,3]$ temos que alguma iterada de x está em $[1,2]$ e assim x não pode ser ponto 3-periódico de f. Por outro lado, se para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que $x \in [3,4]$ tal que $f^k(x) \in [3,4]$ então pelo Lema 6.3 temos que $f^k(x)$ converge para o ponto fixo de f portanto não existe ponto 3-periódico de f no intervalo $[3,4]$.

Portanto concluímos que f não possui pontos 3-periódicos para todo $x \in [1,5]$.

Lema 6.4. *Sejam r, s naturais ímpares maiores que 1, em que $s \triangleright r$ na ordem de Sarkovskii então existe uma função que possui pontos de período r mas não possui pontos de período s para todo $s \triangleright r$.*

Demonstração. Seja $r = 2n+1$ e $s = 2n-1$ com $m, n \in \mathbb{N}$ vamos construir uma função que possui pontos de período $2n+1$ mas não possui pontos de período $2n-1$. Para tal seja a função $f : [1, 2n+1] \to [1, 2n+1]$, definida linearmente em cada intervalo $[j, j+1]$, tal que

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(1) & = & n+1 & \qquad & f(n+2) & = & n \\
f(2) & = & 2n+1 & & f(n+3) & = & n-1 \\
f(3) & = & 2n & & f(n+4) & = & n-2 \\
f(4) & = & 2n-1 & & f(n+5) & = & n-3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
f(i) & = & 2n+3-i & & f(n+k) & = & n+2-k \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
f(n) & = & n+3 & & f(2n) & = & 2 \\
f(n+1) & = & n+2 & & f(2n+1) & = & 1
\end{array}$$

com $2 \leq i \leq n+1$ e $2 \leq k \leq n+1$.

A figura 6.2 que representa a órbita desses inteiros

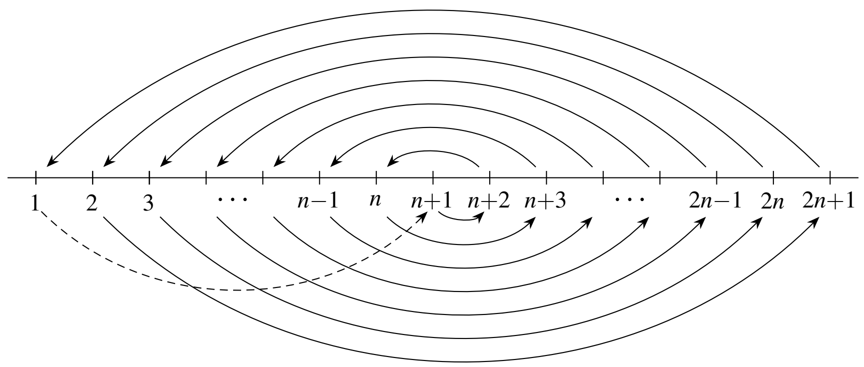

Figura 6.2: Órbita dos inteiros em f

Pela construção feita, todos os inteiros pertencentes ao intervalo $[1, 2n+1]$ são $(2n+1)$-periódicos em f portanto não podem ser $(2n-1)$-periódicos.

Assim podemos construir uma função f que atende à todos os parâmetros estabelecidos anteriormente da seguinte maneira de tal forma que ela seja definida por partes e construída apenas por funções lineares logo

$$f(x) = \begin{cases} nx+1, & \text{se} \quad x \in [1,2], \\ -x+2n+3, & \text{se} \quad x \in [2,n+1], \\ -2x+3n+4, & \text{se} \quad x \in [n+1,n+2], \\ -x+2n+2, & \text{se} \quad x \in [n+2,2n+1]. \end{cases}$$

Considerando $f(x)$ anteriormente definida, vale observar que $f(x) = x$ ocorre apenas quando $x = n + \dfrac{4}{3} \in [n+1, n+2]$. Em outras palavras apenas quando $f(x) = -2x+3n+4$, $x \in [n+1, n+2]$ poderíamos encontrar um ponto fixo de f.

Após iterar $2n-1$ vezes o intervalo $[1,2]$ obtemos o seguinte caminho

$$\begin{aligned} [1,2] \longrightarrow & [n+1,2n+1] \longrightarrow [1,n+2] \longrightarrow [n,2n+1] \longrightarrow [1,n+3] \\ \longrightarrow & [n-1,2n+1] \longrightarrow \ldots \longrightarrow [1,2n] \longrightarrow [2,2n+1] \end{aligned}$$

Desta maneira obtemos $f^{2n-1}([1,2]) = [2,2n+1]$, como $[1,2] \cap [2,2n+1] = 2$ e 2 não é ponto $(2n-1)$-periódico em f concluímos que o intervalo $[1,2]$ não possui pontos $(2n-1)$-periódicos em f. Prosseguindo, observe que

$$\begin{array}{ccc} f^{2n}([n+1,2n+1]) & = & [1,2] \\ f^{2n-1}([1,n+2]) & = & [1,2] \\ \vdots & = & \vdots \\ f^{2}([2,3]) & = & [1,2] \\ f([2n,2n+1]) & = & [1,2] \end{array}$$

Como f não possui pontos $(2n-1)$-periódicos em $[1,2]$ pelo Lema 6.1 temos que f também não possui pontos $(2n-1)$-periódicos $[2,n+1] \cup [n+2,2n+1]$.

Resta mostrarmos o que ocorre no intervalo $[n+1, n+2]$ para tal observe que $f([n+1,n+2]) = [n,n+2]$, logo se $x \in [n+1,n+2]$ então $f(x) \in [n,n+1]$ ou $f(x) \in [n+1,n+2]$.

Primeiramente, se $f(x) \in [n,n+1]$, como f não possui ponto $(2n-1)$-periódico de $[n,n+1]$, basta aplicar o Lema 6.1 que concluímos que x não é ponto $2n-1$-periódico em f no intervalo $[n+1,n+2]$.

Por outro lado se $f(x) \in [n+1,n+2]$ teremos $f^2(x) \in [n,n+1]$ ou $f^2(x) \in [n+1,n+2]$. Novamente se $f^2(x) \in [n,n+1]$ então x não possui ponto $(2n-1)$-periódico em f no intervalo $[n+1,n+2]$. Se $f^2(x) \in [n+1,n+2]$ teremos as mesmas possibilidades vistas anteriormente.

Generalizando, se para algum $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) \in [n,n+1]$ temos que alguma iterada de x está em $[1,2]$ então x não pode ser ponto $(2n-1)$-periódico de f em $[n+1,n+2]$. Por outro lado, se para todo $k \in \mathbb{N}$ temos $x \in [n+1,n+2]$ e $f^k(x) \in [n+1,n+2]$ então, como $f(x) = -2x+3n+4$ no intervalo $[n+1,n+2]$, temos, pelo Lema 6.3, que f não possui ponto $2n-1$ periódico nesse intervalo.

Finalmente, por tudo que foi mostrado, concluímos que f não possui pontos $(2n-1)$-periódicos no intervalo $[1,2n+1]$. Isto é o suficiente para mostrar que f não possui ponto de período $2m-1$, para $1 < m < n$, pois, pelo Teorema de Sarkovskii, a existência um desses pontos implicaria que f possui pontos $(2n-1)$-periódicos. $\square$

6.4 Período da forma $2^m \cdot p$, com p ímpar

Iniciaremos uma função que possui ponto $(2\cdot 5)$-periódico mas não tenha ponto $(2\cdot 3)$-periódico. Considere a função $f : [1,5] \to [1,5]$ como visto anteriormente no início da seção anterior em que

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \in [1,2] \\ -x+7, & \text{se } x \in [2,3] \\ -2x+10, & \text{se } x \in [3,4] \\ -x+6, & \text{se } x \in [4,5] \end{cases}$$

Vamos definir a função $g : [1,13] \to [1,13]$ da seguinte maneira

$$g(x) = \begin{cases} f(x)+8 & \text{se} \quad x \in [1,5] \\ -2x+19 & \text{se} \quad x \in [5,9] \\ x-8 & \text{se} \quad x \in [9,13] \end{cases}$$

Observe representação de g na figura 6.3 .

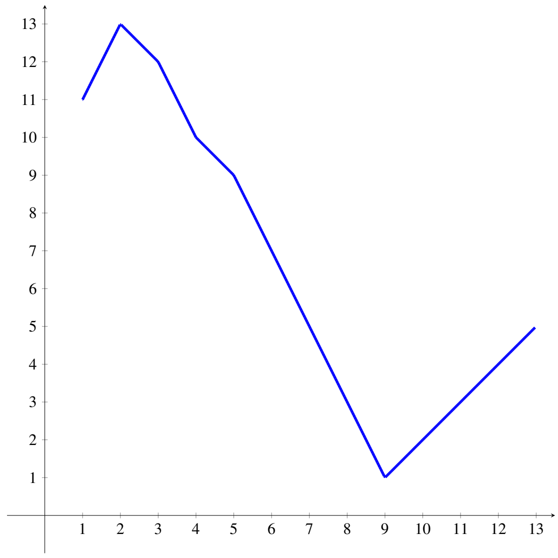

Figura 6.3: Gráfico de g.

De um modo geral a função g dobra o período de cada um dos pontos da função f. Como os pontos $1,\ 2,\ 3,\ 4$ e 5 tinham período 5 em f, em g passarão a ter período 10 já que a órbita de cada um desses pontos em g corresponde à órbita f com acréscimo de um ponto entre cada dois de seus pontos. Por outro lado, em $x \in [5,9]$ pode estar o único ponto fixo de g.

Assim temos que os inteiros $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13$ são pontos de 10-periódicos em g logo não pode ser 6-periódicos em g. Observe o caminho órbita desses pontos em g

$$1 \longrightarrow 11 \longrightarrow 3 \longrightarrow 12 \longrightarrow 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 2 \longrightarrow 13 \longrightarrow 5 \longrightarrow 9 \longrightarrow 1$$

Agora considere $x \in [1,5]$ assim $f(x) \in [1,5]$ e como $g(x) = f(x) + 8$ temos $g(x) \in [9,13]$ portanto

$$g^2(x) = g(g(x)) = g(f(x)+8) = f(x)+8-8 = f(x)$$

Dessa maneira $g^2(x) = f(x)$ e como f não possui pontos 3-periódicos em $[1,5]$ temos que g não possui pontos 2.3-periódicos em $[1,5]$.]

Para o intervalo $[9,13]$ note que $g([9,13]) = [1,5]$ assim, aplicando o lema 6.1, concluímos que g não possui pontos 6-periódicos em $[9,13]$.

Como fizemos anteriormente na função f, se $x \in [5,9]$ e para algum natural k tivermos $f^k(x) \notin [5,9]$ então, pelo lema 6.1, x não é ponto 6-periódico de f. Por outro lado se para todo k $f^k(x) \in [5,9]$ então pelo lema 6.3 temos x não é ponto 6-periódico de f. Como consequência a função f não possui ponto 6-periódico no intervalo $[5,9]$.

Finalmente, por tudo que foi visto, concluímos que g não possui pontos 6-periódicos no intervalo $[1,13]$.

Agora vamos usar um procedimento para construir uma função que possui pontos de período $2\cdot(2n+1)$ e que não possui pontos $2\cdot(2n-1)$-periódicos. Para tal seja $f:[1,1+h]\to[1,1+h]$ uma função que possui ponto $(2n+1)$-periódico e não possui ponto $(2n-1)$-periódico como no Lema 6.4 e seja $g:[1,1+3h]\to[1,1+3h]$ tal que

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+2h & \text{se} \quad x\in[1,1+h] \\ -2x+4h+3 & \text{se} \quad x\in[1+h,1+2h] \\ x-2h & \text{se} \quad x\in[1+2h,1+3h] \end{cases}$$

Seja $x\in[1,1+h]$ temos que $f(x)\in[1,1+h]$ logo $g(x)\in[1+2h,1+3h]$ e $g^2(x)=f(x)$ pois

$$g^2(x)=g(g(x))=g(f(x)+2h)=f(x)+2h-2h=f(x).$$

Assim, como f não possui pontos $(2n-1)$-periódicos em $[1,1+h]$, temos que g não possui pontos $2.(2n-1)$-periódicos em $[1,1+h]$. Temos ainda que se p é ponto $(2n+1)$-periódico em f então pela forma que g foi definida, temos que p é ponto $2\cdot(2n+1)$-periódico em g.

Para o verificarmos o intervalo $[1+2h,1+3h]$ notamos que $g([1+2h,1+3h])=[1,1+h]$ então aplicamos o lema 6.1 e concluímos que g não possui pontos $2.(2n-1)$-periódicos em $[1+2h,1+3h]$.

Resta verificarmos o intervalo $[1+h,1+2h]$ no qual f possui ponto fixo. Seja $x\in[1+h,1+2h]$ se, para algum natural k, tivermos $f^k(x)\notin[1+h,1+2h]$ então, pelo Lema 6.1, x não é ponto $2.(2n-1)$-periódico de f. Por outro lado, se para todo k tivermos $f^k(x)\in[1+h,1+2h]$ então pelo Lema 6.3 temos x também não é ponto $2.(2n-1)$-periódico de f. Como consequência a função f não possui ponto $2.(2n-1)$-periódico no intervalo $[1+h,1+2h]$.

Por fim, concluímos que g não possui pontos $2.(2n-1)$-periódicos no intervalo $[1,1+3h]$.

No lema a seguir mostraremos a existência de funções que possuem pontos de período $2^m\cdot(2n+1)$ mas não possuem pontos de período $2^m\cdot(2n-1)$.

Lema 6.5. *Sejam r, s, m e n naturais, em que $s\rhd r$ na ordem de Sarkovskii. Então existe uma função que possui pontos de período $r=2^m\cdot(2n+1)$ mas não possui pontos de período $s=2^m\cdot(2n-1)$ para todo $s\rhd r$.*

Demonstração. Usaremos o Princípio de Indução Finita para provar a existência de funções que possuam pontos $2^m \cdot (2n+1)$-periódicos mas que não possuam pontos $2^m \cdot (2n-1)$-periódicos. Para tal considere $g_0 \equiv f$ e $f : [1, 1+h] \to [1, 1+h]$ como definida anteriormente no Lema 6.4. Defina $g_m : [1, 1+(2^{m+1}-1)h] \to [1, 1+(2^{m+1}-1)h]$ da seguinte maneira:

$$g_m(x) = \begin{cases} g_{m-1}(x) + 2^m h & \text{se} \quad x \in [1, 1+(2^m-1)h] \\ -2^m x + 2^{2m} h + 2^m + 1 & \text{se} \quad x \in [1+(2^m-1)h, 1+2^m h] \\ x - 2^m h & \text{se} \quad x \in [1+2^m h, 1+(2^{m+1}-1)h] \end{cases}$$

A função g_m é conhecida como Função Double pois uma vez que um ponto possui período $2^{m-1} \cdot (2^n+1)$ em g_{m-1} teremos que esse ponto terá período $2 \cdot 2^{m-1} \cdot (2^n+1)$ em g_m pela forma com que esta função foi construída.

Se $m = 1$ temos a validade da afirmação pois como $g_0 \equiv g$ recaímos na situação provada anteriormente. Observe

$$g_1(x) = \begin{cases} g_0(x) + 2^1 h & \text{se} \quad x \in [1, 1+(2^1-1)h] \\ -2^1 x + 2^{2 \cdot 1} h + 2^1 + 1 & \text{se} \quad x \in [1+(2^1-1)h, 1+2^1 h] \\ x - 2^1 h & \text{se} \quad x \in [1+2^1 h, 1+(2^{1+1}-1)h] \end{cases}$$

Ou seja

$$g_1(x) = \begin{cases} g_0(x) + 2h & \text{se} \quad x \in [1, 1+h] \\ -2x + 4h + 3 & \text{se} \quad x \in [1+h, 1+2h] \\ x - 2h & \text{se} \quad x \in [1+2h, 1+3h] \end{cases}$$

Suponha que a afirmação seja válida para um certo m vamos provar sua validade para $m+1$. Temos que:

$$g_{m+1}(x) = \begin{cases} g_m(x) + 2^{m+1} h & \text{se} \quad x \in [1, 1+(2^{m+1}-1)h] \\ -2^{m+1} x + 2^{2m+2} h + 2^{m+1} + 1 & \text{se} \quad x \in [1+(2^{m+1}-1)h, 1+2^{m+1} h] \\ x - 2^{m+1} h & \text{se} \quad x \in [1+2^{m+1} h, 1+(2^{m+2}-1)h] \end{cases}$$

Para não carregar por demais a notação considere os intervalos A, B e C tais que:

$$\begin{aligned} A &= [1, 1+(2^{m+1}-1)h] \\ B &= [1+(2^{m+1}-1)h, 1+2^{m+1} h] \\ C &= [1+2^{m+1} h, 1+(2^{m+2}-1)h] \end{aligned}$$

Assim, seja $x \in A$ temos por hipótese de indução que $g_m(x) \in A$. Logo $g_{m+1}(x) \in C$ temos então que $g_{m+1}^2(x) = g_m(x)$ pois

$$g_{m+1}^2(x) = g_{m+1}(g_{m+1}(x)) = g_{m+1}(g_m(x) + 2^{m+1} h) = g_m(x) + 2^{m+1} h - 2^{m+1} h = g_m(x).$$

Dessa maneira, como pela construção e por hipótese de indução $g_m(x)$ não possui pontos $2^m \cdot (2n-1)$-periódicos em A, temos que g_{m+1} não possui pontos $2 \cdot 2^m(2n-1)$-periódicos em A.

Ao nos atentarmos para o intervalo C notamos $g(C) = A$ então, aplicamos o Lema 6.1 e concluímos que g_{m+1} não possui pontos $2^{m+1} \cdot (2n-1)$-periódicos em C.

Resta verificarmos o intervalo B. Seja $x \in B$. Se, para algum natural k, tivermos $g_{m+1}^k(x) \notin B$ então, pelo Lema 6.1, x não é ponto $2^{m+1} \cdot (2n-1)$-periódico de g_{m+1}. Por outro lado se para todo k tivermos $g_{m+1}^k(x) \in B$ então, pelo Lema 6.3, temos que x também não é ponto $2^{m+1} \cdot (2n-1)$-periódico de g_{m+1}. Assim a função g_{m+1} não possui ponto $2^{m+1} \cdot (2n-1)$-periódico no intervalo B.

Finalmente concluímos que g_{m+1} não possui pontos $2^{m+1} \cdot (2n-1)$-periódicos. Logo pelo Princípio de Indução Finita nossa hipótese é válida para todo inteiro $m \geq 1$. □

6.5 Períodos que são potências de 2

Vamos iniciar observando que a existência de ponto 1-periódico (ponto fixo) em uma função não implica na existência de pontos 2-periódicos. Para tal basta considerar a função real $f(x) = 1$ que apenas possui $x = 1$ como ponto fixo e todo $x \neq 1$ não possui período pois $f^k(x) = 1$, $k > 1$.

Prosseguindo vamos mostrar que a existência de pontos 2 periódicos em uma função não implica na existência de pontos 2^2-periódicos. Para tal seja $f : [1,2] \to [1,2]$ tal que $f(x) = -x+3$. Assim temos que $p = \dfrac{3}{2}$ é ponto fixo de f e

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(-x+3) = -(-x+3)+3 = x.$$

Assim, f possui pontos 2-periódicos para todo $x \in \{1,2\}$, excetuando $x = \dfrac{3}{2}$ que é ponto fixo logo não possui pontos 4-periódicos

Vamos agora construir uma função que possui pontos 2^2-periódicos mas não possui 2^3-periódicos logo considere a função $f : [1,4] \to [1,4]$ em tal que

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se} \quad x \in [1,2] \\ -2x+8 & \text{se} \quad x \in [2,3] \\ -x+5 & \text{se} \quad x \in [3,4] \end{cases}$$

que possui o seguinte gráfico

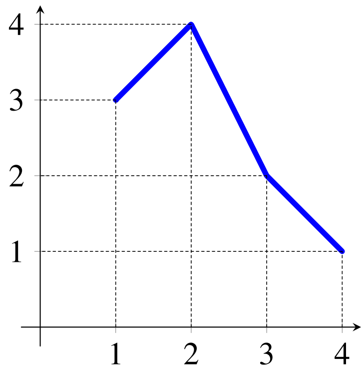

Figura 6.4: Gráfico de f

Deste modo temos que f possui pontos de período $2^2 = 4$ pois $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f(2) = 4$, $f(4) = 1$. Temos ainda que

$$f[1,2] = [3,4] \text{ e } f[3,4] = [1,2] \implies f^2[1,2] = [1,2] \text{ e } f^2[3,4] = [3,4].$$

Portanto se $x \in [1,2]$ então $f(x) \in [3,4]$, $f^2(x) \in [1,2]$, $f^3(x) \in [3,4]$ e $f^4(x) \in [1,2]$ assim

$$\begin{array}{rclclcl}
f(x) & = & x+2 & & & & \\
f^2(x) & = & f(f(x)) & = & f(x+2) & = & -x+3 \\
f^3(x) & = & f(f^2(x)) & = & f(-x+3) & = & -x+5 \\
f^4(x) & = & f(f^3(x)) & = & f(-x+5) & = & x
\end{array}$$

ou seja, todo ponto de $[1,2]$ é 4-periódico.

De forma semelhante, se $x \in [3,4]$ então $f(x) \in [1,2]$, $f^2(x) \in [3,4]$,$f^3(x) \in [1,2]$ e $f^4(x) \in [3,4]$ assim

$$\begin{array}{rclclcl}
f(x) & = & -x+5 & & & & \\
f^2(x) & = & f(f(x)) & = & f(-x+5) & = & -x+7 \\
f^3(x) & = & f(f^2(x)) & = & f(-x+7) & = & x-2 \\
f^4(x) & = & f(f^3(x)) & = & f(x-2) & = & x
\end{array}$$

como no caso anterior, todo ponto de $[3,4]$ é 4-periódico Sejam $q_2 \in [1,2]$, $q_2 \in [2,3]$ e $q_3 \in [3,4]$ os possíveis pontos fixos de f em cada um dos intervalos, temos que

$$\begin{array}{rclcrclcrclcrcl}
f(q_1) & = & q_1 & \implies & q_1+2 & = & q_1 & \implies & S & = & \varnothing, & & & & \\
f(q_2) & = & q_2 & \implies & -2q_2+8 & = & q_2 & \implies & 3q_2 & = & 8 & \implies & q_2 & = & 8/3, \\
f(q_3) & = & q_3 & \implies & -q_3+5 & = & q_3 & \implies & 2q_3 & = & 5 & \implies & q_3 & = & 5/2.
\end{array}$$

Logo q_1 não é ponto fixo, q_3 não é ponto fixo pois $5/2 \notin [3,4]$ e q_2 é o único ponto fixo de f. Assim temos que todos os pontos de $[1,2] \cup [3,4]$ são 4-periódicos portanto f não possui ponto 2^3-periódico em $[1,2] \cup [3,4]$.

Resta verificarmos o que ocorre no intervalo $[2,3]$ onde $f(x) = -2x+8$. Seja $x \in [2,3]$ se, para algum natural k, tivermos $f^k(x) \notin [2,3]$ então, pelo Lema 6.1, x não é ponto 2^3-periódico de f. Por outro lado se para todo k temos $f^k(x) \in [2,3]$ então, pelo Lema 6.3, concluímos que x também não é ponto 2^3-periódico de f. Como consequência a função f não possui ponto 2^3-periódico no intervalo $[2,3]$. Portanto não existe ponto 2^3-periódico em f.

O lema a seguir generalizará tal situação para todas as potências de 2.

Lema 6.6. *Sejam r, s e m naturais, em que $s \triangleright r$ na ordem de Sarkovskii, então existe uma função que possui pontos de período $r = 2^m$ mas não possui pontos de período $s = 2^{m+1}$ para todo $s \triangleright r$.*

Demonstração. Os casos em que $m = 0$, 1 e 2 já foram demonstrados nessa seção. Para os demais casos podemos usar o Princípio de Indução Finita e provar a existência de funções que possuam pontos (2^{n+2})-periódicos mas que não possuam pontos (2^{n+3})-periódicos para todo $n \geq 1$. Considere $g_0 \equiv f$ e $f : [1,4] \to [1,4]$ definida como no início desta seção. Defina $g_n : [1, 3.2^{n+1} - 2] \to [1, 3.2^{n+1} - 2]$ da seguinte maneira:

$$g_n(x) = \begin{cases} g_{n-1}(x) + 3.2^n & \text{se} \quad x \in [1, 3.2^n - 2] \\ -2^n x + 3.2^{2n} + 2^n + 1 & \text{se} \quad x \in [3.2^n - 2, 1 + 3.2^n] \\ x - 3.2^n & \text{se} \quad x \in [1 + 3.2^n, 3.2^{n+1} - 2] \end{cases}$$

Vamos provar por indução sobre n que a função g_n possui pontos (2^{n+2})-periódicos mas não possui pontos (2^{n+3})-periódicos. Iniciamos demonstrando a validade para o caso base. Quando $n = 1$ temos

$$g_1(x) = \begin{cases} g_0(x) + 6 & \text{se} \quad x \in [1,4] \\ -2x + 15 & \text{se} \quad x \in [4,7] \\ x - 6 & \text{se} \quad x \in [7,10] \end{cases}$$

Seja $x \in [1,4]$ então $g_0(x) \in [1,4]$, $g_1(x) \in [7,10]$ e temos que

$$g_1^2(x) = g_1(g_0(x) + 6) = g_0(x) + 6 - 6 = g_0.$$

Como $g_0(x)$ não possui pontos (2^3)-periódicos em $[1,4]$ temos que g_1 não possui pontos $(2 \cdot 2^3)$-periódicos em $[1,4]$. Uma vez que $f([7,10]) = [1,4]$ temos pelo Lema 6.1 que g_1 não possui pontos $(2 \cdot 2^3)$-periódicos em $[7,10]$.

Vamos verificar intervalo $[4,7]$ onde $f(x) = -2x+15$. Seja $x \in [4,7]$ se, para algum natural k, tivermos $g_1^k(x) \notin [4,7]$ então, pelo Lema 6.1, x não é ponto (2^4)-periódico de f. Por outro lado se para todo k temos $g_1^k(x) \in [4,7]$ então, pelo Lema 6.3, concluímos que x também não é ponto (2^4)-periódico de f. Como consequência a função f não possui ponto (2^4)-periódico no intervalo $[4,7]$. Assim quando $n = 1$ a hipótese de indução é válida.

Suponha que a afirmação seja válida para um certo n vamos provar sua validade para $n+1$. Temos que:

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} g_n(x) + 3.2^{n+1} & \text{se} \quad x \in [1, 3.2^{n+1} - 2] \\ -2^{n+1}x + 1 + 3.2^{2(n+1)} + 2^{n+1} & \text{se} \quad x \in [3.2^{n+1} - 2, 1 + 3.2^{n+1}] \\ x - 3.2^{n+1} & \text{se} \quad x \in [1 + 3.2^{n+1}, 3.2^{n+2} - 2] \end{cases}$$

Novamente, para não carregar por demais a notação, considere os intervalos A, B e C tais que:

$$\begin{aligned} A &= [1, 3.2^{n+1} - 2] \\ B &= [3.2^{n+1} - 2, 1 + 3.2^{n+1}] \\ C &= [1 + 3.2^{n+1}, 3.2^{n+2} - 2] \end{aligned}$$

Assim, se $x \in A$ temos pela hipótese de indução que $g_n(x) \in A$ logo $g_{n+1}(x) \in C$ e $g_{n+1}^2(x) = g_n(x)$. Como, por hipótese de indução, g_n não possui pontos (2^{n+3})-periódicos em A, temos que g_{n+1} não possui pontos de período $2 \cdot 2^{n+3} = 2^{n+4}$ em A.

Para o intervalo C, observe que $g(C) = A$ então, aplicamos o Lema 6.1 e concluímos que g_{n+1} não possui pontos (2^{n+4})-periódicos em C.

Vamos verificar intervalo B no qual $g_{n+1}(x) = -2^{n+1}x + 1 + 3.2^{2(n+1)} + 2^{n+1}$. Seja $x \in B$. Se, para algum natural k, tivermos $g_{n+1}^k(x) \notin B$ então, pelo Lema 6.1, x não é ponto (2^{n+4})-periódico de f. Por outro lado se para todo k temos $g_{n+1}^k(x) \in B$ então, pelo Lema 6.3, concluímos que x também não é ponto (2^{n+4})-periódico de f. Como consequência a função f não possui ponto (2^{n+4})-periódico no intervalo B. Finalmente concluímos que g_{n+1} não possui pontos 2^{n+4}-periódicos em $[1, 3 \cdot 2^{n+1} - 2]$. Logo pelo Princípio de Indução Finita nossa hipótese é válida para todo inteiro $n \geq 1$. Então está provado o teorema para todo m. $\square$

Assim são válidos os Casos 1, 2 e 3. Logo cobrimos todos os inteiros e está demonstrado o teorema.

1. Períodos ímpares,
2. Períodos da forma $2^m \cdot q$, q ímpar e
3. Períodos que são potências de 2.

7 Considerações Finais

O Teorema de Sarkovskii foi um marco no estudo matemático de sistemas dinâmicos o que desbravou novas áreas a serem estudadas. Por esse motivo esperamos que este texto leve matemáticos, estudantes e entusiastas ao aprofundamento de seus conhecimentos e, quem sabe, possam estendê-lo e combiná-lo com outras áreas como biologia, economia, ciência da computação dentre outros.

No desenvolvimento do trabalho seguimos os conceitos e a linha de raciocínio apresentados por Devaney (3). Foram consultados vários artigos na busca por textos, que além de didáticos, não tivessem a notação complexa. Desta maneira, para a demonstração do Teorema de Sarkovskii, destacamos o texto de autoria do Frances Jean-Yves Briend (2) que traz conceitos de grafos e coberturas de intervalos nas demonstrações.

O uso de conceitos da teoria de grafos além de despoluir a notação, traz praticidade e facilidade no entendimento e abstração do que é proposto. Outra estratégia utilizada visando maior clareza e entendimento do leitor, foi a de subdividir, quando possível, as demonstrações em casos.

Para a demonstração do inverso do teorema de Sarkovskii tivemos como referência principal o texto de Saber Elaydi (4) e também o texto em português de Valter Victor Cerqueira Moitinho (8). Tais textos foram escolhidos pela forma construtiva como discorriam sobre o recíproco usando funções definidas por partes e demonstrações que foram feitas usando o Princípio de Indução Finita.

Finalizo esta dissertação com a tradução de uma citação extraída e traduzida de (12) que mostra a importância e relevância do teorema:

> Qualquer monografia ou livro-texto contemporâneo sobre a teoria dos sistemas dinâmicos dificilmente pode ser imaginado sem o teorema de Sharkovsky. Este teorema lançou as bases de um novo ramo na teoria de sistemas dinâmicos - dinâmica combinatória. O teorema de Sharkovsky levou ao surgimento de numerosas obras nessa direção, nos quais muitas vezes se pode encontrar termos como o teorema de Sharkovsky, a ordem de Sharkovsky, o espaço de Sharkovsky, o conjunto de Sharkovsky, a estratificação de Sharkovsky e o período máximo no sentido de Sharkovsky.

Bibliografia

1 BENOIST, O. Le Théorème de Sarkovskii. 2003. Disponível em: <http://xavier.toonywood.org/popularization/mathpark/sarkovskii.pdf>. [Último acesso em 15-01-2019].

2 BRIEND, J.-Y. Le Théorème de Sarkovskii. *Le Journal de Maths des Élèves*, New York, v. 1, n. 3, p. 146–152, 1995.

3 DEVANEY, R. L. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. [S.l.]: Westview Press, 1992.

4 ELAYDI, S. *On a Converse of Sharkovsky's Theorem*. [S.l.]: Mathematical Association of America, 1996. v. 103. 386–392 p. ISSN 00029890, 19300972.

5 LI, T.-Y.; YORKE, J. A. Period Three Implies Chaos. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 82, n. 10, p. 985–992, 1975.

6 LIMA, Y. Teorema de Sarkovsky. *OBM*, 2008. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/teorema_de_sarkovsky.pdf>. [Último acesso em 15-01-2019].

7 MCKINNEY, W. Converse of Sarkovskii's Theorem. *MIT*, 2005. Disponível em: <http://ocw.alfaisal.edu/NR/rdonlyres/Mathematics/18-091Spring-2005/4CBE27EE-4B92-48ED-8214-253436603382/0/sarintro.pdf>. [Último acesso em 15-01-2019].

8 MOITINHO, V. V. C.; BARROS, J. F. Uma Demonstração do Teorema de Sarkovskii. *Resumo publicado nos anais do* 28^{o} *Colóquio Brasileiro de Matemática IMPA*, 2011.

9 MOITINHO, V. V. C.; BARROS, J. F. O Inverso do Teorema de Sarkovskii. *VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática*, 2012.

10 MUNIZ NETO, A. C. *Fundamentos de Cálculo*. [S.l.]: SBM, 2015.

11 NASCIMENTO, C. A. D. *Sobre Pontos Periódicos de Funções do Intervalo e do Disco*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, 2015.

12 O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Mactutor History of Mathematics Archive*. 2019. Disponível em: <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sharkovsky.html>. [Último acesso em 15-01-2019].

13 OCHOA, A. *Sarkovskii's Theorem and its Converse*. [S.l.]: Massachusetts Institute of Technology (MIT), 2005.

14 SHARKOVSKY, O. M. *Sharkovsky Oleksandr Mykolayovych*. 2019. Disponível em: <https://www.imath.kiev.ua/~asharkov/>. [Último acesso em 15-01-2019].