Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

Áreas de figuras planas e volumes envolvendo sólidos geométricos, uma abordagem conceitual e aplicada.

Teotônio Vieira da Silva

Teresina – PI
2019

Teotônio Vieira da Silva

Dissertação de Mestrado:

Áreas de figuras planas e volumes envolvendo sólidos geométricos, uma abordagem conceitual e aplicada.

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Estadual do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof^{o}. Dr. Afonso Norberto da Silva

Teresina – PI
2019

S586a Silva, Teotônio Vieira da.
Áreas de figuras planas e volumes envolvendo sólidos geométricos, uma abordagem conceitual e aplicada / Teotônio Vieira da Silva. - 2019.
80f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, 2019.
"Orientador(a): Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva."

1. Geometria. 2. Áreas de Figuras Planas. 3. Volumes de Sólidos Geométricos. 4. Problemas Aplicados. I. Título.

CDD: 510

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Grasielly Muniz Oliveira (Bibliotecária) CRB 3/1067

TEOTÔNIO VIEIRA DA SILVA

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E VOLUMES ENVOLVENDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS, UMA ABORDAGEM CONCEITUAL E APLICADA.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:

Afonso Norberto da Silva

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Presidente e Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

João Xavier da C. Neto

Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto- Examinador Externo
Universidade Federal do Piauí -UFPI

Pedro Antônio Soares Júnior

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior- Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

TERESINA
Julho/2019

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a toda minha família, que acreditou em mim, que me tornou capaz de realizar esse curso. Agradeço com uma atenção especial às pessoas que mais amo: à minha esposa Irenete e as minhas filhas Tamires e Ticianne, que entenderam e apoiaram todas as decisões tomadas por mim e, por isso, muitas das vezes, abondonei-as para estudar e fui compreendido por elas.

Agradeço, também, aos meus pais in memoria (Otacilio e Claudiana) pela vida, educação e moral que me deram, pois sei que sem seus ensinamentos não conseguiria seguir em frente. O meu muito obrigado ao meu amigo do curso Jonathan Pierot por sempre me apoiar.

Agradeço o incentivo concedido pela Capes para a realização deste Mestrado que teve como um dos colaboradores de sua criação o Professor Doutor João da cruz Xavier Neto; enfim, a todos que tiveram a iniciativa de desenvolver o PROFMAT.

Por fim, agradeço a todos os meus professores que me ensinaram matemática, em especial ao meu orientador, Professor Doutor Afonso Norberto da Silva, pois muitos deles foram grandes inspiradores de minha profissão.

O meu muito obrigado a todos.

Resumo

Constantemente, no Ensino Básico, alguns conteúdos da matemática, tais como dentro da geometria espacial são apresentados os resultados prontos, às vezes até sem demonstrações, e sem um desenvolvimento pedagógico que faça sentido esses conteúdos e ideias num contexto prático vivencial. Um exemplo dessa deficiência é o Cálculo de Áreas e Volumes. Nesta Dissertação, exibimos um modelo de desenvolvimento progressivo dos conteúdos envolvidos no cálculo de áreas e volumes, com uma fundamentação que seja, simultaneamente, satisfatória e acessível ao nível de entendimento do aluno. Para isso, propomos um uso extensivo de material concreto em sala de aula, que permite não só justificar adequadamente o cálculo de área das figuras planas, mas também o cálculo de volume dos sólidos geométricos tais como: prisma, pirâmide, tronco de pirâmide, cilindro, cone, tronco de cone e esfera, dentre outros sólidos geométricos.

Palavras-chave: Geometria. Áreas de figuras planas. Volumes de sólidos geométricos. Problemas aplicados.

Abstract

Constantly, in Mathematics, some subjects of mathematics, such as within spatial geometry, are presented in the ready results, sometimes without even the same, and without a pedagogical development that is able to find the ideas in a practical experiential context. An example of this deficiency is the Calculation of Areas and Volumes. In this dissertation, the presentation of a model of progressive development of data is not a calculation of areas and volumes, with a foundation that is both satisfactory and accessible to the level of understanding of the student. For this, I propose an extensive use of concrete material in the classroom, which does not justify the calculation of the area of ??the plane figures and the calculation of the volume of geometric solids such as: prism, pyramid, pyramid trunk, cylinder, cone, trunk cone and sphere, among other geometric solids

Keywords: Geometry. Areas of flat figures. Volumes of geometric solids. Problems applied.

Sumário

1 Introdução

No nosso cotidiano, é recorrente a informação de que a matemática é uma das matérias da educação básica que desperta maior rejeição nos estudantes. As avaliações oficiais que medem a qualidade da educação básica no país comprovam que há um número expressivo de reprovações e déficit de aprendizagem nesta matéria.

O cenário apresentado, denota que há um problema grave a ser investigado quanto aos métodos de ensinos empregados até o presente momento. Neste sentido, desenvolvemos um estudo sobre temas da geometria plana e espacial, com a aplicação de material concreto feito em sala de aula, com utilização de cartolina, régua, lápis e tesoura, que fazemos demonstrações ou justificativas cabíveis e, uma metodologia discursiva de ensinar matemática através de resolução de problemas.

Nosso estudo foi realizado através de uma pesquisa bibliográfica com o objetivo geral: possibilitar o desenvolvimento de habilidades de ler e interpretar problemas envolvendo áreas de figuras planas e volumes de alguns sólidos geométricos e investigar o modo como a geometria plana e espacial contribui na resolução de problemas envolvendo áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos.

Dentre os objetivos específicos, destacamos: apresentar o estudo da geometria para demonstrar o cálculo da área de figuras planas e volume de sólidos geométricos, analisar e identificar informações existentes nos enunciados dos problemas, justificar a importância das grandezas geométricas, determinar o cálculo da área de figuras planas e volume de alguns sólidos geométricos, tais como: Prisma, Pirâmide, Tronco de Pirâmide, Cilindro, Cone e Tronco de Cone.

Entre os principais autores que oferecem sustentação para a fundamentação teórica da pesquisa citamos: Dolce (2013), Lima (1985, 1991, 2001 e 2006), Machado (1988), Muniz Neto (2013), dentre outros. Nestas referências, encontramos a maior parte dos resultados deste trabalho, com as justificativas, demonstrações cabíveis e modelos de resolução de problemas envolvendo áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos, que aparecem em boa parte nos livros didáticos do Ensino Básico sem muito rigor conceitual.

A principal motivação para o desenvolvimento dessa dissertação, foi na carência que encontramos, em alguns livros didáticos no Ensino Médio, que não fazem as demonstrações ou justificativas sobre os modelos ou técnicas para resolução de problemas com áreas de figuras planas e volumes dos sólidos geométricos. Dessa forma fica subtendido que a nossa disciplina de matemática está sendo ministrada com os resultados prontos e, impossibilitando ao estudante obter mais conhecimentos vivencias. Aqui sugerimos a utilização de materiais concretos em sala de aula para facilitar a compreensão e sua aplicabilidade no cálculo de áreas de figuras planas e volumes dos sólidos geométricos.

Em nosso trabalho, abordamos bastante o ensino da geometria usando a resolução de problemas. Uma excelente referência para o estudo da resolução de problemas é o livro A Arte de resolver Problemas de George Pólya.

Nota 1. *George Pólya nasceu em Budapeste, Áustria – Hungria. Pólya foi professor de matemática de 1914 a 1940 no ETH Zurich na suíça e de 1940 a 1953 na Stanford University. Posteriormente, permaneceu como professor Emérito de Stanford o resto de sua vida e carreira. Ele trabalhou em uma variedade de tópicos matemáticos, incluindo séries, teoria dos números, análise matemática, geometria, álgebra, combinatória e probabilidade.*

No inicio de sua carreira, Pólya escreveu, juntamente com Gábor Szego, dois livros que trabalhavam a resolução de problemas: Pólya formulou as quatro etapas para a resolução de problemas: ***primeira etapa*** *– compreender o problema;* ***segunda etapa*** *– traçar um plano;* ***terceira etapa*** *– colocar o plano em prática em prática;* ***quarta etapa*** *– comprovar os resultados.*

Nosso trabalho está estruturado da seguinte forma: no capitulo 2, apresentamos alguns conceitos e resultados de áreas de figuras planas; no capitulo 3, discutimos algumas aplicações dos resultados de áreas de figuras planas; no capitulo 4 apresentamos a definição de volume; no capitulo 5, apresentamos os estudos dos sólidos geométricos e no capitulo 6 apresentamos as considerações finais.

2 *Áreas de Figuras Planas*

2.1 Conceitos de Área de figuras planas

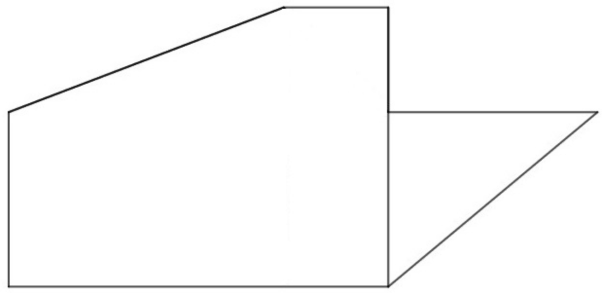
No que se segue, tomamos como referências Lima (1985), Machado (1988), Neto Muniz (2013) e Dolce O. vol. 9 (2013).

Neste capítulo, apresentamos a leitura que nos serve de referencial teórico. Ele está dividido em: conceitos, princípios e modelos para cálculos de áreas com figuras planas. No que se refere aos modelos de como calcular a área de figuras planas, apresentamos o modelo de calcular áreas de figuras mais complicadas, utilizando também a equivalência plana que serve para o estudante como pesquisador prático reflexivo e como intelectual crítico.

Para que um conceito qualquer de área para polígonos tenha utilidade, postulamos:

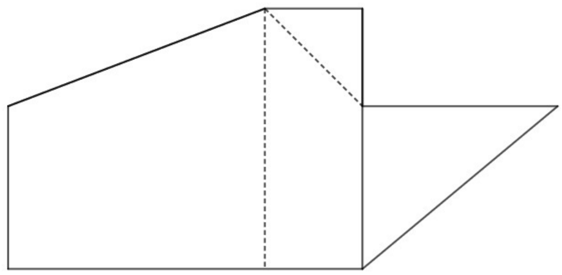
- Polígonos congruentes têm áreas iguais.
- Se P é um quadrado de lado unitário, então a área de $P = 1$.
- Se P for decomposto como reunião de n polígonos $P_1, \ldots, P_n$, tais que dois quaisquer deles têm em comum, no máximo, alguns lados; então, a área de P é a soma das áreas dos P_i.
- Se um polígono menor está contido em outro polígono maior, então sua área é (menor ou igual) à área do polígono maior.

Aplicação: Calcule a área do polígono.



Fonte: De autoria

1º passo: Devemos dividir o polígono em quatro outros polígonos conhecidos.



Fonte: De autoria

2º passo: Devemos calcular as áreas de dois trapézios e dois triângulos.

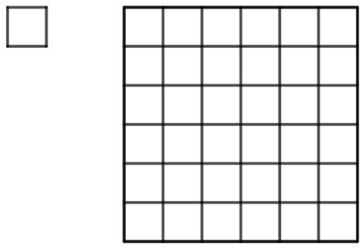
3º passo: Devemos somar as áreas dos trapézios e dos triângulos para obter a área do polígono desejado.

Trataremos agora de medir a porção do plano ocupada por uma figura plana F. Para isso, compararemos F com a unidade de área. O resultado dessa comparação será um número, que deverá exprimir quantas vezes a figura F contém a unidade de área. LIMA (1985, p.9).

Devemos tomar como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Daí, temos um quadrado unitário. Portanto, qualquer quadrado cujo lado mede 1 terá, por definição, área igual a 1, conforme Postulado 2.

Considere um quadrado Q cujo lado é um número inteiro n que pode ser decomposto, através de paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, onde cada um deles possui lado unitário e, portanto, com área 1. Então, devemos ter o quadrado Q com área igual a n^2.

Exemplo 2.1. *Quadrado de lado 6, decomposto em $6^2 = 36$ quadrados unitários.*



Fonte: De autoria

Por conseguinte, se o lado de um quadrado Q possui medida igual a $\frac{1}{n}$, onde n representa um número inteiro, então o quadrado unitário deve ser decomposto por retas paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, todos congruentes a Q. Estes n^2 quadrados congruentes a Q compõem um quadrado de área 1; dessa forma, a área do quadrado Q deve satisfazer à condição $n^2\cdot$ (área de Q) $= 1$, logo a área de $Q = \frac{1}{n^2}$.

Todavia, se um quadrado Q possui como medida de lado um número racional da forma $\frac{m}{n}$, então podemos decompor cada lado de Q em m segmentos, onde cada um dos quais possui medida de comprimento igual a $\frac{1}{n}$, sendo que, através das paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão, devemos obter uma decomposição de Q em m^2 quadrados, onde cada um dos quais possui medida de comprimento dos lados igual a $\frac{1}{n}$. Portanto, a área de cada um desses quadrados menores é $\frac{1}{n^2}$. Logo, a área de Q deve ser $m^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}$, ou seja, a área de $Q = \left(\frac{m}{n}\right)^2$.

Podemos então concluir que a área de um quadrado Q cujo lado tem para medida um número racional $a = \frac{m}{n}$ é dada pela expressão: (LIMA, 1985 p.10).

$$\text{Área de } Q = a^2.$$

Todo número real b, inferior a a^2, é também menor do que a área de Q. Da mesma maneira todo número real c, maior do que a^2, é maior do que a área de Q. Assim, a área de Q não pode ser menor nem maior do que a^2. Por exclusão, deve–se então ter área de $Q = a^2$.

Concluímos, desta maneira, que a área de um quadrado Q, cujo lado mede a, deve ser expressa pela fórmula

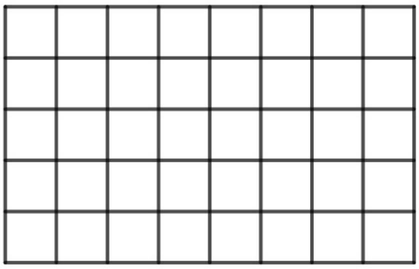
$$\text{Área de } Q = a^2.$$

Na fórmula anterior, a é um número real qualquer: inteiro, fracionário ou irracional.

Agora, devemos ver o cálculo da área de um retângulo. Se os lados de um retângulo R

possuem medidas de comprimentos os números inteiros a e b, então, através de paralelas aos seus lados, podemos decompor R em $a \cdot b$ quadrados unitários, de modo que devemos ter área do retângulo $R = a \cdot b$.

Exemplo 2.2. *Retângulo* R*, cujos lados medem* 5 *e* 8*, subdividido em* $5 \times 8 = 40$ *quadrados unitários. Tem–se área de* $R = 8 \times 5 = 40$.



Fonte: De autoria

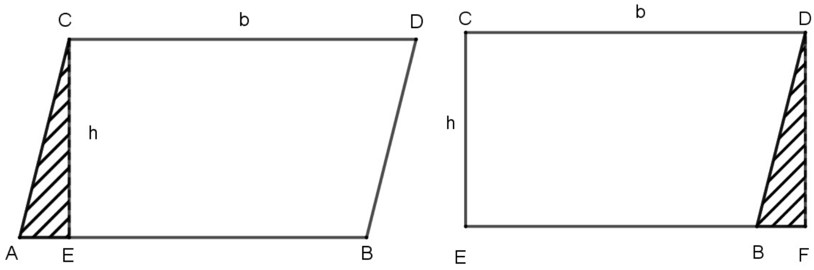
Tomando os lados de um retângulo R com medidas de comprimento dois números racionais a e b, onde podemos representá–los da forma $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{q}$, visto que ambos possuem o mesmo denominador, dividimos cada lado de R em segmentos de comprimentos iguais a $\frac{1}{q}$. Dessa forma, o lado que mede a ficará decomposto em p segmentos justapostos, onde cada um dos segmentos mede $\frac{1}{q}$. O lado que mede b ficará subdividido em r segmentos iguais, de comprimento $\frac{1}{q}$. Através das paralelas aos lados do retângulo R a partir dos de subdivisão, o retângulo R ficará subdividido em $p \cdot r$ quadrados, onde cada um deles possui lado de comprimento igual a $\frac{1}{q}$. Logo a área desses quadradinhos é da forma $\left(\frac{1}{q}\right)^2 = \frac{1}{q^2}$. Portanto, a área de R deve ser igual a

$$(p \cdot r) \cdot \left(\frac{1}{q^2}\right) = \frac{p \cdot r}{q^2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{q},$$

ou seja, a área de $R = a \cdot b$, com a e b racionais.

Se os lados do retângulo R são dois números reais a e b quaisquer pode–se provar também que a área de R é $a \cdot b$, veja por exemplo: Lima (1985) e Muniz Neto (2013).

Da área do retângulo, obtemos facilmente a área de um paralelogramo. Um paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos e congruentes.



Fonte: De autoria

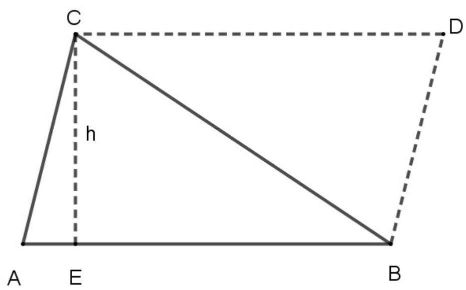
Observe na figura acima que, removendo o triângulo CAE da esquerda, e colocando–o à direita na posição DBF, transformamos o paralelogramo $ABDC$ no retângulo $EFDC$, sem alterar sua área, nem a base e nem sua altura.

Assim, podemos garantir que a área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer de suas bases pelo comprimento da sua altura correspondente.

Da área de um paralelogramo, obtemos facilmente a área de um triângulo, pois todo triângulo possui a área igual a metade de um paralelogramo.

Dado um triângulo ABC, do qual queremos calcular a área, traçamos, pelos vértices C e B, respectivamente, retas paralelas aos lados AB e AC. Essas paralelas se encontram num ponto D formando um paralelogramo $ABDC$. Tomemos agora a altura deste paralelogramo de comprimento $CE = h$ e $AB = b$, cuja área percebemos ser a de $ABDC = b \cdot h$, ou seja, a área do paralelogramo $ABDC$. Ora, os triângulos ABC e BCD são congruentes pelo caso lado–lado–lado (LLL) e possuem mesma área. Portanto, a área de $(ABCD) = 2 \cdot (ABC)$ e, por conseguinte:

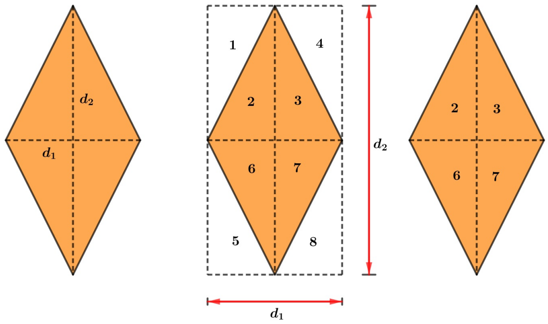
$$\text{Área de } (ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h.$$



Fonte: De autoria

Então, a área de um triângulo é a metade do produto de uma base pela sua altura, sendo que num triângulo, qualquer lado pode ser base e temos, também, três escolhas para suas alturas; dessa forma, qualquer escolha para base e altura sempre teremos o mesmo valor $b \cdot h$.

Para calcular a área de um losango $L(d_1, d_2)$, conduzimos as diagonais e, pelos seus vértices, traçamos retas paralelas às diagonais.

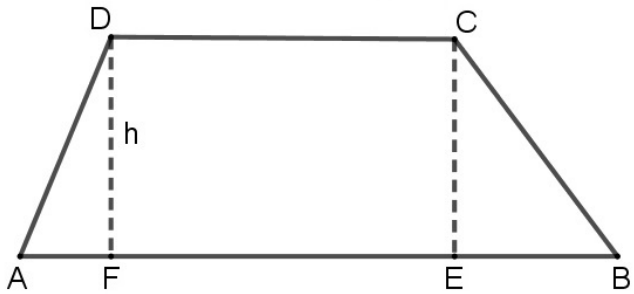


Fonte: De autoria

$$A_{\text{losango}} = A_{(4\ \text{triângulos})} = \frac{A_{(8\ \text{triângulos})}}{2} = \frac{A_{(\text{retângulo})}}{2} \Rightarrow A_{\text{losango}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Para calcular a área de um polígono qualquer, basta subdividi–lo em triângulos, paralelogramos ou quaisquer outras figuras cujas áreas sabemos calcular. Dessa forma, a área do polígono procurada será a soma das áreas das figuras em que o decompusemos.

Área de um trapézio $ABCD$. Um trapézio é um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos.



Fonte: De autoria

Traçamos CE e DF perpendiculares a AB, de modo que esses comprimentos são iguais a h, que é a altura do trapézio dado. Sejam $b_1 = AB$ e $b_2 = CD$. Logo, a área do trapézio $ABCD$ é igual à soma das áreas dos triângulos ADF e BCE mais a área do retângulo $EFDC$.

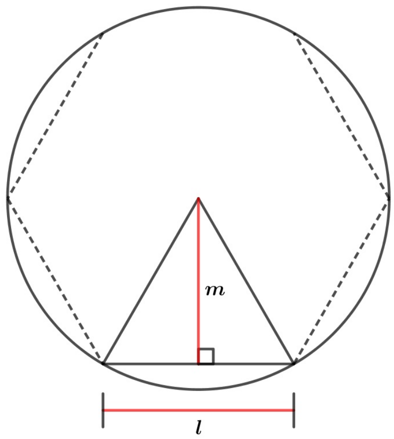
$$\begin{aligned} A_{(ABCD)} &= \frac{AF \cdot h}{2} + EF \cdot h + \frac{EB \cdot h}{2} \\ A_{(ABCD)} &= \frac{(AF + 2 \cdot EF + EB) \cdot h}{2}. \end{aligned}$$

Como $\mathsf{EF} = \mathsf{CD}$, então temos que $2 \cdot \mathsf{EF} = \mathsf{EF} + \mathsf{CD}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
A_{(ABCD)} &= \frac{(AF + EF + EB) + CD}{2} \cdot h \\
A_{(ABCD)} &= \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h.
\end{aligned}
$$

Assim, a área de um trapézio é igual à semissoma das bases vezes a altura.

Para calcular a área de um polígono regular, sendo o número de lados desse polígono igual a n, a medida do apótema desse polígono m, a medida do lado desse polígono l e, utilizando p como semiperímetro, então podemos decompor esse polígono em n triângulos de base l e altura m.



Fonte: De autoria

$$
\left.
\begin{aligned}
A_{\text{polígono}} &= n \cdot A_{\text{triângulo}} \\
A_{\text{triângulo}} &= \frac{l \cdot m}{2}
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow A_{\text{polígono}} = \frac{n \cdot l \cdot m}{2} \Rightarrow A_{\text{polígono}} = \frac{2 \cdot p \cdot m}{2},
$$

Logo, $A_{\text{polígono}} = p \cdot m$

Notas:

- Se dois triângulos possuem mesma base e mesma altura, então eles possuem mesma área.
- Se dois triângulos possuem mesma base, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas.
- Se dois triângulos possuem mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases.

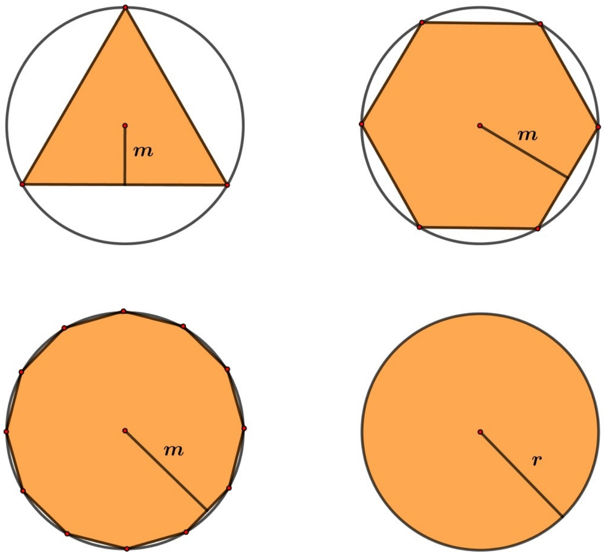
- Se dois polígonos são semelhantes, então a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança entre os seus lados ou entre seus perímetros, ou entre suas alturas.

- A razão de semelhança de dois polígonos semelhantes pode ser obtida pela razão entre seus lados, entre seus perímetros ou entre suas alturas.

- Se dois sólidos são semelhantes, então a razão entre seus volumes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Para a demostração dos fatos citados acima veja por exemplo: Dolce O. vol. 9 e 10 (2013), E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A. (2006); Muniz Neto (2013).

Para calcular a área do Círculo e de suas partes, devemos observar às figuras abaixo, que são formadas por polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio r.



Fonte: De autoria

Agora, devemos perceber que a medida que o número de lados dos polígonos regulares inscritos na circunferência aumenta, então temos:

- As formas dos polígonos regulares inscritos vão se aproximando da forma circular.

- As áreas dos polígonos regulares inscritos vão crescendo e se aproximando da área do círculo.

- Os perímetros ($2p$) dos polígonos regulares inscritos vão se aproximando do comprimento da circunferência ($2\pi r$) e os apótemas (m) vão se aproximando do raio (r).

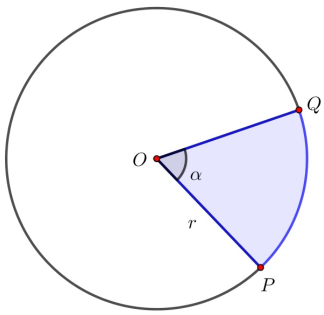
Logo, as áreas dos polígonos regulares inscritos vão se aproximando de

$$A = (\text{semiperímetro}) \cdot (\text{apótema}) = p \cdot a = \left(\frac{2\pi \cdot r}{2}\right) \cdot r = \pi r^2.$$

Portanto, dizemos que esse número (πr^2), do qual as áreas dos polígonos se aproximam, é a área A do círculo de raio r, isto é, $A = \pi \cdot r^2$.

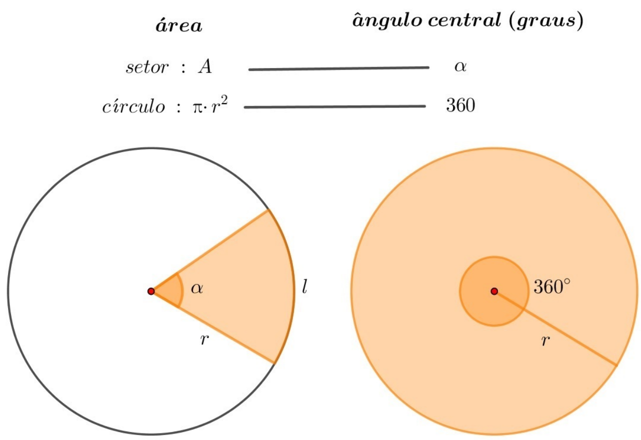
2.2 Área do Setor circular

Considere um círculo de centro O e raio de medida r, com um ângulo central de medida α, que determina um arco PQ no círculo. Chama–se setor circular o conjunto dos pontos que são interiores ao círculo e ao ângulo α, reunidos com os pontos $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ e $\widehat{PQ}$.



Fonte: De autoria

Num círculo de raio r fixado, a área do setor circular é diretamente proporcional à medida do ângulo central. Se a medida do ângulo estiver em graus, calculamos a área pela regra de três simples direta e encontramos a expressão algébrica do tipo:



Fonte: De autoria

Daí $\dfrac{A}{\pi \cdot r^2} = \dfrac{\alpha}{360^o}$, então temos: $A = \dfrac{\alpha}{360^o} \cdot \pi \cdot r^2$. Se o comprimento do setor é igual a l, então temos:

$$\begin{array}{ccc} \pi \cdot r^2 & \text{———} & 2 \cdot \pi \cdot r \\ \\ A & \text{———} & l \end{array}$$

ou seja, $\dfrac{\pi \cdot r^2}{A} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{l} \Rightarrow A = \dfrac{l \cdot r}{2}$.

Segue–se que:

1. A área de um setor circular de raio R e ângulo α em radiano.

$$\begin{array}{ccc} 2\pi \cdot R & \text{———} & \pi \cdot R^2 \\ \\ \alpha \cdot R & \text{———} & A \end{array}$$

   Então $A = \dfrac{\alpha \cdot R^2}{2}$.

2. A área de um setor circular de raio R e ângulo α em graus.

$$\begin{array}{ccc} \pi \cdot R^2 & \text{———} & 360^o \\ \\ A & \text{———} & \alpha \end{array}$$

   Logo, $A = \dfrac{\pi \cdot \mathbb{R}^2 \cdot \alpha}{360}$.

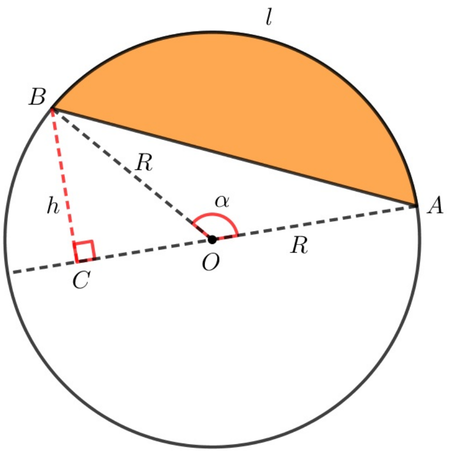
3. A área de um setor circular em função de R e do comprimento do arco.

$$\begin{array}{ccc} 2\pi \cdot R & \text{———} & \pi \cdot R^2 \\ \\ l & \text{———} & A \end{array}$$

   Portanto, $A = \dfrac{l \cdot R}{2}$.

2.3 Área do segmento circular

Para calcular a área de um segmento circular de raio R e ângulo central α no círculo de centro O, e arco AB, devemos primeiro calcular a área setor OAB e, depois subtrair a área do triângulo OAB, então temos:

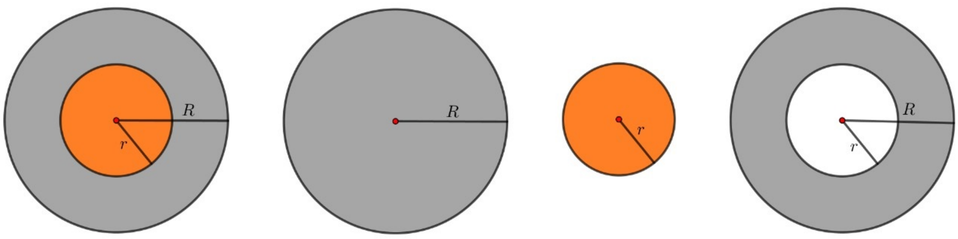


Fonte: De autoria

$$
\begin{aligned}
A_{(\text{segm})} &= A_{(\text{set } OAB)} - A_{(\Delta OAB)} \\
A_{(\text{segm})} &= \frac{l \cdot R}{2} - \frac{R \cdot h}{2} \\
A_{(\text{segm})} &= \frac{\alpha \cdot R^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \text{sen}(\alpha) \\
A_{(\text{segm})} &= \frac{R^2}{2}\left(\alpha - \text{sen}(\alpha)\right), \quad \alpha \text{ em radiano.}
\end{aligned}
$$

2.4 Área da coroa circular

Dados dois círculos concêntricos com raios R e r, sendo que $R > r$, chama–se coroa circular o conjunto dos pontos internos ao círculo de raio R e externos ao círculo de raio r, reunidos com os pontos dos dois círculos.



Fonte: De autoria

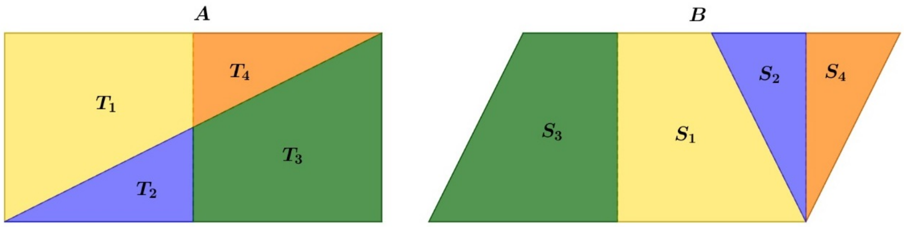
Dessa forma a área da coroa circular é igual à diferença entre as áreas dos círculos de raios R e r.

$$A = \pi R^2 - \pi r^2.$$

Nota 2 (Equivalência Plana)**.** *Dois polígonos são chamados equivalentes ou equicompostos se, e somente se, forem somas de igual número de polígonos dois a dois congruentes entre si. Então podemos representar dessa forma:*

$$\left(T_i \equiv S_i, \quad A = \sum_{i=1}^{n} T_i, \quad B = \sum_{i=i}^{n} S_i\right) \Longleftrightarrow A \approx B. \tag{2.1}$$

Agora, devemos verificar nas figuras A e B que possuem n *polígonos e que cada polígono–parcela* T_i *da figura A é congruente a um polígono–parcela* S_i *de B e vice–versa.*



Fonte: De autoria

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = S_1, \quad T_2 = S_2, \quad T_3 = S_3, \quad T_4 = S_4 \\ A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\ B = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \end{array}\right\} \Longrightarrow A \approx B. \tag{2.2}$$

Dessa forma dizemos que duas figuras são equivalentes quando elas possuem áreas iguais. Portanto, podemos agora construir três cartões de cores diferentes com as seguintes características:

1. *Dois (2) cartões em forma de triângulo retângulo isósceles com catetos de medidas iguais a* $1,5$ cm *cada;*

2. *Um (1) cartão em forma de retângulo com dimensões de* $2,0$ cm *por* $1,5$ cm.

Em seguida, devemos montar às três figuras equivalentes:

Fonte: De autoria

Essas figuras são equivalentes porque são equicompostas (compostas por três partes, duas a duas iguais). Então podemos verificar que para calcular a área de cada figura, basta *calcular a área do retângulo de dimensões* $3,5\ \mathsf{cm}$ *por* $1,5\ \mathsf{cm}$ *que temos como resultado* $5,25\ \mathsf{cm}^2$.

A seguir, vamos utilizar muitas vezes essa ideia de calcular a área de uma figura "complicada", transformando–a em uma figura equivalente mais "simples".

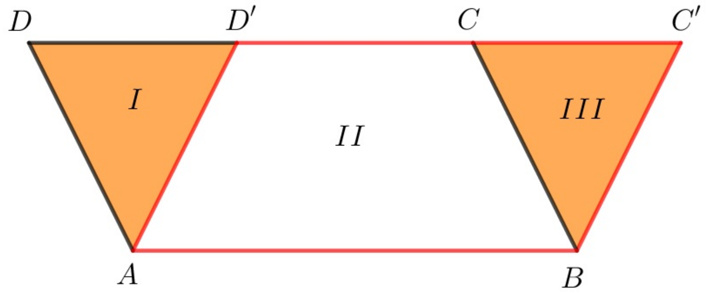
Propriedades:

1. *Reflexiva:* $\mathsf{A} \approx \mathsf{A}$*;*
2. *Simétrica:* $\mathsf{A} \approx \mathsf{B} \Leftrightarrow \mathsf{B} \approx \mathsf{A}$*;*
3. *Transitiva: Se* $\mathsf{A} \approx \mathsf{B}$ *e* $\mathsf{B} \approx \mathsf{c}$*, então* $\mathsf{A} \approx \mathsf{C}$*.*

Teorema 2.1. *Dois paralelogramos de bases e alturas respectivamente congruentes são equivalentes.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos considerar os paralelogramos ABCD e $\mathsf{ABC'D'}$ com mesma base AB e com alturas congruentes, então temos três casos a considerar:

1º caso: $\overline{\mathsf{CD}}$ e $\overline{\mathsf{C'D'}}$ têm um segmento em comum

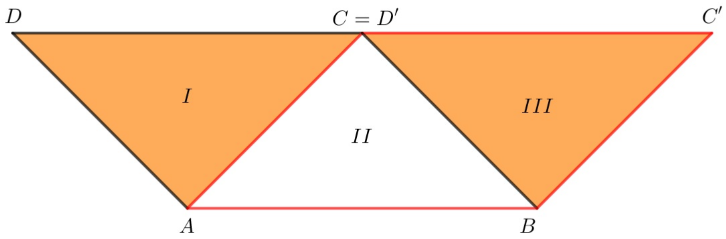


Fonte: De autoria

Tem–se que $\mathsf{AD'D} \equiv \mathsf{BC'C}$ e $\mathsf{ABCD'} \equiv \mathsf{ABCD'}$, somando em ambas as equivalências, obtem–se:

$$\mathsf{AD'D} + \mathsf{ABCD'} \approx \mathsf{ABCD'} + \mathsf{BC'C} \Longrightarrow \mathsf{ABCD} \approx \mathsf{ABC'D'}.$$

2º caso: $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ possui um só ponto em comum

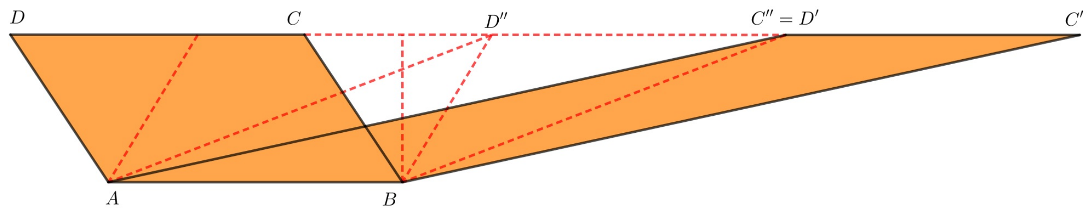


Fonte: De autoria

Como $ACD \equiv BC'D'$, $ABC \equiv ABD'$ e $C = D'$, somando em ambas as equivalencias, obtém–se:

$$ACD + ABC \approx ABC + BC'D' \Longrightarrow ABCD \approx ABC'D'.$$

3º caso: $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ não possuem ponto em comum



Fonte: De autoria

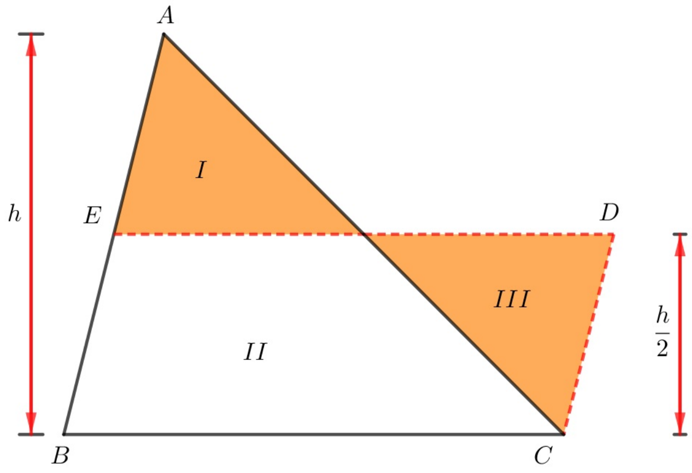
Por aplicação dos casos anteriores, da propriedade transitiva e do postulado de Arquimedes: "*dados dois segmentos, existe sempre um múltiplo de um deles que supera o outro*", então temos:

$$ABC'D' \approx ABC''D'' \approx \ldots \approx ABCD \Longrightarrow ABCD \approx ABC'D'.$$

□

Teorema 2.2. *Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura metade da altura do triângulo.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideremos um triângulo ABC e, pelo ponto E, médio do lado AB, traçamos um segmento ED paralelo ao segmento BC até encontrar o segmento CD paralelo ao segmento EB, então formamos um paralelogramo $BCDE$.



Fonte: De autoria

Como $\mathsf{A}_{\mathrm{I}} \equiv \mathsf{A}_{\mathrm{III}}$ e $\mathsf{A}_{\mathrm{II}} \equiv \mathsf{A}_{\mathrm{II}}$, somando em ambas as equivalências, obtém–se:

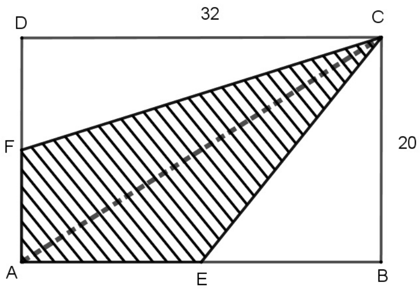
$$\mathsf{A}_{\mathrm{I}} + \mathsf{A}_{\mathrm{II}} \approx \mathsf{A}_{\mathrm{III}} + \mathsf{A}_{\mathrm{II}} \Longrightarrow \mathsf{ABC} \approx \mathsf{BCDE}.$$

$\square$

3 Aplicações

Neste capítulo, faremos uso dos resultados obtidos no capítulo anterior, além disso, mostraremos situações práticas envolvendo área de figuras planas.

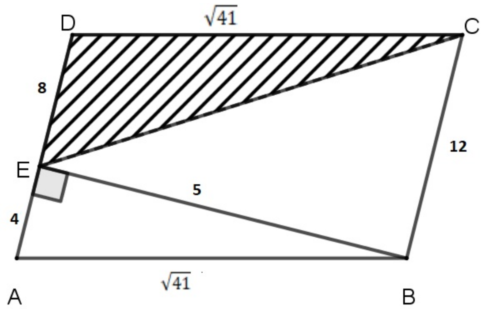
Exemplo 3.1. ABCD *é um retângulo de lados* $\mathsf{AB} = 32m$ *e* $\mathsf{BC} = 20m$. *Os pontos* E *e* F *são, respectivamente, os pontos médios dos lados* AB *e* AD. *Calcule a área do quadrilátero* AECF.



Fonte: Muniz Neto (2013)

Solução: A área do triângulo ACE é $\dfrac{\mathsf{AE}\cdot\mathsf{BC}}{2} = \dfrac{16\cdot 20}{2} = 160$ e a área do triângulo AFC é $\dfrac{\mathsf{AF}\cdot\mathsf{AB}}{2} = \dfrac{10\cdot 32}{2} = 160$, logo a área do quadrilátero AECF é a soma de $160+160 = 320$.

Exemplo 3.2. *No paralelogramo* ABCD, *de diagonais* AC *e* BD, *marcamos o ponto* E, *sobre o lado* AD, *tal que* BE *é perpendicular a* AD. *Se* $\mathsf{BE} = 5cm$, $\mathsf{BC} = 12cm$ *e* $\mathsf{AE} = 4cm$, *calcule a área do triângulo* ECD.

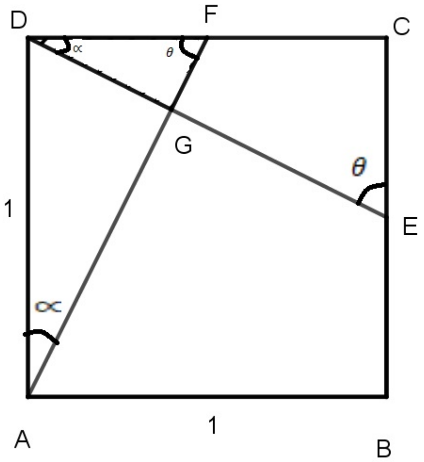


Fonte: Muniz Neto (2013)

Solução: Aplica–se o teorema de Pitágoras no triângulo ABE e encontramos a medida de AB. Como os ângulos consecutivos do paralelogramo são suplementares, então $\operatorname{sen}(\widehat{\mathsf{A}}) = \operatorname{sen}(\widehat{\mathsf{D}})$, logo aplica–se a fórmula abaixo. No $\Delta\mathsf{AEB}$, $\operatorname{sen}(\widehat{\mathsf{A}}) = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}_{(\mathsf{ECD})} &= \frac{1}{2} \cdot \mathsf{CD} \cdot \mathsf{ED} \cdot \operatorname{sen}(\widehat{\mathsf{D}}) \\
\mathsf{A}_{(\mathsf{ECD})} &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{41} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} \\
\mathsf{A}_{(\mathsf{ECD})} &= 20.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.3. *Seja* ABCD *um quadrado de lado* 1*,* E *o ponto médio de* BC *e* F *o de* CD*. Sendo* G *o ponto de interseção de* DE *e* AF*, calcule a área do triângulo* DFG*.*



Fonte: Muniz Neto (2013)

Solução: Como $\alpha + \theta = 90^{\circ}$, então $\Delta\mathsf{ADF} \equiv \Delta\mathsf{DCE}$ (LAL) e $\Delta\mathsf{DFG} \sim \Delta\mathsf{DCE}$; quando dois triângulos são semelhantes a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança de seus lados. Primeiro calcula–se a medida $\mathsf{DE} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ por Pitágoras no triângulo DCE. Depois, encontra–se a razão de semelhança entre os lados destes triângulos citados. Para tanto, calcula–se:

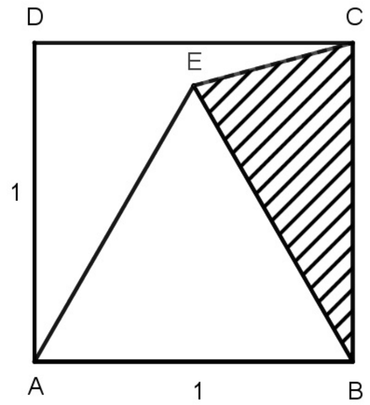
$$\mathsf{K} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathsf{A}_{(\mathsf{DFG})}}{\mathsf{A}_{(\mathsf{DCE})}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \\
\frac{\mathsf{A}_{(\mathsf{DFG})}}{\mathsf{A}_{(\mathsf{DCE})}} &= \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Como $\mathsf{A}_{(\mathsf{DCE})} = \dfrac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$, temos, $\mathsf{A}_{(\mathsf{DFG})} = \dfrac{1}{20}$.

Exemplo 3.4. *Seja* ABCD *um quadrado de lado* $1cm$ *e* E *um ponto no interior de* ABCD*, tal que o triângulo* ABE *seja equilátero. Calcule a área do triângulo* BCE*.*



Fonte: Muniz Neto (2013)

Solução: o lado do triângulo ABE também é lado do quadrado ABCD. Como o triângulo ABE é equilátero, o ângulo CBE do triângulo EBC é 30 graus. Logo aplica–se a fórmula abaixo

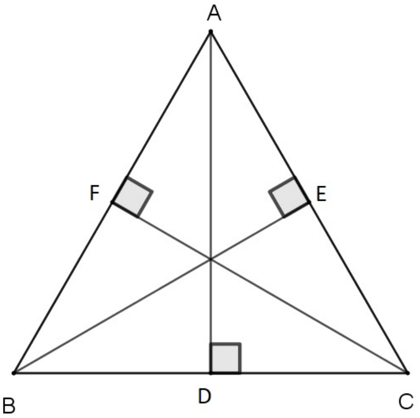
$$\begin{aligned}
\mathsf{A}_{(\mathsf{BCE})} &= \frac{1}{2} \cdot \mathsf{BE} \cdot \mathsf{BC} \cdot \mathrm{sen}(30^o) \\
\mathsf{A}_{(\mathsf{BCE})} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\
\mathsf{A}_{(\mathsf{BCE})} &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.5. *Seja ABC um triângulo equilátero.*

a) Mostre, mediante o cálculo de áreas, que as três alturas de ABC *têm comprimentos iguais.*

b) Prove que a soma das distâncias de um ponto escolhido no interior de ABC *a seus lados independe da posição do ponto e é igual ao comprimento das alturas de* ABC

Solução a):



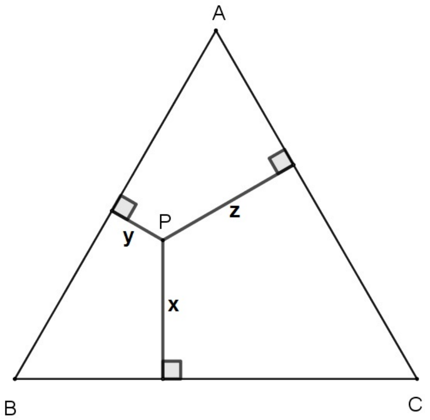
Fonte: Muniz Neto (2013)

Calcula–se a área do triângulo ABC de três maneiras mudando–se apenas a altura, pois todos os lados tem medida l e, então igualamos suas áreas, pois trata–se do mesmo triângulo. $A_{(ABC)} = \dfrac{l \cdot h_1}{2}$, $A_{(ABC)} = \dfrac{l \cdot h_2}{2}$ e $A_{(ABC)} = \dfrac{l \cdot h_3}{2}$. Daí,

$$\frac{l \cdot h_1}{2} = \frac{l \cdot h_2}{2} = \frac{l \cdot h_3}{2} \Rightarrow h_1 = h_2 = h_3.$$

Logo, $\overline{AD} = h_1$, $\overline{BE} = h_2$ e $\overline{CF} = h_3$.

Solução b): Primeiro dividimos o triângulo ABC em três triângulos APC, APB e BPC, agora calcula-se a área de cada um destes triângulos e soma, pois a soma dá a área do triângulo ABC, logo obtemos a expressão abaixo desejada. Temos que $A_{(BCP)} = \dfrac{l \cdot x}{2}$, $A_{(APC)} = \dfrac{l \cdot z}{2}$ e $A_{(ABP)} = \dfrac{l \cdot y}{2}$.



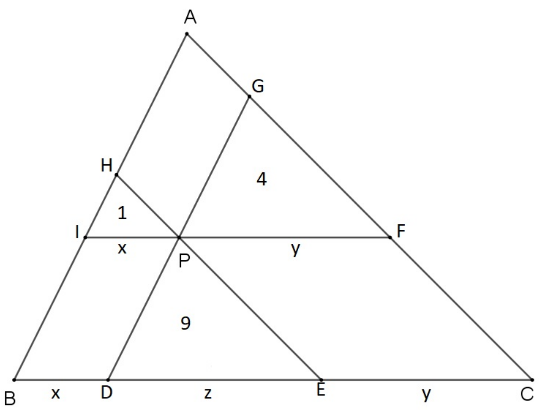
Fonte: Muniz Neto (2013)

$$
\begin{aligned}
A_{(ABC)} &= A_{(BCP)} + A_{(APC)} + A_{(ABP)} \\
A_{(ABC)} &= \frac{l \cdot x}{2} + \frac{l \cdot z}{2} + \frac{l \cdot y}{2} \\
A_{(ABC)} &= \frac{l}{2} \cdot (x + y + z) \\
\frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} &= \frac{l}{2} \cdot (x + y + z) \\
\frac{l \cdot \sqrt{3}}{2} &= x + y + z.
\end{aligned}
$$

Como a altura h de um triângulo equilátero é igual a $\dfrac{l \cdot \sqrt{3}}{2}$, sendo que $x + y + z = h$.

Exemplo 3.6. *Por um ponto* P*, no interior de um triângulo* ABC*, traçamos retas paralelas aos lados de* ABC*. Tais retas particionam* ABC *em três triângulos e três paralelogramos. Se as áreas dos triângulos são iguais a* 1 cm^2*,* 4 cm^2 *e* 9 cm^2*, calcule a área de* ABC*.*

Solução: considere a área do triângulo ABC igual a K, depois verifique que os triângulos HIP, GPF e PDE são semelhantes com o triângulo ABC, logo a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança entre seus lados e, depois soma os resultados obtendo o desejado.



Fonte: Muniz Neto (2013)

$$\Delta HIP \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{1}{K} = \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{x}{x+y+z} \tag{3.1}$$

$$\Delta GPF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{4}{K} = \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{K}} = \frac{y}{x+y+z} \tag{3.2}$$

$$\Delta PDE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{9}{K} = \left(\frac{z}{x+y+z}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{K}} = \frac{z}{x+y+z} \tag{3.3}$$

Somando as equações (3.1), (3.2) e (3.3), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{K}} + \frac{2}{\sqrt{K}} + \frac{3}{\sqrt{K}} &= \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} \\ \frac{6}{\sqrt{K}} &= 1 \\ K &= 36. \end{aligned}$$

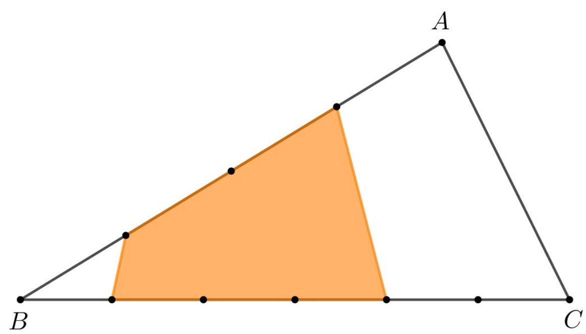
Exemplo 3.7. *Um banheiro tem o piso com dimensões* 1 *m* × 2 *m. Deseja–se cobri–lo com cerâmicas quadradas, que têm* 20 *cm de lado. Qual é a quantidade necessária de cerâmicas?*

Solução: Primeiro, devemos transformar metro para centímetro, então devemos calcular a área do piso que é 100 cm × 200 cm = 20.000 cm^2. Depois, calcular a área de uma cerâmica que é 20 cm × 20 cm = 400 cm^2. Dividindo–se a área do piso pela área de uma cerâmica, e obtemos a quantidade desejada de 50 cerâmicas.

Exemplo 3.8. *Um painel tem dimensões* 200 *cm* × 240 *cm, sendo* 30% *de sua área ocupada por ilustrações, e* 12% *dessas ilustrações são vermelhas. Qual é a área ocupada pelas ilustrações vermelhas?*

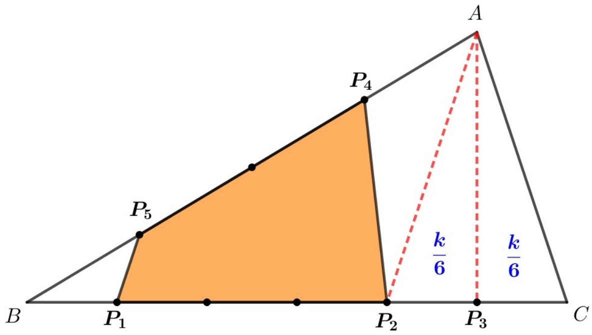
Solução: Primeiro, calcula–se a área do painel que é 200 cm × 240 cm = 48.000 cm^2. Depois, calcula–se 30% dessa área que é igual a 14.400 cm^2 e, depois calcula–se 12% do valor de 14.400 cm^2, que dá o valor procurado de 1728 cm^2.

Exemplo 3.9. *Determine a área da figura sombreada em função da área* K *do triângulo* ABC*, sabendo que os pontos assinalados em cada lado o dividem em partes iguais (congruentes).*



Fonte: Dolce, vol. 9 (2013)

Solução: Nessa questão, devemos utilizar uma equivalência de figuras planas, pois vamos fazer uma ilustração da seguinte forma:



Fonte: Dolce, vol. 9 (2013)

1º passo: Como o lado BC está dividido em seis partes iguais, então liga–se P_2 e P_3 ao vértice A do triângulo ABC e, observa–se que

$$A_{(AP_2P_3)} = A_{(AP_3C)} = \frac{K}{6}.$$

2º passo: Retira–se a área do triângulo AP_2C do triângulo ABC, então obtemos a área do triângulo ABP_2. Dai, temos

$$A_{(ABP_2)} = k - \frac{2K}{6} = \frac{2K}{3}.$$

3º passo: Agora, verifica–se que a área do triângulo AP_4P_2 é um quarto da área do triângulo ABP_2. Daí temos:

$$A_{(BP_4P_2)} = A_{(ABP_2)} - A_{(AP_4P_2)} = \frac{2K}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2K}{3} = \frac{K}{2}.$$

4º passo: No triângulo BP_4P_2, liga–se P_1 ao vértice P_4 e verifica–se que a área do triângulo $P_1P_2P_4$ é igual a três quartos da área do triângulo BP_2P_4, então temos:

$$A_{(P_1P_2P_4)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{K}{2} = \frac{3K}{8}. \tag{3.4}$$

5º passo: Como a área do triângulo BP_1P_4 é um quarto da área do triângulo BP_2P_4, então temos:

$$A_{(BP_1P_4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{K}{2} = \frac{K}{8}.$$

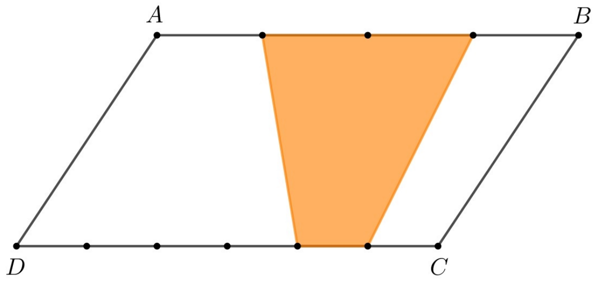
6º passo: Agora, no triângulo BP_1P_4, temos o triângulo $P_1P_5P_4$ que sua área é igual a dois terço da área do triângulo BP_1P_4, então temos:

$$A_{(P_1P_5P_4)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{K}{8} = \frac{K}{12}. \tag{3.5}$$

7º passo: Finalmente, por (3.4) e (3.5) temos que:

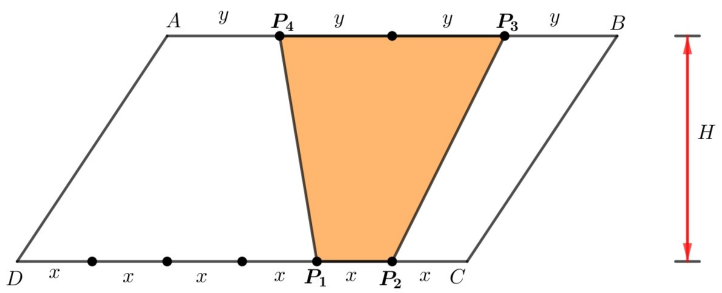
$$A_{(P_1P_2P_4P_5)} = A_{(P_1P_2P_4)} + A_{(P_1P_5P_4)} = \frac{3K}{8} + \frac{K}{12} = \frac{11K}{24}.$$

Exemplo 3.10. *Determine a área da região sombreada em função da área* K *do paralelogramo* $ABCD$*, sabendo que os pontos assinalados sobre cada lado o dividem em partes de medidas iguais.*



Fonte: Dolce, vol. 9 (2013)

Solução: Como todo paralelogramo possui os lados opostos paralelos e congruentes, então temos uma ilustração do tipo:



Fonte: Dolce, vol. 9 (2013)

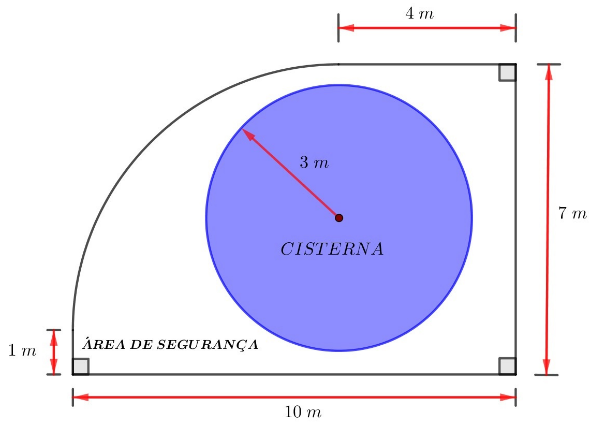
1º passo: O lado DC está dividido em 6 partes iguais e o lado AB está divido em 4 partes iguais, como $AB = DC$, então temos que $6x = 4y$, ou seja, $3x = 2y$.

2º passo: Como a área do paralelogramo é calculada pelo produto de sua base por sua altura, então $A_{(ABCD)} = 6x \cdot H = K$, ou seja, $xH = \dfrac{K}{6}$.

3º passo: como a figura $P_1P_2P_3P_4$ é um trapézio e sua área é calculada pelo produto da semissoma das bases pela altura, então temos:

$$\begin{aligned}
A_{(P_1P_2P_3P_4)} &= \left(x + 2y\right) \cdot \frac{H}{2} \\
A_{(P_1P_2P_3P_4)} &= \left(x + 3x\right) \cdot \frac{H}{2} \\
A_{(P_1P_2P_3P_4)} &= 4x \cdot \frac{H}{2} \\
A_{(P_1P_2P_3P_4)} &= 2(xH) \\
A_{(P_1P_2P_3P_4)} &= 2 \cdot \frac{K}{6} \\
A_{(P_1P_2P_3P_4)} &= \frac{K}{3}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.11. *O administrador de um edifício precisa instalar uma cisterna para armazenar água pótavel. Este reservatório tem a forma circular e será instalado em uma região do terreno representada pela planta a seguir. (Use* $\pi = 3,14$*).*



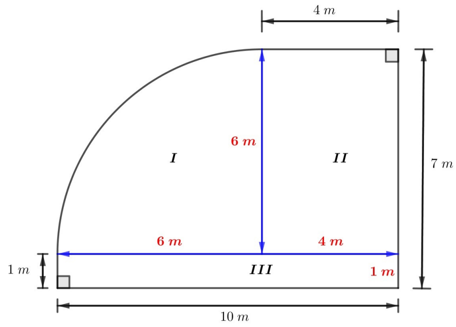
Fonte: De autoria

Para cumprir normas de segurança e conservação, a área ao redor da cisterna deverá receber concreto e piso e, dessa forma, o administrador precisa estimar quanto gastará com o piso. Ajude–o nesta missão, sabendo que o m^2 *do piso a ser colocado custa em média* 25 *reais.*

Solução: Primeiro, devemos calcular a área da cisterna que equivale a área de um círculo com raio de medida igual a 3 m, então temos:

$$A = \pi R^2 = (3,14) \cdot 3^2 = (3,14) \cdot 9 = 28,26\ m^2.$$

Agora, devemos calcular a área da figura total. Então podemos desmembrar a figura em dois retângulos e um setor circular que possui área igual a área de um quarto do círculo com raio 6 m. Vejamos ilustração abaixo:



Fonte: De autoria

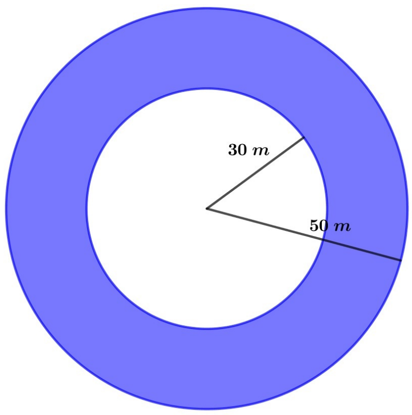
$$
\begin{aligned}
A_I &= \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot R^2 = \frac{1}{4}\cdot(3,14)\cdot 6^2 = \frac{1}{4}\cdot(3,14)\cdot 36 = \frac{1}{4}\cdot(113,04) = 28,26\ m^2. && (3.6)\\
A_{II} &= 4\cdot 6 = 24\ m^2. && (3.7)\\
A_{III} &= 1\cdot 10 = 10\ m^2. && (3.8)
\end{aligned}
$$

Logo, por (3.6), (3.7) e (3.8), a área total da figura é $28,26\ m^2 + 24\ m^2 + 10\ m^2 = 62,26\ m^2$. Portanto, a área de segurança que vai ficar com piso de concreto é a diferença entre a área total da figura e a área da cisterna, então temos:

$$62,26\ m^2 - 28,26\ m^2 = 34\ m^2.$$

Assim, o administrador vai gastar com o valor do piso uma quantia de $25\cdot 34 = 850$ reais.

Exemplo 3.12. *Determinado Professor planeja–se construir uma piscina circular com uma ilha no meio, também circular. Sabendo que o raio da ilha possui* 30 *metros e que o raio da piscina possui* 50 *metros, qual a área da superfície da piscina? (Use* $\pi = 3,14$*).*



Fonte: De autoria

Solução: Primeiro, devemos calcular a área da piscina que equivale a área de um círculo de raio 50 metros, então temos:

$$A = \pi R^2 = (3,14) \cdot (50)^2 = (3,14) \cdot 2500 = 7850 \ m^2.$$

Agora devemos calcular a área da ilha que é um círculo menor de raio 30 m, então temos:

$$A = \pi r^2 = (3,14) \cdot (30)^2 = 2826 \ m^2.$$

Portanto, a área da superfície da piscina é: $7850 - 2826 = 5024 \ m^2$.

4 Volumes

O que segue tomamos como referência Dolce (2013), Lima (1985) e (1991), Lima & Carvalho (2006) e Muniz Neto (2013).

Neste capítulo, apresentamos a leitura que nos serve de referencial teórico. Ele está dividido em conceitos, princípios e modelos para cálculos de volumes nos sólidos geométricos e, sugerimos também a utilização de material concreto em sala de aula para justificar, principalmente o volume de uma pirâmide. Desse modo construímos com uma régua, um lápis, uma cartolina e uma tesoura um prisma de base triangular e seccionamos esse prisma em três pirâmides que possuem o mesmo volume, então o volume da pirâmide é um terço do volume desse prisma. No que se refere ao modelo de calcular o volume dos sólidos geométricos, apresentamos também o Princípio de Cavalieri, pois o mesmo serve como ferramenta fundamental no cálculo de volumes com alguns sólidos geométricos citados nesse capítulo.

O volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada. (Isto não é uma definição matemática, mas apenas uma ideia intuitiva). Estamos interessados em medir a grandeza "volume" e para isso deveremos compará-la com uma unidade. O resultado dessa operação será um número real positivo.

Costuma–se tomar como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual será denominado cubo unitário. Seu volume, por definição, será igual a 1.

Portanto, o volume de um sólido S deverá ser um número real positivo que expressa quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Visto que o sólido S pode ter uma forma desnivelada, não é claro o que significa "número de vezes" em que S contém o cubo unitário. De novo, temos aqui uma ideia intuitiva, que devemos usar como guia e à qual devemos atribuir um significado preciso.

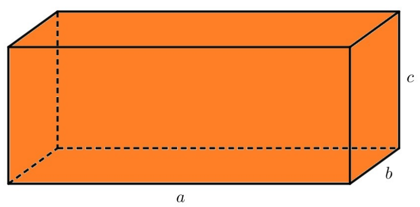
Admitamos um sólido S, cujo volume queremos calcular, seja um pedaço de metal, plástico ou outra substância impermeável. Mergulhando S num reservatório, contendo uma quantidade conhecida de água, que o encha até os bordos, o volume S será igual ao do líquido transbordado. Este pode ser medido simplesmente através de uma escala impressa na parede do reservatório.

Necessitamos, portanto, obter métodos para o cálculo de volumes grandes ou pequenos, tanto aos concretos como aos abstratos. Esse objetivo, como veremos, nos forçar–nos–á a um reexame do conceito de volume, conduzindo-nos a uma definição precisa.

Abordaremos o problema de calcular o volume de sólidos mais irregulares do que blocos. Como foi dito acima, é necessário possuirmos uma definição mais precisa daquilo que entendemos por "volume de um sólido". Chamaremos de poliedro retangular a todo sólido formado pela reunião de um número finito de blocos retangulares justapostos. Então, o volume desse poliedro é a reunião, ou seja, a soma dos volumes dos blocos retangulares que o constituem.

4.1 Um bloco Retangular

Um bloco retangular é um sólido limitado por 6 retângulos: suas faces. Esses retângulos constituem 3 pares; em cada par os retângulos são iguais. Os lados dos retângulos são chamados de arestas do bloco.



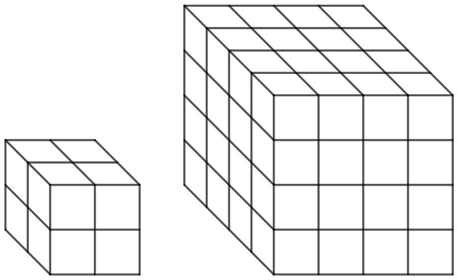
Fonte: De autoria

Um bloco retangular fica inteiramente determinado quando se conhecem 3 de suas arestas que se intersectam num único ponto.

O cubo é um caso particular de bloco retangular em que todas as arestas têm o mesmo comprimento. Um cubo de aresta unitária é tomado como unidade de medida de volume. Dizemos que um cubo de aresta de um metro (1 $\mathtt{m}$) tem volume de um metro cúbico (1 $\mathtt{m}^3$); um cubo de aresta de 1 cm tem volume de 1 $\mathtt{cm}^3$; um cubo de aresta de 1 dm tem volume de 1 $\mathtt{dm}^3$. Lembrando–se que um litro (1 $\mathtt{L}$) é uma medida equivalente a 1 $\mathtt{dm}^3$.

Agora, vejamos nas figuras abaixo que se um cubo tem aresta de 2 $\mathtt{cm}$, nele "cabem" 8 $(= 2^3)$ cubinhos de aresta 1 $\mathtt{cm}$. Logo, o volume desse cubo de aresta 2 $\mathtt{cm}$ é 8 $\mathtt{cm}^3$.

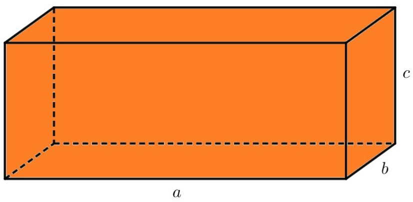
Mas, num cubo de aresta 4 $\mathtt{cm}$ cabem 4 camadas de cubinhos com aresta 1 $\mathtt{cm}$; em cada camada cabem $4 \cdot 4$ cubinhos. Logo, o volume desse cubo é, em cm^3: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$. Pode–se provar que para qualquer cubo de aresta com medida um número real a positivo seu volume é dado por $V = a^3$, veja por exemplo: Lima (1985) e (1991), Lima & Carvalho (2006) e Muniz Neto (2013).



Fonte: De autoria

4.2 Volume de um bloco Retangular

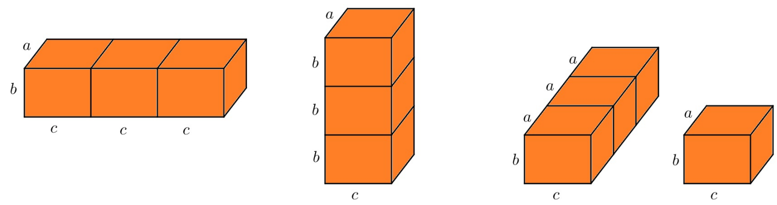
Todo bloco retangular é um poliedro formado por 6 faces retangulares. Ele fica determinado por suas três dimensões, tais como: seu comprimento (a), a sua largura (b) e sua altura (c). Dessa forma indicamos o volume desse bloco retangular pela expressão $V(a, b, c)$ e o cubo unitário por $V(1, 1, 1) = 1$.



Fonte: De autoria

O volume de um bloco retangular é proporcional a cada uma de suas dimensões, ou seja, se mantivermos constantes duas das suas dimensões e multiplicarmos a terceira dimensão por qualquer número real positivo, seu volume também será multiplicado por esse mesmo número real positivo. Veja às ilustrações abaixo:

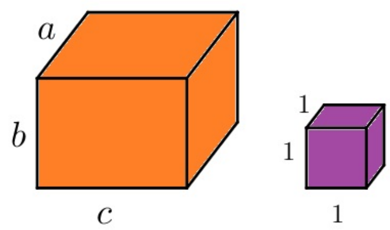
$$V(a, b, 3c) = V(a, 3b, c) = V(3a, b, c) = 3V(a, b, c)$$



Fonte: De autoria

Agora, sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, então temos:

$$\begin{aligned}
V(a,b,c) &= V(a\cdot 1,b,c)\\
V(a,b,c) &= a\cdot V(1,b,c)\\
V(a,b,c) &= a\cdot V(1,b\cdot 1,c)\\
V(a,b,c) &= a\cdot b\cdot V(1,1,c)\\
V(a,b,c) &= a\cdot b\cdot V(1,1,c\cdot 1)\\
V(a,b,c) &= a\cdot b\cdot c\cdot V(1,1,1)\\
V(a,b,c) &= a\cdot b\cdot c\cdot 1\\
V(a,b,c) &= a\cdot b\cdot c
\end{aligned}$$



Fonte: De autoria

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas três dimensões. Em particular, se a face de dimensões a e b está contida em um plano horizontal, chamaremos essa face de base e a dimensão c de altura. Como o produto ab é a área da base, é costume dizer que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

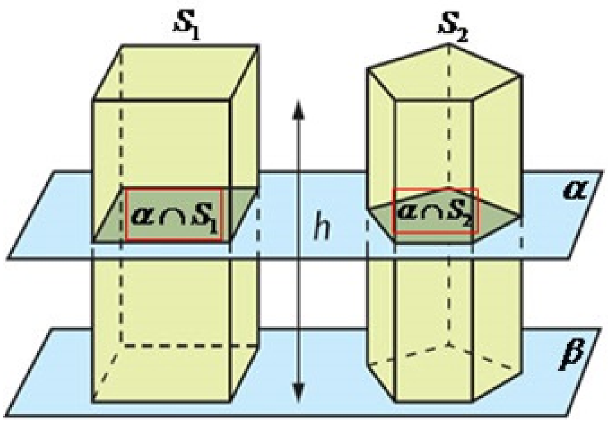
$$\text{Volume do paralelepípedo} = (\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

4.3 O Princípio de Cavalieri

Bonaventura Francesco Cavalieri nasceu em Milão, na Itália, no ano de 1598. Ainda menino, tornou-se membro da ordem religiosa dos jesuítas. Lá aprendeu Matemática e conheceu os trabalhos de Euclides que estimularam seu interesse pela matemática. Cavalieri foi discípulo de Galileo.

Bonaventura Cavalieri foi um matemático italiano, discípulo de Galileu, que criou um método capaz de determinar áreas e volumes de sólidos com muita facilidade, denominado princípio de Cavalieri. Este princípio consiste em estabelecer que dois sólidos com a mesma altura têm volumes iguais se as secções planas de iguais altura possuírem a mesma área.

Consideremos dois planos horizontais α e β paralelos, sendo que α seccionará dois sólidos S_1 e S_2. O plano α determinará nos sólidos duas seções planas indicadas por $\alpha \cap S_1$ e $\alpha \cap S_2$.

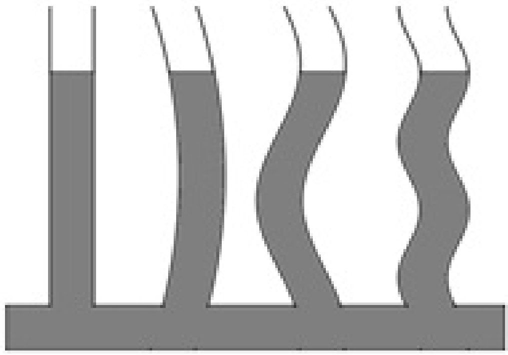


Se para qualquer plano horizontal α, ocorrer $\alpha \cap S_1 = \alpha \cap S_2$, isto é, possuírem a mesma área, os volumes dos sólidos S_1 e S_2 serão iguais, constituindo o princípio de Cavalieri.

A geometria proposta por Cavalieri foi o primeiro passo rumo ao cálculo infinitesimal, pois essa nova geometria ponderava que toda figura plana seria formada por retângulos de largura infinitesimal, chamados por Galileu de indivisíveis. Dessa forma, pode–se concluir que se duas figuras planas comprimidas entre retas paralelas formam uma relação constante, as áreas das figuras também possuem a mesma relação.

Essa ideia de indivisível proposta por Galileu e trabalhada por Cavalieri provocou muita discussão e críticas por parte de algumas pessoas ligadas ao assunto. A consistência do método dos indivisíveis foi aceita e usada por importantes cientistas, como, Torricelli, Fermat, Pascal entre outros.

Exemplo 4.1. *Um sistema de vasos comunicantes é formado por* 4 *tubos cujas seções são círculos com* 2 $\mathtt{cm}$ *de diâmetro. Qual o volume líquido armazenado nos tubos até o nível de* 10 $\mathtt{cm}$*?*



Solução: O volume do líquido armazenado em cada tubo é, pelo Princípio de Cavalieri, igual ao volume de um cilindro cuja base é um círculo de raio 1 $\mathtt{cm}$ e cuja altura é 10 $\mathtt{cm}$, ou seja, $10\pi\ \mathtt{cm}^3$. Sendo 4 tubos, o líquido armazenado tem o volume total de $40\pi\ \mathtt{cm}^3$.

Definição 1. *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:*

a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

Todo poliedro (no sentido da definição acima), limita uma região do espaço chamada de interior desse poliedro. Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior é convexo. “Um conjunto C, do plano ou do espaço, diz–se convexo, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C”.

No caso dos poliedros, podemos substituir essa definição por outra equivalente, que nos será mais útil:

“Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) corta em, no máximo, dois pontos”.

Figura 1: Poliedro Convexo

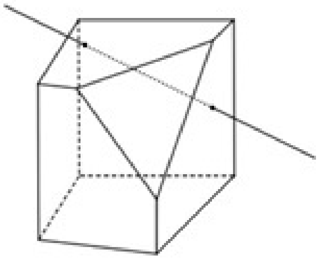
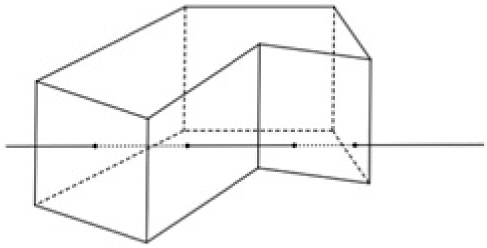


Figura 2: Poliedro não Convexo



Fonte: De autoria

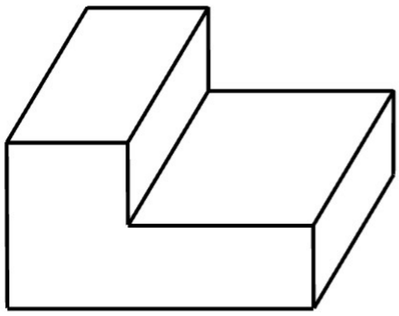
Em todo poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação de Euler $V - A + F = 2$, pois caso contrário, quando o poliedro estiver aberto vale a relação $V - A + F = 1$. Veja por exemplo: Lima (1985), Muniz Neto, Machado, E.L.; Carvalho, P.C.P.; Wagner, E.; Morgado v. 2 (2006), Dolce V. 10 (2013).

Nota 3. *Leonhard Euler (1707 – 1783) foi um importante matemático e cientista suíço, foi considerado um dos maiores estudiosos da matemática, em sua época. Nasceu em Basileia, suíça, no dia 15 de Abril de 1707. Com 16 anos, recebeu o grau de Mestre em Artes, com uma dissertação que comparava os sistemas de Filosofia Natural de Newton e Descartes.*

Problema 1. *Um poliedro convexo tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é igual o quádruplo do número de faces triangulares.*

Solução: Seja x o número de faces triangulares. O número A de arestas é dado por $A = \dfrac{3x + 15}{2}$, pois cada face pentagonal tem cinco arestas e as faces triangulares tem 3 arestas, além disso, como cada aresta é contada duas vezes, então devemos somar o número de arestas e dividir por 2. Por outro lado, sabemos que $A = 4x$. Assim, temos que $15 + 3x = 8x$, daí segue que $x = 3$ (número de faces triangulares), como temos 3 faces pentagonais, logo existem 6 faces no poliedro.

Problema 2. *O poliedro não convexo, não atende a relação de Euler, veja na figura abaixo.*



Fonte: De autoria

Solução: $\mathsf{V} = 13$, $\mathsf{A} = 18$ e $\mathsf{F} = 8$, agora devemos substituir na relação de Euler:

$$\mathsf{V} - \mathsf{A} + \mathsf{F} = 2 \Longrightarrow 13 - 18 + 8 = 3,$$

como 3 difere de 2 , logo a relação de Euler não atende nesse poliedro.

5 Estudo dos Sólidos Geométricos

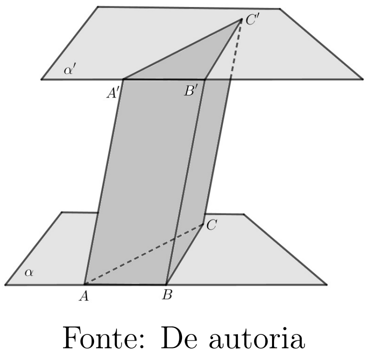
5.1 Estudo de um prisma

O que segue tomamos como referência DOLCE, O & POMPEO, J. N (2013) e MUNIZ NETO (2013).

Definição 2. *Denominamos prisma a todo poliedro convexo em que:*

1º) *Há duas faces (chamadas bases) que são polígonos congruentes contidos em planos paralelos distintos; e*

2º) *As demais faces (chamadas faces laterais) são paralelogramos determinados por pares de lados correspondentes nas duas bases.*



Fonte: De autoria

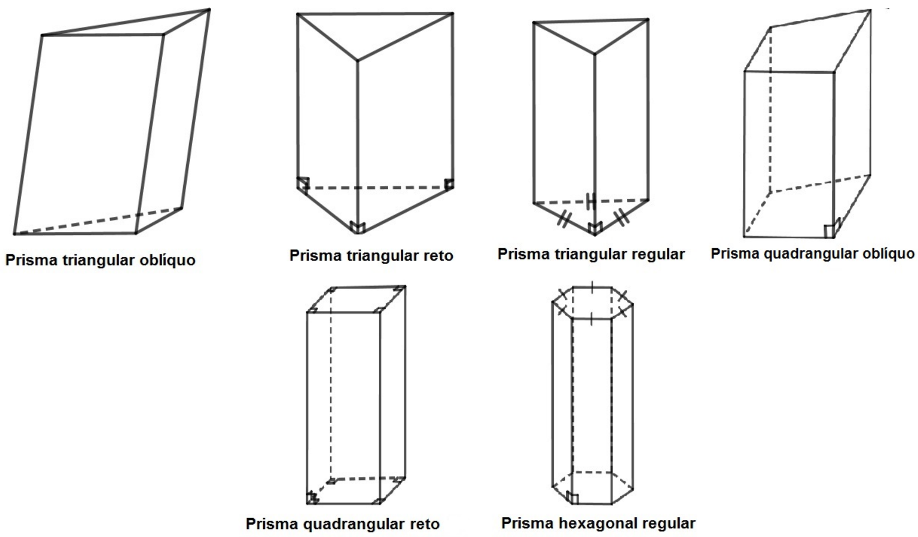
Os prismas recebem nomes de acordo com os polígonos das bases: prisma triangular (base triângulo); prisma quadrangular (base quadrilátero); prisma pentagonal (base pentágono), etc.

Os prismas podem ser classificados em duas categorias:

- prismas retos são aqueles em que as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases; e
- prismas oblíquos são aqueles em que as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

Os prismas retos, em que as bases são polígonos regulares, são chamados prismas regulares. Num prisma regular:

- as bases são polígonos regulares, logo têm lados congruentes e ângulos congruentes;
- as arestas laterais são perpendiculares às bases, logo as faces laterais são retângulos.



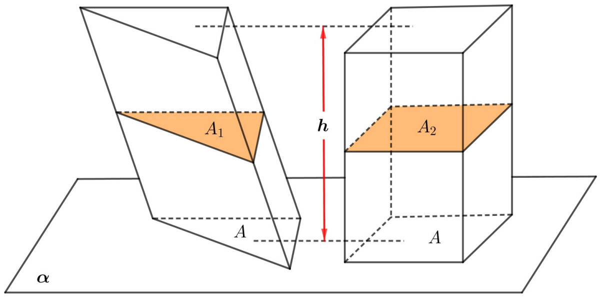
Fonte: De autoria

Teorema 5.1. *O volume de um prisma qualquer é dado pelo produto da sua altura pela área da base.*

Demonstração. Com o auxílio do Princípio de Cavalieri, podemos obter sem dificuldade o volume de um prisma. Sem perda de generalidade, consideremos um prisma de altura h, e cuja base seja um polígono de área A, contido em um plano horizontal. Agora, construímos ao lado deste prisma um paralelepípedo retângulo de mesma altura h e de forma que sua base seja um retângulo de área A.

Suponha agora que os dois sólidos sejam cortados por um outro plano horizontal paralelo ao plano α, que produz seções de áreas A_1 e A_2 no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. Diante disso o paralelepípedo é também um prisma e sabemos que em todo prisma, uma seção paralela à base é congruente com essa base. Logo, como figuras congruentes têm mesma área, temos que $A_1 = A = A_2$ e, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm mesmo volume. Dessa forma, como o volume do paralelepípedo é Ah, então o volume do prisma é também o produto da área de sua base por sua altura.

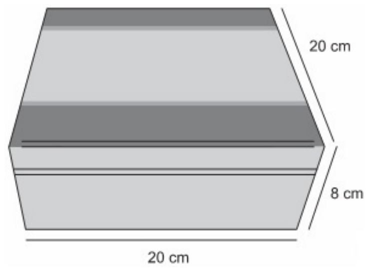
$$\text{Volume do Prisma} = (\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$



Fonte: De autoria

□

Problema 3 (ENEM PPL 2018). *Uma fábrica comercializa chocolates em uma caixa de madeira, como na figura.*



Fonte: Prova ENEM

A caixa de madeira tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões externas, em centímetro, estão indicadas na figura. Sabe–se também que a espessura da madeira, em todas as suas faces, é de $0,5\ \mathsf{cm}$.

Qual é o volume de madeira utilizado, em centímetros cúbico, na construção de uma caixa de madeira como a descrita para embalar os chocolates?

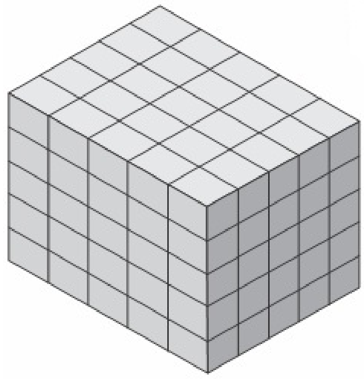
Solução: Primeiro devemos calcular o volume externo da caixa que é da forma:

$$\mathsf{V} = 20 \cdot 20 \cdot 8 = 3200\ \mathsf{cm}^3.$$

Agora devemos calcular o volume interno da caixa, ou seja, devemos subtrair às espessuras de cada dimensão da caixa, então temos: $\mathsf{V} = 19 \cdot 19 \cdot 7 = 2527\ \mathsf{cm}^3$, finalmente temos como solução a diferença destes volumes que é:

$$\mathsf{R} = 3200\ \mathsf{cm}^3 - 2527\ \mathsf{cm}^3 = 673\ \mathsf{cm}^3.$$

Problema 4 (ENEM PPL 2014). *Uma fábrica de rapadura vende seus produtos empacotados em uma caixa com as seguintes dimensões: de comprimento; de altura e de profundidade. O lote mínimo de rapaduras vendido pela fábrica é um agrupamento de caixas dispostas conforme a figura.*



Fonte: Prova ENEM

Qual é o volume do lote mínimo comercializado pela fábrica de rapaduras?

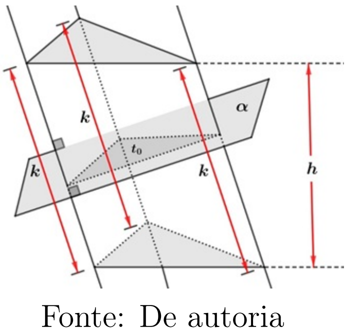
Solução: Primeiro devemos calcular o volume de uma caixa da forma: $V = 25 \cdot 10 \cdot 15 = 3750\ \mathsf{cm}^3$.

Como o lote mínimo possui 125 caixas, então devemos multiplicar esse total de caixas pelo volume de uma caixa, logo temos

$$R = 125 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 15 = 468750\ \mathsf{cm}^3.$$

Exemplo 5.1. *Sobre* 3 *retas paralelas, não situadas no mesmo plano, são tomados* 3 *segmentos de igual comprimento* k. *Prove que o volume do prisma triangular assim obtido depende do comprimento* h *mas não das posições dos segmentos sobre as retas.*

Solução: Consideremos um plano α, perpendicular ás três retas dadas.



Fonte: De autoria

Como o volume do prisma em questão é igual a $h\times$ área (t_o), onde t_o é o triângulo cujos vértices são as interseções de α com as três retas dadas. Evidentemente, t_o não depende das posições dos segmentos sobre as retas.

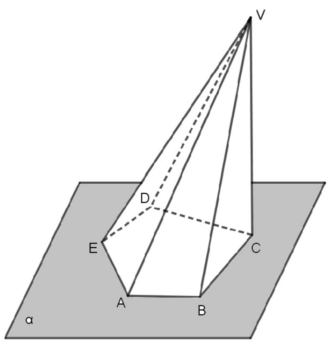
5.2 Estudo de uma pirâmide

Definição 3. *Denominamos pirâmide a todo poliedro convexo em que há uma face (chamada base), num dado plano, e apenas um vértice (chamado vértice da pirâmide) fora desse plano.*

As demais faces da pirâmide são os triângulos determinados, cada um deles por um lado da base e o vértice da pirâmide. Elas são chamadas faces laterais.

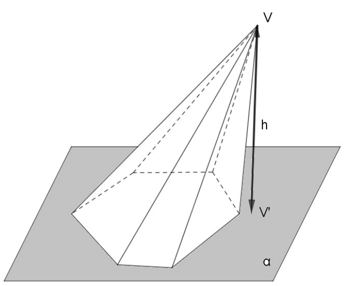
Na figura abaixo, representamos um poliedro convexo ABCDEV em que a face ABCDE é um polígono contido no plano α, e V é o único vértice que não está em α. Trata–se de uma pirâmide em que a base é $ABCDE$ e o vértice é V. As faces laterais são os triângulos ABV, BCV, CDV, DEV e EAV.

Convém observar que esta pirâmide tem 6 vértices: os 5 da base (A, B, C, D, E) e mais o chamado vértice da pirâmide (V).



Fonte: De autoria

Denominamos altura da pirâmide a distância entre o vértice e o plano da base. A altura é a distância entre V e sua projeção ortogonal V' sobre α.

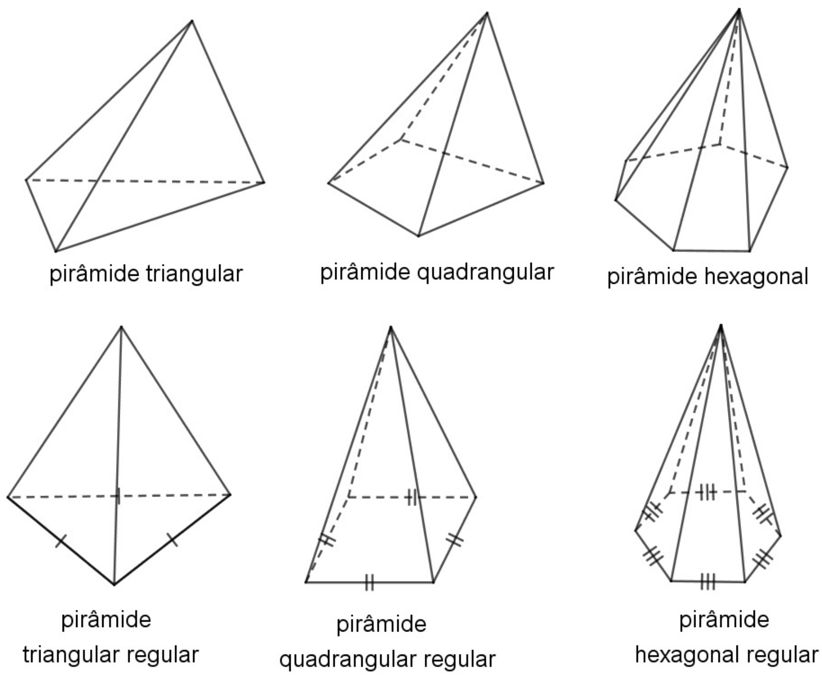


Fonte: De autoria

As pirâmides recebem nomes de acordo com o polígono da base: pirâmide triangular (base triângulo), pirâmide quadrangular (base quadrilátero), pirâmide pentagonal (base pentágono), etc.

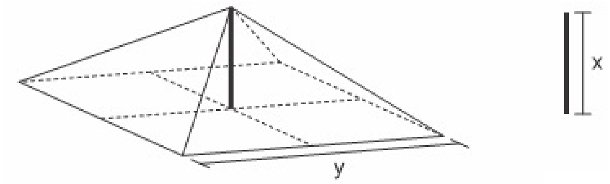
Uma pirâmide é denominada pirâmide regular, quando a base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice, no plano da base, coincide com o centro desse polígono.

Na pirâmide regular, as arestas da base são congruentes entre si e as arestas laterais são congruentes entre si.



Fonte: De autoria

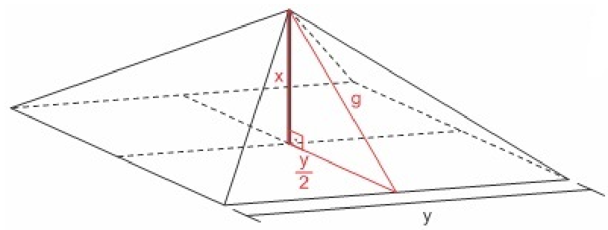
Problema 5 (ENEM PPL 2016). *A cobertura de uma tenda de lona tem formato de uma pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base* y. *A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida* x. *Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve–se calcular a área da superfície da cobertura da tenda.*



Fonte: Prova do ENEM

Qual é a área da superfície da cobertura da tenda, em função de y *e* x*?*

Solução: Primeiro devemos aplicar o teorema de pitágoras no triângulo destacado abaixo para encontrarmos a altura dos triângulos das faces laterais.



Fonte: De autoria

$$g^2 = x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Longrightarrow g = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}.$$

Logo,

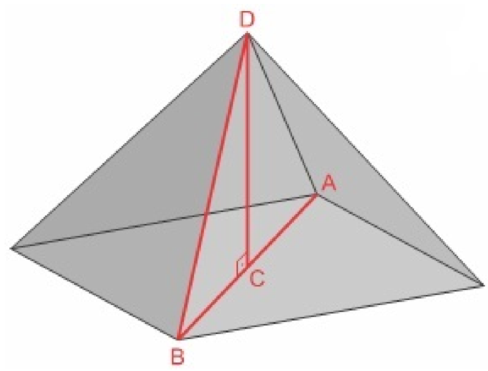
$$S_{\text{lateral}} = \frac{4 \cdot y \cdot g}{2} \Longrightarrow S_{\text{lateral}} = 2y \cdot \left(\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}\right).$$

Problema 6 (ENEM PPL 2016). *A figura mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente* $2,3$ *milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média* $2,5$ *toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo* $214zm$*, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam* 204 m.

Fonte: Prova do ENEM

Qual o valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops?

Solução: como a base da pirâmide é um quadrado, então a medida da diagonal do quadrado é AB e BC é metade da diagonal do quadrado. Agora devemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo destacado abaixo, dessa forma obtemos a altura desejada da pirâmide.



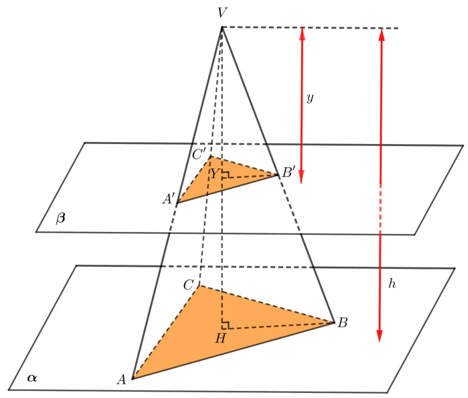
Fonte: De autoria

Temos que $AB = 214\sqrt{2}$, $BC = \dfrac{214\sqrt{2}}{2} = 107\sqrt{2}$ e $BD = 204$. Logo,

$$\begin{aligned}
(BD)^2 &= (DC)^2 + (BC)^2 \\
204^2 &= (DC)^2 + (107\sqrt{2})^2 \\
(DC)^2 &= 41616 - 22898 \\
(DC) &= \sqrt{18718} \\
(DC) &\approx 136,8 \text{ m}.
\end{aligned}$$

5.2.1 Secção paralela à base de uma pirâmide triangular

Consideremos uma pirâmide triangular de vértice V e base ABC contida num plano α. Seccionando essa pirâmide por um plano β, paralelo ao plano α, que intersecta as arestas laterais em pontos distintos, então temos:



Fonte: De autoria

a) A secção e a base são triângulos semelhantes. Justificativa: Os ângulos do triângulo $A'B'C'$ e do triângulo ABC são, respectivamente, congruentes por terem os lados correspondentes paralelos.

b) A razão de semelhança entre a secção e a base é $\frac{y}{h}$. Justificativa:

$$\Delta VYB' \equiv \Delta VHB \quad \Rightarrow \quad \frac{VB'}{VB} = \frac{VY}{VH} \Rightarrow \frac{VB'}{VB} = \frac{y}{h}.$$

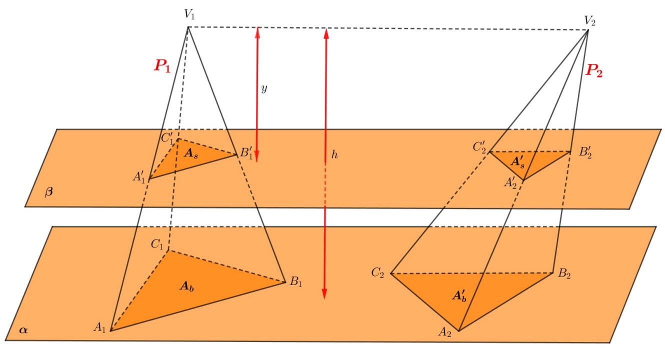
$$\Delta VA'B' \equiv \Delta VAB \quad \Rightarrow \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{VB'}{VB} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{y}{h}.$$

c) A razão entre a área da secção e a área da base é

$$\left(\frac{y}{h}\right)^2. \tag{5.1}$$

Teorema 5.2. *Duas pirâmides triangulares de mesma altura e bases equivalentes têm volumes iguais.*

Demonstração. Consideremos duas pirâmides triangulares, P_1 e P_2, de mesma altura h, apoiadas num plano α e contidas num mesmo semiespaço de origem α, de modo que qualquer plano paralelo a α estabeleça em P_1 secção de área A_s e determine em P_2 secção de área A_s'.



Fonte: De autoria

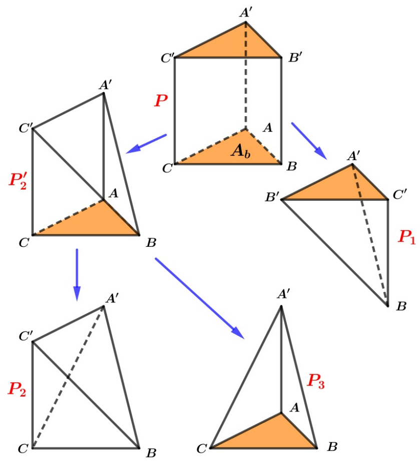
Por (5.1), então temos:

$$\frac{A_s}{A_b} = \left(\frac{y}{h}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{A_s'}{A_b'} = \left(\frac{y}{h}\right)^2.$$

Mas, como as pirâmides das bases possuem mesma área, $A_b = A_b'$ então concluímos que $A_s = A_s'$.

Como as secções das duas pirâmides são equivalentes, ou seja, possuem mesma área, então pelo Princípio de Cavalieri podemos garantir que os volumes de P_1 e de P_2 são iguais, então temos que: $V_{P_1} = V_{P_2}$. $\square$

Teorema 5.3. *O volume de uma pirâmide triângular é* $\dfrac{1}{3}$ *do produto da área da base pela medida da sua altura.*



Fonte: De autoria

Demonstração. Consideremos um prisma triangular de bases ABC e $A'B'C'$. Seccionando–o pelo plano $BA'C'$, obtemos as pirâmides P_1 de vértices A', B', C', B e P_2' de vértices A, A', C', C, B. Seccionando P_2' pelo plano $A'BC$, então temos as pirâmides P_2 de vértices A', B, C, C' e P_3 de vértices A', A, B, C.

Dessa forma o prisma foi decomposto em três pirâmides triangulares, P_1, P_2 e P_3, então podemos verificar que a soma dos volumes destas pirâmides é igual ao volume do prisma original, logo,

$$V = V_{P_1} + V_{P_2} + V_{P_3}. \tag{5.2}$$

- P_1 é equivalente a P_3, pois têm bases com áreas iguais ($\Delta A'B'C'$ e ΔABC) e mesma altura(distância entre as bases). Logo,

$$V_{P_1} = V_{P_3}. \tag{5.3}$$

- P_2 é equivalente a P_3, pois têm bases com áreas iguais $A_{(A'CC')} = A_{(AA'C)} = \dfrac{1}{2} \cdot A_{(A'ACC')}$ e mesma altura (distância de B à face oposta). Logo,

$$V_{P_2} = V_{P_3}. \tag{5.4}$$

Agora, usando–se (5.3) e (5.4), temos:

$$V_{P_1} = V_{P_3} = V_{P_2}.$$

Por (5.2), temos, que o volume de cada pirâmide triangular é dado por

$$V = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}.$$

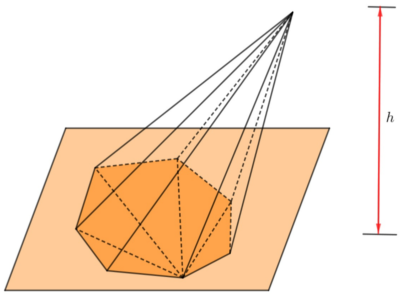
Concluímos, então que

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h.$$

□

Teorema 5.4. *O volume de uma pirâmide qualquer é um terço do produto de sua altura pela área da base.*

Demonstração. Considere uma pirâmide de vértice V e um polígono na base com n lados. Como todo polígono pode ser decomposto em $n-2$ triângulos, então a base desta pirâmide é decomposta em $n-2$ triângulos; logo pode ser decomposta em $n-2$ pirâmides triangulares, cujas bases são esses $n-2$ triângulos, de mesma altura h.



Fonte: De autoria

Sendo B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-2} as áreas desses $n-2$ triângulos, então temos:

$$B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_{n-2} = A_b,$$

logo, o volume da pirâmide é calculado pela expressão:

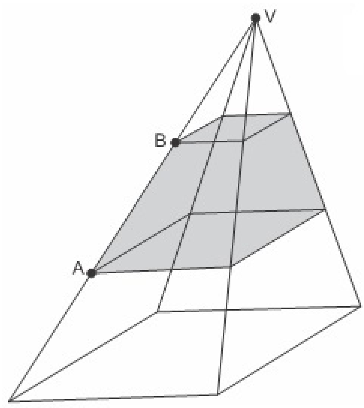
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot B_2 \cdot h + \ldots + \frac{1}{3} \cdot A_{n-2} \cdot h \\ V &= \frac{1}{3} \cdot (B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-2}) \cdot h \\ V &= \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h. \end{aligned}$$

□

Problema 7 (UERJ 2019). *Observe na imagem uma pirâmide de base quadrada, seccionada por dois planos paralelos à base, um contendo o ponto A e o outro o ponto B. Esses planos dividem cada aresta lateral em três partes iguais.*

Considere as seguintes medidas da pirâmide:

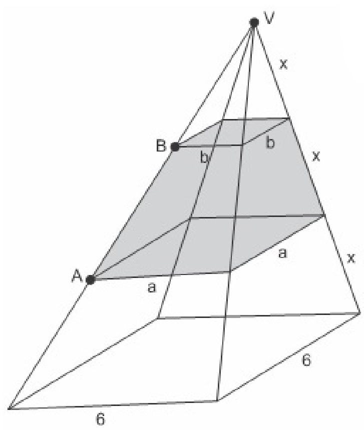
- *altura* $= 9\ \mathtt{cm}$
- *aresta da base* $= 6\ \mathtt{cm}$
- *volume total* $= 108\ \mathtt{cm}^3$



Fonte: Prova da UERJ

Qual o volume da região compreendida entre os planos paralelos?

Solução: Devemos utilizar a pirâmide V_1 semelhante a pirâmide V total, sendo que a pirâmide V_1 tem bases quadradas de lados b e, depois utilizamos a pirâmide V_2 semelhante a pirâmide total V, sendo que a pirâmide V_2 tem bases de medidas iguais a. Depois é só subtrair os valores dos volumes encontrados da forma: $V_2 - V_1$ que é o valor procurado.



Fonte: De autoria

Temos, $\dfrac{x}{3x} = \dfrac{b}{6} \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2$. Daí,

$$\frac{V_1}{108} = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \Longrightarrow V_1 = 108 \cdot \left(\frac{8}{216}\right) \Longrightarrow V_1 = 4\ \mathtt{cm}^3.$$

Tem–se, $\frac{2x}{3x} = \frac{a}{6} \Rightarrow 3b = 12 \Rightarrow a = 4$. Daí,

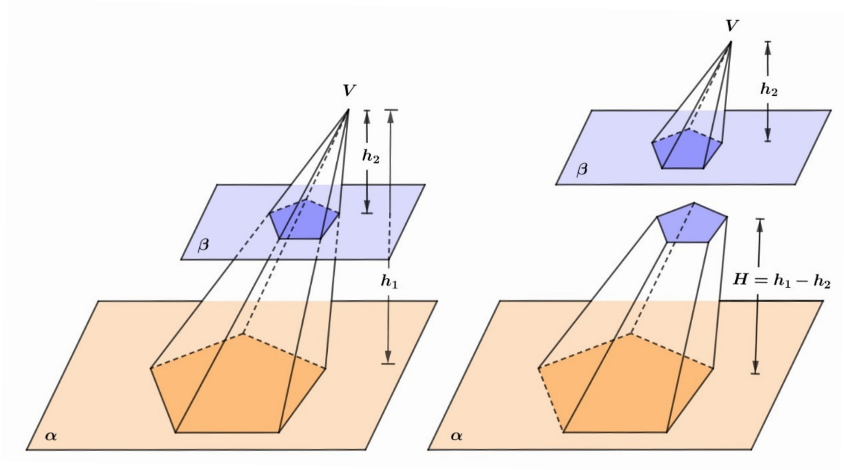
$$\frac{V_2}{108} = \left(\frac{4}{6}\right)^3 \Longrightarrow V_2 = 108 \cdot \left(\frac{64}{216}\right) \Longrightarrow V_2 = 32 \text{ cm}^3.$$

Logo,

$$V_{\text{hachura}} = 32 - 4 = 28 \text{ cm}^3.$$

5.2.2 Tronco de Pirâmide e pirâmides semelhantes

Sejam uma pirâmide de vértice V e altura h_1 e um plano α que contém a base desta pirâmide.



Fonte: De autoria

Seccionando essa pirâmide por um plano β, paralelo ao plano α e que está a uma distância h_2 $(0 < h_2 < h_1)$ de V, então temos:

a) Uma nova pirâmide de vértice V e altura h_2, cujas faces são semelhantes às correspondentes faces da pirâmide de vértice V e altura h_1; estas duas pirâmides são ditas semelhantes;

b) Um outro sólido, chamado de tronco de pirâmide de bases paralelas (são as bases das duas pirâmides), cujas faces laterais são trapézios e cuja altura é $H = h_1 - h_2$.

Duas pirâmides são semelhantes se existe uma correspondência entre elas de modo que o quociente de cada segmento de reta de uma delas e o correspondente segmento da outra seja constante. Essa constante é a razão de semelhança entre essas pirâmides e será representada pela letra K.

5.2.3 Volume de tronco de Pirâmide

É relevante observar que:

a) As bases de um tronco de pirâmide de bases paralelas são polígonos semelhantes;

b) Num tronco de pirâmide reta tendo como base um polígono regular, as faces laterais são trapézios isósceles congruentes.

Nota: Se duas pirâmides são semelhantes e a razão entre as medidas dos elementos lineares correspondentes é igual a K, então:

I. a razão entre as áreas de superfícies correspondentes é igual a K^2;

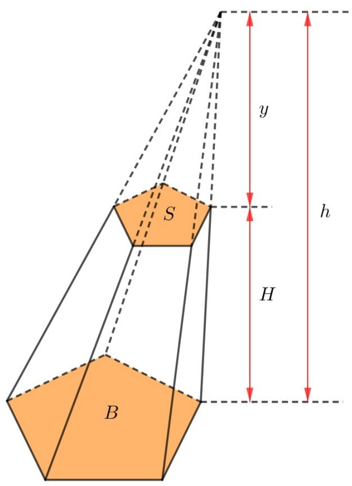
II. a razão entre os volumes dos dois sólidos é igual a K^3.

Veja por exeplo os autores: Dolce O. vol. 10 (2013); Lima (1985); Neto Muniz (2013); Machado (1988).

Sejam B e S as áreas das bases de um tronco de pirâmide de bases paralelas e H a altura do tronco. Então o volume V desse tronco de pirâmide será dado por $V_1 - V_2$, onde V_1 e V_2 são os volumes das pirâmides de alturas respectivamente h e y:

Dessa forma temos uma expressão do tipo:

$$V = V_1 - V_2. \tag{5.5}$$



Fonte: De autoria

A razão de semelhança entre as pirâmides de bases B e S é $\dfrac{h}{y}$; então:

$$\frac{B}{S} = \left(\frac{h}{y}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h}{y}\right)^3.$$

Substituindo $V_1 = V_2 \cdot \left(\dfrac{h}{y}\right)^3$ em (5.5), vem:

$$\begin{aligned}
V &= V_2 \cdot \left(\frac{h}{y}\right)^3 - V_2 \\
V &= V_2 \cdot \left(\frac{h^3}{y^3} - 1\right) \\
V &= V_2 \cdot \left(\frac{h^3 - y^3}{y^3}\right) \\
V &= V_2 \cdot \left(\frac{(h-y)(h^2+hy+y^2)}{y^3}\right).
\end{aligned}$$

Como $h - y = H$ e $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot y$, vem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot y \cdot \left(\frac{H(h^2+hy+y^2)}{y^3}\right) \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot SH\left(\frac{h^2}{y^2} + \frac{h}{y} + 1\right).$$

Substituindo $\dfrac{h^2}{y^2}$ por $\dfrac{B}{S}$ e $\dfrac{h}{y}$ por $\sqrt{\dfrac{B}{S}}$, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot SH\left(\frac{B}{S} + \sqrt{\frac{B}{S}} + 1\right) \Rightarrow V = \frac{H}{3} \cdot \left(B + \sqrt{BS} + S\right).$$

Problema 8 (IME 2017)**.** *Um tronco de pirâmide regular possui* 12 *vértices. A soma dos perímetros das bases é* 36 cm *a soma das áreas das bases é* $30\sqrt{3}$ cm^2 *e sua altura mede* 3 cm*. Calcule o volume do tronco de pirâmide.*

Solução: Se o tronco possui vértices, portanto a pirâmide tem base hexagonal regular. Sendo ℓ o lado da base menor (topo) e L o lado da base maior, então podemos montar às expressões do tipo:

Depois aplicamos a fórmula do volume de tronco de pirâmide para encontrar o valor desejado.

$$\begin{cases} 6 \cdot (L + \ell) = 36 \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (L^2 + \ell^2) = 30\sqrt{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L + \ell = 6 \\ L^2 + \ell^2 = 20 \end{cases}$$

Daí, temos:

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{L}+\ell)^2 &= 6^2\\
\mathsf{L}^2+2\cdot\mathsf{L}\cdot\ell+\ell^2 &= 36\\
2\cdot\mathsf{L}\cdot\ell &= 16\\
\mathsf{L}\cdot\ell &= 8.
\end{aligned}
$$

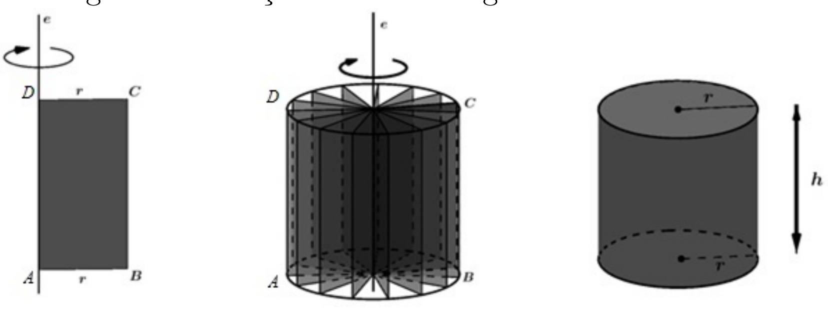
Logo,

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{h}{3}\cdot(B+B'+\sqrt{B\cdot B'})\\
V &= \frac{3}{3}\cdot\left(30\sqrt{3}+\sqrt{6\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\cdot 6\cdot\frac{\mathsf{L}^2\sqrt{3}}{4}}\right)\\
V &= 30\sqrt{3}+\sqrt{6\cdot 36\cdot\frac{(\mathsf{L}\cdot\ell)^2}{16}}\\
V &= 30\sqrt{3}+\sqrt{432}\\
V &= 42\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

5.3 Estudo de um cilindro

Definição 4. *Cilindro de revolução (ou cilindro circular reto) é obtido pela rotação completa de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados.*

Figura 3: Rotação de um retângulo sobre um eixo e

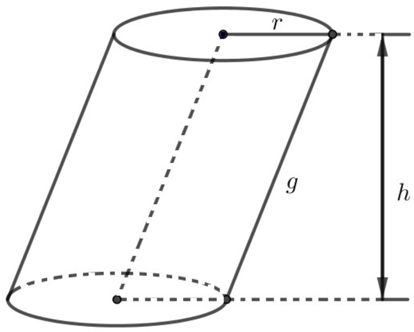


Fonte: De autoria

O eixo e é denominado eixo do cilindro; os círculos gerados pela rotação dos lados AB e CD são as bases e a superfície gerada pelo lado BC é chamada de superfície lateral do cilindro. A medida $r = AB = CD$ é o raio das bases e $h = BC$ é a altura do cilindro.

O segmento BC, ou qualquer outro paralelo ao eixo e com uma extremidade em cada circunferência das bases, é denominado geratriz. No cilindro reto, a medida da geratriz é igual à altura.

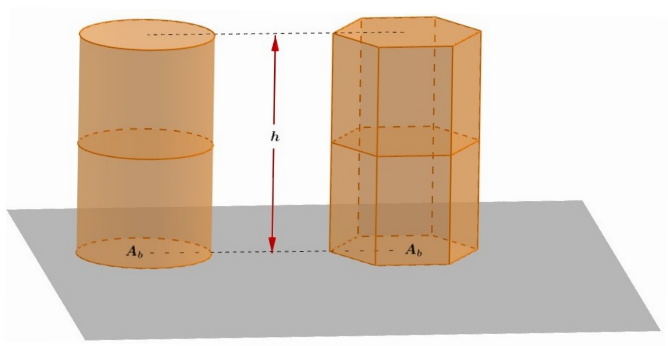
Nota: Existem também cilindros circulares que não são cilindros de revolução, são chamados cilindros circulares oblíquos. Num cilindro oblíquo, as bases são círculos de mesmo raio, contidos em planos paralelos, mas o eixo, que liga os centros das bases, não é perpendicular aos planos delas. Neste caso, a medida de uma geratriz g é maior que a altura h (distância entre os planos das bases).



Fonte: De autoria

Teorema 5.5. *O volume de um cilindro circular é dado pelo produto da área da base pela altura do cilindro.*

Demonstração. Consideremos um cilindro e um prisma de bases equivalentes contidas num planos α. Portanto, o cilindro e o prisma têm alturas iguais e bases de mesma área.



Fonte: De autoria

Um plano paralelo às bases, que secciona os dois sólidos, determina neles secções transversais congruentes, pois cada uma é congruente à base do respectivo sólido. Pelo Princípio de Cavalieri, concluímos então que o cilindro e o prisma têm volumes iguais. Desta forma, o volume V do cilindro é dado pela mesma fórmula do volume V de um prisma.

$$V = A_b \cdot h.$$

Como o cilindro a base é um círculo de raio r, então o volume do cilindro é

$$V = \pi r^2 \cdot h.$$

$\square$

Obs 1. *Quando seccionamos um cilindro por um plano paralelo à base, obtemos uma secção transversal do mesmo, que é um círculo congruente à base.*

Obs 2. *Quando seccionamos um cilindro por um plano que contém o eixo, a secção é dita meridiana; a secção meridiana de um cilindro circular reto é um retângulo de dimensões* $2r$ *(diâmetro da base) e* h *(altura). Quando* $2r = h$*, essa secção é um quadrado e o cilindro é chamado, neste caso, cilindro equilátero.*

Exemplo 5.2. *Chama-se seção reta de um cilindro à figura plana obtida como interseção do cilindro com um plano perpendicular à geratriz. (impõe-se ainda, tacitamente, que esse plano corte todos os segmentos de reta levantados da base paralelamente à geratriz). Prove que o volume de um cilindro é igual ao produto da área de sua seção reta pelo comprimento da geratriz.*

Solução: Seja π um plano perpendicular à geratriz do cilindro C, cuja base chamaremos de F. Como π é um plano horizontal, a figura plana F é uma superfície e o cilindro C é o sólido obtido como reunião dos segmentos verticais de comprimento g exigidos a partir dos pontos da superfície F. Sendo assim, $V(C) = g \cdot \text{área}(F_0)$, onde F_0 é a projeção vertical de F sobre o plano π. Ora, F_0 nada mais é do que a seção reta do cilindro C.

Problema 9 (ENEM PPL 2015). *Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é* $2,4$ *metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é* 20% *maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada.*

Qual é a profundidade, em metros, desse poço?

Solução: Sendo r e h as dimensões do cone e R e H as dimensões do poço, calculando o volume do poço e do cone, tem–se:

$$\begin{aligned}
V_{\text{cone}} &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \\
V_{\text{cone}} &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3R)^2 \cdot 2,4 \\
V_{\text{cone}} &= 7,2\pi R^2.
\end{aligned}$$

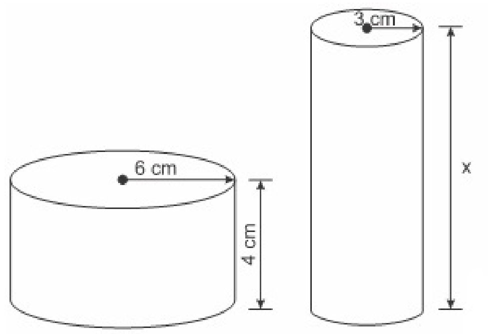
e

$$V_{\text{poço}} = \pi \cdot R^2 \cdot H.$$

Pelo enunciado, sabe–se que o volume do cone é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, logo, pode–se escrever:

$$\begin{aligned} 1,2 \cdot V_{\text{poço}} &= V_{\text{cone}} \\ 1,2\pi R^2 \cdot H &= 7,2\pi R^2 \\ H &= 6 \text{ m}. \end{aligned}$$

Problema 10 (ENEM PPL 2015)**.** *Uma fábrica brasileira de exportação de peixes vende para o exterior atum em conserva, em dois tipos de latas cilíndricas: uma de altura igual a* 4 cm *e raio* 6 cm *e outra de altura desconhecida e raio de* 3 cm *respectivamente, conforme figura. Sabe–se que a medida do volume da lata que possui raio maior,* V_1 *é* 1,6 *vezes a medida do volume da lata que possui raio menor,* V_2*.*



Fonte: Prova do ENEM

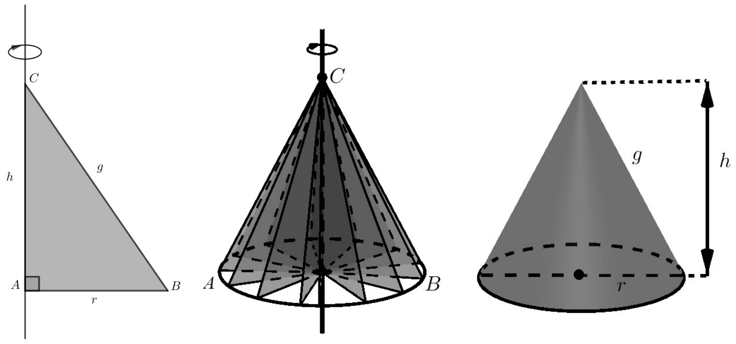
Qual a medida da altura desconhecida?

Solução: Primeiro devemos calcular o volume V_1 da lata cilíndrica menor e, depois calculamos o volume V_2 da lata cilíndrica maior. Dessa forma igualamos os volumes das latas de modo que o volume V_1 é igual ao $1,6 \cdot V_2$. Temos que, $V_1 = \pi \cdot 6^2 \cdot 4$ e $V_2 = \pi \cdot 3^2 \cdot x$. Daí,

$$\begin{aligned} V_1 &= 1,6 \cdot V_2 \\ \pi \cdot 6^2 \cdot 4 &= 1,6 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot x \\ 144 &= 14,4 \cdot x \\ x &= 10 \text{ cm}. \end{aligned}$$

5.4 Estudo do Cone

Definição 5. *Cone de revolução (ou cone circular reto) é o sólido obtido pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um dos catetos.*



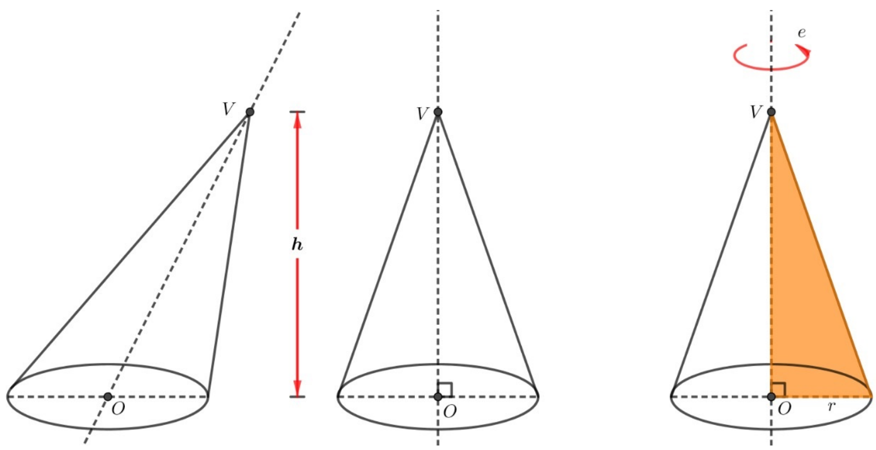
Fonte: De autoria

O eixo e é denominado eixo do cone; o círculo gerado pela rotação do cateto AB é a base do cone e a superfície gerada pela hipotenusa BC é chamada de superfície lateral do cone. A medida $r = AB$ é o raio da base e $h = AC$ é a altura do cone. O ponto C é o vértice do cone.

Os cones podem ser classificados pela posição da reta VO em relação ao plano da base:

Se a reta VO é oblíqua ao plano da base, temos um **cone circular oblíquo**.

Se a reta VO é perpendicular ao plano da base, temos um **cone circular reto**.



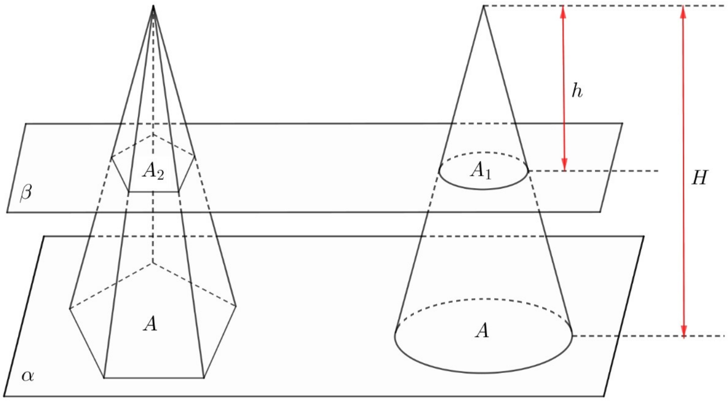
Fonte: De autoria

O **eixo** de um cone é a reta determinada pelo vértice e pelo centro da base do cone. A geratriz de um cone circular reto é também dita **apótema** do cone.

Teorema 5.6. *O volume de um cone é um terço do produto de sua altura pela área da base.*

Demonstração. Consideremos um cone de altura H com área da base de medida A contida num plano α.

Consideremos também uma pirâmide de altura H com área da base de medida A contida no mesmo plano α.



Fonte: De autoria

Se um plano horizontal β com distância h dos vértices secciona os dois sólidos, determinando regiões planas de áreas A_1 e A_2, então temos:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{h^2}{H^2} \quad \text{e} \quad \frac{A_2}{A} = \frac{h^2}{H^2},$$

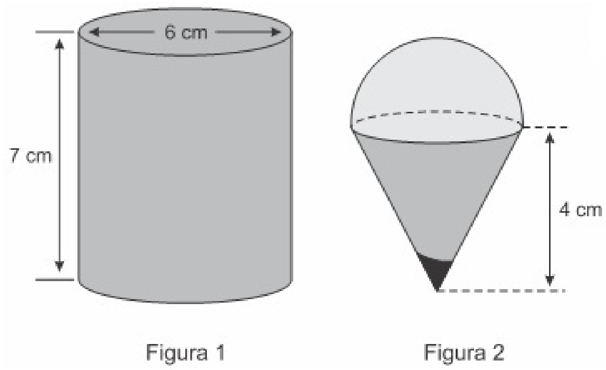
então $\dfrac{A_2}{A} = \dfrac{A_1}{A}$, logo $A_1 = A_2$.

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, podemos afirmar que o cone e a pirâmide iniciais têm o mesmo volume. Como já sabemos que o volume da pirâmide é $V = A_b \cdot \dfrac{h}{3}$. Logo o cone também possui o mesmo volume do tipo:

$$V = \left(\text{Área da base}\right) \cdot \frac{\text{altura}}{3}.$$

$\square$

Problema 11 (ENEM PPL 2014)**.** *Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de cilindro reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.*



Fonte: De autoria

O artesão deseja fazer um pião com a maior altura que esse pedaço de madeira possa proporcionar e de modo a minimizar a quantidade de madeira a ser descartada.

Dados:

O volume de uma esfera de raio r *é* $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$*;*

O volume do cilindro de altura h *e área da base* S *é* $S \cdot h$*;*

O volume do cone de altura h *e área da base* S *é* $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$*;*

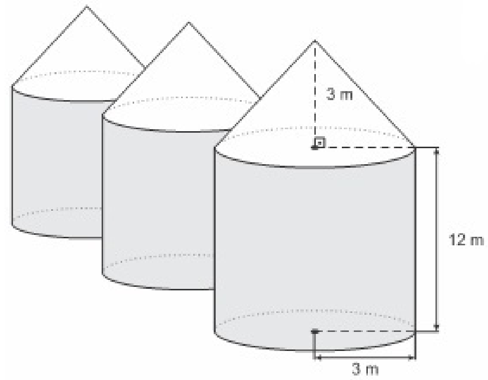
Por simplicidade, aproxime π *para* 3.

Qual a quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos?

Solução: A quantidade de madeira descartada corresponde ao volume do cilindro subtraído dos volumes da semiesfera e do cone. Portanto, o resultado encontrado é

$$\begin{aligned} \pi \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi (7-4)^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 4 &\cong 189 - 54 - 36 \\ &= 99 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Problema 12 (ENEM 2016). *Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposta por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de* 20 m^3*. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.*



Fonte: De autoria

Utilize 3 *como aproximação para* π.

Qual o número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo?

Solução: O volume do silo é dado pela soma do volume do cilindro com o volume do cone, dessa forma obtemos:

$$\pi \cdot 3^2 \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 \cong 324 + 27 \cong 351 \ m^3.$$

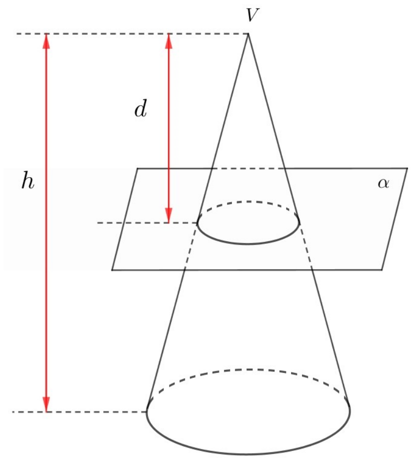
Portanto, se n é o número de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo, então devemos ter a quantidade mínima de viagens feita pela divisão do volume do silo e a capacidade que cada caminhão pode transportar, dessa forma obtemos:

$$n \geqslant \frac{351}{20} = 17,55.$$

Logo a quantidade mínima é 18.

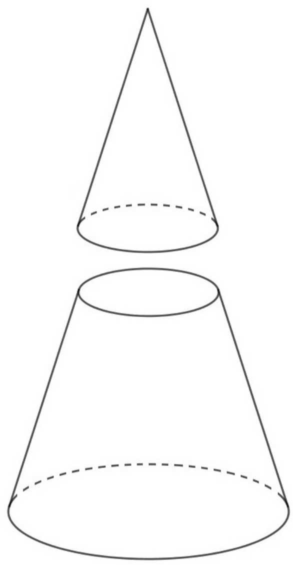
5.4.1 Tronco de Cone

Vamos considerar um cone circular reto de vértice V e altura h e um plano α paralelo à base que secciona o cone, então veja a ilustração:



Fonte: De autoria

Neste caso, obtemos os dois sólidos; um cone de vértice V e altura d e o outro sólido, que chamamos de tronco de cone inicial:



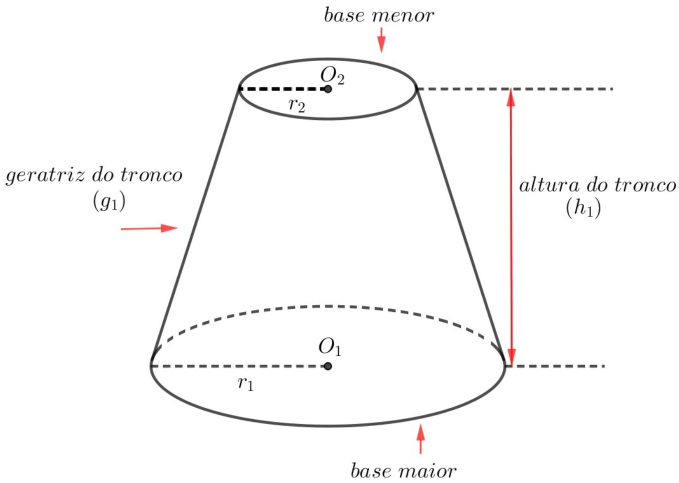
Fonte: De autoria

No tronco de cone, destacamos as seguintes partes:

a) duas bases: a base maior (base do cone inicial) e a base menor(secção determinada pelo plano α);

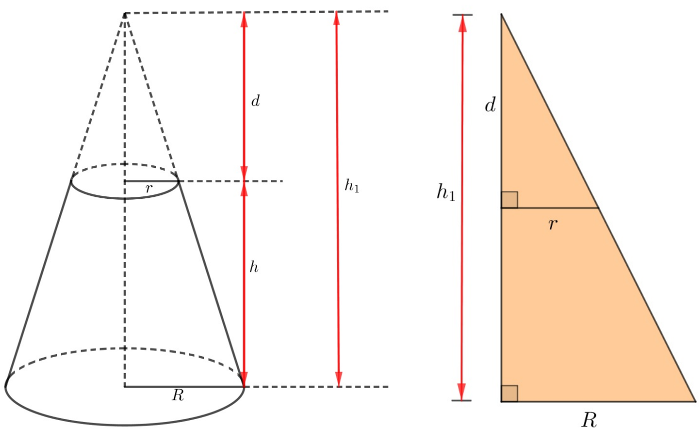
b) a altura (h_1), que é a distância entre as bases ($h_1 = h - d$);

c) a geratriz, cuja medida (g_1) é obtida pela diferença das medidas das geratrizes dos dois cones: $g_1 = g - g_2$, em que g: geratriz do cone inicial e g_2: geratriz do cone determinado pela secção com o plano α.



Fonte: De autoria

5.4.2 Volume do tronco de cone reto



Fonte: De autoria

$$
\begin{aligned}
V_{\text{tronco}} &= V_{\text{cone(maior)}} - V_{\text{cone(menor)}} \\
V_{\text{tronco}} &= \frac{1}{3}\pi R^2 h_1 - \frac{1}{3}\pi r^2 d \\
V_{\text{tronco}} &= \frac{\pi}{3}\left(R^2 h_1 - r^2 d\right) \\
V_{\text{tronco}} &= \frac{\pi}{3}\left[R^2 h_1 - r^2 (h_1 - h)\right] \\
V_{\text{tronco}} &= \frac{\pi}{3}\left[R^2 h_1 - r^2 h_1 + r^2 h\right] \\
V_{\text{tronco}} &= \frac{\pi}{3}\left[(R^2 - r^2) h_1 + r^2 h\right]. \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Da semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{R}{r} = \frac{h_1}{d} \Rightarrow Rd = rh_1 \Rightarrow R(h_1 - h) = rh_1 \Rightarrow Rh_1 - Rh = rh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{hR}{R-r}. \tag{5.7}$$

Substituindo (5.7) em (5.6), temos:

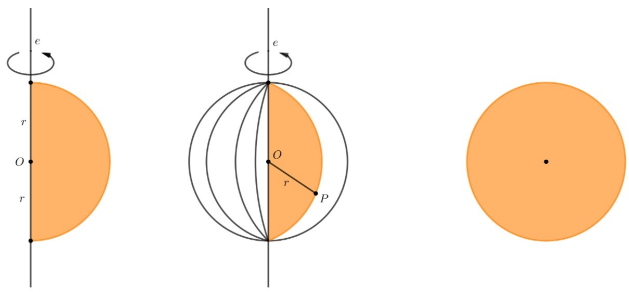
$$\begin{aligned}
V_{tronco} &= \frac{\pi}{3}\left[(R^2 - r^2)\frac{hR}{R-r} + r^2h\right] \\
V_{tronco} &= \frac{\pi}{3}\left[\frac{(R-r)(R+r)Rh}{R-r} + r^2h\right] \\
V_{tronco} &= \frac{\pi}{3}\left[(R+r)Rh + r^2h\right] \\
V_{tronco} &= \frac{\pi}{3}\left[R^2h + rRh^{+}r^2h\right] \\
V_{tronco} &= \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$V_{tronco} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right).$$

5.5 Estudo da Esfera

Definição 6. *Esfera é o sólido obtido pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.*



Fonte: De autoria

A superfície gerada pelo semicírculo(contorno) é a superfície esférica da esfera. O raio r do semicírculo é também o raio da esfera e da superfície esférica. O ponto O é centro da esfera e da superfície esférica.

Todo ponto P da superfície esférica dista r do centro O. Os pontos da esfera distam d, $d \leqslant r$, do centro O.

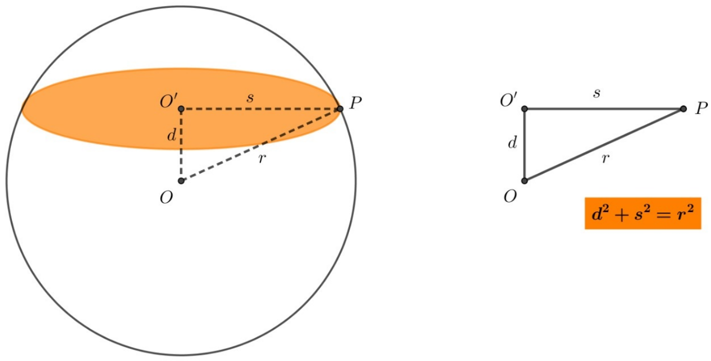
- $P \in$ superfície esférica se, e somente se, $PO = r$.

- $P \in$ esfera se, e somente se, $PO \leqslant r$.

Os pontos P da esfera tais que $PO < r$ chamam–se pontos interiores.

A intersecção de um plano com uma esfera que se cortam é um círculo. Quando o plano passa pelo centro da esfera, a secção é um círculo máximo da mesma.

Um plano distante d do centro, $d < r$, determina na esfera uma secção de raio s. A relação entre d, s e r, raio da esfera, é dada pelo teorema de Pitágoras:

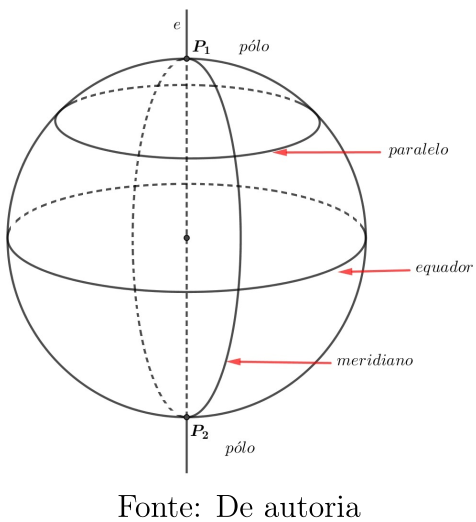


Fonte: De autoria

Considerando a superfície esférica de eixo e, os pontos P_1 e P_2 onde e fura a superfície são chamados pólos.

A secção determinada por um plano que contém o eixo é um círculo máximo chamado de meridiano.

A secção determinada por um plano perpendicular ao eixo, passando pelo centro, é um círculo máximo denominados de equador. Os outros planos perpendiculares ao eixo determinam secções chamadas paralelos.

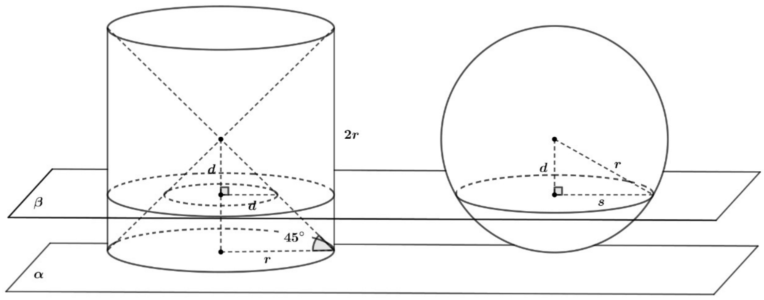


Fonte: De autoria

5.5.1 Volume de uma Esfera

Teorema 5.7. *O volume de uma esfera de raio* r *é* $\dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Demonstração. Consideremos um cilindro equilátero e uma esfera, onde o raio da esfera é o mesmo raio r da base desse cilindro, então pelo Princípio de Cavalieri o volume dessa esfera é equivalente ao sólido que se obtém excluindo o volume dos dois cones de um cilindro equilátero, conforme ilustração abaixo:



Fonte: De autoria

De fato, percebemos que as secções determinadas por um mesmo plano nos dois sólidos têm áreas iguais, uma vez que $s^2 = r^2 - d^2$.

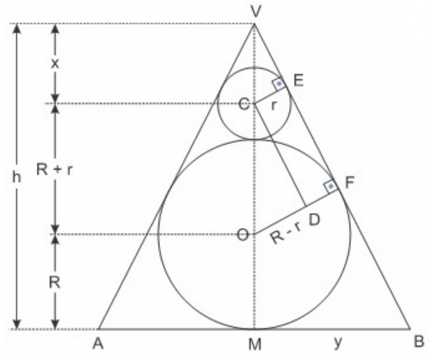
Portanto, o volume V da esfera fica determinado pela diferença entre o volume do cilindro equilátero e pelo volume ocupado pelo dois cones:

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r \\ V &= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 \\ V &= \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

□

Problema 13 (ITA 2016). *Uma esfera* S_1 *de raio* $R > 0$ *está inscrita num cone circular reto* K. *Outra esfera,* S_2 *de raio* r, *com* $0 < r < R$ *está contida no interior de* K *e é simultaneamente tangente à esfera* S_1 *e à superfície lateral de* K. *Qual o volume de* K*?*

Solução: Consideremos a secção meridiana do cone mostrada na figura abaixo:



Fonte: De autoria

Considerando que O é o centro da esfera inscrita no cone e C o centro da outra esfera tangente à superfície lateral do cone e à esfera inscrita neste cone. Considere também que o segmento CD é paralelo ao segmento EF.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo COD temos:

$$CD^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2 \Longrightarrow CD = 2\sqrt{Rr}.$$

Considerando que os triângulos ACE e COD são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{x}{R + r} = \frac{r}{R - r} \Longrightarrow x = \frac{r \cdot (R + r)}{R - r}.$$

Portanto, a altura h do triângulo será dada por:

$$h = x + R + r + R \Longrightarrow h = \frac{2 \cdot R^2}{R - r}.$$

Considerando, agora, que os triângulos ACE e COD são semelhantes, escrevemos:

$$\frac{2\sqrt{Rr}}{\frac{2 \cdot R^2}{R - r}} = \frac{R - r}{y} \Longrightarrow y = \frac{R^2}{\sqrt{R \cdot r}}.$$

Portanto, o volume do cone circular reto é obtido dessa forma:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot y^2 \cdot h \\ V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{R^2}{\sqrt{R \cdot r}}\right)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot R^2}{R - r}\right) \\ V &= \frac{2 \cdot \pi \cdot R^5}{3 \cdot r \cdot (R - r)}. \end{aligned}$$

Problema 14 (ENEM 2014)**.** *Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina pro-*

gramada para que os cilindros tenham sempre 10 mm *de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.*

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm *de raio. Para facilitar a deglutição, deseja–se produzir esse medicamento diminuindo o raio para* 4 mm *e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.*

Use 3 *como valor aproximado para* π.

Qual a redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina?

Solução: Primeiro devemos calcular o volume de um cilindro e o volume de uma esfera ambos com raio igual a 5 mm, então dessa forma obtemos o volume da pílula.

O volume de uma pílula de raio em milímetros cúbicos, é dado por

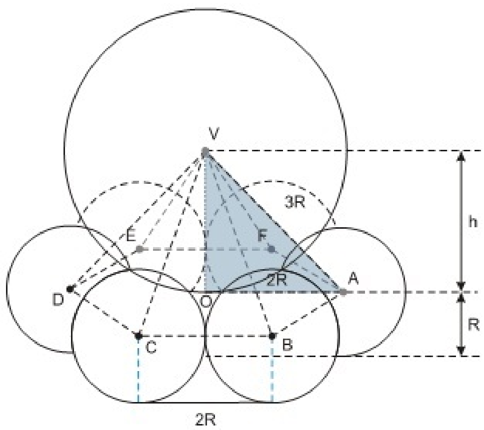
$$\pi \cdot r^2 \cdot 10 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cong 2r^2(15 + 2r).$$

Agora devemos calcular o volume do cilindro e da esfera com raio igual a 4 mm e, subtrair os valores dos volumes encontrados do tipo:

$$2 \cdot 5^2 \cdot (15 + 2 \cdot 5) - 2 \cdot 4^2 \cdot (15 + 2 \cdot 4) = 1250 - 736 = 514\ \mathrm{mm}^3.$$

Problema 15 (ITA 2014)**.** *Seis esferas de mesmo raio* R *são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta* $2R$*. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio* $2R$ *que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.*

Solução:



Fonte: De autoria

No triângulo VOA, temos:

$$(3R)^2 = (2R)^2 + h^2 \Longrightarrow h = R \cdot \sqrt{5}.$$

Portanto, a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal é:

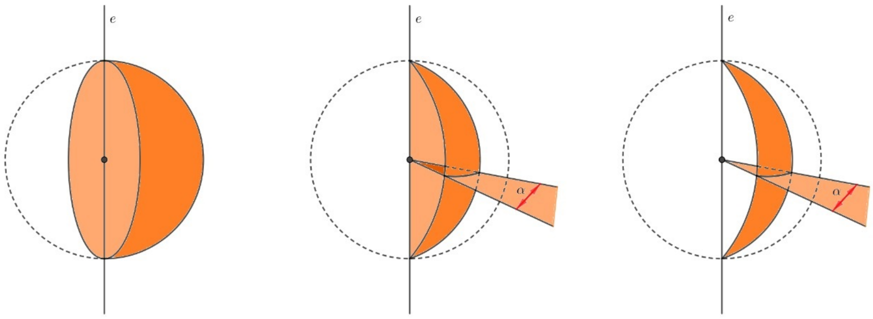
$$d = R + R \cdot \sqrt{5} = R(1 + \sqrt{5}).$$

5.5.2 Partes da Esfera (Cunha e Fuso)

Um plano que contém o eixo divide a esfera em duas semiesferas (hemisférios).

Dois planos distintos que contêm o eixo dividem a esfera em quatro sólidos denominados cunhas esféricas. A superfície esférica fica também dividida em quatro partes, que são chamadas fusos esféricos.

Uma cunha e o respectivo fuso esférico têm, respectivamente, volume e área proporcional ao ângulo dos planos que os determinam.



Fonte: De autoria

- Volume da cunha de ângulo α, em uma esfera de raio R.

$$\begin{array}{lccc} & \text{Ângulo} & & \text{Volume} \\ \text{Esfera} & 360^o & \text{———} & \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \\ \text{Cunha} & \alpha & \text{———} & V \end{array}$$

Então $V = \dfrac{\alpha}{360} \cdot \dfrac{4\pi \cdot R^3}{3} \Rightarrow V = \dfrac{\alpha \cdot \pi \cdot R^3}{270}.$

- Área do fuso de ângulo α, em uma esfera de raio R.

$$\begin{array}{lccc}
 & \text{Ângulo} & & \text{Volume} \\
\text{Esfera} & 360^{\circ} & \text{———} & 4 \cdot \pi \cdot R^2 \\
\text{Cunha} & \alpha & \text{———} & A
\end{array}$$

Então $A = \dfrac{\alpha}{360} \cdot 4\pi \cdot R^2 \Rightarrow A = \dfrac{\alpha \cdot \pi \cdot R^2}{90}$.

6 Considerações finais

Creio que, diante de toda a contribuição que enfatizamos nessa dissertação para a geometria plana e espacial e, levando-se em conta que exibimos modelos e técnicas para resolução de problemas envolvendo áreas de figuras planas e volumes nos sólidos geométricos, através da construção e utilização de material concretos feitos em sala de aula com uma régua, um lápis, uma cartolina e uma tesoura. Então, dessa forma verificamos que será mais compreensivo aos estudantes do Ensino Médio.

Aguardamos que as ideias mencionadas nesse trabalho possam servir de forma concreta para os discentes e docentes e estimulem o desenvolvimento do pensamento crítico nas suas práticas e vivencias de ensino, sejam em sala de aula ou na vida profissional e, que estimule a sua aplicabilidade naqueles estudantes mais empenhados. Esperamos que a nossa pesquisa sirva como um guia mestre.

Além disso, esta dissertação tem por finalidade subsidiar a prática pedagógica do professor em sala de aula, quanto à geometria plana e espacial, mais especificamente no cálculo de área figuras planas e volume de alguns sólidos geométricos.

Referências

Cavalieri. Disponivel em: `https://brasilescola.uol.com/matemática/princípio-\ \Cavalieri.htm`. Acesso em: 05 de julho 2019.

DANTE, L.R. – *Didática da resolução de problemas de Matemática.* 12. ed. São Paulo, Ática, 1997.

DOLCE, O. POMPEO, J. N. – *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 9 e 10, 7.ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo – *Geometria Plana: Conceitos básicos*, 1.ed. São Paulo: Atual, 2008.

LIMA, E. L. – *Áreas e Volumes.* Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

George Pólya. Disponivel em: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Georgepólya`. Acesso em: 05 de julho 2019.

——. E. L. – *Medida e Forma em Geometria.* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro 1991.

——. E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A. – *Matemática no Ensino Médio*, vol. 2, 6.ed. Rio de Janeiro: SBM 2006.

——. E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. – *Temas e Problemas*, Rio de Janeiro, Junho de 2001.

Leonhard Euler. Disponivel em: `www.ebiografia.com`. Acesso em: 05 de julho 2019.

MACHADO, A. S. – *Áreas e Volumes (temas e metas v.4)*, São Paulo, Atual, 1988.

MACHADO, A.S. – *Geometria Plana: conceitos básicos.* 1 ed. São Paulo: Atual, 2008.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha *Geometria* – Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat).

POLYA, George – *A Arte de resolver Problemas*. Rio de Janeiro. Interciência, 1995.