Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Tópicos de Álgebra Linear e Aplicações em Problemas de Economia e de Engenharia.

Frederico Borges Cruvinel

Goiânia

2013

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Frederico Borges Cruvinel
E-mail:	fredcruvi@hotmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	[x]Sim [ ] Não
Vínculo empregatício do autor	
Agência de fomento:	Sigla:
País:	UF: CNPJ:
Título:	Tópicos de Álgebra Linear e Aplicação na Economia e na Engenharia.
Palavras-chave:	Modelos Econômicos, Circuitos Elétricos, Estruturas Metálicas, Aplicações de Álgebra Linear.
Título em outra língua:	Tópics of Linear Algebra and Application in Economics and engineering.
Palavras-chave em outra língua:	Economic Model, Electrical Circuits, Metal Structures, Application of Linear Algebra.
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	12/04/2013
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT
Orientador (a):	Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota
E-mail:	jesusdamota@gmail.com
Co-orientador(a):*	
E-mail:	

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Frederico Borges Cruvinel

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 22 / 07 / 2013

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Frederico Borges Cruvinel

Tópicos de Álgebra Linear e Aplicações em Problemas de Economia e de Engenharia.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

	Cruvinel, Frederico Borges.
C957t	Tópicos de álgebra linear e aplicações em problemas de economia e de engenharia [manuscrito] / Frederico Borges Cruvinel. - 2013.
	35 f.
	Orientador: Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota.
	Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
	Bibliografia.
	Inclui lista de tabelas e figuras.
	1. Álgebra linear – Estruturas metálicas. 2. Álgebra linear - Modelos econômicos. 3. Álgebra linear – Circuitos elétricos. I. Título.
	CDU: 512.5:37.015

Frederico Borges Cruvinel

Tópicos de Álgebra Linear e Aplicações em Problemas de Economia e de Engenharia

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 12 de abril de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
IFG-GOIÂNIA

Prof. Dr. Maurílio Márcio Melo
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Frederico Borges Cruvinel graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás.

Dedico este trabalho a minha esposa, filha e a todos colegas e amigos da turma pioneira do PROFMAT UFG Goiania.

Agradecimentos

Mesmo tendo a plena consciência de não conseguir expressar toda a gratidão que tenho por cada um dos protagonistas que participaram de uma das mais importantes fases da minha vida, nesse espaço tentarei retribuir todo apoio, carinho e atenção por eles dedicados.

À minha esposa Josiane, pela compreensão e dedicação durante esse período. Que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, apoiando nos momentos de dificuldade. Seu apoio e carinho me proporcionaram grandes reflexões e motivações.

A minha filha Maria Eduarda, que foi compreensiva nas diversas ocasiões em que eu não pude estar presente, dedicado à realização deste trabalho.

Aos meus pais (Ana Maria e José Lima), por terem sempre me apoiado e incentivado incondicionalmente. Primeiro, quando decidi seguir os meus estudos, cursando Licenciatura em Matemática, depois, quando optei por expandir a minha formação.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação PROFMAT/UFG, em especial, professora Shirlei Serconek pela maneira cordial e acolhedora com que recebeu a turma e pelo convívio extremamente gratificante durante todo o tempo do desenvolvimento do seu trabalho. Não sei mensurar o ganho de formação profissional e pessoal.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota, que ao longo desses dois anos sempre foi paciente e ousado ao coordenar o PROFMAT UFG, além de ser totalmente solícito atendendo aos meus e-mails, que em muito colaborou com a construção deste trabalho por meio de sugestões e interferências significativas para a construção do mesmo.

E a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), fundação do Ministério da Educação (MEC), por desempenhar papel fundamental na expansão e consolidação da pós-graduação stricto sensu para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica, beneficiando com bolsas CAPES os professores em exercício na rede pública, matriculados no PROFMAT.

Resumo

O presente trabalho mostra a importância da Álgebra Linear e em particular da teoria da Matrizes e Sistemas Lineares para resolver problemas práticos em diversas áreas. Mostramos exemplos de aplicações dos Sistemas Lineares nos modelos fechado e aberto de Leontief na área de Economia, em circuitos elétricos fechados (Lei de Kircchoff) e em projetos de construção de estruturas metálicas.

Palavras-chave

Modelos Econômicos, Circuitos Elétricos, Estruturas Metálicas, Aplicações de Álgebra Linear.

Abstract

This work shows the importance of the Linear Algebra and in particular of the theory of Matrices and Linear Systems to solve practical problems in various areas. We show examples of Applications of Linear Systems in closed and open models of Leontief in Economics, in closed circuits (Law Kircchoff) and in projects of construction of steel structures.

Keywords

Economic Model, Electrical Circuits, Metal Structures, Application of Linear Algebra.

Sumário

1 Introdução

A teoria da Álgebra Linear e em particular a teoria dos Sistemas Lineares e das Matrizes podem ser usadas para resolver certos tipos de problemas em várias áreas do conhecimento, como Física, Química, Economia, todas as Engenharias, etc.

O objetivo principal deste trabalho, é mostrar através de exemplos aplicações dos Sistemas Lineares e Matrizes em alguns problemas práticos nas áreas de Economia, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil.

Na área de Economia estudamos os modelos fechado e aberto de Leontief, os quais descrevem uma inter-relação entre preços, produção e demanda num sistema econômico.

Na área de Engenharia Elétrica, mostramos um exemplo de como calcular a intensidade da corrente num dado circuito elétrico. O modelo matemático é obtido pela Lei de Kirchhoff e a solução final é dada através da resolução de um sistema álgebrico linear.

Uma das aplicações de Álgebra Linear na Engenharia Civil é em projetos de estruturas metálicas, onde o cálculo das forças entre vigas exige a solução de um sistema de equações lineares. Quanto mais complexa for esta estrutura, maior será o número de equações e de variáveis envolvidas no sistema. A matriz dos coeficientes do sistema deve ser inversível para que a estrutura não colapse. Para uma mesma estrutura sujeita a forças externas variáveis, pode-se encontrar a matriz-coluna das forças que atuam sobre as vigas multiplicando-se a inversa da matriz que modela a estrutura pela matriz-coluna das forças externas.

Neste trabalho, fizemos inicialmente, um resumo da teoria das Matrizes e dos Sistemas Lineares, mas sem se preocupar em fazer um estudo completo destes assuntos, o objetivo é apenas complementar o trabalho.

O trabalho está dividido em dois capítulos, além da apresentação e da conclusão. No Capítulo 2 apresentamos os resultados básicos da Álgebra Linear que são utilizados no Capítulo 3, onde estão descritas as aplicações.

Finalmente, na Seção 4 apresentamos as considerações finais do trabalho.

2 Matrizes e Sistemas Lineares

Nesta seção descrevemos alguns tópicos de Matrizes e Sistemas Lineares, mas sem fazer um estudo completo destes assuntos, apenas com o objetivo de complementar o trabalho.

2.1 Matrizes

Com base em textos básicos de álgebra linear, como em [2], e de matemática elementar, como em [3], iremos expor alguns tópicos de Matrizes e Sistemas Lineares, para dar suporte teórico às aplicações no capítulo 3.

Definição 1. *Chama-se matriz real A de ordem $m \times n$ a uma tabela de números reais da forma,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A matriz A pode ser representada por $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, e os a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ são denominados os elementos ou as entradas da matriz.

Tipos de Matrizes

- matriz linha: é uma matriz com apenas uma linha.
- matriz coluna: é uma matriz com apenas uma coluna.
- matriz nula: é uma matriz que possui todas entradas nulas.
- matriz quadrada de ordem n: é uma matriz com n linhas e n colunas. A diagonal principal de uma matriz quadrada de ordem n é o conjunto das entradas a_{ij} com $i = j$.
- matriz diagonal: é uma matriz quadrada onde os elementos que não pertencem a diagonal principal são nulos.
- matriz identidade de ordem n (I_n) é toda matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos iguais a zero.

Definição 2. *Se A é qualquer vetor ou matriz, a notação $A \geq 0$, significa que cada entrada de A é positiva. Se $A \geq B$, significa que $A - B \geq 0$.*

Definição 3. *Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, a matriz transposta de A, denotada por A^t é a matriz $A^t = [b_{ij}]_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad \Rightarrow \qquad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}.$$

Note que $(A^t)^t = A$.

Operações entre Matrizes

Definição 4. *Dadas duas matrizes de mesma ordem, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, define-se a soma $A + B$ como a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j.*

Propriedades da Adição

Para quaisquer matrizes A, B e C de mesma ordem a adição satisfaz as seguintes propriedades:

A_1. Associatividade: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

A_2. Comutatividade: $A + B = B + A$.

A_3. Elemento neutro: Existe a matriz 0 tal que $A + 0 = A$.

A_4. Elemento simétrico: Existe uma matriz $-A$ tal que $A + (-A) = 0$.

Definição 5. *Define-se a multiplicação de um escalar (número real) α por uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ como sendo a matriz $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para todo i e todo j.*

Propriedades da Multiplicação por Escalar

Para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem e α e β reais a multiplicação por escalar satisfaz as seguintes propriedades:

M_1. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

M_2. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

M_3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

M_4. $1A = A$.

Definição 6. *Dadas duas matrizes* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{jk}]_{n\times p}$*, define-se produto* AB *como a matriz* $C = [c_{ik}]_{m\times p}$ *tal que*

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Observe que o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B.

Propriedades do Produto

O produto de matrizes satisfaz as seguintes propriedades:

P_1. Associatividade: $(AB)C = A(BC)$ para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ e $C = [c_{ks}]_{p\times r}$.

P_2. Distributividade à direita em relação a adição: $(A + B)C = AC + BC$ para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ e $C = [c_{jk}]_{n\times p}$.

P_3. Distributividade à esquerda: $A(B + C) = AB + AC$ para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ e $C = [c_{jk}]_{n\times p}$.

P_4. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ e para todo escalar α.

P_5. Produtos com matrizes identidades: $AI_n = A$ e $I_mA = A$, para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$ e I_m é a matriz identidade de ordem $m \times m$.

Observe que o produto de matrizes não é comutativo, em geral $AB \neq BA$, mesmo para matrizes quadradas de mesma ordem.

Definição 7. *Dada uma matriz quadrada* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$*, se existir uma matriz* B *que satisfaça* $AB = BA = I$ *diz-se que* B *é a inversa de* A *e denota-se* B *por* A^{-1}*. Se a inversa de* A *existir diz-se que* A *é inversível(não singular), caso contrário diz-se que a matriz* A *é não inversível (singular).*

2.2 Sistema de Equações Lineares

Uma equação linear é uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, na qual $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são os respectivos coeficientes das variáveies $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ e b é o termo independente. Os números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ e o termo independente b geralmente são números reais conhecidos e as variáveis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas.

Os valores das variáveis que transformam uma equação linear em uma identidade, isto é, que satisfazem a equação, constituem sua solução. Esses valores são denominados raízes das equações lineares.

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

Uma solução do sistema (1) é uma n-upla de números $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ que satisfaça simultaneamente estas m equações.

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se, toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro.

Podemos escrever o sistema (1) na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

ou $AX = B$, onde A é a matriz dos coeficientes, B a matriz coluna dos termos independentes e X é a matriz coluna das incógnitas.

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema (1) é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

que chamamos *matriz ampliada* do sistema. Cada linha desta matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação correspondente no sistema.

Sabemos que a troca de ordem de duas equações do sistema, ou a substituição de uma das equações pela combinação dela com outra, obtém-se um sistema equivalente ao sistema original. Portanto em termos da matriz ampliada do sistema, pode-se afirmar que

$i)$ a troca de ordem de duas linhas, ou

$ii)$ a substituição de uma linha L_i pela combinação linear dela com outra L_j, da forma

$$\alpha L_i + \beta L_j;\ \alpha\,,\beta\ \in \mathbb{R}, e\,\alpha \neq 0\,,\ i, j = 1, \cdots, m,$$

obtém-se uma nova matriz ampliada cujo sistema linear associado é equivalente ao sistema original.

As operações dos tipos $i)$ e $ii)$ são denominadas de operações elementares sobre a matriz A (matriz ampliada).

É possível fazer operações elementares com uma matriz da forma A, de tal modo a reduzí-la a uma matriz da forma

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{bmatrix}.$$

Dividindo-se cada linha de A' pelo primeiro elemento não nulo correspondente, obtém-se a denominada matriz escalonada de A.

Exemplo 1. *Dado o sistema*

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

vamos encontar a forma escalonada da matriz ampliada deste sistema e em seguida resolvê-lo.

Solução:

Matriz ampliada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo L_2 por $L_1 - L_2$ e L_3 por $L_3 - L_1$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, substituindo L_3 por $L_3 - L_2$, obtém-se a seguinte matriz escalonada de A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto a solução do sistema é $y = z$ e $x = 1 - 5z$.

3 Aplicações

3.1 Modelo Fechado de Leontief

A álgebra linear desempenhou um papel importante nos modelos econômicos de Leontief[1], os modelos fechado e aberto de Liontief. Descrevemos a seguir exemplos destes modelos, veja em [1].

O modelo fechado consiste em determinar os preços dos produtos produzidos e consumidos por um certo grupo de empresas de modo que o total dos gastos de cada empresa seja igual ao total recebido.

Exemplo 2. *Um pedreiro, um eletricista e um hidráulico, pretendem fazer consertos em suas casas. Eles concordam em trabalhar durante 10 dias cada conforme a tabela seguinte:*

	Trabalho executado pelo		
	Pedreiro	*Eletricista*	*Hidráulico*
Dias de trabalho na casa do Pedreiro	*2*	*1*	*6*
Dias de trabalho na casa do Eletricista	*4*	*5*	*1*
Dias de trabalho na casa do Hidráulico	*4*	*4*	*3*

[1]Wassily Leontief, ganhou o Prêmio Nobel de Economia de 1973, abriu a porta para uma nova era da modelagem matemática na economia.

Cada proprietário deve pagar aos outros e a ele mesmo, um salário diário e pelos serviços prestados em sua casa. Os salários diários normais são, aproximadamente, R$ 100,00, mas eles concordam em ajustar estes salários de tal modo que o total pago por cada um seja igual ao total recebido. Determine os salários de cada um.

Solução: Sejam,

$$
\begin{gathered}
p_1 \text{ o salário diário do pedreiro,}\\
p_2 \text{ o salário diário do eletricista e}\\
p_3 \text{ o salário diário do hidráulico.}
\end{gathered}
$$

Para satisfazer a condição de equilíbrio, isto é, de tal modo que o total dos gastos seja igual ao total recebido para cada um dos proprietários pelo período de dez dias, tem-se,

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
2p_1 & + & p_2 & + & 6p_3 & = & 10p_1\\
4p_1 & + & 5p_2 & + & p_3 & = & 10p_2\\
4p_1 & + & 4p_2 & + & 3p_3 & = & 10p_3
\end{array}
\right. \sim \tag{2}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
0,2p_1 & + & 0,1p_2 & + & 0,6p_3 & = & p_1\\
0,4p_1 & + & 0,5p_2 & + & 0,1p_3 & = & p_2\\
0,4p_1 & + & 0,4p_2 & + & 0,3p_3 & = & p_3
\end{array}
\right. \tag{3}
$$

Essas são as equações de equilíbrio para o pedreiro, o eletricista e o hidráulico, respectivamente. Na teoria econômica, a matriz associada ao sistema (3) dos coeficientes é denominada de entrada e a matriz coluna $[p_1 \;\; p_2 \;\; p_3]^t$ é o resultado ou produto final. Note que no sistema (3), a soma de cada coluna da matriz dos coeficientes associada ao sistema é igual a 1, correspondendo ao fato de que o resultado do trabalho de cada proprietário está distribuído entre eles nas proporções dadas pelas colunas da matriz de entrada.

Reescrevendo o sistema (3) na forma matricial, tem-se que,

$$
\begin{bmatrix}
0,8 & -0,1 & -0,6 & 0\\
-0,4 & 0,5 & -0,1 & 0\\
-0,4 & -0,4 & 0,7 & 0
\end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix}
8 & -1 & -6 & 0\\
-4 & 5 & -1 & 0\\
-4 & -4 & 7 & 0
\end{bmatrix}.
$$

Substituindo, L_2 por $2L_2 + L_1$ e L_3 por $L_3 - L_2$, e em seguida L_3 por $L_3 + L_2$, temos

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 9 & -8 & 0 \\ 0 & -9 & 8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 9 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e agora trocando, L_1 por $\dfrac{L_1}{8}$ e L_2 por $\dfrac{L_2}{9}$, segue-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{6}{8} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $p_2 = \dfrac{8}{9}p_3$ e $p_1 = \dfrac{31}{36}p_3$. Onde p_3 pode ser um valor qualquer. Note que o sistema de equações tem infinitas soluções dadas por,

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix},$$

onde s é uma constante arbitrária. Esta constante é um fator de escala, que os proprietários podem escolher de acordo com sua conveniência. Neste exemplo, como o salário de cada um deve ser aproximadamente R$ 100,00, então escolhe-se s = 3.

Na linguagem de economia, escrevemos a seguir, a forma geral do modelo fechado de Leontief que consiste de um sistema econômico com um número finito de indústrias, ordenadas de 1 a k. Ao longo de algum período fixo de tempo, cada indústria gera seu produto, bem ou serviço, o qual é totalmente consumido de uma maneira predeterminada pelas k indústrias.

O problema consiste em encontrar preços convenientes que devem ser cobrados por esses k produtos de maneira que, para cada indústria, o total dos gastos seja igual ao total recebido.

Para o período de tempo fixado, p_i é o preço cobrado pela i-ésima indústria pela sua produção total; e_{ij} é a fração da produção total de j-ésima indústria que é comprada pela i-ésima indústria, com i, j = 1, 2, $\cdots$, k. Temos que,

$p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k,$

$e_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, k,$

$e_{1j} + e_{2j} + \cdots + e_{kj} = 1, \quad j = 1, 2, \cdots, k.$

Com estas quantidades, nós formamos o *vetor-preço* $p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{bmatrix}^t$, e a *matriz de troca* $E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \ldots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \ldots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & \ldots & e_{kk} \end{bmatrix}$.

A condição, $e_{1j} + e_{2j} + \cdots + e_{kj} = 1$, j= 1, 2, $\cdots$, k, expressa o fato de todas as somas de colunas da matriz de troca são 1.

Como no exemplo, para que os gastos das indústrias igualem-se aos seus rendimentos, a seguinte equação deve ser satisfeita,

$$(I - E)p = 0. \tag{4}$$

A equação (4) é um sistema linear homogêneo para o vetor-preço p. Além de mostrar que (4) tem uma solução não trivial para a qual $p > 0$, precisa-se mostrar que os preços p_i dos k produtos são números não negativos. Estes resultados são garantidos pelo seguinte teorema.

Teorema 1. *Se E é uma matriz de troca, então o sistema $(I - E)p = 0$ sempre tem uma solução não trivial p, cujas entradas são não negativas.*

Exemplos elementares de aplicação do Teorema 1.

Exemplo 3. *Seja* $E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

$$(I - E)p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuja solução geral é,

$$p = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde s é uma constante arbitrária. Para qualquer $s > 0$, temos uma solução não trivial e $p > 0$.

Neste exemplo o conjunto solução é a semi-reta gerada pelo vetor $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 4. *Seja,* $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Então $(I - E)p = 0$ *tem a solução geral* $p = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, *onde* s *e* t *são constantes arbitrárias independentes. Já neste exemplo* $I - E \equiv 0$, *portanto qualquer* $p \geq 0$ *é solução, então o conjunto solução é um quadrante, pois* $s \geq 0$ *e* $t \geq 0$, *gerado pelos vetores* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

No primeiro exemplo, determina-se que, em algumas situações, um dos preços precisa ser zero para a condição de equilíbrio ser satisfeita. No segundo exemplo, podem haver várias estruturas de preços linearmente independentes. O teorema a seguir dá condições para excluir ambos os casos.

Teorema 2. *Seja* E *uma matriz de troca tal que todas suas entradas são positivas. Então, existe uma solução e ela pode ser escolhida com todas suas entradas positivas.*

Exemplo 5. *Retomando à matriz de troca da equação (3), isto é*

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix},$$

Como $E > 0$, *pelo teorema 2, existe uma solução e pode ser escolhida tal que* $p > 0$. *Já verificou-se que a solução é* $p = s \begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 33 \end{bmatrix}$.

3.2 Modelo Aberto ou de Produção de Leontief

Ao contrário do modelo fechado, no qual os produtos de k indústrias são somente distribuídos entre as próprias indústrias, o modelo aberto tenta satisfazer uma demanda externa para os produtos. Nesse modelo, os preços são fixados e o objetivo é determinar os níveis de produção das indústrias necessários para satisfazer a demanda externa.

Para algum período fixado de tempo, escreve-se: x_i o valor monetário da produção total da i-ésima indústria; d_i o valor monetário da produção da i-ésima indústria necessária para satisfazer a demanda externa; c_{ij} o valor monetário da produção da i-ésima indústria que é necessária para a j-ésima indústria produzir uma unidade do valor monetário de seu próprio produto.

Assim, define-se o vetor-produção

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \end{bmatrix}^t,$$

o vetor-demanda

$$d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_k \end{bmatrix}^t,$$

e a matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kk} \end{bmatrix}.$$

Desse modo, temos que $x \geq 0$, $d \geq 0$ e $C \geq 0$.

A partir da definição de c_{ij} e x_j, percebe-se que a quantidade

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{ik}x_k$$

é o valor da produção da i-ésima indústria que é necessário para todas as k indústrias produzirem um total especificado pelo vetor de produção. Essa é a i-ésima entrada do vetor-coluna Cx e, assim, a i-ésima entrada do vetor-coluna $x - Cx$ é o valor do excesso de produção da i-ésima indústria que está disponível para satisfazer a demanda externa. Consequentemente, somos levados a seguinte conclusão $x - Cx = d$, ou

$$(I - C)x = d, \tag{5}$$

em que a demanda é satisfeita, sem sobras nem faltas. A partir dos dados C e d, o objetivo é encontrar o vetor-produção $x \geq 0$ que satisfaz a equação (5).

Exemplo 6. *Uma certa cidade tem três indústrias principais: uma mina de carvão, uma usina elétrica e uma rede ferroviária local. Para produzir R$ 1,00 de carvão, a mina precisa comprar R$ 0,25 de eletricidade para seu equipamento e R$ 0,25 da ferrovia para suas necessidades de transporte. Para produzir R$ 1,00 de eletricidade, a usina requer R$ 0,65 de carvão para combustível, R$ 0,05 de sua própria eletricidade para equipamento auxiliar e R$ 0,05 da ferrovia para suas necessidades de transporte. Para fornecer R$ 1,00 de transporte, a rede ferroviária precisa de R$ 0,55 de carvão para combustível e R$ 0,10 de eletricidade para seu equipamento auxiliar. Em uma determinada semana, a mina recebe pedidos de R$ 50.000,00 de carvão de fora da cidade e a usina recebe pedidos de R$ 25.000,00 de eletricidadede fora da cidade. Não há demanda externa para a ferrovia. Quanto cada uma dessas três indústrias deve produzir naquela semana para atender exatamente suas próprias demandas e a demanda externa?*

Solução: Para o período de uma semana, sejam

x_1 o valor da produção total da mina;
x_2 o valor da produção total da usina;
x_3 o valor da produção total da ferrovia.

A matriz de consumo do sistema é

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,65 & 0,55 \\ 0,25 & 0,05 & 0,10 \\ 0,25 & 0,05 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema linear $(I - C)x = d$ é, então,

$$\begin{bmatrix} 1,00 & -0,65 & -0,55 \\ -0,25 & 0,95 & -0,10 \\ -0,25 & -0,05 & 1,00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz de coeficientes é invertível, a solução é dada por

$$x = (I - C)^{-1}d = \frac{1}{503} \begin{bmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102.087 \\ 56.163 \\ 28.330 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a produção total da mina deveria ser R$ 102.087, a da usina deveria ser R$ 56.163 e a da ferrovia deveria ser de R $ 28.330.

Reconsiderando a equação (5):

$$(I - C)x = d,$$

se a matriz quadrada $(I - C)$ for invertível, pode-se escrever

$$x = (I - C)^{-1}d. \tag{6}$$

Além disto, se a matriz $(I - C)^{-1}$ tiver somente entradas não negativas, então a equação (6) terá uma única solução não negativa x, para qualquer $d \geq 0$. Esta é uma situação particularmente desejável, por significar que qualquer demanda externa pode ser satisfeita. A terminologia utilizada para descrever este caso é dada na definição seguinte.

Definição 8. *Uma matriz de consumo C é produtiva se $(I-C)^{-1}$ existe e $(I-C)^{-1} \geq 0$.*

Segundo o livro de Anton [1], o teorema a seguir e seu corolário, mostram os critérios que garantem quando uma matriz de consumo é produtiva.

Teorema 3. *Uma matriz de consumo C é produtiva se, e somente se, existir um vetor-produção $x \geq 0$ tal que $x > Cx$, ou seja, cada indústria produz mais do que consome.*

Corolário 1. *Uma matriz de consumo C é produtiva se a soma das entradas de cada linha ou coluna de C é estritamente menor do que 1.*

Esse corolário diz que uma matriz de consumo é produtiva se todas as k indústrias do sistema econômico são lucrativas.

Exemplo 7. *Seja a matriz de consumo do exemplo 6,*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,65 & 0,55 \\ 0,25 & 0,05 & 0,10 \\ 0,25 & 0,05 & 0 \end{bmatrix}.$$

A soma das entradas de cada coluna é menor que 1, portanto, as três indústrias são lucrativas. Desse modo, pelo Colorário 1 a matriz de consumo C é produtiva. Isso também pode ser concluído pelo fato de que $(I - C)^{-1} \geq 0$.

A discussão seguinte sugere uma demonstração do Teorema 3 e do Corolário 1 são verdadeiros e conduzirá a uma nova fórmula de calcular $(I-C)^{-1}$.

Imagine que a demanda representada por d é apresentada às diversas indústrias no início do ano e as indústrias respondem fixando seus níveis de produção em $x = d$, o que irá atender exatamente à demanda final. Quando as indústrias se preparam para produzir d, elas enviam as encomendas e as matérias-primas e outros insumos. Isso cria uma demanda intermediária de Cd para a entrada (insumos).

Para atender à demanda adicional Cd, as indústrias vão precisar de insumos adicionais nas quantidades $C(Cd) = C^2d$. É claro que isso gera uma segunda rodada de demanda intermediária, e quando as indústrias decidem produzir mais ainda de modo a atender essa nova demanda, elas geram uma terceira rodada de demanda, a saber, $C(C^2d) = C^3d$. E assim por diante.

Teoricamente, podemos imaginar esse processo continuando indefinidamente, apesar de que, na realidade, isso não aconteceria numa sequencia tão rígida de eventos. O diagrama seguinte ilustra essa situação hipotética:

	Demanda que precisa ser atendida	Entradas necessárias para atender a essa demanda
Demanda final	d	Cd
Demanda intermediária		
1ª rodada	Cd	$C(Cd) = C^2d$
2ª rodada	C^2d	$C(C^2d) = C^3d$
3ª rodada	C^3d	$C(C^3d) = C^4d$
	$\vdots$	$\vdots$

O nível de produção que irá atender a toda essa demanda é

$$x = d + Cd + C^2d + c^3d + \cdots = (I + C + C^2 + C^3 + \cdots)d. \tag{7}$$

Para tornar a equação (7) compreensível, usamos a seguinte identidade algébrica,

$$(I-C)(I + C + C^2 + C^3 + \cdots + C^{m-1}) = I - C^m. \tag{8}$$

Pode ser mostrado que as somas das colunas em C são menores que 1, portanto $I-C$ é inversível, C^m se aproxima da matriz nula quando m se torna arbitrariamente grande, e $I - C^m \longrightarrow I$. Assim para m suficientemente grande, a equaçãoUsando a equação (8), quando as somas de colunas de C são menores que 1, torna-se:

$$(I - C)^{-1} = I + C + C^2 + C^3 + \cdots \tag{9}$$

Interpretamos a equação (9) no sentido que o lado direito pode ficar tão próximo quanto se queira de $(I - C)^{-1}$ desde que m seja suficientemente grande.

Em modelos reais de entrada/saída, as potências da matriz de consumo se aproximam da matriz nula de forma rápida. De modo que a equação (9) realmente fornece uma forma prática de se calcular $(I - C)^{-1}$. De modo análogo, para qualquer d, os vetores $C^m d$ se aproxima do vetor nulo rapidamente, e a equação (7) é uma forma prática de se resolver $(I - C)X = d$. Se os elementos de C e d são não negativos, então a equação (7) mostra que as componentes de x também são não negativas.

3.3 Equações Lineares e Circuitos Elétricos

As intensidades de corrente elétrica em um circuito elétrico simples podem ser representadas por um sistema linear de equações. Um gerador de voltagem, como uma bateria, faz com que uma corrente de elétrons percorra o circuito. Quando a corrente passa por uma resistência (como uma lâmpada ou um motor), ocorre uma queda de voltagem. Segundo a **Lei de Ohm** [2], essa queda de voltagem ao atravessar um resistor é dada por:

$$V = RI \tag{10}$$

onde a voltagem V é medida em *volts*, a resistência R em *ohms* (denotada por Ω) e a intensidade de corrente elétrica I em *ampères*.

O circuito da figura 1, contém três ciclos fechados. As correntes dos ciclos 1, 2 e 3 são denotadas por I_1, I_2 e I_3, respectivamente. As direções atribuidas a cada uma dessas *correntes* são arbitrárias. Se uma corrente aparece com valor negativo, então sua direção real é a inversa da indicada na figura. Se a direção indicada da corrente for do lado positivo da bateria (segmento maior) para o lado negativo (segmento menor), então a voltagem é positiva, caso contrário, a voltagem é negativa. O fluxo de corrente de um ciclo é governado pela seguinte lei.

Lei de Kirchhoff para a Voltagem

[2] Assim designada em homenagem ao seu formulador Georg Simon Ohm

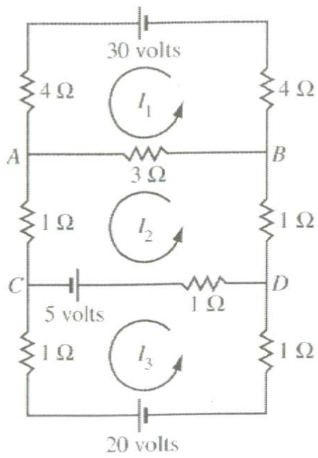

Figura 1: Circuito Elétrico.

A soma algébrica das quedas de voltagem em torno de um ciclo é igual à soma algébrica das fontes de voltagem na mesma direção nesse ciclo.

Exemplo 8. *Determine a corrente nos ciclos do circuito da figura 1.*

Solução: Para o ciclo 1, a corrente I_1 atravessa três resistores, e a soma das quedas de voltagem é

$$4I_1 + 4I_1 + 3I_1 = 11I_1. \tag{11}$$

A corrente do ciclo 2 também atravessa parte do ciclo 1, pelo *ramo* entre A e B. A queda correspondente é de $3I_2$ volts. Entretanto, a direção da corrente para o ramo AB, no ciclo 1, é oposta à direção escolhida para a corrente no ciclo 2, de modo que a soma algébrica de todas as voltagens para o ciclo 1 é $11I_1 - 3I_2$. Como a voltagem do ciclo 1 é de $+30$V, a lei de Kirchhoff para a voltagem implica que a equação para o ciclo 1 é

$$11I_1 - 3I_2 = 30. \tag{12}$$

A equação para o ciclo 2 é

$$-3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5. \tag{13}$$

O termo $-3I_1$ aparece devido à corrente do ciclo 1 pelo ramo AB (com a queda de voltagem negativa porque o fluxo da corrente é oposto ao fluxo do ciclo 2). O termo

$6I_2$ é a soma de todas as resistências do ciclo 2, multiplicado pela corrente do ciclo. O termo $-I_3$ aparece devido à corrente do ciclo 3 atravessando o resistor de 1 ohm no ramo CD, na direção oposta à direção da corrente do ciclo 2. A equação do ciclo 3 é

$$-I_2 + 3I_3 = -25. \tag{14}$$

Observe que a bateria de 5V do ramo CD é contada como parte do ciclo 2 e do ciclo 3, mas é -5V para o ciclo 3 por causa da direção escolhida para a corrente nesse ciclo. A bateria de 20V também é negativa pelo mesmo motivo.

As correntes dos ciclos são determinadas resolvendo o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 11I_1 & -3I_2 & & = & 30 \\ -3I_1 & +6I_2 & -I_3 & = & 5 \\ & -I_2 & +3I_3 & = & -25 \end{array} \right. \tag{15}$$

As operações elementares sobre a matriz completa levam à solução: $I_1 = 3A$ (três àmperes), $I_2 = 1A$ e $I_3 = -8A$. O valor negativo para I_3 mostra que a direção real da corrente, no ciclo 3, é na direção oposta à da indicada na figura 1.

É instrutivo ver o sistema (15) como uma equação vetorial:

$$I_1 \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + I_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} + I_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ -25 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

ou seja,

$$I_1.R_1 + I_2.R_2 + I_3.R_3 = V.$$

A primeira componente de cada vetor diz respeito ao primeiro ciclo, e analogamente para a segunda e terceira componentes. O primeiro vetor de resistência r_1 dá a resistência dos diversos ciclos atravessados pela corrente I_1. A resistência tem valor negativo sempre que I_1 atravessa na direção oposta à corrente daquele ciclo. Examine a figura 1 para ver como obter as componentes de r_1, depois, faça o mesmo para r_2 e r_3. A forma matricial da equação (16),

$$RI = V, \quad onde \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix},$$

fornece uma versão matricial da lei de Ohm. Se todas as correntes forem escolhidas com o mesmo sentido (digamos, o anti-horário), então todos os elementos da diagonal principal de R serão negativos.

A equação matricial $RI = V$ torna a linearidade desse modelo fácil de ser identificada. Por exemplo, se o vetor de voltagens for duplicado, então o vetor de correntes também tem que ser duplicado. Além disso, o *princípio da superposição* é válido, ou seja, a solução da equação (16) é igual a soma das soluções das equações,

$$RI = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad RI = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad RI = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix}.$$

Aqui, cada equação corresponde ao circuito com apenas uma fonte de voltagem (as outras foram substituídas por fios que fecham cada ciclo). O modelo para o fluxo de correntes é *linear* precisamnete porque as leis de Ohm e Kirchhoff são lineares. A queda de voltagem num resistor é *proporcional* à corrente que o atravessa (Ohm), e a *soma* das quedas de voltagem num ciclo é igual à soma das fontes de voltagem desse ciclo (Kirchhoff).

As correntes dos ciclos de um circuito podem ser usadas para determinar a corrente em qualquer ramo do ciclo. Se apenas uma corrente de ciclo atravessa um ramo, como no caso de B para D, na figura 1, então a corrente do ramo é igual à corrente do ciclo. Se mais de uma corrente de ciclo atravessa o ramo, como no caso de A para B, a corrente do ramo é igual à soma algébrica das correntes de ciclo que atravessam esse ramo (*Lei de Kirchhoff para Correntes*). Por exemplo, a corrente no ramo AB é $I_1 - I_2 = 3 - 1 = 2A$, na direção de I_1. A corrente no ramo CD é $I_2 + I_3 = 9A$.

3.4 Uma Aplicação de Álgebra Linear à Engenharia Civil: Projeto de Estrutura Metálica

Considere o problema do projeto de uma estrutura metálica como esboçada na figura 2. Trata-se de um guindaste que deverá içar cargas. O problema consiste em determinar qual é o esforço mecânico em cada viga da estrutura, de modo que se possa escolher as vigas com a resistência adequada.

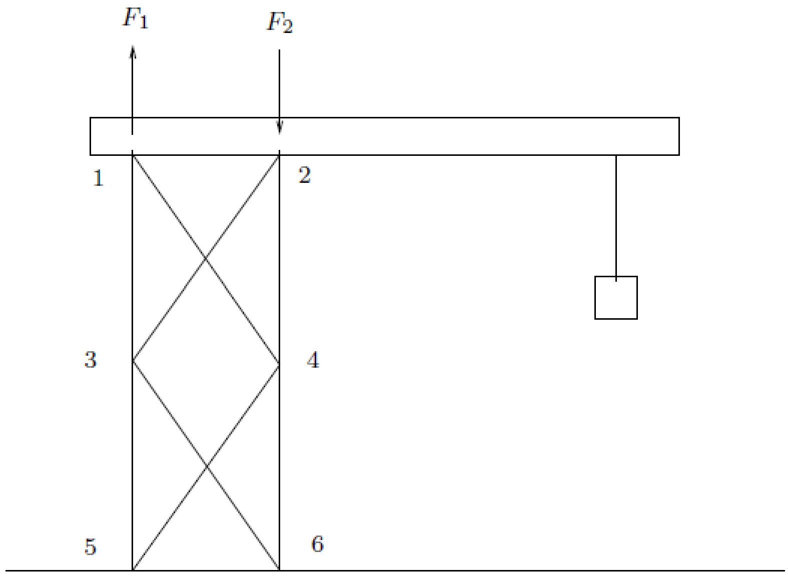

Figura 2: Diagrama de estrutura metálica composta de vigas.

O cálculo das forças que incidem na estrutura, F_1 e F_2, é imediato, conhecendo-se a massa que irá ser suspensa e o comprimento do braço do guindaste. Com essas forças, é preciso agora calcular a força exercida por cada viga nos nós (pontos de interseção de duas ou mais vigas) para que a estrutura permaneça em equilíbrio. Essas forças serão denotadas pelas variáveis f_{ij} , em que os índices indicam os nós ligados por esta viga. Assim, por exemplo, a força f_{41} significa a força exercida sobre o nó 4 pela viga que liga o nó 4 ao nó 1.

A somatória das forças em cada nó, de 1 a 6, deve ser nula tanto na direção horizontal quanto na direção vertical. Para montar o conjunto de equações, tomemos como exemplo o nó 1. O nó 1 é afetado pelas vigas que o ligam aos nós 2, 3 e 4. As equações que implicam no equilíbrio de forças sobre o nó 1 são,

$$\begin{array}{c} f_{12}cos\theta_{12} + f_{13}cos\theta_{13} + f_{14}cos\theta_{14} = F_1 \\ f_{12}sen\theta_{12} + f_{13}sen\theta_{13} + f_{14}sen\theta_{14} = 0 \end{array} . \tag{17}$$

sendo que θ_{ij} representa o ângulo entre a viga ij e a vertical. Construindo cada equação da somatória das forças em cada um dos nós, obtém-se o seguinte conjunto de equações,

$$
\begin{aligned}
f_{12}cos\theta_{12} + f_{13}cos\theta_{13} + f_{14}cos\theta_{14} &= F_1 \\
f_{12}sen\theta_{12} + f_{13}sen\theta_{13} + f_{14}sen\theta_{14} &= 0 \\
f_{21}cos\theta_{21} + f_{23}cos\theta_{23} + f_{24}cos\theta_{24} &= F_2 \\
f_{21}sen\theta_{21} + f_{23}sen\theta_{23} + f_{24}sen\theta_{24} &= 0 \\
f_{31}cos\theta_{31} + f_{35}cos\theta_{35} + f_{32}cos\theta_{32} + f_{36}cos\theta_{36} &= 0 \\
f_{31}sen\theta_{31} + f_{35}sen\theta_{35} + f_{32}sen\theta_{32} + f_{36}sen\theta_{36} &= 0 \\
f_{41}cos\theta_{41} + f_{45}cos\theta_{45} + f_{42}cos\theta_{42} + f_{46}cos\theta_{46} &= 0 \\
f_{41}sen\theta_{41} + f_{45}sen\theta_{45} + f_{42}sen\theta_{42} + f_{46}sen\theta_{46} &= 0 \\
f_{35}sen\theta_{35} + f_{46}sen\theta_{46} + f_{54}sen\theta_{54} + f_{63}sen\theta_{63} &= 0,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

a última equação diz respeito ao equilíbrio de toda a estrutura, que não deve ter em conjunto nenhuma aceleração horizontal.

Claramente, $f_{ij} = -f_{ji}$. Assim, por exemplo, $f_{12} = -f_{21}$. O conjunto de variáveis a serem determinadas, portanto, pode ser arranjado no vetor,

$$f = \begin{bmatrix} f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{23} & f_{24} & f_{35} & f_{36} & f_{45} & f_{46} \end{bmatrix}^t.$$

Definindo um vetor F e uma matriz Ω, respectivamente por

$$\begin{bmatrix} F_1 & 0 & F_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t,$$

$$
\begin{bmatrix}
cos\theta_{12} & cos\theta_{13} & cos\theta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
sen\theta_{12} & sen\theta_{13} & sen\theta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-cos\theta_{12} & 0 & 0 & cos\theta_{23} & cos\theta_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-sen\theta_{12} & 0 & 0 & sen\theta_{23} & sen\theta_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -cos\theta_{13} & 0 & -cos\theta_{23} & 0 & cos\theta_{35} & cos\theta_{36} & 0 & 0 \\
0 & -sen\theta_{13} & 0 & -sen\theta_{23} & 0 & sen\theta_{35} & sen\theta_{36} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -cos\theta_{14} & 0 & -cos\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & cos\theta_{46} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sen\theta_{35} & sen\theta_{36} & sen\theta_{45} & sen\theta_{46}
\end{bmatrix},
$$

é fácil verificar que o sistema de equações (18) é equivalente à equação matricial:

$$\Omega f = F. \tag{19}$$

Há inúmeras vantagens de se escrever a equação (18) na forma da equação (19). Deve ter ficado claro para o leitor que há uma regra simples que leva diretamente do desenho da figura (2) para as entradas da matriz Ω. Qualquer que fosse a estrutura composta de vigas que se ligam em nós, a regra seria a mesma. Seria possível representar por meio de uma matriz Ω qualquer estrutura, e essa representação poderia ser obtida automaticamente (por meio de um programa de computador). Dado um conjunto de forças externas F, o conjunto de forças sobre as vigas será dado por:

$$f = \Omega^{-1}\mathrm{F}.$$

Note-se que a matriz Ω deve ser invertível para que o problema tenha solução. Se não for invertível, isso quer dizer que a estrutura correspondente não é capaz de se manter de pé, e tem de ser trocada.

Considere agora a estrutura da figura 3:

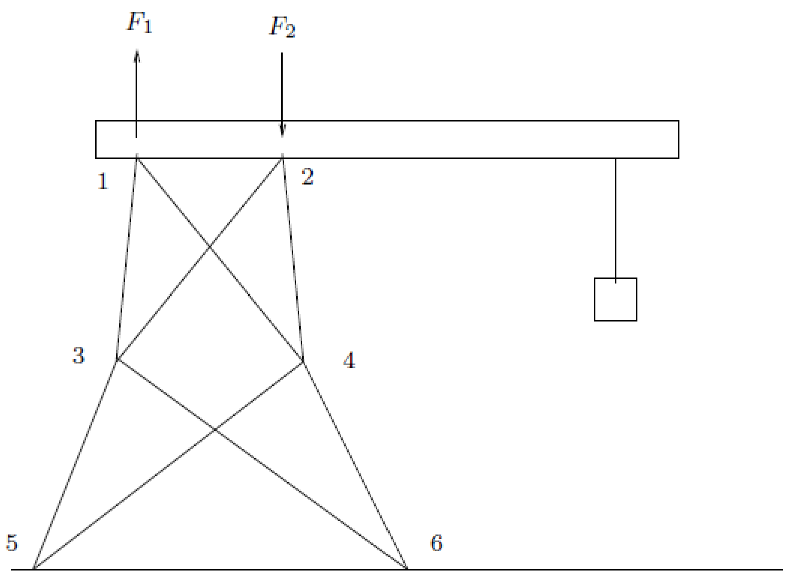

Figura 3: Diagrama de outra estrutura metálica composta de vigas.

A equação que resolve essa outra estrutura possui exatamente a mesma forma que a equação anterior. Só mudam os ângulos das vigas em relação à vertical, ou seja, as entradas da matriz Ω. É possível portanto mexer nas posições dos nós da estrutura, e resolver novamente o sistema a cada nova configuração. Dessa forma, é possível escolher a melhor geometria possível para a estrutura, de forma a obter, por exemplo, as soluções que representem o mínimo gasto de metal, ou a máxima resistência da estrutura, etc.

Em um problema prático de engenaria as estruturas são maiores, possuindo um número muito maior de vigas. As estruturas seriam tridimensionais, isto é, também teriam profundidade, além de largura e altura. Por fim, as vigas teriam cada uma o seu peso. Esses detalhes a mais iriam conduzir a sistemas com mais equações, mas que, essencialmente, teriam a mesma forma que o sistema mostrado.

4 Considerações Finais

De acordo com a proposta de tema, a pesquisa realizada em materiais bibliográficos nos mostraram que a Álgebra Linear tem amplo campo de aplicações. Por meio do uso da teoria das matrizes, notamos que é possível calcular parâmetros adicionais como preços e níveis de produção para satisfazerem um objetivo econômico desejado. Na economia, analisamos os comportamentos dos Modelos Econômicos de Leontief. No modelo fechado determinamos preços que igualam o total dos gastos com o total recebido e, no modelo aberto os níveis de produção das indústrias para satisfazerem a demanda externa. Em circuitos elétricos determinamos as correntes e as quedas de voltagens de um ciclo conforme a lei de Kirchhoff. Na Engenharia Civil foi obeservado qual é o esforço mecânico em cada viga da estrutura, de modo que se possa escolher as vigas com a resistência adequada.

Por fim, a realização desse trabalho nos levou ao entendimento e a conclusão que a Álgebra Linear não deve ser fechada em si mesma e apresentada de forma isolada, valorizando e aproveitando o vasto campo de aplicações de Matrizes e Sistemas Lineares que transcendem os exemplos de aplicações aqui apresentados.

Referências

[1] **Anton, Howard; Rorres, Chris**, *Álgebra Linear com Aplicações*, 8ª edição, Porto Alegre: Bookman, 2001.

[2] **Boldrini, J. L.; Costa, S. I. R.; Figueiredo, V. L.; Wetzler, H. G.**, *Álgebra Linear*, 3ª ed., Editora Harbra, 1980.

[3] **Iezzi, G.; Hazzan, S.**, *Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 4*, 7ª ed., Editora Atual, 2010.

[4] **Lay, David C.**, *Álgebra linear e suas aplicações*; tradução Ricardo Camelier e Valéria de Magalhães Iório; 2ª edição [Reimpr.], Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[5] **Lima, Elon L.; Paulo César; Wagner; Morgado**, *A Matemática do Ensino Médio, Vol 1*; 9ª edição , Rio de Janeiro: SBM, 2006.