Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

A CIRCUNFERÊNCIA DE CENTRO NA ORIGEM COMO PRODUTO DE MATRIZES

MARINA FRANÇA OLIVEIRA

TERESINA
2019

Marina França Oliveira

Dissertação de Mestrado

A CIRCUNFERÊNCIA DE CENTRO NA ORIGEM COMO PRODUTO DE MATRIZES

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cleidinaldo Aguiar Souza

Teresina
2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

O48c Oliveira, Marina França.
A circunferência de centro na origem como produto de matrizes / Marina França Oliveira. – Teresina, 2019.
67f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, 2019.
Orientador: Prof. Dr. Cleidinaldo Aguiar Souza.

1. Matrizes - Matemática. 2. Circunferência. 3. Álgebra Linear. I. Título.

CDD 512.5

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

Marina França Oliveira

Dissertação de Mestrado

A CIRCUNFERÊNCIA DE CENTRO NA ORIGEM COMO PRODUTO DE MATRIZES

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em _____ / _____ / _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cleidinaldo Aguiar Souza
Universidade Federal do Piauí - UFPI
Orientador

Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto
Universidade Federal do Piauí - UFPI
Avaliador Interno

Profª. Dra. Aurineide Castro Fonseca
Universidade Federal do Piauí - UFPI
Avaliadora Externa

Me levanto sobre o sacrifício de um milhão de mulheres que vieram antes e penso: O que é que eu faço para tornar essa montanha mais alta para que as mulheres que vierem depois de mim possam ver além?
Rupi Kaur

Agradecimentos

A Deus e a meus antepassados pela proteção e discernimento.

À minha mãe, sinônimo de força e coragem, pela vida e renuncias. Por forjar cada passo meu com muito sangue e suor, por tornar cada conquista possível, mas principalmente, por se reinventar, se redescobrir e, enfim, viver.

Ao meu pai, pelo incentivo e ensinamentos ao longo da vida, por ser o melhor pai que eu poderia ter, por tanto amor dedicado a mim e a meus irmãos.

À tia Glória e à tia Lili pelas abdicações, pelos ensinamentos, pela ternura, pela vida dedicada a mim e aos meus irmãos. Muito obrigado nunca será suficiente para agradecer por tanto. À elas, dedico não só esse trabalho, mas toda minha vida.

Aos meus irmãos, Jeferson, Pedro e Lucas, por serem a ponte indestrutível entre presente e passado, por serem minha base e a quem eu recorro, independente de tudo.

Ao Rocky, pelo amor incondicional.

Aos meus padrinhos, Djane e Edmundo e ao meu primo, Rodrigo, pela paciência, carinho, amor e atenção ao longo desses dois anos. Minha eterna gratidão.

Ao meu avô, João dos Santos Filho (In memorian), por ser o maior entusiasta e incentivador da minha vida e à minha avó, Maria das Dores, por com tão pouco ter feito tanto.

À Roberta e ao André, por serem a família que eu pude escolher, por trazerem leveza a minha vida, por arrancarem sorrisos nos momentos mais difíceis. Eu amo vocês.

À Joice, por nunca ter desistido de mim, por acreditar principalmente quando eu duvidei, pela coragem de me esperar e pela paciência, cuidado e amor dedicados ao longo dos últimos anos. Não existem palavras para agradecer.

Ao Giuliano... *"Agora Fabiano era vaqueiro, e ninguém o tiraria dali. Aparecera como um bicho, entocara-se como um bicho, mas criara raízes, estava plantado. Olhou as quipás, os mandacarus e os xiquexiques. Era mais forte que tudo isso, era como as catingueiras e as baraúnas. Ele, sinhá Vitória, os dois filhos e a cachorra Baleia estavam agarrados à terra."*

Resumo

Este trabalho tem como objetivo mostrar, através da igualdade de conjuntos, que o conjunto das circunferências de centro na origem pode ser escrito como o produto de um ponto fixo, pertencente a circunferência, por uma matriz ortogonal pré-fixada. Para isso, nos primeiros capítulos são apresentados conceitos básicos e propriedades usuais de plano cartesiano, circunferência e matrizes, através de uma linguagem acessível e democrática. Por fim, apresentamos aplicações do resultado obtido para resolver problemas de matemática financeira e ao definir ponto interno e externo à circunferência de centro na origem como produto de matrizes, mostrando que esta definição concorda com a definição clássica de ponto interno e externo a uma circunferência.

Palavras-chave: Matrizes, matriz ortogonal, circunferência, geometria, álgebra, plano cartesiano.

Abstract

This work aims to show, through equality of sets, that the set of center circles at the origin can be written as the product of a fixed point, belonging to the circumference, by a pre-fixed orthogonal matrix. For this, in the first chapters are presented basic concepts and usual properties of Cartesian plane, circumference and matrices, through an accessible and democratic language. Finally, we present applications of the result obtained to solve problems of financial mathematics and to define internal and external point to the circumference of center in the origin like product of matrices, showing that this definition agrees with the classic definition of internal and external point to a circumference.

Key words: Matrices, orthogonal matrix, circumference, geometry, algebra, Cartesian plane.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Um dos maiores desafios do ensino da matemática é apresentar aos alunos conteúdos que se complementam e que se desenvolvem, exigindo que o educando, para além de reproduzir formulas aparentemente isolados, desenvolva a capacidade de ler, escrever, interpretar e produzir os elementos no processo de alfabetização matemática de maneira eficaz.

Nesse sentido, apresentamos a circunferência de centro na origem de um modo diferente, como um produto de matrizes, unindo assim, dois conteúdos que, segundo os parâmetros nacionais curriculares (PCN's) são apresentados aos discentes em séries distintas e quase sem nenhuma relação.

As matrizes, diferente do que muitos pensam, começaram a ser estudadas no século II a. C. pelos babilônios mas foi apenas em 1858 que Arthur Cayley, matemático inglês, com a famosa *Memoir on the Theory of Matrices* divulgou esse nome e demonstrou sua utilidade, dando notoriedade ao que hoje conhecemos como Teoria Matricial.

Além dos babilônios e Cayley, foram muitas as contribuições, e ressaltamos o trabalho do matemático Joseph Louis Lagrange sendo o primeiro a usar o conceito de matrizes para estudar máximos e mínimos de uma função real.

Uma das consequências desse estudo foi que a teoria das formas quadráticas que antes eram tratadas apenas escalarmente como um polinômio homogêneo de grau dois, ou seja

$$q\,(x,\ y)\ =\ ax^2 + 2bxy + cy^2$$

e após Lagrange, passou a ser estudada através da notação e metodologia matricial, a saber

$$q\,(x,\ y)\ =\ [x\ y] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Exibir a matriz quadrada de ordem dois que satisfaz a equação acima não é um processo simples e quase sempre precisa-se utilizar conceitos de álgebra linear estudados na matemática superior como a ortogonalização de vetores e o teorema espectral para matrizes simétricas.

Sendo, a equação da circunferência dada pela forma quadrática

$$(x\ - x_c)^2\ + (y\ -\ y_c)^2 = r^2$$

pelo estudo desenvolvido por Lagrange, podemos afirmar que dado um ponto $P\,(x,\ y)$ pertencente a circunferência existe uma matriz quadrada de ordem dois que transforma o ponto dado na equação da circunferência a qual ele pertence.

Neste trabalho, vamos além: Mostraremos que dado um ponto fixo P_0 e um ponto arbitrário P, ambos pertencentes a circunferência, sempre será possível exibir uma matriz ortogonal de ordem dois que gera a equação da circunferência. Em outras palavras, mostraremos que dados dois pontos quaisquer P e Q em uma circunferência centrada na origem e passando por P e Q, existe sempre uma matriz M de ordem dois tal que $P = MQ$.

Este dissertação está em cinco capítulos. No capítulo 1, apresentamos conceitos básicos do plano cartesiano, por entender tais tópicos como pré-requisitos básicos para a compreensão do que propomos.

No capítulo 2, definimos a circunferência como uma figura geométrica gerada por um conjunto de pontos que obedecem a mesma regra e mostramos as diferentes formas que essa equação pode ser enunciada.

No capítulo 3, abordamos a álgebra matricial com a representação e tipos de matrizes, as operações entre matrizes e as operações entre um número real e uma matriz.

No capítulo 4, mostraremos que todo ponto de uma circunferência pode ser obtido como o produto de uma matriz ortogonal de ordem dois por uma matriz coluna.

Finalmente, no capítulo 5, faremos duas aplicações, sendo a primeira delas definir ponto interior e ponto exterior a uma circunferência de centro na origem, as quais são coincidentes com as definições clássicas de ponto interior e ponto exterior a uma circunferência. Na segunda aplicação, utilizaremos o resultado obtido para circunferências com centro na origem na solução de alguns problemas de matemática financeira.

Capítulo 1

O Plano Cartesiano

Neste capítulo, introduziremos coordenadas na reta e no plano para representar pontos por meio de números reais. A representação dos pontos por suas coordenadas torna possível resolver algebricamente diversos problemas geométricos.

1.1 Coordenada na reta

Dada uma reta r associaremos números reais aos pontos desta reta da seguinte maneira: Sejam O e A pontos distintos em r, a reta r sobre a qual foi escolhida uma semirreta $\overrightarrow{OA}$, denomina-se *eixo* ϵ de *origem* O com sentido de *percurso induzido pela semirreta* $\overrightarrow{OA}$.

A distância entre dois pontos $X, Y \in \epsilon$ será denotada por $d(X, Y)$, assim obtemos uma correspondência (biunívoca) entre o eixo ϵ e o conjunto dos números reais dada por:

(i) à origem O associamos o número real 0 (zero): $O \longleftrightarrow 0$;

(ii) a cada ponto $X \neq 0$ da semirreta $\overrightarrow{OA}$ associamos o número real positivo $x = d(0, X)$: $X \longleftrightarrow x$;

(iii) a cada ponto $Y \neq 0$ da semirreta oposta $\overrightarrow{OB}$ associamos o número real negativo $y = -d(O, Y)$: $Y \longleftrightarrow y$.

Como consequência da definição acima, temos que

- O número real 0 (zero) tal que $O \longleftrightarrow 0$, é denominada coordenada da origem O no eixo ϵ.
- O número real x tal que $X \longleftrightarrow x$, é denominada coordenada do ponto X no eixo ϵ.
- O número real Y tal que $Y \longleftrightarrow y$, é denominada coordenada do ponto Y no eixo ϵ

Como os pontos que estão sobre uma reta r podem ser representados por um número real, então naturalmente em relação à ordem podemos comparar os elementos sobre uma reta r, da seguinte maneira.

Sejam $X, Y \in r$ e sejam x e y suas, respectivas, coordenadas no eixo ϵ. Dizemos que Y está à direita (ou X está à esquerda de Y) de X quando $x < y$. Desta forma se $\overrightarrow{OB}$ é semirreta oposta a $\overrightarrow{OA}$, então os pontos distintos de O na semirreta $\overrightarrow{OA}$ estão à direita de O, e os pontos distintos de O na semirreta $\overrightarrow{OB}$ estão à esquerda de O.

Proposição 1.1.1. Se x e y são as coordenadas, respectivamente, dos pontos X e Y sobre o eixo ϵ, então

$$d(X, Y) = \mid x - y \mid .$$

Demonstração. Se $X = Y$, então imediatamente temos que $d(X, Y) = 0 = \mid x - y \mid$. Suponhamos que, $X = O$ ou $Y = O$, então

$$\mid x \mid = \pm\, x = d(O, X) \quad ou \quad \mid y \mid = \pm\, y = d(O, Y).$$

Sejam X, Y e O três pontos distintos. Sem perda de generalidade, suponhamos que X está à esquerda de Y, isto é, $x < y$. Temos três casos a considerar:

caso 1. X e Y estão à direita da origem. Isto é, $0 < x < y$.

Neste caso, X está entre O e Y, pois caso contrário, Y estaria entre O e X e $d(O, Y) = y < x = d(O, X)$, o que contraria nossa hipótese. Logo,

$$d(O, Y) = d(O, X) + d(X, Y) \iff y = x + d(X, Y) \iff d(X, Y) = y - x = \mid y - x \mid .$$

caso 2. X e Y estão à esquerda de O. Isto é, $x < y < 0$.

De maneira análoga ao caso anterior, podemos verificar que Y está entre X e O. Assim,

$$d(X, O) = d(X, Y) + d(Y, O) \iff -x = d(X, Y) - y \iff d(X, Y) = y - x = \mid y - x \mid .$$

caso 3. X está à esquerda de O e Y está à direita de O. Isto é, $x < 0 < y$.

Neste caso, Y está na semirreta $\overrightarrow{OA}$ e X está na semirreta oposta a $\overrightarrow{OA}$. Portanto, O está entre X e Y e

$$d(X, Y) = d(X, O) + d(O, Y) \iff d(X, Y) = -x + y = y - x = \mid y - x \mid .$$

$\square$

1.2 Coordenadas no plano

Um *sistema de eixos ortogonais* num plano π é um par de eixos, eixo OX e eixo OY, com unidade de medida de igual comprimento, que intersectam-se perpendicularmente na origem comum O. O eixo OX é denominado *eixo horizontal* e o eixo OY é denominado, *eixo vertical*. O Plano π com o sistema de eixos ortogonais acima, será chamado *sistema de eixos ortogonais* OXY, ou simplesmente *sistema* OXY.

A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelcer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\},$$

da seguinte maneira.

Dado arbitrariamente um ponto $P_0 \in \pi$, traçamos as retas r e s passando por P_0, tal que:

(i) r seja paralela ao eixo OY e intersecta o eixo OX em um ponto X_0;

(ii) s seja paralela ao eixo OX e intersecta o eixo OY em um ponto Y_0.

Por coordenada na reta, o ponto X_0 está em correspondência biunívoca com um número real x_0 e o ponto Y_0 está em correspondência biunívoca com um número real y_0. Assim, obtemos a correspondência

$$P_0 \iff (x_0, y_0).$$

Como $P_0 \in \pi$ é arbitrário, segue que para todo ponto $P \in \pi$ existe uma correspondência biunívoca

$$P \iff (x, y).$$

Os números $x, y \in \mathbb{R}$ do par ordenado (x, y) associado ao ponto P são chamados *coordenadas cartesianas* do ponto P: x é a *primeira coordenada* ou *abscissa* de P e y é a *segunda coordenada* ou *ordenada* de P.

Exemplo 1.2.1. Represente os pontos $O = (0,\ 0)$, $A = \left(\frac{5}{2},\ 1\right)$, $B = (-1,\ 2)$, $C = (-2,\ -3)$, $D = \left(4,\ -\frac{4}{3}\right)$, $E = (-3,\ 0)$ e $F = (0,\ 3)$ no plano cartesiano.

Solução:

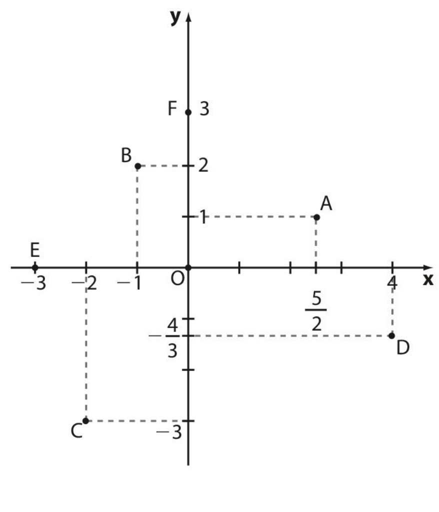

Figura 1.1: Plano Cartesiano - Exemplo 1.1

O complementar dos eixos no plano é a união de quatro regiões denominadas **quadrantes** e enumerados como na figura abaixo.

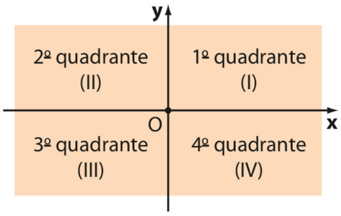

Figura 1.2: Plano Cartesiano - Quadrantes

Note que os pontos do eixo OX têm coordenadas $(x, 0)$, os pontos do eixo OY têm coordenadas $(0, y)$ e os quadrantes, dados em coordenadas, são:

1^0 quadrante $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \;\; e \;\; y > 0\}$;

2^0 quadrante $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \;\; e \;\; y > 0\}$;

3^0 quadrante $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \;\; e \;\; y < 0\}$;

4^0 quadrante $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \;\; e \;\; y < 0\}$.

Capítulo 2

Circunferência

Neste capítulo definiremos um subconjunto do plano denominado circunferência. Para tal definição utilizaremos as coordenadas de um ponto no plano.

Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos do plano π dados por suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY. Dado um ponto $R = (c, b)$ no plano π, consideramos o triângulo retângulo PQR, com hipotenusa PQ e catetos PR e QR paralelos aos eixos OX e OY, respectivamente.

Como os catetos PR e QR estão sobre eixos e a distância entre dois pontos de um eixo é igual ao módulo da diferença de suas coordenadas, as medidas desses catetos são dadas por:

$$d(P, R) =\mid a - c \mid \quad e \quad d(Q, R) =\mid b - d \mid .$$

Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$d(P, Q) = \sqrt{(d(P, R))^2 + (d(Q, R))^2} = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}. \tag{2.0.1}$$

Assim, a distância do ponto $P = (a, b)$ ao ponto $Q = (c, d)$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes.

Exemplo 2.0.1. Calcule a distância do ponto $A = (-1, 2)$ ao ponto $B = (2, -3)$.

Solução:

Temos que

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}.$$

Com o cálculo da distância em coordenadas podemos obter uma caracterização algébrica da circunferência.

Definição 2.0.1. Uma *circunferência* $\mathcal{S}^1_r(A)$ de centro no ponto $A \in \pi$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos do planos π situados à distância r do ponto A, ou seja:

$$\mathcal{S}^1_r(A) = \{P \in \pi : \quad d(P, A) = r\}.$$

Se $A = (a, b)$ são as coordenadas do centro num sistema de eixos ortogonais OXY do plano π, segue que

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{S}^1_r(A) &\iff d(P, A) = r \\ &\iff d(P, A)^2 = r^2 \\ &\iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Assim, associamos à circunferência $\mathcal{S}^1_r(A)$ a equação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos. Isto é,

$$\mathcal{S}^1_r(A) = \{(x, y) \in \pi : \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

Por meio dessa equação, as propriedades geométricas da circunferência podem ser deduzidas algebricamente.

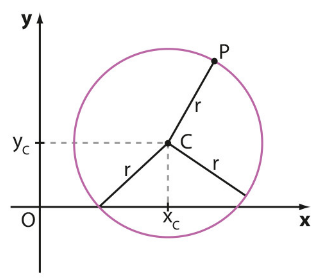

Figura 2.1: Circunferência

Exemplo 2.0.2. Determine a equação da circunferência de centro $C = (0, 0)$ e raio de medida 3 é.

Solução:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2 \iff x^2 + y^2 = 9$$

.

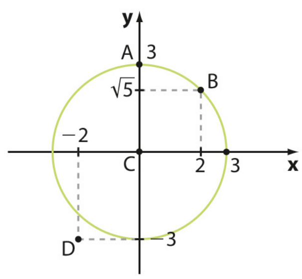

Figura 2.2: Circunferência - Exemplo 2.2

Note que o ponto $A = (0, 3)$ pertence a essa circunferência, pois

$$(0 - 0)^2 + (3 - 0)^2 = 9.$$

Da mesma forma, o ponto $B = (2, \sqrt{5})$ também pertence, pois

$$2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9.$$

Já o ponto $D = (-2, -3)$ não pertence à circunferência, pois

$$(-2)^2 + (-3)^2 = 13 \neq 9.$$

O nosso objetivo não é estudar a circunferência através de sua equação algébrica, mas como veremos, obter uma nova caracterização.

Capítulo 3

Matrizes

Neste capítulo definiremos matrizes com elementos reais, assim como as operações envolvendo matrizes. Apresentaremos algumas matrizes, chamadas matrizes especiais. Enunciaremos os principais resultados envolvendo as operações com matrizes. O objetivo principal deste capítulo é definir quando uma matriz é ortogonal.

3.1 Representação de uma matriz

Sejam m e n números naturais não nulos, uma tabela de m x n números reais dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais) é uma matriz do tipo (ou formato) $m\ x\ n$, ou simplesmente matriz m x n.

Representamos usualmente uma matriz colocando seus elementos (números reais) entre parênteses ou entre colchetes.

Exemplo 3.1.1. Assim,

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & 0 \\ 90 & \pi & 56 & 11 \\ 0 & 0 & 34 & 1 \end{bmatrix}$, é uma matriz de ordem 4 x 4

- $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 13 & 0 & 23 \\ 90 & \pi & 56 & 11 & 29 \end{bmatrix}$, é uma matriz de ordem 3 x 5

Consideremos uma matriz A do tipo m x n. Um elemento qualquer dessa matriz pode ser representado pelo símbolo a_{ij}, no qual o índice i refere-se à linha e o índice j refere-se à coluna em que se encontra tal elemento.

Vamos convencionar que as linhas são numeradas de cima para baixo, e as colunas, da esquerda para à direita. De um modo geral, uma matriz A do tipo m x n é representada por $A = (a_{ij})_{m \text{ x } n}$, em que i e j são números inteiros positivos tais que $1 < i < m, 1 < j < n$, e a_{ij} é um elemento qualquer de A.

Exemplo 3.1.2. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 9 \\ 12 & 23 \end{bmatrix}_{3 \text{ x } 2}$$

- O elemento que está na linha 1, coluna 1, é $a_{11} = 1$;
- O elemento que está na linha 1, coluna 2, é $a_{12} = 7$;
- O elemento que está na linha 2, coluna 1, é $a_{21} = 8$;
- O elemento que está na linha 2, coluna 2, é $a_{22} = 9$;
- O elemento que está na linha 3, coluna 1, é $a_{31} = 12$;
- O elemento que está na linha 3, coluna 2, é $a_{32} = 23$.

3.2 Matrizes especiais

Nesta seção apresentaremos algumas matrizes, que são chamadas de matrizes especiais.

1. **Matriz linha**: é uma matriz formada por uma única linha.

   Exemplo 3.2.1. $A = \begin{bmatrix} \pi & -12 & 20 \end{bmatrix}$, é uma matriz linha 1 x 3.

2. **Matriz coluna**: é uma matriz formada por uma única coluna.

   Exemplo 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} 34 \\ 90 \\ 41 \\ -4 \end{bmatrix}$, é uma matriz coluna 4 x 1.

3. **Matriz nula**: é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero. Pode-se indicar uma matriz nula m x n por $0_{m \text{ x } n}$

   Exemplo 3.2.3. $0_{2\text{x}3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, é uma matriz nula 2 x 3.

4. **Matriz quadrada**: é uma matriz que possui número de linhas iguais ao número de colunas.

   Exemplo 3.2.4. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, é uma matriz quadrada de ordem 2.

5. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, temos que:

   i. Os elementos de A cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a *diagonal principal* de A.

   Exemplo 3.2.5. Seja A a matriz quadrada de ordem 3, dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

   os elementos a_{11}, a_{22}, a_{33} formam a diagonal principal de A.

   ii. Os elementos da matriz A cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n+1$ constituem a *diagonal secundária* de A.

   Exemplo 3.2.6. Retornando ao exemplo anterior, os elementos a_{13}, a_{22}, a_{31} formam a diagonal principal de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{13} \end{bmatrix}$$

6. **Matriz Identidade:** Seja A uma matriz quadrada de ordem n, A é denominada *matriz identidade de ordem n* (indica-se por I_n) se os elementos de sua diagonal principal são todos iguais 1, e os demais elementos são iguais a zero. Assim:

   - $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   - $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $\vdots$

   - $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

3.3 Operações com matrizes

Introduziremos as seguintes operações com matrizes: adição de matrizes, produto de um número real por uma matriz e produto entre matrizes. Em seguida demonstraremos as propriedades para estas operações. Iniciaremos definindo quando duas matrizes são iguais.

Definição 3.3.1. Duas matrizes A e B de mesma ordem m x n são iguais se todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, sendo $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, temos que $A = B$ se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Exemplo 3.3.1. Determine $a,\ b,\ c,$ e d para que $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & d \\ c & -5 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

Solução:

Devemos ter

$$\begin{cases} a = 3 \\ 1 = d \\ 2 = c \\ b = -5 \end{cases}$$

3.3.1 Adição de matrizes.

Dadas duas matrizes de mesma ordem, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, a soma de A com B (representa-se por $A + B$) é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$. Em outras palavras, a matriz soma C tem mesma ordem que A e B e é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de A e B.

Exemplo 3.3.2. Sejam $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & \sqrt{1} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ matrizes, temos:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & \sqrt{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -6 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -8 & 14 & \sqrt{1}+1 \end{pmatrix}$$

As propriedades da adição de matrizes são dadas a seguir.

Propriedade 3.3.3. *Sejam A, B e C matrizes de mesma ordem $(m \times n)$ e $0_{m\times n}$ a matriz nula, de ordem $m \times n$, valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:*

I. **Comutativa:** $A + B = B + A$

II. **Associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$

III. **Existência do elemento neutro:** Existe M tal que $A + M = A$, qualquer que seja a matriz $A_{m\times n}$. Observe que, nesse caso, M é a matriz nula do tipo $m \times n$.

IV. **Existência do oposto (ou simétrico aditivo.):** Dada a matriz A, existe a matriz oposta -A tal que $A + (-A) = 0_{m \times n}$.

Demonstração. Para I, sejam dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, temos:

$$A + B = C = (c_{ij})_{m \times n} \text{ e } B + A = D = (d_{ij})_{m \times n}$$

Mostraremos que

$$C = D$$

Para todo $i \in \{1, 2, ... , m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ... , m\}$, assim

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Usando a propriedade comutativa dos reais

$$c_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = d_{ij}$$

e logo,

$$C = D,$$

ou seja,

$$A + B = B + A.$$

O que mostra a comutatividade.

Para II, dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, temos:

$$(A + B) + C = D = (d_{ij})_{m \times n} \text{ e } A + (B + C) = E = (e_{ij})_{m \times n}.$$

Mostraremos que

$$D = E,$$

Para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos:

$$d_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Usando a propriedade associativa da adição de números reais, podemos escrever:

$$d_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = e_{ij}$$

e daí,

$$D = E,$$

ou seja

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

O que mostra a associatividade.

Para III, dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $M = (a_{ij})_{m\times n}$, suponha que

$$A + M = A.$$

então,

$$\begin{aligned} a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \quad &\Leftrightarrow \quad m_{ij} = a_{ij} - a_{ij} \\ &\Leftrightarrow \quad m_{ij} = 0. \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Assim,

$$M = 0_{m\times n},$$

ou seja, o elemento neutro da adição é M a matriz nula.

Agora mostraremos a existência de um elemento simétrico. Para isto, sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $A' = \left(a'_{ij}\right)_{m\times n}$ e $0_{m\times n}$ a matriz nula de ordem $m \times n$. Suponha que

$$A + A' = 0_{m\times n}$$

e daí,

$$\begin{aligned} a_{ij} + a'_{ij} = 0 \ &\Leftrightarrow \ a_{ij} = 0 - a'_{ij} \\ &\Leftrightarrow \ a'_{ij} = -a_{ij} \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Assim,

$$A' = -A.$$

$\square$

Como consequência da existência do elemento simétrico aditivo, obtemos as seguintes definições.

3.3.2 Matriz oposta

Definição 3.3.1. Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Chama-se *oposta de* A a matriz representada por $-A$, tal que

$$A + (-A) = 0_{m\times n}$$

onde $0_{m\times n}$ a matriz nula do tipo $m \times n$.

Note que, se B é oposta de A, então

$$A + B = 0$$

e daí, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$, temos

$$\begin{array}{rrcl} & a_{ij} + b_{ij} & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & a_{ij} & = & -b_{ij} \\ \Longleftrightarrow & b_{ij} & = & -a_{ij} \end{array}$$

Observe que a matriz $-A$ é obtida de A trocando-se o sinal de cada um de seus elementos:

Exemplo 3.3.4. Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \sqrt{5} \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$-A = \begin{pmatrix} -13 & 9 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad -B = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\sqrt{5} \\ 8 & -9 \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Subtração de Matrizes.

Definição 3.3.2. Dadas duas matrizes de mesma ordem $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chama-se diferença entre A e B (representa-se por $A - B$) a matriz soma de A com a oposta de B, isto é:

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplo 3.3.5. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, temos que:

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Outra operação envolvendo matrizes é o produto de um número real por uma matriz, que definiremos a seguir

3.3.4 Produto de um real por uma matriz.

Definição 3.3.3. Seja a matriz $(a_{ij})_{m\times n}$ e k um número real, o produto de k pela matriz A (indica-se $k \cdot A$) é a matriz $B = k \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Isto significa que B é obtida de A multiplicando-se por k cada um dos elementos de A.

Exemplo 3.3.6. Seja a matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos que

$$\begin{aligned} 3 \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 9 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 12 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Em relação ao produto de um número real por uma matriz, temos as seguintes propriedades.

Proposição 3.3.2. Sejam k e l números reais e A e B matrizes de mesma ordem, valem as seguintes propriedades:

i. $k \cdot (l \cdot A) = (k \cdot l) \cdot A$

ii. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

iii. $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$

iv. $1 \cdot A = A$.

Demonstração. Para o item [*i.*], sejam k e $l \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz de ordem m x n, temos

$$\begin{aligned} k \cdot (l \cdot A) &= k \cdot (l \cdot a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k \cdot l \cdot a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k \cdot l)\,(a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k \cdot l) \cdot A \end{aligned}$$

No item [*ii.*], sejam $k \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ duas matrizes de ordem m x n, temos

$$\begin{aligned} k \cdot (A + B) &= k \cdot \big((a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n}\big) \\ &= k \cdot (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} \\ &= (k \cdot (a_{ij} + b_{ij}))_{m \times n} \\ &= (k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij})_{m \times n} \qquad . \\ &= (k \cdot a_{ij})_{m \times n} + (k \cdot b_{ij})_{m \times n} \\ &= k \cdot (a_{ij})_{m \times n} + k \cdot (b_{ij})_{m \times n} \\ &= k \cdot A + k \cdot B \end{aligned}$$

Mostraremos agora os itens [*iii.*] $-$ [*iv.*]. Sejam k e $l \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$, temos

$$\begin{aligned}
(k+l)\cdot A &= (k+l)\cdot (a_{ij})_{m \text{ x } n} \\
&= ((k+l)\cdot a_{ij})_{m\times n} \\
&= (k\cdot (a_{ij}) + l\cdot (a_{ij}))_{m \text{ x } n} \\
&= k\cdot (a_{ij})_{m \text{ x } n} + l\cdot (a_{ij})_{m \text{ x } n} \\
&= k\cdot A + l\cdot A
\end{aligned} .$$

O que prova o item [*iii.*]. Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$, temos

$$\begin{aligned}
1\cdot A &= 1\cdot (a_{ij})_{m\times n} \\
&= (1\cdot a_{ij})_{m\times n} \\
&= (a_{ij})_{m\times n} \\
&= A
\end{aligned} .$$

□

3.3.5 Produto de matrizes

Definição 3.3.4. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, chama-se *produto de A por B*, e se indica $A\cdot B$, a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$, em que

$$c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + a_{i3}\cdot b_{3k} + a_{i4}\cdot b_{4k} + ... \ + a_{in}\cdot b_{nk}$$

para todo $i \in \{1, 2, ... , m\}$ e todo $k \in \{1, 2, ... , p\}$.

Note que:

- A definição garante a existência do produto $A\cdot B$ se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

- A matriz produto $C = A\cdot B$ é uma matriz cujo números de linhas é igual ao número de linhas de A e o número de colunas é igual ao número de colunas de B, ou seja,

$$A_{(m\times n)}\cdot B_{(n\times p)} = C_{(m\times p)}$$

Exemplo 3.3.7.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 0 & 2\cdot(-2) + 3\cdot 5 \\ (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 & (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vejamos as propriedades do produto de matrizes, assim com as demonstrações dessa propriedades.

Proposição 3.3.3. Se A é quadrada de ordem n, temos: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz quadrada de ordem n e I_n a matriz identidade de ordem n, temos:

$$\begin{aligned}
A \cdot I_n &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 + \cdots + a_{1n}\cdot 0 & \cdots & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + \cdots + a_{1n}\cdot 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\cdot 1 + a_{n2}\cdot 0 + \cdots + a_{nn}\cdot 0 & \cdots & a_{n1}\cdot 0 + a_{n2}\cdot 0 + \cdots + a_{nn}\cdot 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1\cdot a_{11} + 0\cdot a_{12} + \cdots + 0\cdot a_{1n} & \cdots & 0\cdot a_{11} + 0\cdot a_{12} + \cdots + 1\cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1\cdot a_{n1} + 0\cdot a_{n2} + \cdots + 0\cdot a_{nn} & \cdots & 0\cdot a_{n1} + 0\cdot a_{n2} + \cdots + 1\cdot a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= I_n \cdot A
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.3.4. Se $A = (a_{ij})_{n \text{ x } m}$, com $m \neq n$, temos:

$$I_n \cdot A = A \text{ e } A \cdot I_m = A$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
I_n \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_n \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{nxm} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + \cdots + 0 \cdot a_{n1} & \cdots & 1 \cdot a_{1m} + 0 \cdot a_{2m} + \cdots + 0 \cdot a_{nm} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + \cdots + 0 \cdot a_{n1} & \cdots & 0 \cdot a_{1m} + 1 \cdot a_{2m} + \cdots + 0 \cdot a_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + \cdots + 1 \cdot a_{n1} & \cdots & 0 \cdot a_{1m} + 0 \cdot a_{2m} + \cdots + 1 \cdot a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} \\
&= A
\end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos demonstrar o caso $A \cdot I_m = A$. □

Definição 3.3.5. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, a matriz A é dita inversível (ou invertível) se existe uma matriz B (quadrada de ordem n), tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Onde I_n representa a matriz identidade de ordem n.

Neste caso, B é dita *inversa* de A e é indicada por A^{-1}.

Exemplo 3.3.8. A inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

e

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Para verificar se uma matriz quadrada é inversível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa, utilizamos um processo baseado na definição de matriz inversa e na resolução de sistemas. Vejamos um exemplo no caso da matriz 2×2.

Exemplo 3.3.9. Determine, caso exista, a inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Solução:

Devemos verificar se existe

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que

$$A \cdot A^{-1} = I_2$$

Temos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 5a+4c & 5b+4d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Da definição de igualdade de matrizes seguem os sistemas:

$$\begin{cases} 3a+2c = 1 \\ 5a+4c = 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$a = 2 \text{ e } c = -\frac{5}{2}$$

e

$$\begin{cases} 3b+2d = 0 \\ 5b+4d = 1 \end{cases}$$

cuja solução é

$$b = -1 \text{ e } d = \frac{3}{2}.$$

Assim,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Um caso de matriz não invertível, é dado pelo seguinte a seguir.

Exemplo 3.3.10. Determine, caso exista, a inversa de $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solução:

Devemos verificar se existe

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que

$$X \cdot X^{-1} = I_2.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} 4a+2c & 4b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 4a+2c & = & 1 \\ 2a+c & = & 0 \end{array} \right. \;(1)\; \text{e} \left\{ \begin{array}{lcl} 3b+2d & = & 0 \\ 5b+4d & = & 1 \end{array} \right. \;(2)$$

Resolvendo o sistema (1):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 4a+2c & = & 1 \\ 2a+c & = & 0 \;(\times 2) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 4a+2c & = & 1 \\ 4a+2c & = & 0 \end{array} \right.$$

É fácil ver que o sistema acima não admite soluções, pois não existem a e c reais tais que $0 \cdot a \; + \; 0 \cdot c = 1$. Desse modo, já podemos concluir que não existe a inversa de X.

O processo apresentado nesses exemplos pode ser aplicado a matrizes quadradas de ordem n, $n \geq 2$. No entanto, para $n \geq 3$ o processo, em geral, é trabalhoso.

Definição 3.3.6. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se *transposta de A* (indica-se por A^t) a matriz:

$$A^t = \left(a'_{ij}\right)_{n \times m}$$

tal que $a'_{ij} = a_{ij}$ para todo i e todo j.

Em outras palavras, a matriz A^t é obtida a partir de A trocando-se, ordenadamente, suas linhas pelas colunas.

Exemplo 3.3.11. A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ é $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

Exemplo 3.3.12. A transposta da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Proposição 3.3.5. As matrizes transpostas gozam das seguintes propriedades:

I - Dada uma matriz A de ordem $n \times m$, então $(A^t)^t = A$.

II - Dadas duas matrizes A e B, ambas de ordem $n \times m$, então $(A+B)^t = A^t + B^t$.

III - Dado $k \in \mathbb{R}$ e uma matriz A de ordem $n \times m$, então $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

IV - Dadas as matrizes A de ordem $n \times m$ e B de ordem $m \times r$, então $(AB)^t = B^t A^t$.

Demonstração. Para o item $[I]$, temos que

$$\begin{aligned} & A & = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \\ \Longleftrightarrow & A^t & = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n} \\ \Longleftrightarrow & (A^t)^t & = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \\ = & A & & \end{aligned}.$$

Para o item $[II]$, temos que

$$
\begin{aligned}
X_{n\times m} + Y_{n\times m} &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \\
\Longleftrightarrow \qquad (X+Y)^t &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{n2}+b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}+b_{1m} & a_{2m}+b_{2m} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n} \\
&= X^t + Y^t
\end{aligned}
$$

Quanto ao item $[III]$, temos que

$$
\begin{aligned}
k\cdot A \quad &= \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \cdots & k\cdot a_{1m} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\cdot a_{n1} & k\cdot a_{n2} & \cdots & k\cdot a_{nm} \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \quad d\,(k\cdot A)^t &= \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{21} & \cdots & k\cdot a_{n1} \\ k\cdot a_{12} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\cdot a_{1m} & k\cdot a_{2m} & \cdots & k\cdot a_{nm} \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \quad k\cdot X^t &
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1} & \cdots & a_{11}b_{1r} + a_{12}b_{2r} + \cdots + a_{1m}b_{mr} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2m}b_{m1} & \cdots & a_{21}b_{1r} + a_{22}b_{2r} + \cdots + a_{2m}b_{mr} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nm}b_{m1} & \cdots & a_{n1}b_{1r} + a_{n2}b_{2r} + \cdots + a_{nm}b_{mr} \end{pmatrix}
\end{aligned}.
$$

Então

$$
\begin{aligned}
(AB)^t &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1} & \cdots & a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nm}b_{m1} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1m}b_{m2} & \cdots & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{nm}b_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11}b_{1r} + a_{12}b_{2r} + \cdots + a_{1m}b_{mr} & \cdots & a_{n1}b_{1r} + a_{n2}b_{2r} + \cdots + a_{nm}b_{mr} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} + \cdots + b_{m1}a_{1m} & \cdots & b_{11}a_{n1} + b_{21}a_{n2} + \cdots + b_{m1}a_{nm} \\ b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} + \cdots + b_{m2}a_{1m} & \cdots & b_{12}a_{n1} + b_{22}a_{n2} + \cdots + b_{m2}a_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1r}a_{11} + b_{2r}a_{12} + \cdots + b_{mr}a_{1m} & \cdots & b_{1r}a_{n1} + b_{2r}a_{n2} + \cdots + b_{mr}a_{nm} \end{pmatrix}. \\
&= B^tA^t
\end{aligned}
$$

□

Definição 3.3.7. Uma matriz quadrada A de ordem n é dita simétrica se

$$A = A^t$$

Exemplo 3.3.13. Dada a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, temos que $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, então B é uma matriz simétrica.

Proposição 3.3.6. A matriz identidade, de qualquer ordem, é simétrica.

Demonstração. Seja I_n a matriz identidade de ordem n, assim:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \iff I_n^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

□

Proposição 3.3.7. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então:

I - Se A é simétrica, então para qualquer escalar k, a matriz $k \cdot A$ também é simétrica.

II - A *matriz nula*, de qualquer ordem, é simétrica.

III - A *matriz identidade*, de qualquer ordem, é simétrica.

Demonstração. Provaremos apenas o item [I]. Seja $k \in \mathbb{R}$ e

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

uma matriz quadrada de ordem n tal que

$$A = A^t.$$

Por igualdade de matrizes, temos que

$$a_{ij} = a_{ji},\ \forall\ i, j = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Assim

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & \cdots & k \cdot a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \cdots & k \cdot a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{1n} & \cdots & k \cdot a_{nn} \end{pmatrix} = k \cdot A^t$$

Portanto $k \cdot A$ é uma matriz simétrica.

□

Definição 3.3.8. Uma matriz quadrada A de ordem n é dita antissimétrica se

$$A = -A^t.$$

Equivalentemente, os termos a_{ij}, satisfazem

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

Disso decorre que os termos da diagonal principal obrigatoriamente devem ser nulos.

Exemplo 3.3.14. Seja a matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -7 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, temos que $B^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Assim, $B = -B^t$ o que implica que B é antissimétrica.

Definição 3.3.9. Uma matriz quadrada A de ordem n é dita ortogonal se A é inversível e

$$A^{-1} = A^t.$$

Em outras palavras, A é ortogonal se

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

Proposição 3.3.8. A inversa de uma matriz ortogonal também é ortogonal.

Demonstração. Se A é ortogonal, então $A^{-1} = A^t$, assim

$$A^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^t = A^t \cdot \left(A^t\right)^t = A^t \cdot A = I$$

e

$$\left(A^{-1}\right)^t \cdot A^{-1} = \left(A^t\right)^t \cdot A^t = A \cdot A^t = I.$$

Donde,

$$A^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^t = \left(A^{-1}\right)^t \cdot A^{-1} = I$$

□

Proposição 3.3.9. O produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

Demonstração. Seja **A** e **B** duas matrizes ortogonais de ordem n. Como A e B são invertíveis, então já vimos que AB também é invertível e que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Daí

$$AB\,(AB)^{-1} = AB\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

e

$$(AB)^{-1}\,AB = \left(B^{-1}A^{-1}\right)AB = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

□

Exemplo 3.3.15. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Além disso

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A^t \cdot A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

Exemplo 3.3.16. A matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois A é simétrica e

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad . \\ &= I \end{aligned}$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$$

Exemplo 3.3.17. A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois A é simétrica e

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad . \\ &= I \end{aligned}$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

Denotaremos o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$, com elementos reais em um conjunto da seguinte maneira.

$$M_{m \times n} = \{A = (a_{ij})_{m \times n} : \quad a_{ij} \quad \in \quad \mathbb{R}\}.$$

Assim, o conjunto das matrizes ortogonais é um subconjunto de $M_{n \times n}$ dado por:

$$O_2 = \left\{ A \in M\,(n,n)\,; A \cdot A^t = I \right\}.$$

Capítulo 4

A Circunferência Como Produto de Matrizes

Seja um plano π com um sistema de eixos ortogonais OXY, podemos representar o plano π da seguinte maneira:

$$\pi = \{(x, y) : \quad x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, para cada ponto $P = (x, y) \in \pi$ será representado por uma matriz coluna, isto é

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como a circunferência $\mathbb{S}^1_r$ é um subconjunto do plano π, então naturalmente representaremos cada ponto P da circunferência $\mathbb{S}^1_r$ por uma matriz coluna, ou seja,

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

tal que $x^2 + y^2 = r^2$.

Inicialmente apresentaremos algumas definições que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. A primeira delas é a definição de igualdade entre conjuntos.

Definição 1. *Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais e denotamos por $A = B$, quando simultaneamente tivermos $A \subset B$ e $B \subset A$.*

Outra definição que utilizaremos, é a de produto de dois conjuntos.

Definição 2. *Sejam A e B dois conjuntos, definimos o produto de A por B e denotamos por AB, como sendo o conjunto formado pelo produto dos elementos do conjunto A com os elementos do conjunto B. Ou seja,*

$$AB = \{ab : \quad a \in A \quad e \quad b \in B\}.$$

A partir de agora nos concentraremos em mostrar que toda circunferência de centro na origem e raio $r > 0$ é o produto do conjunto das matrizes ortogonais com o ponto

$P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\mathbb{S}^1_r = O_{(2)} P_0.$$

Em particular, a circunferência de centro na origem e raio 1 é dada por

$$\mathbb{S}^1 = O_{(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

No resultado a seguir mostraremos que o produto do conjunto $O_{(2)}$ com um ponto específico da circunferência de centro na origem e raio $r > 0$ é um subconjunto desta circunferência.

Proposição 4.0.1. Sejam os conjuntos

$$O_{(2)} = \left\{ A \ : \ A \cdot A^t = I_2 \right\}$$

e

$$\mathbb{S}^1_r \ = \ \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \ \in \ \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \ + \ y^2 \ = \ r^2 \right\}.$$

Se $P_0 \in \mathbb{S}^1_r$, então $O_{(2)} P_0 \subset \mathbb{S}^1_r$.

Demonstração. De fato, dada uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ \in \ O_{(2)}$$

e um ponto

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \ \in \ \mathbb{S}^1_r.$$

Temos que

$$A \cdot P_0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_0 + by_0 \\ cx_0 + dy_0 \end{bmatrix},$$

daí

$$\begin{aligned} (ax_0 + by_0)^2 \ + \ (cx_0 + dy_0)^2 \ &= \ a^2x_0^2 \ + \ c^2x_0^2 \ + \ b^2y_0^2 \ + \ d^2y_0^2 \ + \ 2x_0y_0ab \ + \ 2x_0y_0cd \\ &= \ x_0^2\left(a^2 \ + \ c^2\right) \ + \ y_0^2\left(b^2 \ + \ d^2\right) \ + \ 2x_0y_0\left(ab \ + cd\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

Por hipótese, temos que

$$A^t \cdot A \ = \ I_2,$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos

$$\begin{aligned} x_0^2 \cdot 1 + y_0^2 \cdot 1 + 2x_0y_0 \cdot 0 = \\ = x_0^2 + y_0^2. \end{aligned}$$

Temos ainda por hipótese que

$$P_0 \in \mathbb{S}_r^1 \Longleftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = r^2.$$

Portanto,

$$(ax_0 + by_0)^2 + (cx_0 + dy_0)^2 = r^2.$$

Assim, segue que

$$A \cdot P_0 \subset \mathbb{S}_r^1$$

□

O resultado a seguir, mostra que qualquer circunferência de centro na origem e raio $r > 0$ é um subconjunto do produto de $O_{(2)}$ com um ponto da circunferência.

Proposição 4.0.2. Sejam os conjuntos

$$O_{(2)} = \{A \ : \ A \cdot A^t = I_2\}$$

e

$$\mathbb{S}_r^1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = r^2 \right\}.$$

Se

$$P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix},$$

então $\mathbb{S}_r^1 \subset O_{(2)}P_0$ para todo $r > 0$.

Demonstração. Dado um ponto $P \in \mathbb{S}^1_r$, mostraremos que existe uma matriz $A \in O_{(2)}$ tal que

$$A \cdot P_0 \;=\; P.$$

Dividiremos a prova em dois casos:

Caso I. Suponhamos que o ponto P seja dado por

$$P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix},$$

para uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Longleftrightarrow \; & \begin{bmatrix} ar \\ br \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Longleftrightarrow \; & \begin{cases} ar = r \\ br = 0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow \; & \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

A última passagem se justifica pelo fato que $r \neq 0$. Dessa forma, fazendo

$$A = I$$

todas as condições serão satisfeitas, pois, de fato $A \in O_{(2)}, P_0$ e $P \in \mathbb{S}^1_r$ e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Caso II. Suponhamos que

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e seja $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, temos que

$$
\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
\iff & \begin{bmatrix} ar \\ br \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
\iff & \begin{cases} a & = & \dfrac{x}{r} \\ \\ b & = & \dfrac{y}{r} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Como $A \in O_{(2)}$, então

$$
\begin{aligned}
A \cdot A^t = I_2 \iff & \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & c \\ \\ \dfrac{y}{r} & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\iff & \begin{bmatrix} \dfrac{x^2}{r^2} + c^2 & \dfrac{xy}{r^2} + cd \\ \\ \dfrac{xy}{r^2} + cd & \dfrac{y^2}{r^2} + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
.
$$

Segue, por igualdade de matrizes, que

$$
\begin{aligned}
& \frac{x^2}{r^2} + c^2 = 1 \iff c^2 = 1 - \frac{x^2}{r^2} \iff c = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \\
\iff & c = \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2}} \iff c = \pm\sqrt{\frac{y^2}{r^2}} \iff c = \pm\frac{y}{r}
\end{aligned}
.
$$

Substituindo o caso,

$$c = \frac{y}{r}$$

em

$$\frac{xy}{r^2} = -cd.$$

Obtemos que

$$\frac{xy}{r^2} = -\frac{y}{r}d \iff d = -\frac{x}{r}. \ ,$$

Desta forma,

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ & \\ \dfrac{y}{r} & -\dfrac{x}{r} \end{bmatrix}$$

e daí,

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ & \\ \dfrac{y}{r} & -\dfrac{x}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ & \\ \dfrac{y}{r} & -\dfrac{x}{r} \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como A é simétrica, então

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$$

daí, todas as condições são satisfeitas, pois $A \in O_{(2)}, P_0$ e $P \in \mathcal{S}_r^1$ e

$$\begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ & \\ \dfrac{y}{r} & -\dfrac{x}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix}.$$

O caso,

$$c = -\frac{y}{r}$$

em

$$\frac{xy}{r^2} = -cd.$$

Obtemos que

$$\frac{xy}{r^2} = -\left(-\frac{y}{r}d\right) \iff d = \frac{x}{r}. \ ,$$

Desta forma,

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & -\dfrac{y}{r} \\ \\ \dfrac{y}{r} & \dfrac{x}{r} \end{bmatrix}$$

e daí,

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & -\dfrac{y}{r} \\ \\ \dfrac{y}{r} & \dfrac{x}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ \\ -\dfrac{y}{r} & \dfrac{x}{r} \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como A é simétrica, então

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$$

daí, todas as condições são satisfeitas, pois $A \in O_{(2)}, P_0$ e $P \in \mathcal{S}_r^1$ e

$$\begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & -\dfrac{y}{r} \\ \\ \dfrac{y}{r} & \dfrac{x}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix}.$$

□

Note que no caso em que

$$P_0 = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \end{bmatrix}, \; P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix},$$

para todo $r > 0$ a construção é análoga a obtida na Proposição 4.0.2.

No resultado a seguir, mostraremos que o produto do conjunto $O_{(2)}$ com um ponto qualquer da circunferência de centro na origem e raio $r > 0$ é um subconjunto desta circunferência.

Proposição 4.0.3. Sejam os conjuntos

$$O_{(2)} = \left\{A \;:\; A \cdot A^t = I_2\right\}$$

e

$$\mathbb{S}_r^1 \;=\; \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 \;+\; y^2 \;=\; r^2 \right\}.$$

Se $P_0 \in \mathbb{S}^1_r$ é um ponto qualquer então $O_{(2)}P_0 \subset \mathbb{S}^1_r$ para todo $r > 0$.

Demonstração. Se o ponto P_0 é da forma

$$P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix},$$

então pela Proposição 4.0.2, obtemos o desejado.

Suponhamos que $P_0 \in \mathbb{S}^1_r$ seja diferente dos casos estudados anteriormente, isto é,

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

com $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$. Dada uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in O_{(2)}$$

e $P \in \mathbb{S}^1_r$, temos que

$$\begin{aligned}
A^t \cdot P_0 = P \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} ax_0 + cy_0 \\ bx_0 + dy_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax_0 + cy_0 = x \\ bx_0 + dy_0 = y \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{x - cy_0}{x_0} & (1) \\[2ex] b = \dfrac{y - dy_0}{x_0} & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Por hipótese, temos que

$$A^t \cdot A = I.$$

Então

$$\begin{bmatrix} \dfrac{x - cy_0}{x_0} & c \\[2ex] \dfrac{y - dy_0}{x_0} & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{x - cy_0}{x_0} & \dfrac{y - dy_0}{x_0} \\[2ex] c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \dfrac{(x-cy_0)^2}{x_0^2}+c^2 \quad ^{(3)} & \left(\dfrac{x-cy_0}{x_0}\right)\left(\dfrac{y-dy_0}{x_0}\right)+cd \quad ^{(4)} \\ \left(\dfrac{y-dy_0}{x_0}\right)\left(\dfrac{x-cy_0}{x_0}\right)+cd \quad ^{(5)} & \dfrac{(y-dy_0)^2}{x_0^2}+d^2 \quad ^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De (3), temos que

$$\begin{aligned} & \frac{(x-cy_0)^2}{x_0^2}+c^2=1 \\ \iff\ & (x-cy_0)^2 = x_0^2\left(1-c^2\right) \\ \iff\ & x^2-2xcy_0+c^2y_0^2=x_0^2-x_0^2c^2 \\ \iff\ & x^2-2xcy_0+c^2y_0^2-x_0^2+x_0^2c^2=0 \\ \iff\ & c^2\left(y_0^2+x_0^2\right)-c\left(2xy_0\right)+x^2-x_0^2=0 \\ \iff\ & c^2r^2-c\left(2xy_0\right)+x^2-x_0^2=0 \end{aligned}.$$

Resolvendo a equação de 2ª grau em c, obtemos que

$$\begin{aligned} & c = \frac{2xy_0 \pm \sqrt{4x^2y_0^2-4r^2\left(x^2-x_0^2\right)}}{2r^2} \\ \iff\ & c = \frac{2xy_0 \pm 2\sqrt{x^2y_0^2-r^2\left(x^2-x_0^2\right)}}{2r^2} \\ \iff\ & c = \frac{xy_0 \pm \sqrt{-x^2x_0^2+r^2x_0^2}}{r^2} \\ \iff\ & c = \frac{xy_0 \pm \sqrt{x_0^2\left(r^2-x^2\right)}}{r^2} \\ \iff\ & c = \frac{xy_0 \pm \sqrt{x_0^2y^2}}{r^2} \\ \iff\ & c = \frac{xy_0 \pm x_0y}{r^2} \quad ^{(7)} \end{aligned}.$$

Considere o caso $c=\dfrac{xy_0+x_0y}{r^2}$. Por (1), temos

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{x-\left(\dfrac{xy_0+x_0y}{r^2}\right)y_0}{x_0} \\
\iff a &= \frac{x-\left(\dfrac{xy_0^2+x_0yy_0}{r^2}\right)}{x_0} \\
\iff a &= \frac{xr^2-xy_0^2-x_0y_0y}{x_0r^2} \qquad . \\
\iff a &= \frac{x\left(r^2-y_0^2\right)-x_0yy_0}{x_0r^2} \\
\iff a &= \frac{xx_0^2-x_0yy_0}{x_0r^2} \\
\iff a &= \frac{xx_0-yy_0}{r^2}.
\end{aligned}
$$

Agora em (4), temos que

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{x-cy_0}{x_0}\right)\left(\frac{y-dy_0}{x_0}\right)+cd=0 \\
\iff & \left(xy-dxy_0-cyy_0+cdy_0^2\right)=-cdx_0^2 \\
\iff & xy-dxy_0-cyy_0+cd\left(x_0^2+y_0^2\right)=0 \\
\iff & xy-dxy_0-cyy_0+cdr^2=0 \\
\iff & d\left(cr^2-xy_0\right)=cyy_0-xy \\
\iff & d=\frac{cyy_0-xy}{cr^2-xy_0}.
\end{aligned}
$$

Por (7)

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{\left(\dfrac{xy_0 + x_0y}{r^2}\right) yy_0 - xy}{\left(\dfrac{xy_0 + x_0y}{r^2}\right) r^2 - xy_0} \\
\iff d &= \frac{\dfrac{xy_0^2y + x_0y^2y_0}{r^2} - xy}{x_0y} \\
\iff d &= \frac{xy_0^2y + x_0y^2y_0 - xyr^2}{x_0yr^2} \\
\iff d &= \frac{-xy\left(r^2 - y_0^2\right) + x_0y^2y_0}{x_0yr^2} \\
\iff d &= \frac{-xyx_0^2 + x_0y^2y_0}{x_0yr^2} \\
\iff d &= \frac{x_0y\left(-xx_0 + yy_0\right)}{x_0yr^2} \\
\iff d &= \frac{-xx_0 + yy_0}{r^2}^{(VI)}
\end{aligned}
$$

Substituindo em (2), temos

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{y - \left(\dfrac{-xx_0 + yy_0}{r^2}\right) y_0}{x_0} \\
\iff b &= \frac{yr^2 + xx_0y_0 - yy_0^2}{x_0r^2} \\
\iff b &= \frac{y\left(r^2 - y_0^2\right) + xx_0y_0}{x_0r^2} \\
\iff b &= \frac{x_0^2y + xx_0y_0}{x_0r^2} \\
\iff b &= \frac{x_0y + xy_0}{r^2}
\end{aligned}
$$

Assim

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{xx_0 - yy_0}{r^2} & \dfrac{yx_0 + xy_0}{r^2} \\ \\ \dfrac{xy_0 + x_0y}{r^2} & \dfrac{-xx_0 + yy_0}{r^2} \end{bmatrix}.$$

Note que

$$A^t \cdot A \;=\; \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{(xx_0 - yy_0)^2}{r^4} + \frac{(xy_0 + x_0y)^2}{r^4} \\
&= \frac{x^2x_0^2 - 2xx_0yy_0 + y^2y_0^2 + x^2y_0^2 + 2xx_0yy_0 + x_0^2y^2}{r^4} \\
&= \frac{x^2\left(x_0^2 + y_0^2\right) + y^2\left(x_0^2 + y_0^2\right)}{r^4} \\
&= \frac{\left(x_0^2 + y_0^2\right)\left(x^2 + y^2\right)}{r^4} \\
&= \frac{r^2 \cdot r^2}{r^4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{12} &= \frac{(xx_0 - yy_0)}{r^2}\frac{(x_0y + xy_0)}{r^2} + \frac{(-xx_0 + yy_0)}{r^2}\frac{(xy_0 + x_0y)}{r^2} \\
&= \frac{(xx_0 - yy_0)(x_0y + xy_0) - (xx_0 - yy_0)(xy_0 + x_0y)}{r^4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{21} &= \frac{(x_0y + xy_0)}{r^2}\frac{(xx_0 - yy_0)}{r^2} + \frac{(-xx_0 + yy_0)}{r^2}\frac{(xy_0 + x_0y)}{r^2} \\
&= \frac{(x_0y + xy_0)(xx_0 - yy_0) - (xy_0 + x_0y)(xx_0 - yy_0)}{r^4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_{22} &= \frac{(x_0 y + x y_0)^2}{r^4} + \frac{(-x x_0 + y y_0)^2}{r^4} \\
&= \frac{x_0^2 y^2 + 2 x x_0 y y_0 + x^2 y_0^2 + x^2 x_0^2 - 2 x x_0 y y_0 + y^2 y_0^2}{r^4} \\
&= \frac{x_0^2 \left(y^2 + x^2\right) + y_0^2 \left(x^2 + y^2\right)}{r^4} && . \\
&= \frac{\left(x^2 + y^2\right)\left(x_0^2 + y_0^2\right)}{r^4} \\
&= \frac{r^2 \cdot r^2}{r^2} && = \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Note ainda, que a matriz A é simétrica, logo

$$
A^t \cdot A = A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Por fim, temos que

$$
\begin{aligned}
A^t \cdot P_0 &= \begin{bmatrix} \dfrac{x x_0 - y y_0}{r^2} & \dfrac{x y_0 + x_0 y}{r^2} \\[2ex] \dfrac{x_0 y + x y_0}{r^2} & \dfrac{-x x_0 + y y_0}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{(x x_0 - y y_0)\, x_0}{r^2} + \dfrac{(x y_0 + x_0 y)\, y_0}{r^2} \\[2ex] \dfrac{(x_0 y + x y_0)\, x_0}{r^2} + \dfrac{(-x x_0 + y y_0)\, y_0}{r^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{x x_0^2 - x_0 y y_0 + x y_0^2 + x_0 y y_0}{r^2} \\[2ex] \dfrac{x_0^2 y + x x_0 y_0 - x x_0 y_0 + y y_0^2}{r^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \dfrac{x\left(x_0^2+y_0^2\right)}{r^2} \\ \\ \dfrac{y\left(x_0^2+y_0^2\right)}{r^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{xr^2}{r^2} \\ \\ \dfrac{yr^2}{r^2} \end{bmatrix} \qquad . \\
&= \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix} \\
&= P
\end{aligned}
$$

Assim, todas as condições são satisfeitas, pois $A \in O_{(2)}, P_0$ e $P \in \mathcal{S}_r^1$ e

$$
\begin{bmatrix} \dfrac{xx_0 - yy_0}{r^2} & \dfrac{yx_0 + xy_0}{r^2} \\ \\ \dfrac{xy_0 + x_0y}{r^2} & \dfrac{-xx_0 + yy_0}{r^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix}.
$$

Portanto,

$$
A^t \cdot P_0 \subset \mathbb{S}_r^1.
$$

Para o caso $c = \dfrac{xy_0 - x_0y}{r^2}$, procedendo de maneira análoga, obtemos a matriz

$$
A = \begin{bmatrix} \dfrac{xx_0 + yy_0}{r^2} & \dfrac{yx_0 - xy_0}{r^2} \\ \\ \dfrac{xy_0 - x_0y}{r^2} & \dfrac{xx_0 + yy_0}{r^2} \end{bmatrix}.
$$

Note que, a matriz A é simétrica, e que

$$
A^t \cdot P_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{xx_0 + yy_0}{r^2} & \dfrac{xy_0 - x_0y}{r^2} \\ \dfrac{yx_0 - xy_0}{r^2} & \dfrac{xx_0 + yy_0}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P
$$

Assim, todas as condições são satisfeitas, pois $A \in O_{(2)}, P_0$ e $P \in \mathcal{S}_r^1$.

$\square$

Finalmente, mostraremos que o produto do conjunto $O_{(2)}$ com um ponto qualquer da circunferência de centro na origem e raio $r > 0$ é a própria circunferência.

Teorema 1. *Sejam os conjuntos*

$$O_{(2)} = \left\{A \ : \ A \cdot A^t = I_2\right\}$$

e

$$\mathbb{S}_r^1 \ = \ \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \ \in \ \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \ + \ y^2 \ = \ r^2 \right\}.$$

Se $P_0 \in \mathbb{S}_r^1$ *é um ponto qualquer, então* $\mathbb{S}_r^1 = O_{(2)}P_0$ *para todo* $r > 0$

Demonstração. Pela Proposição 4.0.1 temos que

$$\mathbb{S}_r^1 \subset O_{(2)} \cdot P_0$$

Pelas Proposições 4.0.2 e 4.0.3, temos que

$$O_{(2)} \cdot P_0 \subset \mathbb{S}_r^1.$$

Logo, pela definição 1, segue que

$$\mathbb{S}_r^1 = O_{(2)}P_0.$$

para todo $r > 0$.

$\square$

Assim, podemos concluir o seguinte: Dado $P_0 \in \mathbb{S}_r^1$, $r > 0$ e $P_0 \ = \ \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_r^1 \ &= \ \left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{xx_0 - yy_0}{r^2} & \dfrac{yx_0 + xy_0}{r^2} \\ \dfrac{xy_0 + x_0y}{r^2} & \dfrac{-xx_0 + yy_0}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \ : \right. \\ & \begin{bmatrix} \dfrac{xx_0 - yy_0}{r^2} & \dfrac{yx_0 + xy_0}{r^2} \\ \dfrac{xy_0 + x_0y}{r^2} & \dfrac{-xx_0 + yy_0}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{xx_0 - yy_0}{r^2} & \dfrac{yx_0 + xy_0}{r^2} \\ \dfrac{xy_0 + x_0y}{r^2} & \dfrac{-xx_0 + yy_0}{r^2} \end{bmatrix} \\ &= \left. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Em particular

$$\mathbb{S}^1_r = \left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ \\ \dfrac{y}{r} & \dfrac{-x}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ \\ \dfrac{y}{r} & \dfrac{-x}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ \\ \dfrac{y}{r} & \dfrac{-x}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Equivalentemente

$$\mathbb{S}^1_r = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Capítulo 5

Aplicações

Nesse capítulo faremos aplicações da construção obtida.

5.0.1 Ponto interno e externo

Definiremos ponto interno e externo à circunferência de centro na origem como produto de matrizes, mostrando que estas definições coincidem com as definições clássicas.

Dado um ponto $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, isto é, um ponto P no plano π, pela Proposição 1.1.1 temos que

$$d(O, P) = \sqrt{a^2 + b^2} = r \geq 0$$

Isto é,

$$P \in \mathbb{S}_r^1.$$

Assim, pelo Teorema 1, existe $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in O_{(2)}$ e $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_r^1$ tal que

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

De maneira conveniente, façamos $A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix}$ e $P_0 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, assim

$$P = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fixamos $r > 0$, seja a circunferência

$$\mathbb{S}_r^1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Dados os pontos arbitrários, $P_0,\ P_1 \in \pi$, temos que

$$P_0 = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_1 = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dizemos que P_0 é interior a $\mathbb{S}^1_r$ se $r_0 < r$. Por sua vez, dizemos que P_1 é exterior a $\mathbb{S}^1_r$ se $r < r_1$

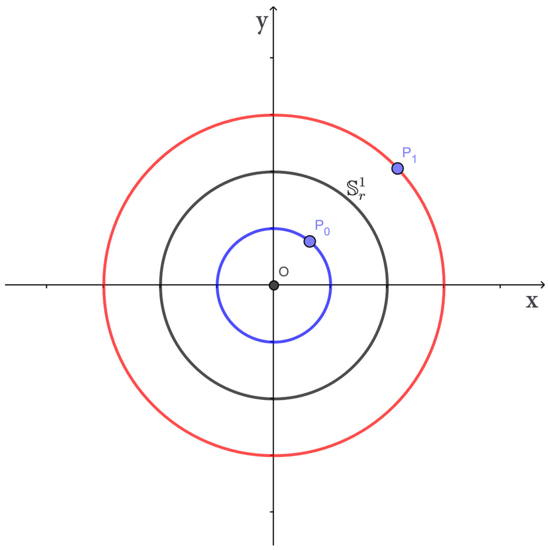

Figura 5.1: Ponto Interno e Externo

Exemplo 5.0.1. Em relação a circunferência de centro na origem que passa por $P = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$, classifique os pontos $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{15}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -\frac{4\sqrt{15}}{17} & \frac{7}{17} \\ \frac{7}{17} & \frac{4\sqrt{15}}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix}$ como interno, externo ou pertencente a circunferência.

Solução:

Dado o ponto $P = (8,\ 15)$, pela Proposição 1.1.1, temos que

$$d\,(O,\ P) = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 220} = \sqrt{289} = 17 = r \geq 0$$

Assim, pelo Teorema 1, para $P = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17x \\ 17y \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{17} \\ y = \frac{15}{17} \end{cases},$$

onde

$$\begin{bmatrix} \dfrac{8}{17} & \dfrac{15}{17} \\ \dfrac{15}{17} & -\dfrac{8}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{8}{17} & \dfrac{15}{17} \\ \dfrac{15}{17} & -\dfrac{8}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$P \in \mathbb{S}_r^1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Então

$$\begin{cases} \text{A é interno, pois } 13 < 17 \\ \text{B pertence, pois } 17 = 17 \\ \text{C é externo, pois} 17 < 25 \end{cases}$$

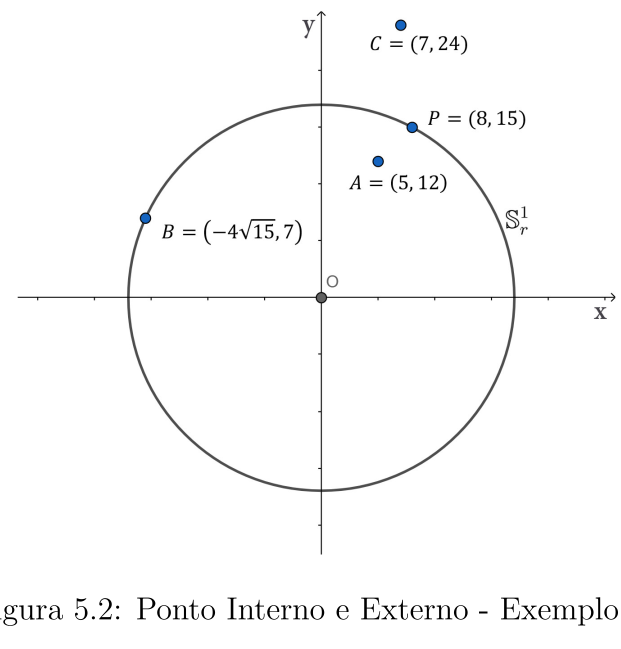

Figura 5.2: Ponto Interno e Externo - Exemplo 5.1

5.0.2 Matemática financeira

Agora, utilizaremos o resultado obtido para circunferências com centro na origem, para resolver problemas de matemática financeira.

Sejam as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\begin{cases} f(t_1) = ct_1 + it_2, \text{ "}t_2 \text{ é fixo"} \\ g(t_2) = ct_1 - it_2, \text{ "}t_1 \text{ é fixo"}, \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} c &= \text{capital} \\ i &= \text{taxa de juros} \\ t_1,\ t_2 &= \text{tempo} \end{aligned}$$

Suponhamos que c e i sejam fixos tais que

$$\begin{bmatrix} c & i \\ i & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & i \\ i & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix},$$

Onde $r^2 = t_1^2 - t_2^2$. Calcule $f^2(t_1) + f^2(t_2)$.

Note que

$$\begin{cases} f(t_1) = ct_1 + it_2 \\ g(t_2) = ct_1 - it_2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} f(t_1) \\ g(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & i \\ c & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Como $t_1^2 + t_2^2 = r^2$, e sendo $A = \begin{bmatrix} c & i \\ c & -i \end{bmatrix}$, obtemos

$$A \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ g(t_2) \end{bmatrix},$$

donde

$$f(t_1)^2 + g(t_2)^2 = r^2.$$

É bem mais simples que resolver o sistema.

O exemplo a seguir, mostra que para obter informações completa de um problema, basta termos conhecimento do problema em um dado conjunto.

Exemplo 5.0.2. Duas instituições financeiras A e B têm rendimentos dados pelas funções rendimentos $f,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $f\,(t) = ct + Ls$ e g$(s) = ct - Ls$. Sendo que c é a constante de proporcionalidade do capital investido K, L é constante de proporcionalidade da taxa de juros de mercado, $0,4\%$ ao dia. Note que L é fixo. Determine a proporção do capital c e a proporção da taxa de juros L sabendo que $c^2 + L^2 = r^2 \ \ \forall\ \ t^2 + s^2 = r^2$

Solução:

Dada as funções

$$\begin{cases} f\,(t) &= & ct + Ls \\ g\,(s) &= & ct - Ls \end{cases}, \quad c^2 + L^2 = r^2 \quad \text{e} \quad t^2 + s^2 = r^2,$$

pelo Teorema 1, temos que

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & L \\ c & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}$$

assim

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = A \cdot P \ \in \ \mathbb{S}^1_r.$$

Logo

$$f^2 + s^2 = r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (ct + Ls)^2 + (ct - Ls)^2 = r^2 \ .$$

Note que

$$\begin{cases} t &= & 0 \\ s &= & r \end{cases} \ \in \ \mathbb{S}^1_r,$$

Então

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (c \cdot 0 + Lr)^2 + (c \cdot 0 - Lr)^2 & = & r^2 \\
\Longleftrightarrow & (Lr)^2 + (-Lr)^2 & = & r^2 \\
\Longleftrightarrow & 2L^2r^2 & = & r^2 \\
\Longleftrightarrow & L & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2}.
\end{array}
$$

Assim, a proporção da taxa de juros, será

$$L \cdot 0,04 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,04 = 0,02\sqrt{2}.$$

Por outro lado, note que também

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t & = & r \\ s & = & 0 \end{array} \right. \in \mathbb{S}^1_r.$$

Então

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (cr + L \cdot 0)^2 + (cr - L \cdot 0)^2 & = & r^2 \\
\Longleftrightarrow & (cr)^2 + (cr)^2 & = & r^2 \\
\Longleftrightarrow & 2c^2r^2 & = & r^2 \\
\Longleftrightarrow & c & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2}.
\end{array}
$$

Então, a proporção do capital será

$$c \cdot K = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot K.$$

Capítulo 6

Considerações finais

A relação de ensino-aprendizagem não possui propriedades de proporcionalidade, visto que apenas uma parte de tudo que é ensinado é de fato aprendido pelos discentes. Assim, a busca por mecanismos que melhorem essa relação se tornou cada vez mais necessária.

Além disso, com o constante surgimento de tecnologias que ao tempo que promovem rapidez e encurtam distâncias, também transformam o saber em ilhas, onde dúvidas são sanadas pontualmente e o conhecimento é apresentado sem nenhuma relação de causa e consequência.

Assim, o grande desafio dos educadores, ao longo dos tempos, é encontrar meios que potencializem a relação de ensino-aprendizagem, desenvolvendo artifícios e buscando mecanismos que mudem não apenas a forma de ver o conteúdo, mas que desperte o interesse pela disciplina de maneira global.

Nesse sentido, a primeira parte desse trabalho apresenta os conceitos e propriedades de plano cartesiano, circunferência e matrizes sendo tais temas de forma usual, para no capítulo 4 alcançarmos o objetivo ao qual nos propomos.

Dessa forma, estetrabalho oferece uma união de conceitos matemáticos básicos, através de uma linguagem simples e acessível, que nos permite tratar conjuntos já conhecidos por um novo ponto de vista, e também aplicar os resultados obtidos em diferentes áreas da matemática, facilitando processos e demonstrações.

Referências Bibliográficas

[1] Boldrini, J. L., Costa, S. I. R. C., Figueiredo, V. L., and Wetzler, H. G. *Álgebra Linear*, 3th ed. Harbra, 1986.

[2] Boyer, C. B. *História da Matemática*, 3th ed. São Paulo, 2010.

[3] Callioli, C. A., Domingues, H. H., and Costa, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*, 6th ed. Atual Editora, 2011.

[4] Crespo, A. A. *Estatística Fácil*, 19th ed. Saraiva, 2009.

[5] Dante, L. R. *Didática da resolução de problemas de matemática*, 12th ed. Ática, 2002.

[6] Dante, L. R. *Matemática : Contexto e Aplicação*, 3th ed., vol. 3. Ática, 2016.

[7] Dante, L. R. *Matemática : Contexto e Aplicação*, 3th ed., vol. 2. Átiva, 2016.

[8] Davis, H. T. *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula.* Atual, 1992.

[9] Davis, P. J., and Hersch, R. *A experiência matemática*, 2th ed. Gradiva, 2012.

[10] Garcia, A., and Lequain, Y. *Elementos de Álgebra*, 5th ed. IMPA, 2008.

[11] Hazzan, S. *Cálculo: FUnções de uma e várias variáveis*, 2th ed. Saraiva, 2010.

[12] Hazzan, S., and Pompeu, J. N. *Métodos Quantitativos: Matemática Financeira*, 4th ed. Atual, 1996.

[13] Iezzi, G., Osvaldo Dolce, D. D., Périgo, R., and Almeida, N. *Matemática - Ciência e Aplicações*, 9th ed., vol. 2. Saraiva, 2016.

[14] Lima, E. L. *Áreas e Volumes.* SBM, 1979.

[15] Lima, E. L. *Álgebra Linear*, 8th ed. IMPA, 2011.

[16] Lima, E. L. *Variedades Diferenciáveis*, 1th ed. IMPA, 2011.

[17] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., and Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*, 7th ed., vol. 3. SBM, 2016.

[18] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., and Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*, 7th ed., vol. 2. SBM, 2016.

[19] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., and Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*, 11th ed., vol. 1. SBM, 2016.

[20] Morettin, P. A., and de Oliveira Bussab, W. *Estatística Básica*, 8th ed. Saraiva, 2013.

[21] Polya, G. *A arte de resolver problemas*. Interciência, 1995.

[22] Teixeira, R. C. *Álgebra Linear - Exercícios e Soluções*, 3th ed. IMPA, 2012.