Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

Cadeias de Markov no Estudo de Probabilidade no Ensino Médio.

Fernando Saraiva do Rego Junior

Teresina
2019

Fernando Saraiva do Rego Junior

Dissertação de Mestrado:

Cadeias de Markov no Estudo de Probabilidade no Ensino Médio.

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof°. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite.

Teresina
2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

R343c Rego Júnior, Fernando Saraiva do.
Cardeias de Markov no estudo de probabilidade no ensino médio / Fernando Saraiva da Rego Júnior. – Teresina, 2019.
53 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, 2019.
Orientador: Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

1. Probabilidade. 2. Processos Estocásticos. 3. Cadeia de Markov. I. Título.

CDD 519.2

Bibliotecária : Caryne Maria da Silva Gomes / CRB3-1461

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **Cadeias de Markov no Estudo de Probabilidade no Ensino Médio**, defendida por Fernando Saraiva do Rego Junior em 19 / 06 / 2019 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Jefferson Cruz dos Santos Leite
Presidente da Banca examinadora

Jurandir de Oliveira Lopes
Examinador Interno

Arnaldo Oliveira Souza Junior
Examinador interno

Edson da Silva Lira
Examinador externo

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças nos momentos mais difíceis, momentos esses onde várias vezes pensei em desistir, mas através das minhas orações e perseverança não deixaram que eu fraquejasse.

Aos meus pais, Fernando Saraiva do Rego (in Memorian) e Iracy Rio Lima do Rego, que mesmo com todas as dificuldades financeiras nunca deixaram de me incentivar nos estudos.

A minha querida esposa, Luana Sevia, por sempre ter me apoiado e acreditado em mim durante toda minha trajetória, mesmo nos momentos mais difíceis.

As minhas princesas Maria Fernanda e Isadora, que foram frutos desse mestrado e que serviram como um incentivo a mais para minha caminhada.

Aos meus irmãos, Erton, Marcia, Iramara, Claudia e Najara, que sempre torceram pelo meu sucesso.

Aos meus sobrinhos e afilhados, que sempre torceram pelo meu sucesso e que todos nunca deixem de acreditar nos estudos, pois estarei sempre cobrando.

Aos meus sogros, cunhados e cunhadas, por sempre depositar em mim confiança e respeito.

A todos (as), primos (as), tios (as), avós e avôs, que torceram por mim.

Aos meus amigos: Leonardo, Valter, Fabio, Fernando, Ronaldo e Jefferson que sempre estiveram presentes nos feriados e finais de semana pra me incentivar.

A todos os meus amigos IFMA, em especial: Jackellynne, Mackleia, Fabbio, Chaguinha, Edson por terem me incentivado e apoiado.

Aos meus amigos do Profmat: Andrelino, André, Jaqueline, Marina, Lucas, Raphaell, Irismar, Erivelton pelos ensinamentos e auxílios durante o curso.

A todos os professores do departamento de matemática da UFPI, em especial o professor Jefferson Leite por terem me dado a honra de ser orientado por ele e ter contribuído com a conclusão deste trabalho.

A todos os professores que se fizeram presentes nessa minha caminhada desde o ensino básico, pois só quem é professor sabe das dificuldades dessa profissão que é tão desvalorizada em nosso país, mas que ao mesmo tempo é gratificante pelos resultados que ela nos proporciona.

Resumo

Nesmmmmte trabalho abordamos inicialmente um resumo de probabilidade com um contexto histórico dos principais matemáticos que contribuíram com o desenvolvimento da teoria das probabilidades, conceitos, exemplos e aplicações no nosso cotidiano. No capitulo que trata sobre Processos Estocásticos foram apresentadas definições e exemplos com ênfase em cadeias de Markov. Apesar de ser um conteúdo pouco abordado, até mesmo no ensino superior em cursos de Licenciatura em Matemática, cadeias de Markov é um conteúdo com vastas aplicações no nosso cotidiano e que podemos levar para sala de aula para ser trabalhado junto com os conteúdos de Estatística e Probabilidade. Nosso trabalho ainda conta com aplicações em jogos de futebol através de tabelas e gráficos que facilitam o entendimento, aprendizado e análises dos resultados obtidos.

Palavras–chave: Probabilidade, Processos Estocásticos e Cadeia de Markov.

Abstract

In this work, we initially approached a probability summary with a historical context of the main mathematicians who contributed to the show of the theory of probabilities, concepts, examples and applications in our daily life. Definitions and examples with emphasis on Markov chains were made in the section dealing with Stochastic Processes. In spite of being a little addressed content, even in higher education in undergraduate courses in mathematics, Markov chains is content with vast applications in our daily life and that we can take to classroom to be worked together with the contents of Statistics and Probability. Our work also has applications in soccer games through tables and graphs that facilitate the understanding, learning and analysis of the results obtained.

Keywords: Probability, Stochastic Processes and Markov Chain.

Sumário

Introdução

Quem nunca sonhou em ganhar na loteria ou em um simples bingo? Quando pensamos em jogos sejam eles de azar ou não a primeira coisa que nos vem à cabeça é o fator sorte como principal motivo pra ser ou não sorteado. Na matemática não trabalhamos os jogos ou sorteios como fator sorte, mas como um ramo da matemática que estuda as chances de um determinado resultado ocorrer em função do seu espaço amostral. Esse ramo é conhecido como teoria das probabilidades.

Quando lançamos um dado sem que haja algum tipo de interferência externa, temos como resultados esperados os números: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Muitos apostadores por não terem o conhecimento matemático acreditam que o fator sorte pode interferi no resultado, entretanto a probabilidade de ocorrer qualquer um dos números a cima é a mesma.

Ser sorteado em um jogo da loteria federal é um sonho de muitos brasileiros, a grande maioria acredita que só ganha quem tem sorte. Se você está entre esses brasileiros que acreditam apenas no fator sorte, fique sabendo que todos os apostadores têm a mesma probabilidade de ganhar um prêmio na loteria, entretanto devemos ressaltar que essa probabilidade pode sofrer variações para mais ou para menos dependendo do número de bilhetes que cada jogador apostou, pois quanto maior o número de bilhetes maior será a chance de ganhar o prêmio.

É muito comum e presente na nossa sociedade acreditar no fator sorte quando se fala em jogos, entretanto nós matemáticos devemos sempre optar por um caminho que nos leve à construção lógica da verdade, que seja naturalmente sistematizável e traduzível para uma linguagem simbólica. Através do estudo das teorias das probabilidades é que iremos estabelecer todas as possibilidades de ser ou não sorteado em um determinado jogo.

O nosso trabalho consiste em um estudo que envolve teoria das probabilidades e cadeias de Markov. No primeiro capítulo iremos trabalhar definições e aplicações da teoria das probabilidades que são usadas no ensino médio, tais como: Probabilidade de ocorrer um evento, União de eventos, Probabilidade de Ocorrer eventos independentes e Probabilidade condicional. Nesse capítulo iremos também introduzir a ideia de processos

Estocásticos e algumas aplicações.

No segundo capítulo abordemos os conceitos e definições de cadeias de Markov. Mostramos um pouco do contexto histórico e os principais matemáticos que contribuíram para o estudo das cadeias de Markov. Abordaremos também as classificações e exemplos de cadeias de Markov através de matrizes e gráficos.

No terceiro capítulo traremos uma aplicação de cadeias de Markov envolvendo os jogos de futebol, mais especificamente algumas partidas de futebol da seleção brasileira durante a copa do mundo de 2002. Fizemos o uso de tabelas, gráficos e do programa Matlab para um melhor entendimento da aplicação.

1 Contexto histórico e definições sobre Probabilidades

Desde primórdios da nossa civilização, a teoria das probabilidades vem intrigando a nossa população, é claro que tal teoria não era tão desenvolvida e organizada como se encontra hoje. Tudo começou a partir de simples jogos de azar tais como: jogos de dados, jogos de cartas e outros. Pinturas em tumbas egípcias feitas em 3500 A.C. mostram pessoas jogando uma forma primitiva de dados feitos de um osso do calcanhar de nome astrágalos. A cerâmica grega é uma evidência para mostrar que havia um círculo desenhado no chão e atirava–se o astrágalo para esse círculo, similarmente como se joga bolas de gude. No Egito, escavadores de túmulos descobriram um jogo chamado "cães de caça e os chacais", que se assemelha ao jogo moderno "cobras e escadas". Parece que esta é a fase inicial da criação dos dados de jogo. O desenvolvimento das teorias da probabilidade e os avanços dos cálculos probabilísticos devem ser atribuídos a vários matemáticos. Dentre os mais importantes, podemos citar:

- **Niccolò Fontana (1500 – 1557)** foi um matemático italiano, cujo nome está ligado ao triângulo de Tartaglia e à solução da equação do terceiro grau. Conhecido como *Tartaglia*, publicou sua obra *General Trattato*, em 1556, que dedicava algumas páginas aos problemas propostos por Pacioli, dentre eles o problema dos pontos. Coloca–se assim tal problema: um jogo equitativo termina quando um dos jogadores vencer seis partidas. Suponha-se que por algum motivo o jogo tenha que ser interrompido quando o primeiro jogador tenha vencido cinco partidas e o segundo apenas três. Como as apostas devem ser repartidas? Niccolò argumentou que a divisão deveria ser $5 : 3$, que não é correta; a solução correta para esse problema foi dada mais tarde por Fermat e Pascal.

- **Girolamo Cardano (1501 – 1576)** foi um polimata italiano. Escreveu mais de 200 trabalhos sobre medicina, matemática, física, filosofia, religião e música. Na matemática foi o primeiro a introduzir as ideias gerais da teoria das equações algébricas. Seu hábito de jogar também o levou a formular as primeiras regras da teoria da probabilidade, em 1526 escreve o livro *Liber de Ludo Aleae* (Livro dos jogos de azar) resolvendo vários problemas de enumeração e retoma os problemas levantados por Luca Pacioli. A obra de Cardano, contudo, só veio a ser publicada em 1663. Cardano pensou sobre o lançamento de três dados. Se três dados são lançados simultaneamente: há o mesmo número de maneiras de obter-se um total de 9 como há de 10. Para um 9: (621) (531) (522) (441) (432) (333) e para 10: (631) (622) (541) (532) (442) (433). A partir disso, Cardano descobriu que a probabilidade de obter 9 é menor do que a obter–se um 10 (aqui, interessam também as permutações envolvidas, os arranjos, a ordem em que os dados mostram seus resultados, e não só as combinações dos resultados possíveis dos dados, de onde, por exemplo, uma possibilidade – permutação – de 621, também implica 612, 216, 261, 126 e 162). Ele também demonstrou a eficácia da definição de chances como o razão entre favorável a evolução desfavorável (o que implica que a probabilidade de um evento é dada pela proporção de resultados favoráveis para o número total de possíveis resultados). Cardano relata em sua autobiografia, *De Propria Vita* que era viciado em jogos. Escreve que havia jogado xadrez por 40 anos e dados por 25 anos. Em 1534 obteve a cadeira de matemática em Milão.

- **Galileu Galilei (1564 – 1642)** também publicou um manual sobre jogos, o *Considerações sobre o Jogo de Dados*. Essencialmente pensado sobre o problema de Cardano, sobre a probabilidade de obter-se um total de 9 é menor do que jogando um 10. Galileu teve o seguinte a dizer: Certos números têm a capacidade de serem jogados porque há mais maneiras de criar esse número. Embora 9 e 10 tenham o mesmo número de maneiras de ser criados, 10 é considerado por jogadores de dados como sendo um resultado mais comum do que 9.

- **Pierre de Fermat (1601 – 1665)** foi um matemático e cientista francês que se destacou na Teoria da Probabilidade. Os seus avanços nesta área deram-se por volta de 1654, quando passou a trocar cartas com Pascal. A probabilidade, um assunto desconhecido por Fermat até então, passou a objetivar descobrir as regras matemáticas que descrevessem com maior precisão as leis do acaso. Posteriormente, ambos determinaram as regras essenciais da probabilidade, e Pascal chegou até mesmo a convencer–se que poderia utilizar as suas teorias para justificar a fé em Deus. Mais especificamente numa carta datada de 24 de agosto de 1654, endereçada a Pascal, Fermat discute o seguinte problema: dois jogadores A e B, quando A precisa de 2 pontos para ganhar e B de 3 pontos, o jogo será certamente decidido em quatro jogadas. Para saber quem tem mais hipóteses de ganhar, o matemático escreve todas as combinações possíveis entre as letras a, que representa uma jogada em favor do jogador A e b, que representa uma em favor do jogador B:

– 01 – aaaa 09 – baaa;

– 02 – aaab 10 – baab;

– 03 – aaba 11 – baba;

– 04 – aabb 12 – babb;

– 05 – abaa 13 – bbaa;

– 06 – abab 14 – bbab;

– 07 – abba 15 – bbba;

– 08 – abbb 16 – bbbb.

Assim sendo, num total de 16, há 11 casos favoráveis a A e 5 favoráveis a B, visto que a ocorrência de 2 ou mais a é favorável a A e a ocorrência de 3 ou mais b a B. A solução dada por Pascal é a seguinte: suponhamos que cada um dos jogadores aposte a mesma quantia, 32 pistolas (moeda da época), aquele que tirar primeiramente três vezes, seguidas ou não, o número que aposta no dado, de 1 a 6, ganhará, num total de quatro partidas.

- **Jacob Bernoulli (1654 – 1705)** publicou a primeira integração de uma equação diferencial; deu solução ao problema dos isoperímetros, que abriu caminho ao cálculo das variações de Euler e Lagrange e estendeu suas principais aplicações ao cálculo das probabilidades. A obra *Ars Conjectandi* (póstuma, 1713) e *The Doctrine of Chances* (A Doutrina de Chances, 1718) de Abraham de Moivre colocou a probabilidade em um patamar de campo da matemática, mostrando como calcular uma ampla gama de probabilidades complexas. Bernoulli mostrou uma versão fundamental da lei dos grandes números, o que indica que, num grande número de ensaios, a média dos resultados é susceptível de ser muito próximo do valor desejado – por exemplo, em 1000 lançamentos de uma moeda são prováveis que ocorram cerca de 500 resultados "cara" (e quanto maior o número de lances, o mais perto de "metade" a proporção é provável que situe–se).

- **Pierre Simon Laplace (1749 – 1827)** foi um matemático, astrônomo e físico francês. Embora tenha conduzido pesquisas substanciais sobre física, outro tema principal dos esforços de sua vida foi a teoria das probabilidades. Em 1812 Laplace publicou seu *Théorie analytique des probabilités*. O método de estimar a proporção do número de casos favoráveis, comparado ao número total de casos possíveis, já havia sido indicado por Laplace em um artigo escrito em 1779. Ele consiste em tratar os valores sucessivos de qualquer função como coeficientes na expansão de outra função, com referência a uma variável diferente. A última é, portanto, chamada de função geradora da primeira. Laplace então mostra como, por meios da interpolação, esses coeficientes podem ser determinados a partir da função geradora. Em seguida, ele ataca o problema converso e, a partir dos coeficientes, encontra a função geradora; isso é obtido pela solução de uma equação com diferenças finitas. O método é trabalhoso e leva na maior parte das vezes para uma distribuição normal de probabilidades, a chamada distribuição Laplace–Gauss.

1.1 Probabilidade

De uma maneira informal, Probabilidade é o estudo de todos os resultados possíveis de ocorrer em um experimento aleatório.

Experimentos Aleatórios são experimentos que quando realizados sobre as mesmas condições apresentam diferentes resultados. O lançamento de um dado não viciado é um experimento aleatório, visto que a cada vez que o dado é lançado obtemos diferentes resultados.

Espaço Amostral (Ω) são todos os resultados possíveis em um experimento aleatório, no caso de um dado temos como espaço amostral os números naturais de 1 a 6.

Eventos são subconjuntos do espaço amostral, no lançamento de um dado podemos ter como Evento sair um número par, neste caso o nosso evento séria o conjunto $A = \{2,\ 4,\ 6\}$. O Evento pode ser classificado em Evento Certo, quando o conjunto dos elementos que formam o evento for igual ao conjunto dos elementos do Espaço Amostral. Evento é Impossível quando o conjunto dos elementos que forma o evento não estiver contido no espaço amostral.

1.1.1 Probabilidade de Ocorrer um Evento

A probabilidade de ocorrer um evento é igual à razão entre o número de elementos do evento sobre o número de elementos do espaço amostral.

$$P(A) = \frac{\text{Número de Elementos do Evento}}{\text{Número de elementos do Espaço Amostral}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo 1.1. *Qual a probabilidade de obtermos um número maior que* 2 *no lançamento de um dado não viciado?*

Solução: Nesse caso temos como espaço amostral o conjunto $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ com 6 elementos e como evento o conjunto $E = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ com 4 elementos. Desta forma seja A á probabilidade de ocorre um número maior que 2 é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = 0,666\ldots$$

Exemplo 1.2. *No lançamento de dois dados não viciados, qual a probabilidade de obtermos dois números iguais?*

Solução: Espaço amostral $\Omega = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\ (5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}$.

Evento A dois números iguais, $A = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6)\}$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0,1666\ldots$$

A probabilidade de ocorrer um Evento Certo será igual 1 pois, número de elementos do evento é igual ao número de elementos do Espaço Amostral, caso o Evento seja Impossível a probabilidade de ocorrer será igual a zero.

- Evento Certo (A): Como $n(A) = n(\Omega)$, temos que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(A)} = 1$$

- Evento Impossível (A): Como $n(A) = 0$, temos que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(A)} = 0$$

Seja A um evento qualquer, termos que:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Exemplo 1.3. *Considere o espaço amostral* $\Omega = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$ *e a distribuição de probabilidades, tal que:* $P_1 = P_2 = P_3$ *e* $P_4 = 0,1$. *Calcule:*

a) P_1, P_2 *e* P_3.

b) *Seja* A *o evento* $A = \{a_1,\ a_2\}$. *Calcule* $P(A)$.

Solução: Temos que o espaço amostral $\Omega = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$, logo:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1,$$

por hipótese temos $P_1 = P_2 = P_3$ e $P_4 = 0,1$, ou seja:

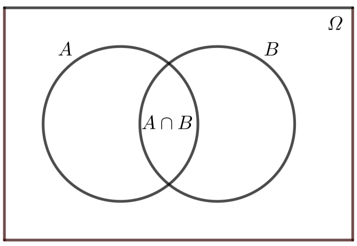
$$\begin{aligned}
P_1 + P_2 + P_3 + P_4 &= 1 \\
P_1 + P_1 + P_1 + P_4 &= 1 \\
3 \cdot P_1 + P_4 &= 1 \\
3 \cdot P_1 + 0,1 &= 1 \\
3 \cdot P_1 &= 1 - 0,1 \\
3 \cdot P_1 &= 0,9 \\
P_1 &= \frac{0,9}{3} \\
P_1 &= 0,3.
\end{aligned}$$

Seja A o evento $A = \{a_1,\ a_2\}$, temos que $P_1 = P_2 = 0,3$ e que o evento A é formado por a_1, a_2, logo:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P_1 + P_2 \\
P(A) &= 0,3 + 0,3 \\
P(A) &= 0,6.
\end{aligned}$$

1.1.2 Probabilidade da União de dois Eventos

Se A e B são eventos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.



Fonte: De autoria

Demonstração. Da teoria de conjuntos temos que:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

Dividindo ambos os membros da equação pelo número de elementos do Espaço Amostral (Ω), Temos que:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

Logo, temos que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. □

Exemplo 1.4. *Uma urna contém* 20 *bolas numeradas de* 1 *a* 20*. Quando uma bola é retirada ao acaso, qual é a probabilidade do número ser múltiplo de* 3 *ou de* 5*?*

Vamos resolver a questão utilizando a fórmula da probabilidade da união de dois eventos. Sejam:

$P(A)$ = Probabilidade de o número ser múltiplo de 3.

$P(B)$ = Probabilidade de o número ser múltiplo de 5.

$P(A \cap B)$ = Probabilidade de o número ser múltiplo de 3 e 5.

Temos:

i) Existem 6 números múltiplos de 3 entre 1 e 20.

$$P(A) = \frac{6}{20}$$

ii) Existem 4 números múltiplos de 5 entre 1 e 20.

$$P(B) = \frac{4}{20}.$$

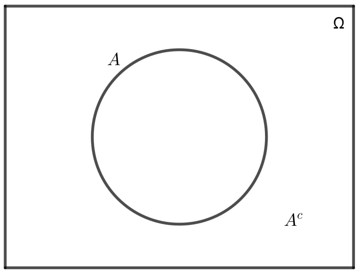
iii) Apenas o número 15 é múltiplo de 3 e 5 ao mesmo tempo, quando analisamos os números entre 1 e 20.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{20}.$$

Logo temos que:

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \\
P(A \cup B) &= \frac{6}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20}. \\
P(A \cup B) &= \frac{9}{20}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.1. *Seja* A *um evento qualquer e* A^c *o complementar desse evento, então* $P(A^c) = 1 - P(A)$.



Fonte: De autoria

Demonstração. Como $A \cap A^c = \emptyset$ e $A \cup A^c = \Omega$ temos que:

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c),$$

Logo:

$$1 = P(A) + P(A^c) \Longrightarrow P(A^c) = 1 - P(A).$$

□

Exemplo 1.5. *Uma urna contém* 6 *bolas pretas,* 2 *bolas brancas e* 10 *amarelas. Uma bola é retirada ao acaso. Qual a probabilidade de:*

a) *A bola não ser amarela?*

b) *A bola ser amarela ou preta?*

c) *A bola não ser branca, nem amarela?*

Solução: a)Seja o evento A bola amarela, temos que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

e

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ P(A^c) &= 1 - \frac{5}{9} \\ P(A^c) &= \frac{9-5}{9} \\ P(A^c) &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

b)Seja o evento A bola amarela e o evento B bola preta, temos que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

e

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

$P(A \cap B) = 0$, pois não temos bolas amarelas e pretas ao mesmo tempo.

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
P(A \cup B) &= \frac{10}{18} + \frac{6}{18} \\
P(A \cup B) &= \frac{16}{18} \\
P(A \cup B) &= \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

c)Seja o evento C a bola não ser branca e nem amarela. Note que a urna só contém as bolas pretas, bolas brancas e bolas amarelas logo, se a bola não é branca e nem amarela ela será preta. Temos que:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

1.1.3 Probabilidade Condicional

Seja Ω um espaço amostral e consideremos dois eventos, A e B, com a simbologia $P(A|B)$ representa a probabilidade de ocorrer o evento A, sabendo que o evento B ocorreu. Quando calculamos a probabilidade $P(A|B)$ saímos inicialmente de um espaço amostral Ω para um espaço amostral B.

A probabilidade de um evento A ocorrer, dado que outro evento B ocorreu, é chamada **probabilidade condicional** do evento A dado B, sedo calculado da seguinte forma:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemplo 1.6. *Em uma cidade, tem–se a seguinte situação:*

Qual a probabilidade de uma mulher ser escolhida, dado que ela esta empregada?

Solução: Sejam os eventos:

	Empregados	Desempregados	Total
Homens	460	40	500
Mulheres	140	260	400
Total	600	300	900

- M: Uma mulher ser escolhida.
$$\mathsf{P(M)} = \frac{400}{900}$$

- E: O escolhido estar empregado.
$$\mathsf{P(E)} = \frac{600}{900}$$

- M e P: Ser mulher e estar empregada.
$$\mathsf{P(M \cap E)} = \frac{140}{900}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \mathsf{P(M|E)} &= \frac{\mathsf{P(M \cap E)}}{\mathsf{P(E)}} \\ \mathsf{P(M|E)} &= \frac{\frac{140}{900}}{\frac{600}{900}} \\ \mathsf{P(M|E)} &= \frac{140}{600} \\ \mathsf{P(M|E)} &= 0,2333... \\ \mathsf{P(M|E)} &= 23,33\%. \end{aligned}$$

Exemplo 1.7. *Uma escola de ensino médio tem 400 alunos em seu cadastro, sendo que:*

I. 140 *são rapazes;*

II. 200 *são moças que já concluíram o curso.*

III. 30 *rapazes ainda não concluíram o curso.*

Ao se selecionar aleatoriamente um nome desse cadastro e sabendo–se que o nome retirado foi o de um rapaz, a probabilidade de ele já ter concluído o curso é de:

A) $\frac{11}{14}$

B) $\frac{11}{40}$

C) $\frac{10}{13}$

D) $\frac{5}{14}$

E) $\frac{1}{2}$

Solução: Vamos considerar:

$\mathsf{P}(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ = Probabilidade de o sorteado ter concluído o ensino médio, sabendo que foi um rapaz.

$\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$ = Probabilidade de ser um rapaz e ter concluído o ensino médio.

$\mathsf{P}(\mathsf{B})$ = Probabilidade de ser um rapaz.

Como são 140 rapazes, em que 30 desses não concluíram o ensino médio, temos 110 rapazes com ensino médio. Sabendo que existem 400 estudantes na escola, temos:

$$\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \frac{110}{400} = \frac{11}{40}.$$

Como existem 140 rapazes e um total de 400 alunos, temos:

$$\mathsf{P}(\mathsf{B}) = \frac{140}{400} = \frac{14}{40}.$$

Temos que:

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \frac{\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{\mathsf{P}(\mathsf{B})} = \frac{\frac{11}{40}}{\frac{14}{40}} = \frac{11}{40} \cdot \frac{40}{14} = \frac{11}{14}.$$

1.1.4 Independência de dois eventos

Dados os eventos A e B em espaço amostral Ω, dizemos que A independe de B se $\mathsf{P}(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \mathsf{P}(\mathsf{A})$, isto é a ocorrência do evento B não interfere na ocorrência de A.

Pela probabilidade condicional temos que:

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \frac{\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{\mathsf{P}(\mathsf{B})},$$

sendo os eventos independentes temos $\mathsf{P}(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \mathsf{P}(\mathsf{A})$.

Logo:

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \frac{\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{\mathsf{P}(\mathsf{B})} = \mathsf{P}(\mathsf{A}) \Longrightarrow \mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \mathsf{P}(\mathsf{A}) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B})..$$

Exemplo 1.8. *No lançamento de um dado e uma moeda. Qual a probabilidade de sair um número par no dado e uma cara na moeda?*

Solução: Sejam os eventos:

A: Sair um número par.

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

B: Sair uma cara.

$$\mathsf{P}(\mathsf{B}) = \frac{1}{2}.$$

Temos que:

$$\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \mathsf{P}(\mathsf{A}) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Exemplo 1.9. *As probabilidades de que duas pessoas A e B resolvam um problema são:* $\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{1}{3}$ *e* $\mathsf{P}(\mathsf{B}) = \frac{3}{5}$. *Qual a probabilidade de que:*

a) Ambos resolvam o problema?

b) Ao menos um resolva o problema?

c) Nenhum resolva o problema?

Solução: Estamos diante de uma questão que envolve eventos independentes pois, fato da pessoa A saber ou não responder o problema não interfere no fato de B saber ou não responder o problema.

Temos que:

i) A probabilidade da pessoa A resolver o problema é $\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{1}{3}$, logo $\mathsf{P}(\mathsf{A}^c)$ será a probabilidade da pessoa A não resolver o problema.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\mathsf{A}^c) &= 1 - \mathsf{P}(\mathsf{A}) \\
\mathsf{P}(\mathsf{A}^c) &= 1 - \frac{1}{3} \\
\mathsf{P}(\mathsf{A}^c) &= \frac{3-1}{3} \\
\mathsf{P}(\mathsf{A}^c) &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

ii) A probabilidade da pessoa B resolver o problema é $\mathsf{P}(\mathsf{B}) = \frac{3}{5}$, logo $\mathsf{P}(\mathsf{B}^c)$ será a probabilidade da pessoa B não resolver o problema.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\mathsf{B}^c) &= 1 - \mathsf{P}(\mathsf{B}) \\
\mathsf{P}(\mathsf{b}^c) &= 1 - \frac{3}{5} \\
\mathsf{P}(\mathsf{b}^c) &= \frac{5-3}{5} \\
\mathsf{P}(\mathsf{b}^c) &= \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

iii) Probabilidade que ambos saibam responder;

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) &= \mathsf{P}(\mathsf{A}) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}) \\
\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \\
\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) &= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

iv) Seja C a probabilidade de ao menos um resolver o problema. Suponha que apena a pessoa A saiba responder.

$$\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^c) = \mathsf{P}(\mathsf{A}) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}^c) \Longrightarrow \mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^c) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

Suponha que apenas a pessoa B saiba responder.

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}^c \cap \mathsf{B}) = \mathsf{P}(\mathsf{A}^c) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}) \Longrightarrow \mathsf{P}(\mathsf{A}^c \cap \mathsf{B}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \Longrightarrow \mathsf{P}(\mathsf{A}^c \cap \mathsf{B}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

Suponha que as duas pessoas saibam responder.

$$\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \mathsf{P}(\mathsf{A}) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}) \Longrightarrow \mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{15}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\mathsf{C}) &= \mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^c) + \mathsf{P}(\mathsf{A}^c \cap \mathsf{B}) + \mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \\
\mathsf{P}(\mathsf{C}) &= \frac{2}{15} + \frac{6}{15} + \frac{3}{15} \\
\mathsf{P}(\mathsf{C}) &= \frac{11}{15}.
\end{aligned}$$

v) A probabilidade de nenhuma pessoa responder.

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}^c \cap \mathsf{B}^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \Longrightarrow \mathsf{P}(\mathsf{A}^c \cap \mathsf{B}^c) = \frac{4}{15}.$$

1.2 Processos Estocásticos

Quem nunca se deparou com uma avenida movimentada e começou a imaginar a quantidade de carros que passam por hora naquela avenida ou quem nunca imaginou a quantidade de peças produzidas por uma empresa diariamente com ou sem defeito ou o estoque de uma loja qualquer durante a semana, Esses e outros são exemplos práticos de Processos Estocásticos.

Processos Estocásticos envolvem o comportamento de um conjunto de variáveis aleatórias durante um período de tempo, nesse processo devemos especificar o conjunto de tempo T envolvido. Esse conjunto de tempos são os intervalos onde cada situação está sendo analisada, tais como a quantidade de carros que trafegam por hora ou o estoque semanal de uma loja.

Definição 1. *Processo estocástico consiste em um conjunto não vazio* T *que chamamos espaço paramétrico que associa cada* $t \in T$ *de uma variável aleatória* $X_t : \Omega \longrightarrow E$ *todas elas definidas sobre o mesmo espaço de probabilidades. Tomaremos usualmente como* T *o conjunto* $[0, +\infty)$ *ou* $\mathbb{N} = \{0, \ 1, \ 2, \ldots\}$*. No primeiro caso, falaremos de um processo estocástico de parâmetro contínuo e no segundo de um processo estocástico de parâmetro discreto.*

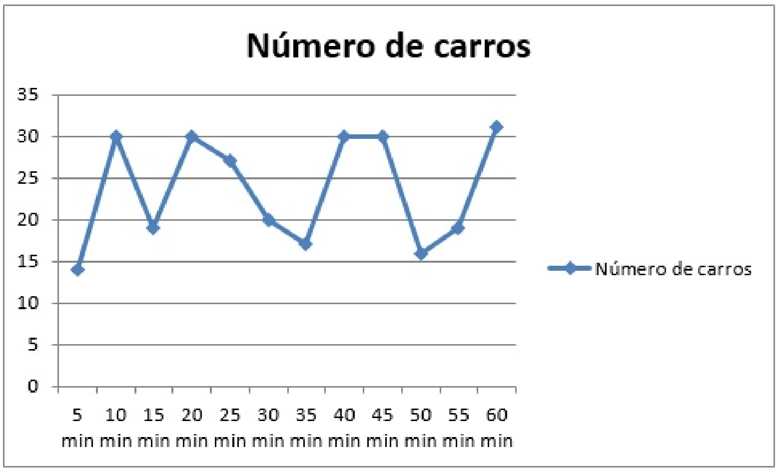
Processo Estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias $(X(t))$ indexadas por um parâmetro t pertencentes a um conjunto T. Geralmente T é tomado em um conjunto de números inteiros não negativos, entretanto nada impede que possamos usar outros conjuntos. A variável aleatória $X(t)$ representa uma característica mensurável do conjunto ao longo do tempo t.

Os Processos Estocásticos podem ser classificados em relação ao estado ou em relação ao tempo. Em relação ao estado, o processo pode ser de estado Discreto, em que $X(t)$ é definido sobre um conjunto enumerável e finito ou Estado contínuo (sequência) caso contrario.

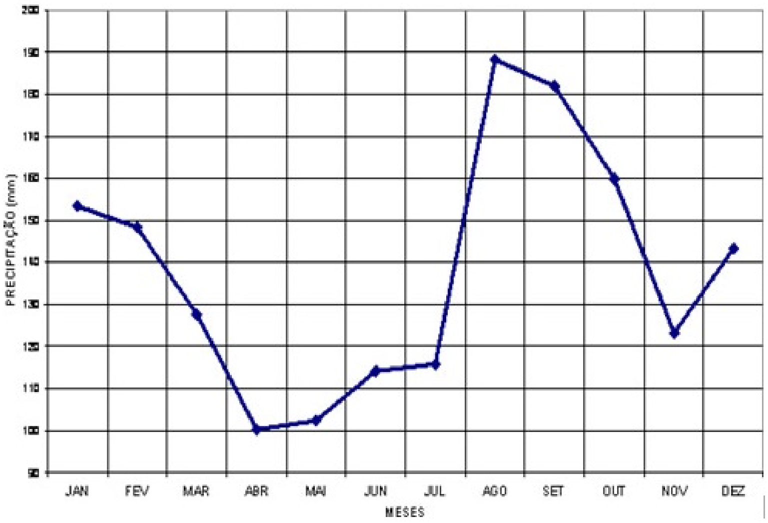
Em relação ao tempo, o processo Estocástico pode ser de tempo discreto ou tempo contínuo.

Exemplo 1.10.

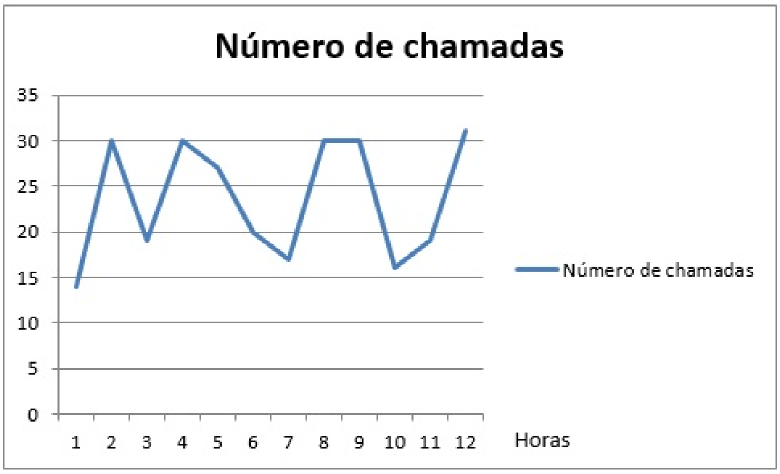
- *Número de carros que circulam em uma avenida por hora, temos um estado e tempo discretos.*



- *Índice pluviométrico durante o ano, temos estado contínuo e tempo discreto.*



- *Número de usuários atendidos em um Call Center em um determinado instante, temos o estado discreto e o tempo contínuo.*



2 Cadeias de Markov

Andrei Andreyevich Markov nasceu no dia 14 de junho de 1856 na Rússia. Formou-se na universidade de St. Petersburg (1878), onde se tornou professor em 1886. Os principais trabalhos de Markov foram: teoria dos números e análise, frações contínuas, limites de integrais, teoria da aproximação e a convergência de séries.

Markov aplicou o método das frações contínuas, inicialmente desenvolvido por Pafnuty Chebyshev, na teoria da probabilidade. Ele também estudou sequências de variáveis mutuamente independentes, esperando estabelecer as leis da probabilidade de forma mais geral. Ele também provou o teorema do limite central.

Markov é particularmente lembrado pelo seu estudo de cadeias de Markov. Cadeias de Markov é um formalismo de modelagem de sistemas que descrevem o sistema como um processo estocástico. Desse ponto de vista o sistema modelado é caracterizado pelos seus estados e a forma pela qual eles se alternam.

Um processo estocástico é uma cadeia de Markov se a probabilidade de ocorrências futuras dependerem exclusivamente do estado atual, são os chamados processos sem memoria.

Definição 2. *Seja* X*, uma variável aleatória que caracteriza o estado do sistema em pontos discretos do tempo* $t = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$*. A família de variáveis aleatórias* $\{X_t\}$ *forma um processo estocástico. Um processo estocástico onde são dados os tempos* $t_0,\ t_1, \ldots,\ t_n$*, e uma família de variáveis aleatórias* $\{X_t\} = \{x_0, x_1, \ldots,\ x_n\}$ *é um processo de Markov se possuir a seguinte propriedade:*

$$P\{X_{t_n-1} = x_{n-1}, \ldots,\ X_0 = x_0\} = P\left\{X_{t_n} = \frac{x_n}{X_{t_{n-1}}} = x_{n-1}\right\}$$

No processo de Markov as probabilidades em um ponto especifico de tempo $t = 0, 1, 2, \ldots$, são expressos por:

$$p_{ij} = P\left\{X_t = \frac{j}{X_{t-1}} = i\right\}, \quad (i, j) = 1,\ 2, \ldots, n,\ t = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ T$$

Tal expressão é chamada de probabilidade de transição e representa a probabilidade do estado i em t -1 ao estado j em t. Por definição:

$$\sum_j p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, \ n \ \text{ e } p_{ij} \geqslant 0, \quad (i, j) = 1, \ 2, \ldots, \ n$$

Para representar as probabilidades de transição em uma etapa usamos a seguinte notação matricial:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

A matriz P e denominada de cadeia de Markov e todas as probabilidades de transição p_{ij} são fixas e independentes ao longo do tempo.

Exemplo 2.1. *Um estudante do ensino médio apresentou os seguintes resultados probabilidade ao logo dos três anos de estudo:*

Desempenho ao logo dos anos		
A	Excelente	0,6
B	Bom	0,3
C	Ruim	0,1

Os valores da tabela acima podem ser dispostos em um vetor x, denominado Vetor de Estados:

$$x = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$$

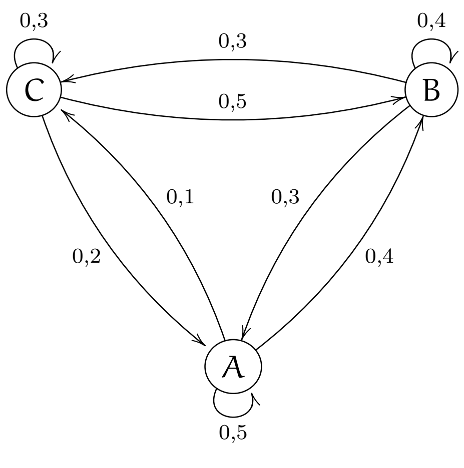
Lembrando que a cada bateria de provas o aluno apresentou variações de desempenho ao logo dos anos observados, como mostra a matriz a baixo:

Probabilidades de Transição			
	Para A	Para B	Para C
De A	0, 5	0, 4	0, 1
De B	0, 3	0, 4	0, 3
De C	0, 2	0, 5	0, 3

De acordo com as informações da tabela acima, podemos observar que ao logo dos 3 anos de ensino tivemos as seguintes variações:

- De A para A, a probabilidade de um desempenho Excelente continuar Excelente após 3 anos é $0,5$.
- De A para B, a probabilidade de um desempenho Excelente passar a ser Bom após 3 anos é $0,4$.
- De A para C, a probabilidade de um desempenho Excelente passar a ser Ruim após 3 anos é $0,1$.
- De B para A, a probabilidade de um desempenho Bom passar a ser Excelente após 3 anos é de $0,3$.
- De B para B, a probabilidade de um desempenho Bom continuar Bom após 3 anos é de $0,4$.
- De B para C, a probabilidade de um desempenho Bom passar a ser Ruim após 3 anos é de $0,3$.
- De C para A, a probabilidade de um desempenho Ruim passar a ser Excelente após 3 anos é de $0,2$.
- De C para B, a probabilidade de um desempenho Ruim passar a ser Bom após 3 anos é de $0,5$.
- De C para C, a probabilidade de um desempenho Ruim continuar Ruim após 3 anos é de $0,3$.

Podemos também representar a cadeia de Markov através de um diagrama de flechas.



Exemplo 2.2. *Um professor de Engenharia compra um novo computador a cada dois anos e tem preferência por três modelos: A, B e C. Se o modelo atual for A, o próximo*

computador pode ser B com probabilidade $0,2$ *ou C com probabilidade* $0,15$*. Se o modelo atual for B, as probabilidades de trocar para A e C são* $0,6$ *e* $0,25$*, respectivamente, e, se o modelo atual for C, então as probabilidades de trocas para A e C são* $0,5$ *e* $0,1$*, respectivamente. Represente a situação como uma cadeia de Markov através da matriz de transição e do diagrama de flechas.*

Solução: De acordo com dados da questão temos que a matriz P de transição é:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} p_{11} & 0,2 & 0,15 \\ 0,6 & p_{22} & 0,25 \\ 0,5 & 0,1 & p_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

Note que não foram fornecidos os valores de p_{11}, p_{22} e p_{33}, entretanto podemos calcular essas probabilidades, pois:

$$\sum_{j}^{n} p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, \ n$$

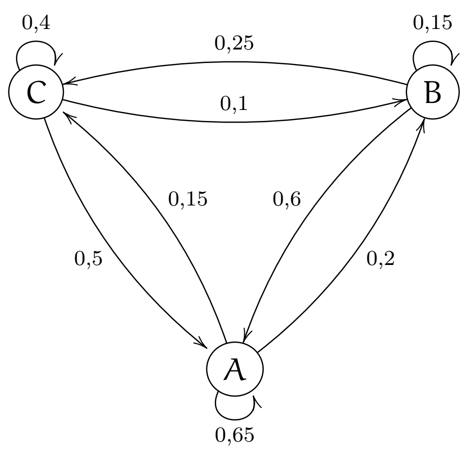
Logo temos que:

i) $p_{11} + 0,2 + 0,15 = 1 \Longrightarrow p_{11} = 1 - 0,35 \Longrightarrow p_{11} = 0,65.$

ii) $p_{22} + 0,6 + 0,25 = 1 \Longrightarrow p_{22} = 1 - 0,85 \Longrightarrow p_{22} = 0,15.$

iii) $p_{33} + 0,5 + 0,1 = 1 \Longrightarrow p_{33} = 1 - 0,6 \Longrightarrow p_{33} = 0,4.$

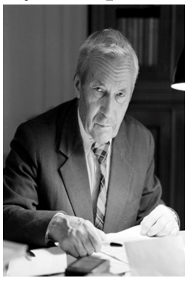
Diagrama de Flexas



2.1 Equações de Chapman – Kolmogorov

Sidney Chapman foi um matemático e geofísico Britânico, nascido em janeiro de 1888, formado pela Universidade de Cambridge, Universidade de Manchester, Trinity College. Trabalhou como professor da Catedra Beyer de Matemática Aplicada, de 1920 a 1924. Membro da Royal Society cujo título é concedido a cientistas notáveis e também um tipo de afiliação de Royal Society para melhoramento do conhecimento natural. Recebeu vários prêmios como: Premio Smith, Premio Adams, Medalha e Premio Appleton, Medalha De Morgan dentre outros. Faleceu em 16 de junho de 1970 aos 82 anos em Boulder (Colorado).

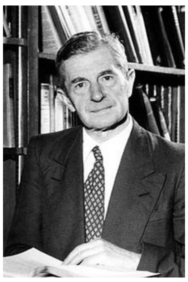
Figura 1: Sidney Chapman (1888 – 1970)



Fonte: Google Images

Andrei Nikolaevich Kolmogorov foi matemático soviético, nascido em Abril de 1903 em Tambov (Rússia). Formado pela Universidade Estatal de Moscovo, trabalhou com teoria das probabilidades, Topologia, Lógica Intuicionista, Mecânica Clássica, Teoria Algorítmica da Informação e Análise de Algoritmos. Recebeu vários prêmios como: Prêmio Wolf de Matemática, Lenin Prize in Science, Balzar Prize for Mathematical and Physical Sciences. Participou das principais descobertas científicas nas áreas de probabilidade e estatística, e em teoria da informação. Autor da principal teoria científica no campo das probabilidades: a teoria da medida, que revolucionou o cálculo de integrais, permitindo que as integrais fossem generalizadas para domínios com restrições. Faleceu em 20 de outubro de 1987 na cidade de Moscou na Rússia.

Figura 2: Andrei Nikolaevich (1903 – 1987)



Fonte: Google Images

A equação de Chapman–Kolmogorov é uma identidade que relaciona as distribuições de probabilidade conjunta de diferentes conjuntos de coordenadas de um processo estocástico. A matriz de transição P é a matriz de transição de probabilidade de um estado t para $t+1$. As equações de Chapman–Kolmogorov fornecem um método para calcular a transição de um estado t para $t+1$, de t para $t+2, \ldots$, de t para $t+n$.

Dadas as probabilidade iniciais $a^{(0)} = \left\{a_t^{(0)}\right\}$ de iniciar no estado t e a matriz de transição P, as probabilidades absolutas $a^{(n)} = \left\{a_t^{(0)}\right\}$ de estado t após n transições $(n > 0)$ é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= a^{(0)} \cdot P \\ a^{(2)} &= a^{(1)} \cdot P = a^{(0)} \cdot P \cdot P = a^{(0)} \cdot P^2 \\ a^{(3)} &= a^{(2)} \cdot P = a^{(0)} \cdot P^2 \cdot P = a^{(0)} \cdot P^3 \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo raciocínio podemos concluir que:

$$a^{(n)} = a^{(0)} \cdot P^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A matriz P^n é chamada de matriz de transição em n etapas. Através dos cálculos podemos concluir que:

$$P^n = P^{n-1} \cdot P$$

ou

$$P^n = P^{n-m} \cdot P^m, \quad \text{com} \quad 0 < m < n.$$

Exemplo 2.3. *A matriz abaixo se aplica ao problema do desempenho do aluno no Exemplo 2.1:*

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Supondo que o desempenho inicial do aluno era Excelente, isto é $a^{(0)} = (1,\ 0,\ 0)$*. Determine a probabilidade dos estados após* 2*,* 4 *e* 8 *estados de avaliações.*

Solução: Aplicando as propriedades de produto de matrizes temos que:

i) Probabilidade de transição no estado 2:

$$\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}\cdot\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,39 & 0,41 & 0,2 \\ 0,33 & 0,43 & 0,24 \\ 0,31 & 0,43 & 0,26 \end{pmatrix}$$

Utilizando a equação de equação de Chapman–Kolmogorov temos que:

$$\mathsf{a}^{(2)} = \mathsf{a}^{(0)} \cdot \mathsf{P}^2 = (1,\ 0,\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,39 & 0,41 & 0,2 \\ 0,33 & 0,43 & 0,24 \\ 0,31 & 0,43 & 0,26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,39 & 0,41 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Após 2 estados de avaliação o desempenho do aluno terá as seguintes probabilidades possíveis, 39% de chance de ser Excelente, 41% de chance de ser Bom e 20% de chance de ser Ruim.

ii) Probabilidade de transição no estado 4:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}^4 &= \mathsf{P}^2\cdot\mathsf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,39 & 0,41 & 0,2 \\ 0,33 & 0,43 & 0,24 \\ 0,31 & 0,43 & 0,26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,39 & 0,41 & 0,2 \\ 0,33 & 0,43 & 0,24 \\ 0,31 & 0,43 & 0,26 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3494 & 0,4222 & 0,2284 \\ 0,345 & 0,4234 & 0,2316 \\ 0,3434 & 0,4238 & 0,2328 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Utilizando a equação de equação de Chapman–Kolmogorov temos que:

$$\begin{aligned} \mathsf{a}^{(4)} &= \mathsf{a}^{(0)} \cdot \mathsf{P}^4 = (1,\ 0,\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,3494 & 0,4222 & 0,2284 \\ 0,345 & 0,4234 & 0,2316 \\ 0,3434 & 0,4238 & 0,2328 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3494 & 0,4222 & 0,2284 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Após 4 estados de avaliação, o desempenho do aluno terá as seguintes probabilidades possíveis, $34,94\%$ de chance de ser Excelente, $42,22\%$ de chance de ser Bom e $22,84\%$ de chance de ser Ruim.

iii) Probabilidade de transição no estado 8:

$$
\begin{aligned}
P^8 &= P^4 \cdot P^4 = \begin{pmatrix} 0,3494 & 0,4222 & 0,2284 \\ 0,345 & 0,4234 & 0,2316 \\ 0,3434 & 0,4238 & 0,2328 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3494 & 0,4222 & 0,2284 \\ 0,345 & 0,4234 & 0,2316 \\ 0,3434 & 0,4238 & 0,2328 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0,34617 & 0,42307 & 0,23076 \\ 0,34615 & 0,42308 & 0,23077 \\ 0,34614 & 0,42308 & 0,23078 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Utilizando a equação de equação de Chapman–Kolmogorov temos que:

$$
\begin{aligned}
a^{(4)} &= a^{(0)} \cdot P^4 = (1,\ 0,\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,34617 & 0,42307 & 0,23076 \\ 0,34615 & 0,42308 & 0,23077 \\ 0,34614 & 0,42308 & 0,23078 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0,34617 & 0,42307 & 0,23076 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Após 8 estados de avaliação, o desempenho do aluno terá as seguintes probabilidades possíveis, $34,61\%$ de chance de ser Excelente, $42,3\%$ de chance de ser Bom e $23,07\%$ de chance de ser Ruim.

Observe que a medida que número de estados de transição aumenta as probabilidades absolutas a^4 e a^8 independem de a^0. Quando isso ocorre, dizemos as probabilidades resultantes atingiram um estado de equilíbrio.

2.2 Classificação dos Estados de Uma Cadeia de Markov

2.2.1 Estado Transiente

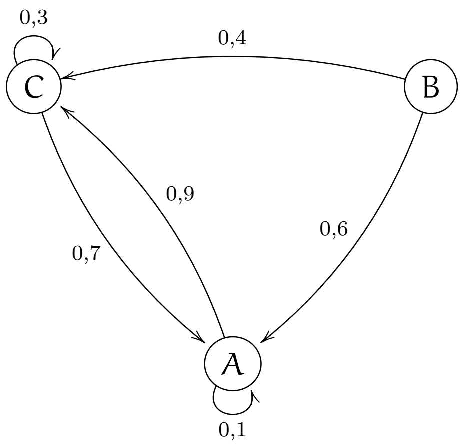
Um estado é dito Transiente se o processo ao sair do estado que se encontra indo para outro estado não é mais possível o seu retorno ao estado anterior. O estado i é transiente se e somente se existe um estado j que é atingível a partir do estado i, entretanto o retorno do estado j para o estado i não é mais possível.

Exemplo 2.4. *Suponha uma cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição:*

$$\mathsf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \\ \mathsf{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observe que o estado B é Transiente pois ao sair do estado B o processo não retorna mais ao estado B.

Diagrama de Flexas



2.2.2 Estado Recorrente

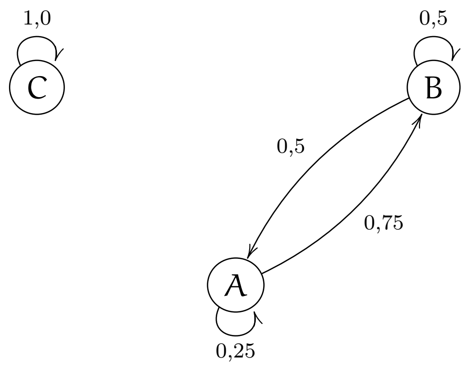
Dizemos que um estado é Recorrente quando é for possível o retorno ao estado de origem. Em outras palavras dizemos que um estado j é Recorrente se a probabilidade de voltar ao estado em que estava com base em outros estados for 1.

Exemplo 2.5. *Suponha uma cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição:*

$$\mathsf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \\ \mathsf{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observe que os estados A e B são Recorrentes, pois quando o processo entra nesses dois estado sempre retorna ao estado de origem.

Diagrama de Flexas



2.2.3 Estado Absorvente

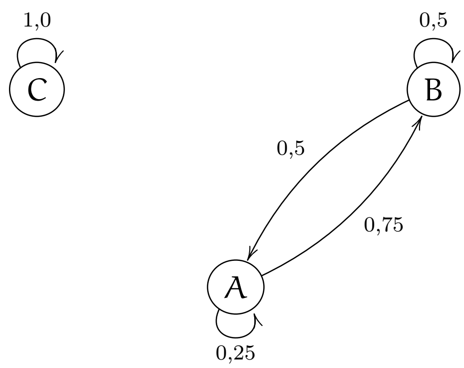
Um estado é dito Absorvente quando uma vez o processo entrando nesse estado jamais irá deixá–lo. Um estado j é absorvente se retornar para ele mesmo, com certeza, em uma transição certa.

Exemplo 2.6. *Suponha uma cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição:*

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observe que o estado C é Absorvente pois, uma vez entrando nesse estado jamais o processo retornara a outros estados.

Diagrama de Flexas



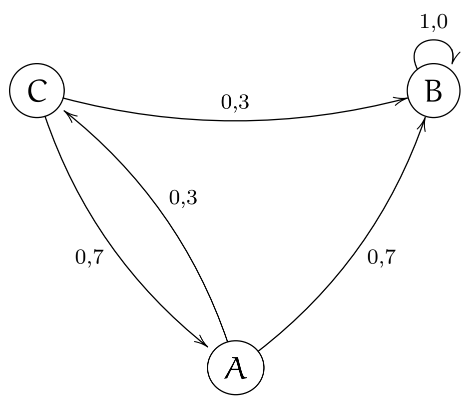
2.2.4 Estado Periódico

Dizemos que um estado j é periódico com $\mathsf{t} > 1$ se seu retorno for possível em $2\mathsf{t},\ 4\mathsf{t},\ 6\mathsf{t},\ \ldots$, etapas.

Exemplo 2.7. *Suponha uma cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição:*

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} & \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} \\ \mathsf{A} & 0 & 0,7 & 0,3 \\ \mathsf{B} & 0 & 1 & 0 \\ \mathsf{C} & 0,7 & 0,3 & 0 \end{pmatrix}$$

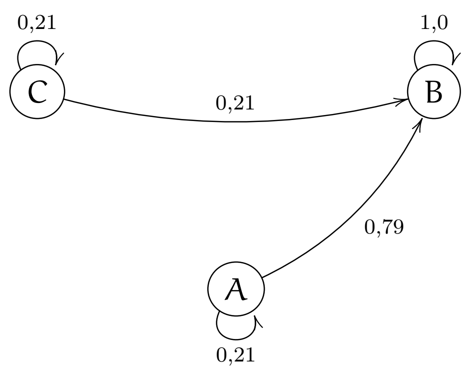
Diagrama de Flexas



Observe que:

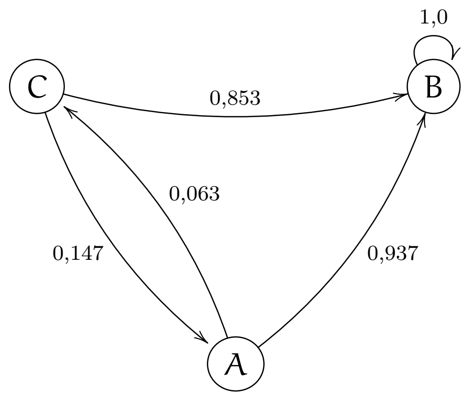
$$\mathsf{P}^2 = \begin{pmatrix} & \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} \\ \mathsf{A} & 0,21 & 0,79 & 0 \\ \mathsf{B} & 0 & 1 & 0 \\ \mathsf{C} & 0 & 0,79 & 0,21 \end{pmatrix}$$

Diagrama de Flexas



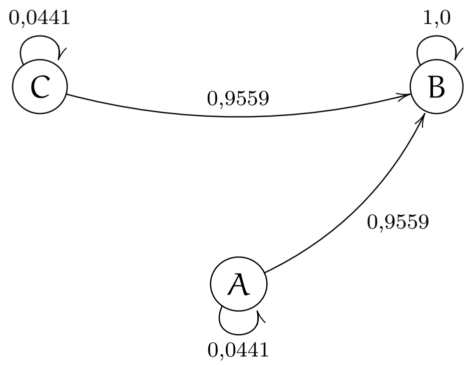
$$P^3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0{,}937 & 0{,}063 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}147 & 0{,}853 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

Diagrama de Flexas



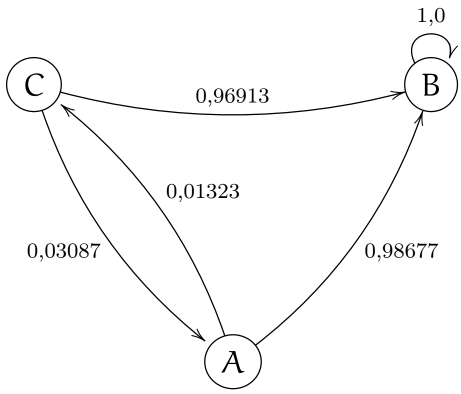
$$P^4 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}0441 & 0{,}9559 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}00926 & 0{,}0441 \end{pmatrix} \end{array},$$

Diagrama de Flexas



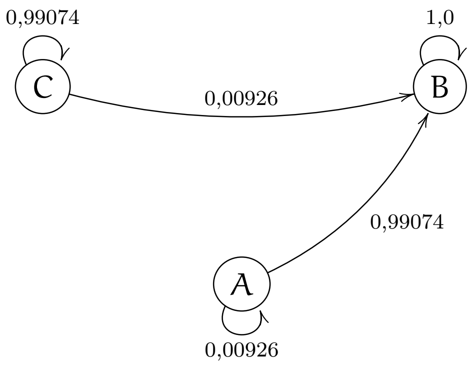
$$P^5 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0{,}98677 & 0{,}01323 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}03087 & 0{,}96913 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

Diagrama de Flexas



$$P^6 = \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ A & \\ B & \\ C & \end{array} \begin{pmatrix} 0,00926 & 0,99074 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,00926 & 0,99074 \end{pmatrix}$$

Diagrama de Flexas



Calculado P^n foi possível observar que quando n é impar p_{11} e p_{33} são sempre iguais a zero e quando n é par esses valores são positivos, logo p_{11} e p_{33} são periódicos.

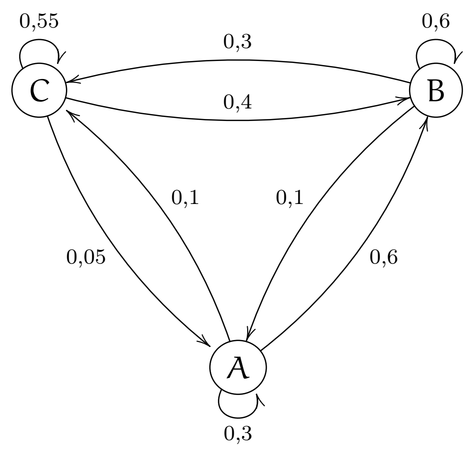
2.3 Cadeias Ergódicas

Uma cadeia de Markov fechada é dita Ergódica quando todos os seus estados são recorrentes e aperiódicos.

Exemplo 2.8. *Suponha uma cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição:*

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,05 & 0,4 & 0,55 \end{pmatrix}$$

Diagrama de Flexas



Calculando: $\mathsf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,155 & 0,58 & 0,265 \\ 0,105 & 0,54 & 0,355 \\ 0,0825 & 0,49 & 0,4275 \end{pmatrix}$, $\mathsf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0,11775 & 0,547 & 0,33525 \\ 0,10325 & 0,529 & 0,36775 \\ 0,09513 & 0,5145 & 0,39038 \end{pmatrix}$,

$\mathsf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0,10679 & 0,53295 & 0,36026 \\ 0,10226 & 0,52645 & 0,37129 \\ 0,09951 & 0,52193 & 0,37857 \end{pmatrix}$, $\mathsf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0,10334 & 0,52795 & 0,36871 \\ 0,10189 & 0,52574 & 0,37237 \\ 0,10097 & 0,52429 & 0,37474 \end{pmatrix}$,

$\mathsf{P}^6 = \begin{pmatrix} 0,10223 & 0,52626 & 0,37151 \\ 0,10176 & 0,52553 & 0,37271 \\ 0,10146 & 0,52505 & 0,37349 \end{pmatrix}$

Observe que em todas as potencias de P acima os estados são recorrentes e aperiódicos, logo temos uma Cadeia Ergódica. Note que a partir de P^4 os valores tendem a estabilizar e a matriz atinge o estado de equilíbrio.

2.4 Probabilidade de estado no Equilíbrio e tempo médio de retorno de Cadeias Ergódicas

Nos exemplos citados ao logo do texto, foi mostrado que uma matriz de transição P^n tende a entrar em estado de equilíbrio á medida que n vai aumentando. Em uma cadeia de Markov Ergódica as probabilidades de estado de equilíbrio é definida por:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_{ij}^n > 0. \tag{2.1}$$

Sendo que:

$$\pi_j = \sum_{j}^{n} \pi_j \cdot P_{ij}, \quad \text{com} \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots,\ n. \tag{2.2}$$

$$\sum^{n} j\pi_j = 1. \tag{2.3}$$

A equação (2.2) nos mostra que as probabilidades π permanecem inalteradas após uma transição e por isso representam a distribuição de estado no equilíbrio.

Através da probabilidade de estado de equilíbrio é possível determinar o número de transições antes de os sistemas retornarem a um estado j pela primeira vez. Esse processo é conhecido como tempo médio do primeiro retorno ou tempo médio de recorrência e pode ser calculado da seguinte forma:

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j}, \quad j = 1,\ 2,\ 3, \dots, n.$$

Exemplo 2.9. *Todo ano, no inicio da estação de plantio de mudas, um jardineiro usa um teste químico para verificar a condição do solo. Dependendo do resultado do teste, a produtividade para a nova estação cai em um dos três resultados: 1) bom; 2) razoável e 3) ruim. Ao longo dos anos, o jardineiro observou que a condição do solo no ano anterior causava um impacto sobre a produtividade no ano corrente e que a situação podia ser descrita através da cadeia de Markov:*

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,05 & 0,4 & 0,55 \end{pmatrix}$$

Com base nos dados acima, determine a distribuição de probabilidade de estado no equilíbrio e os tempos médios do primeiro retorno.

Solução: Temos que: $\pi_j = \sum \pi_j \cdot P_{ij}$ e $\sum \pi_j = 1.$, daí implica

$$(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3) = (\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3) \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,05 & 0,4 & 0,55 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0,3\pi_1 + 0,1\pi_2 + 0,05\pi_3 & = & \pi_1 \\ 0,6\pi_1 + 0,6\pi_2 + 0,4\pi_3 & = & \pi_2 \\ 0,1\pi_1 + 0,3\pi_2 + 0,55\pi_3 & = & \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = & 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que: $\pi_1 = 0,1017$, $\pi_2 = 0,5254$ e $\pi_3 = 0,3729$.

Esses resultados nos mostram que ao logo dos tempos a probabilidade do solo ser boa é de $10,17\%$, de ser um solo razoável é de $52,54\%$ e de ser ruim é de $37,29\%$. Calculando o tempo do primeiro retorno temos:

$$\begin{aligned}
\mu_{11} &= \frac{1}{\pi_1} = \frac{1}{0,1017} = 9,83. \\
\mu_{22} &= \frac{1}{\pi_2} = \frac{1}{0,5254} = 1,9. \\
\mu_{33} &= \frac{1}{\pi_3} = \frac{1}{0,3729} = 2,68.
\end{aligned}$$

Traduzindo os valores acima, temos que o solo levará aproximadamente 10 estações para retornar ao estado bom, 2 estações para retornar ao estado razoável e 3 estações para retornar ao estado ruim.

3 *Aplicações utilizando Cadeias de Markov*

Todos nós educadores que vivemos em uma sociedade em constante revolução tecnológica, com novas tecnologias surgindo a cada momento. Diante desses desafios tecnológicos, o professor precisa cada vez mais manter–se atualizado e conectado com o mundo virtual. O professor deve ter uma metodologia clara e precisa que lhe proporcione a melhor forma possível de transmitir o conhecimento aos seus alunos. Se a intenção do professor for apenas passar a informação, uma simples exposição oral é o suficiente, porém se pretende que seus alunos entendam, assimilem o que está sendo ensinado terá que utilizar metodologias e estratégias adequadas para cada conteúdo ministrado.

> *"Nada deve ser dado à criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração." (AZEVEDO, 1979, p. 27).*

Neste capítulo iremos trabalhar algumas aplicações do nosso dia–a–dia que envolvem cadeias de Markov. Como nosso primeiro exemplo de aplicação prática, escolhemos o futebol. O nosso estudo consistiu em analisar os passes certos durante uma partida de futebol, pois como foi dito inicialmente um processo estocástico é uma cadeia de Markov em que a probabilidade de ocorrências futuras depende exclusivamente do estado atual, ou seja, o passe que saiu de um jogador A para um jogador B, não irá depender de passes realizados anteriormente.

O nosso trabalho consistiu em analisarmos dois jogos da seleção brasileira durante a copa do mundo de 2002, onde a nossa seleção se saiu vitoriosa. A nossa análise foi feita em cima dos passes certos realizados durante todo o jogo, dividindo a nossa análise em três momentos distintos. Fizemos uma matriz de transição para o 1° tempo de jogo, uma matriz de transição para o 2° tempo de jogo e uma matriz contendo toda partida de futebol.

O primeiro jogo analisado foi o jogo das quartas de finais, Brasil e Inglaterra realizado no dia 21 de junho de 2002, jogo esse em que o Brasil saiu vitorioso pelo placar de 2×1.

Primeiramente fizemos a coleta dos dados, ou seja, analisamos todos passes certos feito por cada jogador durante o jogo. A nossa matriz é de ordem 11, em que cada linha representa os jogadores que distribuem os passes e cada coluna representa os jogadores que estão recebendo os passes.

Neste jogo o Brasil contou com os seguintes jogadores abaixo:

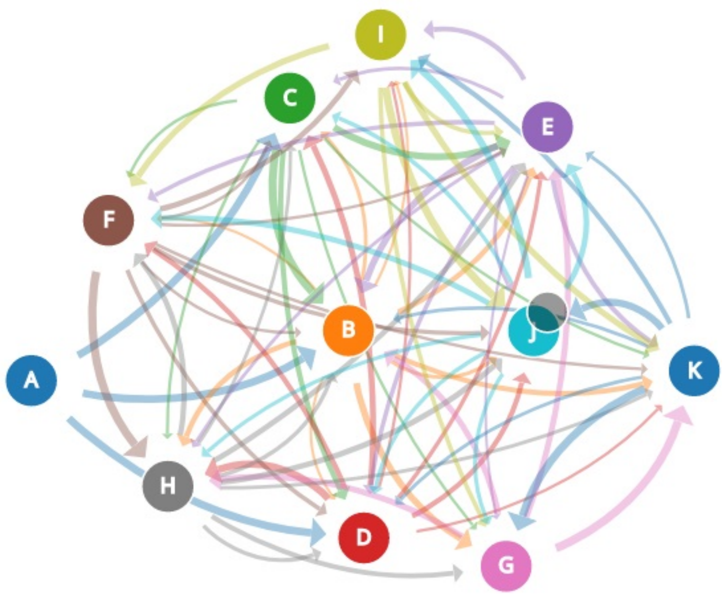
Número	**Jogador**	**Observações**
1	Marcos	
2	Cafu	
3	Lúcio	
4	Roque Junior	
5	Edmilson	
6	Roberto Carlos	
7	Kleberson	
8	Gilberto Silva	
9	Ronaldo	Substituído aos 25 minutos do 2° tempo.
10	Rivaldo	
11	Ronaldinho Gaúcho	Expulso aos 12 minutos do 2° tempo.

O jogador Kleberson jogou com a camisa de número 15, mais para uma melhor organização e entendimento da matriz o colocamos com o número 7 na matriz.

Matriz de probabilidades de transição do 1° tempo do jogo Brasil $\times$ Inglaterra:

Número dos jogadores	**1(A)**	**2(B)**	**3(C)**	**4(D)**	**5(E)**	**6(F)**	**7(G)**	**8(H)**	**9(I)**	**10(J)**	**11(K)**
1(A)	0	0,333...	0,333...	0,333...	0	0	0	0	0	0	0
2(B)	0	0	0,0833...	0,04166...	0,166...	0,04166...	0,25	0,166...	0,04166...	0,0833...	0,166...
3(C)	0	0,3684	0	0,1579	0,2631	0,0526	0,0526	0,0526	0	0	0,0526
4(D)	0	0	0,20	0	0,10	0,15	0	0,30	0,05	0,15	0,05
5(E)	0	0,2592	0,0740	0,111...	0	0,111...	0,0370	0,0740	0,1481	0,0740	0,111...
6(F)	0	0,055...	0,055...	0,111...	0,055...	0	0	0,388...	0,166...	0,111...	0,055...
7(G)	0	0,20	0	0	0,20	0	0	0,20	0	0	0,40
8(H)	0	0,1034	0,069	0,1034	0,1724	0,1724	0,138	0	0	0,1724	0,069
9(I)	0	0	0	0	0,111...	0,222...	0,111...	0	0	0,333...	0,222...
10(J)	0	0	0,0909...	0,0909...	0,1818...	0,1818...	0,0909...	0,0909...	0,2727...	0	0
11(K)	0	0,0714	0	0,0714	0,0714	0	0,3571	0	0,143	0,286	0

Obs: Os valores acima são aproximações.



Observações do 1° tempo de jogo:

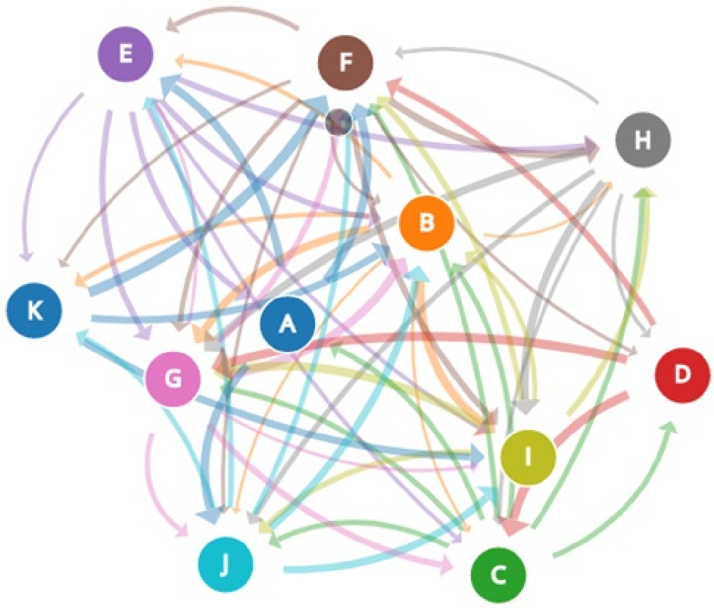
- O jogador 1 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 2, 3 e 4. Entretanto não recebeu nenhum passe ao logo do 1° tempo, só lembrando que o jogador é o goleiro e por isso tem menos posse de bola.
- O jogador 2 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 7. O jogador também distribuiu bola pra quase todos os outros jogadores.
- O jogador 3 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 2.
- O jogador 4 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 8.
- O jogador 5 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 2. O jogador também distribuiu bola pra quase todos os outros jogadores.
- O jogador 6 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 8.
- O jogador 7 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 11.
- O jogador 8 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 5, 6 e 10. O jogador foi que mais recebeu e deu passes no 1° tempo.
- O jogador 9 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 10.
- O jogador 10 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 9.
- O jogador 11 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 7.

- Durante o 1° tempo foram realizados 184 passes certos.

Matriz de probabilidades de transição do 2° tempo do jogo Brasil × Inglaterra:

Número dos jogadores	1(A)	2(B)	3(C)	4(D)	5(E)	6(F)	7(G)	8(H)	9(I)	10(J)	11(K)
1(A)	0	0	0	0	0,333...	0,333...	0	0	0	0,333...	0
2(B)	0	0	0,0434	0	0,087	0	0,3043	0,0434	0,348	0,0434	0,1304
3(C)	0,143	0,143	0	0,143	0	0,143	0,143	0,143	0	0,143	0
4(D)	0	0	0,40	0	0	0,20	0,40	0	0	0	0
5(E)	0,182	0,182	0,091	0	0	0	0,182	0,182	0,091	0	0,091
6(F)	0	0,067	0	0,067	0,1333	0	0,133...	0,267	0,20	0,0667	0,0667
7(G)	0	0,375	0,1875	0	0,0625	0,1875	0	0	0,0625	0,125	0
8(H)	0	0	0,077	0,077	0	0,077	0,3077	0	0,3077	0,1538	0
9(I)	0	0,1177	0	0	0	0,1764	0,353	0,1764	0	0,1764	0
10(J)	0	0,286	0	0	0,143	0,143	0	0	0,286	0	0,143
11(K)	0	0,25	0	0	0	0,50	0	0	0,25	0	0

Obs: Os valores acima são aproximações.



Observações do 2° tempo de jogo:

- O jogador 1 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 5, 6 e 10.Recebeu passe apenas dos jogadores 3 e 5, só lembrando que o jogador é o goleiro e por isso tem menos posse de bola.

- O jogador 2 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 9. O jogador 2 foi também que mais distribuiu bolas no 2° tempo de jogo.

- O jogador 3 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 1, 2, 4, 7, 8 e 10.Entretanto foi o jogador de linha que menos distribuiu bolas.

- O jogador 4 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 3 e 7.

- O jogador 5 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 1, 2, 7 e 8.

- O jogador 6 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 8.

- O jogador 7 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 2. Foi o jogador que mais recebeu passes durante o 2° tempo.

- O jogador 8 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 7 e 9.

- O jogador 9 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 7. O jogador 10 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 2 e 9.

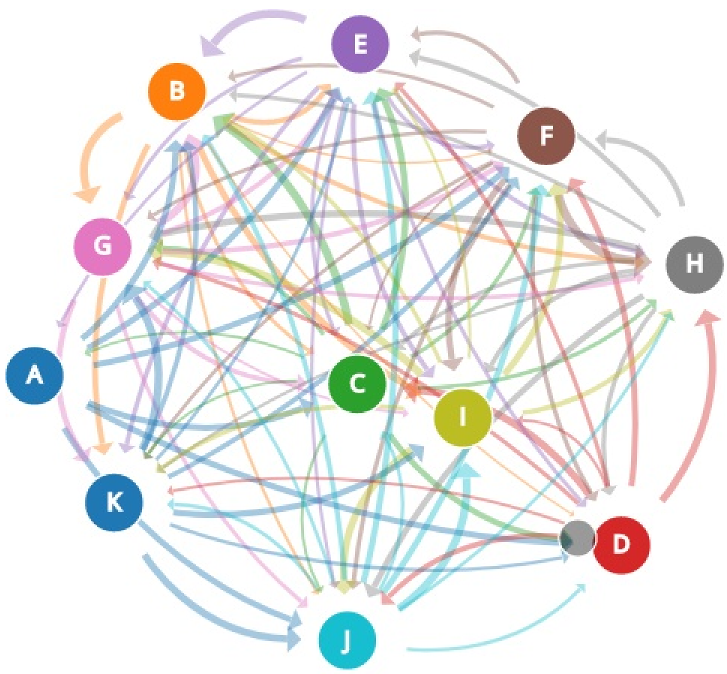
- O jogador 11 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 6. Só lembrando que o jogador foi expulso aos 10 minutos do 2° tempo e por isso realizou poucos passes.

- Durante o 2° tempo foram realizados apenas 121 passes certos, pois o Brasil teve um jogador expulso e com uma menor posse de bola.

Matriz de probabilidades de transição do jogo Brasil × Inglaterra:

Número dos jogadores	1(A)	2(B)	3(C)	4(D)	5(E)	6(F)	7(G)	8(H)	9(I)	10(J)	11(K)
1(A)	0	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0	0	0	0,167	0
2(B)	0	0	0,064	0,0212	0,128	0,0212	0,2765	0,1063	0,1914	0,0425	0,149
3(C)	0,0384	0,308	0	0,154	0,1923	0,077	0,077	0,077	0	0,0384	0,0384
4(D)	0	0	0,24	0	0,08	0,16	0,08	0,24	0,04	0,12	0,04
5(E)	0,053	0,327	0,079	0,079	0	0,079	0,079	0,1052	0,1315	0,053	0,1052
6(F)	0	0,061	0,0303	0,091	0,091	0	0,061	0,3333	0,182	0,091	0,061
7(G)	0	0,308	0,1153	0	0,1153	0,1153	0	0,077	0,0384	0,077	0,154
8(H)	0	0,0714	0,0714	0,0952	0,1190	0,143	0,1904	0	0,0952	0,167	0,048
9(I)	0	0,077	0	0	0,0384	0,1923	0,2692	0,1153	0	0,231	0,077
10(J)	0	0,1111	0,0555	0,0555	0,167	0,167	0,0555	0,0555	0,278	0	0,0555
11(K)	0	0,1111	0	0,0555	0,0555	0,1111	0,278	0	0,167	0,2222	0

Obs: Os valores acima são aproximações.



Observações do jogo inteiro:

- O jogador 1 tem a mesma probabilidade de passar a bola aos jogadores 2, 3, 4, 5, 6 e 10.Recebeu passe apenas dos jogadores 3 e 5, só lembrando que o jogador é o goleiro e por isso tem menos posse de bola.
- O jogador 2 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 7. Foi o jogador que mais passou a bola durante o jogo.
- O jogador 3 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 2.
- O jogador 4 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 3 e 8.
- O jogador 5 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 2.
- O jogador 6 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 8.
- O jogador 7 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 2.Foi o jogador que mais recebeu bolas durante o jogo.
- O jogador 8 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 7.
- O jogador 9 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 7.
- O jogador 10 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 9.
- O jogador 11 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 7.

- Durante o jogo foram realizados 305 passes corretos.

O segundo jogo que iremos analisar é o jogo da final da copa do mundo de 2002 entre Brasil e Alemanha, realizado em 30 de junho de 2002 e que teve como vencedor o Brasil pelo placar 2×0.

Neste jogo o Brasil contou com os seguintes jogadores abaixo:

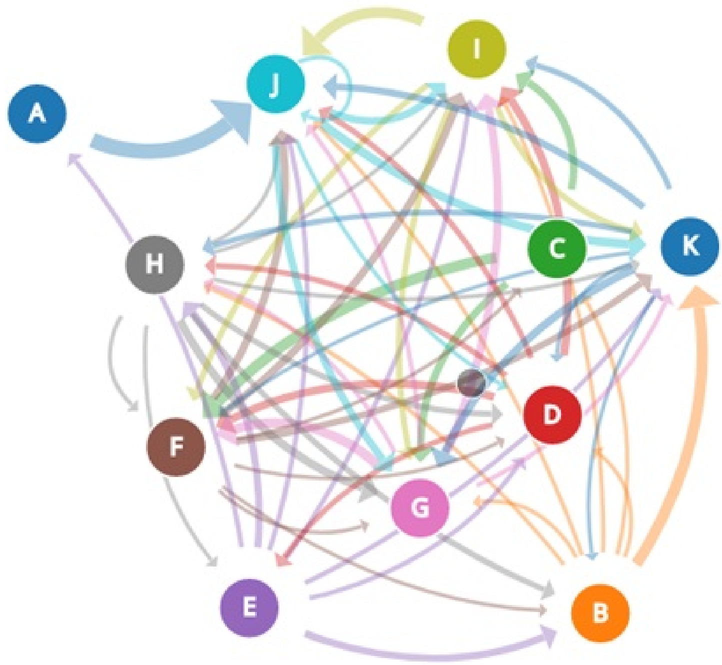
Número	**Jogador**	**Observações**
1	Marcos	
2	Cafu	
3	Lúcio	
4	Roque Junior	
5	Edmilson	
6	Roberto Carlos	
7	Kleberson	
8	Gilberto Silva	
9	Ronaldo	Substituído aos 40 minutos do 2° tempo.
10	Rivaldo	
11	Ronaldinho Gaúcho	Substituído aos 40 minutos do 2° tempo.

O jogador Kleberson jogou com a camisa de número 15, mas para uma melhor organização e entendimento da matriz o colocamos com o número 7 na matriz.

Matriz de probabilidade de transição do 1° tempo de jogo Brasil $\times$ Alemanha:

Número dos jogadores	**1(A)**	**2(B)**	**3(C)**	**4(D)**	**5(E)**	**6(F)**	**7(G)**	**8(H)**	**9(I)**	**10(J)**	**11(K)**
1(A)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2(B)	0	0	0,077	0,077	0	0	0,077	0,077	0,077	0,077	0,54
3(C)	0	0	0	0	0	0,50	0,25	0	0,25	0	0
4(D)	0	0	0	0	0,143	0,286	0	0,143	0,286	0,143	0
5(E)	0,111...	0,222...	0	0,111...	0	0	0	0,222...	0,111...	0,111...	0,111...
6(F)	0	0,067	0,067	0,067	0	0	0,067	0	0,267	0,267	0,20
7(G)	0	0	0	0	0	0,40	0	0,10	0,30	0,10	0,10
8(H)	0	0,154	0	0,154	0,077	0,077	0,308	0	0,077	0,077	0,077
9(I)	0	0	0	0	0	0,167	0,167	0	0	0,50	0,167
10(J)	0	0	0	0,083	0	0	0,25	0	0,025	0,083	0,333...
11(K)	0	0,071	0	0,071	0	0,071	0,286	0,143	0,143	0,214	0

Obs: Os valores acima são aproximações.



Observações do 1° tempo de jogo Brasil × Alemanha:

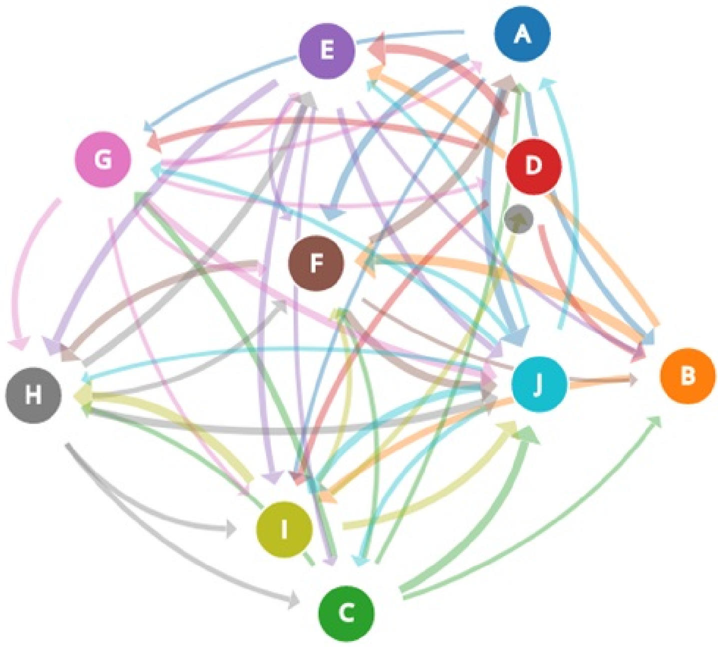
- O jogador 1 fez apenas um passe durante o jogo para o jogador 10, só lembrando que o jogador é o goleiro e por isso tem menos posse de bola e jogou machucado.
- O jogador 2 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 11.
- O jogador 3 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 6.
- O jogador 4 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 6 e 9.
- O jogador 5 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 2 e 8.
- O jogador 6 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 9 e 10.Foi também o jogador que mais passou a bola no 1° tempo.
- O jogador 7 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 6.
- O jogador 8 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 7.
- O jogador 9 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 10.Foi também um dos jogadores que mais recebeu a bola no 1° tempo junto com o jogador 11.
- O jogador 10 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 7, 9 e 11.
- O jogador 11 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 7.

- Durante o 1° tempo de jogo o Brasil teve pouca posse de bola. E realizou apenas 104 passes certos.

Matriz de probabilidade de transição do 2° tempo de jogo Brasil × Alemanha:

Número dos jogadores	1	2(A)	3(B)	4(C)	5(D)	6(E)	7(F)	8(G)	9(H)	10(I)	11(J)
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2(A)	0	0	0,182	0	0	0	0,273	0,091	0	0,091	0364
3(B)	0	0	0	0	0	0,25	0,50	0	0	0,25	0
4(C)	0	0,111...	0,111...	0	0	0	0,111...	0,222...	0,111...	0	0,333...
5(D)	0	0	0,20	0	0	0,40	0	0,20	0	0,20	0
6(E)	0	0	0,10	0,10	0	0	0,10	0	0,30	0,20	0,20
7(F)	0	0,333...	0,0833...	0	0	0	0	0	0,25	0	0,333...
8(G)	0	0,10	0	0	0,10	0,10	0,10	0	0,20	0,10	0,30
9(H)	0	0	0	0,143	0	0,286	0,143	0	0	0,143	0,286
10(I)	0	0	0	0	0,143	0	0,143	0	0,428	0	0,286
11(J)	0	0,136	0	0,136	0	0,091	0,136	0,136	0,091	0,273	0

Obs: Os valores acima são aproximações.



Observações do 2° tempo de jogo Brasil × Alemanha:

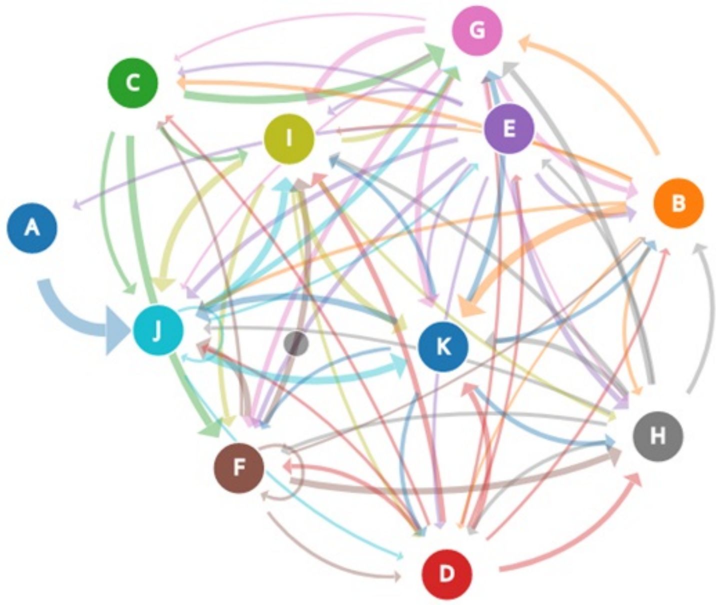
- O jogador 1 não realizou e nem recebeu nenhum passe durante o jogo, pois o jogador estava machucado.

- O jogador 2 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 11.

- O jogador 3 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 7.
- O jogador 4 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 11.
- O jogador 5 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 6.
- O jogador 6 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 9.
- O jogador 7 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 2 e 11.
- O jogador 8 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 11.
- O jogador 9 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 6 e 11.
- O jogador 10 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 9.
- O jogador 11 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 10, foi também o jogador que mais recebeu e deu passes no 2° tempo.
- No 2° tempo o Brasil realizou apenas 97 passes certos.

Número dos jogadores	**1(A)**	**2(B)**	**3(C)**	**4(D)**	**5(E)**	**6(F)**	**7(G)**	**8(H)**	**9(I)**	**10(J)**	**11(K)**
1(A)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2(B)	0	0	0,125	0,042	0	0	0,167	0,0833...	0,042	0,0833...	0,458
3(C)	0	0	0	0	0	0,375	0,375	0	0,125	0,125	0
4(D)	0	0,0625	0,0625	0	0,0625	0,125	0,0625	0,1875	0,1875	0,0625	0,1875
5(E)	0,071	0,143	0,071	0,071	0	0,143	0	0,214	0,071	0,143	0,071
6(F)	0	0,04	0,08	0,08	0	0,08	0	0,28	0,24	0,25	0
7(G)	0	0,182	0,0454	0	0	0,182	0	0,0454	0,273	0,0454	0,227
8(H)	0	0,130	0	0,087	0,087	0,087	0,217	0	0,130	0,087	0,174
9(I)	0	0	0	0,077	0	0,154	0,154	0,077	0	0,308	0,231
10(J)	0	0	0	0,053	0,053	0	0,210	0	0,316	0,053	0,316
11(K)	0	0,111...	0	0,111...	0	0,083	0,194	0,139	0,111...	0,25	0

Obs: Os valores acima são aproximações.



Observações do jogo Brasil × Alemanha:

- O jogador 1 realizou apenas um passe durante o jogo, pois o jogador estava machucado.
- O jogador 2 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 11.
- O jogador 3 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 6 e 7.
- O jogador 4 tem a maior probabilidade de passar a bola aos jogadores 8, 9 e 11.
- O jogador 5 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 8.
- O jogador 6 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 9.
- O jogador 7 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 9.
- O jogador 8 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 7.
- O jogador 9 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 10.
- O jogador 10 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 11.
- O jogador 11 tem a maior probabilidade de passar a bola ao jogador 10.
- Durante o jogo o Brasil realizou 201 passes certos e teve uma menor posse de bola.

4 Considerações Finais

Procuramos mostrar por meio do trabalho temas como: probabilidade, matriz e cadeias de Markov. Apesar de não ser um conteúdo abordado no ensino médio, foi possível mostrar que cadeia de Markov pode ser trabalhada através de exemplos práticos com probabilidade e matrizes. O uso do jogo de futebol como aplicação é apenas uma das inúmeras formas que podemos utilizar para trabalhar esse conteúdo.

Fizemos uma analise da quantidade de passes certos em uma partida de futebol, essa quantidade de passes foram colocadas em uma matriz onde foi possível trabalhar a probabilidade de passes que um jogador fez e recebeu durante o jogo. Por meio do uso dos gráficos procuramos mostrar de uma forma mais clara a probabilidade da ocorrência dos passes.

É importante ressaltar que estamos diante de um tema riquíssimo em aplicações no nosso cotidiano. Esperamos por meio desse trabalho contribuir com o ensino da matemática, mostrando que é possível trabalhar temas bastante complexos com exemplos práticos.

Referências

Almeida Nogueira, F. M. de. – *Modelagem e Simulação: Cadeias de Markov.* Notas de aula da Disciplina EPD–042–Pesquisa Operacional II, UFJF, 2015.

Clarke, A. Bruce. – *Probabilidade e processos estocásticos.* Rio de Janeiro: livros técnicos e científicos, 1979.

Golmakani, Ali., Da Silva, Aryane Adelina., Freire, Emanoel M.S., Barbosa, Myrla kedynnna., Carvalho, Pedro H.G., Alves, Pedro I. – *Cadeias de Markov.* VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Maceió, 2014.

Hazzan, Samuel. – *Fundamentos de Matemática Elementar – Vol. 5 – Combinatória, Probabilidade.* 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

Hoel, P.G., S. C. Port e C. J. Stone. – *Introdução à Teoria da Probabilidade.* Editora Interciência, 4a ed., 1978.

Lipschutz, S. – *Probabilidade.* Editora McGraw–Hill do Brasil, 2 ed., 1978.

MEYER, P. L. – *Probabilidade: aplicações à estatística.* [**sine loco**]: Livro Técnico, 1970.

Souza, Fernando Luiz Junior. – *Cadeias de Markov e o jogo Monopoly.* 2016. 112 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2016.

Taha, Hamdy A. – *Pesquisa operacional: Um visão geral.* 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.