UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

MARCELA CAVATI LODI ANGELI

CÁLCULO DE ÁREAS DE ALGUMAS FIGURAS PLANAS.

VITÓRIA - ES
2019

MARCELA CAVATI LODI ANGELI

CÁLCULO DE ÁREAS DE ALGUMAS FIGURAS PLANAS.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) no Polo da Universidade Federal do Espírito Santo como componente curricular obrigatório para a obtenção do grau de mestre. Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Orientador: Prof. Domingos Sávio Valério Silva

VITÓRIA - ES
2019

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

A582c

Angeli, Marcela Cavati Lodi, 1983-
Cálculo de áreas de algumas figuras planas. / Marcela Cavati Lodi Angeli. - 2019.
90 f. : il.

Orientador: Domingos Sávio Valério Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Comprimento de figuras geométricas. 2. Áreas de figuras geométricas. 3. Geometria plana. I. Silva, Domingos Sávio Valério. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"Cálculo de Áreas de Algumas Figuras Planas"

Marcela Cavati Lodi Angeli

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 03/05/2019 por:

Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva
Orientador – UFES

Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Membro Interno – UFES

Prof^{a}. Dr^{a}. Andréa Gomes Guimarães
Membro Externo – UFF

AGRADECIMENTOS

Meu primeiro agradecimento é a Deus, pelo dom da vida e pelo discernimento nas minhas escolhas.

Ao meu esposo, que me ajudou no que pôde e sempre me motivou a acreditar que valeria a pena todo esforço.

Às minhas duas filhas, pela ausência em alguns momentos e por permitirem que conquistasse esse sonho.

Agradeço aos meus familiares, que em nenhum momento duvidaram que eu conseguisse, me incentivando sempre que me sentia incapaz. À minha mãe pelas orações e meu pai pelo amor incondicional. Ao meu irmão pela inspiração.

Aos meus professores da Graduação e do Mestrado, pelos ensinamentos adquiridos, em especial ao Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva, meu orientador, pela paciência e dedicação desde o início do Curso de Graduação.

Aos colegas de trabalho e de mestrado que contribuíram para meu crescimento profissional.

Aos amigos que sempre estiveram ao meu lado.

A todos vocês, muito obrigada.

RESUMO

Este trabalho apresenta os conceitos primários de comprimento e áreas. O objetivo deste é contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de geometria na escola básica. Assim, foram elaboradas algumas demonstrações para que os alunos da educação básica possam compreender a geometria além das atividades escolares na disciplina de matemática, e possam então, explorar melhor seus conceitos e relações com o mundo que os cerca.

Palavras-chave: Comprimento de figuras geométricas. Áreas de figuras geométricas.

ABSTRACT

This paper presents the primary concepts of length and areas. The purpose of this is to contribute to the process of teaching and learning geometry in basic school. Thus, some demonstrations were elaborated so that the students of the basic education can understand the geometry beyond the school activities in the mathematics discipline, and then, the better explore their concepts and relationships with the world around them.

Keywords: Length of geometric figures. Areas of geometric figures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Segmento AB **12**

Figura 2.2 – Segmento Submúltiplo de AB **12**

Figura 2.3 – Diagonal do Quadrado $ABCD$ **13**

Figura 2.4 – Polígonos **15**

Figura 2.5 – Polígonos Convexos **15**

Figura 2.6 – Polígonos Não Convexos **15**

Figura 3.1 –. Ângulo $A\hat{O}B$ **17**

Figura 3.2 –. Ângulo $360°$ **17**

Figura 3.3 –. Ângulo $1°$ **18**

Figura 3.4 –. Circunferência com ângulo igual a 1 radiano **19**

Figura 3.5 – Triângulo ABC **20**

Figura 3.6 – Triângulos na Construção Civil I **20**

Figura 3.7 – Triângulos na Construção Civil II **21**

Figura 3.8 – Triângulos na Construção Civil III **21**

Figura 3.9 – Triângulos Congruentes **22**

Figura 3.10 – Caso de Congruência LAL **23**

Figura 3.11 – Caso de Congruência ALA **24**

Figura 3.12 – Demonstração do Caso de Congruência ALA (1º caso) **25**

Figura 3.13 – Demonstração do Caso de Congruência ALA (2º caso) **25**

Figura 3.14 – Caso de Congruência LLL **26**

Figura 4.1 – Triângulos Semelhantes **28**

Figura 4.2 – Retas Paralelas $r\ e\ s$ cortadas por uma Transversal t. **29**

Figura 4.3 – Triângulo ABC com ângulos descritos **30**

Figura 4.4 – Retas Paralelas r, s e t com transversais m e n **31**

Figura 4.5 – Retas Paralelas com transversais m e n **32**

Figura 4.6 – Triângulos Semelhantes pelo Caso AA **33**

Figura 4.7 – Triângulos Semelhantes $ABC\ e\ DEF$ **34**

Figura 5.1 – Triângulo Retângulo ABC **36**

Figura 5.2 – Triângulo Retângulo ABC com $a = m + n$ **37**

Figura 5.3 – Triângulo ABC **38**

Figura 5.4 – Triângulo Obtusângulo ABC **39**

Figura 5.5 – Triângulos Semelhantes com Ângulo θ. **40**

Figura 5.6 – Triângulo OAB com Ângulo θ. **41**

Figura 5.7 – Triângulo ABC com ângulos de 30º e 60º. **42**

Figura 5.8 – Triângulo ABC com ângulos de 45º. **43**

Figura 6.1 – Quadrado de Área a^2 **45**

Figura 6.2 – Quadrado de Área b **46**

Figura 6.3 – Quadrado de lado $a + b$ **48**

Figura 6.4 – Paralelogramo $ABCD$ **49**

Figura 6.5 – Triângulo $ABC\ e\ AC//BD$ **51**

Figura 6.6 – Triângulo ABC de base BC e A pertencente à reta r **51**

Figura 6.7 – Triângulo ABC e altura h relativa à base BC **52**

Figura 6.8 – Trapézio $ABCD$ **55**

Figura 6.9 – Polígono Regular Inscrito na Circunferência **57**

Figura 6.10 – Setor Circular **58**

Figura 7.1 - Trapézio $ABCD$ dobrado **59**

Figura 7.2 – Retângulo $ABCD$ **60**

Figura 7.3 – Trapézio $ABCD$ Segmentado **60**

Figura 7.4 – Retângulo com M e N Pontos Médios **61**

Figura 7.5 – Retângulos ABCD Sombreados **62**

Figura 7.6 - Triângulos Retângulos que se interceptam. **62**

Figura 7.7 – Retângulo e seus pontos médios **63**

Figura 7.8 – Retângulo e Razão de Áreas Sombreadas **63**

Figura 7.9 – Quadrilátero $ABCD$ **64**

Figura 7.10 – Quadrados $R\ e\ S$ **65**

Figura 7.11 - Quadrados $R\ e\ S$ e Área Sombreada **66**

Figura 7.12 – Quadrado com parte Sombreada **67**

Figura 7.13 – Quadrado com parte Sombreada e Marcações **67**

Figura 7.14 – Polígono na Malha Quadriculada I **68**

Figura 7.15 – Polígono na Malha Quadriculada II **69**

Figura 7.16 – Três retângulos formando um Quadrado **69**

Figura 7.17 – Polígonos na Malha Quadriculada **70**

Figura 7.18 – Decomposição de Polígonos na Malha Quadriculada **70**

Figura 7.19 – Quadrado $ABCD$ com Área Sombreada em seu Interior **72**

Figura 7.20 – Quadrado $ABCD$ decomposto **72**

Figura 7.21 – Retângulo Subdividido em Regiões. **73**

Figura 7.22 – Retângulo Subdividido em Regiões e suas Áreas **73**

Figura 7.23 – Ponto P interior a um Retângulo **74**

Figura 7.24 - Ponto P interior a um Retângulo e suas Dimensões **75**

Figura 7.25 – Triângulo CPQ na Malha Quadriculada **75**

Figura 7.26 – Nove Retângulos **76**

Figura 7.27 – Retângulos de lados x e y agrupados **77**

Figura 7.28 – Quadrado $ABCD$ na malha quadriculada I **77**

Figura 7.29 - Quadrado $ABCD$ na malha quadriculada II. **78**

Figura 7.30 – Quadrado formado por oito triângulos iguais **78**

Figura 7.31 – Retângulo com círculos inscritos. **79**

Figura 7.32 – Retângulo com círculos inscritos (solução). **79**

Figura 7.33 – Malha quadriculada com círculos concêntricos. **80**

Figura 7.34 - Malha quadriculada com círculos concêntricos(solução). **81**

Figura 7.35 – Retângulo representando o quarto de Pedro. **82**

Figura 7.36 – Quadrado $ABCD$ com regiões hachuradas. **83**

Figura 7.37 – Quadrado $ABCD$ com regiões circulares hachuradas. **83**

Figura 7.38 – Quadrado $ABCD$ com regiões hachuradas (solução). **84**

Figura 7.39 – Quadrado $ABCD$ com regiões circulares hachuradas (solução). **84**

Figura 7.40 –ABC triângulo equilátero com círculo sobreposto. **85**

Figura 7.41 –ABC triângulo equilátero com círculo sobreposto (solução). **85**

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10
2 SEGMENTOS E SUAS MEDIDAS: COMPRIMENTO 11
2.1 MEDIDAS DE UM SEGMENTO 11
2.2 PERÍMETRO 14
2.3 NOMENCLATURAS DOS POLÍGONOS. 16
3 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS 22
3.1 AXIOMA (1º CASO DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS - LAL). 23
3.2 TEOREMA (2º CASO DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS - ALA) 24
3.3 TEOREMA (3º CASO DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS - LLL) 26
4 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS 28
4.1 RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL 29
4.2 TEOREMA (A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO É 180°) 30
4.3 TEOREMA DE TALES 31
4.4 TEOREMA 33
4.5 TEOREMA 34
5 O TEOREMA DE PITÁGORAS E TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO 36
5.1 O TEOREMA DE PITÁGORAS 36
5.2 RECÍPROCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS 38
5.3 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO 39
5.4 SENO, COSSENO E TANGENTE DE ALGUNS ÂNGULOS. 42
6 ÁREAS 44
6.1 ÁREA DO QUADRADO 44
6.2 ÁREA DO RETÂNGULO 47
6.3 ÁREA DO PARALELOGRAMO 49
6.4 ÁREA DO TRIÂNGULO 50
6.5 ÁREA DO TRIÂNGULO EM RELAÇÃO AOS LADOS 52
6.6 ÁREA DO TRAPÉZIO 55
6.7 ÁREA DO CÍRCULO 56
6.8 ÁREA DO SETOR CIRCULAR 57
7 EXERCÍCIOS 59
8 REFERÊNCIAS 87

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

O maior desafio para um professor na atualidade é despertar no aluno o interesse e a motivação para aprender.

Pensando nessa motivação é que nessa dissertação foram feitas algumas demonstrações de fórmulas, muitas vezes simplesmente impostas e reproduzidas. Com as demonstrações os alunos entendem como surgiram, assim deixam de simplesmente decorar.

Nos capítulos iniciais os pré-requisitos foram descritos, para posteriormente falarmos do foco principal que são as áreas de algumas figuras planas.

No Capítulo 2 definimos segmentos e suas medidas.

No Capítulo 3 descrevemos ângulos, algumas propriedades e definições para então falarmos de Congruência de Triângulos, com seus casos de congruências e suas demonstrações, fazendo com que o leitor entenda o processo na identificação de congruência de triângulos.

No Capítulo 4 falamos sobre semelhança de triângulos e alguns teoremas com suas demonstrações.

No Capítulo 5 descrevemos o Teorema de Pitágoras, sua demonstração, a recíproca e também um pouco de trigonometria no Triângulo Retângulo para enfim iniciarmos o capítulo principal dessa dissertação.

No Capítulo 6 veremos como medir a porção do plano ocupada por quadrados, retângulos, paralelogramos, triângulos, trapézios, círculos e setores circulares. Sempre definindo e demonstrando os procedimentos para essas medições. Assim fazendo com que o leitor entenda o que antes eram “treinados” à apenas aplicarem.

Por último, no Capítulo 7, propomos alguns exercícios de áreas que foram respondidos para fixação do que foi apresentado.

CAPÍTULO 2

2 SEGMENTOS E SUAS MEDIDAS: COMPRIMENTO

O texto do presente capítulo está apoiado no capítulo 1 do livro “Medida e Forma em Geometria” do autor Elon Lages Lima [4] e nos capítulos 4 e 7 do livro “Geometria Euclidiana Plana” do autor João Lucas Marques Barbosa [1].

2.1 Medidas de Um Segmento

Sejam $A\ e\ B$ pontos distintos pertencentes à reta r. O segmento de reta AB é o conjunto dos pontos de r que contém $A\ e\ B$ e estão compreendidos entre $A\ e\ B$.

Fixemos um segmento de reta u, que chamaremos de segmento unitário (ou unidade de comprimento). Definamos o comprimento de u igual a 1. Ainda por definição, todos os segmentos com comprimentos iguais a u também terão comprimento 1.

A medida (ou comprimento) de um segmento de reta AB, denotado por $\overline{AB}$, é o número de vezes que o segmento AB contém o segmento u.

Para explicitar mais claramente a medida de um segmento analisemos os seguintes casos:

Caso 1. Existe um ponto C pertencente a AB tal que os segmentos AC e CB sejam congruentes a u. Então,

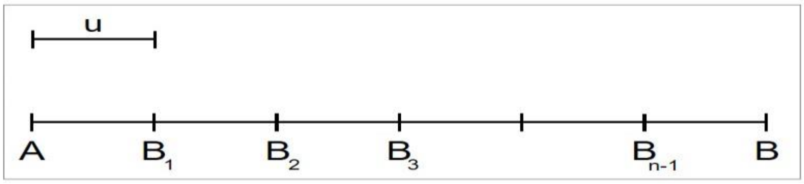
$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = 2.$$

Além disso, denotemos C sendo ponto médio de AB.

Caso 2. Dado n um inteiro positivo, existem pontos $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1} \in AB$, tais que os segmentos $AB_1, B_1B_{2,} \ldots, B_{n-1}B$ sejam todos congruentes ao segmento unitário u. Então,

$$\overline{AB} = \overline{AB_1} + \overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + \cdots + \overline{B_{n-1}B} = n$$

Figura 2.1 – Segmento AB

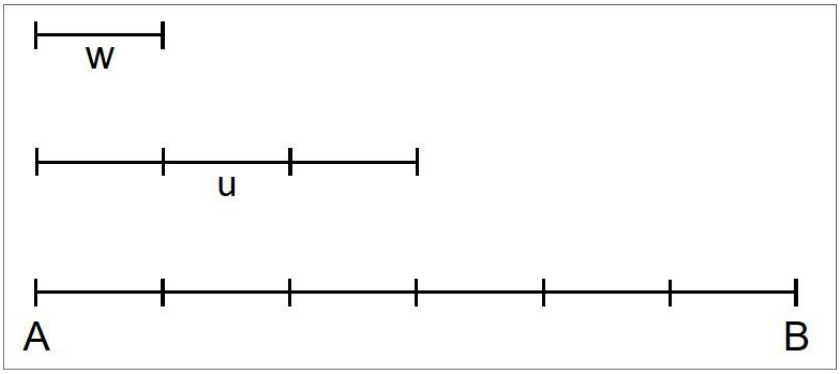


Fonte: Lima (1991).

Concluímos que os casos mencionados acima são segmentos cujos comprimentos são números inteiros. Podemos dizer que quando $\overline{AB} = n$, n inteiro, então AB contém n segmentos unitários u.

Suponhamos agora que o segmento AB não contenha u um número inteiro de vezes. Nesse caso, suponhamos que exista um segmento w (menor que u), tal que w esteja contido n vezes em u e m vezes em $\overline{AB}$, sendo n e m números inteiros. O segmento w é chamado de submúltiplo comum de AB e u.

Figura 2.2 – Segmento Submúltiplo de AB



Fonte: Lima (1991).

Como w está n vezes em u, temos que $\overline{w} = 1/n$. Como w está m vezes em AB, temos que

$$\overline{AB} = m.\frac{1}{n}$$

$$\overline{AB} = \frac{m}{n}.$$

Resumindo, o comprimento de um segmento AB é um número racional m/n, quando existe um segmento w que esteja contido n vezes no segmento unitário u e m vezes em AB. Neste caso, w é um submúltiplo de AB e u, e os segmentos AB e u são ditos comensuráveis, conforme definição abaixo.

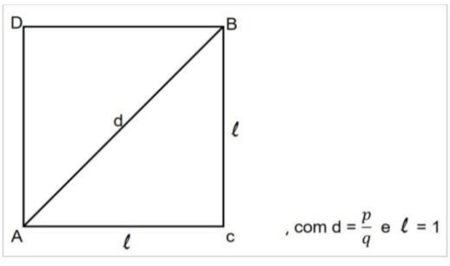
Definição: Dois segmentos AB e CD *são comensuráveis* se houver um segmento EF tal que $\overline{AB} = m.\overline{EF}$ e $\overline{CD} = n.\overline{EF}$ com m e n números inteiros positivos. Se não existirem m e n que satisfaçam essa situação, dizemos que AB e CD são segmentos incomensuráveis.

Durante muito tempo, se acreditava que sempre encontraríamos um segmento que seria submúltiplo de outro, para assim medirmos o outro segmento através apenas de números inteiros. Porém Pitágoras e seus discípulos descobriram o primeiro exemplo de um par de segmentos não comensuráveis, isto é, incomensuráveis.

O exemplo utilizado para esta descoberta foi o lado de um quadrado e sua diagonal.

Com efeito, consideremos um quadrado cujo lado seja um segmento unitário. Suponhamos que o lado e sua diagonal sejam segmentos comensuráveis. Então, o comprimento da diagonal é um número racional $\frac{p}{q}$, com $M.D.C.\{p,q\} = 1$.

Figura 2.3 – Diagonal do Quadrado ABCD



Fonte: Lima (1991).

Aplicando o teorema de Pitágoras (que veremos no capítulo 5), temos:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2,$$

Ou seja,

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2.q^2$$

Daí, p^2 é um número par. Logo, p é um número par e $p = 2k,$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo $p = 2k$ na última equação, obtemos,

$$4k^2 = 2q^2$$

$$2k^2 = q^2.$$

Daí, q^2 é um número par, e consequentemente q é par. Mas, isto é impossível, pois $M.D.C.\{p, q\} = 1$.

Portanto, a diagonal do quadrado, neste caso $AB,$ é um número irracional.

Logo, o lado do quadrado unitário e sua diagonal são segmentos incomensuráveis.

Em geral, pode-se mostrar que a diagonal e o lado de qualquer quadrado são segmentos incomensuráveis.

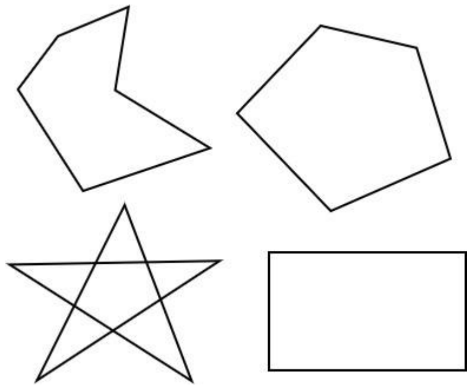
Durante muitos anos a relação entre a Geometria e os Números foi difícil devido a existência dos segmentos incomensuráveis. No século XIX isso foi resolvido com a criação da teoria dos números reais (racionais e irracionais).

2.2 Perímetro

Sejam n um número natural, $n \geq 3$, e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontos distintos do plano, sem que três consecutivos sejam colineares, onde o consecutivo de A_n é A_1, e para

$i \neq n,\ A_{i+1}$ é o consecutivo de A_i. Chamamos de Polígono a união dos segmentos $A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4, \dots, A_nA_1$.

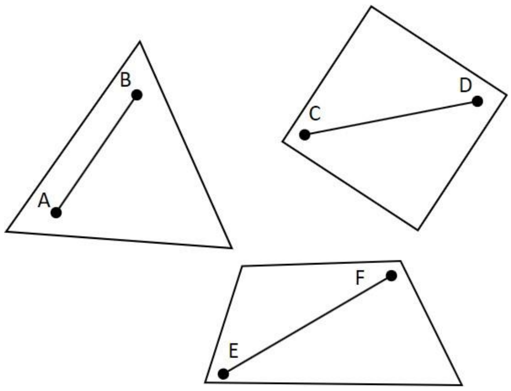
Figura 2.4 – Polígonos



Fonte: Elaborado pelo autor

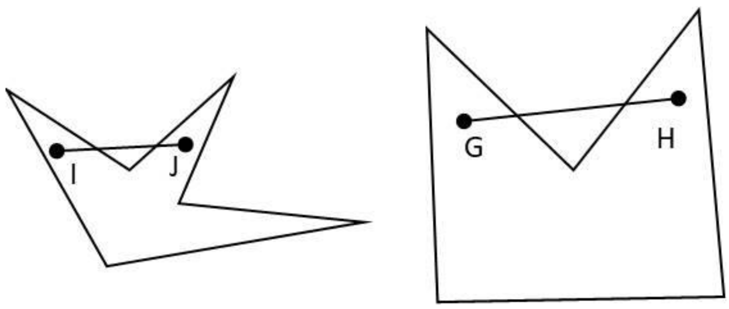
Dizemos que um *Polígono* é *convexo* quando qualquer segmento com extremidades no interior do polígono está totalmente contido no interior dele.

Figura 2.5 – Polígonos Convexos



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 2.6 – Polígonos Não Convexos



Fonte: Elaborado pelo autor

Denominam-se lados de um polígono os segmentos de retas que o formam.

Denomina-se perímetro de um polígono convexo a soma das medidas de todos os lados deste polígono convexo.

Dizemos que dois segmentos $AB \ e \ CD$ são *congruentes* quando $\overline{AB} = \overline{CD}$.

2.3 Nomenclaturas dos Polígonos.

A nomenclatura dos Polígonos depende do número de lados.

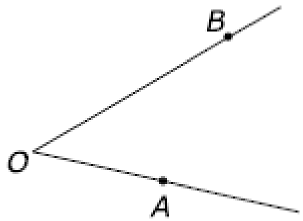
Número de lados	**Nomenclatura**
3 lados	Triângulo
4 lados	Quadrilátero
5 lados	Pentágono
6 lados	Hexágono
7 lados	Heptágono
8 lados	Octógono
9 lados	Eneágono
10 lados	Decágono
11 lados	Undecágono
12 lados	Dodecágono
13 lados	Tridecágono
14 lados	Tetradecágono
15 lados	Pentadecágono
20 lados	Icoságono

CAPÍTULO 3

Denomina-se *Ângulo Geométrico* a reunião de duas semirretas de mesma origem e não colineares.

Notação: $A\hat{O}B$ ou $\hat{O}$, onde O é o vértice.

Figura 3.1 – Ângulo $A\hat{O}B$



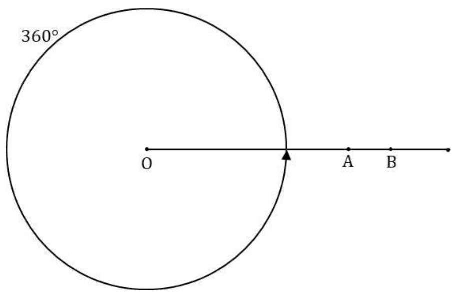
Fonte: Elaborado pelo autor

As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo.

Em geral, os ângulos são medidos em *graus* ou *radianos*.

O ângulo com medida em que dá uma volta completa ao redor da sua origem tem $360°$ (lemos 360 graus).

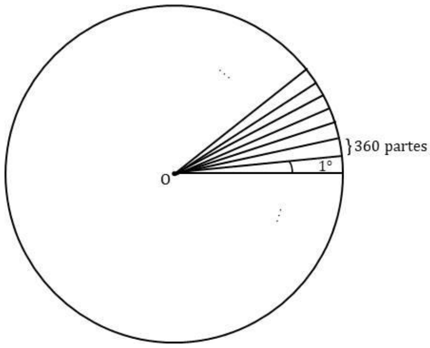
Figura 3.2 – Ângulo $360°$



Fonte: Elaborado pelo autor

Um ângulo com medida de 1° é obtido, quando dividimos uma circunferência de Centro O em 360 partes iguais, como mostra a figura 3.3.

Figura 3.3 – Ângulo $1°$



Fonte: Elaborado pelo autor

Os ângulos não precisam ser múltiplos inteiros de "um grau". Existem ângulos com medidas fracionárias. As principais subdivisões de um grau são os *minutos* e os *segundos*.

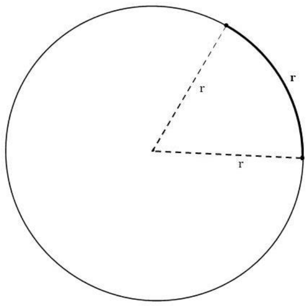
- 1 minuto (1') equivale a $\frac{1}{60}$ de 1 grau.
- 1 segundo (1'') equivale a $\frac{1}{60}$ de 1 minuto.

Dois ângulos $\alpha\ e\ \beta$ são ***complementares*** quando a soma das suas medidas é igual $90°$. Quando a soma das suas medidas for igual a $180°$ chamamos $\alpha\ e\ \beta$ de ***suplementares.***

A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo central em uma circunferência cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio da circunferência.

A figura 3.4 mostra uma circunferência e o arco que possui comprimento igual a x e raio igual a x, logo o ângulo central mede $1\ radiano$.

Figura 3.4 – Círculo com ângulo igual 1 radiano



Fonte: Elaborado pelo autor

Como o comprimento de meia circunferência é πr, e o arco é de $180°$, temos que a medida do ângulo em radianos referente ao 180º será a razão $\frac{\pi r}{r}$, pois fazendo a seguinte regra de três:

(medida do arco) (comprimento do arco)

1 rad ---------------------------- r

x rad --------------------------- πr

$$x = \frac{\pi r}{r} \rightarrow x = \pi \; radianos$$

Ou seja, $180° = \pi \; radianos$. Dessa forma $1 \; radiano \; = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \cong 57°$

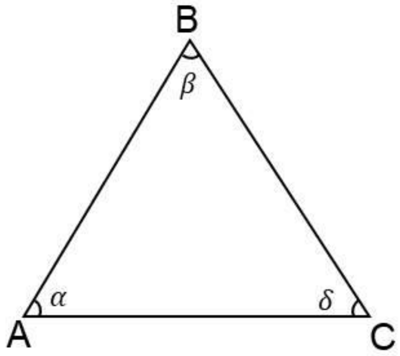
A medida de um ângulo em radianos não depende, portanto da unidade de comprimento considerada.

As medidas dos outros *ângulos*, dadas em *radianos*, podem ser todas obtidas a partir dessa relação, usando proporção, como vemos em alguns exemplos abaixo:

$$30° = \frac{180°}{6} = \frac{\pi}{6} \; rad, \quad 45° = \frac{\pi}{4} \; rad \; , \quad 60° = \frac{\pi}{3} \; rad \quad e \quad 90° = \frac{\pi}{2} \; rad \; .$$

Como já definimos antes, o *Triângulo é o* polígono de três lados e consequentemente também possui três ângulos.

Figura 3.5 – Triângulo ABC



Fonte: Elaborado pelo autor

Diagonal de um polígono é o segmento de reta entre dois vértices não consecutivos do polígono.

O triângulo é o único polígono que não possui diagonal. Além dessa característica, essa figura é muito usada principalmente na construção civil.

Figura 3.6 – Triângulos na Construção Civil I

Fonte: www.fieme.com.br

Figura 3.7 – Triângulos na Construção Civil II

Fonte: www.farolcomunitario.com.br

Figura 3.8 – Triângulos na Construção Civil III

Fonte: www.moneytimes.com.br

Para construirmos um triângulo, é necessário que a medida de qualquer um dos lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois e maior que o valor absoluto da diferença entre essas medidas.

Num triângulo de lados medindo a, b e c, teremos:

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

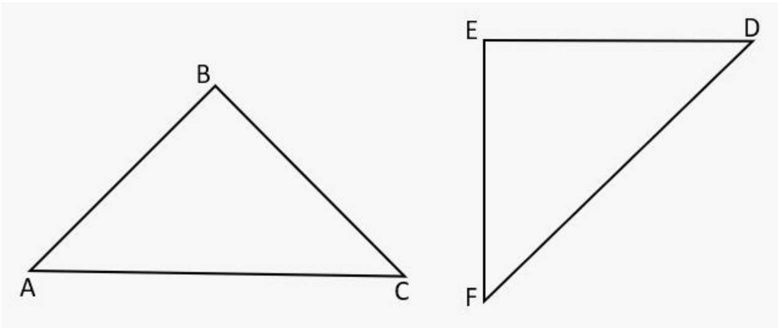
$$|a - b| < c < a + b$$

3 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Dizemos que dois ângulos $\hat{A}$ e $\widehat{B}$ são *congruentes* e denotamos $\hat{A} = \hat{B}$, se eles têm a mesma medida.

Dizemos que dois triângulos $ABC\ e\ DEF$ são congruentes e denotamos $ABC = DEF,$ se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Figura 3.9 – Triângulos Congruentes



Fonte: Elaborado pelo autor

Se $ABC\ e\ DEF$ são congruentes e se

$$A \leftrightarrow D$$

$$B \leftrightarrow E$$

$$C \leftrightarrow F$$

é a correspondência que define a congruência entre os triângulos, então:

$$\overline{AB} = \overline{DE}$$

$$\overline{BC} = \overline{EF}$$

$$\overline{AC} = \overline{DF}$$

$$\hat{A} = \widehat{D}$$

$$\hat{B} = \hat{E}$$

$$\hat{C} = \hat{F}.$$

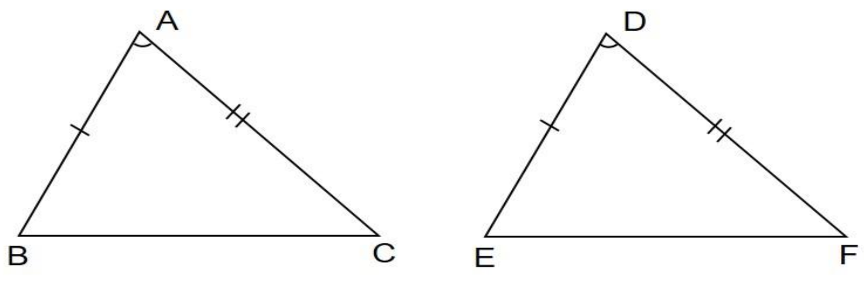
Para facilitar a congruência de triângulos, existem critérios que permitem concluir que dois triângulos são congruentes verificando apenas três das congruências acima. Tais critérios são chamados de Casos de Congruência de Triângulos.

O primeiro caso de congruência é considerado um axioma (verdade inquestionável universalmente válida, muitas vezes utilizada como princípio na construção de uma teoria). Por isso não será demonstrado.

3.1 Axioma (1º Caso de Congruência de Triângulos - LAL)

Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\overline{AB}$=$\overline{DE}$, $\overline{AC}$=$\overline{DF}$ e $\hat{A} = \widehat{D}$ então $ABC = DEF$

Figura 3.10 – Caso de Congruência LAL



Fonte: Elaborado pelo autor

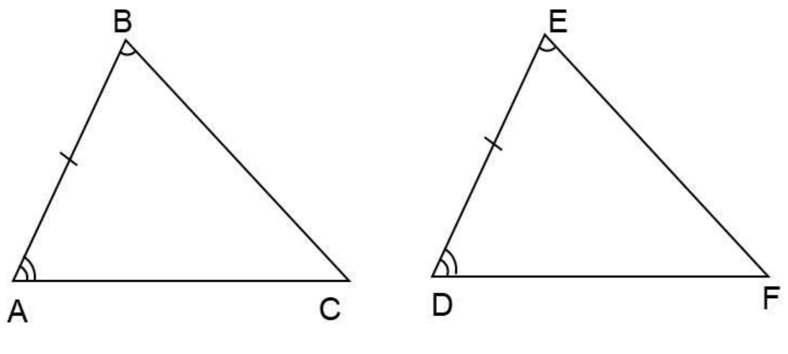
O axioma acima, afirma que é suficiente verificar apenas a congruência entre três pares de relações: dois lados e o ângulo formado por esses dois lados, ou seja:

$$\begin{matrix} \overline{AB} = \overline{DE} \\ \overline{AC} = \overline{DF} \\ \hat{A} = \widehat{D} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \overline{AB} = \overline{DE} \\ \overline{BC} = \overline{EF} \\ \overline{AC} = \overline{DF} \end{matrix} \text{ e } \begin{matrix} \hat{A} = \widehat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{C} = \hat{F} \end{matrix}$$

3.2 Teorema (2º Caso de Congruência de Triângulos - ALA)

Dados os triângulos $ABC\ e\ DEF$, se $\overline{AB} = \overline{DE}, \hat{A} = \widehat{D}\ e\ \hat{B} = \hat{E}$, então $ABC = DEF$

Figura 3.11 - Caso de Congruência ALA



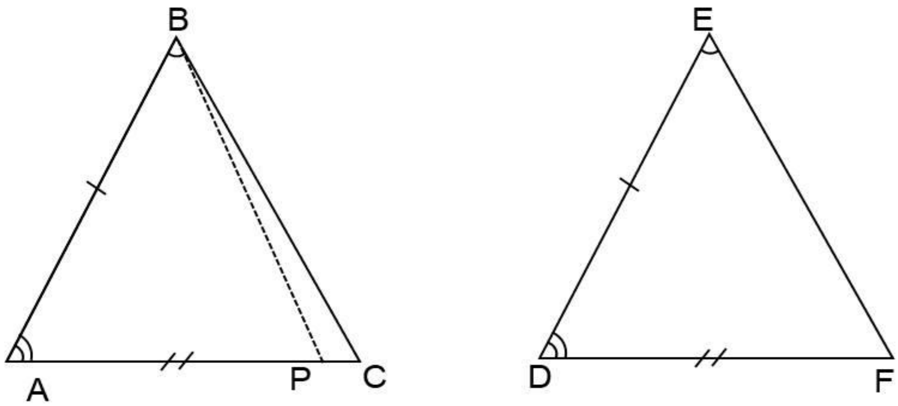
Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Sejam $ABC\ e\ DEF$ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{DE},\ \hat{A} = \widehat{D}\ e\ \hat{B} = \hat{E}$. Seja P um ponto da semirreta S_{AC} tal que $\overline{AP} = \overline{DF}$. Temos dois casos para analisar, ou P está entre $A\ \ e\ \ C$ ou C está entre $A\ \ e\ \ P$.

1º Caso: P está entre $A\ \ e\ \ C,$ como mostra a figura abaixo.

Figura 3.12 – Demonstração do Caso de Congruência ALA (1º caso)



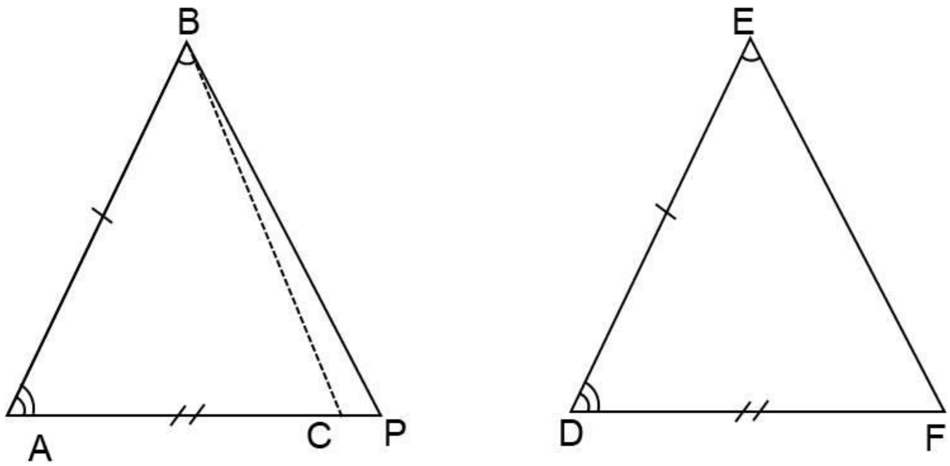
Fonte: Elaborado pelo autor

Como os triângulos $ABP\ e\ DEF$ possuem dois lados $\overline{AB} = \overline{DE}\ e\ \overline{AP} = \overline{DF}\ e\ \hat{A} = \hat{D}$ congruentes, segue pelo caso LAL que $ABP = DEF$. Consequentemente, $A\hat{B}P = \hat{E}$, mas por hipótese $A\hat{B}C = \hat{E}$, logo $A\hat{B}P = A\hat{B}C$,assim as semirretas $S_{BP}\ e\ S_{BC}$ coincidem. Daí, os pontos $Pe\ C$ coincidem. Logo, $ABP = ABC$.

Assim, $ABC = DEF$.

2º Caso: C está entre $A\ e\ P$, como mostra a figura abaixo.

Figura 3.13 – Demonstração do Caso de Congruência ALA (2º caso)



Fonte: Elaborado pelo autor

Como os triângulos $ABP \; e \; DEF$ possuem dois lados $\overline{AB} = \overline{DE} \; e \; \overline{AP} = \overline{DF} \; e \; \hat{A} = \widehat{D}$ congruentes, segue pelo caso LAL que $ABP = DEF$. Consequentemente, $A\hat{B}P = \hat{E}$, mas por hipótese $A\hat{B}C = \hat{E}$, logo $A\hat{B}P = A\hat{B}C$,assim as semirretas $S_{BP} \; e \; S_{BC}$ coincidem. Daí, os pontos $P \; e \; C$ coincidem. Logo, $ABP = ABC$.

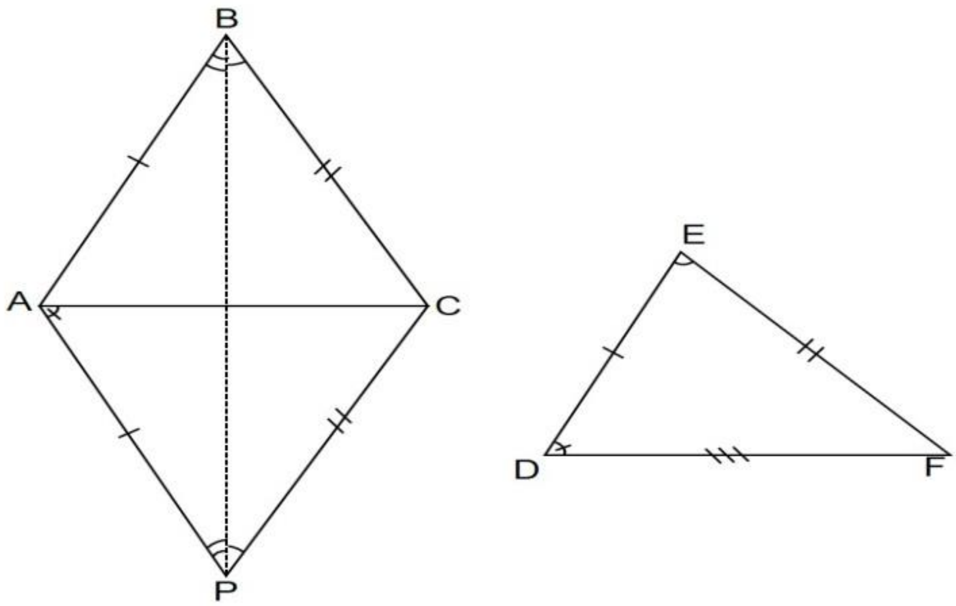
Assim, $ABC = DEF$.

Portanto, pelos dois casos, concluímos que $ABC = DEF$

3.3 Teorema (3º Caso de Congruência de Triângulos - LLL)

Sejam $ABC \; e \; DEF$ dois triângulos tais que $\overline{AC} = \overline{DF}, \overline{BC} = \overline{EF} \; e \; \overline{AC} = \overline{DF}$. Então, $ABC = DEF$.

Figura 3.14 - Caso de Congruência LLL



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

A partir da semirreta S_{AC} e no semiplano oposto ao que contém o ponto B , construímos um ângulo congruente ao $\widehat{D}$. No lado desse ângulo que não contém C, marque o ponto P tal que $\overline{AP} = \overline{DE}$ e ligue P a C, Temos $\overline{AC} = \overline{DF}$ (hipótese),

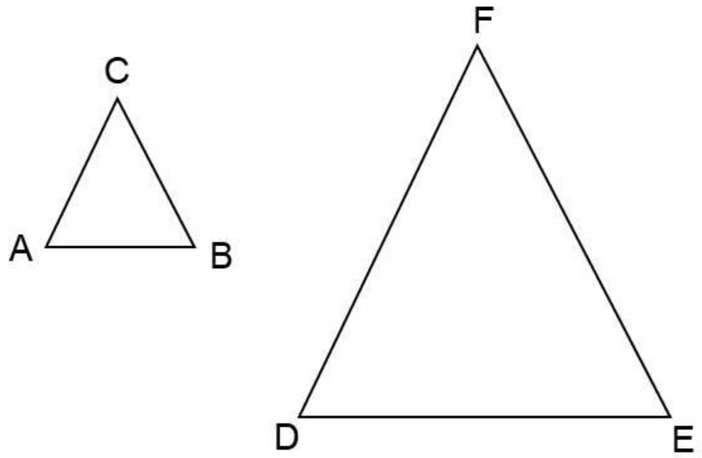
$\overline{AP} = \overline{DE}$ (construção) e $P\hat{A}C = \widehat{D}$ (construção). Pelo caso LAL, $APC = DEF$. Agora trace $\overline{BP}$. Como $\overline{AP} = \overline{DE} = \overline{AB}\ e\ \overline{PC} = \overline{EF} = \overline{BC}$ temos que $ABP\ e\ BCP$ são triângulos isósceles, pois $\overline{AP} = \overline{AB}\ e\ \overline{PC} = \overline{BC}$. Logo $A\hat{P}B = A\hat{B}P\ e\ C\hat{P}B = C\hat{B}P$. Consequentemente $A\hat{P}C = C\hat{B}A$ e pelo caso LAL, temos que $APC = ABC$ e como já provamos acima que $APC = DEF$, concluímos que $ABC = DEF$.

CAPÍTULO 4

4 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dizemos que dois triângulos são *semelhantes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

Figura 4.1 - Triângulos Semelhantes



Fonte: Elaborado pelo autor

Se ABC e DEF são dois triângulos semelhantes e se $A \to D$, $B \to E$ e $C \to F$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes igualdades.

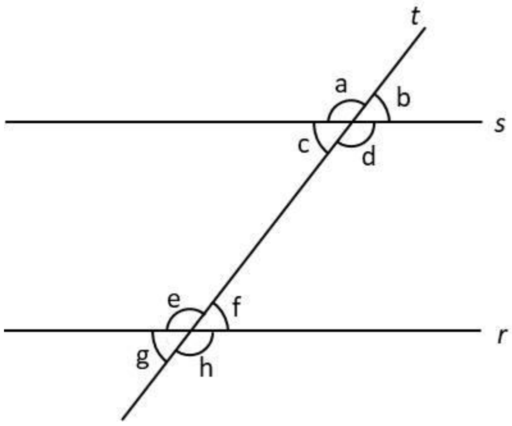
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \;\; e \;\; \hat{A} = \widehat{D}, \hat{B} = \hat{E} \; e \; \hat{C} = \widehat{F}.$$

O quociente comum entre os lados correspondentes é chamado de *razão de proporcionalidade* entre os dois triângulos.

4.1 Retas Paralelas cortadas por uma transversal

Ao cortar duas retas paralelas r e s por uma reta transversal t, formam-se oito ângulos: $a, b, c, d, e, f, g, f\ e\ h,$ conforme figura 4.2.

Figura 4.2 – Retas Paralelas r e s cortadas por uma Transversal t.



Fonte: Elaborado pelo autor

Tais ângulos recebem as seguintes denominações:

- Opostos pelo vértice, os pares: $a\ e\ d,\ \ b\ e\ c,\ \ e\ e\ h,\ \ f\ e\ g$.
- Correspondentes, os pares: $a\ e\ e,\ \ b\ e\ f,\ \ c\ e\ g,\ \ d\ e\ h$.
- Alternos Internos, os pares: $c\ e\ f,\ \ e\ e\ d$.
- Alternos Externos, os pares: $a\ e\ h,\ \ b\ e\ g$.
- Colaterais Internos, os pares: $c\ e\ e,\ \ d\ e\ f$.
- Colaterais Externos, os pares: $a\ e\ g,\ \ b\ e\ h$.

E apresentam as seguintes propriedades:

- Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.
- Os ângulos alternos são congruentes.
- Os ângulos correspondentes são congruentes.
- Os ângulos colaterais são suplementares.

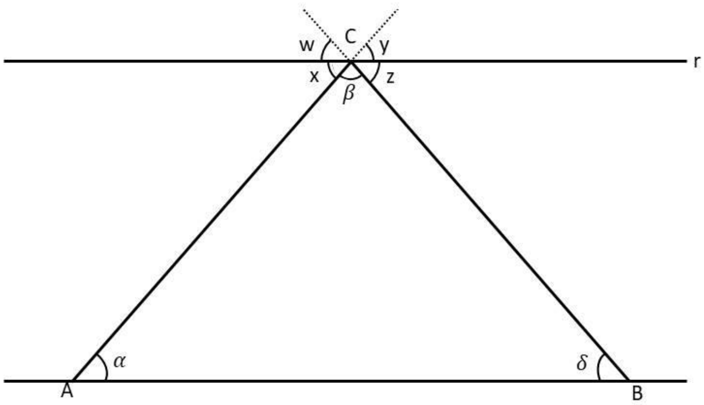
Para uma prova das propriedades acima o leitor pode, por exemplo, consultar a referência [1].

4.2 Teorema (A Soma dos Ângulos internos de um triângulo é 180°)

Demonstração:

Considere um triângulo ABC como o da figura abaixo.

Figura 4.3 – Triângulo ABC com ângulos descritos.



Fonte: Elaborado pelo autor

Mostraremos que $\alpha + \beta + \delta = 180°$, ou seja, que a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é igual a $180°$. Para isso, construímos sobre o ponto C uma reta paralela ao segmento AB desse triângulo.

As retas suportes dos segmentos AC e BC formam transversais, que cortam as duas retas paralelas. Os ângulos α e $\hat{y}$ são ângulos correspondentes, logo $\alpha = \hat{y}\cdot$. Analogamente $\delta = \hat{w}$.

Os ângulos $\hat{w}$ e $\hat{z}$ são opostos pelo vértice, assim $\hat{w} = \hat{z}$. Analogamente, $\hat{x} = \hat{y}$.

Note que a soma $\hat{x}$+ $\beta + \hat{z} = 180°$. Isso, pois os três ângulos são adjacentes e seus limites são a reta paralela ao lado AB, ou seja, r.

Substituindo os valores de $\hat{x}\ e\ \hat{z}$ temos:

$$\alpha + \beta + \delta = 180°$$

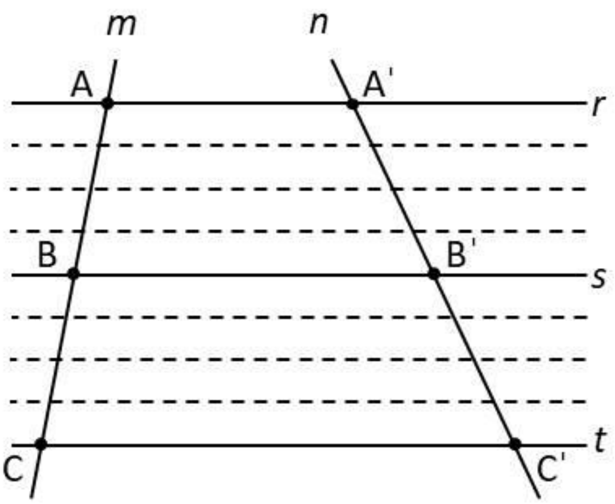
Como queríamos demonstrar.

4.3 Teorema de Tales

Se três retas paralelas $r, s\ e\ t$ são cortadas por duas transversais $m\ e\ n$ nos pontos $A, B\ e\ C$ e nos pontos $A', B'\ e\ C'$, respectivamente, então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

Figura 4.4 – Retas Paralelas r, s e t com transversais m e n.



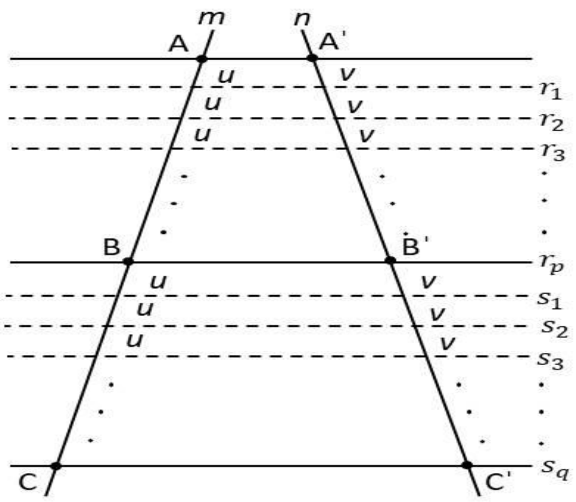
Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Suponhamos que os segmentos $AB\ e\ BC$ da reta m sejam comensuráveis. Por definição existe um segmento u submúltiplo tanto de AB quanto de BC. Assim teremos $p\ e\ q$, inteiros positivos, tais que $\overline{AB} = p.\bar{u}\ e\ \overline{BC} = q.\bar{u},$ logo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{p.\bar{u}}{q.\bar{u}} = \frac{p}{q}$$

Figura 4.5 – Retas Paralelas com transversais m e n.



Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma podemos considerar que a reta m é interceptada por retas paralelas $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_p$ e $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_q$ de tal forma que tenhamos na reta m, $p + q$ segmentos congruentes a u, como vemos na figura 4.5. Dessa forma, na reta n, temos que $A'B'$ e $B'C'$ são divididos, respectivamente, em p e q partes, que medem cada uma delas $\bar{v}$, com

$$\overline{A'B'} = p.\bar{v} \; e \; \overline{B'C'} = q.\bar{v} \, .$$

E analogamente

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{p.\bar{v}}{q.\bar{v}} = \frac{p}{q}$$

Com isso temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{p}{q} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

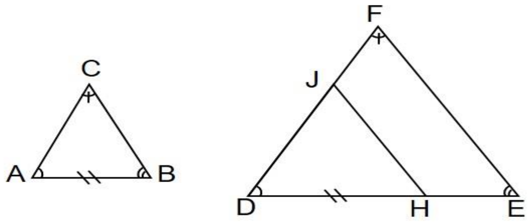
Provando assim o Teorema de Tales para segmentos comensuráveis.

Para uma prova no caso em que os segmentos são incomensuráveis, o leitor pode consultar o Volume 2 da coleção Tópicos de Matemática Elementar [5].

4.4 Teorema

Dados dois triângulos $ABC \; e \; DEF$. Se $\hat{A}= \widehat{D} \; e \; \hat{B} = \hat{E}$ então os triângulos são semelhantes.

Figura 4.6 - Triângulos Semelhantes pelo Caso AA



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°,$ concluímos que $\hat{C} = \hat{F}$. Seja H um ponto da semirreta S_{DE} tal que $AB = DH$. Por H trace uma reta paralela a FE. Esta corta DF no ponto J pertencente a semirreta S_{DF}, formando um triângulo DHJ que é congruente ao triângulo $ABC,$ pelo caso ALA, pois $\hat{A} = \widehat{D}, AB = DH \; e \; \hat{B} = D\widehat{H}J$.

Pelo Teorema 3.3, onde $DE \; e \; DF$ são transversais e $JH//FE$ (por construção) temos que

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DJ}}{\overline{DF}}$$

Como $\overline{AB} = \overline{DH} \; e \; \overline{DJ} = \overline{AC}$ então temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

Analogamente,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

Logo,

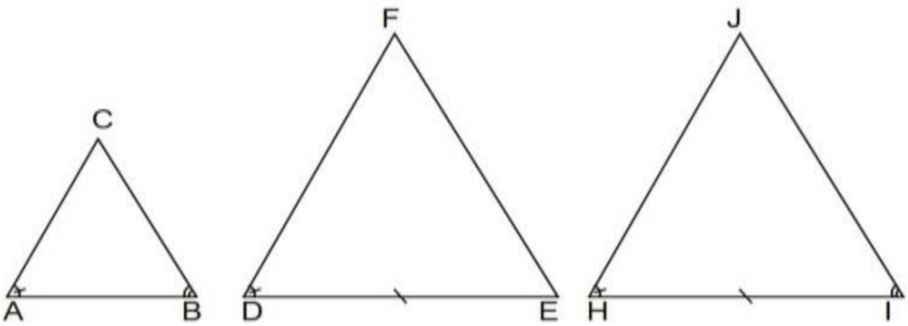
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \quad \text{e} \quad \hat{A} = \widehat{D},\ \hat{B} = \hat{E}\ e\ \hat{C} = \widehat{F}.$$

Portanto, os triângulos $ABC\ e\ DEF$ são semelhantes.

4.5 Teorema

Sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $\hat{A} = \widehat{D}\ e\ \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$. Então, ABC é semelhante a DEF.

Figura 4.7 - Triângulos Semelhantes ABC e DEF



Fonte: Elaborado pelo autor

Construímos um triângulo HIJ que possui $\overline{HI} = \overline{DE}$, $\widehat{H} = \hat{A}$ e $\hat{I} = \hat{B}$. De acordo com o teorema 4.4, os triângulos $ABC\ e\ HIJ$ são semelhantes.

Então,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$$

Com $HI = DE$ e a hipótese $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ temos que $HJ = DF$.

Por construção, $HI = DE$, $\widehat{H} = \hat{A} = \widehat{D}$, então podemos concluir pelo caso de congruência LAL, que os triângulos $HIJ\ e\ DEF$ são congruentes. Como os triângulos $ABC\ e\ HIJ$ são semelhantes, concluímos que $ABC\ e\ DEF$ são semelhantes.

CAPÍTULO 5

5 O TEOREMA DE PITÁGORAS E TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

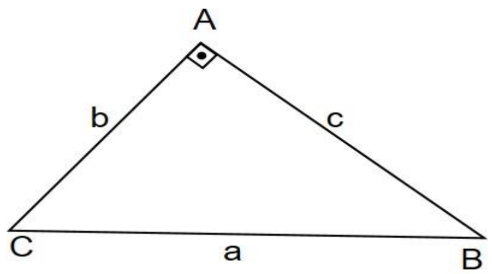
Neste capítulo veremos o Teorema de Pitágoras, a Recíproca do Teorema de Pitágoras, Trigonometria do Triângulo Retângulo (triângulo que possui um ângulo interno de 90º, que também é chamado de ângulo reto) e Funções Trigonométricas de alguns ângulos. Esse capítulo precede o Capítulo destinado a áreas e aos exercícios resolvidos, pois são pré-requisitos para o entendimento dos mesmos.

5.1 O Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras: Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Figura 5.1 - Triângulo Retângulo ABC



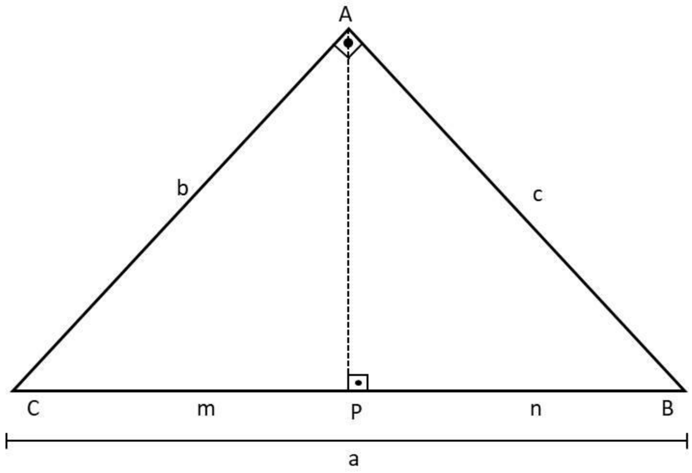
Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Considere a a medida da hipotenusa e b e c as medidas dos catetos.

Por construção, seja P o ponto pertencente à S_{CB} tal que AP seja perpendicular à CB. Desta forma temos que os triângulos ABC e APB são semelhantes. Isso se deve a ambos terem os ângulos correspondentes, $\hat{A} = \mathrm{A}\hat{P}B = 90°$, $\hat{B} = \hat{B}$ e $A\hat{C}B = B\hat{A}P$.

Figura 5.2 - Triângulo Retângulo ABC com $a = m + n$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Então

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \rightarrow c^2 = a.n$$

Analogamente, como os triângulos ABC e PAC são semelhantes,

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \rightarrow b^2 = a.m$$

Somando membro a membro as duas igualdades $\begin{cases} c^2 = a.n \\ b^2 = a.m \end{cases}$, temos que

$$b^2 + c^2 = a.m + a.n$$

$$b^2 + c^2 = a(m+n), \text{ como } m + n = a$$

$$b^2 + c^2 = a.a$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

5.2 Recíproca do Teorema de Pitágoras

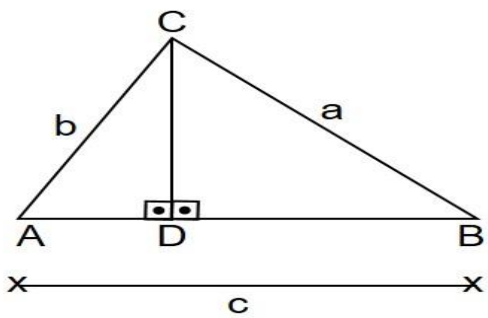
Se os lados de um triângulo medem $a, b\ e\ c,$ e a relação $a^2 = b^2 + c^2$ é verdadeira, então o triângulo com esses lados é retângulo.

Demonstração:

Consideremos um triângulo ABC tal que $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b\ , \overline{BC} = a$.

1º Caso: $\hat{A} < 90°$

Figura 5.3 – Triângulo ABC



Fonte: Elaborado pelo autor

Consideremos $b \leq c$. Assim, a reta por C perpendicular a AB intercepta AB em um ponto D entre $A\ e\ B,$ conforme Figura 5.3. Deste modo, $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$.

Como $ACD\ e\ CDB$ são triângulos retângulos, segue do teorema de Pitágoras que,

$\begin{cases} \overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 \\ \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \end{cases}$. Daí, $\begin{cases} b^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 \\ a^2 = \overline{CD}^2 + (\overline{AB} - \overline{AD})^2 \end{cases}$. Como $\overline{AB} = c,$

$$\begin{cases} b^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 \\ a^2 = \overline{CD}^2 + c^2 - 2c.\overline{AD} + \overline{AD}^2 \end{cases}$$

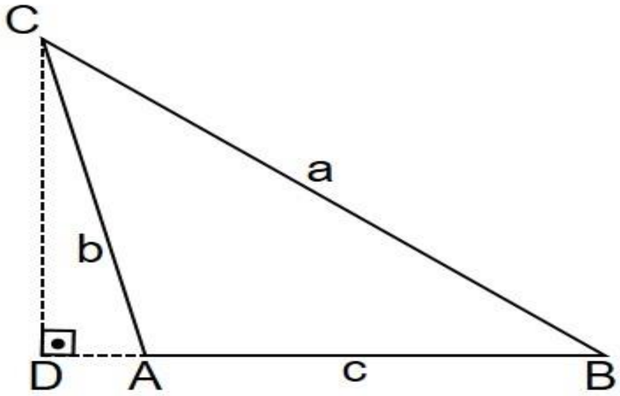
As duas equações acima resultam em

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c.\overline{AD} < b^2 + c^2,$$

já que $2c.\overline{AD} > 0$. Mas, isso contradiz a hipótese.

2º Caso: $\hat{A} > 90^\circ$

Figura 5.4 - Triângulo Obtusângulo ABC



Fonte: Elaborado pelo autor

Como $\hat{A} > 90^\circ$, a reta por C perpendicular a semirreta S_{BA}, intercepta S_{BA} em um ponto D, tal que $\overline{DA} + \overline{AB} = \overline{DB}$, conforme Figura 5.4. Como ACD e DBC são triângulos retângulos, novamente pelo teorema de Pitágoras, obtemos

$$\begin{cases} b^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 \\ a^2 = \overline{CD}^2 + (\overline{DA} + c)^2 \end{cases}, \text{ e daí, } \begin{cases} \overline{CD}^2 = b^2 - \overline{AD}^2 \\ a^2 = \overline{CD}^2 + (\overline{AD} + c)^2 \end{cases}. \text{ Logo,}$$

$$a^2 = b^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AD}^2 + 2c\overline{AD} + c^2 \quad \text{ou} \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2c\overline{AD}.$$

Então, $a^2 > b^2 + c^2$, pois $2c\overline{AD} > 0$. Novamente contradizendo a hipótese. Assim, a única possibilidade é $\hat{A} = 90^\circ$. Portanto, ABC é um triângulo retângulo.

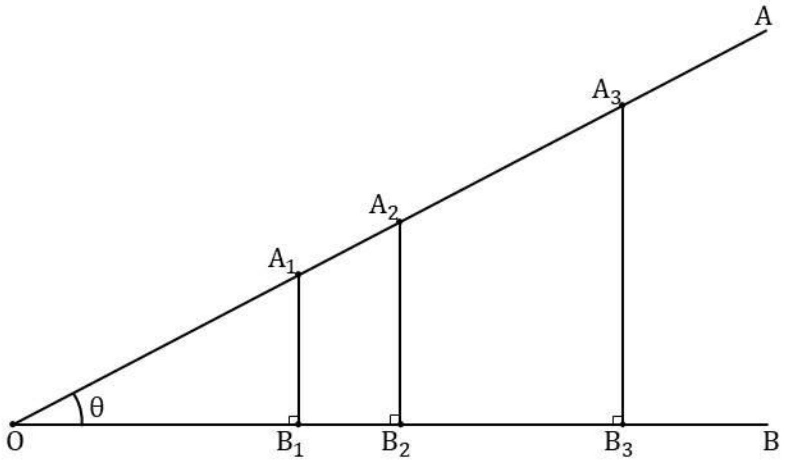
5.3 Trigonometria no Triângulo Retângulo

Esta seção está totalmente apoiada no livro "*Trigonometria e Números Complexos" dos autores: Manfredo P. do Carmo, Augusto C. Morgado e Eduardo Wagner (Coleção do Professor de Matemática da SBM).*

Trigonometria no triângulo retângulo é um ramo da matemática que relaciona os lados e os ângulos de um tal triângulo.

Consideremos um ângulo $A\hat{O}B = \theta$, $0° < \theta < 90°$ e tracemos, a partir dos pontos A_1, A_2, A_3, A_4, etc, da semirreta AO, perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, etc, à semirreta OB, conforme figura 5.5. Os triângulos $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3,$ etc, são semelhantes pois possuem os mesmos ângulos.

Figura 5.5 – Triângulos semelhantes com ângulo θ.



Fonte: Elaborado pelo autor

Então,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots$$

Essas razões dependem apenas do ângulo θ, $0° < \theta < 90°$, e não dos tamanhos dos triângulos construídos. Por isso elas recebem uma notação especial,

$$sen\,\theta = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$$

e é chamada de *seno de θ.*

Novamente da figura 5.5, vemos que as razões

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \cdots,$$

também dependem apenas do ângulo θ. Tais razões também recebem notações especiais, para $0° < \theta < 90°$,

$$cos\,\theta \;=\; \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} \quad e \quad tg\,\theta \;=\; \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}},\; 0° < \theta < 90°,$$

que se chamam *cosseno de* θ e *tangente de* θ , respectivamente.

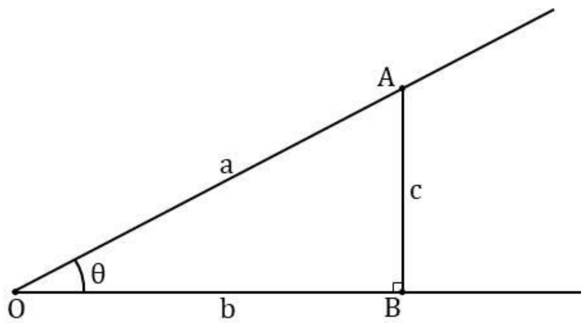
Duas relações aparecem naturalmente.

(1) $sen^2\theta\; + cos^2\theta = 1$

e

(2) $tg\;\theta = \dfrac{sen\;\theta}{cos\;\theta}$

Figura 5.6 – Triângulo OAB com ângulo θ.



Fonte: Elaborado pelo autor

Para demonstrá-las, consideremos um ângulo θ de vértice O e um triângulo OAB, retângulo em B como mostra a figura 5.6.

Fazendo $\overline{OA} = a, \overline{OB} = b$ e $\overline{AB} = c,$ temos pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$. Logo,

$$sen^2\theta + cos^2\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

e

$$\frac{sen\ \theta}{cos\ \theta} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{b}{c} = tg\ \theta$$

5.4 Seno, Cosseno e Tangente de alguns ângulos.

a) Seno, cosseno e tangente dos ângulos $30°\ e\ 60°$.

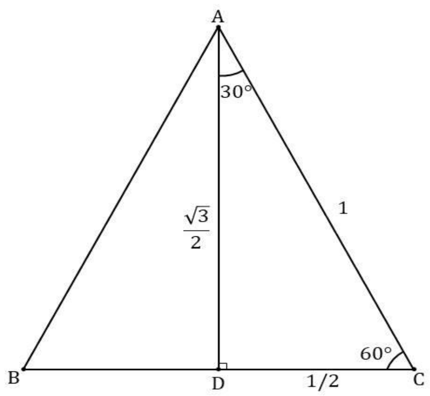
Consideremos um triângulo equilátero ABC de lado 1 da figura 5.7 traçamos a altura AD (que também é mediana). Obtemos então $\overline{DC} = \frac{1}{2}$ e pelo Teorema de Pitágoras $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como $D\hat{A}C = 30°$, temos

$$sen\ 30° = \frac{1}{2},\ cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } tg\ 30° = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ cos\ 60° = \frac{1}{2} \text{ e } tg\ 60° = \sqrt{3}$$

Figura 5.7 – Triângulo ABC com ângulos de $30°\ e\ 60°$.



Fonte: Elaborado pelo autor

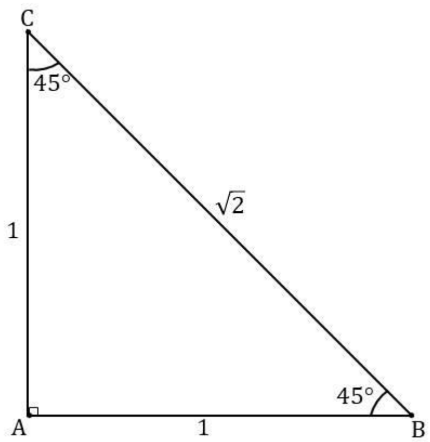
b) Seno, Cosseno e tangente de $45°$.

Consideremos agora um triângulo ABC, retângulo em A e com os dois catetos iguais a 1, conforme a figura 5.8. Como $\overline{BC} = \sqrt{2}$ (pelo Teorema de Pitágoras), temos que

$$sen\ 45° = cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, $tg\ 45° = 1$.

Figura 5.8 – Triângulo ABC com ângulos de $45°$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Do exposto acima, temos a seguinte tabela:

θ	30°	45°	60°
sen θ	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos θ	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tg θ	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

CAPÍTULO 5

6 ÁREAS

Neste capítulo veremos como medir a porção do plano ocupada por quadrados, triângulos, retângulos, paralelogramos, trapézios, círculos e setores circulares.

6.1 Área do Quadrado

Quadrado é o quadrilátero que possui 4 lados iguais e os 4 ângulos retos. Por conveniência, adotaremos como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento e o chamaremos de *quadrado unitário.*

Qualquer quadrado cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1.

Um quadrado Q cujo lado tem comprimento o inteiro n, pode ser decomposto, por meio de paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, cada um deles com lado unitário e, portanto, com área 1. Assim, o quadrado Q terá área igual a n^2.

Analogamente, se o lado de um quadrado R tem por medida $\frac{1}{n}$, com n inteiro, então o quadrado unitário se decompõe, novamente pelas paralelas aos lados, em n^2 quadrados justapostos. Os n^2 quadrados congruentes a R compondo um quadrado de área 1, segue-se que a área de R deve satisfazer à condição n^2 x (área de R) = 1 e, portanto, área de $R = \frac{1}{n^2}$.

Caso o lado do quadrado T qualquer seja um número racional $\frac{m}{n}$, podemos decompor cada lado deste quadrado T em m segmentos, cada um dos quais com comprimento $\frac{1}{n}$. Traçando paralelas aos lados desse quadrado T, teremos m^2 quadrados, sendo cada um dos quais com lados iguais a $\frac{1}{n}$. Portanto, a área de cada um desses quadrados será de $\frac{1}{n^2}$. Segue que a área de T deve ser

$$m^2\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}.$$

Ou seja,

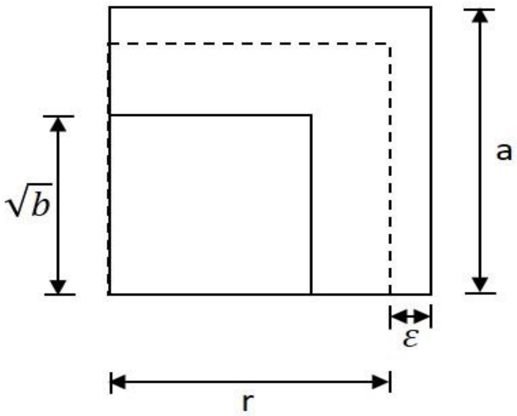
$$\text{Área de } T = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Concluímos então que, a área do quadrado Q cujo lado mede $a = \frac{m}{n}$, sendo $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$,é dada pela expressão: Área de $Q = a^2$.

Existem quadrados cujos lados são incomensuráveis com o segmento unitário. Seja Q um desses: o lado de Q tem como medida o *número irracional* a. Mostraremos que ainda assim a área desse quadrado também é dada pela expressão a^2.

Consideremos b um número tal que $b < a^2$. Existe um número racional r próximo de a, tal que $r < a$ e $b < r^2 < a^2$. Podemos garantir essa desigualdade, escolhendo $r = a - \varepsilon$, com $0 < \varepsilon < a - \sqrt{b}$. Assim, $\sqrt{b} < a - \varepsilon = r < a$ e consequentemente, $b < r^2 < a^2$, como afirmamos.

Figura 6.1 - Quadrado de Área a^2



Fonte: Lima, 1991

No interior de Q, tomemos um quadrado Q' tal que r é o lado deste. Como r é um número racional, a área de Q' é r^2. Como Q' está contido no interior de Q, podemos afirmar que:

$$\acute{a}rea\ de\ Q' < \acute{a}rea\ de\ Q,$$

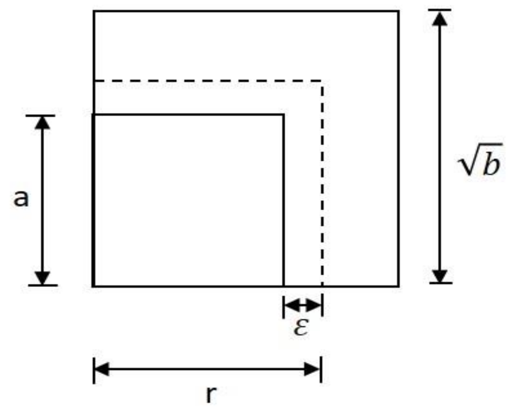
ou seja,

$$r^2 < \text{ área de } Q.$$

Como $b < r^2$, temos que $b < $ área de Q. Assim, todo número real b, inferior a a^2, é também menor que a área de Q.

Por outro lado, consideremos b um número tal que $b > a^2$. Existe um número racional r, tal que $r > a$, porém, r é tão próximo de a que $b > r^2 > a^2$. Podemos garantir essa desigualdade, escolhendo $r = a + \varepsilon,$ com $0 < \varepsilon < \sqrt{b} - a$. Assim, $a < \varepsilon + a < \sqrt{b}$ e $a < r < \sqrt{b}$ consequentemente $b > r^2 > a^2$ como afirmamos.

Figura 6.2 - Quadrado de Área b



Fonte: Lima, 1991

No exterior de Q, tomemos um quadrado Q' tal que r é o lado deste. Como r é um número racional, a área dele é r^2. Como Q está contido no interior de Q', podemos afirmar que:

$$\text{área de } Q < \text{ área de } Q,'$$

ou seja,

$$\text{área de } Q < r^2.$$

Como $b > r^2$, temos que $b\ >$ área de Q. Assim, todo número real b, superior a a^2, é também maior que a área de Q.

Por exclusão, teremos então que a área de $Q = a^2$ como queríamos demonstrar.

Concluímos que a área de um quadrado Q, cujo lado mede a, deve ser expressa pela fórmula:

Área de $Q =\ a^2$, onde a é um número real positivo qualquer.

6.2 Área do Retângulo

Retângulo é o quadrilátero que tem os quatro ângulos retos.

Seja R o retângulo com lados medindo m e n, com m, n números inteiros. Traçando paralelas aos lados, podemos decompor R em mn quadrados unitários, de modo que a área de R seja dada pela expressão

$$R = m.n$$

Suponhamos então que o retângulo possua lados com medidas a e b, sendo a, b número racionais, podemos escrever esses números como: $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{q}$, com mesmo denominador q. Dividimos cada lado de R em segmentos de comprimentos $\frac{1}{q}$. Assim o lado a será decomposto em p segmentos, já o lado b será decomposto por r segmentos, sendo todos eles de comprimento $\frac{1}{q}$. Traçando as paralelas aos lados, o retângulo R ficará subdividido em pq quadrados, cada um deles de lados iguais a $\frac{1}{q}$. A área de cada um desses quadradinhos é $\left(\frac{1}{q}\right)^2 = \frac{1}{q^2}$.

Logo a área de R deverá ser igual a

$$(p.q).\frac{1}{q^2} = \frac{pr}{q^2} = \frac{p}{q}\,.\,\frac{r}{q},$$

Ou seja, a área de $R = a.b$.

Concluímos assim que, quando os lados de um retângulo R têm medidas os números racionais a e b, a área de R é expressa pela fórmula:

Área de $R = a.b$

Dizemos, portanto, que a área de um retângulo é o produto da base pela altura.

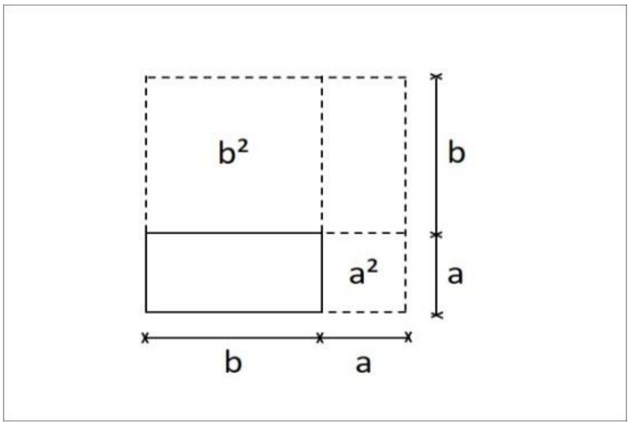
Acima demonstramos que a fórmula é válida para lados racionais, porém esta fórmula é geral, sendo assim válida também para números irracionais.

Para estes casos usaremos a demonstração a seguir, pois nela podemos considerar a e b números reais.

Para demonstrarmos a fórmula da área de um retângulo qualquer, construiremos um quadrado a partir de um retângulo dado e usaremos a fórmula do quadrado demonstrada em 6.1.

Dado o retângulo R, de base b e altura a, onde a e b são números reais, construímos o quadrado Q, de lado $a + b$, sendo este quadrado como na figura a seguir:

Figura 6.3 - Quadrado de lado $a + b$



Fonte: Elaborado pelo autor

Como $a + b$ é o lado do quadrado e a área do quadrado, é dada pelo quadrado do seu lado, temos:

$$\text{Área de } Q = (a + b)^2 = \ a^2 + 2ab + b^2$$

Por outro lado, como os quadrados menores possuem lados a e b, terão áreas $a^2 \ e \ b^2$, respectivamente, assim teremos então:

$$\text{Área de } \ Q = a^2 + b^2 + 2.(área\ de\ R)$$

Portanto,

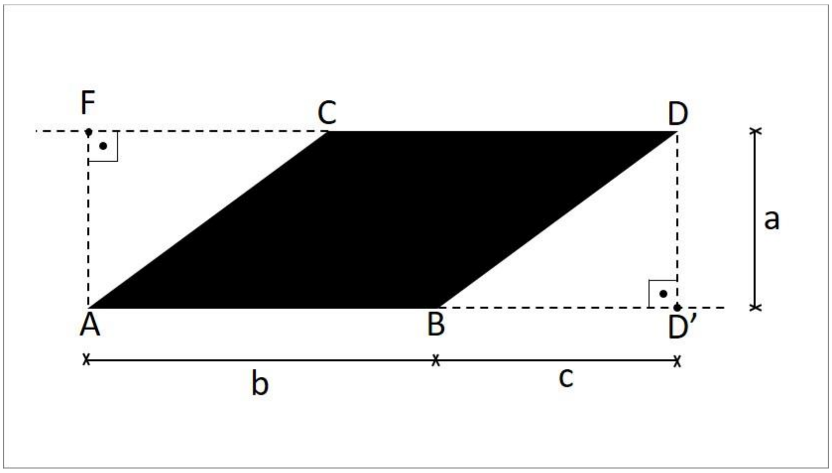
$$\text{Área de } R = a.b$$

6.3 Área do Paralelogramo

Um paralelogramo é um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

Consideremos um paralelogramo ABDC, onde AB//CD e AC//DB.

Figura 6.4 – Paralelogramo ABCD



Fonte: Elaborado pelo autor

Consideremos $\overline{AB} = b$, baixando uma perpendicular do ponto D à base AB, temos o ponto D', tal que D' pertence ao prolongamento do segmento AB. Sendo assim, o segmento DD', com comprimento denotado por a, é uma altura do paralelogramo com base AB. Denotemos o comprimento do segmento BD'por c.

Analogamente, prolongando o lado CD e baixando uma perpendicular a CD pelo ponto A teremos o ponto F. Como $CD//AB$, e lembrando que as alturas do paralelogramo AF e DD' têm os mesmos comprimentos, temos que $\overline{AB} = \overline{CD} = b, \overline{BD'} = \overline{FC} = c$ e $\overline{D'D} = \overline{AF} = a$. Então o retângulo $AD'DF$ de base $(b+c)$ e altura a, têm área $(b+c).a$:

$$\text{Área } AD'DF = (b+c).a = ba + ca.$$

Além disso,

Como os triângulos AFC e BDD' são congruentes e juntos formam um retângulo de base c e altura a, temos que

$$\text{Área } AFC + \text{Área } BDD' = c.a$$

Assim

$$\text{Área } AD'DF = \text{Área } ABDC + \text{Área } AFC + \text{Área } BDD'$$

$$(b+c).a = \text{Área } ABDC + c.a$$

$$\text{Área } ABDC = (b+c).a - ca = ba$$

Portanto, a área do paralelogramo é dada pelo produto do comprimento de uma das bases pelo comprimento da altura correspondente a esta base.

6.4 Área do Triângulo

Um triângulo é uma figura geométrica que possui três lados.

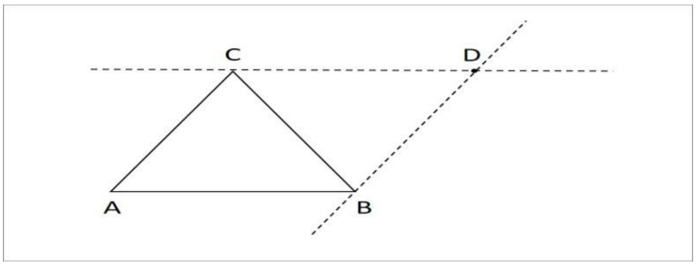
Para encontrarmos a área de um triângulo, basta lembrarmos que um triângulo é a metade de um paralelogramo.

Consideremos o triângulo ABC, cuja área é desconhecida. Tracemos a paralela ao lado AB passando pelo ponto C e a paralela a AC passando pelo ponto B.

Denotemos por D o ponto de encontro dessas paralelas e a o comprimento da altura do paralelogramo $ABDC$ pelo ponto C de a.

Como os triângulos ABC e BDC são congruentes (ALA), possuem a mesma área. Daí,

Figura 6.5 - Triângulo ABC e AC//BD



Fonte: Elaborado pelo autor

Área $ABDC$ = 2. (Área de ABC).

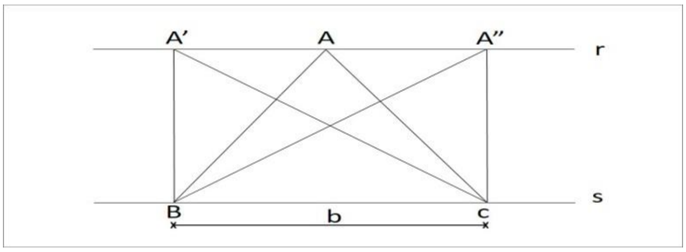
Consequentemente,

$$\text{Área de } ABC = \frac{1}{2}b.a$$

Assim, a área de um triângulo é a metade do produto de uma base pela altura correspondente.

Consideremos r e s duas retas paralelas, $A \in r$ e $B, C \in s$, onde $\overline{BC} = b$, sendo b um número real positivo, conforme figura abaixo.

Figura 6.6 - Triângulo ABC de base BC e A pertencente à reta r



Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos observar que deslocando A pela reta r teremos uma infinidade de triângulos cuja altura será a mesma e a base também. Consequentemente, a área de ABC será constante.

6.5 Área do Triângulo em Relação aos Lados

Para cálculos de áreas de triângulos quaisquer, temos outras ferramentas, por exemplo, quando temos um triângulo qualquer, conhecendo a medida dos três lados, podemos utilizar a fórmula de Heron para calcular a área S do triângulo:

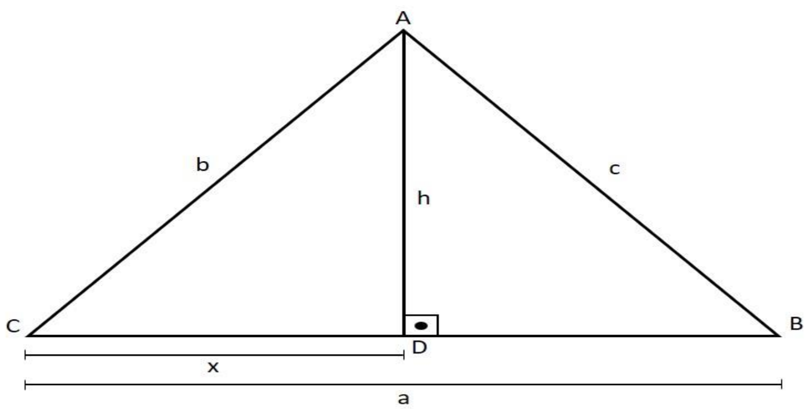
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde p é semiperímetro do triângulo de lados a, b e c, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Demonstração:

Consideremos o triângulo qualquer da figura abaixo, onde a, b e c são lados do triângulo, h a altura relativa a base a e x a projeção de b em a.

Figura 6.7 - Triângulo ABC e altura h relativa à base BC



Fonte: Elaborado pelo autor

Aplicando o teorema de Pitágoras visto em 5.1, nos triângulos ACP e ABP teremos:

$$\begin{cases} b^2 = h^2 + x^2 \\ c^2 = h^2 + (a-x)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h^2 = b^2 - x^2 \ (*) \\ h^2 = c^2 - (a-x)^2 (**) \end{cases}$$

Igualando as equações (*) e (**) teremos

$$b^2 - x^2 = c^2 - (a-x)^2$$

$$b^2 - x^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2 + 2ax$$

$$x = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}$$

Substituindo essa expressão na equação (*) temos:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}\right)^2$$

Como $h > 0$ e resolvendo a expressão temos que

$$h^2 = \frac{4a^2b^2}{4a^2} - \frac{(b^2 - c^2 + a^2)^2}{4a^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (b^2 - c^2 + a^2)^2}}{2a}$$

Aplicando a expressão de h acima na fórmula da área de um triângulo vista em 6.4, temos que

$$Área\ A = \frac{1}{2}\ base\ x\ altura$$

$$A = \tfrac{1}{2}\ a.h,$$

$$A = \frac{1}{2}\ a.\frac{\sqrt{4a^2b^2 - (b^2 - c^2 + a^2)^2}}{2a}$$

$$A \ = \ \frac{1}{4} \, . \sqrt{4a^2b^2 - (b^2 - c^2 + a^2)^2}$$

$$A \ = \ \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (b^2 - c^2 + a^2)^2}}{\sqrt{16}}$$

Aplicando produtos notáveis (produto da soma pela diferença)

$$A \ = \ \frac{\sqrt{[2ab + (b^2 - c^2 + a^2)]. \sqrt{[2ab - (b^2 - c^2 + a^2)].}}}{\sqrt{16}}$$

$$A = \sqrt{\frac{(a^2 + 2ab + b^2 - c^2).(c^2 - a^2 + 2ab - b^2)}{16}}$$

$$A = \sqrt{\frac{[(a^2 + 2ab + b^2) - c^2].[c^2 - (a^2 + 2ab - b^2)]}{16}}$$

$$A = \sqrt{\frac{[(a + b)^2 - c^2].[c^2 - (a - b)^2]}{16}}$$

$$A = \sqrt{\frac{[(a + b) + c].[(a + b) - c][c + (a - b)][c - (a - b)]}{16}}$$

$$A = \sqrt{\frac{(a + b + c).(a + b - c).(a - b + c).(-a + b + c)}{16}}$$

Somando e subtraindo os lados em cada parcela do produto sem afetar seu resultado, teremos:

$$A = \sqrt{\frac{(a + b + c).(a + b - c + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}).(a - b + c + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}).(-a + b + c + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a})}{16}}$$

$$A = \sqrt{\frac{(a + b + c).(a + b + c - 2c).(a + b + c - 2b).(a + b + c - 2a)}{16}}$$

$$A = \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\frac{(a+b+c-2c)}{2}\frac{(a+b+c-2b)}{2}\frac{(a+b+c-2a)}{2}}$$

Como $p = \frac{(a+b+c)}{2}$

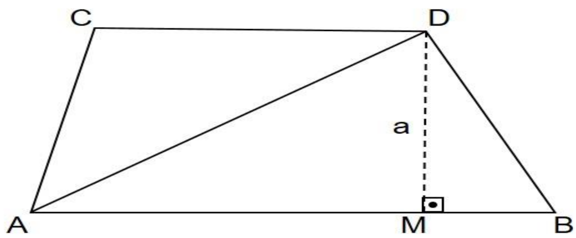
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

6.6 Área do Trapézio

Um trapézio é um quadrilátero no qual dois lados opostos são paralelos e os outros dois não são.

Seja $ABDC$ um trapézio, com $AB//CD$ e $\overline{AB} > \overline{CD}$.

Figura 6.8 - Trapézio ABCD



Fonte: Elaborado pelo autor

Denotemos $\overline{AB} = b_1$ e $\overline{CD} = b_2$, e chamemos de a a distância entre as paralelas AB e CD. Assim, existe um ponto $M \in AB$ tal que MD é perpendicular a AB.

Ligando os pontos A e D temos os triângulos ACD e ABD.

Aplicando a fórmula da área do triângulo em ambos teremos

$$Área\ ACD = \frac{1}{2}(\overline{CD}\,.\,\overline{MD})\ e\ Área\ ABD = \frac{1}{2}(\overline{AB}\,.\,\overline{MD})$$

Observe que a altura do triângulo ACD é externa ao mesmo, o que não interfere no resultado.

Como o trapézio é decomposto nos triângulos ACD e ABD. Temos que

$$\acute{A}rea\ de\ ABDC\ =\ \acute{A}rea\ ACD\ +\ \acute{A}rea\ ABD$$

$$\acute{A}rea\ de\ ABDC\ =\ \frac{1}{2}(\overline{CD}\ .\ \overline{MD}) + \frac{1}{2}(\overline{AB}\ .\overline{MD})$$

$$\acute{A}rea\ de\ ABDC\ =\ \frac{1}{2}(\ b_2.a) + \frac{1}{2}(\ b_1.a)$$

$$\acute{A}rea\ de\ ABDC\ =\ \frac{(\ b_{1+}\ b_2)}{2}\ .a$$

Assim, a área do trapézio é igual à semissoma das bases vezes a altura.

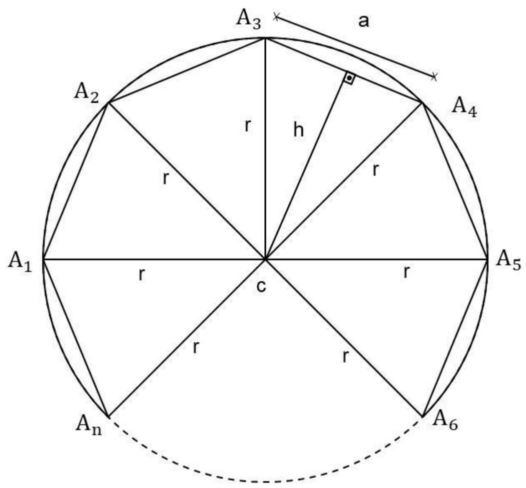
6.7 Área do Círculo

Dado um ponto O e $r > 0$, denomina-se círculo a união de todos os pontos que distam t de O, sendo $0 \leq t \leq r$.

A área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares inscritos (BARBOSA,2002).

Imaginemos um polígono regular com n lados (n muito grande). Esse polígono inscrito na circunferência de raio r. Vamos dividir o polígono em triângulos isósceles iguais. Cada triângulo com um vértice no centro da circunferência, um lado igual a a e dois lados iguais ao raio r. Seja h a altura desse triângulo relativa à base a.

Figura 6.9 - Polígono Regular Inscrito na Circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do polígono será: $A_n = n.\frac{ah}{2} = \frac{(na)h}{2}$

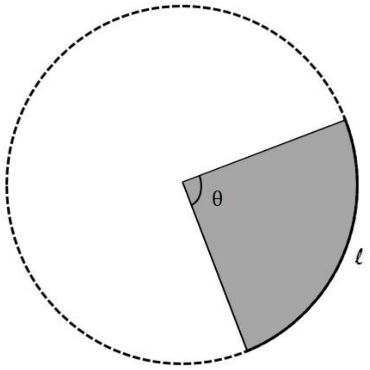
Observe que na é o perímetro do polígono, e que quando n cresce infinitamente o polígono tende para a circunferência de raio r (que tem comprimento $2\pi r$) e a altura h tende para r. Assim, a área A do círculo é dada por:

$$A = \frac{(2\pi r)\, r}{2} = \pi r^2.$$

6.8 Área do Setor Circular

É frequente nos problemas termos que calcular áreas de setores circulares. Veja que a área de um setor circular é proporcional ao ângulo central. Pois, dobrando o ângulo central a área do setor dobra, triplicando a área do setor triplica, e assim por diante. Assim, se o círculo tem raio R e o setor circular tem ângulo central $\theta\ (em\ graus)$, podemos determinar a área A do setor circular com uma simples regra de três:

Figura 6.10 - Setor Circular



Fonte: Elaborado pelo autor

$$360º \text{ ----------- } \pi R^2$$

$$\theta° \text{ ----------- } A$$

Logo,

$$360°\, A = \theta°\, \pi R^2 \quad \text{ou} \quad A = \frac{\theta°}{360°} \pi R^2.$$

Por outro lado, a área de um setor circular também é proporcional ao comprimento l do seu arco. Pois, dobrando o comprimento do arco a área do setor dobra, triplicando o comprimento do arco a área do setor triplica, e assim por diante. Do mesmo modo, se o comprimento do setor circular é l, por regra de três simples:

$$\pi R^2 - - - - 2\pi R$$

$$A - - - - l$$

Logo,

$$A. 2\pi R = l\pi R^2 \quad \text{ou} \quad A = \frac{1}{2} l. R$$

A última fórmula é muito interessante, pois é a área de um triângulo de base l e altura R. Caso saibamos o ângulo central do setor, basta lembrarmos que a fórmula acima se referente a $360°$. Então basta fazermos proporção.

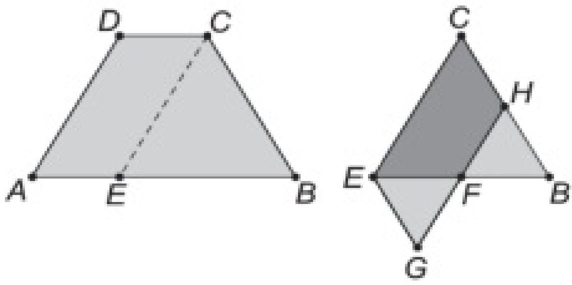
Caso saibamos a medida do arco, também poderemos fazer proporção com o perímetro da circunferência.

CAPÍTULO 7

7 EXERCÍCIOS

7.1. ***(OBMEP 2015, Fase 1, Nível 2 , questão 9)*** O trapézio $ABCD$ foi dobrado ao longo do segmento CE, paralelo ao lado AD, como na figura. Os triângulos EFG e BFH são equiláteros, ambos com lados de $4\ cm$ de comprimento. Qual é o perímetro do trapézio?

Figura 7.1 – Trapézio ABCD Dobrado



Fonte: PORTAL OBMEP

Resolução:

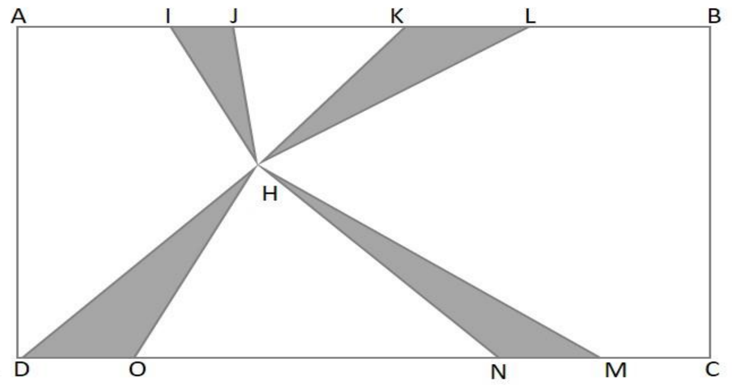
Como $AD\ e\ CE$ são paralelos, $ADCE$ é um paralelogramo. Daí, $\overline{AD} = \overline{CE}$. Por hipótese $EFG\ e\ BFH$ são equiláteros de lados 4cm, logo $\overline{GH} = 8cm = \overline{EC} = \overline{AD}$. Também temos $\overline{AE} = \overline{EG} = \overline{CD} = 4cm$. Além disso, temos as seguintes relações:

- $\widehat{CEB} = \widehat{HFB} = 60°$ (ângulos correspondentes)
- $\widehat{EBC} = \widehat{FBC} = 60°$ (triângulo equilátero FBH)
- $\widehat{ECB} = 180° - \widehat{CEB} - \widehat{EBC} = 60°$

Daí, o triângulo EBC é equilátero de lado $EB = EF + FB = 8\ cm$. Assim, o perímetro do trapézio $ABCD$ é: $AE + EB + BC + DC + AD = 4 + 8 + 8 + 4 + 8 = 32\ cm$.

7.2. **(*Banco de questões obmep 2013, nível 2, questão 5*)** Na figura a seguir, $ABCD$ é um retângulo, e o comprimento do segmento BC é igual a 2. Além disso, os comprimentos dps segmentos IJ, KL, DO e NM são todos iguais a 1. Determine a área da região pintada de cinza.

Figura 7.2 – Retângulo ABCD

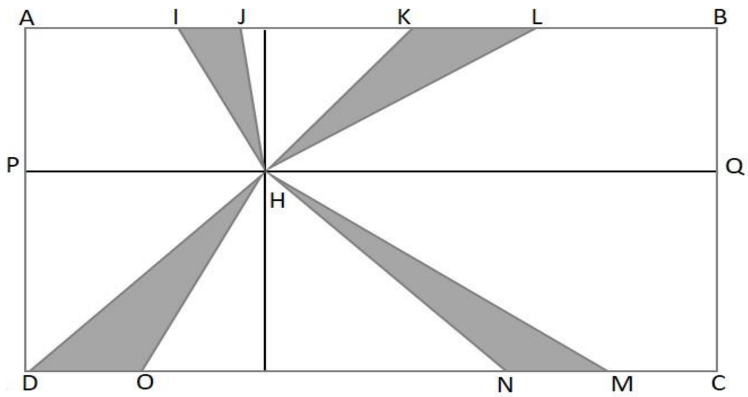


Fonte: PORTAL OBMEP

Resolução:

Traçando um segmento paralelo aos lados AB e CD pelo ponto H, teremos os pontos $P \in AD \; e \; Q \in BC$ de modo que a área cinza é a soma dos triângulos cujas bases são iguais a 1 .

Figura 7.3 – Trapézio ABCD Segmentado



Fonte: PORTAL OBMEP

Teremos:

$$Área\ de\ IJH = \frac{1 \cdot BQ}{2},\ Área\ de\ KLH = \frac{1 \cdot BQ}{2},$$

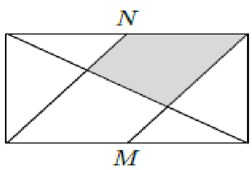
$$Área\ de\ DOH = \frac{1 \cdot (2 - BQ)}{2}, Área\ de\ MNH = \frac{1 \cdot (2 - BQ)}{2}.$$

Somando as igualdades membro a membro, teremos:

$$(IJH) + (KLH) + (DOH) + (MNH) = \frac{BQ}{2} + \frac{BQ}{2} + \frac{2}{2} - \frac{BQ}{2} + \frac{2}{2} - \frac{BQ}{2} = 2$$

7.3. (Prova OBMEP 2013 – N2Q7 – 1ª fase) A figura representa um retângulo de 120 m^2 de área. Os pontos m e n são os pontos médios dos lados a que pertencem. Qual é a área sombreada?

Figura 7. 4 – Retângulo com M e N Pontos Médios



Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

A região sombreada da figura do enunciado pode ser decomposta em um quadrilátero (laranja) e um triângulo (azul). Movendo o triângulo azul de lugar como está indicado na figura a seguir, vemos que a região sombreada do enunciado tem área igual à área do triângulo MNB. Este triângulo corresponde a $\frac{1}{4}$ do retângulo ABCD. Logo a área da região sombreada do enunciado é igual a $\frac{1}{4} \times 120 = 30$ cm^2.

Figura 7. 5 – Retângulos ABCD sombreados.

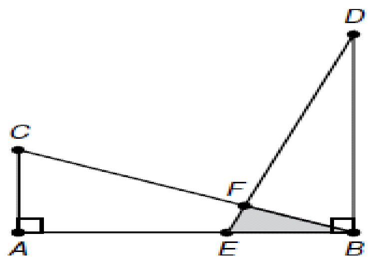
Fonte: PORTAL OBMEP

7.4. *(OBMEP 2006, Fase 2, Nível 3 , questão 3)* Na figura, os triângulos ABC e BDE são congruentes e os ângulos BAC e BDE são retos.

(a) Ache a razão entre a área do triângulo BDF e a área do quadrilátero $AEFC$.

(b) Determine a medida do ângulo BFE.

Figura 7.6 – Triângulos Retângulos que se interceptam.



Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

a) Como os triângulos ABC e BDE são congruentes, temos

$$\text{área } \Delta\text{ABC} = \text{área } \Delta\text{BDE}.$$

Por outro lado,

$$\text{área de AEFC } = \text{área } \Delta\text{ABC} - \text{ área } \Delta\text{BFE} = \text{ área } \Delta\text{BDE } - \text{ área } \Delta\text{BFE } = \text{ área } \Delta \text{ BDF}.$$

Portanto,

$$\frac{\text{área } \Delta\text{BDF}}{\text{área de AEFC}} = 1 \ .$$

b) Como os triângulos ABC e BDE são congruentes, temos que $\widehat{ABC} = \widehat{BDE} = \alpha$, donde $\widehat{DBF} = 90° - \alpha$. Observe que

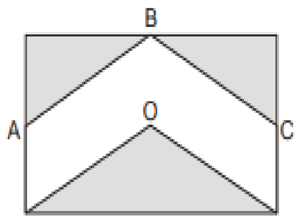
$$\widehat{BFE} + \widehat{DFB} = 180° = \widehat{DFB} + \widehat{DBF} + \alpha = \widehat{DFB} + 90° - \alpha + \alpha = \widehat{DFB} + 90°.$$

Portanto,

$$\widehat{BFE} = 90°.$$

7.5. (Questão 1 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2006): No retângulo abaixo, A, B e C são pontos médios de seus lados e O é o ponto de encontro de suas diagonais. Calcule a razão entre a área da região sombreada e a área do retângulo.

Figura 7.7 – Retângulo e seus pontos médios

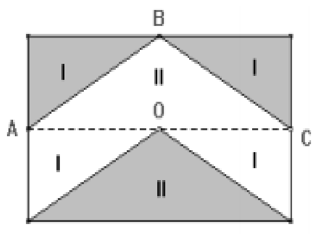


Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Observemos a figura abaixo

Figura 7.8 – Retângulo e Razão de Áreas Sombreadas.

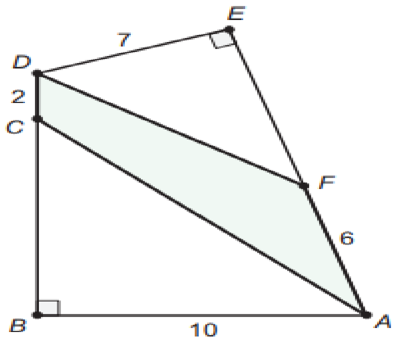


Fonte: PORTAL OBMEP

Como A, B e C são pontos médios, os quatro triângulos rotulados com I na figura acima são congruentes (pelo caso de congruência LAL), bem como os dois indicados por II (pelo caso de congruência LLL). Logo, a área branca é igual a 2 triângulos I mais 1 triângulo II, e a área sombreada também é igual a 2 triângulos I mais 1 triângulo II. Assim, a área sombreada é igual à área em branco e, logo, cada uma delas é igual à metade da área do retângulo. Portanto, a razão entre a área da região sombreada e a área do retângulo é igual a $\frac{1}{2}$.

7.6 (Questão 8 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2016): Na figura abaixo, os pontos C e F pertencem aos lados BD e AE do quadrilátero $ABDE$, respectivamente. Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são retos e os segmentos AB, CD, DE e FA têm suas medidas indicadas na figura. Qual é a área do quadrilátero $ACDF$?

Figura 7.9 – Quadrilátero $ABDE$



Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Traçando o segmento CF dividimos o quadrilátero $ACDF$ em dois triângulos, CDA e DFA. Logo, a área do quadrilátero será a soma das áreas desses dois triângulos. No triângulo CDA, consideremos a base CD, logo a altura do triângulo será AB. Daí,

$$Área\ CDA = \frac{\overline{CD}.\overline{AB}}{2} = \frac{2.10}{2} = 10$$

Da mesma forma, o triângulo DFA de base AF possui altura DE. Assim,

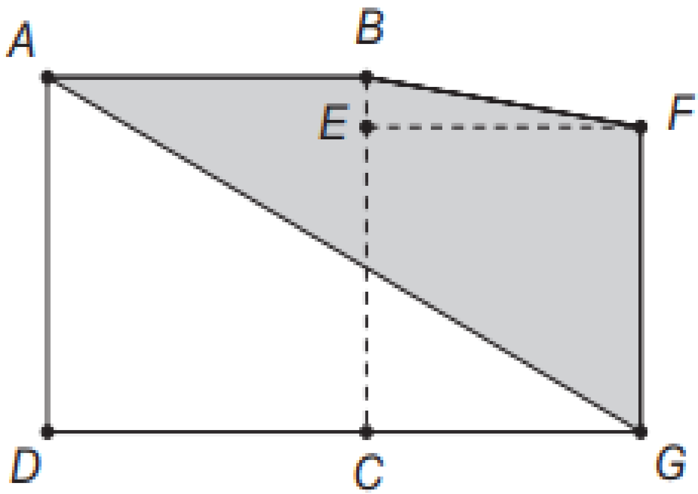
$$\acute{A}rea\ DFA = \frac{\overline{FA}.\overline{DE}}{2} = \frac{6.7}{2} = 21$$

Portanto,

$$\acute{A}rea\ ACDF = \acute{A}rea\ CDF + \acute{A}rea\ CFA = 10 + 21 = 31.$$

7.7 (Questão 5 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2014): Na figura abaixo, $ABCD$ e $EFGC$ são quadrados de áreas R e S, respectivamente. Qual é a área da região cinza?

Figura 7.10 – Quadrados R e S



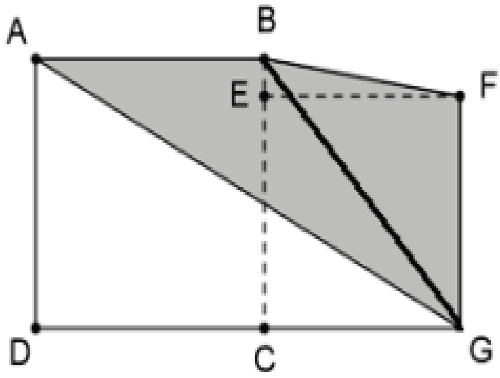
Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Como a área do quadrado ABCD é R, temos que o lado deste é $\sqrt{R}$, ou seja, $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{AD} = \sqrt{R}$. Analogamente, o lado do quadrado EFGC é $\sqrt{S}$, ou seja, $EF = FG = CG = CE = \sqrt{S}$.

Tracemos o segmento BG como na figura abaixo.

Figura 7.11 – Quadrados R e S e Área Sombreada



Fonte: PORTAL OBMEP

A área cinza é a soma das áreas dos triângulos ABG e BGF. Consideremos a base AB do triângulo ABG, logo

$$\text{Área ABG } = \frac{\overline{AB}.\overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{R}\cdot\sqrt{R}}{2} = \frac{R}{2}$$

Analogamente, consideremos FG a base do triângulo BFG, assim

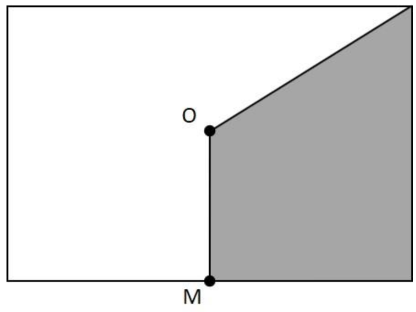
$$\text{Área BFG } = \frac{\overline{FG}.\overline{EF}}{2} = \frac{\sqrt{S}\cdot\sqrt{S}}{2} = \frac{S}{2}$$

Portanto, a área da Região cinza ABFG é

$$\text{Área ABFG} = \text{Área ABG} + \text{Área BFG} = \frac{R}{2} + \frac{S}{2} = \frac{R+S}{2}$$

7.8 (Prova 1ª fase OBMEP 2017 – Nível 1 – questão 7): A figura mostra um quadrado de centro o e área 20 cm^2. O ponto m é o ponto médio de um dos lados. Qual é a área da região sombreada?

Figura 7. 12 – Quadrado com parte Sombreada

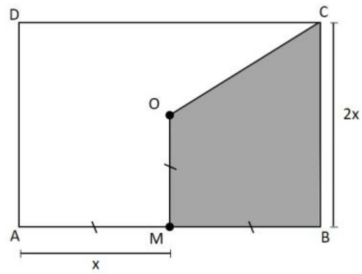


Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Consideremos o quadrado ABCD onde M é o ponto médio de AB. Denotemos x a medida de AM, conforme figura abaixo.

Figura 7.13 – Quadrado com parte Sombreada e Marcações.



Fonte: Elaborado pelo autor

Consequentemente MB=OM=x e BC = 2x. A área sombreada é um trapézio de bases x e 2x e altura x. O quadrado de lado 2x possui área igual a 20, logo

$$(2x)^2 = 20$$

$$4x^2 = 20$$

$$x^2 = 5$$

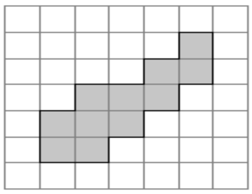
$$x = \sqrt{5}.$$

Portanto,

$$\text{Área MBOC} = \frac{(x+2x).x}{2} = \frac{(3\sqrt{5}.).\sqrt{5}.}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5\ cm.$$

7.9 (Exemplo 2 – página 90 – Apostila Encontros de Geometria): A figura sombreada a seguir foi desenhada em uma malha de quadrados de lado 1 cm. Qual é a área e qual é o perímetro desta figura? Quantos quadradinhos podem ser acrescentados à figura de modo a obter o máximo de área sem alterar o perímetro? (exemplo 2 – página 90 – apostila encontros de geometria)

Figura 7.14 – Polígono na Malha Quadriculada I

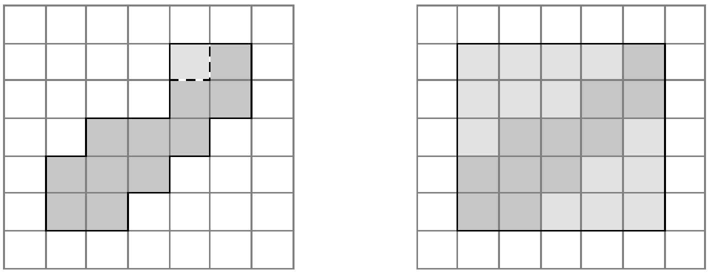


Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Por uma contagem direta verifica-se que a figura é formada por 11 quadradinhos e que o contorno da figura é formado por 20 segmentos de comprimento 1. Daí a figura tem área 11 e perímetro 20. Analisando agora a figura a seguir à esquerda vemos que se acrescentamos um quadradinho colado na figura, aumentamos a sua área em uma unidade, mas não alteramos o seu perímetro, pois só trocamos dois segmentos (pontilhados) que já faziam parte do contorno da figura por outros dois segmentos. Podemos ir acrescentando estes quadradinhos até formar um quadrado de lado 5. Portanto, podemos acrescentar mais 14 quadradinhos na figura dada sem alterar o seu perímetro, como está indicado na figura a seguir e à direita.

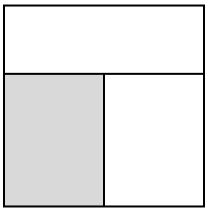
Figura 7.15 – Polígono na Malha Quadriculada II



Fonte: PORTAL OBMEP.

7.10 (Prova OBMEP 2009 – N1Q17 – 1ª fase). A figura mostra um quadrado de lado 12 cm, dividido em três retângulos de mesma área. Qual é o perímetro do retângulo sombreado?

Figura 7.16 – Três Retângulos formando um Quadrado



Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Como o lado do quadrado é 12 cm, temos que sua área será igual a $12^2 = 144$ cm^2. Como os três retângulos possuem mesma área e as três juntas resultam na área do quadrado, logo a área de cada retângulo é $\frac{144}{3} = 48$ cm^2. Observe que os dois retângulos inferiores possuem mesma base e como o lado do quadrado é 12 cm, temos que as duas bases serão 6 cm. Então,

$$\text{Área de cada retângulo} = base\ x\ altura$$

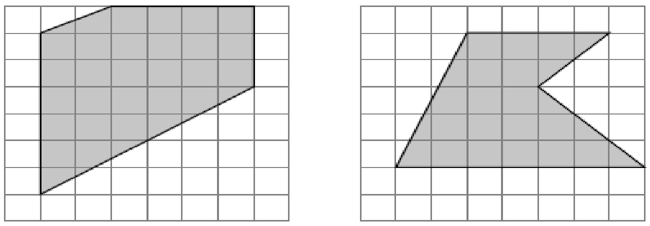
$$48 = 6\,.\,altura$$

$$altura = \frac{48}{6} = 8$$

Assim, as dimensões dos retângulos são 6 cm e 8 cm. Portanto, o perímetro do retângulo sombreado é $6 + 6 + 8 + 8 = 28\ cm$.

7.11 (Exemplo 1 – página 98 – apostila encontros de geometria). Decompondo em figuras geométricas mais simples, calcule a área de cada uma das seguintes figuras, desenhadas em uma malha de quadrados de lado 1.

Figura 7.17 – Polígonos na Malha Quadriculada

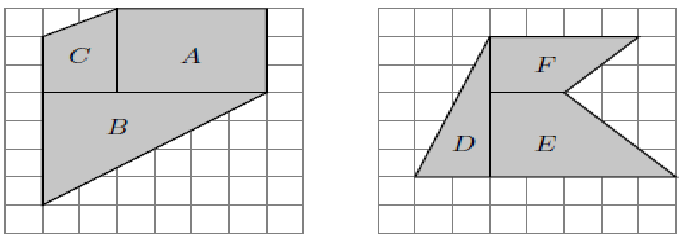


Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Na figura a seguir, apresentamos uma possível decomposição das figuras dadas em triângulos, retângulos e trapézios.

Figura 7.18 – Decomposição de Polígonos na Malha Quadriculada.



Fonte: PORTAL OBMEP.

A figura da esquerda está decomposta em:

A) Um retângulo de lados 3 e 4;

$$área\ (A) = 3 \times 4 = 12$$

B) Um triângulo retângulo de catetos 6 e 4;

$$área\ (B) = \frac{6 \times 4}{2} = 12$$

C) Um trapézio de bases 2 e 3 e de altura 2.

$$área\ (C) = \frac{(2+3) \times 2}{2} = 5$$

Deste modo, a área da figura da esquerda é 12+12+5=29.

Por outro lado, a figura da direita está decomposta em:

D) Um triângulo retângulo de catetos 2 e 5;

$$área(D) = \frac{2 \times 5}{2} = 5$$

E) Um trapézio de bases 5 e 2 e de altura 3;

$$área(E) = \frac{(5+2) \times 3}{2} = 10{,}5$$

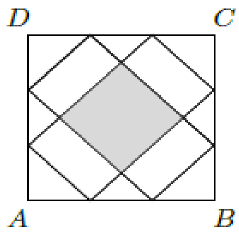
F) Um trapézio de bases 2 e 4 e de altura 2.

$$área(F) = \frac{(2+4) \times 2}{2} = 6$$

Deste modo, a área da figura da direita é $5 + 10{,}5 + 6 = 21{,}5$.

7.12 (exemplo 4 – página 101 – apostila encontros de geometria): Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado 18. Sobre cada um dos seus lados estão marcados dois pontos que dividem o quadrado em três partes iguais. Traçando alguns segmentos que unem estes pontos, foi obtida a seguinte figura. Qual é a área do quadrado sombreado?

Figura 7.19 – Quadrado ABCD com Área Sombreada em seu Interior.

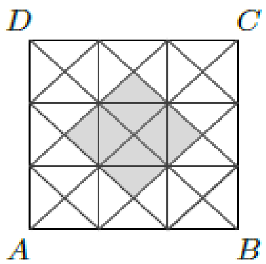


Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Desenhando vários segmentos de reta como está indicado na figura a seguir, podemos dividir o quadrado ABCD em 36 triângulos iguais.

Figura 7.20 – Quadrado ABCD decomposto

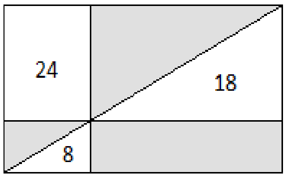


Fonte: PORTAL OBMEP.

A área de cada um destes triângulos é igual à área do quadrado ABCD dividida por 36, ou seja, $\frac{18\times18}{36}=9$. Como o quadrado sombreado é formado por 8 destes triângulos, a sua área é igual a $8\times9=72$.

7.13 (Prova 1ª fase OBM 2014 – Nível 1 – questão 11): O retângulo da figura foi repartido em várias regiões por meio de três segmentos concorrentes, sendo um deles uma de suas diagonais e os outros dois pararelos aos lados do mesmo. Os números indicam as áreas em m^2 das regiões brancas em que se encontram. Qual é a área do retângulo original?

Figura 7.21 – Retângulo Subdividido em Regiões

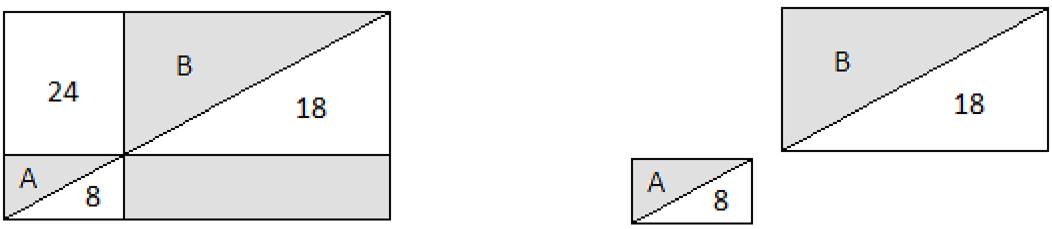


Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Como no exercício anterior, a diagonal de um retângulo divide o retângulo em dois triângulos iguais, de mesma área. Daí na figura a seguir a área do triângulo A é 8 e a área do triângulo B é 18. Daí, olhando para o retângulo original e o triângulo na parte superior da sua diagonal, a área deste triângulo é 24+A+B=24+8+18=50. Daí a área do retângulo original é 50+50=100 m^2.

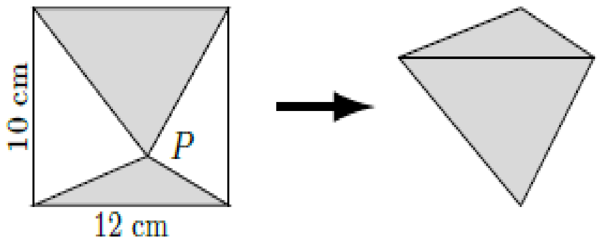
Figura 7.22 – Retângulo Subdividido em Regiões e suas áreas



Fonte: PORTAL OBMEP.

7.14 (Prova 1ª fase OBMEP 2013 – Nível 2 – questão 4): Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento 12 cm e largura 10 cm. Ela escolheu um ponto p no interior do retângulo e recortou os triângulos sombreados como na figura. Como estes triângulos, ela montou o quadrilátero da direita. Qual é a área do quadrilátero?

Figura 7.23 – Ponto P interior a um Retângulo

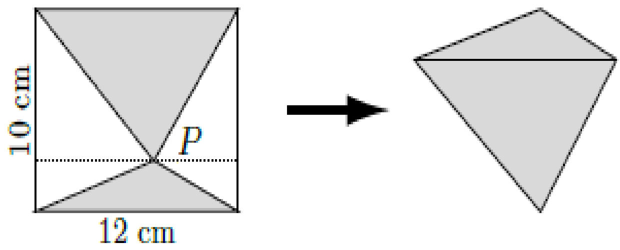


Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Na figura a seguir, a área do quadrilátero da direita é a soma das áreas dos dois triângulos. Traçando por P uma paralela a um dos lados do retângulo, como na figura, este fica dividido em dois retângulos menores. A área de cada um dos triângulos é igual à metade da área do retângulo menor correspondente; como a soma das áreas dos retângulos menores é igual à área do retângulo maior, segue que a soma das áreas dos triângulos é igual à metade da área do retângulo maior, ou seja, é igual a $\frac{1}{2}\times 10\times 12 = 60$ cm^2. Esta é a área do quadrilátero da direta.

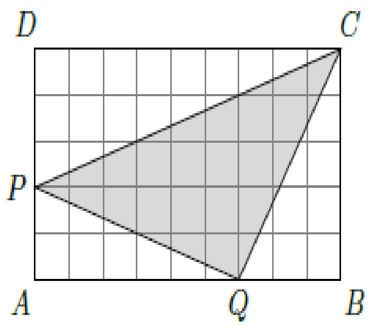
Figura 7.24 – Ponto P interior a um Retângulo e suas Dimensões



Fonte: PORTAL OBMEP.

7.15 Na figura a seguir, ABCD é um retângulo de base 9 e de altura 5. Determine a área do triângulo CPQ **(exemplo 4 – página 118 – apostila encontros de geometria)**.

Figura 7.25 – Triângulo CPQ na Malha Quadriculada



Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Para calcular a área do triângulo CPQ vamos subtrair da área do retângulo ABCD as áreas dos triângulos brancos CDP, PAQ e QBC.

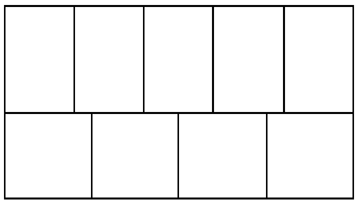
- $\acute{a}rea\ (ABCD) = 9 \times 5 = 45$

- $\acute{a}rea\ (CDP) = \dfrac{9 \times 3}{2} = 13{,}5$
- $\acute{a}rea\ (PAQ) = \dfrac{6 \times 2}{2} = 6$
- $\acute{a}rea\ (QBC) = \dfrac{3 \times 5}{2} = 7{,}5$

Daí segue que $\acute{a}rea\ (CPQ) = 45 - 13{,}5 - 6 - 7{,}5 = 18$.

7.16 (Prova OBMEP 2012 – N2Q15 – 1ª fase) A figura mostra um retângulo de área 720 cm^2, formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?

Figura 7.26 - Nove Retângulos

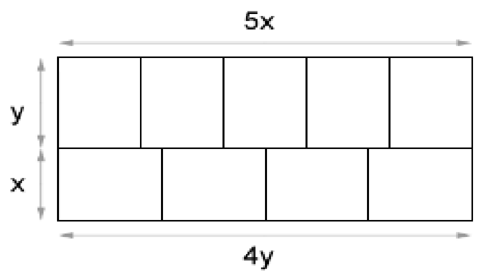


Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Sejam x e y, respectivamente, as medidas do lado menor e do lado maior de um dos retângulos menores. As medidas dos dois lados do retângulo maior são então $x + y$ e $5x = 4y$. Em particular, temos $y = \dfrac{5}{4}x$. Como a área do retângulo maior é 720 cm^2, temos $5x(x+y) = 5x\left(x + \dfrac{5}{4}x\right) = \dfrac{45}{4}x^2 = 720$. Daí $x^2 = \dfrac{720 \times 4}{45} = 64$. Logo $x = 8$ e $y = 10$. O perímetro e um dos retângulos menores é, então, $2(x+y) = 2 \times 18 = 36$ cm.

Figura 7.27 – Retângulos de lados x e y agrupados



Fonte: PORTAL OBMEP.

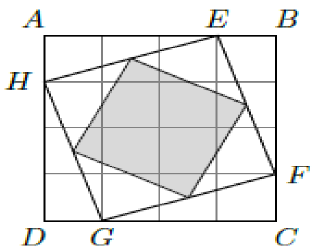
7.17 (Prova OBMEP 2005 – N2Q4 – 2ª fase) O quadrado ABCD da figura está dividido em 16 quadradinhos iguais. o quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado EFGH.

(A) A área do quadrado EFGH corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?

(B) Se o quadrado ABCD em 80 cm^2 de área, qual é o lado do quadrado sombreado?

(C)

Figura 7.28 – Quadrado ABCD na malha quadriculada I

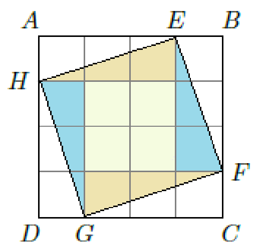


Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

A) A figura a seguir mostra que o quadrado EFGH é formado por 4 triângulos retângulos iguais e por mais quatro quadradinhos. Cada um desses triângulos retângulos iguais é igual a metade de 3 quadradinhos. Portanto o quadrado EFGH corresponde a $4+4\times\frac{3}{2}=10$ quadradinhos. Como o quadrado ABCD corresponde a 16 quadradinhos, vemos que a razão das áreas é igual a $\frac{área(EFGH)}{área(ABCD)}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$.

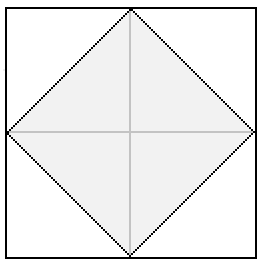
Figura 7.29 – Quadrado ABCD na malha quadriculada II



Fonte: PORTAL OBMEP.

B) Antes de responder a este item vamos analisar a situação geral. Ligando os pontos médios dos lados de um quadrado, obtemos outro quadrado que tem a metade da área do quadrado original. De fato, na figura abaixo, vemos que o quadrado original pode ser dividido em 8 triângulos iguais e que o quadrado sombreado é formado por 4 desses triângulos.

Figura 7.30 – Quadrado formado por oito triângulos iguais.

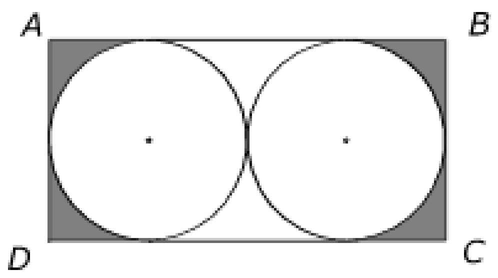


Fonte: PORTAL OBMEP.

No exercício, pelo item (A), a área do quadrado EFGH é igual a $\frac{5}{8} \times 80 = 50$ cm^2. Daí a área do quadrado sombreado é igual a $\frac{50}{2} = 25$ cm^2.

7.18 Determine a área da região hachurada, onde $ABCD$ é retângulo e os raios das circunferências valem $1\ cm$.

Figura 7.31 – Retângulo com círculos inscritos.

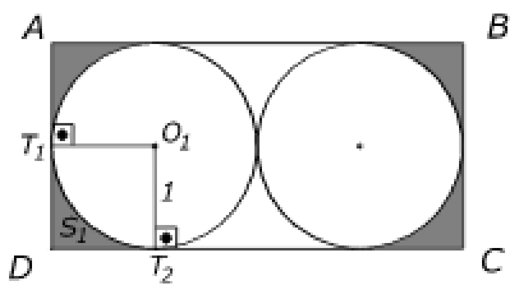


Geometria Básica- V1- Dirceu U Pesco e Roberto G Arnaut.

Resolução:

Considere a figura dada, com os raios das circunferências igual a $1\ cm$.

Figura 7.32 – Retângulo com círculos inscritos(solução).



Geometria Básica- V1- Dirceu U Pesco e Roberto G Arnaut.

Temos que:

$$S_1 = 1^2 - \pi.\frac{1^2}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Note que $O_1T_1DT_2$ é quadrado e $T_1\hat{O}_1T_2 = 90°$.

Daí, a área pedida é:

$$S_p = 4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = (4 - \pi)cm^2$$

7.19

Na malha quadriculada a seguir, todas as circunferências tem o mesmo centro. Pode-se concluir que a área da região cinza destacada é igual a:

(a) Dois quintos da área do círculo maior;

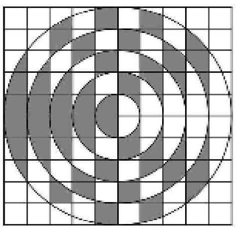
(b) Três sétimos da área do círculo maior;

(c) Metade da área do círculo maior;

(d) Quatro sétimos da área do círculo maior;

(e) Três quintos da área do círculo maior;

Figura 7.33 Malha quadriculada com círculos concêntricos.



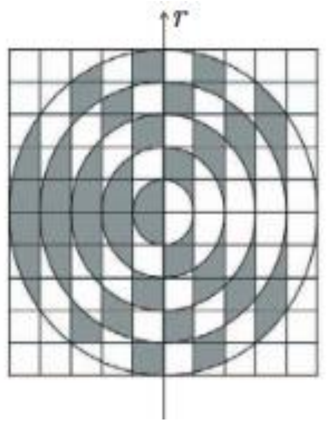
Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Observe que a figura é simétrica em relação à reta r que passa pelo centro comum das circunferências. Para cada região cinza de um lado de r, existe uma região branca equivalente do outro lado de r, vice-versa. Logo, a área da região cinza é igual à área branca.

Portanto, a área da região cinza é igual à metade da área do círculo maior.

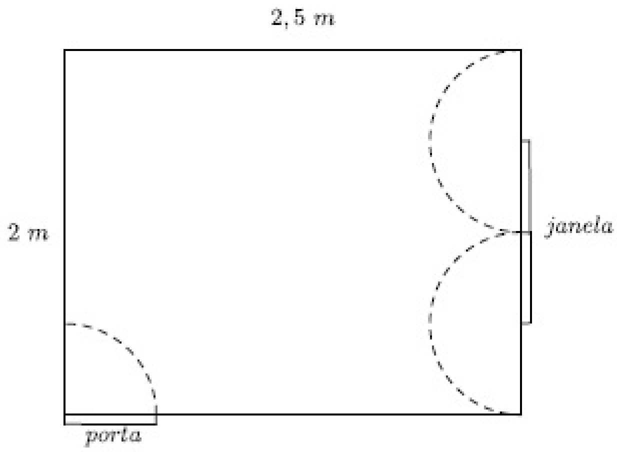
Figura 7.34 Malha quadriculada com círculos concêntricos (solução).



Fonte: PORTAL OBMEP.

7.20 (Prova da 1ª Fase da OBMEP 2006, nível 3, questão 12): Pedro acabou de se mudar para sua nova casa e ganhou um novo quarto. A figura a seguir mostra uma vista superior simplificada de seu novo quarto que possui 2 m de largura por $2{,}5$ m de comprimento.

Figura 7.35 Retângulo representando quarto de Pedro



Fonte: PORTAL OBMEP.

A porta indicada na figura tem $50cm$ de comprimento e pode ser aberta até encontrar a parede lateral. A janela é dividida em duas portas de mesmo comprimento que quando abertas encostam-se às paredes vizinhas. Os arcos da figura mostram as aberturas da porta e da janela. A mãe de Pedro disse que ele deve colocar seus móveis no quarto de modo que não fiquem nos caminhos de abertura da porta nem da janela. Quantos metros quadrados Pedro têm em seu quarto para colocar os seus móveis?

Resolução:

Seja L o comprimento de cada porta da janela. Considerando que, quando as duas portas se abrem elas encostam-se às paredes dos lados, temos então $4 \cdot L = 2$, ou seja, $L = 0{,}5$ m.

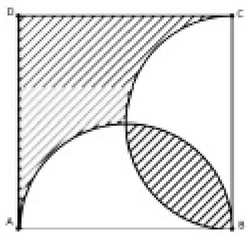
Chamemos de A a área que Pedro tem para colocar seus móveis. Para determiná-la, basta considerar a área total e subtrair as áreas de abertura da porta e da janela. Sabendo que a porta abre $\frac{1}{4}$ de circunferência e que as janelas abrem, cada uma, meia circunferência, temos:

$$A = 2 \cdot (2{,}5) - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (0{,}5)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (0{,}5)^2 = 5 - \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{14} = \frac{80 - 5\pi}{16}.$$

Então, Pedro possui $\frac{80-5\pi}{16}$ m^2 para colocar seus móveis.

7.21 (Banco de Questões da OBMEP 2015, nível 2, questão 8): (a) No desenho abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado $4\,cm$ e as regiões hachuradas foram delimitadas por dois semicírculos de diâmetros AB e BC. Calcule a área da região hachurada.

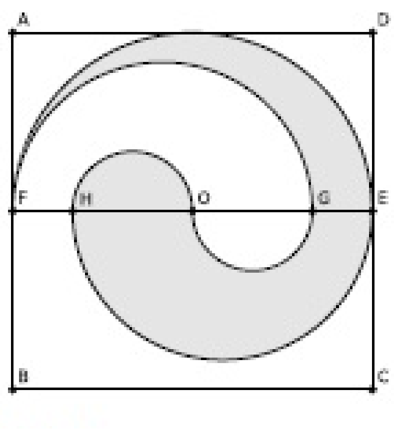
Figura 7.36 Quadrado $ABCD$ com regiões hachuradas.



Fonte: PORTAL OBMEP.

(b) Considere o quadrado $ABCD$ de lado 2 da figura abaixo. Sejam O o centro do quadrado e E e F os pontos médios dos lados CD e AB. Se os segmentos FH e GE têm mesma medida e os arcos FE, EH, HO, OG, FG são semicircunferências, encontre a área da região sombreada.

Figura 6.37 Quadrado $ABCD$ com regiões circulares hachuradas.

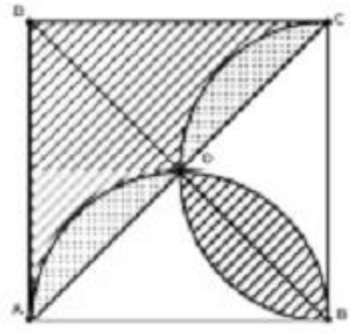


Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

(a) Traçando as diagonais AC e BD delimitamos quatro setores circulares com mesma área. A soma das áreas pontilhadas corresponde à área tracejada contida no interior do triângulo ABC. Assim, a área tracejada inicial vale metade da área do quadrado $ABCD$, ou seja, $4 \cdot \frac{4}{2} = 8$ cm^2.

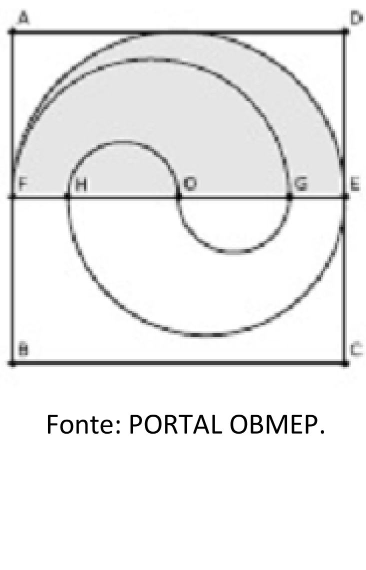
Figura 7.38 Quadrado $ABCD$ com regiões hachuradas (solução)



Fonte: PORTAL OBMEP.

(b) Como $FH = GE$, temos $HO = FO - FH = OE - GE = OG$. Consequentemente, o semicírculo de diâmetro HO possui a mesma área do semicírculo de diâmetro OG. Além disso, a área entre os arcos FG e HO é igual à área entre os arcos GO e EH. Daí, a área procurada corresponde a área de um semicírculo de diâmetro FE. Como o raio do semicírculo de diâmetro FE mede 1 , a área sombreada mede $\frac{\pi.1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Figura 7.39 Quadrado $ABCD$ com regiões circulares hachuradas(solução).

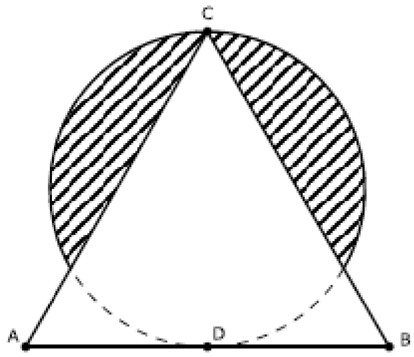


Fonte: PORTAL OBMEP.

7.22 Exercício 8 (Banco de Questões da OBMEP 2015, nível 3, questão 2):

No desenho abaixo, ABC é um triângulo equilátero e CD é tanto uma altura do triângulo quanto um diâmetro do círculo. Se $AB = 10$ cm, determine a área da região hachurada.

Figura 7.40. ABC é um triângulo equilátero com círculo sobreposto.

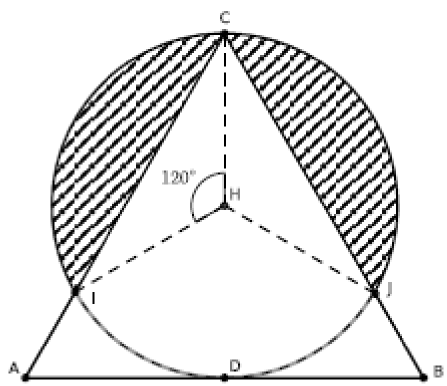


Fonte: PORTAL OBMEP.

Resolução:

Como CD é diâmetro, o seu ponto médio H é o centro do círculo. Sejam I e J as outras interseções da circunferência com os lados AC e BC, conforme a figura abaixo.

Figura 7.41. ABC é um triângulo equilátero com círculo sobreposto (solução).



Fonte: PORTAL OBMEP.

Como $I\widehat{C}H = H\widehat{C}J = 30°$ e $IH = CH = HJ$, segue que os triângulos CHI e CHJ são isósceles com ângulo do vértice igual à $120°$. Se l é o raio do círculo, como a altura do triângulo e o diâmetro do círculo coincidem, $2l = \frac{10\sqrt{3}}{2}$ cm e, consequentemente, $l = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm. Cada uma das regiões sombreadas corresponde à área de um setor circular de $120° = \frac{2\pi}{3}$ subtraída de um triângulo isósceles, ou seja,

$$\frac{\left(\frac{2\pi}{3}\right)l^2}{2} - \frac{l^2\, sen\, 120°}{2} = \frac{\pi l^2}{3} - \frac{\sqrt{3}l^2}{4} = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})l^2}{12}$$

$$= \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} \cdot \frac{\left(5\sqrt{3}\ \right)^2}{2^2}$$

$$= \frac{100\pi - 75\sqrt{3}}{8}$$

Como temos duas regiões iguais, a área procurada é o dobro do valor encontrado, ou seja, $\frac{100\pi - 75\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

8 REFERÊNCIAS

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. 5ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2002.

[2] CADAR, Luciana; DUTEHNEFNER, Francisco. *Encontros de Geometria - Parte 1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

[3] CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo.

Trigonometria. Números Complexos.

[4] LIMA, Elon Lages. *Media e Forma em Geometria*. Rio de Janeiro: Grafitex Comunicação Visual, 1991.

[5] NETO, Antônio Caminha Muniz Neto. Volume 2 da Coleção Tópicos de Matemática Elementar,SBM

[6] PESCO, Dirceu Uesu; ARNAUT, Roberto Geraldo Tavares . Apostila Geometria Básica. Volume I.

[7] PORTAL OBMEP. Disponível em http://www.obmep.org.br/banco.htm. Acesso em 01 de Novembro de 2018.

[8] PORTAL SABER OBMEP. Disponível em https://portaldosaber.obmep.org.br . Acesso em 01 de Novembro de 2018.

[9] WÁGNER, Eduardo. *Teorema de Pitágoras e Áreas*, Rio de Janeiro: IMPA, 2017.