UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
Mestrado Profissional em Matemática

Rodrigo dos Santos Cometti

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULO RETÂNGULO ATRAVÉS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Teófilo Otoni-MG
2019

Rodrigo dos Santos Cometti

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULO RETÂNGULO ATRAVÉS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – PROFMAT – Programa de Mestrado em Rede Nacional, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Msc. André Bernardo Campos

Teófilo Otoni-MG
2019

Ficha Catalográfica
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM
Bibliotecário responsável: Gilson Rodrigues Horta – CRB6 nº 3104

C732e 2019	Cometti, Rodrigo dos Santos. O ensino da trigonometria em triângulo retângulo através de resolução de problemas. / Rodrigo dos Santos Cometti. Teófilo Otoni, 2019. 68 f. ; il. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019 Orientador: Prof. MSc. André Bernardo Campos. 1. Aprendizagem. 2. Trigonometria. 3. Metodologia. 4. Resolução de problemas. I. Título. **CDD: 510**

Rodrigo dos Santos Cometti

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULO RETÂNGULO ATRAVÉS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional nível de Mestrado como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. André Bernardo Campos

Data de aprovação: 12/02/2019

Prof. Dr.Carlos Henrique Alexandrino
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof.Dra Silvia Swain Canôas
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Prof.Dr.Werley Gomes Facco
Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Msc. André Bernardo Campos
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Teófilo Otoni-MG

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
DIAMANTINA – MINAS GERAIS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E
PÓS-GRADUAÇÃO

ATESTADO DE DEFESA POR VIDEOCONFERÊNCIA

Atesto para os devidos fins que no dia 12 de fevereiro de 2019, às 15h00, nas dependências da UFVJM – em Teófilo Otoni, foi realizada a defesa de dissertação do discente Rodrigo dos Santos Cometti, com o trabalho intitulado "O ENSINO DA TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULO RETÂNGULO ATRAVÉS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS", no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Na qualidade de presidente da banca, atesto que o Prof. Werley Gomes Facco, docente da instituição Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, Unidade São Mateus, participou através de videoconferência web.

Em virtude da participação remota do membro da banca acima indicado, eu, André Bernardo Campos, enquanto servidor público, no gozo de fé pública, assino no lugar desse na Ata de Defesa e na Folha de Aprovação da referida defesa.

Por ser verdade, dou fé e assino o presente atestado.

Teófilo Otoni, 12 de fevereiro de 2019.

André B. Campos

Presidente da Banca

O presente trabalho foi realizado com o apoio da coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- BRASIL (CAPES) - Código de Financiamento 001.

This study was financed in partby the coordenação de Pessoa de Nível Superior –BRASIL (CAPES) - Finance Code 001.

Secretaria de Pós-graduação Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação-PRPPG
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.

À Deus pelo Dom da vida e a minha família, sempre presente me apoiando em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus meu maior apoio, por ter me dado saúde, força, foco e fé para superar e não desistir das dificuldades que enfrentei nesses últimos três anos.

Aos meus pais (Eugenio Cometti e Marli Maria dos Santos Cometti) e a minha esposa (Leila Muniz Loss) e filha (Maria Eduarda Loss Cometti) que sempre estiveram ao meu lado, me incentivando a continuar.

Aos meus principais amigos de curso Flávio Ribeiro da Silva e Wagner dos Reis Silva, pelo companheirismo em nossas viagens para Teófilo Otoni e a todos os demais mestrandos da turma 2016 que fervorosamente sempre se uniram estudando para as provas das disciplinas e exames de qualificação.

Um agradecimento especial ao meu orientador, André Bernardo Campos, uma pessoa que admiro, por toda paciência, compreensão e os ensinamentos que passou de sua disciplina, pois facilitou bastante na prova de qualificação. Além de estar sempre de prontidão no acompanhamento da escrita do projeto de dissertação, sendo que os retornos de dúvidas eram breves.

Aos professores do mestrado PROFMAT/UFVJM minha gratidão pelos conhecimentos e pelas orientações dadas, em especial a professora Dra Silvia Swain Canôas e o professor Dr.Carlos Henrique Alexandrino que sempre me atenderam com agilidade e me deram muitos conselhos.

À FAPEMIG, pelo apoio financeiro aos digníssimos colaboradores do PROFMAT/UFVJM que contribuíram direta e indiretamente para minha formação acadêmica como mestre de maio/2016 a fevereiro/2019.

À CAPES, que com rigor cumpriu com o pagamento das bolsas durante os 24 meses me ajudando muito na compra dos livros, transporte que era de minha casa em Nova Venécia até a UFVJM em Teófilo Otoni, estadia em hotel e alimentação.

“A menos que modifiquemos à nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo”.

Albert Einstein

RESUMO

A presente dissertação traz em seu desenvolvimento um estudo bibliográfico e de campo sobre Resolução de Problemas aplicada ao ensino da Trigonometria. O objetivo foi o de buscar novas possibilidades para as aulas de trigonometria, respeitando o que traz o currículo básico para o ensino da disciplina de Matemática. O estudo então partiu inicialmente de uma pesquisa bibliográfica com base em autores diversos, sendo utilizado livros e artigos publicados em revistas e sites relacionados à educação. Para a pesquisa de campo foi proposto aos alunos aulas práticas envolvendo a metodologia de Resolução de Problemas apresentada por Lourdes de La Rosa Onuchic, na qual as atividades foram realizadas por etapas e desenvolvidas em grupos. Foi proposto um problema, em que os alunos foram levados a construir o teodolito e medir a altura de um prédio, sendo possível constatar com esta atividade, que a resolução de problema consegue trabalhar a trigonometria a partir de situações reais do dia a dia do aluno, levando-os a uma aprendizagem mais significativa.

Palavras-chave: Aprendizagem. Trigonometria. Metodologia. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

The present dissertation brings in its development a bibliographical and field study on Problem Solving applied to the teaching of Trigonometry. The objective was to seek new possibilities for the trigonometry classes, respecting what the basic curriculum for the teaching of Mathematics teaches. The study then started from a bibliographical research based on several authors, using books and articles published in magazines and sites related to education. For the field research, the students were proposed some practices involving the Problem Solving methodology presented by Lourdes de La Rosa Onuchic, in which the activities were carried out in stages and developed in groups. It was proposed a problem in which the students were led to build the theodolite and measure the height of a building, and it is possible to verify with this activity that problem solving can work the trigonometry from real situations of the student's daily life, leading to more meaningful learning.

Keywords: Learning. Trigonometry. Methodology. Troubleshooting.

LISTA DE FOTOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento da trigonometria, enquanto parte do conteúdo matemático, foi produzido historicamente pela humanidade ao longo do tempo. Boyer (1974) trouxe em seus estudos que a trigonometria teve origem na necessidade do homem em fazer estudos sobre navegação, astronomia e agrimensura, sendo que sua origem veio com os povos babilônicos e egípcios.

Seus estudos foram iniciados por volta de 190 a.C., sendo uma das ramificações mais antigas da Matemática. Eves (2004) relata que os astrônomos babilônicos utilizaram inicialmente a trigonometria em suas pesquisas na astronomia para medir ângulos e distâncias, principalmente para localizar pontos sobre a superfície da terra.

No entanto, não foram apenas os babilônicos e egípcios a utilizar a trigonometria para atender às suas pesquisas. Outros povos também contribuíram de forma relevante em seu desenvolvimento ao longo do tempo. Por exemplo, os gregos e os hindus também utilizavam a trigonometria para auxiliar em seus estudos na astronomia.

Eves (2004) destaca que os muçulmanos também utilizaram a trigonometria na construção de suas tábuas trigonométricas, assim como também no uso de funções trigonométricas.

Estas civilizações usaram esta ciência para suprir necessidades de pesquisas em situações do cotidiano, em que precisavam medir ângulos, calcular distâncias e principalmente, como já citado, para estudos da astronomia.

Assim, ao longo do tempo a trigonometria foi transcendendo os problemas matemáticos, sendo utilizada em outras situações e áreas do conhecimento, desde as práticas até as teóricas, ampliando seu espaço de estudos, principalmente nos campos científicos e tecnológicos.

No âmbito escolar, ela foi sendo introduzida aos poucos. Siqueira (2013) descreve que no Brasil, ela apareceu inicialmente nas escolas de artilharias, onde os exames aplicados eram baseados em aritmética, geometria e artilharia, assim como no dos bombeiros, em que a finalidade matemática era puramente militar.

Siqueira (2013) relata que, com a vinda da corte portuguesa para o Brasil, houve a criação do Curso da Academia Real dos Guardas da Marinha, curso destinado apenas aos filhos dos nobres, em que a trigonometria aparece como disciplina nos três anos de curso. Valente (2007) destaca que neste curso de três anos, estudava-se a trigonometria, com seu uso prático voltado aos oficiais do mar no primeiro ano e para aplicação naval e militar.

Com a criação do Colégio Dom Pedro II no ano de 1837, a matemática secundária surgiu no Brasil, mas com a preocupação de preparar alunos para o ensino superior. Nesse sentido, pode-se dizer, como bem salienta Siqueira (2013), que a matemática secundária, é como a que temos hoje na educação básica, no ensino fundamental. Siqueira (2013, p. 30) destaca também que:

> Dentro do colégio D. Pedro II, o estudo de Trigonometria aparecia com os seguintes tópicos: trigonometria retilínea, linhas trigonométricas e a dedução de suas fórmulas, assim como suas variações e a limitação de seus valores, a construção e o uso das tábuas trigonométricas, a resolução de triângulo, a resolução de exercícios e problemas práticos, equações trigonométricas e séries circulares, teoria das transversais e aplicações e resolução completa dos triângulos e reações de trigonometria sobre a álgebra.

Cabe ressaltar que até o período de 1960 tais estudos da trigonometria seguiram esta estrutura, não havendo até esta data mudanças significativas no estudo deste conteúdo.

Até a década de 80, Valente (2007) evidencia que a trigonometria era baseada nos estudos das funções e conjuntos, desenvolvidos a partir de muitos exercícios, havendo uma preocupação com a linguagem matemática e com as técnicas de resolução. A partir do ano de 1980, o ensino da trigonometria começou a ser precedida pelos estudos dos triângulos e ciclo trigonométrico.

Atualmente, em sala de aula, a trigonometria começa a ser trabalhada no ensino fundamental, mais especificamente no 9º ano, dando início ao estudo das primeiras concepções de trigonometria, de forma simples, sendo apresentados aspectos do triângulo retângulo. Continuando este estudo no ensino médio, no primeiro ano, a trigonometria é estudada apenas até o segundo quadrante, sendo seu estudo limitado a triângulos. No segundo ano, é introduzido a circunferência trigonométrica, identidades e funções trigonométricas (FERREIRA, 2016).

No entanto, é possível perceber que o ensino da trigonometria veio, ao longo do tempo, sendo pautado por uma forma tradicional de aprendizagem, a qual era necessária decorar fórmulas e aplicá-las em questões que, além de não contribuir para uma aprendizagem mais aprofundada, ainda não motivava os alunos para que os mesmos pudessem compreender com mais prazer e mais significado os conteúdos que estavam sendo apresentados (FERREIRA, 2016).

Entende-se por ensino tradicional aquele em que o processo ensino e aprendizagem tem como centro do aprendizado o professor, que transmite o conteúdo e, os alunos atentos, buscam compreendê-lo. Skovsmose (*apud* CAMPOS, 2013) destaca que, ao se referir a este ensino tradicional, fala-se do professor que apresenta a teoria, formalizada a partir de uma definição, algumas propriedades, seguida de exemplos para, em um segundo momento, trabalhar com os alunos a resolução de exercícios.

Campos (2013, p. 61) evidencia que deste modo:

> A dupla, teoria mais exercícios, tem servido de parâmetro para muitos professores em suas práticas pedagógicas, norteada pelo livro didático, que na sua maior parte, está desprovida de situações que possibilitem discussões e reflexões que sejam capazes de proporcionar no ambiente de sala de aula uma postura crítica por parte dos alunos.

É relevante ainda dizer, que não se busca excluir o tradicional no ambiente de ensino. Não se quer de forma alguma "suprimir a prática dos exercícios, tampouco a teoria. Muito pelo contrário; reconhecemos seu espaço. O fato é que não podemos encará-los como o único meio de abordagem em nossas salas de aula" (CAMPOS, 2013, p. 62), pois também é importante que os discentes sejam capazes de construir seus conhecimentos, de buscar novas formas de aprendizagem e ser crítico diante das questões que lhe são apresentadas em sala de aula, isto é, a promoção de um ambiente de aprendizagem onde se tenha a oportunidade de fazer investigações.

Bassanezi (2009) evidencia que, em muitas escolas, esta maneira de lecionar, mecanizada e repetitiva, com base apenas em teorias e exercícios ainda prevalece como única forma de ensino, tornando mais dificultoso o caminho do processo de ensino e aprendizagem da trigonometria, visto que o aluno, estudando dessa forma, acaba por não compreender de forma significativa o papel que a trigonometria desempenha nas várias situações reais do dia a dia na sociedade.

Além disso, Bassanezi (2009) destaca ainda que uma considerável parte das ideias da trigonometria são originadas de abstrações de situações empíricas, o que aumenta o nível de generalidades e aprofundamentos. E, como consequência, tem-se um nível maior de detalhes e complexidade, fazendo com que o ensino tradicional não seja suficiente para trazer à tona a aplicabilidade da trigonometria, bem como sua necessidade na exploração e resolução de problemas intrínsecos à Matemática e áreas onde seu estudo seja necessário.

Acredita-se que tais dificuldades, partem principalmente pelo fato de muitos alunos ainda estudarem de forma tradicional, decorando as fórmulas matemáticas, sem, no entanto, aprofundar o estudo e ou utilizar outras possibilidades para desenvolver sua aprendizagem em relação aos conteúdos da Matemática, em especial de trigonometria.

Entretanto, como evidencia Pozo (1998, p. 9), “é preciso tornar os alunos pessoas capazes de enfrentar situações e contextos variáveis, que exijam deles a aprendizagem de novas habilidades e conhecimentos”.

E, acredita-se que estas habilidades e conhecimentos podem ser desenvolvidos por meio da metodologia Resolução de Problemas, uma vez que pode oportunizar vivenciar situações cotidianas, de diferentes contextos, tendo experiências que possibilite resolver problemas a partir de estudos, reflexão e ações, produzindo o conhecimento de modo a não mais simplesmente decorar fórmulas, mas compreender de forma aprofundada as questões pertinentes aos conteúdos matemáticos que estão sendo estudados.

Diante deste contexto, a presente pesquisa tem o objetivo geral estudar, no âmbito da disciplina de Matemática e com base na metodologia Resolução de Problemas, o processo de ensino e aprendizagem da trigonometria em triângulos junto aos alunos do 9º ano do ensino fundamental.

E, para atender ao objetivo que é destacar as contribuições que a resolução de problemas pode oportunizar para o ensino da trigonometria, o presente estudo será pautado em algumas questões, que no decorrer da pesquisa serão desenvolvidos com vistas a:

- Conceituar trigonometria oferecendo um detalhamento dos conteúdos que envolvem o seu estudo;
- Identificar como a trigonometria foi construída enquanto conteúdo ao longo da história na disciplina de Matemática;
- Apresentar atividades alternativas que possam contribuir para trabalhar a trigonometria dos triângulos através da resolução de problemas.

Relevante dizer que a motivação pelo estudo está pautada no interesse em buscar novas possibilidades para as aulas de trigonometria, apresentando a resolução de problema como uma alternativa para que os alunos possam desenvolver os conceitos de forma mais significativa, bem como motivar e os levar a serem co-construtores dos seus conhecimentos.

Como consequência, essa postura pode possibilitar criticidade e reflexão em relação à tomada de decisão quando envolvidos no processo de resolução do problema, além de serem capazes de gerenciarem as consequências de tais decisões.

Assim, a escolha do tema torna-se relevante porque a trigonometria representa uma parte importante do estudo matemático e sua concepção no processo ensino e aprendizagem tem sido permeada por muita dificuldade pelos discentes e docentes.

Deste modo, espera-se que este estudo possa contribuir para facilitar a aprendizagem da trigonometria em triângulo, assim como auxiliar outros professores quanto a novas abordagens nas atividades a serem desenvolvidas na disciplina de Matemática no 9° ano do Ensino Fundamental.

Para melhor compreensão da pesquisa, o trabalho foi estruturado em cinco capítulos, sendo que o primeiro traz a parte introdutória, apresentando os objetivos, as ideias principais que levaram à escolha do tema, sua importância para o ensino da matemática, com vistas a situar o leitor sobre o tema.

O segundo capítulo apresenta a revisão de literatura, com bases em autores diversos, dando ênfase aos estudos de Lourdes de la Rosa Onuchic, sendo apresentados conceitos sobre o ensino da matemática e o processo ensino e aprendizagem da trigonometria. Também se buscou o respaldo dos Parâmetros Curriculares Nacionais, e em seguida o ensino da trigonometria a partir da resolução de problemas.

O terceiro capítulo apresenta a metodologia aplicada na pesquisa que, além do estudo bibliográfico, contou também com a pesquisa de campo, com aulas práticas envolvendo os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

O quarto capítulo traz os resultados das atividades planejadas e desenvolvidas com os alunos da pesquisa de campo e as observações sobre a proposta da resolução de problemas que foi trabalhada. Por fim, foi apresentado as considerações finais sobre a pesquisa e os resultados obtidos com este projeto.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 O ENSINO DA MATEMÁTICA: REFLEXÕES INICIAIS

Abordando inicialmente a etimologia da palavra matemática, sabe-se que ela teve origem na Grécia, derivada do grego "*mathematike*", sendo conhecimento originariamente como a arte da compreensão.

Silva (2011) discorre que a matemática foi desenvolvida pelos gregos com o objetivo de explicar racionalmente o universo, sendo definida como:

> A ciência que estuda por meio de padrões abstratos, fenômenos de contagem envolvendo a aritmética, o espaço que faz parte da topologia, as formas e medidas que são desenvolvidas na geometria, os fenômenos periódicos que estão na trigonometria, a variação entre grandezas, áreas e volumes, as estruturas abstratas que fazem parte da álgebra e ainda os fenômenos aleatórios que pertencem a estatística. (SILVA, 2011, p. 13).

Como é possível observar, a matemática abarca muitas esferas, tanto a aritmética, como a topologia, trigonometria, geometria, além de estudos do cotidiano da vida das pessoas. Seu papel assim se torna de fundamental importância em todas as áreas humanas.

Diante desta realidade, Silva (2011) observa que, educadores vêm no decorrer da história, trabalhando com a missão de preparar seus educandos para o mundo, para o trabalho e para exercer sua cidadania, com capacidades que lhes permitam agir criticamente, se integrar e realizar seus propósitos enquanto seres humanos. Isto significa dizer que eles têm um papel muito importante neste espaço, que é o de proporcionar o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para concluir sua escolaridade e desempenhar seu papel na sociedade.

E, por isso, a escola deve estar preparada para adaptar seu ensino e conduzir o processo de ensino e aprendizagem de acordo com as necessidades, tanto de seus educandos como da própria sociedade, que vai se transformando ao longo do tempo. No que envolve a disciplina de matemática, sabe-se que um de seus objetivos é permitir que o aluno consiga resolver problemas do cotidiano, mas não apenas isso, pois ela tem um papel maior que é o de contribuir para que os alunos consigam desenvolver seu raciocínio lógico e deste modo, criar estratégias que os possibilitem atribuir sentido e construir ideias matemáticas significativas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p. 30):

> A matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Faz parte da vida de todas as pessoas nas experiências mais simples como contar, comparar e operar sobre quantidades. Nos cálculos relativos a salários, pagamentos e consumo, na organização de atividades como agricultura e pesca, a Matemática se apresenta como um conhecimento de muita aplicabilidade. Também é um instrumental importante para diferentes áreas do conhecimento, por ser utilizada em estudos tanto ligados às ciências da natureza como às ciências sociais e por estar presente na composição musical, na coreografia, na arte e nos esportes.

Com esta assertiva, observa-se que a matemática está inserida na vida e no dia a dia das pessoas de forma muito presente e constante. E deste modo, o ensino desta disciplina em todos os níveis de ensino se torna de fundamental importância.

Luiz e Col (2013, p. 3) descrevem que:

> O ensino da matemática pode contribuir para a formação ética do aluno, à medida que se direcione a aprendizagem para o desenvolvimento de atitudes, como a confiança do educando em relação à sua própria capacidade e também em relação à capacidade do outro, assim como para a construção de conhecimentos matemáticos [...]. O aprendizado da matemática deve contribuir na formação da cidadania; saber usar o raciocínio lógico, empregar mecanismos de contagens, cálculos e medidas, reconhecer diferentes formas e propriedades, e acima de tudo utilizar-se corretamente desta bagagem de conhecimentos para interagir no meio social.

Destarte, torna-se relevante que os conteúdos sejam bem selecionados para atender aos objetivos do currículo que abarca a disciplina de matemática, no intuito de garantir uma aprendizagem significativa e eficaz.

Santaló (1996) relata que na época dos gregos, podia-se falar do cálculo e da geometria como partes únicas de um corpo de conhecimentos bem delimitado e não muito extenso. Hoje, a quantidade de situações que envolvem a matemática é imensa e cresce constantemente.

Santaló (1996) evidencia também que, ao analisar os conteúdos que devem ser trabalhados, torna-se importante levar em consideração que a matemática tem um valor formativo, que ajuda a estruturar todo o pensamento e a agilizar o raciocínio dedutivo, sem esquecer-se de que ela também é um instrumento que contribui para a atuação diária e para muitas tarefas específicas de quase todas as atividades laborais.

O sentido da matemática deve ser um constante equilíbrio entre a matemática formativa e a matemática informativa. A formativa, como explicam Pavanello e Nogueira (2006, p. 35), “envolve os conteúdos, como por exemplo, porcentagens, funções, raciocínio combinatório e probabilístico, aritmética, grandezas, entre outros”. A matemática informativa, conforme os autores, vai depender das necessidades futuras do aluno e do momento histórico, onde a diferença entre ambas não está nos conteúdos, mas na forma de trata-los em sala de aula.

Luiz e Col (2013) entendem a matemática como uma ciência, com características bem próprias. No processo ensino e aprendizagem, não basta apenas estuda-la, é necessário saber utilizá-la no dia a dia, aplicando às situações cotidianas e neste sentido, torna-se necessário metodologias que contribuam para esse fim.

Durante muito tempo, a prática pedagógica trabalhava de modo que o professor era aquele que apresenta de forma explicativa o conteúdo, com base em teorias e conceitos, exemplos, seguido de exercícios de aprendizagem e fixação. Esta era a forma de se trabalhar a matemática e infelizmente ainda é a que predomina em muitas escolas.

De acordo com Lima (2013, p. 5):

> Esta concepção de ensino coloca o professor como centro da aprendizagem, alguns autores acreditam que o ensino tradicional tem a vantagem de alcançar um número elevado de alunos ao mesmo tempo, porém para o processo ensino e aprendizagem ter êxito, é necessário que os alunos estejam atentos e bastante motivados à palavra do professor.

Diante desta observação, percebe-se que este é um método que ainda perdura, principalmente por colocar o professor como o centro da aprendizagem, o que para muitos significa impor respeito, até mesmo por exigência da própria escola, pois muitos dirigentes/diretores/profissionais da educação em geral ainda mantêm uma visão clássica do ensino, um modelo ainda tradicional. Porém, há de se mencionar que respeito é algo a ser conquistado e não imposto como muitos ainda insistem!

Entretanto e, ironicamente, tais ideias não são novidades, muito menos uma temática recente nas discussões que permeiam o espaço educacional. Muitos já defendiam uma nova escola, uma nova pedagogia, como Paulo Freire:

> O educador já não é o que apenas educa, mas o que enquanto educa, em diálogo com o educando que, ao ser educado, também se educa. Ambos, assim, se tornam sujeitos do processo em que crescem juntos e em que "os argumentos de autoridade" já não valem. Em que, para ser-se funcionalmente, autoridade, se necessita estar sendo com as liberdades e não contra elas (FREIRE, 1987, p. 39).

Assim, mesmo ainda persistindo em muitas instituições a forma tradicional de ensino, já existe espaço maior para que professor e alunos interajam, compartilhem ideias e experiências, sendo o aluno estimulado a pensar por si mesmo e a fazer suas próprias reflexões, considerações e a tomar decisões, bem como analisar os impactos que estas podem provocar.

2.2 O PROCESSO ENSINO E APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULOS

A trigonometria vem do grego *trigonos* e *metrum*, que significava triângulo e medida. Sua origem é antiga na matemática, pois já existia desde a época de Cristo. Silva (2011, p. 14) relata que "a trigonometria surgiu para suprir necessidades práticas, principalmente relacionadas com a demarcação de terras, construção de prédios e monumentos, traçados e mapas e rotas, tanto terrestre como marítimas".

Já Dante (2005) a define com base em três radicais gregos: o *tri*, que é igual a três, *gonos*, que significa ângulos e *metron* que é o mesmo que medir, assim tem que a trigonometria é a medida de triângulos. Entende-se assim, que a trigonometria é o estudo das relações entre os ângulos e os lados de um triângulo.

Silva (2011) destaca que vista como uma ciência analítica, sua origem se deu por volta do século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. No entanto, se considerar que a trigonometria envolvia também o estudo da geometria e a astronomia, seu surgimento está ligado aos trabalhos de Hiparco, no século II a.C.

Observar seu surgimento torna-se relevante para se compreender também o surgimento de outros ramos da matemática e seu progresso na história. Boyer (2010) relata que o início da trigonometria não está ligado a somente a um homem ou nação. Os gregos encontraram pela primeira vez um estudo sistemático de relações entre ângulos e arcos num círculo, mas os egípcios e babilônicos usavam e conheciam teoremas sobre razões entre lados de triângulos semelhantes, mas por falta de conceitos de medidas de ângulos passaram a chamar de trilaterometria.

Costa (1997) destaca que, para os estudos dos planetas como, por exemplo, as fases da lua, seria impossível analisar os pontos cardeais e as estações do ano sem fazer uso dos triângulos, de uma escala e um sistema de unidades de medida, por isso, os astrônomos utilizam as fórmulas trigonométricas.

Costa (1997) explica que a trigonometria no Egito, foi percebida por meio do Papiro Ahmes que continha 84 problemas que fazem menção ao “seqt” de um ângulo, acreditando ser o cálculo de uma pirâmide e que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical.

Hiparco, assim como Ptolomeu e Menelaou de Alexandria, estão entre os nomes que mais se destacaram nos estudos que deram origem à trigonometria ao longo do tempo. Costa (1997) relata que Menelaou, no ano 100 d.C. escreveu um tratado sobre as cordas de um círculo e outro sobre a trigonometria esférica, no entanto, “a mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade foi a *Syntaxis matemática* escrita por Ptolomeu de Alexandria, com 13 livros sobre o tema”, chamado de Almajesto. Foi ele que estudou a circunferência, dividindo-a em 360 partes, assim como o diâmetro em 120 partes, que seria compreendido mais tarde como seno e cosseno. Ptolomeu, de posse da tabela de cordas que construiu, conseguiu calcular o comprimento de cordas, inscrevendo polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 10 lados de um círculo, o que possibilitou encontrar a corda subtendida por ângulos de 120º, 90°, 72°, 60°, 36° respectivamente.

Costa (1997, p. 8) descreve que:

> Durante seis séculos, O Almajesto, representou a mais importante fonte de consulta para os astrônomos de todo o mundo. Porém no século VIII é que os cientistas voltariam a sua atenção para as obras trigonométricas de um povo, que sempre surpreendera o mundo com sua Matemática original e criativa, os Hindus.

Esta obra teve uma importância muito grande para a difusão da trigonometria ao longo do tempo (COSTA, 1997).

A trigonometria também foi encontrada na Índia entre os séculos VIII e VII a. C., na construção de obras como altares e templos. Segundo Costa (1997), foi neste período e nestas obras que foram aplicados os métodos de quadratura de círculos e o teorema de Pitágoras.

Nos anos que se seguiram d. C., os hindus introduziram os conceitos de semi corda e de seno. Logo em seguida, vieram os árabes e persas, que também contribuíram para difundir a trigonometria, introduzindo o conceito de círculo de raio unitário, que é a função seno, que hoje se conhece.

A Europa do século XIV também demonstrou avanços quanto ao estudo da trigonometria e o desenvolvimento da matemática através da escola de filosofia do Merton College. E assim como a Escola de Paris, foi possível reconhecer a matemática como instrumento principalmente para os estudos dos fenômenos naturais. A partir do século XV a trigonometria foi tratada como uma ciência independente da astronomia, vindo a ser utilizada em outras áreas (COSTA, 1997).

Em seguida, teve-se o Tratado sobre triângulos, uma obra em cincos livros escrita por Regiomontanus. Copérnico também contribuiu para difundir a trigonometria complementando os trabalhos de Regiomontanus, escrevendo principalmente sobre senos e cossenos, assim como John Newton que, no ano de 1658 apresentou seu tratado sobre Trigonometria Britannica que, embora baseado nos trabalhos de Gellibrand e outros escritores, era o mais completo livro do tipo que havia surgido em seu tempo. Newton e Gellibrand foram à frente dos estudos da época, antecipando os estudos de divisões centesimais do ângulo nas tábuas trigonométricas (COSTA, 1997).

Segundo Costa (1997, p. 12):

> A trigonometria toma a sua forma atual quando Euler adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então, em 1748. A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler.

Boyer (1996) também ressalta que Euler construiu de forma ímpar as notações das razões trigonométricas e sua transição para as funções periódicas, dando um novo impulso à trigonometria com os conceitos sobre cálculos infinitesimal, sendo a partir de seus estudos, que a letra grega π foi introduzida para a razão entre comprimento e diâmetro da circunferência.

Assim, Dante (2008, p. 187) ressalta que:

> Hoje, a trigonometria não se limita a estudar somente os triângulos; sua aplicação se estende a vários campos da Matemática. Encontramos, também, aplicações da Trigonometria em Eletricidade, Mecânica, Acústica, Música, Engenharia Civil, Topografia e em muitos outros campos de atividades, aplicações essas envolvidas em conceitos que dificilmente lembram os triângulos que deram origem à Trigonometria.

No entanto, compreender os conceitos de triângulo, de triângulo retângulo é imprescindível para o trabalho com o conteúdo de trigonometria como um todo.

Para o ensino da trigonometria, é relevante em um primeiro momento, trabalhar com o triângulo e seus conceitos. O aluno necessita deste entendimento para desenvolver as questões deste conteúdo. Pires (2016, p. 47) define o triângulo como uma “figura geométrica que ocupa um espaço interno limitado por três segmentos de retas concorrentes dois a dois, em três pontos diferentes, ou seja, é um polígono de três lados e consequentemente de três ângulos”.

Sobre o triângulo retângulo, este é definido como aquele que:

> Tem um de seus ângulos reto, ou seja, medindo 90º. Fica fácil associar retângulo com reto ângulo ou ângulo reto. Este é, quem sabe, o mais ilustre dos triângulos, e o único aceito no Teorema de Pitágoras e Razões Trigonométricas (PIRES, 2016, P. 48).

Destarte, para que um triângulo possa existir, faz-se necessário, conforme Pires (2016), que a medida de qualquer um de seus lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois lados, bem como maior que o valor absoluto da diferença entre essas medidas.

Após este entendimento, cabe também compreender que a trigonometria, nos dias atuais, é utilizada para uma série de outros estudos nos mais variados segmentos como nos fenômenos envolvendo transmissão de energia, calor, sons e também em áreas como a medicina, onde ela é usada para calcular os batimentos cardíacos, por exemplo.

2.2.1 O ensino da trigonometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais

As orientações para o ensino da trigonometria são direcionadas para o ensino deste conteúdo em dois momentos da educação básica, que é no final do ensino fundamental, mais precisamente no 9º e no ensino médio.

No 9º ano são introduzidos os conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Já no ensino médio, aprofundam-se os estudos, sendo abordados temas como ângulos e suas unidades de medidas, círculo trigonométrico e suas características, a identificação das razões trigonométricas no círculo trigonométrico entre outros assuntos, assim como em geometria analítica, operações com números complexos, além de aparecer em estudos da disciplina de física.

Conforme sugere as Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002, p. 122):

> Tradicionalmente, a trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, pois se prioriza o cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Deste modo, o estudo detém-se às funções seno, cosseno e tangente, com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva história das aplicações das relações trigonométricas.

Lima (2013), observando o que traz o PCN, destaca que a trigonometria deve priorizar uma aprendizagem mais prática, que envolva o cotidiano do aluno, possibilitando deste modo, que sua aprendizagem se torne mais significativa.

Destarte, é possível dizer que os conteúdos envolvendo a trigonometria devem ser trabalhados de forma mais contextualizada e menos técnica, sendo importante trabalhar os conteúdos sempre de modo a levar o aluno a obter um valor formativo do que está aprendendo.

Conforme regula os Parâmetros Curriculares Nacionais (*apud* SAMISTRARO, 2004, p. 9):

> O ensino da trigonometria deve se ater às funções seno, cosseno e tangente, dando ênfase ao estudo da primeira volta do ciclo trigonométrico. Deve-se também levar o aluno a compreender a perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas, o estudo da trigonometria do triângulo retângulo como objeto de estudo na primeira série do ensino médio. Já na segunda série deve-se estudar as funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) evidenciam que o ensino da trigonometria, com vistas ao aprimoramento do aprendizado, tem como base levar o educando a desenvolver suas competências e habilidades a partir dos estudos que a trigonometria oportuniza.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (*apud* SAMISTRARO, 2004) traz que é necessário investir numa prática pedagógica que trate os conteúdos matemáticos de forma mais contextualizada, estimulando a autonomia intelectual e o desenvolvimento do pensamento científico. Acredita-se que o trabalho deve partir de um problema gerador, que pode ser um experimento ou uma atividade que relacione as disciplinas. Essa integração pode possibilitar a compreensão da realidade de modo a levar o aluno a entender melhor a aplicação matemática em determinadas situações cotidianas.

Dentre os conceitos estudados na trigonometria estão as relações trigonométricas, que estão direcionadas a compreender os valores das funções trigonométricas de um mesmo arco, com vistas a calcular as medidas dos lados e ângulos de um triângulo, envolvendo o seno, cosseno e tangente.

A trigonometria, nos dias atuais, encontra-se presente em muitos estudos, e pode contribuir para a pesquisa junto a outras disciplinas, fazendo-se necessária para auxiliar nos cálculos de matérias científicas, assim como nas tecnológicas, na física, na medicina, entre outras, possibilitando calcular as medidas dos elementos de um triângulo.

Além de ser utilizada nas questões matemáticas, seja em sala de aula ou no cotidiano das pessoas, a trigonometria na astronomia tem um papel de fundamental importância, sendo utilizada para medir astros e distância. Como exemplos, Reis (2016) cita o cálculo do tamanho da sombra e de seu raio, o cálculo para distâncias dentro do sistema solar entre os planetas e determinar o raio lunar.

A trigonometria também é utilizada na cartografia, na medicina e muitos fenômenos físicos e sociais do comportamento cíclico podem ser obtido com o auxílio da trigonometria. Como exemplo, tem-se a aplicação das funções trigonométricas na análise de variação da pressão arterial.

2.3 O ENSINO DA TRIGONOMETRIA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Silva (2011) discorre que o ensino da trigonometria deve estar voltado para a reelaboração teórica e prática do professor com vistas a atender as necessidades dos alunos e também da sociedade.

Alves (2016) evidencia que este tema (trigonometria), com o conteúdo triângulos retângulos deve levar o aluno a desenvolver algumas habilidades, dentre elas interpretarem e utilizar a resolução de problemas para cálculos de distâncias inacessíveis, por exemplo.

A resolução de problemas, assim vem se tornando uma metodologia que atende à necessidade da disciplina de matemática dos dias atuais. No entanto, pode-se dizer que, durante muito tempo, o ensino foi marcado pela formação de conceitos preestabelecidos, pela preocupação com a prática de treinar habilidades e as formas mecânicas de transmitir conteúdos, sem, entretanto, conseguir alcançar relevantes transformações nesta área. Cabe dizer, que embora novas metodologias cheguem para ampliar as formas de ensino e prática da matemática, não se pode negar que durante muito tempo a forma tradicional foi o meio que levou a aprendizagem a muitos alunos.

Ao longo das décadas de 60 e 70, chegou ao Brasil um movimento que ficou conhecido como “Matemática Moderna”, mas que ficou marcado por se preocupar em trabalhar teorias, distanciando-se das questões práticas. Foi um movimento, conforme descreve Silveira e Menegazzi (2007, p. 3), “que provocou discussões e amplas reformas no currículo de matemática em vários países, inclusive no Brasil, pois veiculava o ensino principalmente pelos livros didáticos”.

No entanto, por motivos de inadequações de alguns de seus princípios, este movimento perdeu sua força, pelos exageros ocorridos na sua implantação. Na década seguinte, ano de 1980, novas discussões chegaram às escolas, advindas das propostas curriculares nos Estados Unidos em que debatiam sobre a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e pesquisa na disciplina de matemática.

Onuchic (1999) trata da resolução de problemas, descrevendo que sua importância ganhou espaço no fim da década de 70, onde as orientações eram de que a matemática moderna deveria ter como foco a resolução de problema e que esta prática mediria a eficiência de um domínio, pessoal e nacional da competência matemática.

Silveira e Menegazzi (2007, p. 3) definem a resolução de problemas como sendo “uma mistura de maneiras diferentes de pensar, desde visões muito simples do tema, até sofisticadas teorias”. E complementam destacando que ela acontece com base em três concepções:

> a) **Como meta**, com a concepção de que se ensina matemática para resolver problemas;
>
> b) **Como processo**, onde o ensino centra-se em ensinar a resolver problemas, o que resultaria em aprender matemática; e,
>
> c) **Como habilidade básica**, em que os alunos devem aprender a resolver problemas, sendo preciso considerar problemas que envolvem conteúdo específico, diferentes tipos de problemas e os métodos de resolução para que se alcance a aprendizagem da matemática.

Mendonça (1994) define que problema é uma situação que gera conflito, de solução não óbvia. O dicionário Aurélio (*apud* SENA FILHO E MATOS, 2008, p. 4) conceitua o problema como “uma questão matemática proposta para que se lhe dê a solução; questão não resolvida e que é objeto de discussão, em qualquer domínio de conhecimento”.

Onuchic e Allevato (2009, p. 96) definem o termo problema como sendo:

> Tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer. Um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas e nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta.

As autoras relatam ainda que:

> O ensino-aprendizagem de um tópico matemático deve sempre começar com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis à situação-problema dada. O aprendizado, desse modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos) (ONUCHIC E ALLEVATO,2009, p. 96).

Schoeder e Lester (*apud* ONICHIC, 1999) evidenciam que o ensino da matemática por meio da resolução de problemas não tem sido adotado por muitos professores e autores. No entanto, sua abordagem no processo ensino e aprendizagem deve ser considerada e avaliada. As autoras acreditam que, com a resolução de problemas, os alunos ampliam sua capacidade de compreender os conceitos matemáticos, os processos e técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade matemática, desenvolvendo novas formas de raciocínio, além de melhor estabelecer conexões entre os conteúdos da matemática e outras disciplinas.

Onuchic (1999) assevera que a força da resolução de problemas requer um amplo repertório de conhecimento, não se restringindo às particularidades técnicas e aos conceitos, mas se estendendo às relações entre eles e aos princípios fundamentais que os unifica.

Cabe ressaltar também que o problema não pode ser tratado de forma isolada. A matemática, conforme Onuchic (1999) precisa ser ensinada como matemática e não como um acessório subordinado a seus campos de aplicação, trazendo com isso maior atenção aos seus princípios e suas aplicações.

2.3.1 Trabalhando a Resolução de Problemas: as atividades práticas em sala de aula

Para trabalhar com a resolução de problemas, supõe-se ser necessário inicialmente realizar o planejamento das questões que serão levantadas e que estejam de acordo com o currículo, com o conteúdo e também com a realidade e capacidades dos estudantes de resolverem os problemas que serão propostos.

Em seu planejamento, o professor vai escolher os tipos de problemas que serão desenvolvidos. Para Silveira e Menegazzi (2007, p. 5):

> A escolha de problemas diferentes pode possibilitar ao aluno ter contato com diferentes tipos de textos, desenvolvendo capacidades de interpretação, análise, seleção de dados que são relevantes e descartando os demais, obter conclusões, imaginar um plano para resolver e testar se sua resposta foi coerente com o que estava sendo pedido.

Silveira e Menegazzi (2007, p. 6) apresentam alguns tipos de problemas que podem ser trabalhados com os alunos para oportunizar esta aprendizagem por meio da resolução dos mesmos. São eles:

a) Os problemas convencionais - são exercícios simples, de aplicação ou de fixação de técnicas ou regras aparecem sempre após apresentação de um conteúdo sendo este conteúdo que deve ser aplicado na resolução, a solução numericamente sempre existe e é única, geralmente apresentam-se textos na forma de frases, todos os dados necessários aparecem explicitamente no texto e em geral na ordem em que serão usados, podem ser resolvidos pela aplicação direta de um ou mais algoritmos, a tarefa básica é identificar que operações são apropriadas, este tipo de problema gera nos alunos atitudes equivocadas frente ao que significa aprender e pensar em matemática (SILVEIRA E MENEGAZZI, 2007).

Sobre esses problemas convencionais, “o aluno será capaz não só de repetir ou refazer, mas também de ressignificar em situações novas, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas” (PARRA, 1996, p. 38).

b) Problemas sem solução - é quando os dados do problema são insuficientes para a pergunta em questão, nesse caso o problema é impossível de ser resolvido. Esse tipo de problema rompe com a opinião de muitos de que os dados apresentados devem ser usados e de que todo problema possui uma solução e ajuda o aluno a desenvolver a habilidade de aprender a duvidar, ser crítico (SILVEIRA E MENEGAZZI, 2007).

c) Problemas com mais de uma solução: faz com que o aluno perceba que é preciso investigar, participar como ser pensante, produzir seu próprio conhecimento e que não há sempre uma única maneira de resolvê-lo, e mesmo quando há várias soluções não pensar que somente uma delas é correta (SILVEIRA E MENEGAZZI, 2007).

d) Problemas com excesso de dados: requer do leitor uma atenção maior para seleção dos dados necessários para sua resolução, rompe com a crença de que todos os dados apresentados no problema tenham que ser usados, evidencia a importância de ler. Uma maneira de propor problemas com excesso de dados pode ser encontrada em jornais, revistas, folhetos de mercado, lojas, onde os alunos necessitam organizar e comunicar informações, requer seleção de alguns dos vários dados para a obtenção da resposta (SILVEIRA E MENEGAZZI, 2007).

Smole e Diniz (2001, p. 111) evidenciam que o problema com excesso de dados pode contribuir para:

> Aproximar o aluno de situações mais realistas que deverá enfrentar em sua vida, pois, na maioria das vezes, os problemas que se apresentam no cotidiano não são propostos de forma objetiva e concisa. Nesses casos, o resolvedor terá pela frente, em geral, uma situação confusa, cheia de informações supérfluas que devem ser identificadas e descartadas.

e) <u>Problemas de lógica</u> - exigem raciocínio dedutivo, o uso de estratégias não-convencionais para sua solução, estimula análise de dados e são motivadores. Fornecem uma proposta de resolução cuja base não é numérica, esse tipo de problemas tem como fonte principal os almanaques e as revistas infantis que os apresentam como desafios (SILVEIRA E MENEGAZZI, 2007).

f) <u>Outros problemas não-convencionais</u> - são problemas que solicitam uma estratégia para sua resolução que não é o algoritmo, pode ser um problema de investigação quando o professor elabora novas perguntas que conduzem o aluno a buscar novas soluções (SILVEIRA E MENEGAZZI, 2007).

Onuchic e Allevato (2009, p. 96) acreditam não haver formas rígidas de desenvolver o ensino da matemática por meio da resolução de problemas. No entanto, as autoras citam algumas etapas que podem contribuir para que essa metodologia atinja aos objetivos propostos em cada etapa do ensino matemático. São elas:

a) A preparação do problema – consta neste primeiro passo, construir um novo conceito, princípio ou procedimento. Ressalta-se que é bom que o conteúdo matemático para a resolução do problema não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula;
b) Leitura individual – cada aluno deve fazer uma leitura da cópia do problema entregue pelo professor.
c) Leitura em conjunto – nesta etapa será formado grupos e uma nova leitura do problema.
d) Resolução de problemas – de posse do problema e sem dúvidas quanto ao seu enunciado, os grupos, de forma cooperativa e colaborativa buscam resolvê-lo. O problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os

alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula;

e) Observar e incentivar – nesta etapa, enquanto os alunos, em grupo tentam resolver o problema, o professor observa, analisa e estimula o trabalho colaborativo.
f) Registro das resoluções – os alunos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por processos diferentes serão apresentados para que todos os alunos as analisem e discutam;
g) Plenária – nesta etapa, os alunos são convidados a discutirem as diferentes formas de resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vistas e esclarecerem suas dúvidas.
h) Busca do consenso – após sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções dos problemas apresentados, o professor, tenta, com a classe, chegar a um consenso comum sobre o resultado correto.
i) Formalização do conteúdo – nesta fase, o professor registra na lousa uma apresentação formal, organizada e estrutura em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Estes são os passos sugeridos por Onuchic e Allevato (2009) para o trabalho com resolução de problemas em matemática. Elas orientam que todos os alunos são levados a participar ativamente dos problemas propostos, discutir, analisar as questões, defender seu ponto de vista e esclarecer suas dúvidas.

Caso haja dificuldades na leitura e compreensão dos problemas, devem-se buscar formas de esclarecer as dúvidas, cabendo ao professor incentivar os alunos a utilizar seus conhecimentos já existentes e a buscar novas maneiras para a compreensão do problema.

O professor deve reconhecer a intencionalidade pedagógica que orienta suas ações e valorizar os alunos, sem desconsiderar seus interesses e curiosidades, ao mesmo tempo em que fornece os meios para a conquista das competências esperadas pelas disciplinas. Processos de mudança sempre trazem dificuldades, por isso é relevante observar como o grupo de alunos lidam com seus saberes e com os conflitos que vão surgindo ao pongo da aprendizagem.

Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2009) evidenciam que é necessário que o professor acompanhe as explorações dos alunos, colocando-se no papel de interventor, ajudando-os quando necessário a resolver os problemas secundários, que podem surgir no decorrer da resolução do problema.

Fernandes (*apud* ANGOTTI, 2011, p. 1) destaca que é papel do professor:

> Preparar o indivíduo para lidar com a incerteza, com a complexidade na tomada de decisão e ter responsabilidade sobre as decisões tomadas. Educar para a sociedade atual é preparar o indivíduo para conviver num tempo onde as coisas se movimentam com muita rapidez, onde o conhecimento é renovado a cada dia e as distâncias se encurtam rapidamente. Tudo é incerto e imprevisível. Isto requer capacidade de compreender o que ocorre ao seu redor, saber discriminar as informações importantes, adquirir o prazer pelo crescimento contínuo. Requer uma atitude de questionamento crítico, uma boa capacidade decisória, a percepção de diferentes alternativas, a existência de diversos caminhos válidos para o alcance dos objetivos propostos, além da compreensão de que cada indivíduo é quem decide e constrói o seu próprio caminho.

Desta maneira, diante da resolução de problemas, o professor oportuniza o espaço para o aluno pensar e lidar com suas incertezas de forma a torná-lo capaz de pensar por si mesmo, assumir a responsabilidade sobre seu conhecimento para que alcance os objetivos desejados pelo ensino matemático.

Vasconcellos (2000, p. 70) destaca que:

> [...] o professor passa a ser o mediador da relação educando-objeto de conhecimento-realidade, ajudando-o a construir a reflexão, pela organização de atividades, pela interação e problematização; os conceitos não devem ser dados prontos; podem ser construídos pelos alunos, propiciando que caminhem para a autonomia.

E, como mediador, é certo dizer que as relações que se constroem neste ambiente são fundamentais tanto para o docente como para o discente. Vasconcellos (2000) destaca que para o primeiro, possibilita condições de desenvolver toda a sua capacidade para ensinar e, para o segundo, disponibiliza confiança e segurança em si e também no professor, desenvolvendo sua aprendizagem de forma mais satisfatória, pois embora a preocupação maior seja com a construção do conhecimento, existe também em sala de aula uma interação entre as pessoas que gera sentimentos de afeto e de amizade, sentimentos esses que podem facilitar o processo de aprendizagem.

Onuchic e Allevato (2011) acreditam que na aprendizagem da matemática através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre os diferentes conteúdos matemáticos, gerando a partir desta conexão novos conceitos e produzindo novos conhecimentos.

Para Oliveira (2014) o método de resolução de problemas no ensino da trigonometria é uma forma estratégica e subsidiária na construção do conhecimento, podendo ser uma ferramenta importante para os professores que almejam o aprendizado concreto de seus alunos.

3 METODOLOGIA APLICADA NO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

A presente pesquisa se desenvolveu inicialmente por meio de pesquisa exploratória que segundo Gil (1996, p. 45) tem como fim “proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torna-lo mais explícito ou a construir hipóteses”.

Também foi necessário um estudo bibliográfico do tema trigonometria, visto a necessidade de aprofundar o conteúdo a partir do entendimento de autores diversos que estudam o tema em questão, bem como situar nosso estudo no cenário das pesquisas já realizadas sobre a temática.

Chama-se de pesquisa bibliográfica conforme Gil (2002, p. 44) aquela que é:

> Desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora quase em todos os seus estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de temas bibliográficos.

Após a pesquisa bibliográfica, foi realizada uma pesquisa de campo através de uma atividade prática, com a aplicação de um problema de trigonometria, tendo como foco a resolução de problemas, apresentada a estudantes de uma turma do 9° ano do ensino fundamental.

Os sujeitos que participaram das atividades propostas são alunos que sempre estudaram em escolas públicas e que moram próximo à escola da qual fazem parte.

A turma que realizou o trabalho foi composta por 20 alunos, os quais foram divididos em grupos, resultando em 4 grupos com 5 componentes cada.

Essa atividade foi dividida em dois momentos, sendo o primeiro a construção de um teodolito pelos estudantes e o segundo momento destinado à resolução do problema proposto.

Contudo, é importante mencionar que o problema nasceu a partir da temática proposta pelo professor/pesquisador, qual seja, a medição de algo que não fosse possível com elementos simples como régua, barbante, a palma da mão, os passos de uma pessoa e/ou trena. Precisava ser alguma coisa que fosse difícil de medir de forma instantânea, sem a utilização de algum aparelho ou procedimento mais avançado.

Nesse sentido, após discussões entre os estudantes e algumas propostas, chegaram ao consenso de se fazer a medição da altura de um prédio que ficava ao lado da escola.

Note que, embora tenha sido o professor/pesquisador a propor o tema, foram os próprios estudantes que elegeram o problema. Como bem defende Onuchic (2009, p. 85):

> Os problemas são propostos pelos próprios alunos antes mesmo de lhes serem apresentados formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor.

No início da atividade proposta, e antes mesmo dos alunos se debruçarem sobre o problema, foi feita uma discussão quanto à necessidade de instrumentos para se medir grandes objetos e longas distâncias. Nesse sentido, foi feito um convite aos estudantes para que eles mesmos construíssem um teodolito, instrumento usado para medir a altura de prédios, árvores, entre outros, que, segundo Zilkha (2014, p. 21):

> É um instrumento óptico utilizado na topografia para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais com o objetivo de facilitar o cálculo de distâncias e alturas. Na agrimensura é utilizado para a triangulação em redes e também usado pela engenharia, arquitetura e por outros profissionais e técnicos, em grandes construções de estradas, demarcações de fazendas e sítios.

Relevante ressaltar que uma aula prática, como bem define Pires (2016), tem como principal característica o uso de materiais e equipamentos com os quais o aluno fará alguma experiência, além da temática envolvida na atividade ter conexões com seu dia a dia.

Candau (1988) entende a prática como "o agir do aluno" em ambientes como laboratórios, pátios escolares, ruas, campos, entre outros espaços que podem ser utilizados como recurso no processo de ensino e aprendizagem. O autor ressalta também que a aula prática pode ser realizada tanto antes como depois da aula teórica e parte sempre de experiências advindas da construção do próprio material por parte dos alunos e que o experimentarão nestas práticas.

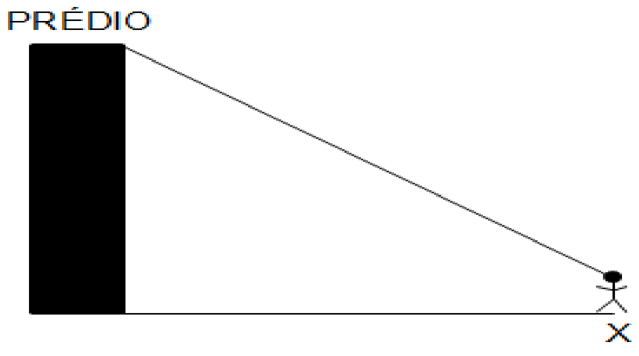
A aula prática, como destaca Pires (2016, p. 24):

> Tem a vantagem de fixar o conceito compreendido pelo aluno e que este, tende a não esquecê-la. Também adiciona às vantagens, o fato de que aulas práticas são menos monótonas e de ser a preferência entre os alunos, sendo elas mais agradáveis e significativas.

Assim, para a confecção do teodolito, foram usados materiais como uma garrafa pet, canos de PVC de 1,5m cada um, parafusos, um transferidor de 360º, um nivelador, duas bases resistentes com 11 cm. Importante mencionar que tais objetos são comuns aos estudantes, de forma que lidar com eles se torna bem natural.

Após esse momento, passou-se ao problema de se aferir a altura do prédio, de modo que cada grupo buscou uma solução para o problema de forma livre:

Em uma quadra plana, o topo de um prédio é visto por um observador, como mostra a figura a seguir. Sabendo que se pode medir a distância do observador ao prédio, qual é aproximadamente a altura do prédio?



É interessante mencionar que este problema não necessita, necessariamente, de um teodolito para ser solucionado. Contudo, nossa intenção era possibilitar aos estudantes vivenciar a construção de uma matemática que surgisse de uma necessidade humana em detrimento de uma matemática pronta e formal. Assim, o que se almejou foi a construção de um conhecimento em oposição à exposição de uma teoria de trigonometria.

Em seguida, diante das soluções apresentadas por cada grupo para a turma, indagou-se sobre outra situação que não daria para ser resolvida da mesma maneira, de forma que esta nova situação desencadeou um novo problema que fez surgir a necessidade de se usar os conceitos utilizados para medição da altura do prédio, bem como do teodolito por eles construído. Estas noções foram preponderantes para se formalizar a trigonometria em triângulo retângulo.

Cabe ressaltar que esse trabalho foi desenvolvido em quatro semanas, sendo utilizadas 8 aulas para o desenvolvimento do trabalho. Entre a apresentação das atividades, a divisão dos grupos, a explicação acerca do teodolito, a pesquisa do que seria medido e onde, assim como a confecção do mesmo pelos alunos foram necessárias quatro aulas. Em seguida, mais duas aulas foram utilizadas para a resolução da primeira questão. Por fim, outras duas aulas para a questão envolvendo trigonometria, com a resolução a partir do triângulo retângulo.

Iniciou-se como já citado com a pesquisa sobre o que seria medido e como o fariam. Em seguida, o levantamento de material e a construção do instrumento para que fosse possível fazer a medição, passando pela resolução dos problemas, discussão entre os grupos e a apresentação dos resultados da pesquisa.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 TEODOLITO

O ponto de partida de toda discussão, que inclusive possibilitou o surgimento dos dois problemas, deu-se a partir da construção do teodolito. O espaço utilizado para a construção deste instrumento foi o refeitório, pois é um espaço com mesas, arejado onde os alunos tiveram condições de trazer os materiais para a atividade, trocar ideias e trabalhar de forma mais livre as ações propostas.

Toda a construção do teodolito aconteceu fora da sala de aula, sendo utilizado 4 aulas (de 50 minutos cada aula) para esta primeira parte do trabalho. Para desenvolver esta atividade, os alunos ocuparam o refeitório e o pátio da escola. O refeitório por possuir mesas grandes em que pode ser utilizada para a escolha e divisão do material que os próprios alunos trouxeram para a construção do instrumento. E o pátio foi utilizado para que os alunos pudessem testar o teodolito que estavam construindo.

Embora todos os alunos tenham participado das atividades propostas, é certo dizer que algumas dificuldades ocorreram neste caminho. Inicialmente, foi preciso duas aulas para que todos trouxessem os materiais necessários, que, como citado anteriormente, foram materiais simples, recicláveis, de fácil acesso e de conhecimento de todos os alunos.

Após a primeira aula, em que foi exposto a imagem do teodolito, com explicação sobre o instrumento e os passos para sua construção a partir dos materiais que poderiam ser utilizados, a segunda aula foi o início da construção do mesmo pelos alunos com a mediação do professor. Alguns sentiram dificuldades, outros seguindo o modelo a partir da imagem conseguiram montar o instrumento. Na terceira e quarta aula os alunos ainda continuaram o desenvolvimento do projeto, conseguindo finalizar a construção. Cabe ressaltar que o teodolito precisou ser melhorado em dois grupos que sentiram um pouco mais de dificuldade em relação aos demais.

Nestas aulas, pôde-se perceber que em alguns grupos, havia integrantes que não estavam tão motivados, sendo possível observar conversas e dispersão. No entanto, como também acontece em sala de aula, existem os alunos que se interessam mais pelo trabalho do que outros. Nesta atividade proposta, apesar de haver os alunos menos comprometidos, a maioria participou e conseguiu finalizar esta primeira parte da tarefa proposta.

Contudo, nesta etapa, apesar de alguns alunos desmotivados, pode-se dizer que os alunos se mostraram entusiasmados, pois embora estivéssemos envolvidos numa atividade inserida na aula de Matemática, o ambiente era bem diferente daquele presente nas aulas tradicionais. Contudo, alguns alunos sentiram mais dificuldades que outros na construção do instrumento, visto que este requer atenção e medidas corretas. Mas conforme as orientações, os alunos foram buscando, tentando, dialogando entre si, conseguindo assim alcançar êxito.

Isso deixou os estudantes mais à vontade, inclusive para fazer questionamentos e apresentarem seus pontos de vista ao longo das outras atividades. Entendemos ainda que essa liberdade foi essencial para as considerações que os estudantes fizeram nas atividades que se seguiram.

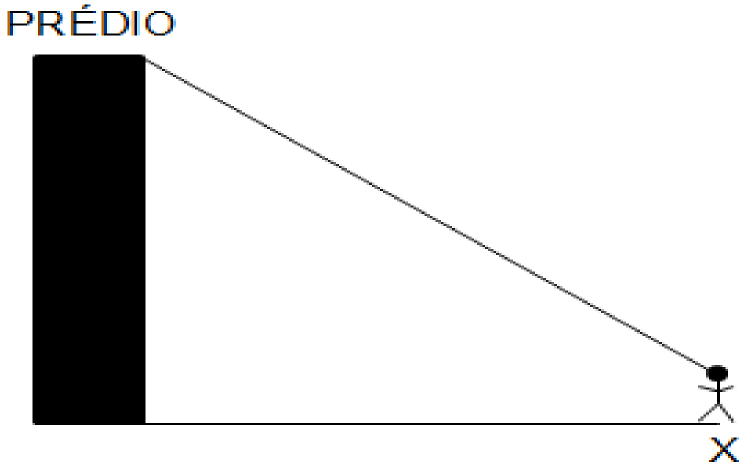
Quanto ao espaço escolar, vale ressaltar também a necessidade de planejamento dos horários, para que outras turmas não estejam ocupando o mesmo espaço no horário das atividades marcadas. Como fizemos todo o trabalho extraclasse nos horários das aulas, outras turmas estavam em sala e assim, não houve interrupções por parte de outras turmas.

4.2 ALTURA DO PRÉDIO

Como mencionado anteriormente, a ideia de se medir a altura do prédio partiu da própria turma. No entanto, como professor mediador, sugeri as formas de resolução, para que os grupos pudessem discutir entre si e buscar a melhor forma de resolver. Tais sugestões tinham por finalidade ajudar os estudantes a iniciarem a atividade. Assim, diante das sugestões e do conhecimento dos integrantes dos grupos, os estudantes tinham um cenário propício a descobertas e, por consequência, a enunciação de resultados.

A questão abaixo foi apresentada aos estudantes:

Em uma quadra plana, o topo de um prédio é visto por um observador, como mostra a figura a seguir. Sabendo que se pode medir a distância do observador ao prédio, qual é aproximadamente a altura do prédio?



Durante as discussões uma questão apareceu com frequência nos grupos. Tratava-se de se levar ou não em consideração a altura do observador para se aferir a altura do prédio.

Enquanto alguns argumentavam que a altura do observador poderia ser desconsiderada uma vez que esta era consideravelmente inferior à do prédio, outros levaram o observador em questão sob a justificativa que 1 metro de diferença já seria suficiente para um prédio cair, por exemplo. Portanto, a altura do observador era relevante na solução do problema.

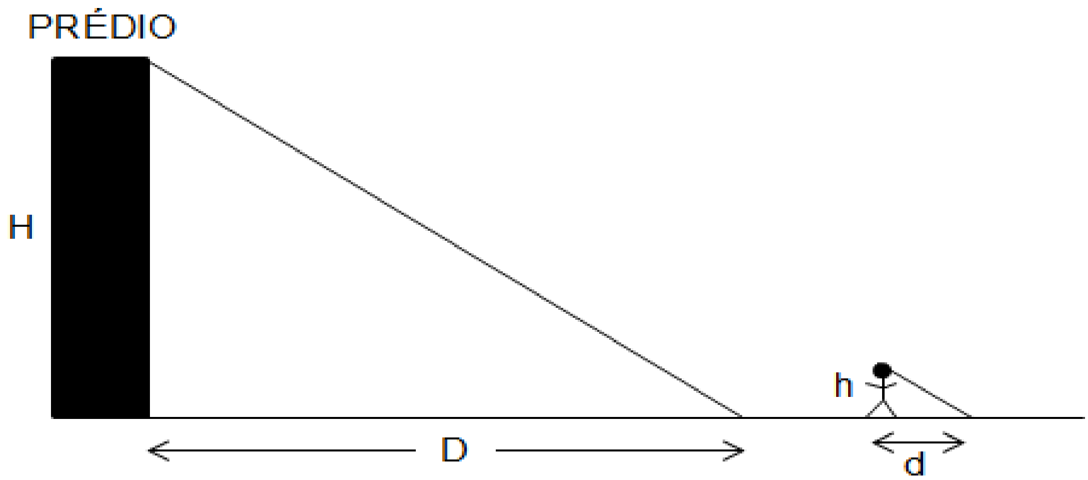
Basicamente, houve dois tipos de solução. A primeira tinha o raciocínio centrado na noção de semelhança de triângulos, fazendo referência a exemplos advindos da história da Matemática, como a medição da altura de uma pirâmide, tendo por referência sua sombra. Para esse grupo, a altura do observador era preponderante para a solução.

Para que fosse possível identificar as formas de resolução, os alunos, além das explicações dadas por mim enquanto mediador durante todo o trabalho, os alunos também realizaram pesquisas em casa, através da Internet, tanto para a construção do teodolito, na busca de imagens, para complementar àquelas apresentadas pelo professor mediador, como também para que fosse possível chegar na forma de resolver as questões. Essas pesquisas contribuíram neste processo de aprendizagem.

Relevante destacar que a utilização da álgebra decorre do fato de esta possibilitar um melhor entendimento pelos alunos, pois esta consegue ser uma ferramenta de grande valor para a resolução de problemas. Lins (2006), sobre a atividade algébrica, destaca que ela contribui para a produção de significados e construção de conhecimento, levando os alunos a lidar de forma mais clara com estruturas matemáticas, usando-a na resolução de problemas matemáticos.

Lins (2006) ressalta ainda que com a álgebra é possível interpretar de forma mais criativa os símbolos matemáticos na resolução de problemas.

Assim, um esboço para a resolução segue abaixo:

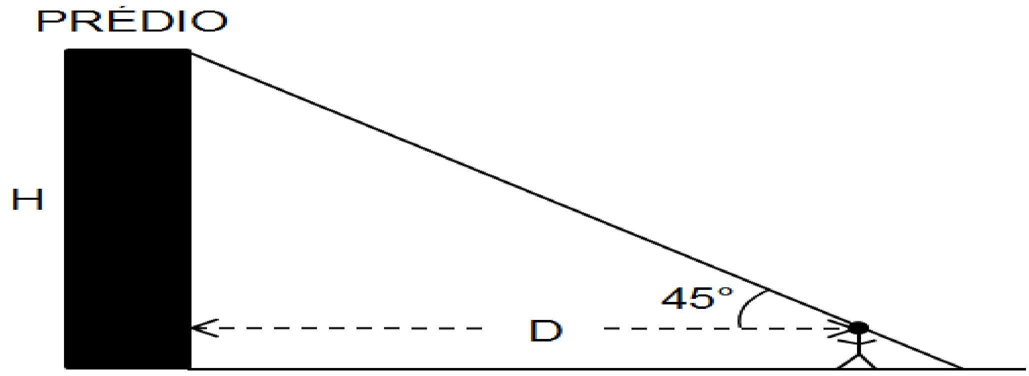


Como era conhecida a altura *h* do observador, o tamanho *d* da sua sombra e a sombra *D* do prédio, uma vez que os alunos fizeram estas medições, calculava-se a altura *H* do prédio diretamente por semelhança de triângulos, tendo a razão de semelhança, ou ainda por proporcionalidade.

Assim, usando semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{H}{h} = \frac{D}{d} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{D \cdot h}{d}$$

Outra possibilidade de resolução apresentada por outro grupo levava em consideração a noção de triângulo retângulo isósceles. Esta possibilidade de resolução fez uso do teodolito para aferição do ponto de onde o topo do prédio seria visto segundo um ângulo de 45°. Assim, após medir a distância deste ponto ao prédio, obteve-se a altura *H* do prédio.



Importante notar que neste caso os estudantes desprezaram a altura do observador, encontrando um valor aproximado (para menos) para a altura do prédio.

Obviamente, não temos a intenção de dizer quem está certo ou errado, pois se levarmos em consideração as justificativas de cada grupo, no contexto em que estão argumentando, as duas resoluções são plausíveis.

Nesse sentido, as duas abordagens são coerentes numa didática pautada na resolução de problemas, pois além de levarem em consideração conhecimentos prévios dos estudantes para solução do problema, também possibilitou um pensar próprio.

Assim, depois de analisar as abordagens acima mencionadas e de discutir com os estudantes tais possibilidades, após 3 dias apresentei aos estudantes o seguinte questionamento em relação ao problema anteriormente proposto:

Mas, e se não desse para medir a distância da sombra do prédio, no caso da primeira solução, ou ainda não fosse possível estabelecer a distância do ângulo de visão de 45° do observador ao prédio, raciocínio usado na segunda solução?

A pergunta foi então apresentada aos grupos na sexta aula do projeto, sendo que os alunos a levaram para casa para que pudessem discutir em grupo sobre possibilidades de resolução.

Nesse sentido, o que houve foi um convite para que os estudantes se envolvessem num processo de investigação com argumentação justificada para explorações e descobertas em oposição à imposição de comandos (SKOVSMOSE *apud* CAMPOS, 2013).

Importante mencionar que este questionamento feito (desdobramento do primeiro problema) se deu somente após avaliar aas resoluções por eles apresentadas. Este tempo foi essencial para que eu pudesse dar continuidade ao trabalho a fim de desenvolver com eles as noções de trigonometria em triângulo retângulo.

Tal questionamento tinha por intenção a confecção de um novo problema; problema este que faria aparecer a necessidade pela Trigonometria.

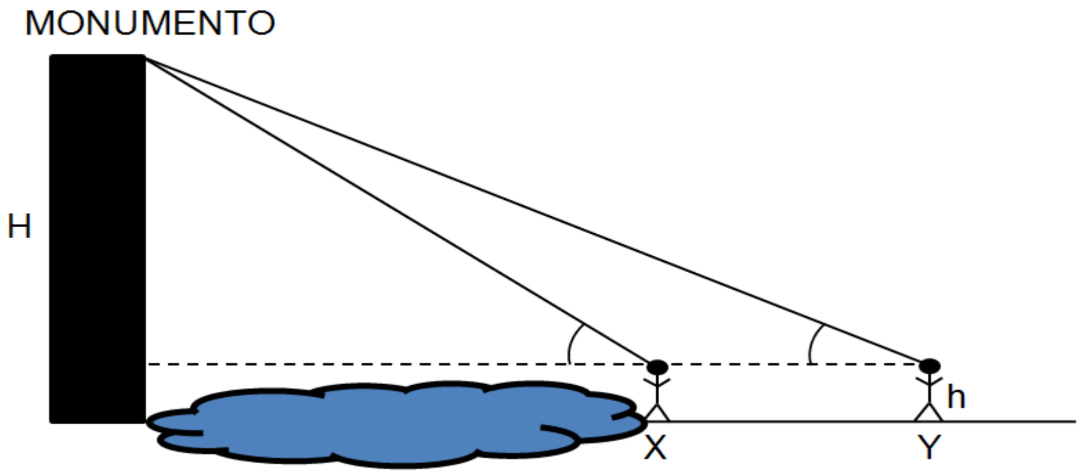
4.3 ALTURA DO MONUMENTO

A seguir apresentaremos um problema que pôde desencadear aspectos chaves do conteúdo de trigonometria, a partir da metodologia de Resolução de Problemas proposta por Onuchic e Allevato (2009), sem previamente abordar termos como seno, cosseno ou tangente.

A escolha desta metodologia de ensino partiu das pesquisas e estudos realizados por Onuchic (2009) que ressalta que este trabalho pode possibilitar uma aprendizagem mais significativa da trigonometria. Tal abordagem exige do aluno interesse, conhecimento, pesquisa, raciocínio que não se restringe às fórmulas e conceitos, mas com estes unificar a aprendizagem e ampliar a forma de solucionar os problemas propostos.

E, deste modo, partiu-se da apresentação do problema, ao processo de resolução, exposição e formalização. Assim, foi colocado em pauta o seguinte problema:

Em uma região aproximadamente plana, o topo de um monumento é visto por um observador em dois momentos, X e Y, sob ângulos α e β com a horizontal, respectivamente. Entre o ponto X e a base do monumento há um lago de largura desconhecida. Se a distância entre os momentos X e Y é medida e conhecida pelo grupo de estudo e, levando em consideração a altura do observador, qual é aproximadamente a altura do monumento?



É importante salientar que a intenção de se colocar o lago na questão acima apresentada foi a de impossibilitar a mediação da distância do monumento ao observador, de modo que a segunda forma de se resolver a questão não pudesse ser utilizada.

Este problema teve como objetivo apresentar para o aluno que se pode fazer aferição remota de grandes estruturas, monumentos e/ou distâncias a partir de um cálculo trigonométrico. Foram utilizadas duas aulas para a realização desta atividade, que contou com a apresentação feita pelo professor, em seguida os grupos iniciaram as discussões e na segunda aula apresentam suas respostas e uma nova discussão foi iniciada com os alunos discorrendo sobre a questão e o modo como buscaram a sua resolução.

Assim, cada grupo iniciou a discussão do problema. Importante destacar que a primeira etapa da metodologia de Resolução de Problemas, a preparação do problema, contou com o apoio do problema enunciado pelos estudantes (a medição da altura do prédio) e com as discussões sobre a utilidade de um teodolito. Nesse sentido, tínhamos um terreno fértil para a construção de conceitos de trigonometria em triângulo retângulo.

Além disso, a segunda etapa (leitura individual) aconteceu concomitantemente à terceira etapa (leitura em conjunto), pois os estudantes já estavam reunidos em grupo. Inicialmente, cada um fez sua leitura do problema, mas em paralelo já lançavam ideias para os outros integrantes do grupo.

O trabalho foi livre para que cada grupo desenvolvesse a questão da forma como a entenderam. Os grupos discutiam entre si como executá-la e o professor intervinha apenas quando solicitado, sem, no entanto, dizer como a questão deveria ser resolvida. A intenção era observar como os alunos sozinhos iam analisar o problema e esboçar a solução.

Assim, a quarta etapa (Resolução do problema) aconteceu em conjunto com a quinta etapa (observar e incentivar), isto é, ao mesmo tempo em que os grupos iam conduzindo as discussões e as dúvidas iam surgindo, o professor/pesquisador observava, analisava e estimula o trabalho colaborativo:

> A proposta da resolução de problemas é estimular os alunos a investigar buscando e usando seus conhecimentos já construídos. Descobrir caminhos e decidir quais devem tomar para resolver o problema, trabalhando colaborativamente, relacionando ideias e discutindo o que deve ser feito para se chegar a solução. (OLIVEIRA, 2014, p. 44)

Após a conclusão da atividade os grupos foram convidados a expor para a turma os resultados e os caminhos utilizados para obter a resposta. Esta caracteriza a sexta etapa da metodologia: o registro das soluções.

Ao apresentar a solução, cada grupo teve a oportunidade de explicar os caminhos escolhidos, bem como esclarecer para os colegas pontuais dúvidas advindas das explicações apresentadas à classe. Nesse momento, houve concordância e discordância em alguns aspectos das resoluções apresentadas, o que contribuiu para um espaço de debate quanto a ideias matemáticas. Esta é a sétima etapa, denominada plenária.

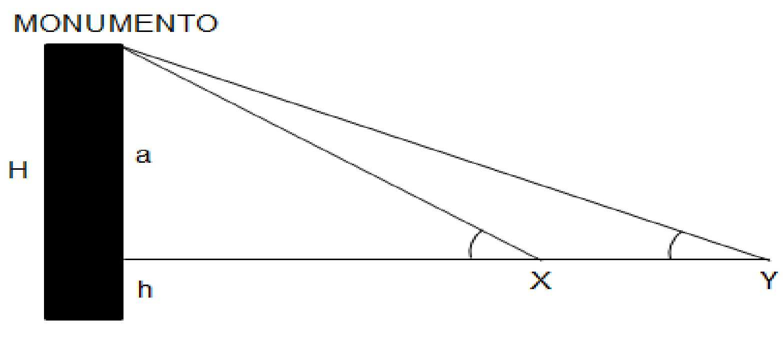
Destacamos aqui a solução apresentada por um dos grupos que possibilitou estabelecer a relação com a trigonometria. Resolvemos ir criando os desenhos a fim de facilitar para o leitor a compreensão da construção do conceito das razões trigonométricas.

Neste momento, fui apresentando para os alunos que com a trigonometria é possível desenvolver a questão. Fui para o quadro explicar melhor como os alunos podiam desenvolver a questão por meios trigonométricos, visto que, sozinhos não conseguiram iniciar a questão, devido a algumas dificuldades.

Além disso, sugeri que olhassem para o problema anteriormente resolvido e tentassem analisar se algum procedimento adotado lá poderia também ser aplicado neste problema.

Importante destacar que a resolução que se segue abaixo tem inúmeras intervenções do professor-pesquisador, pois em vários momentos os grupos não conseguiam avançar em suas resoluções.

Inicialmente, dividiram a altura do prédio em duas partes, de forma que uma parte correspondeu à altura *h* do observador e a outra parte o grupo chamou de *a*.



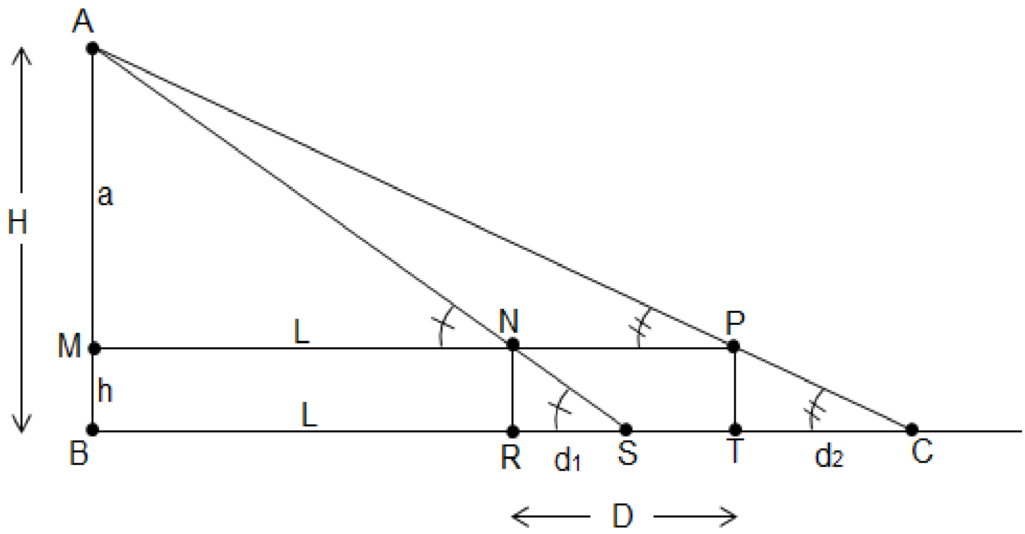
Assim, a altura *H* do monumento seria dada por:

$$H = h + a$$

Fazendo uso das ideias de semelhança de triângulo tentaram achar o valor de *x*. Entretanto, como não tinham a largura do lago, ficou impossível usar este resultado para resolverem o problema diretamente.

Como estavam insistindo na largura do lago, questionei que, se não sabiam a largura, por que não atribuir um valor qualquer? Embora, tenham começado a discussão cogitando alguns valores numéricos, concluíram ser melhor atribuírem uma letra para a largura do lago. Chamou-se então a largura do lago de *L*.

Assim, o grupo voltou mais uma vez à semelhança de triângulos, estabelecendo relações entre 6 triângulos, três a três, de modo a gerar duas razões de semelhança:



Assim, os triângulos ABS, AMN e NRS são semelhantes, bem como os triângulos ABC, AMP e PTC. Portanto, temos as seguintes relações:

Nos triângulos AMN e NRS, temos:	Nos triângulos AMP e PTC, temos:
$\frac{a}{h} = \frac{L}{d_1}$	$\frac{a}{h} = \frac{L+D}{d_2}$

É importante que o leitor entenda o que as relações acima significam. Na verdade, tais relações são:

$$\frac{a}{h} = \frac{L}{d_1} = k_1 \qquad e \qquad \frac{a}{h} = \frac{L+D}{d_2} = k_2$$

onde k_1 e k_2 são as razões de semelhança, respectivamente.

Assim, usando manipulação algébrica, o grupo (com ajuda do professor) conseguiu algumas relações:

$$\frac{a}{h} = \frac{L}{d_1} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{a \cdot d_1}{h} \qquad (1)$$

$$\frac{a}{h} = \frac{L+D}{d_2} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{a \cdot d_2 - h \cdot D}{h} \qquad (2)$$

Assim, de (1) e (2), temos:

$$L = \frac{a \cdot d_1}{h} = \frac{a \cdot d_2 - h \cdot D}{h} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{h \cdot D}{d_2 - d_1} \qquad (3)$$

Portanto, temos que a altura *H* do monumento é:

$$H = h + a = \frac{h \cdot (D + d_2 - d_1)}{d_2 - d_1}$$

Aqui também precisamos destacar que a ideia de isolar *L* em (1) e (2) para conseguir a relação (3) foi discutida com os estudantes pelo professor-pesquisador. Como *L* foi uma variável inserida no problema, então seria interessante retirá-la, caso fosse possível. Como conseguiram a relação (3), estão era possível.

Durante a plenária alguns questionamentos foram surgindo. Um deles estava relacionado ao valor dos ângulos de visão do observador em relação ao topo do monumento. Durante a discussão com a turma foi possível perceber que tinham entendido que este ângulo poderia aumentar ou diminuir caso este observador se aproximasse ou distanciasse do monumento, respectivamente. Além disso, concluíram também que a relação (3) não se alteraria caso os ângulos de visão mudassem.

Assim, pontuou-se que indiferente da largura do lago, ou dos ângulos de visão, seria sempre possível obter a altura do monumento tendo o teodolito como instrumento para ajudar a medir os ângulos de visão. Esta conclusão, por sua vez, foi o que precisávamos para falar, ainda que sem fazer referência à nomenclatura usada em trigonometria, sobre as razões trigonométricas.

Contudo, um dos grupos que anteriormente tinha desprezado a altura do observador para calcular a altura do prédio ao lado da escola, questionou sobre este fato.

A seguinte questão foi então apresentada à classe: Imaginem que a altura do observador pudesse ser desprezada. Nesse caso, não teríamos os triângulos pequenos, triângulo NRS e triângulo PTC, para fazermos a semelhança. Como procederíamos para obter o valor do segmento $\overline{AM} = a$?

Assim, iniciou-se mais uma vez a discussão. Partimos de resultados anteriormente usados:

$$\frac{a}{h} = \frac{L}{d_1} \qquad \Bigg| \qquad \frac{a}{h} = \frac{L + D}{d_2}$$

Neste momento, fui para o quadro e chamei a atenção dos estudantes ao fato das relações acima também poderem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{a}{L} = \frac{h}{d_1} \qquad \Bigg| \qquad \frac{a}{L + D} = \frac{h}{d_2}$$

Mais uma vez destacamos para o leitor que as relações acima são na realidade:

$$\frac{a}{L} = \frac{h}{d_1} = k_3 \qquad e \qquad \frac{a}{L + D} = \frac{h}{d_2} = k_4$$

onde k_3 e k_4 são agora constantes de proporcionalidade.

Associando isso ao fato do observador poder se deslocar para mais perto ou mais longe do monumento, concluímos que isso faria com que L tivesse que sofrer um decréscimo ou acréscimo, respectivamente, a fim de se ajustar à nova situação. E, além disso, afirmaram que os ângulos de visão, denominados A e B no enunciado do problema, também sofreriam alterações, aumentado se o observador se aproximasse do monumento ou diminuindo se o mesmo se afastasse.

Entretanto, mesmo que tais condições acontecessem, as relações

$$\frac{a}{L} = \frac{h}{d_1} \qquad e \qquad \frac{a}{L+D} = \frac{h}{d_2}$$

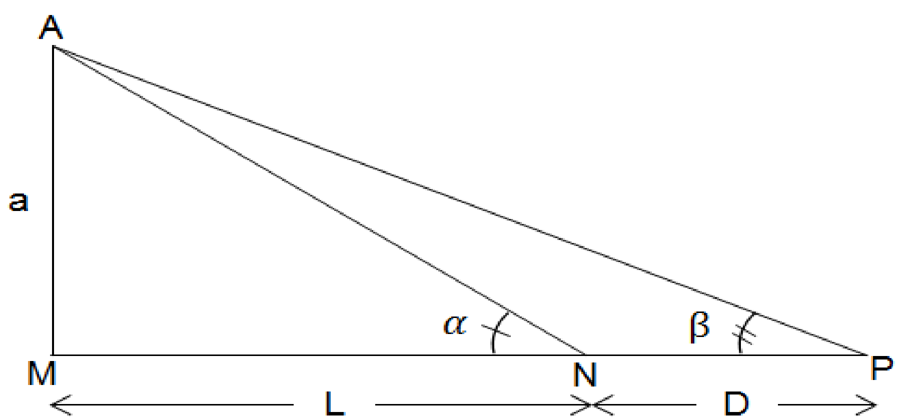
se manteriam proporcionais, com novas constantes, pois o ângulo de visão sofreu alterações.

Assim, os estudantes começaram a perceber que nos triângulos retângulos existe uma relação direta entre a proporcionalidade da altura e da base dos triângulos com o ângulo de visão. Nesse sentido, poder-se-ia usar tanto os triângulos NRS e PTC, quanto os triângulos AMN e AMP, para estabelecer tal relação.

Diante desse fato, estabeleceram-se duas relações a partir dos triângulos AMN e AMP:

$$\dot{\alpha} = \frac{a}{L} \qquad \Bigg| \qquad \dot{\beta} = \frac{a}{L+D}$$

onde $\dot{\alpha}$ significa a razão da altura pela base em relação ao ângulo α e $\dot{\beta}$ significa a razão da altura pela base em relação ao ângulo β.



Importante mencionar que a relação encontrada acima é a própria tangente.

Mais uma vez, trabalhando algebricamente, temos:

$$L = \frac{a}{\dot{\alpha}} = \frac{a - D \cdot \dot{\beta}}{\dot{\beta}} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{D \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta}}{\dot{\alpha} - \dot{\beta}}$$

Assim, partindo para formalização, última etapa da metodologia, foi possível associar a relação encontrada pelo grupo e nomeá-la de tangente do ângulo. Trocou-se o símbolo $\dot{\alpha}$ por tg α e o símbolo $\dot{\beta}$ por tg β.

Além disso, também foi mencionado que num triângulo retângulo como nos problemas apresentados a altura e a base são os catetos, de forma que considerando o ângulo α, por exemplo, a altura seria o cateto oposto ao ângulo α e a base seria o cateto próximo ao ângulo em questão.

Por fim, para alinhar com a linguagem matemática, trocou-se a expressão “cateto próximo” para cateto adjacente. Logo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{L} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adajacente\ a\ \alpha} \qquad tg\, \beta = \frac{a}{L + D} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adajacente\ a\ \beta}$$

Diante disso, foi possível fornecer o resultado para relação (3) independente da altura do observador e das distâncias d_1 e d_2:

$$a = \frac{h \cdot D}{d_2 - d_1} = \frac{D \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta}}{\dot{\alpha} - \dot{\beta}} = \frac{D \cdot tg\, \alpha \cdot tg\, \beta}{tg\, \alpha - tg\, \beta}$$

Assim, concluiu-se que sempre se poderá obter a altura do monumento, bastando apenas marcarmos dois pontos, de modo que consigamos medir a distância entre esses pontos, além de termos os ângulos de visão desses pontos em relação ao topo do monumento.

Portanto, respondendo ao problema, que levava em consideração a altura do observador, temos que a altura do monumento é dada por:

$$H = h + \frac{D \cdot tg\, \alpha \cdot tg\, \beta}{tg\, \alpha - tg\, \beta}$$

Cabe ressaltar também que os alunos, sozinhos, não conseguiram obter a relação acima. Embora a resolução de problemas passe pelas experiências vividas pelos alunos, foi necessária a intervenção do professor para que os mesmos concluíssem a resolução do problema.

Pode-se dizer também que os alunos sentiram dificuldades em buscar sozinhos a sua melhor maneira de resolver o problema, mesmo estando em grupos, de forma que os diálogos e discussões necessitaram da ajuda do professor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática é de grande importância para a educação em qualquer nível de escolaridade, visto que os conceitos relacionados a esta disciplina estão inteiramente ligados a diversas situações que ocorrem todos os dias na vida das pessoas.

Pode-se dizer que o conhecimento na disciplina de matemática deve ser um conhecimento articulado, que esteja atrelado, quando possível, a outras áreas de conhecimento e que deve ser trabalhada de forma contextualizada, com conceitos bem estruturados e organizados em torno de unidades mais globais, de estruturas e metodologias compartilhadas por outras disciplinas.

Diante disso, o intuito deste trabalho foi propor uma alternativa para o ensino e aprendizagem da trigonometria por meio da metodologia Resolução de Problemas. Tal metodologia:

> Traz a possibilidade de trabalhos matemáticos de forma globalizada, pois as situações problemas desenvolvem o poder de comunicação e valorizam o conhecimento prévio do aluno, uma vez que dão oportunidade de ele mesmo explorar, organizar e expor seus pensamentos, estabelecendo uma relação entre suas noções informais e a linguagem abstrata e simbólica da matemática (DANTE, 2010, p. 18).

Assim, no decorrer da pesquisa ficou perceptível que o ensino e aprendizagem em matemática devem estar centrados no “aprender a aprender e a pensar”, na capacidade de relacionar o conhecimento com as experiências da vida cotidiana, em um espaço pedagógico no qual se busque dar significado ao aprendizado e se faça a ponte entre prática e teoria, no qual se fundamente a crítica e se construa o argumento baseado em fatos.

E para isso, é preciso re-significar os conteúdos de cada disciplina como meios de desenvolvimento de competências, habilidades e valores, é preciso trabalhar a linguagem matemática como essencial na ampliação da leitura do mundo, como formadora de significados, conhecimentos e valores.

Torna-se também necessário o investimento em procedimentos e atividades que permitam ao aluno reconstruir e reinventar o conhecimento matemático que foi construído ao longo do tempo, inserindo-o em vivências como experimentações e execução de projetos.

Além disso, deve-se investir numa prática pedagógica que trate os conteúdos matemáticos de forma mais contextualizada, estimulando a autonomia intelectual e o desenvolvimento do pensamento científico. Recomenda-se o trabalho interdisciplinar, partindo de um problema gerador, que pode ser um experimento ou uma atividade que relacione as disciplinas.

Essa integração pode possibilitar a compreensão, previsão e/ou transformação da realidade, e a Matemática contribui para a formação dos conceitos das ciências naturais, assim como a explicação das leis naturais auxilia no desenvolvimento do pensamento matemático.

Assim, entendemos que este momento foi extremamente relevante, pois como afirma Toledo (1997, p. 84):

> A proposta da resolução de problemas visa à construção de conceitos matemáticos pelo aluno através de situações que estimulem a sua curiosidade matemática. Através de suas experiências com problemas de naturezas diferentes o aluno interpreta o fenômeno matemático e procura explica-lo dentro de sua concepção de matemática envolvida.

Nesse sentido, o conhecimento teórico, não é aquele que é apenas derivado da experiência, mas também o que é utilizado para a resolução de problemas práticos. Além disso, foi possível perceber que a prática pedagógica deve partir da própria prática, da realidade concreta da escola e dos seus educandos, que são a parte determinante que a circundam.

Especificamente, em relação ao trabalho desenvolvido com os alunos do 9º ano para construção do conhecimento de conceitos trigonométricos no triângulo retângulo, podemos dizer que foi satisfatório e relevante, especialmente no que diz respeito à mudança de postura dos estudantes e do professor.

Pensar numa prática que desloque o professor do centro do processo de ensino e aprendizagem, colocando os estudantes numa posição de produtores do seu conhecimento, traz para o espaço escolar a experimentação, a necessidade de pesquisa para se obter informações, bem como a criatividade para manipular tais informações. Nesse sentido, contribui para uma visão mais crítica dos estudantes, pois estariam sempre inseridos num contexto onde as explicações e os porquês das decisões tomadas para solução dos problemas se fariam necessárias.

Além disso, traz também para dentro da sala de aula o entendimento de que o erro é algo natural e até importante, de modo que não se deve entendê-lo negativamente (com caráter punitivo), mas como a oportunidade de reorganizar os conhecimentos que se tem, a fim de transformar e readaptá-los para produzir novos conhecimentos.

Assim, afirmamos ainda que a Resolução de Problemas pode trazer para o ensino da trigonometria questões que estejam no dia a dia dos educandos e assim os levarem a uma aprendizagem com mais significado.

Outro ponto que também merece destaque e que identificamos como extremamente relevante é o trabalho colaborativo que aconteceu dentro de cada grupo. Obviamente, alguns integrantes de alguns grupos não interagiram tão intensamente como outros, mas de modo geral percebemos um trabalho em equipe efetivo, de modo que estavam realmente interessados em resolver os problemas propostos. Isso se revelou tanto na participação e satisfação, como nas dúvidas e questionamentos que aconteceram ao longo das atividades.

Como resultado, começamos a refletir quanto ao modelo de ensino que temos proposto aos nossos estudantes. Na verdade, ao invés de simplesmente apresentarmos uma Matemática pronta e acabada, partimos de um problema que tinha por intenção disparar conceitos centrais da trigonometria em triângulo retângulo, ou seja, o que houve foi um convite a descobertas e, por consequência, uma possibilidade para a construção de conhecimentos.

Entretanto, algumas dificuldades também precisam ser relatadas. Uma delas diz respeito à nova atitude do professor no processo educativo da metodologia resolução de Problemas, a mediação. Se antes me centrava apenas na comunicação dos conteúdos aos estudantes, agora precisava ser o elo entre a linguagem informal (falas, gestos, desenhos etc.) que tinham e usavam para comunicar suas intenções, com a linguagem formal e abstrata da matemática.

Para tal, precisava entender e decodificar as informações apresentadas pelos grupos, para somente então poder intervir no processo de ensino e aprendizagem.

Digo ser uma dificuldade porque precisei mudar minha percepção de como os estudantes lidam e assimilam as informações que apresentamos a eles como demanda intelectual.

Além disso, outra dificuldade que percebemos ao longo deste trabalho está relacionada com a metodologia em si. Embora a resolução de problema enquanto metodologia desloque a responsabilidade do professor para o aluno na construção do conhecimento, em algumas oportunidades tive que mostrar o que fazer, tanto na construção do teodolito, quanto nos problemas apresentados.

Isso se justifica pelo fato dos estudantes não estarem acostumados com uma metodologia que exige deles uma postura ativa, passando para eles a tarefa de conduzir ao invés de serem conduzidos, pois o normal para eles é a passividade frente um conteúdo que é apresentado pelo professor em sala de aula.

Contudo, entendemos que as contribuições da metodologia Resolução de Problemas superam consideravelmente as dificuldades que encontramos no decorrer das atividades, de modo que acreditamos na sua potencialidade como instrumento de ensino e aprendizagem em relação aos conteúdos matemáticos.

Por fim, de modo geral, o ensino de Trigonometria só terá significado se ultrapassar a manipulação algébrica e possibilitar ao aluno o desenvolvimento de habilidades que sejam necessárias na compreensão e utilização desse conteúdo em situações reais.

Por isso, é importante que o ensino de Matemática esteja ligado também a metodologias como a Resolução de Problemas, uma vez que esta pode ser considerada peça central para o ensino dessa ciência e permite uma maior aproximação dos conteúdos matemáticos à realidade dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, Rebewilton da Silva. **Proposta metodológica para o ensino da trigonometria baseada na psicologia pedagógica**. 2016, 101p. dissertação (Mestrado profissional em Matemática) apresentada a Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Natal, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/21759/1/RobewiltonDaSilvaAlves_DISSERT_unprotected.pdf. Acesso em: 06 nov. 2016.

ANGOTTI, Sueli. **Novas Características no perfil do professor**. 2011. Disponível em: <http://blogdaprofesu.blogspot.com>. Acesso em: 01 mai. 2018.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma Nova Estratégia. 3. ed. São Paulo: Contexto. 2009.

BOYER, Carl Benjamim. **História da Matemática**. Trad. de Elza Gomide. São Paulo: Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

______. H**istória da Matemática**. Trad. de Elza Gomide. São Paulo: Blucher, 1996.

______. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: Ministério da Educação, 1997.

______. **Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

______. Ministério da educação, Secretaria da Educação Básica. **PCN + (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais);** v. 2, 2002.

CAMPOS, André Bernardo. I**nvestigando como a educação financeira crítica pode contribuir para tomada de decisões de consumo de jovens-indivíduos-**

consumidores (JIC'S), 2013, 178p. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) apresentada a Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

CANDAU, Vera Maria. **Rumo a uma nova Didática**. 7. ed. Petrópolis: Vozes, 1988.

______. **Formação continuada de professores**: tendências atuais. In: CANDAU, V. M. F. Magistério, construção cotidiana. Petrópolis: Vozes, 1999.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. **Funções seno e consseno**: uma sequência de ensino a partir de contextos do mundo experimental e do computador. 1997, 250p. dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) apresentada à Pontífica Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 1997. Disponível em: < https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11139/1/dissertacao_nielce_lobo_costa.pdf>. Acesso em: 03 mai. 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática (Ensino médio)**, volume único. 1. ed. São Paulo: Ed. Ática, 2005.

______. **Matemática**. São Paulo: Ática. 2008.

______. **Matemática: contexto e aplicações**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, André Luiz dos Santos. **Trigonometria e funções trigonométricas, uma abordagem didático metodológica.** 2016, 101p. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em matemática) apresentado a Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016. Disponível em: <http://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/TRIGONOMETRIA-E-FUN%C3%87%C3%95ES-TRIGONOM%C3%89TRICAS-UMA-ABORDAGEM-DID%C3%81TICO-METODOL%C3%93GICA.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2018.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3. ed. São Paulo: Atlas S.A., 1996.

______. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. - São Paulo: Atlas, 2002.

LIMA, Nadson de Jesus. **A aprendizagem significativa em trigonometria sob o ponto de vista de quem ensina e de quem aprende**. VI Congresso Internacional de Matemática. 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/798/13%3E.%20 Acesso%20em:%2010%20nov.%202015>. Acesso em: 19 fev. 2018.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. São Paulo, Campinas, 2006.

LINS, Romulo Costa. **O modelo dos campos semânticos**: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. et al. (Orgs.) Modelo dos campos semânticos: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012.

LUIZ, Elisete Adriana José; COL, Lidiane de Col. **Alternativas metodológicas para o ensino de matemática visando uma aprendizagem significativa**. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. 2013.
FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

MENDONÇA, Marília. **A Educadora de Infância**. Traço de União entre a Teoria e a Prática. Lisboa: Edições Asa, 1994.

OLIVEIRA, Davi Vieira Ramos de. **A resolução de problemas como método de ensino de trigonometria.** 2014, 54p. Dissertação apresentada (Mestrado Profissional em Matemática) a Rede Nacional do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus-BA, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=363>. Acesso em: Acesso em: 19 fev. 2018.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Trabalhando volume de cilindros através da resolução de problemas. **Educação matemática em Revista**, ano 10. n. 10, v.1, pg. 95 a 103.

PAVANELLO, Regina Maria; NOGUEIRA, Clélia Maria. Avaliação em matemática: algumas considerações. **Revista Estudos em avaliação educacional**, v. 17, n. 33, jan/abr, p. 29-41, 2006. Disponível em: < http://www.fcc.org.br/pesquisa/publicacoes/eae/arquivos/1275/1275.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2018.

PARRA, Cecília. SAIZ, Irmã. **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PIRES, Carlos Eduardo Moraes. **O ensino da trigonometria por meio de aulas práticas.** 2016, 124p. Dissertação (Mestrado em Matemática) apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campo de Goitacazes-RJ, 2016. Disponível em: <http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/31052016Carlos-Eduardo-Moraes-Pires-uenf.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2018.

POZO, Juan Ignácio. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed. 1998.

REIS, Fabiana dos. **Uma visão geral da trigonometria**: história, conceitos e aplicações. 2016, 84p. dissertação (Mestrado em matemática) apresentada a Universidade Federal de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2016. Disponível em: <http://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/1506/1/Fabiana%20Reis.pdf>. Acesso em: 03 mai. 2018.

SAMISTRARO, Franciely. **Funções trigonométricas**: senx, cosx e tgx Estudo de proposições de abordagem no ensino médio. 2004, 91p. Monografia (Licenciatura em Matemática) apresenta a Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2004. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97046/Franciely.pdf>. Acesso em: 03 mai. 2018.

SENA FILHO, Emiraldo Pinheiro; MATOS, Márica Graci de Oliveira. **Como os professores de Matemática do município de Ibirataia abordam a resolução de problemas**. 2008.

SANTALÓ, Luis A. Matemática para não matemáticos. In.: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. (orgs). Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

SILVA, Maria Aparecida da. 2011, 65p. **O ensino da trigonometria no 2º ano do ensino médio na escola Mequíades Vilar no município de Taperoá**. Monografia (Curso de Especialização em Educação Matemática) apresentada a Universidade Federal da Paraíba. Campina Grande, 2011. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/690/1/PDF%20-%20 Maria%20Alcileide%20da%20Silva.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2018.

SIQUEIRA, Thiago Carneiro de Barros. **Trigonometria no triângulo retângulo**: conhecimentos para seu ensino na formação de professores. 2013, 137p. Dissertação (Pós-Graduação em Educação Matemática) apresentada a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande-MS, 2013.

SILVEIRA, F. C. da; MENEGAZZI, M. **A Resolução de Problemas no ensino da Matemática**, 2007. Disponível em: <http://guaiba.ulbra.br/seminario/eventos/2007/artigos/matematica/204.pdf>. Acesso em: 01 mai. 2018.

SMOLE, Kátia Stocco. DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

TOLEDO, Marília. **Didática de matemática**: com dois e dois: a construção da matemática. 3, ed. São Paulo: Blucher, 2010.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Uma história da matemática escolar no Brasil 1730-1930. 2.ed. São Paulo: Annablume: FAPESP, 2007.

VASCONCELLOS, Celso dos Santos. **Construção do conhecimento em sala de aula**. São Paulo: Libertad, 11. ed, 2000.

ZILKHA, Esther. **Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos**: Teodolito. Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: < https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/esther_zilkha.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2018.

APÊNDICE

Foto 1 – Grupos preparando o Teodolito para medição

Foto 2 – Grupo preparando o Teodolito

Foto 3 – Interação e discussão sobre o desenvolvimento da atividade

Foto 4 – Interação e discussão sobre o desenvolvimento da atividade