

Propriedades da Matriz de Adjacência em Grafos Simples

Jaciara Cristina da Rocha S. Rodrigues¹
Alexandre Celestino Leite Almeida²

Resumo:

Este trabalho tem por objetivo apresentar as propriedades estruturais de um grafo simples obtidas por meio de sua matriz de adjacência. Mostrar-se-á que, por meio da matriz de adjacência, é possível determinar várias características estruturais de um grafo, algumas simples, como por exemplo o número de vértices, o número de arestas, o número de triângulos existentes no grafo, e outras mais complexas como, por exemplo, determinar o diâmetro e o raio do grafo, verificar se o grafo é ou não bipartido e determinar se o grafo é conexo ou desconexo. Abordar-se-á também o espectro da matriz de adjacência, estabelecendo as propriedades dos grafos determinadas por meio deles.

Palavras-chave: Matriz de adjacência, grafos simples, propriedades dos grafos.

Abstract:

This work has for objective to present structural properties of a simple graph obtained by means of its adjacency matrix. It will show that, through the adjacency matrix, it is possible to determine several structural characteristics of a graph, some simple, such as number of vertices, number of edges, number of triangles in the graph, and more complex ones such as, for example, determine the diameter and radius of the graph, check whether or not the graph is bipartite, and determine whether the graph is connected or disconnected. It will also approach the spectrum of the adjacency matrix, establishing the properties of the graphs determined through them.

Keywords: Adjacency matrix, simple graph, properties of graphs.

¹Aluno de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Turma 2017
Instituição: Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
E-mail: jaciara-rocha@yahoo.com.br

²Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - Defim, CAP-UFSJ
E-mail: celestino@ufs.edu.br

1 Introdução

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC), nos diz que no Ensino Médio o foco é construir uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade.

A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade [18, p. 471].

No Ensino Médio, o ensino de Matrizes recebe muitas críticas por parte dos alunos por não verem nenhuma aplicabilidade de tal conteúdo, uma vez que contextualizações envolvendo matrizes quase não estão inseridas na maioria dos livros didáticos. Relacionar o ensino de matriz com a Teoria dos Grafos torna-se uma maneira eficiente de dar um real significado para os alunos de sua importância, visto que esta teoria é uma ferramenta que possui inúmeras aplicações no nosso dia-a-dia, como por exemplo: redes de relacionamentos, rede de transportes, circuitos elétricos, podendo ser usada também para representar links entre páginas iniciais e PageRank, etc.

A Teoria dos Grafos foi introduzida no século XVIII pelo matemático suíço Leonhard Euler quando resolveu o problema que hoje é conhecido como “As Sete Pontes de Königsberg”. O problema surgiu na cidade alemã de Königsberg (atual Kaliningrado), cortada pelo rio Pregel, sobre a possibilidade de encontrar um caminho de cruzar cada uma das sete pontes que atravessam o rio, mas sem passar por nenhuma ponte mais de uma vez.

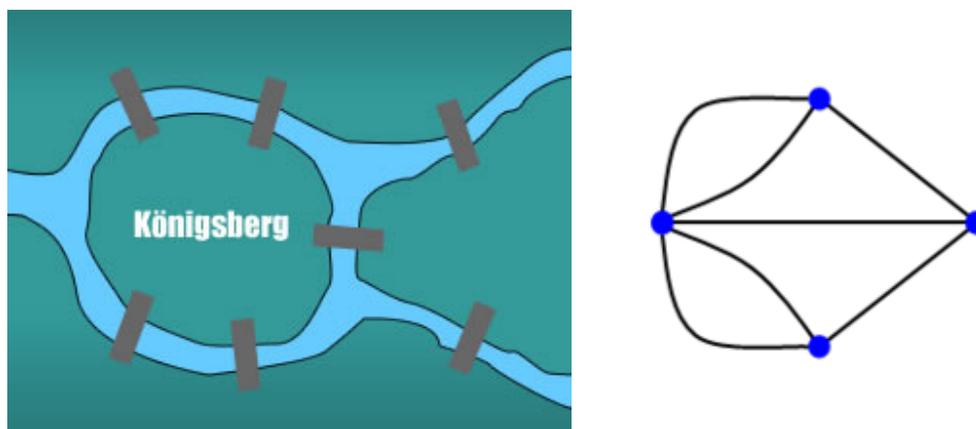


Figura 1: Sete Pontes de Königsberg e o respectivo grafo.

fonte: <http://redeglobo.globo.com>

Euler modelando o problema por meio de um grafo, conforme representado na Figura 1, concluiu que tal problema não possui solução.

Representar um grafo por meio de uma matriz é uma maneira eficiente de extrair propriedades matemáticas sobre sua estrutura. Neste caso, a matriz de adjacência desempenha um

papel muito relevante na Teoria dos Grafos.

Neste trabalho, abordar-se-á alguns conceitos básicos da Teoria dos Grafos e serão exploradas as relações entre a matriz de adjacência e as várias propriedades estruturais de um grafo simples, uma vez que não foram encontradas essas propriedades em uma única referência. Na Seção 2, de forma introdutória, abordar-se-á a Teoria dos grafos. Na Seção 3, em particular, ver-se-á o número de caminhos de um comprimento específico contido nele, determinar-se-á o raio e o diâmetro do grafo, analisar-se-á se o grafo é ou não conexo e verificar-se-á se o grafo é bipartido. Ver-se-á que, por meio da matriz de adjacência, pode-se construir a matriz laplaciana, que irá possibilitar calcular o número de árvores geradoras de um grafo. Trabalhar-se-á a propriedade da matriz de adjacência nos grafos circulantes e a matriz de transição, a fim de calcular a probabilidade de, a partir de um determinado vértice, chegar a outro vértice qualquer do grafo. Por fim, na Seção 4, explorar-se-á as propriedades algébricas do espectro da matriz de adjacência. Esta abordagem é baseada na Teoria Espectral dos Grafos, que é um ramo da matemática o qual se preocupa em caracterizar as propriedades estruturais dos grafos por meio dos autovalores da matriz de adjacência.

2 Conceitos Básicos em Teoria dos Grafos

Nesta Seção, será abordada de forma introdutória a Teoria dos Grafos, usando como referências [1, 2, 3, 4, 5].

Definição 2.1 *Um grafo $G = (V, E)$ é definido pelo par de conjuntos V e E tal que V é um conjunto finito e não vazio, cujos elementos são denominados vértices e E é um conjunto de pares de V denominados arestas. Quando necessário, denotamos $V = V(G)$ e $E = E(G)$.*

Uma aresta $e \in E$ é um par de vértices $\{u, v\}$. É dito que e liga (conecta) os dois vértices u e v de V ou e incide em ambos os vértices u e v , ou ainda, que u e v são as extremidades dessa aresta e . Arestas adjacentes são as que possuem um vértice em comum.

Dois vértices são ditos adjacentes quando existe uma aresta que incide sobre ambos. Quando duas ou mais arestas incidem sobre o mesmo par de vértices são chamadas de **arestas múltiplas**. Uma aresta incidente em um único vértice recebe o nome de **laço**.

Um grafo pode ser representado por meio de diagrama, em que os vértices são um conjunto de objetos e as arestas são um conjunto de linhas que ligam esses objetos. A representação gráfica de um grafo o torna mais simples de ser compreendido.

Na Figura 2 tem-se a representação gráfica de um grafo G , onde os vértices são representados pelo conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e as arestas são representadas pelo conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

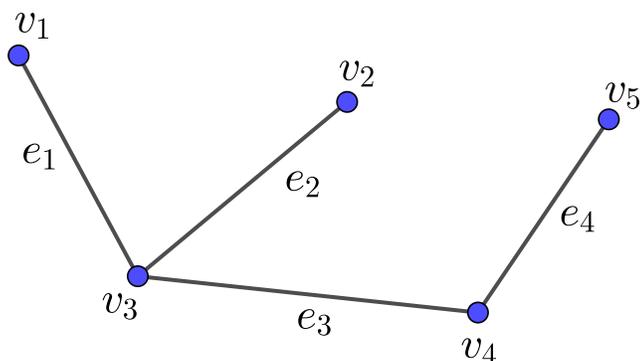


Figura 2: Grafo com 5 vértices e 4 arestas.

Observa-se que:

- os vértices v_1 e v_3 são adjacentes, pois a aresta e_1 está ligando o vértice v_1 ao vértice v_3 ,
- os vértices v_1 e v_2 não são adjacentes, pois não há aresta ligando o vértice v_1 ao vértice v_2 ,
- as arestas e_2 e e_3 são arestas adjacentes pois têm o vértice v_3 em comum.

Um grafo que possui arestas múltiplas recebe o nome de **multigrafo**. Grafos que possuem laços (podem ter ou não arestas múltiplas) recebem o nome de **Pseudografos**.

Na Figura 3 pode-se observar um multigrafo em que os vértices v_1 e v_2 estão conectados por duas arestas e um pseudografo em que os vértices v_3 e v_4 possuem laço.

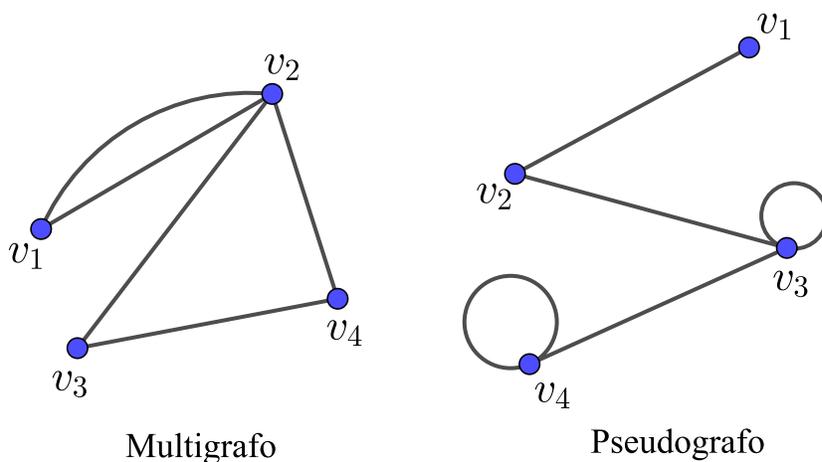


Figura 3: Multigrafo e Pseudografo.

2.1 Grafo Simples

Definição 2.2 Um grafo G é dito **simples** quando não possui laço nem arestas múltiplas.

Portanto, em um grafo simples, cada par de vértices tem no máximo uma aresta entre eles, além disso não possui laços.

Na Figura 4 tem-se ilustrado um grafo simples com 5 vértices e 4 arestas.

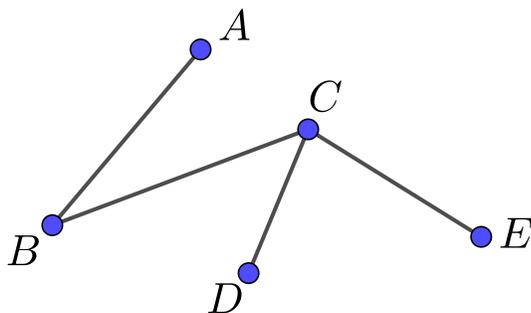


Figura 4: Grafo simples com 5 vértices e 4 arestas.

2.2 Grafo Direcionado

Definição 2.3 Um grafo G é dito **direcionado**, **orientado** ou **digrafo**, quando é necessário estabelecer um sentido (orientação) para as arestas. As arestas, que nesta situação, passam a ser denominadas **arcos**, são **pares ordenados** representadas por uma seta de forma que o primeiro vértice é o ponto de partida e o segundo vértice é o ponto final da seta. Assim $e = (u, v) \neq (v, u)$.

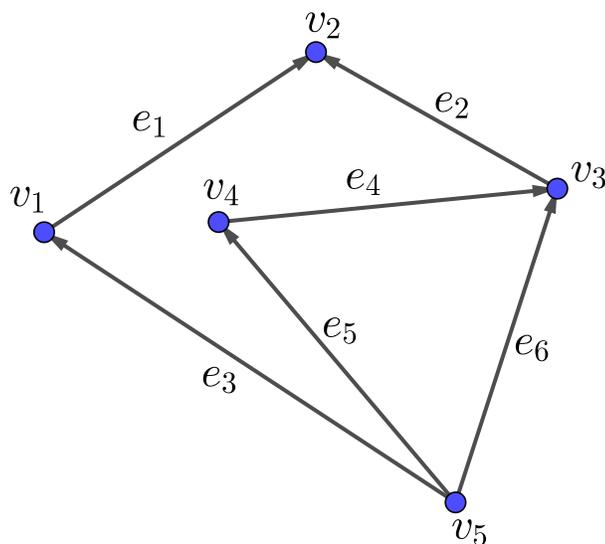


Figura 5: Grafo direcionado com 5 vértices e 6 arcos.

Na Figura 5 é ilustrado um grafo direcionado com 5 vértices e 6 arcos. Os arcos são representados como: $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_3, v_2)$, $e_3 = (v_5, v_1)$, $e_4 = (v_4, v_3)$, $e_5 = (v_5, v_4)$ e $e_6 = (v_5, v_3)$.

2.3 Grafo Rotulado

Um grafo pode conter informações associadas tanto aos seus vértices como às suas arestas. As anotações que permitem distinguir vértices e arestas são chamadas de **rótulos**.

Definição 2.4 *Um grafo G é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando a cada vértice (ou aresta) estiver associado um rótulo.*

Na Figura 6 tem-se ilustrado um grafo rotulado por vértices.

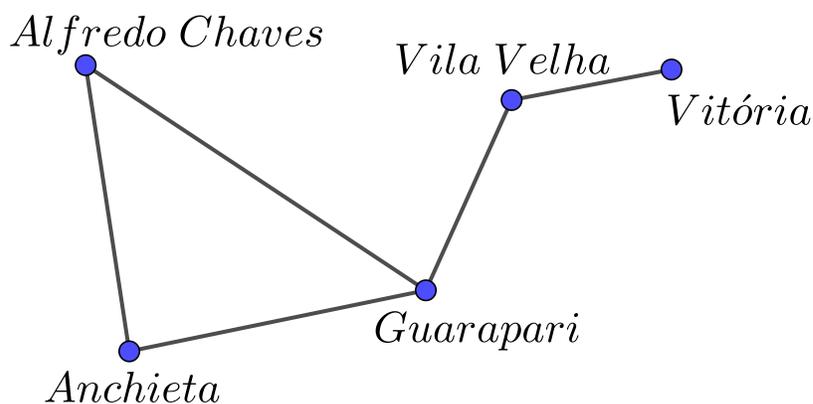


Figura 6: Grafo rotulado por vértices.

Uma grande quantidade de definições está associada à teoria dos grafos. Os seguintes elementos são fundamentais para o entendimento dessa teoria.

2.4 Ordem e Tamanho de um grafo

Definição 2.5 *A **ordem** de um grafo $G(V, E)$, indicada por $|V|$, é o número de vértices do grafo.*

Definição 2.6 *O **tamanho** de um grafo $G(V, E)$, indicada por $|E|$, é o número de arestas do grafo.*

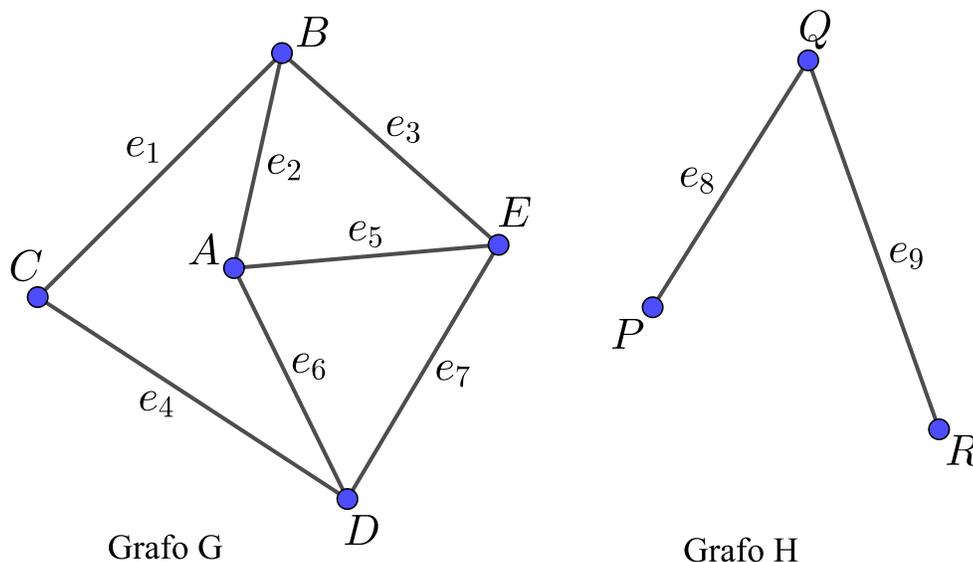


Figura 7: Grafo G de ordem 5 e tamanho 7 e grafo H de ordem 3 e tamanho 2.

Na Figura 7 são ilustrados dois grafos, G e H , em que se pode observar que o grafo G é de ordem 5 e tamanho 7, pois

$$V(G) = \{A, B, C, D, E\} \text{ e } E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}.$$

Já o grafo H é de ordem 3 e tamanho 2, pois

$$V(H) = \{P, Q, R\} \text{ e } E(H) = \{e_8, e_9\}.$$

2.5 Grau do vértice

Definição 2.7 O número de arestas que incidem sobre um vértice v é denominado grau do vértice v , representado por $\deg(v)$. Ao calcular o grau do vértice, o laço deve ser contado duas vezes.

Em um grafo G , o grau mínimo dos vértices de G é denotado por $\delta(G)$ e o grau máximo dos vértices de G é denotado por $\Delta(G)$.

Um vértice de grau 0 é dito **vértice isolado** e o vértice de grau um é dito **vértice pendente**.

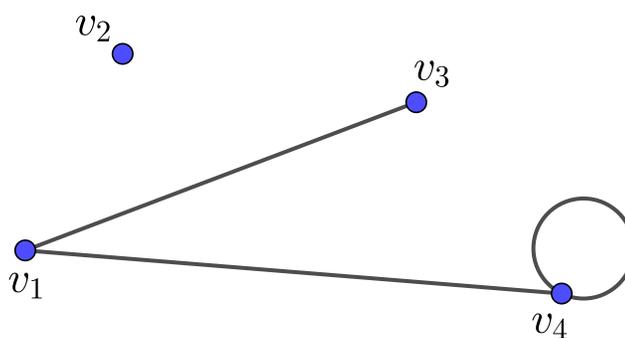


Figura 8: Grau dos vértices: $\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_2) = 0$, $\deg(v_3) = 1$ e $\deg(v_4) = 3$.

Para o grafo da Figura 8, temos: $\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_2) = 0$, $\deg(v_3) = 1$ e $\deg(v_4) = 3$. Portanto, v_2 é um vértice isolado e v_3 é um vértice pendente. O grau mínimo e o grau máximo deste grafo são, respectivamente, $\delta(G) = 0$ e $\Delta(G) = 3$.

Teorema 2.1 *Para todo grafo G , a soma dos graus de seus vértices é sempre o dobro do número de arestas.*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Demonstração: Ao somar os graus dos vértices cada aresta é contada duas vezes. Logo, a soma será o dobro do número de arestas. \square

No grafo da Figura 8, viu-se que o grau dos vértices é:

$$\deg(v_1) = 2, \deg(v_2) = 0, \deg(v_3) = 1 \text{ e } \deg(v_4) = 3.$$

Assim,

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 + 0 + 1 + 3 = 6$$

que é justamente o dobro do número de arestas.

Teorema 2.2 *O número de vértices de grau ímpar de qualquer grafo é par.*

Demonstração: Como a soma dos graus dos vértices é um número par, consequentemente, o número de vértices de grau ímpar deve ser par. \square

Já nos grafos direcionados, o **grau de saída** de um vértice, denotado por $\deg^+(v)$, é o número de arcos que partem do vértice v . O **grau de entrada**, denotado por $\deg^-(v)$, é o número de arcos que chegam ao vértice v . O grau $\deg(v)$ de um vértice v , é definido como $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$.

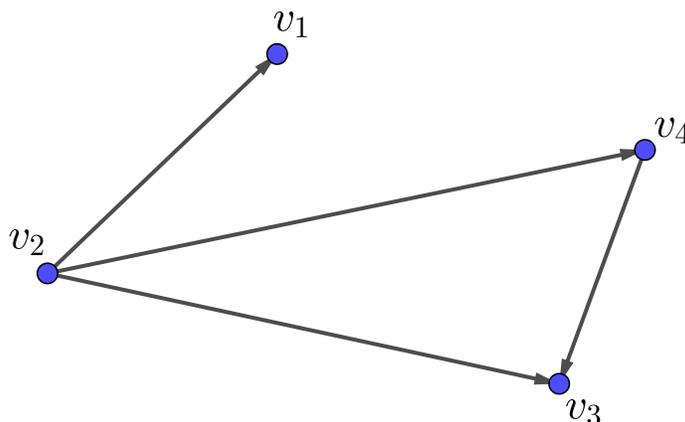


Figura 9: Grafo direcionado.

No grafo direcionado da Figura 9, tem-se:

$$\text{deg}^+(v_1) = 0 \text{ e } \text{deg}^-(v_1) = 1$$

$$\text{deg}^+(v_2) = 3 \text{ e } \text{deg}^-(v_2) = 0$$

$$\text{deg}^+(v_3) = 0 \text{ e } \text{deg}^-(v_3) = 2$$

$$\text{deg}^+(v_4) = 1 \text{ e } \text{deg}^-(v_4) = 1$$

Portanto, $\text{deg}(v_1) = 1$, $\text{deg}(v_2) = 3$, $\text{deg}(v_3) = 2$ e $\text{deg}(v_4) = 2$.

Teorema 2.3 *Seja G um grafo direcionado com m vértices e n arcos. Então,*

$$\sum_{i=1}^m \text{deg}^+(v_i) = \sum_{i=1}^m \text{deg}^-(v_i) = |E|.$$

Demonstração: Quando se somam os graus de saída dos vértices de G , cada arco de G é contado apenas uma vez. O mesmo ocorre quando somados os graus de entrada dos vértices de G . \square

De agora em diante, serão considerados neste trabalho apenas os grafos simples, ou seja, grafos sem laços, sem arestas múltiplas e sem orientação.

2.6 Subgrafo

Intuitivamente, um subgrafo é um grafo que está contido em outro grafo.

Definição 2.8 *Sejam os grafos G e H . Dizemos que H é um **subgrafo** de G desde que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Um subgrafo H de G é um subgrafo próprio de G se $H \neq G$.*

Se H é um subgrafo de G , tem-se que G é um supergrafo de H .

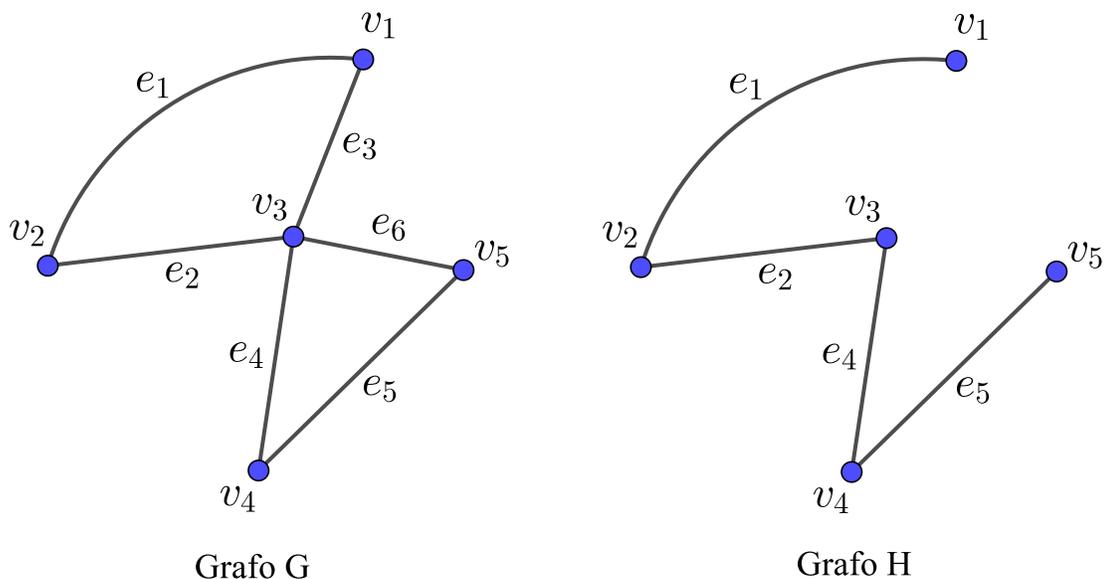


Figura 10: O grafo H é subgrafo de G .

Sejam G e H os grafos da Figura 10:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ e } E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}.$$

$$V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ e } E(H) = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}.$$

Note que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, além disso $H \neq G$. Portanto, o grafo H é um subgrafo próprio do grafo G .

2.7 Grafo Complementar

Definição 2.9 Chamamos de **grafo complementar** do grafo G , o grafo \overline{G} que possui o mesmo conjunto de vértices de G e dois vértices distintos são adjacentes em \overline{G} se, e somente se, não forem adjacentes em G .

Na Figura 11 são ilustrados dois grafos, sendo eles: o grafo G e seu complementar o grafo \overline{G} . Note que as arestas do grafo G não estão presentes no grafo \overline{G} e vice-versa.

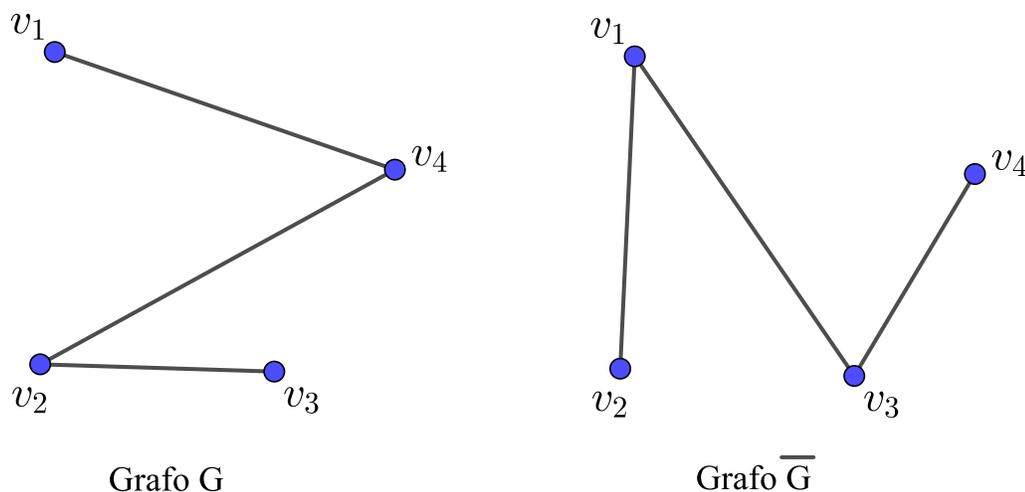


Figura 11: Grafo G e seu grafo complementar \overline{G} .

2.8 Caminhos e Conectividade

A definição de caminho entre vértices está diretamente relacionada ao conceito de conectividade de um grafo.

Definição 2.10 Um **caminho** do vértice v_0 para o vértice v_k é uma sequência finita de vértices e arestas $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$ começando e terminando com vértices tais que para cada i , as extremidades da aresta e_i são v_i e v_{i+1} .

A definição de caminho não estabelece nenhuma restrição, o que possibilita percorrer várias vezes o mesmo trajeto. Assim, as mesmas arestas podem ser percorridas repetidas vezes e, conseqüentemente, os mesmos vértices.

Na Figura 12, o caminho se inicia pelo vértice v_1 , avançando na sequência $e_2, v_3, e_3, v_2, e_4, v_4, e_6, v_5, e_7, v_2$.

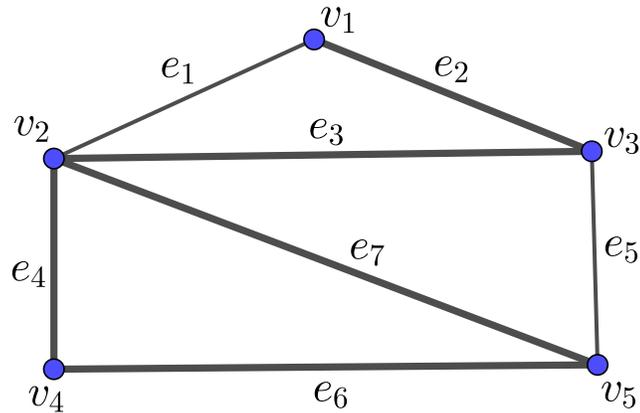


Figura 12: Caminho em um grafo.

Outra forma de representação desse caminho é pela sequência de vértices $v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_2$. Esta notação identifica o caminho apenas pelos vértices por onde ele passa.

Definição 2.11 O **comprimento** de um caminho em um grafo é o número de arestas que ele contém. Se uma aresta for usada mais de uma vez, ela é contada cada vez que é usada. Um caminho de comprimento zero consiste em um único vértice e nenhuma aresta.

Na Figura 12, o caminho tem comprimento 5.

Definição 2.12 Um caminho é chamado de **caminho simples** se todos os seus vértices são distintos.

No grafo da Figura 13, a sequência $v_1, e_1, v_2, e_6, v_5, e_7, v_3, e_3, v_4$ é um caminho simples.

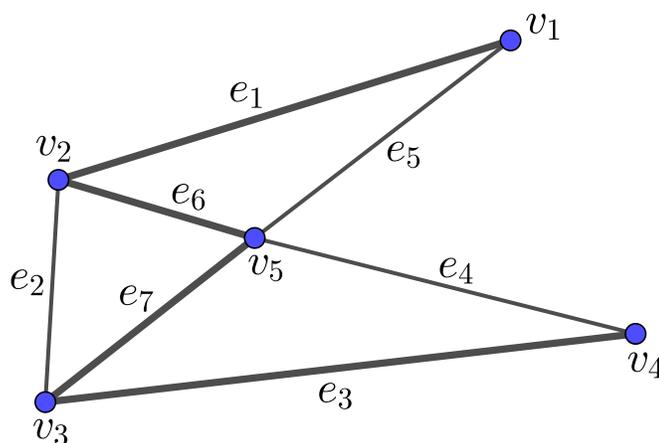


Figura 13: Caminho simples em um grafo.

Definição 2.13 Uma **trilha** é um caminho que não repete nenhuma aresta.

No grafo da Figura 14, a sequência $v_2, e_6, v_5, e_7, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5$ é uma trilha.

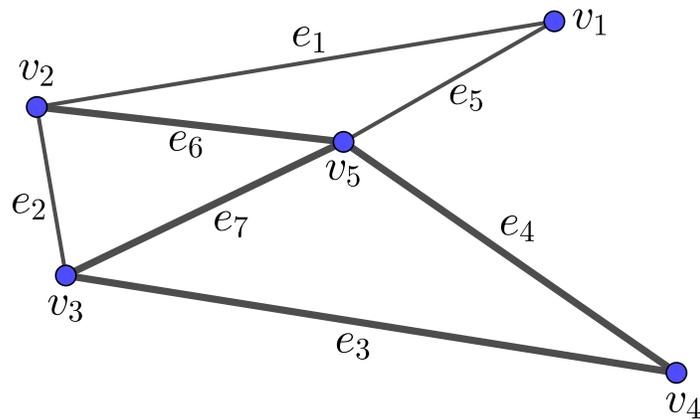


Figura 14: Trilha em um grafo.

Observa-se que um caminho simples é uma trilha, mas o contrário nem sempre ocorre.

Existem caminhos em que um vértice é acessível a si mesmo sem repetir uma única aresta ou vértice.

Definição 2.14 Um **ciclo** em um grafo é um caminho de um vértice qualquer v_i para ele mesmo tal que nenhuma aresta aparece mais de uma vez e v_i aparece apenas nas extremidades.

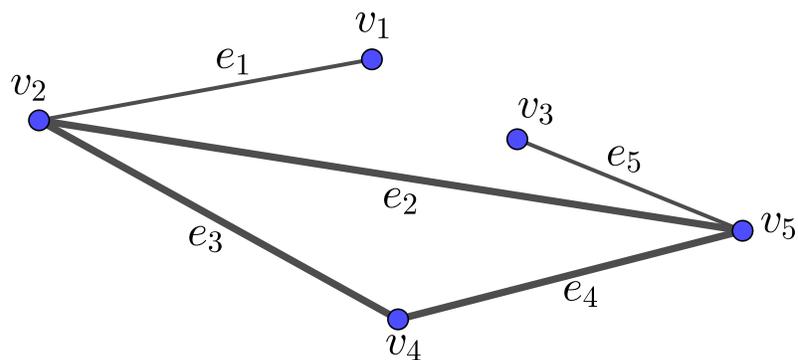


Figura 15: Grafo com ciclo.

No grafo da Figura 15, $v_2, e_3, v_4, e_4, v_5, e_2, v_2$ é um ciclo de comprimento 3.

Um grafo que contém pelo menos um ciclo é dito **grafo cíclico** e um grafo sem nenhum ciclo é dito **grafo acíclico**.

Definição 2.15 Um grafo G é dito **conexo** se existe um caminho para cada par de vértices de G . Caso contrário, o grafo é **desconexo**.

Se G é um grafo desconexo, dizemos que G' é uma **componente conexa** de G quando G' for um subgrafo conexo de G e não existir um subgrafo conexo H de G tal que G' seja um subgrafo de H e $G' \neq H$.

Em um grafo desconexo sempre haverá um par de vértices para o qual não existirá um caminho entre eles.

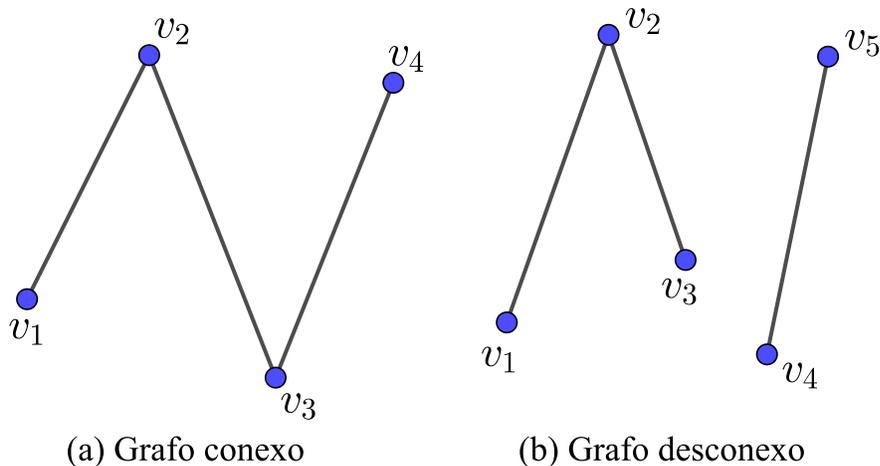


Figura 16: Grafo conexo e grafo desconexo.

Na Figura 16 (a) o grafo é conexo, pois existe um caminho entre quaisquer par de vértices. Entretanto, o grafo da Figura 16 (b) é desconexo, pois não existe um caminho entre os vértices v_3 e v_4 .

Definição 2.16 A **distância** entre um par de vértices v_i e v_j , denotada por $d(v_i, v_j)$ corresponde ao caminho de menor comprimento que liga o vértice v_i ao vértice v_j . No caso de o caminho não existir, então $d(v_i, v_j) = \infty$.

Definição 2.17 A **excentricidade** de um vértice $v \in V(G)$, denotada por $Ex(v)$ é a maior distância entre o vértice v e qualquer outro vértice do grafo.

$$Ex(v) = \max\{d(v, u) | u \in V(G)\}$$

Definição 2.18 O **raio** de um grafo G , denotado por $Rad(G)$, é o menor valor de excentricidade para todo vértice $v \in V(G)$.

$$Rad(G) = \min\{Ex(v) | v \in V(G)\}$$

Definição 2.19 O **diâmetro** de um grafo G , denotado por $Diam(G)$, é o maior valor de excentricidade para todo vértice v de G , ou seja, é igual à maior distância entre quaisquer dois vértices do grafo.

$$Dim(G) = \max\{Ex(v) | v \in V(G)\}$$

No caso de G ser um grafo desconexo, tem-se que $Dim(G) = \infty$.

O vértice para o qual a excentricidade é igual ao raio do grafo é conhecido como **vértice central** do grafo. Em um grafo pode haver mais de um vértice central.

Definição 2.20 O *centro* de um grafo G , $\mathbf{Centro}(G)$, é o conjunto dos vértices com excentricidade mínima, ou seja, é o conjunto formado pelos vértices centrais.

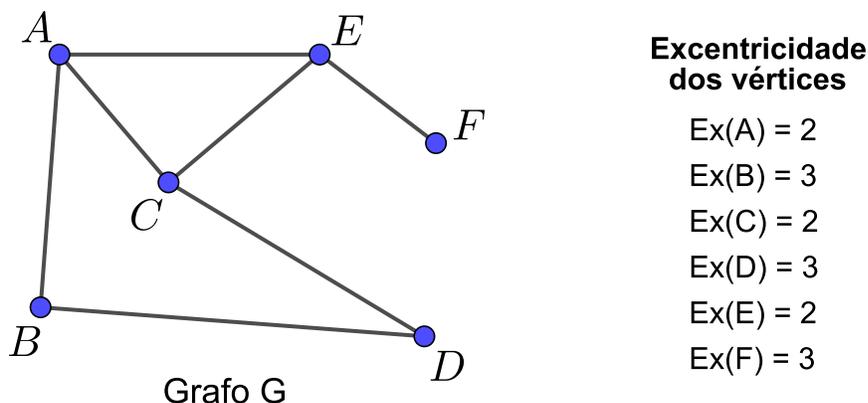


Figura 17: Grafo G e a excentricidade dos seus vértices.

Na Figura 17 é apresentado um grafo G e a excentricidade de cada um dos seus vértices. Para este grafo, tem-se $Rad(G) = 2$, $Diam(G) = 3$ e o centro é o conjunto dos vértices $\{A, C, E\}$.

Volta-se a lembrar que irá considerar neste trabalho apenas os grafos simples, ou seja, grafos sem laços, sem arestas múltiplas e sem orientação.

Um grafo simples pode ser classificado em vários tipos de acordo com as suas propriedades definidoras, conforme se verá a seguir.

2.9 Alguns Tipos Especiais de Grafos Simples

Alguns tipos de grafos simples, devido a sua importância, se destacam na teoria dos grafos. Serão destacados neste trabalho os grafos regulares, grafos completos, grafos ciclos, grafos bipartidos, grafos estrelas, grafos nulos e as árvores.

2.9.1 Grafo Regular

Definição 2.21 Um grafo simples é dito **regular** quando todos os vértices deste grafo tem o mesmo grau. É denotado por k -regular um grafo em que todos os vértices têm grau k .

Na Figura 18 são ilustrados alguns exemplos de grafos regulares.

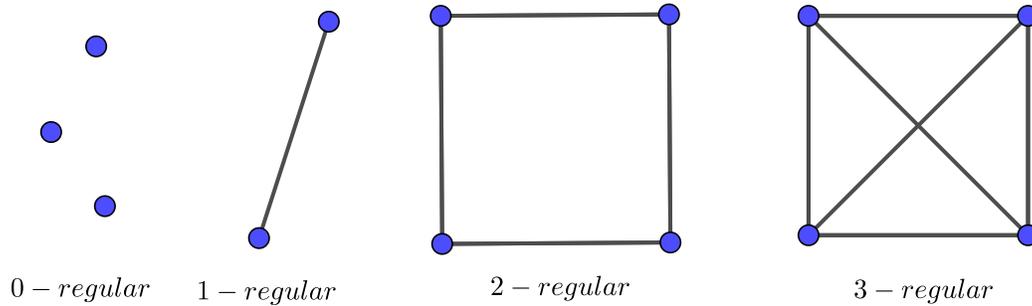


Figura 18: Grafos regulares.

2.9.2 Grafo Completo

Definição 2.22 Um grafo é dito **completo** quando cada vértice é adjacente a todos os outros vértices do grafo. É denotado por K_n um grafo completo de n vértices.

Na Figura 19 encontram-se ilustrados grafos simples completos com 2, 3, 4 e 5 vértices.

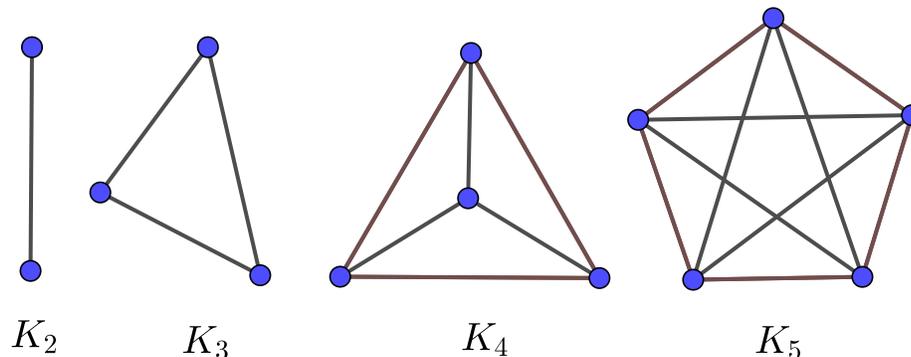


Figura 19: Grafos completos K_2 , K_3 , K_4 e K_5 , respectivamente.

Em um grafo completo K_n todos os vértices possuem o mesmo grau, $\deg(v) = n - 1$. Portanto, K_n é um grafo $(n - 1)$ -regular.

Proposição 2.1 Em um grafo G completo de n vértices, o número de arestas é dado pela expressão $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$.

Demonstração: Se o grafo é completo, cada vértice tem grau igual a $n - 1$. Como G tem n vértices a soma dos graus será dada por $n(n - 1)$. Mas pelo Teorema 2.1 a soma dos graus é igual a $2|E|$. Assim, $2|E| = n(n - 1)$, portanto, $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$. \square

2.9.3 Grafo Ciclo

Definição 2.23 Um **grafo ciclo** é um grafo simples, conexo e regular de grau 2. É denotado por C_n um grafo ciclo de n vértices.

Na Figura 20 são ilustrados os grafos ciclos C_3 , C_4 , C_5 e C_6 .

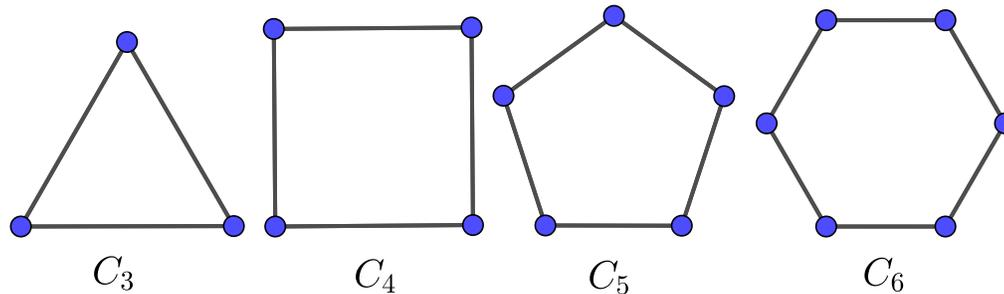


Figura 20: Grafos ciclos C_3 , C_4 , C_5 e C_6 , respectivamente.

2.9.4 Grafo Bipartido

Definição 2.24 Um grafo G é dito **bipartido** quando seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos não vazios V_1 e V_2 sem que existam arestas entre vértices de mesmo conjunto (ou seja, $V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$).

Na Figura 21 tem-se ilustrado um grafo bipartido no qual seu conjunto de vértices pode ser particionado em $V_1 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ e $V_2 = \{v_3, v_6\}$.

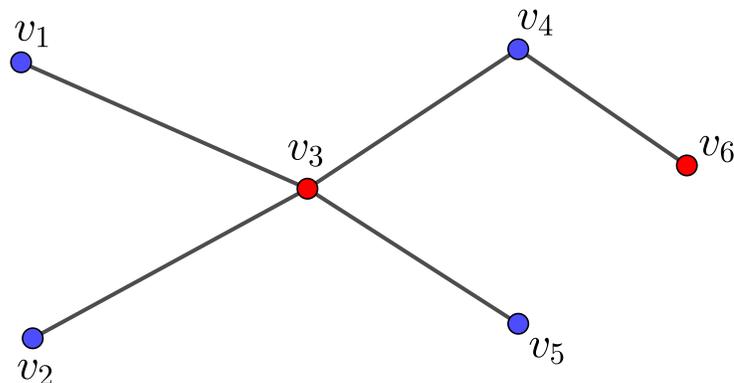


Figura 21: Grafo bipartido.

Observa-se que nos grafos bipartidos os vértices de V_1 , são adjacentes apenas aos vértices de V_2 e vice-versa.

Definição 2.25 Um grafo G é **bipartido completo** quando cada vértice do subconjunto V_1 é adjacente a todos os vértices do subconjunto V_2 . Se $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$, o grafo bipartido completo será denotado por $K_{m,n}$.

Na Figura 22 o grafo é bipartido completo $K_{2,3}$. O conjunto de vértices é particionado em dois conjuntos disjuntos $V_1 = \{v_1, v_2\}$ e $V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$.

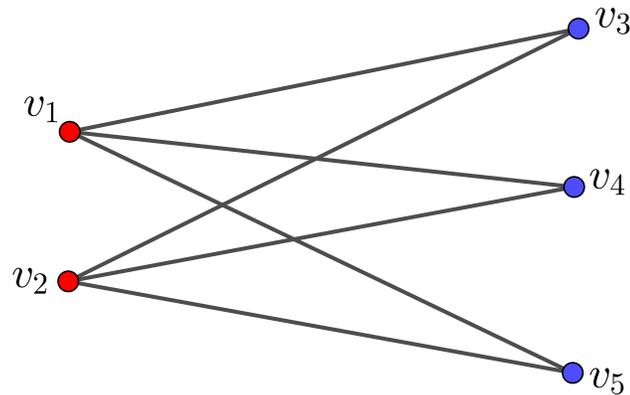


Figura 22: Grafo bipartido completo $K_{2,3}$.

O próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [9, 20], fornece uma interessante caracterização dos grafos bipartidos.

Teorema 2.4 *Um grafo G é bipartido se, e somente se, não contiver ciclos de comprimento ímpar.*

Demonstração:

(\Rightarrow) Seja G um grafo bipartido, com seus vértices particionados nos conjuntos disjuntos V_1 e V_2 . Não havendo ciclo em G não há o que mostrar. Se G possui ciclo, este alterna os vértices de V_1 e V_2 , sendo necessário percorrer um número par de arestas para retornar ao ponto de partida. Caso contrário, dois vértices de V_1 ou de V_2 deveriam estar conectados entre si, o que não é possível. Portanto, o grafo G contém apenas ciclos de comprimento par.

(\Leftarrow) Seja G um grafo conexo e que não contém ciclos de comprimento ímpar. Particionando o seu conjunto de vértices em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2 . Toma-se um vértice v qualquer de $V(G)$. O conjunto V_1 será formado por todos os vértices $w \in V(G)$, tais que, exista um caminho de comprimento par entre v e w e o conjunto V_2 será formado pelos vértices $w \in V(G)$, tais que, exista um caminho de comprimento ímpar entre v e w . Os conjuntos V_1 e V_2 são disjuntos, pois se w estivesse em V_1 e em V_2 ao mesmo tempo, ter-se-ia um caminho de comprimento par e um caminho de comprimento ímpar ligando o vértice v ao vértice w . Esses caminhos podem ou não se cruzar antes de chegar a w , formando alguns ciclos. Como a soma do número de arestas dos dois caminhos é ímpar, pelo menos um desses ciclos será de comprimento ímpar, contrariando assim a hipótese. □

2.9.5 Grafo Estrela

Definição 2.26 *Um grafo estrela de n vértices, denotado por S_n , é um grafo conexo que tem 1 vértice com grau $n - 1$ e os demais $n - 1$ vértices com grau 1. O grafo estrela S_n é também um grafo bipartido completo $K_{1,n-1}$.*

Na Figura 23 são ilustrados dois grafos estrelas: S_4 e S_6 .

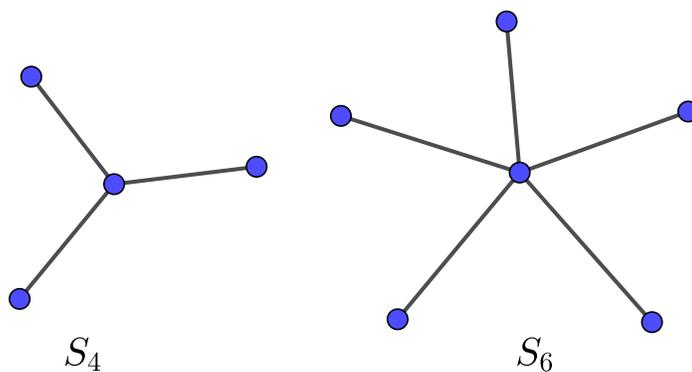


Figura 23: Grafos estrelas S_4 e S_6 , respectivamente.

2.9.6 Grafo Nulo

Definição 2.27 Um grafo é dito **nulo** quando não possui arestas.

Na Figura 24 encontra-se ilustrado um grafo nulo de 3 vértices.

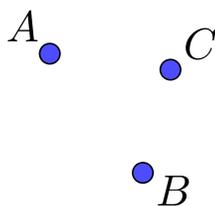


Figura 24: Grafo nulo com 3 vértices.

Um tipo de grafo simples que tem uma grande importância na Teoria dos Grafos são as árvores, sendo muito utilizadas na resolução de problemas [4, 5].

2.9.7 Árvore

Definição 2.28 **Árvore** é um grafo conexo e acíclico. Um conjunto de árvores é denominado floresta.

Em uma árvore, os vértices de grau um são chamados de folhas. Sendo a árvore um grafo simples, conexo e acíclico, existe somente um caminho entre quaisquer dois vértice da árvore.

Na Figura 25 é ilustrada uma árvore com 3 folhas, que são os vértice v_2, v_4 e v_5 .

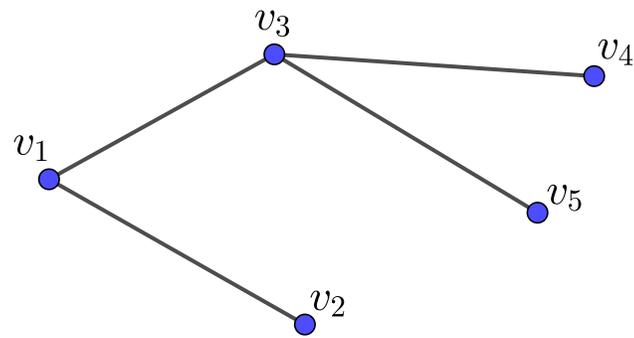


Figura 25: Exemplo de uma árvore com 3 folhas.

As árvores são os grafos conexos com o menor número possível de arestas. A remoção de qualquer aresta torna a árvore um grafo desconexo.

Definição 2.29 Uma **árvore geradora** de um grafo G é um subgrafo T que contém todos os vértices de G e é uma árvore.

Observa-se pela definição que só existe árvore geradora em grafos conexos.

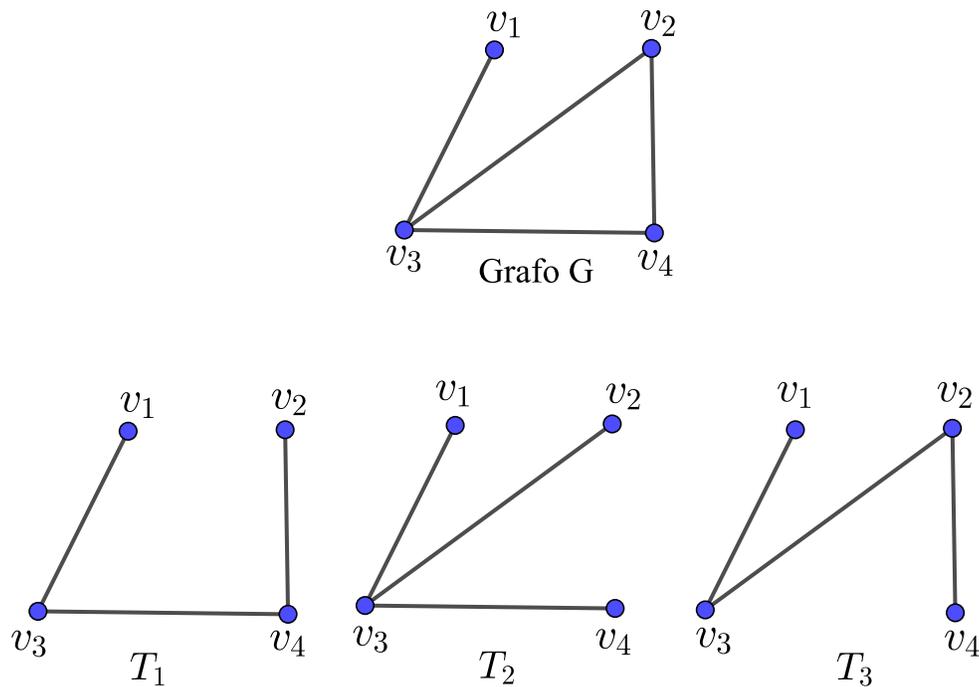


Figura 26: Grafo G e suas árvores geradoras.

Na Figura 26 é ilustrado um grafo G e suas três árvores geradoras.

2.10 Isomorfismo

Dois grafos podem ser graficamente diferentes um do outro, mas serem o mesmo grafo de acordo com sua representação formal.

Definição 2.30 *Dois grafos G e H são considerados isomorfos se existir uma função bijetora f de $V(G)$ em $V(H)$ com a propriedade que: x e y são adjacentes em G se, e somente se, $f(x)$ e $f(y)$ forem adjacentes em H , para todo x e y em G . Tal função f é chamada de isomorfismo.*

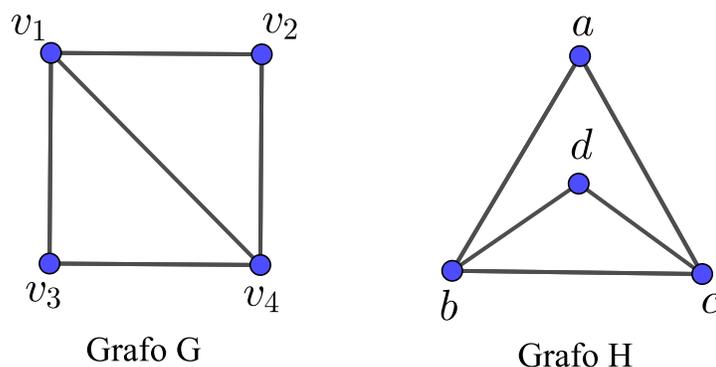


Figura 27: Grafos Isomorfos.

Os dois grafos G e H da Figura 27, embora representados de maneira diferente, são isomorfos. Tal isomorfismo pode ser escrito da seguinte forma:

$$f(v_1) = b, f(v_2) = a, f(v_3) = d \text{ e } f(v_4) = c.$$

Provar que dois grafos são isomorfos, nem sempre é uma tarefa fácil, uma vez que para um par de grafos com n vértices, existem $n!$ funções bijetivas possíveis entre os conjuntos de vértices desses dois grafos. Às vezes, é mais fácil descobrir se dois grafos não são isomorfos analisando algumas propriedades que são características de um grafo e não é do outro. Conforme representados na Figura 28 os dois grafos possuem o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas, mas é possível observar que os grafos G e H não são isomorfos: o grafo G tem um vértice de grau 3, enquanto os vértices do grafo H têm grau máximo igual 2. Outro fator é que o grafo H possui ciclo e é formado por duas componentes conexas, já o grafo G não possui ciclos e é conexo.

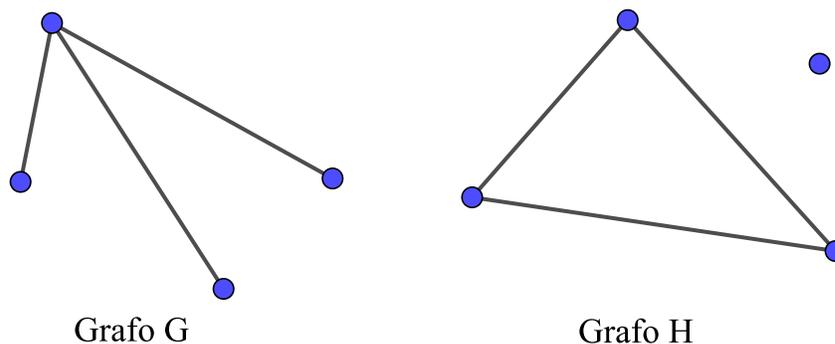


Figura 28: Grafos não Isomorfos.

O isomorfismo entre grafos preserva algumas propriedades que são chamadas de invariantes com relação ao isomorfismo:

- os grafos isomorfos possuem o mesmo número de vértices;
- os grafos isomorfos possuem o mesmo número de arestas;
- os vértices correspondentes nos grafos isomorfos possuem o mesmo grau;
- os grafos isomorfos devem ter o mesmo número de componentes conexas.

Além da representação gráfica, um grafo também pode ser representado por meio de uma matriz. A representação gráfica, por ser visual, é mais fácil de ser compreendida, mas para extrair propriedades matemáticas sobre a estrutura de um grafo, uma das formas mais simples é por meio das matrizes.

3 A Matriz de Adjacência e suas Propriedades

A Matriz de Adjacência descreve a relação de adjacência entre dois vértices do grafo; isto é, se existe ou não uma aresta ligando dois vértices neste grafo.

Vale ressaltar que a matriz de adjacência e suas propriedades serão apresentadas apenas para os grafos simples.

Definição 3.1 *Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices. A matriz de adjacência $A(G)$ é uma matriz quadrada de ordem n cujas entradas são:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ forem adjacentes} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Na Figura 29 é ilustrado um grafo composto por 4 vértices v_1 , v_2 , v_3 e v_4 .

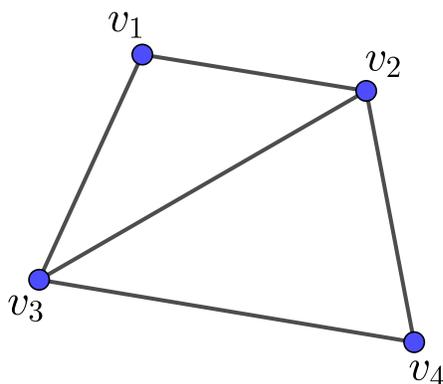


Figura 29: Grafo simples.

Sendo os vértices ordenados na ordem citada. Então, a matriz de adjacência do grafo G é dada por:

$$A(G) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Note que o elemento a_{32} é igual a 1, pois os vértices v_3 e v_2 são adjacentes. Já o elemento a_{14} é igual a 0, pois os vértices v_1 e v_4 não são adjacentes.

Observa-se que a matriz de adjacência $A(G)$ representa todos os caminhos de comprimento 1. Cada entrada indica se há um caminho de comprimento 1 entre os vértices correspondentes ou não.

Existem propriedades dos grafos que têm correspondência com as propriedades de sua matriz de adjacência e vice-versa. Algumas dessas propriedades são imediatas, por exemplo:

Propriedade 1 *A matriz de adjacência $A(G)$ é uma matriz simétrica, isto é $A(G) = A^T(G)$. Ou ainda, pode-se dizer: $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j .*

Esta propriedade, que pode ser encontrada em [20] é válida pois, como estamos trabalhando com grafos simples, sendo v_i e v_j vértices adjacentes, é possível percorrer do vértice v_i para o vértice v_j e do vértice v_j para o vértice v_i sem nenhuma restrição.

Por meio da Propriedade 1 é possível trabalhar matrizes simétricas.

Propriedade 2 *A matriz de adjacência $A(G)$ de um grafo simples possui todas as entradas da diagonal principal igual a zero, ou seja, $a_{ij} = 0$ sempre que $i = j$ para todo i, j .*

Esse fato se dá porque em grafos simples, não existe nenhuma aresta ligando um vértice a si mesmo. Logo, cada elemento da diagonal principal será 0.

Propriedade 3 *A soma dos elementos da linha i é igual ao grau do vértice v_i .*

Uma vez que, cada elemento a_{ij} da linha i é igual a 1 quando o vértice v_j é adjacente ao vértice v_i , e é igual a zero, caso o vértice v_j não seja adjacente ao vértice v_i . Portanto, a soma de todos os elementos da linha i é igual ao número de vértices que são adjacentes ao vértice v_i , ou seja, é o grau do vértice v_i .

Como consequência da Propriedade 3, um grafo G é um grafo k -regular se, e somente se, a soma dos elementos de todas as linhas de $A(G)$ for igual a k .

Propriedade 4 *O número de arestas de um grafo pode ser obtido a partir de sua matriz de adjacência.*

Esse fato se dá pois a soma de todos os elementos de $A(G)$ é igual $\sum_{i=1}^n deg(v_i) = \sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$. Então o número de arestas de G pode ser obtido a partir de sua matriz de adjacência. Obviamente, o número de vértices também pode ser determinado, pois é por definição a dimensão de $A(G)$.

Propriedade 5 *Existem $n!$ matrizes de adjacência diferentes para um grafo com n vértices.*

A construção da matriz de adjacência de um grafo depende da ordem escolhida para rotulação dos vértices. Como para um grafo com n vértices existem $n!$ ordenações diferentes, logo irão existir $n!$ matrizes de adjacência diferentes para esse grafo.

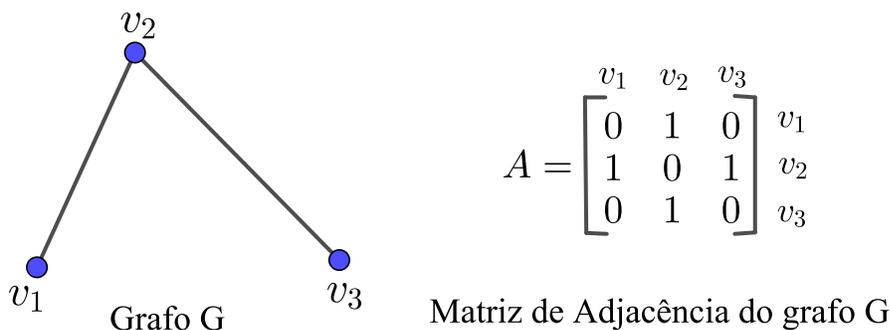


Figura 30: Grafo G e sua Matriz de Adjacência.

Na Figura 30 é ilustrado um grafo G e sua matriz de adjacência. Rotulando os vértices do grafo em uma nova ordem, obtém-se uma nova matriz de adjacência para o grafo G , conforme se vê na Figura 31.

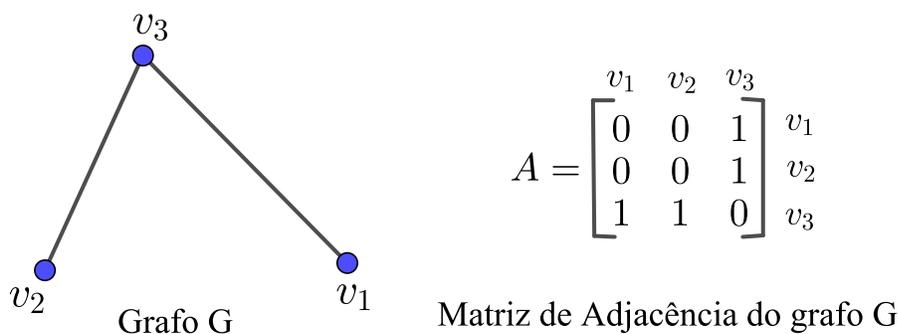


Figura 31: Nova rotulação para o Grafo G e sua Matriz de Adjacência.

Ambas as matrizes representam o mesmo grafo G .

Propriedade 6 *Um grafo é univocamente caracterizado pela sua matriz de adjacência.*

De fato, dada a matriz $A(G)$, é possível reconstruir completamente o grafo G . Observa-se que tal reconstrução resultará em isomorfismo. Conforme visto nas Figuras 30 e 31, a escolha de uma ordem diferente para rotulação dos vértices do grafo resultará em uma permutação de linhas e de colunas da matriz $A(G)$.

Propriedade 7 *Dois grafos, G e H , são isomorfos, se existir uma matriz de permutação P , tal que $A(G) = P^{-1}A(H)P$.*

Sendo $A(G)$ e $A(H)$ as matrizes de adjacência dos respectivos grafos G e H , se puder permutar as linhas e colunas de $A(H)$ e obter $A(G)$, ter-se-ão que os grafos G e H são isomorfos. Portanto, dois grafos G e H são isomorfos se, e somente se, $A(G) = P^{-1}A(H)P$, onde P é uma matriz de permutação.

A seguir será apresentado como contar o número de caminhos de um determinado comprimento entre dois vértices em um grafo.

3.1 Contando caminhos entre vértices

A matriz de adjacência é uma ferramenta eficaz para determinar o número de caminhos entre dois vértices em um grafo.

Exemplo 3.1 *Seja $A(G)$ a matriz de adjacência de um grafo com 4 vértices. Calcular-se-á A^2 e será analisado o que isso significa em um grafo.*

Sendo $A = [a_{ij}]$ e $A^2 = [b_{ij}]$, a entrada a_{ij} é o número de caminhos de comprimento 1 entre os vértices v_i e v_j , ou seja, há somente zero ou um caminho de comprimento 1 entre os vértices v_i e v_j , dependendo se a_{ij} for igual a zero ou um. A entrada b_{ij} de A^2 é dada por:

$$b_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + a_{i3}a_{3j} + a_{i4}a_{4j}.$$

Considerando o termo $a_{i1}a_{1j}$, é o número de caminhos do vértice v_i ao vértice v_1 , multiplicado pelo número de caminhos do vértice v_1 ao vértice v_j , ou seja, é exatamente o número de caminhos de comprimento dois do vértice v_i ao vértice v_j e que passam pelo vértice v_1 . Assim, se $a_{i1} = a_{1j} = 1$, existe um caminho de comprimento dois de v_i para v_j . No entanto, se $a_{i1} = 0$ ou $a_{1j} = 0$, tal caminho de comprimento dois não existe. De maneira análoga, dado qualquer inteiro t com $1 \leq t \leq 4$, $a_{it}a_{tj}$ é o número de caminhos de comprimento dois do vértice v_i ao vértice v_j que passa pelo vértice v_t . A conclusão é que cada entrada b_{ij} de A^2 é o número total de caminhos de comprimento dois do vértice v_i para o vértice v_j . Usando argumentos análogos pode-se generalizar na seguinte propriedade:

Propriedade 8 *Sendo A a matriz de adjacência de um grafo G com n vértices, a entrada (i, j) de A^k representa o número de caminhos distintos de comprimento k do vértice v_i para o vértice v_j .*

Demonstração: A prova é uma indução em k , em que o argumento é o mesmo que o dado no Exemplo 3.1 para A^2 , e pode ser encontrada em [6, 7, 20].

Para $k = 1$, temos $A^1 = A$, e pela definição de matriz de adjacência, o elemento a_{ij} é o número de caminhos de comprimento 1 do vértice v_i para o vértice v_j .

Suponha-se que o elemento b_{ij} de A^k seja o número de caminhos distintos de comprimento k entre os vértices v_i e v_j .

Fazendo $C = A^{k+1} = A^k A$, tem-se:

$$c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj}$$

Pela hipótese de indução, b_{i1} é o número de caminhos de comprimento k do vértice v_i para o vértice v_1 ; já o elemento a_{1j} nos diz se há ou não caminho de comprimento um entre os vértices v_1 e v_j . Assim, $b_{i1}a_{1j}$ é o número de caminhos de comprimento $k + 1$ entre os vértices v_i e v_j e que passa pelo vértice v_1 . Analogamente, $b_{it}a_{tj}$ com $1 \leq t \leq n$ é o número de caminhos de comprimento $k + 1$ entre os vértices v_i e v_j e que passa pelo vértice v_t . Assim, c_{ij} conta o número de caminhos de comprimento $k + 1$ entre os vértices v_i e v_j . \square

Exemplo 3.2 O grafo da Figura 32 representa a malha aérea da empresa ASTA na estado do Mato Grosso, que atende as seguintes cidades: Juína, Tangará da Serra, Cuiabá, Água Boa, Confresa e São Félix do Araguaia.

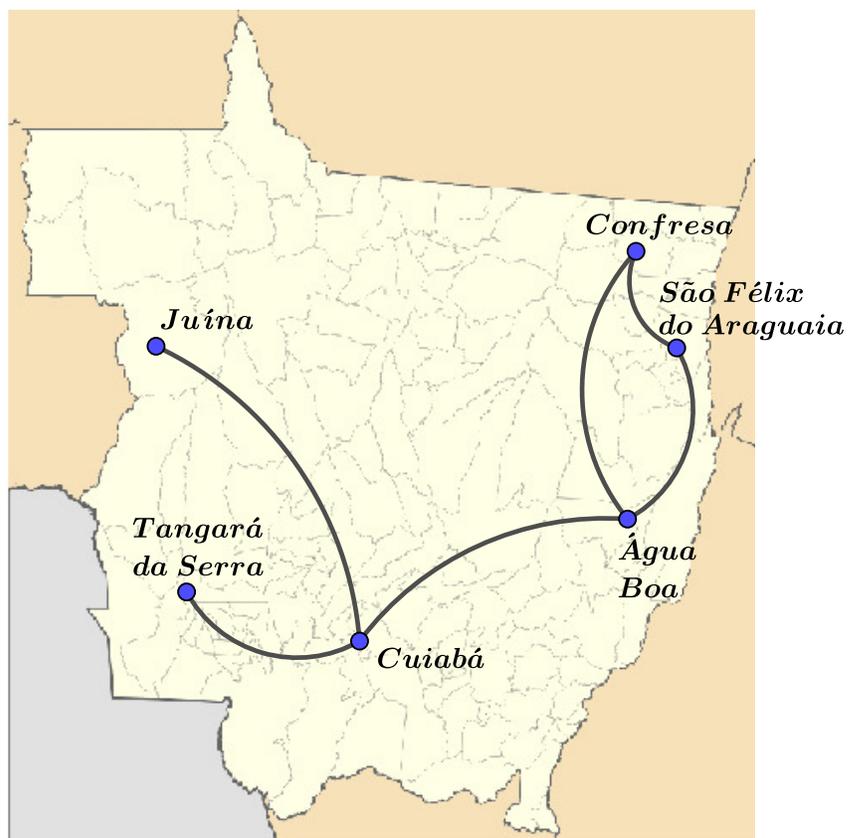


Figura 32: Malha aérea da empresa ASTA no estado do Mato Grosso.
fonte: www.voeasta.com.br

Rotulando os vértices deste grafo como:

Juína - v_1 ,
Tangará da Serra - v_2 ,
Cuiabá - v_3 ,
Água Boa - v_4 ,
Confresa - v_5 e
São Félix do Araguaia - v_6

a matriz de adjacência do grafo da Figura 32 é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para ilustrar o resultado da Propriedade 8, observe as potências 2 e 3 da matriz de adjacência A correspondente ao grafo da Figura 32:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

O elemento $[A^2]_{34}$ indica que não existe nenhum caminho de comprimento 2 ligando Cuiabá à Água Boa. Por outro lado, o elemento $[A^3]_{56}$ indica que existem 3 caminhos de comprimento 3 ligando Confresa e São Félix do Araguaia. São eles:

Confresa - Água Boa - Confresa - São Félix do Araguaia.

Confresa - São Félix do Araguaia - Água Boa - São Félix do Araguaia.

Confresa - São Félix do Araguaia - Confresa - São Félix do Araguaia.

Com a Propriedade 8 é possível trabalhar as multiplicações de matrizes.

Definição 3.2 *O traço de uma matriz quadrada é a soma das entradas ao longo da diagonal principal. Sendo $A = [a_{ij}]$, então $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.*

Propriedade 9 *O traço de A^2 é o dobro do número de arestas do grafo.*

Um caminho fechado de comprimento 2 é simplesmente ir e voltar na mesma aresta. Neste caso, cada aresta é contada duas vezes.

Já o traço de A^3 tem uma relação com o número de triângulos no grafo, conforme descrito na Propriedade 10.

Propriedade 10 *O traço de A^3 é 6 vezes o número de triângulos no grafo.*

Um caminho fechado de comprimento 3 forma um triângulo, e cada triângulo produz 6 caminhos fechados de comprimento 3, que são: a escolha de um entre os três vértices para ser o vértice inicial do caminho e 2 direções para formar cada triângulo.

Outra maneira de determinar o número de vértices, o número de arestas e o número de triângulos de um grafo é por meio do espectro do grafo, conforme será visto na Seção 4.1.

Pelo quadrado da matriz de adjacência pode-se determinar o número de ciclos de comprimento quatro em um grafo, conforme Propriedade 11, que se encontra em [19].

Propriedade 11 *Sendo $A(G)$ a matriz de adjacência do grafo G , e sendo $[b_{ij}] = [A(G)]^2$, então*

$$\frac{1}{4} \sum_{i \neq j} \binom{b_{ij}}{2}$$

é o número de ciclos distintos de comprimento quatro existentes no grafo G .

Demonstração: Um ciclo de comprimento quatro em que os vértices v_i e v_j se encontram em lados opostos, ocorre quando existe um caminho de comprimento dois do vértice v_i para o vértice v_j e um caminho também de comprimento dois, para fazer o retorno do vértice v_j para o vértice v_i , mas que não seja o caminho inverso de v_i para v_j . Assim, um ciclo de comprimento quatro em que os os vértices v_i e v_j se encontram em lados opostos, ocorre quando existirem dois vértices distintos u e v ambos adjacente aos vértices v_i e v_j .

O número de vértices simultaneamente adjacentes aos vértices v_i e v_j , é igual ao número de caminhos distintos de comprimento dois do vértice v_i para o vértice v_j , que é exatamente igual a entrada b_{ij} . Logo, o número de ciclos de comprimento quatro em que os vértices v_i e v_j se encontram em lados opostos é dado por $\binom{b_{ij}}{2}$.

Agora, considere o ciclo de comprimento quatro no grafo G : w, u, x, v, w . No $\sum_{i \neq j} \binom{b_{ij}}{2}$, para cada um das seguintes combinações

$$\binom{b_{wx}}{2}, \binom{b_{uv}}{2}, \binom{b_{xw}}{2} \text{ e } \binom{b_{vu}}{2}$$

o ciclo w, u, x, v, w , é contado uma vez.

Portanto, para contar cada ciclo de comprimento quatro do grafo G uma única vez, divide-se esse somatório por quatro. \square

Exemplo 3.3 *Um grafo G possui a seguinte matriz de adjacência:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por meio da Propriedade 11, determinar-se-ão quantos ciclos de comprimento quatro esse grafo possui.

Resolução:

Calculando o quadrado da matriz de adjacência, de forma que $A^2 = [b_{ij}]$, obtém-se:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, pela Propriedade 11, o número de ciclos de comprimento quatro nesse grafo é dado por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[\binom{b_{12}}{2} + \binom{b_{13}}{2} + \binom{b_{14}}{2} + \binom{b_{15}}{2} + \binom{b_{21}}{2} + \binom{b_{23}}{2} + \binom{b_{24}}{2} + \binom{b_{25}}{2} \right. \\ & + \binom{b_{31}}{2} + \binom{b_{32}}{2} + \binom{b_{34}}{2} + \binom{b_{35}}{2} + \binom{b_{41}}{2} + \binom{b_{42}}{2} + \binom{b_{43}}{2} + \binom{b_{45}}{2} \\ & \left. + \binom{b_{51}}{2} + \binom{b_{52}}{2} + \binom{b_{53}}{2} + \binom{b_{54}}{2} \right] \\ & = \frac{1}{4}(0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0) \\ & = \frac{1}{4}(8) = 2 \end{aligned}$$

Portanto, o grafo G possui dois ciclos de comprimento quatro.

Na Figura 33 é ilustrado o grafo G de cinco vértices do Exemplo 3.3. É possível comprovar graficamente que realmente o grafo G possui dois ciclos de comprimento quatro, que são:

$$v_1, v_2, v_4, v_5, v_1 \quad \text{e} \quad v_1, v_2, v_3, v_4, v_1.$$

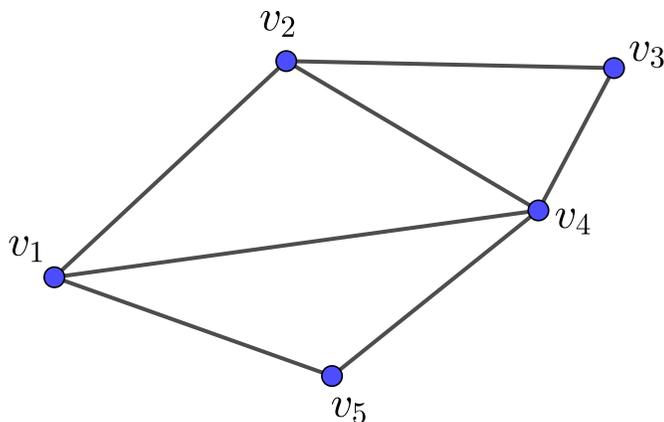


Figura 33: Grafo G de 5 vértices.

A matriz de adjacência além de contar o número de caminhos existentes entre dois vértices de um grafo é uma ferramenta eficiente para verificar a conectividade do grafo.

3.2 Conectividade

Os grafos também são usados para modelar mapas de rotas produzidas por linhas de transportes. Por exemplo, ao usar grafos para modelar a malha aérea brasileira, conforme mostra a Figura 34.

Os pontos azuis representam as cidade do território brasileiro para as quais há voos e as linhas brancas representam uma conexão de voo entre duas cidades. Dentro desta malha aérea brasileira, uma pessoa só conseguirá sair de uma determinada cidade e chegar a outra qualquer se este grafo que representa a malha for um grafo conexo.



Figura 34: Malha aérea brasileira.
fonte: www.senado.gov.br

Embora a Propriedade 8 forneça um método útil de contar o número de caminhos entre vértices de um grafo, essa propriedade pode ser ampliada para uma outra propriedade relevante, a de determinar se um grafo está conectado ou não [8, 9].

Propriedade 12 *Seja A uma matriz de adjacência de um grafo G com n vértices. Então a matriz definida por: $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{n-1}$ é a matriz $n \times n$ cuja entrada b_{ij} indica o número de caminhos de comprimento máximo igual a $n - 1$ entre os vértices v_i e v_j .*

Para que o grafo G seja conexo, a matriz B não pode conter nenhuma entrada nula. Caso algum elemento b_{ij} da matriz B seja nulo, isso mostra que não existe nenhum caminho entre os vértices v_i e v_j , logo, o grafo será desconexo.

Exemplo 3.4 *Verificar-se-á que o grafo G da matriz de adjacência abaixo é conexo.*

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: Pela dimensão da matriz $A(G)$, tem-se que o número de vértice $n = 5$. Calcular-se-á então o valor de $B = A + A^2 + A^3 + A^4$.

Pela multiplicação de matrizes, encontra-se o valor de A^2 , A^3 e A^4 que são:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e \quad A^4 = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 7 & 4 & 4 \\ 7 & 12 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 12 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 7 & 7 & 4 & 4 \\ 7 & 12 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 12 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 13 & 6 & 6 \\ 13 & 17 & 14 & 7 & 6 \\ 13 & 14 & 17 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz B não possui nenhuma entrada igual a zero, tem-se que o grafo G é um grafo conexo.

Por meio da Propriedade 12 é possível trabalhar as operações de multiplicação e adição de matrizes.

Mais uma vez, a matriz de adjacência se apresenta como uma ferramenta útil para identificar e organizar as propriedades de um grafo.

3.3 Distâncias em Grafos

Em muitas situações, deseja-se calcular a distância entre dois vértices em um grafo. Como já visto, a distância entre dois vértices v_i e v_j , denotada por $d(v_i, v_j)$, corresponde ao caminho de menor comprimento que liga o vértice v_i ao v_j . A Propriedade 13 dá uma caracterização para a distância entre dois vértices e sua demonstração pode ser encontrada em [21].

Propriedade 13 *Seja G um grafo conexo; a distância entre dois vértices v_i e v_j de G é igual a k se, e somente se, k for o menor inteiro para o qual $[A^k]_{ij} \neq 0$.*

Demonstração: Seja A a matriz de adjacência de G e sejam v_i e $v_j \in V(G)$ tais que $d(v_i, v_j) = k$. Assim, o comprimento do menor caminho entre v_i e v_j é k . Isso implica que, entre v_i e v_j , não há caminhos de comprimento $1, 2, \dots, k-1$. Então, $[A]_{ij} = [A^2]_{ij} = \dots = [A^{k-1}]_{ij} = 0$. Portanto, k é o menor inteiro tal que $[A^k]_{ij} \neq 0$. Por outro lado, seja k o menor inteiro tal que $[A^k]_{ij} \neq 0$. Logo, não há nenhum caminho de comprimento $1, 2, \dots, k-1$ entre os vértices v_i e v_j . Portanto, o menor caminho entre v_i e v_j é o caminho de comprimento k , de modo que $d(v_i, v_j) = k$. \square

Corolário 3.1 *Seja G um grafo com n vértices e seja A sua matriz de adjacência. Se $d(v_i, v_j) = k$, então $[A^c]_{ij} = 0$ para todo $1 \leq c < k$.*

O menor valor de c de modo que $[A^c]_{ij} \neq 0$, fornece a distância do vértice v_i ao vértice v_j . Como a distância entre os vértices v_i e v_j é igual a k , isso implica que $[A^c]_{ij} = 0$ para todo $1 \leq c < k$.

Relacionada com a matriz de adjacência tem-se a matriz S_k , que permitirá determinar a excentricidade dos vértice de um grafo, como também o raio e o diâmetro desse grafo.

Definição 3.3 *Seja G um grafo com n vértices e seja A sua matriz de adjacência. Dado um número inteiro k , definimos a matriz S_k como:*

$$S_k = I + A + A^2 + \dots + A^k$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$.

As entradas de S_k são números inteiros não negativos, uma vez que as entradas de I e A são sempre uns e zeros. Como consequência, para cada elemento (i, j) tem-se $[S_k]_{i,j} \leq [S_{k+1}]_{i,j}$.

As Propriedades 14, 15 e 16, podem ser encontradas em [20].

Propriedade 14 *Seja G um grafo conexo de n vértices e seja A sua matriz de adjacência, se k é o menor número inteiro positivo tal que a coluna i de S_k não contém entrada nula, então, a excentricidade $Ex(v_i) = k$.*

Demonstração: Suponha que k seja o menor inteiro positivo de tal forma que a coluna i de S_k não contenha entrada nula.

Se $k = 1$, o resultado segue imediatamente.

Se $k > 1$, o fato de não haver zeros na coluna i de S_k implica que a distância de v_i para qualquer outro vértice é no máximo k , conforme Propriedade 13. Por outro lado, se existir pelo menos um zero na coluna i de S_{k-1} indica que existe pelo menos um vértice cuja distância de v_i é maior que $k - 1$. Portanto, a $Ex(v_i) = k$. \square

Propriedade 15 *Seja G um grafo conexo de n vértices e seja A sua matriz de adjacência, se k é o menor número inteiro positivo de modo que todas as entradas de pelo menos uma coluna i de S_k não contém nenhuma entrada nula, então, $Rad(G) = k$.*

Demonstração: Sabe-se que o raio de um grafo é o menor valor de excentricidade para todo vértice do grafo. Pela Propriedade 14, foi observada que a excentricidade de um vértice v_i é o menor valor de k de modo que a coluna i de S_k não tenha nenhuma entrada nula. Portanto, esse menor valor de k de modo que pelo menos uma coluna de S_k não tenha nenhuma entrada nula será o raio do grafo. \square

Propriedade 16 *Seja G um grafo conexo de n vértices e seja A sua matriz de adjacência, se k é o menor número inteiro positivo de modo que todas as entradas de S_k sejam positivas, então, $Diam(G) = k$.*

Demonstração: Sabe-se que o diâmetro é o maior valor de excentricidade para todo vértice do grafo. Pela Propriedade 14, foi visto que a excentricidade de um vértice v_i é o menor valor de k de modo que a coluna i de S_k não tenha nenhuma entrada nula. Portanto, o menor valor de k de modo que S_k não tenha nenhuma entrada nula será o diâmetro do grafo. \square

Exemplo 3.5 *Um grafo G possui a seguinte matriz de adjacência*

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Serão calculados:

- a excentricidade de cada um de seus vértices;
- o raio do grafo;
- o diâmetro do grafo.

Solução:

- Primeiramente relaciona-se as colunas da matriz $A(G)$ com os vértices do grafo, conforme Figura 35.

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figura 35: Relacionando os vértices do grafo à sua matriz de adjacência.

- Calculando $S_1 = I + A$, obtém-se:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como todas as colunas da matriz S_1 possuem pelo menos uma entrada nula, não é possível determinar a excentricidade de nenhum vértice.

- Calculando $S_2 = I + A + A^2$, obtém-se:

$$S_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observe que os vértices v_2 e v_3 têm excentricidade igual a 2, uma vez que as colunas c_2 e c_3 de S_2 não possuem nenhuma entrada nula.

- Agora, calculando $S_3 = I + A + A^2 + A^3$, obtém-se:

$$S_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

As colunas c_1 , c_4 e c_5 que em S_2 possuíam entradas nulas, agora em S_3 não possuem mais. Isso implica que os vértices v_1 , v_4 e v_5 possuem excentricidade igual a 3.

- Portanto,

$$Ex(v_1) = 3, Ex(v_2) = 2, Ex(v_3) = 2, Ex(v_4) = 3 \text{ e } Ex(v_5) = 3.$$

$$Rad(G) = 2 \text{ e } Dim(G) = 3.$$

3.4 Grafos Bipartidos

Outra propriedade interessante da matriz de adjacência é a de determinar se um grafo é ou não bipartido.

Definição 3.4 *Sejam $c_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ e $c_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ duas colunas de uma matriz M com n linhas. As colunas c_i e c_j são ditas **ortogonais** quando:*

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = 0.$$

Propriedade 17 *Seja G um grafo com matriz de adjacência A e seja d o diâmetro do grafo G . Se em A^d existirem duas colunas c_i e c_j ortogonais, então G é necessariamente um grafo bipartido.*

A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada em [6].

Exemplo 3.6 *Seja $A(G)$ a matriz de adjacência do grafo G do Exemplo 3.5. Verificar-se-á que o grafo G é um grafo bipartido.*

Solução:

Como visto, o diâmetro do grafo G é 3.

Assim, determinando a matriz $A^d = A^3$, encontra-se:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que a coluna c_1 é ortogonal com as colunas c_2 , c_4 e c_5 , mas não é ortogonal com a coluna c_3 . O que mostra que o grafo G é um grafo bipartido e seu conjunto de vértices pode ser particionado em $V_1 = \{v_1, v_3\}$ e $V_2 = \{v_2, v_4, v_5\}$.

Também pode-se usar a Propriedade 6, construir o grafo G conforme Figura 36 e comprovar que realmente o grafo G é um grafo bipartido.

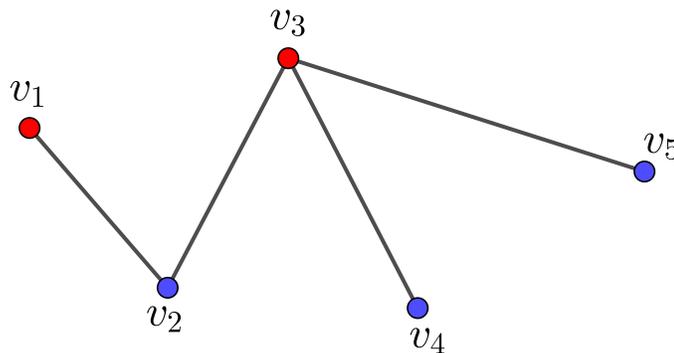


Figura 36: Grafo bipartido.

A matriz de adjacência também tem uma relação com o número de árvores geradoras de um grafo.

3.5 Matriz-Árvore

O Teorema da Matriz-Árvore é um teorema importante da Teoria dos grafos que fornece uma maneira de calcular o número de árvores geradoras de um grafo rotulado e conexo.

O Teorema da Matriz-Árvore foi descoberto em 1847 pelo físico alemão Gustav Kirchoff, quando estudava circuitos elétricos, e demonstra uma conexão entre matrizes e número de árvores geradoras. Para formular o seu resultado é necessário definir outro tipo de matriz associada a um grafo: a matriz laplaciana.

Definição 3.5 *Seja G um grafo com n vértices, a **matriz laplaciana** do grafo G denominada por $L(G)$, é uma matriz quadrada de ordem n cujas entradas são:*

$$l_{ij} = \begin{cases} \deg(v_j), & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ forem adjacentes} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

De maneira equivalente, escreve-se $L = D - A$, onde D é uma matriz diagonal com $d_{ii} = \deg(v_i)$ e A é matriz de adjacência do grafo G .

Na Figura 37 é ilustrado um grafo composto por 4 vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 .

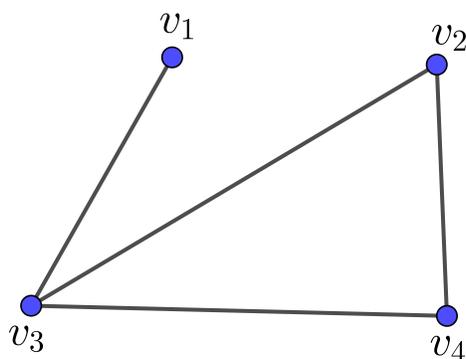


Figura 37: Grafo G com 4 vértices.

A matriz laplaciana do grafo G é dada por:

$$L = D - A.$$

Assim,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O Teorema da Matriz-Árvore afirma que em um grafo G com n vértices, o determinante de uma submatriz de L de ordem $(n - 1)$, expressa o número de árvores geradoras $\tau(G)$ do grafo G . A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [8, 10, 11, 12].

Teorema 3.1 Teorema da Matriz-Árvore. *Seja G um grafo e $L(G)$ a sua matriz laplaciana. O número de árvores geradoras $\tau(G)$ do grafo G é igual ao determinante de uma submatriz $L(G)_u$ que se obtém retirando-se de $L(G)$ a linha e a coluna correspondente a um vértice arbitrário u .*

Na Figura 38 é ilustrado um grafo G e sua matriz laplaciana $L(G)$.

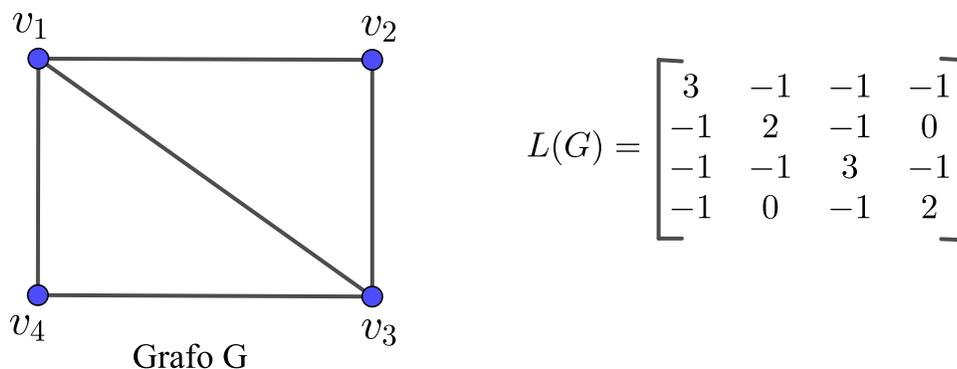


Figura 38: Grafo G e sua matriz laplaciana.

A submatriz $L(G)_{v_1}$ é dada por:

$$L(G)_{v_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O determinante de $L(G)_{v_1}$ é igual a 8. Isso mostra que o grafo da Figura 38 possui 8 árvores geradoras que são apresentadas na Figura 39.

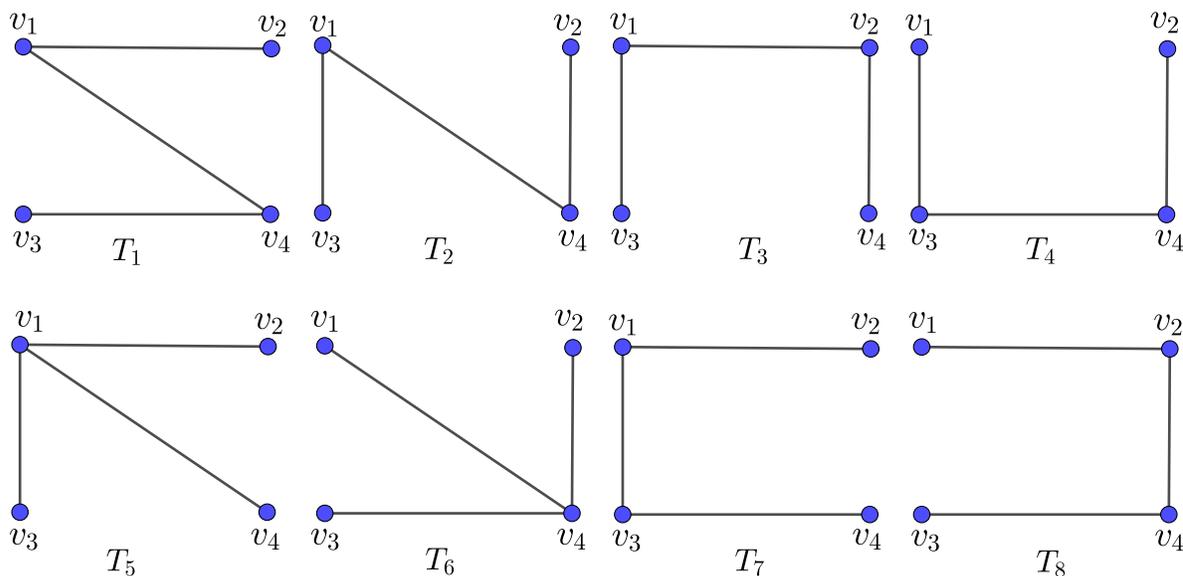


Figura 39: Árvores Geradoras do Grafo G .

Um fato interessante do Teorema da Matriz-Árvore é que o número de árvores geradoras não depende de qual vértice será escolhido para construir a submatriz $L(G)u$. Portanto, uma maneira inteligente é escolher o vértice u de tal forma que a submatriz $L(G)u$ tenha o maior número possível de entradas nulas; assim é mais prático calcular o seu determinante.

3.6 O Teorema da Matriz-Árvore aplicado a um grafo completo

Em 1889, Arthur Cayley demonstrou uma fórmula para determinar o número de árvores geradoras de um grafo completo. Para chegar a este resultado, aplicar-se-á o Teorema da Matriz-Árvore ao grafo completo K_n .

A matriz laplaciana de K_n é uma matriz quadrada de ordem n dada por:

$$L(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}.$$

A submatriz $L(K_n)v_1$ é uma matriz quadrada de ordem $(n-1)$ dada por:

$$L(K_n)v_1 = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}.$$

Sabe-se que em uma matriz se adicionar um múltiplo da linha l_i a uma outra linha l_j , o valor de determinante não é alterado. Somando-se as linhas $2, 3, \dots, (n-1)$ de $L(K_n)v_1$ à primeira linha obtém-se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}.$$

Agora, somando-se à primeira linha a todas as demais linhas, chega-se a uma matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}.$$

Assim, tem-se:

$$\det[L(K_n)v_1] = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix} = n^{n-2}.$$

Portanto, para todo grafo regular K_n o número de árvores geradoras é dado por: $\tau(K_n) = n^{n-2}$.

Por exemplo, um grafo completo K_4 possui $4^{4-2} = 16$ árvores geradoras, e um grafo completo K_5 possui $5^{5-2} = 125$ árvores geradoras.

3.7 Matriz Circulante

Iniciar-se-á esta seção com as definições de matriz circulante e grafos circulantes; e depois serão estabelecidas conexões entre as duas definições [13, 14, 15].

Definição 3.6 *Uma matriz circulante C é uma matriz quadrada que pode ser escrita da seguinte forma:*

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{bmatrix}.$$

A matriz circulante é completamente determinada pela sua primeira linha. As linhas restantes são formadas por um deslocamento cíclico da linha anterior por uma coluna. Uma matriz circulante de tamanho n , cuja primeira linha é $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ também é denotada por $\text{circ}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$.

Definição 3.7 Um grafo G é dito *circulante* quando seu conjunto de vértices puder ser rotulados de forma que sua matriz de adjacência $A(G)$ seja uma matriz circulante. Grafos circulantes são sempre regulares. Denotamos por $C_{n,k}$ um grafo circulante k -regular com n vértices.

Como exemplos de grafos simples circulantes tem-se:

- o grafo ciclo C_n , que possui matriz de adjacência $\text{circ}(0, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-3}, 1)$;
- o grafo completo K_n , cuja matriz de adjacência é $\text{circ}(0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-1})$ e
- o grafo bipartido completo $K_{n,n}$, que possui matriz de adjacência $\text{circ}(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$

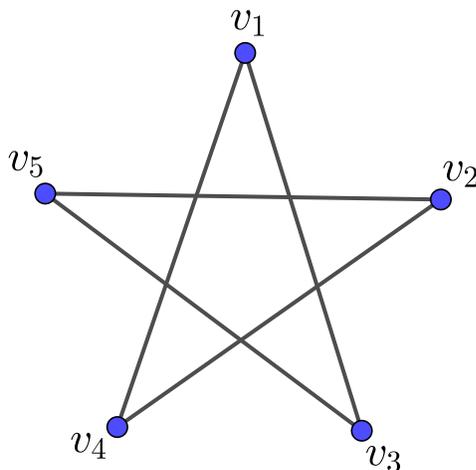


Figura 40: Grafo circulante $C_{5,2}$.

Na Figura 40 é ilustrado um exemplo de grafo circulante: o grafo 2-regular com 5 vértices, também denotado por $C_{5,2}$. Sua matriz de adjacência é:

$$A(C_{5,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz de adjacência $A(C_{5,2})$ é uma matriz circulante, e pode ser representada por $\text{circ}(0, 0, 1, 1, 0)$.

Em um grafo circulante $C_{n,k}$, há uma relação entre os valores de n e os valores de k .

- Se k é par, então o número de vértices n é par ou ímpar.
- Se k for ímpar, o número de vértices n tem que ser par.

Existem propriedades interessantes sobre a matriz de adjacência de um grafo circulantes.

Propriedade 18 *Seja G um grafo circulante, o seu complementar, o grafo \overline{G} , também é um grafo circulante.*

Esta propriedade é válida pelo fato de que a soma de duas matrizes circulantes, ser também uma matriz circulante. Se sobrepor um grafo G circulante com n vértices com o seu complementar \overline{G} , ter-se-á o grafo completo K_n , que como já visto, é um grafo circulante.

A matriz de adjacência do grafo complementar do grafo C_n é a matriz $\text{circ}(0, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-3}, 0)$ e a matriz de adjacência do grafo complementar do grafo K_n é a matriz $\text{circ}(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n)$.

Já a matriz de adjacência do grafo complementar do grafo $C_{5,2}$ da Figura 40 é a matriz $\text{circ}(0, 1, 0, 0, 1)$.

Propriedade 19 *Seja G um grafo circulante e seja A a sua matriz de adjacência. A matriz A^k , em que cada entrada (i, j) representa o número de caminhos distintos de comprimento k do vértice v_i para o vértice v_j , também é uma matriz circulante.*

Esse fato se dá, pois o produto de duas matrizes circulantes é também uma matriz circulante.

Exemplo 3.7 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a matriz de adjacência do grafo circulante $C_{4,2}$. Determinando o quadrado e o cubo dessa matriz de adjacência A , obtém-se:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observa-se, que ambas são matrizes circulantes. Assim, pela Propriedade 19, para determinar a matriz A^k , é suficiente fazer os cálculos para encontrar apenas a sua primeira linha.

A seguir, será exposto como a matriz de adjacência ajuda a determinar a probabilidade de chegar a um determinado vértice de um grafo.

3.8 Caminho Aleatório

Caminho aleatório tem aplicações em várias áreas do conhecimento como, por exemplo, em economia para modelar variações no mercado de ações; em química, para determinar o caminho traçado por uma molécula conforme ela viaja em um líquido ou em um gás, etc. [16, 17].

Um caminho aleatório em um grafo G , também conhecido como *random walk*, é um caminho que é construído de acordo com os seguintes passos:

1. tome arbitrariamente um vértice v_0 como ponto de partida;
2. a mudança do vértice v_0 para o vértice adjacente v_1 é escolhida de forma aleatória, ou seja, nenhum vértice adjacente a v_0 é mais provável do que o outro;
3. em seguida, selecione aleatoriamente um vértice v_2 adjacente a v_1 e mova-o para ele;
4. continue desta maneira até chegar ao vértice final v_k .

A sequência dos vértices $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$, selecionado desta maneira, é um caminho aleatório em G .

Dessa forma, não se pode afirmar qual será o próximo vértice do caminho, mas é possível calcular a probabilidade de isso vir a ocorrer.

Definição 3.8 *Seja G um grafo conexo. A probabilidade de transição de a partir de um vértice v_i chegar a um vértice v_j , através de um caminho aleatório sobre G , é dada por:*

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/\text{deg}(v_i), & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ forem adjacentes} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A matriz de probabilidade de transição de um caminho aleatório também pode ser obtida por meio da matriz de adjacência, conforme apresentada na Propriedade 20 que tem como referência [16, 17, 22].

Propriedade 20 *Seja D a matriz diagonal com $d_{ii} = \text{deg}(v_i)$ e A a matriz de adjacência do grafo G . Então, a matriz de probabilidade de transição de um caminho aleatório em G é dada por:*

$$P = D^{-1}A$$

Como os caminhos são sempre construídos de forma aleatória, a entrada (i, j) de P^k representa a probabilidade de um caminho aleatório de comprimento k que começa no vértice v_i e termina no vértice v_j .

Exemplo 3.8 *Seja*

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a matriz de adjacência de um grafo G . Determinar-se-á a probabilidade de um caminho aleatório de comprimento 4 que começa no vértice v_1 e termina no vértice v_4 .

A matriz de probabilidade de um caminho aleatório desse grafo é dada por:

$$P = D^{-1}A$$

Assim,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, ao calcular P^4 , que representa os caminhos aleatórios de comprimento 4 ao longo desse grafo, tem-se:

$$P^4 = \begin{bmatrix} 2/9 & 1/6 & 11/36 & 11/36 \\ 1/18 & 19/36 & 5/24 & 5/24 \\ 11/72 & 5/16 & 43/144 & 17/72 \\ 11/72 & 5/16 & 17/72 & 43/144 \end{bmatrix}.$$

Então, a probabilidade de um caminho aleatório de comprimento 4, que começa no vértice v_1 e termina no vértice v_4 , é dada pela entrada $[P^4]_{14}$, que é igual a $11/36$.

4 Teoria Espectral de Grafos

O estudo dos autovalores da matriz de adjacência de um grafo é chamado de Teoria Espectral de Grafos, que teve origem em 1931 com o trabalho de Hückel em química quântica, cujo desenvolvimento se deu após a tese de doutorado de Cvetković, em 1931. Essa teoria busca analisar a relação entre os autovalores da matriz de adjacência e as propriedades estruturais dos grafos.

Ver-se-ão a seguir alguns exemplos simples dessa correspondência entre as propriedades de um grafo e os autovalores da matriz de adjacência.

4.1 O polinômio característico e o espectro de um grafo

O polinômio característico é extremamente importante para a teoria espectral dos grafos. Os autovalores da matriz de adjacência estão no centro da compreensão das propriedades e estrutura de um grafo.

Definição 4.1 Sendo $A(G)$ a matriz de adjacência de um grafo G . O **polinômio característico** do grafo G , é definido como

$$P_G(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

onde λ é dito ser um **autovalor** de G , se for uma raiz de $P_G(\lambda)$.

O maior dos autovalores é o **raio espectral** de G , denominado índice de G e indicado por $\text{ind}(G)$.

A matriz de adjacência $A(G)$ de um grafo de n vértices possui n autovalores e a **multiplicidade algébrica** de um autovalor λ_i , denotada por $m(\lambda_i)$, com $1 \leq i \leq n$, é número de vezes que um autovalor λ_i aparece como raiz do polinômio característico P_G .

Definição 4.2 O espectro de um grafo G , denotado por $\text{Spect}(G)$, é uma matriz $2 \times n$, onde a primeira linha é composta pelos autovalores distintos de $A(G)$ dispostos em ordem decrescente e na segunda linha, pelas respectivas multiplicidades algébricas.

$$\text{Spect}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Considere o grafo completo K_4 da Figura 41.

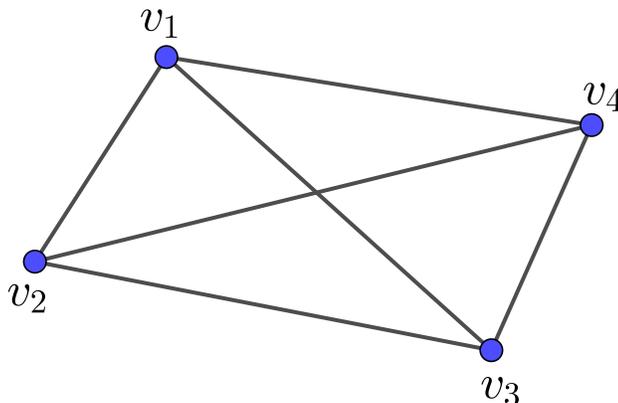


Figura 41: Grafo completo K_4 .

A matriz de adjacência do grafo K_4 é

$$A(K_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O seu polinômio característico é $P_{K_4}(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^3$ com autovalores $\{3, -1, -1, -1\}$. Assim, o $\text{ind}(G) = 3$ e o espectro deste grafo é dado por:

$$\text{Spect}(K_4) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

O espectro da matriz de adjacência $A(G)$ não depende da rotulação escolhida para os vértices do grafo, pois como já visto uma nova rotulação para os vértices resulta apenas em uma permutação de linhas e colunas da matriz de adjacência, não alterando, portanto, o valor do polinômio característico.

Sendo G um grafo com n vértices e m arestas, a forma geral do seu polinômio característico é

$$P_G = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^n + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Os coeficientes do polinômio característico da matriz de adjacência do grafo G têm uma relação com a estrutura do grafo. Por meio deles, é possível determinar o número de arestas e o número de triângulos existentes no grafo.

Sendo P_G o polinômio característico do grafo G , então os coeficientes de P_G satisfazem as seguintes propriedades, cujas demonstrações podem ser encontradas em [7, 8, 9].

- $a_1 = 0$;
- $-a_2$ é o número de arestas de G ;
- $-a_3$ é o dobro do número de triângulos em G .

Isso pode ser visto no polinômio característico da Figura 41 acima.

- 1) $a_1 = 0$, como se observa, não existe λ^3 .
- 2) $-a_2 = 6$, logo 6 é o número de arestas do grafo G .
- 3) $-a_3 = 8$, logo número de triângulos de k_4 é 4.

Outra maneira de determinar o número de vértices, o número de arestas e o número de triângulos de um grafo é por meio do espectro do grafo, conforme [22].

Proposição 4.1 *Seja G um grafo de n vértices e m arestas, e seja $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os n autovalores da matriz de adjacência A do grafo G , temos:*

1. $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$;
2. $tr(A^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m$;
3. $tr(A^3) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^3 = 6t$, onde t é o número de triângulos em G ;

Demonstração:

1. A soma dos autovalores de uma matriz é igual ao traço dessa matriz. E o $tr(A) = 0$, uma vez que cada elemento da diagonal principal de A é zero.
2. Os autovalores de A^k são os autovalores de A elevados à potência k . Assim, a soma dos quadrados dos autovalores é igual ao traço de A^2 . Como um caminho fechado de comprimento 2 é simplesmente ir e voltar na mesma aresta. Neste caso, cada aresta é contada duas vezes.
3. A soma do cubo dos autovalores é igual ao traço de A^3 . Como já visto, qualquer caminho fechado de comprimento 3 forma um triângulo, e cada triângulo produz 6 caminhos fechados de comprimento 3.

□

Como observado o espectro do grafo tem uma relação direta com a sua estrutura. No entanto existem grafos com o mesmo espectro e com estruturas diferentes.

Definição 4.3 *Dois grafos G_1 e G_2 são grafos coespectrais quando o $Spect(G_1) = Spect(G_2)$, isto é, quando eles têm os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades.*

Dois grafos isomorfos têm o mesmo espectro, mas a recíproca dessa afirmação nem sempre é verdadeira, o que significa que há casos em que dois grafos não são isomorfos, mas possuem o mesmo espectro.

Os grafos G_1 e G_2 da Figura 42 são grafos coespectrais mas não são isomorfos.

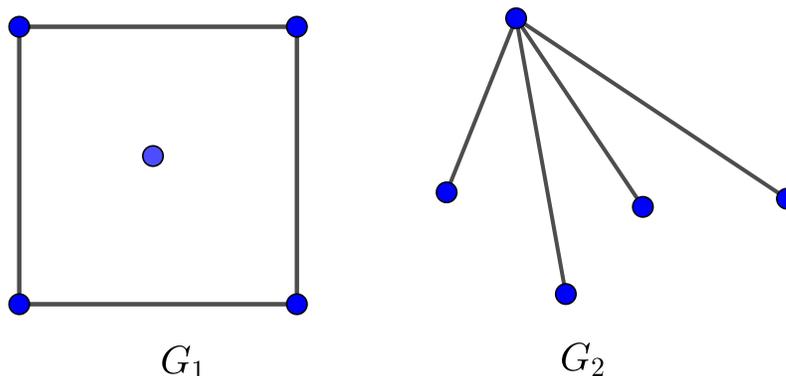


Figura 42: G_1 e G_2 são grafos não isomorfos e coespectrais.

Observa-se que os dois grafos são estruturalmente diferentes, com matrizes de adjacência diferentes, e ainda assim eles possuem o mesmo espectro.

Os grafos G_1 e G_2 têm o mesmo polinômio característico $P_{(G_1)}(\lambda) = P_{(G_2)}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3$, e cujo espectro é:

$$\text{Spect}(G_1) = \text{Spect}(G_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

mas não são isomorfos, pois como se pode observar, G_1 tem um vértice isolado, um ciclo de comprimento 4 e é desconexo; já G_2 não possui vértice isolado e nem ciclo, mas é conexo.

Observa-se, neste exemplo, que algumas propriedades dos grafos não são caracterizadas pelo seu espectro, como por exemplo: o grau do vértice, a conexividade e a existência de ciclos de comprimento 4; são algumas das propriedades que não dependem do espectro do grafo.

Assim, um grafo G é caracterizado pelo seu espectro quando os grafos que são coespectrais com G são isomorfos a G .

4.2 Espectro de grafos especiais

Nesta seção, será explorado o espectro de alguns tipos de grafos especiais.

4.2.1 Grafo Regular

Um grafo regular é caracterizado pelo seu espectro.

Propriedade 21 *Seja G um grafo k -regular, então são válidas as seguintes afirmações:*

- k é um autovalor de G ;
- O número de componentes conexas do grafo G é igual a multiplicidade de k . Logo, G é conexo se, e somente se, a multiplicidade de k for um;
- $|\lambda| \leq k$, para todo λ autovalor de G .

A demonstração da Propriedade 21 pode ser encontrada em [7].

Assim, pelo espectro de um grafo pode-se dizer se um grafo é regular, como também é possível dizer se o grafo regular é conexo ou desconexo. E, no caso de ele ser desconexo, ainda é possível determinar o número de componentes conexas desse grafo.

Na Figura 43 abaixo tem-se um grafo 2-regular.

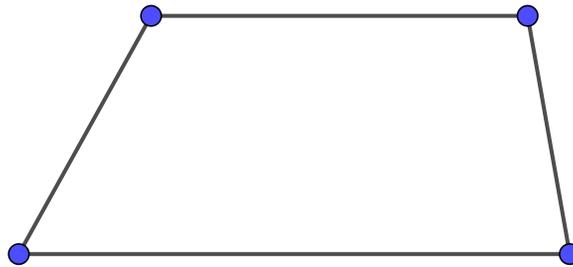


Figura 43: Grafo G : 2-regular.

O polinômio característico de G é $P_G = \lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 2)(\lambda - 2)$. Assim, seus autovalores são $\lambda = 0$ com multiplicidade 2 e, $\lambda = 2$ e $\lambda = -2$ com multiplicidade 1.

$k = 2$ é um autovalor de G e índice do grafo 2-regular. Como tem multiplicidade igual a um, mostra que G é um grafo conexo. Para todo valor de λ de G , $|\lambda| \leq 2$, comprovando que são válidas todas as afirmações anteriores.

Conhecendo os autovalores de um grafo regular, é possível determinar os autovalores do seu grafo complementar.

4.2.2 Grafo Complementar do Grafo Regular

Propriedade 22 Sendo G um grafo k -regular com n vértices e autovalores $k, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ e, \bar{G} o seu grafo complementar. Então, os autovalores de \bar{G} serão $n - 1 - k, -1 - \lambda_2, -1 - \lambda_3, \dots, -1 - \lambda_n$.

A demonstração da Propriedade 22 pode ser encontrada em [8, 9].

O grafo \bar{G} da Figura 44 é o complementar do grafo 2-regular da Figura 43.

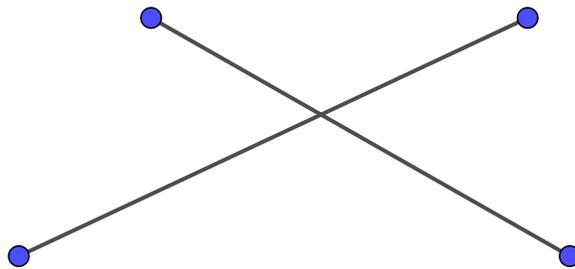


Figura 44: Grafo \bar{G} complementar do grafo 2-regular.

Calculando os autovalores de \bar{G} , tem-se:

$$n - 1 - k = 4 - 1 - 2 = 1$$

$$-1 - \lambda_2 = -1 - 0 = -1$$

$$-1 - \lambda_3 = -1 - 0 = -1$$

$$-1 - \lambda_4 = -1 - (-2) = 1$$

Este resultado pode ser comprovado, calculando o polinômio característico do grafo \bar{G} que é $P_{\bar{G}} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1)$. Seus autovalores são $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$, ambos com multiplicidade 2.

O grafo \bar{G} , complementar do grafo G , é um grafo 1-regular. Sendo 2 a multiplicidade de $k = 1$, mostra que o grafo \bar{G} possui duas componentes conexas.

Outro grafo que é caracterizado pelo seu espectro é o grafo nulo, como será visto a seguir.

4.2.3 Grafo Nulo

Propriedade 23 O grafo nulo possui um único autovalor: o zero; com multiplicidade igual ao número de vértices.

Sendo G um grafo nulo de n vértices, sua matriz de adjacência é a matriz nula de ordem n

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

e o seu polinômio característico é $P_G(\lambda) = \lambda^n$; cujos n autovalores serão todos iguais a zero.

Assim, o espectro de grafo nulo é dado por:

$$\text{Spect}(G) = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix}.$$

Sendo o grafo nulo um grafo 0-regular, é possível, por meio da Propriedade 22, determinar o espectro do grafo completo.

4.2.4 Grafo Completo

Propriedade 24 *Seja G um grafo completo de n vértices, seus autovalores serão $\lambda = n - 1$ com multiplicidade 1 e $\lambda = -1$ com multiplicidade $n - 1$.*

O grafo completo K_n é o complementar de um grafo nulo de n vértices. E o grafo nulo de n vértices é um grafo 0-regular, formado por n componentes conexas. Então, pelo espectro do grafo complementar do grafo regular, o espectro do grafo completo será:

$$\text{Spect}(K_n) = \begin{bmatrix} n - 1 & -1 \\ 1 & n - 1 \end{bmatrix}.$$

4.2.5 Grafo Bipartido

O grafo bipartido e o grafo bipartido completo também são caracterizados pelo espectro, conforme Propriedades 25 e 26, cujas demonstrações podem ser encontradas em [9].

Propriedade 25 *Se G é um grafo bipartido, se λ_i é um autovalor não nulo de G com multiplicidade m , então, $-\lambda_i$ também é um autovalor de G com a mesma multiplicidade m .*

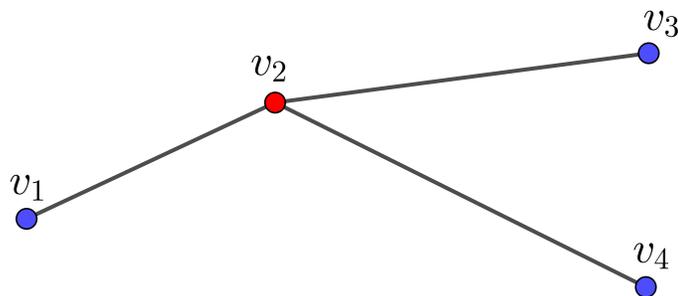


Figura 45: Grafo bipartido G .

Na Figura 45 é ilustrado um grafo G que é uma árvore. As árvores são grafos bipartidos, uma vez que elas não possuem ciclos. O polinômio característico do grafo G é dado por: $P_G = \lambda^4 - 3\lambda^2$. E o seu espectro é:

$$\text{Spect}(G) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vale observar, $\sqrt{3}$ é um autovalor valor de G com multiplicidade 1 e $-\sqrt{3}$ também é um autovalor de G com a mesma multiplicidade.

Já para o grafo bipartido completo, tem-se a seguinte propriedade:

Propriedade 26 *Em um grafo bipartido completo $K_{m,n}$, seus autovalores são $-\sqrt{mn}$ com multiplicidade 1, 0 com multiplicidade $m + n - 2$ e \sqrt{mn} com multiplicidade 1.*

Assim,

$$\text{Spect}(K_{m,n}) = \begin{bmatrix} \sqrt{mn} & 0 & -\sqrt{mn} \\ 1 & m + n - 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

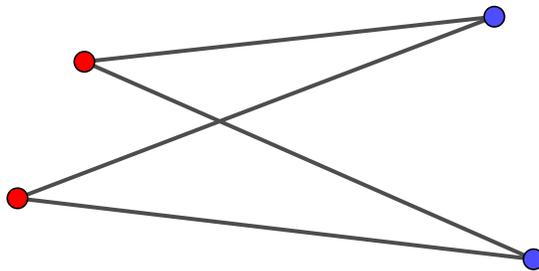


Figura 46: Grafo bipartido completo $K_{2,2}$.

Na Figura 46 é ilustrado um grafo bipartido completo $K_{2,2}$. Pela Propriedade 26, o espectro do grafo $K_{2,2}$ é:

- $\sqrt{mn} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$, com multiplicidade 1;
- 0, com multiplicidade $m + n - 2 = 2 + 2 - 2 = 2$; e
- $-\sqrt{mn} = -\sqrt{2 \cdot 2} = -2$, com multiplicidade 1;

O que pode ser comprovado, determinando o seu polinômio característico, que é dado por $P_G = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2)$. Logo, o espectro é:

$$\text{Spect}(K_{2,2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que em grafos bipartidos o espectro é simétrico em relação à origem.

4.2.6 Grafo Estrela

Propriedade 27 Dado um grafo estrela S_n , seus autovalores são $\sqrt{n-1}$ e $-\sqrt{n-1}$, ambos com multiplicidade 1, e 0 com multiplicidade $n-2$.

O grafo estrela S_n é um grafo bipartido completo $K_{1,n-1}$. Então, pela Propriedade 26, seu espectro é dado por:

$$\text{Spect}(S_n) = \begin{bmatrix} \sqrt{n-1} & 0 & -\sqrt{n-1} \\ 1 & n-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 47 é apresentado um grafo estrela S_{10} . Sem precisar calcular o polinômio característico, que seria uma tarefa trabalhosa, já que o grafo possui 10 vértices; pela Propriedade 27 é possível determinar o seu espectro. Assim,

$$\text{Spect}(S_{10}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

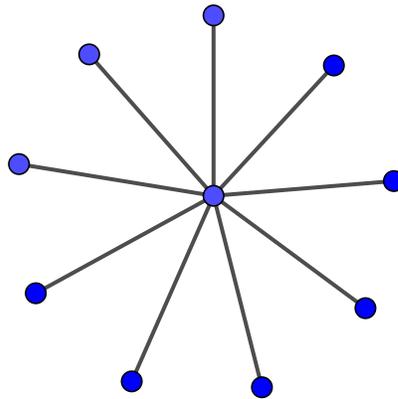


Figura 47: Grafo estrela S_{10} .

5 Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho foi feita uma introdução da Teoria dos grafos em que se apresentou as características de alguns tipos especiais de grafos simples e algumas definições relevantes dessa teoria para melhor compreensão do mesmo.

Foram abordadas as propriedades das matriz de adjacência. Constatou-se que elas ajudam na discussão da existência de caminhos no grafo, na contagem e na descrição desses caminhos, a verificar se o grafo é conexo e também a verificar se é bipartido. Aprendeu-se a determinar o raio e o diâmetro do grafo por meio de sua matriz de adjacência.

Associada à matriz de adjacência, foi possível determinar a matriz laplaciana e a matriz de probabilidade. Foi apresentado o Teorema da Matriz-Árvore que afirmou que qualquer submatriz da matriz laplaciana fornece o número de árvores geradoras do grafo. E a matriz de probabilidade que diz a probabilidade de a partir de um determinado vértice chegar a outro vértice qualquer do grafo.

Mostrou-se assim, que através da Teoria dos Grafos, será possível dar um melhor significado para as operações realizadas com matrizes, pois no Ensino Médio, essas operações, na maioria das vezes, não são abordadas de forma contextualizadas.

Para trabalhos futuros, a proposta seria analisar as propriedades da matriz de adjacência em grafos simples aplicadas aos grafos direcionados.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, que me deu o dom da vida e me abençoa todos os dias com seu infinito amor. E a Nossa Senhora por ser sempre minha intercessora.

Aos meus pais Sebastião e Madalena, que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando nessa caminhada.

Ao meu esposo Marcelo, por todo amor, companheirismo e incentivo nas horas difíceis. Sem o seu apoio eu não conseguia concluir esse mestrado.

Aos meus filhos Marcelo, Vinícius e João Victor, por serem tão especiais em minha vida.

Aos amigos do Profmat, pela ajuda em vários momentos de dificuldades.

Aos professores, em especial meu orientador Professor Dr. Alexandre Celestino Leite Almeida, pela disponibilidade, paciência e ensinamentos que contribuíram para a conclusão deste trabalho.

A Prefeitura Municipal de Guarapari e a Prefeitura Municipal de Anchieta, que me concederam a licença do trabalho de forma que eu pudesse dedicar mais tempo aos estudos.

A todos vocês, o meu muito obrigada!

Referências

- [1] ROSEN, Kenneth H. Matemática Discreta e Suas Aplicações, [Tradução João Giudice]. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.
- [2] JURKIEWICZ, Samuel. Grafos - Uma Introdução., Apostila 5 de Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Rio de Janeiro, 2009
- [3] SCHEINERMAN, E. R. Matemática Discreta: Uma Introdução. São Paulo: Thomson Learning Edições, 2006.
- [4] GERSTING, J. L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. 5ª.ed. New York, 2003.
- [5] GOLDBARG, Marco; Elizabeth G. Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.
- [6] DUNCAN, Andrew. Powers of the Adjacency Matrix and the Walk Matrix. Disponível em: <https://www.um.edu.mt/library/oar/bitstream/handle/123456789/24439/powers>. Acesso em: 09 out. 2018.
- [7] BIGGS, N. Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press, 1993.
- [8] ABREU, N.; Del-Vecchio, R.; Trevisan, V.; Vinagre, C. Teoria Espectral de Grafos - Uma Introdução: IIIº Colóquio de Matemática da Região Sul. Florianópolis, SC, 2014. Disponível em: http://mtm.ufsc.br/coloquiosul/notas_minicurso_6.pdf. Acesso em 10 out. 2018.
- [9] FRITSCHER, E. Propriedades espectrais de um grafo. 2011. Dissertação (Pós-Graduação em Matemática Aplicada) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.
- [10] Lecture 6: The Matrix-Tree Theorem. Disponível em: <https://people.orie.cornell.edu/dpw/orie6334/lecture6.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2019.
- [11] Lecture 7: The Matrix-Tree Theorems. Disponível em: <https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/mark.muldoon/Teaching/DiscreteMaths/LectureNotes/IntroToMatrixTree.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2019.
- [12] NONNENMACHER, E. D. Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhof. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/176152/Poster_53169.pdf?sequence=2. Acesso em: 23 nov. 2018.
- [13] Smith forms for adjacency matrices of circulant graphs. Disponível em : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379513007039>. Acesso em 25 fev. 2019.
- [14] DAVIS, P. J. Circulant Matrices. Canadá, 1979.
- [15] ALDROVANDI, R. Special matrices of mathematical physics: stochastic, circulant and Bell matrices. USA: World Scientific, 2001.
- [16] Random Walks on Graphs. Disponível em: https://people.math.osu.edu/husen.1/teaching/571/random_walks.pdf. Acesso em: 12 de jan. 2019.

- [17] SANTOS, Reginaldo J. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2010.
- [18] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Base Nacional Curricular Comum. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 08 de mar. 2019.
- [19] KRANDA, Daniel J. The Square of Adjacency Matrices. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1207.3122.pdf>. Acesso em 23 nov. 2018.
- [20] Graph Theory. Disponível em: https://www3.nd.edu/~dgalvin1/40210/40210_F12/CGT_early.pdf. Acesso em: 20 nov. 2018.
- [21] Graph Matrices. Disponível em: <https://www.http://compalg.inf.elte.hu/tony/Oktatas/TK/FINAL/Chap%2010.PDF>. Acesso em: 20 nov. 2018.
- [22] BUTLER, Steven K. Eigenvalues and Structures of Graphs. Disponível em: <https://orion.math.iastate.edu/butler/PDF/dissertation.pdf>. Acesso em: 05 dez. 2018.