UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIANGULO MINEIRO - UFTM

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALEX JÚNIOR NOVAIS

Identificação de cônicas e quadricas utilizando o software GeoGebra

Uberaba - MG

Maio de 2019

ALEX JÚNIOR NOVAIS

Identificação de cônicas e quadricas utilizando o software GeoGebra

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni

Uberaba

2019

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

	Novais, Alex Júnior Novais
N821i	Identificação de cônicas e quadricas utilizando o software GeoGebra / Alex Júnior Novais. -- 2019.
	122 f. : il.
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2019
	Orientador: Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni
	1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Educação. 3. GeoGebra (Programa de computador). I. Ottoboni, Rafael Rodrigo. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III.Título.
	CDU 51(07)

ALEX JÚNIOR NOVAIS

Identificação de cônicas e quádricas utilizando o software GeoGebra

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

27 de Maio de 2019.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni (Orientador)
Unviversidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof. Dr. Osmar Aléssio (Membro Interno)
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Marcos P. de Almeida

Prof. Dr. Marcos Proença de Almeida (Membro Externo)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro

Aos meus pais, Ademir e Lucimary (in memorian), aos meus irmãos Alef e Ademir Jr. À mulher da minha vida Flávia, pelo apoio incondicional em todos os momentos, principalmente nos de incerteza, muito comuns para quem tenta trilhar novos caminhos. Sem você nenhuma conquista valeria a pena. E à mimha princesa Manuela.

Agradecimentos

A Deus por me presentear com a vida de Manuela, minha filha que ilumina meu coração, que da forças para viver.

Ao meu pai, que considero como amigo, irmão, sempre com respeito e adimiração, obrigado por sempre estar presente na minha vida e ter apoiado nas minhas decisões.

A UFTM por oferecer uma excelente formação acadêmica.

A todos os professores do PROFMAT, em especial meu orientador Rafael Otoboni, pela dedicação e paciência. Aqui fica meu reconhecimento pela oportunidade de realizar este trabalho ao lado de alguém que transpira sabedoria; meu respeito e admiração pela sua serenidade.

Aos meus amigos que me acompanharam nessa caminhada e em especial a Silvana, André, Larissa e Ananda.

Os problemas significativos com os quais nos deparamos não podem ser resolvidos no mesmo nível de pensamento em que estávamos quando eles foram criados.

Albert Einstein

Resumo

O estudo de Geometria Analítica sobre cônicas e quádricas, no âmbito do Ensino Médio, é um conteúdo de suma importância, do qual utilizamos métodos e símbolos algébricos para resolver situações na Geometria. O objetivo da pesquisa é o desenvolvimento de algumas atividades de geometria analítica (cônicas e superfícies quádricas), no software Geogebra, para melhorar a educação no processo de ensino aprendizagem, obtendo melhores resultados no ensino de Matemática. Em todos os capítulos estão todas as construções passo a passo de cada atividade dinâmica de cônica e superfície quádrica desenvolvida no **software Geogebra (versão 5.0)** com a parte teórica. No primeiro capítulo foi retratado o conteúdo de cônicas (elipse, hipérbole e parábola), no segundo capítulo o tema abordado foi sobre superfícies quádricas (elipsoide, hiperbolóide e parabolóide) e, por fim, no último capítulo abordamos a respeito de superfícies cilíndricas. Nas atividades desenvolvidas no software podemos identificar as rotações e translações, em alguns casos, com toda parte teórica com suas determinadas parametrizações.

Palavras-chave:Educação; Ensino de Matemática; software Geogebra

Abstract

The study of Analytical Geometry on conic and quadric ,in the context of High School, is a content of paramount importance, from which we use algebraic methods and symbols to solve situations in Geometry. The objective of this research is the development of some activities of analytical geometry (conic and quadratic surfaces), in **Geogebra software (version 5.0)**, to improve education in the process of teaching and learning, obtaining better results in the teaching of Mathematics. In all the chapters are all the step-by-step constructions of each dynamic activity of conic and quadric surface developed by the software Geogebra with the theoretical part. In the first chapter, the content of conics (ellipse, hyperbola and parabola) was portrayed. In the second chapter, the topic covered was quadratic surfaces (ellipsoid, hyperboloid and paraboloid) and, finally, in the last chapter we approached cylindrical surfaces. In the activities developed in the software we can identify the rotations and translations, in some cases, with all theoretical part with its certain parametrizations.

Keywords:Education; Mathematics Teaching; Geogebra software .

Lista de Figuras

*

Conteúdo

*

INTRODUÇÃO

O estudo de Geometria Analítica sobre cônicas e quádricas, no âmbito do ensino médio, é um conteúdo muito importante, do qual utilizamos métodos e símbolos algébricos para resolver situações na Geometria. Empregamos Geometria Analítica para manipular equações em planos, retas, curvas e círculos. Uma temática importante para ser ministrada em salas de aulas, todavia não há a existência deste conteúdo em alguns livros didáticos ou apostilas. Por este viés, pensando nas minhas aulas dos ensinos Médio e Superior - como motivação- resolvemos desenvolver este trabalho criando atividades no software Geogebra (versão 5.0). O objetivo da pesquisa é o desenvolvimento de algumas atividades de Geometria Analítica (cônicas e superfícies quádricas), no software Geogebra, a fim de aperfeiçoar a qualidade do processo de Ensino Aprendizagem na área Educacional, obtendo melhores soluções às práticas Matemáticas, sendo o diferencial do trabalho o conteúdo de rotação e translação com as atividades desenvolvidas no software. Utilizando estas atividades, desenvolvidas no software, as aulas de Geometria Analíticas proporcionarão melhor interesse e desempenho dos alunos, visto que terão uma visão tridimensional do conteúdo, conseguirão identificar os elementos de uma cônica e cortes das superfícies quádricas, podendo utilizar em alguns tipos de celuar. Em todos os capítulos constam todas as construções, em forma gradativa, de cada atividade dinâmica de cônica e superfície quádrica desenvolvida no software Geogebra juntamente com a parte teórica. No primeiro capítulo retratará o conteúdo de cônicas (elipse, hipérbole e parábola); no segundo capítulo, o assunto será sobre superfícies quádricas (elipsóide, hiperbolóide e parabolóide) e o terceiro capítulo abordará a respeito de superfícies cilíndricas. Esta tese de mestrado tem como relevância acadêmica aprimorar a formação de docentes e expandir conhecimentos acadêmicos por meio da aprendizagem de novas atividades de cônicas e superfícies quádricas desenvolvida a partir do software GeoGebra. Na relevância profissional o principal objetivo é auxiliar e aperfeiçoar o docente no processo de ensino de cônicas e superfícies quádricas, a fim de obter melhores resultados no ensino de Matemática.

Capítulo 1

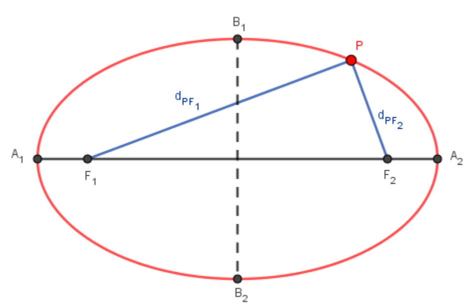
CÔNICAS

As seções seguintes relacionadas ao conceitos e definições de cônicas no estudo de geometria analítica e tem como referência [1], [2], [3],[4], [5], [9] e [10].

1.1 Elipse

Consideremos dois pontos distintos F_1 e F_2, num plano π, sendo que a $d(F_1, F_2) = 2c$. Com $a > 0$, os conjuntos dos pontos de $P \epsilon \pi$ (Figura 1.1) tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, se dá o nome de elipse.

Figura 1.1: Elipse



Fonte: Autor (2019)

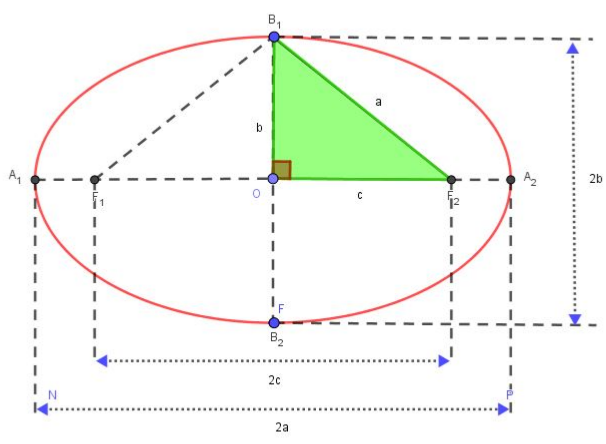
1.1.1 Elementos

Principais elementos da elipse, com base na Figura 1.2.

- F_1 e F_2: focos, com comprimento 2c (distância focal).
- A_1 e A_2: eixo maior, com comprimento 2a (contém os focos).
- B_1 e B_2: eixo menor, com comprimento 2b (é perpendicular a A_1A_2 no seu ponto médio).
- O: centro, ponto médio do segmento F_1F_2.
- A_1,A_2,B_1,B_2: vértices.
- $e = \dfrac{c}{a}$: excentricidade $(0 < e < 1)$.

Se excentricidade obter um valor próximo de 0 ter formato semelhante uma circunferência, porém se o valor da excentricidade for próximo de 1, terá o formato mais "achatada".

Figura 1.2: Elementos da Elipse



Fonte: Autor (2019)

1.1.2 Equações reduzidas

Considere a elipse de centro O(0,0), analisaremos dois casos.

1. Quando eixo maior está sobre o eixo da abscissa (x).

   Sendo os focos F_1=$(-c,0)$ e F_2=$(c,0)$ e um ponto P(x,y) da elipse (Figura 1.3). De acordo coma definição temos que a d(P,F_1)+d(P,F_2)= $2a$ ou $|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$ ou substituindo para coordenadas $|(x+c, y-0)| + |(x-c, y-0)| = 2a \Rightarrow$

   $\sqrt{(x_p - x_{F1})^2 + (y_p - y_{F1})^2} + \sqrt{(x_p - x_{F2})^2 + (y_p - y_{F2})^2} = 2a \Rightarrow$

   $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$

   $\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} \Rightarrow$

   $(\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2})^2 = (2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2})^2 \Rightarrow$

   $x^2 + y^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} + x^2 + y^2 - 2cx + c^2 \Rightarrow$

   $a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} = a^2 - cx \Rightarrow$

   $a^2(x^2 + y^2 - 2cx + c^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2) \Rightarrow$

   $a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$

   $a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$

   $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

   Como $a^2 - c^2 = b^2$, obtemos

   $$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

   Agora dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2, resulta

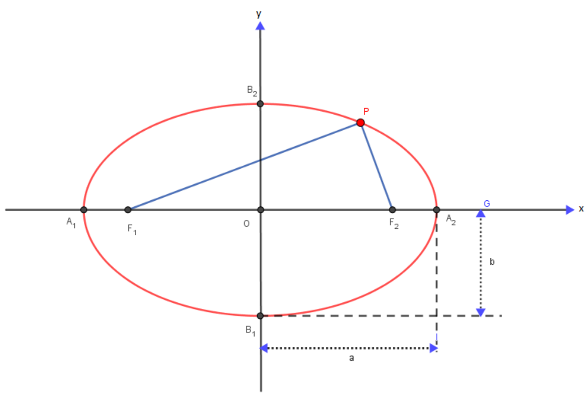
   $$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Logo encontramos a equação reduzida para este caso.

Figura 1.3: Elipse - eixo maior sobre o eixo da abscissa



Fonte: Autor (2019)

2. Quando eixo maior está sobre o eixo da ordenada (y).

Sendo os focos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ e um ponto $P(x, y)$ da elipse (Figura 1.4). De acordo coma definição temos que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ ou $|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$ ou substituindo para coordenadas.

$|(x - 0, y + c)| + |(x - 0, y - c)| = 2a$

$\sqrt{(x_p - x_{F1})^2 + (y_p - y_{F1})^2} + \sqrt{(x_p - x_{F2})^2 + (y_p - y_{F2})^2} = 2a \Rightarrow$

$\sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = 2a \Rightarrow$

$\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} \Rightarrow$

$(\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2})^2 = (2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2})^2 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 + 2yc + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} + x^2 + y^2 - 2yc + c^2 \Rightarrow$

$a\sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} = a^2 - yc \Rightarrow$

$a^2(x^2 + y^2 - 2yc + c^2 = a^4 - 2a^2yc + y^2c^2) \Rightarrow$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2yc + a^2c^2 = a^4 - 2a^2yc + y^2c^2 \Rightarrow$

$a^2x^2 - c^2y^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$

$a^2x^2 + (a^2 - c^2)y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

Como $a^2 - c^2 = b^2$, obtemos

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

Agora dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2, resulta

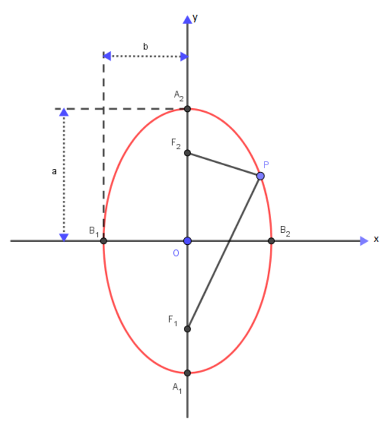
$$\frac{a^2x^2}{a^2b^2} + \frac{b^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Logo encontramos a equação reduzida para este caso.

Figura 1.4: Elipse - eixo maior sobre o eixo da ordenada



Fonte: Autor (2019)

1.1.3 Parametrização de uma elipse

Considere $a > b$ e a elipse de equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Note que
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

Da relação trigonométrica, sabemos que;

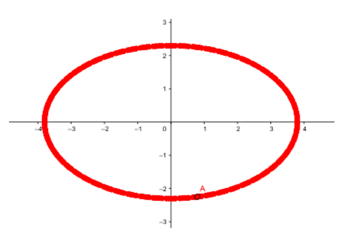
$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1.$$

Fazendo $\frac{x}{a} = sen(\alpha)$ ou seja $x = a.sen(\alpha)$ e $\frac{y}{b} = cos(\alpha)$ ou seja $y = b.cos(\alpha)$, temos
$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1.$

Parametrização Elipse

$$\left(a.sen(\alpha), b.cos(\alpha)\right), \alpha\epsilon(0, 2\pi)$$

Figura 1.5: Formação de uma Elipse via parametrização com $a > b$



Fonte: Autor (2019)

Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/x98swyuq`. Com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico da atividade.

1.1.4 Translação de uma elipse

Considere a elipse de centro O$(h, k) \neq (0, 0)$. Analisaremos os casos da elipse onde seus eixos são paralelos aos eixos coordenados em dois casos.

1. Quando eixo maior é paralelo ao eixo da abscissa (x).

   Fazendo uma translação de eixos, encontramos um novo sistema x'O'y' (Figura 1.6), assim sua equação reduzida

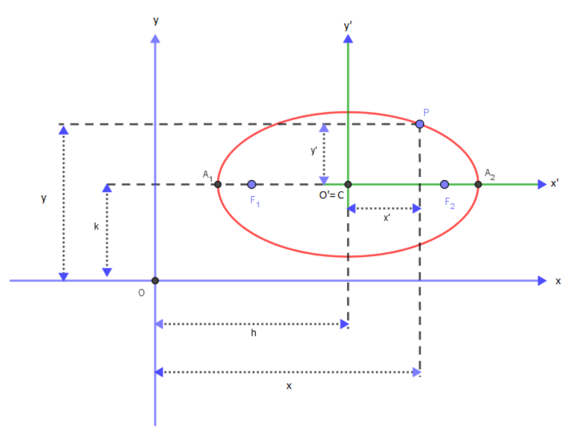
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{1.1}$$

   Logo temos que $x' = x - h$ e $y' = y - k$, assim podemos relacionar com o sistema original xOy, substituindo os valores na nova equação reduzida (1.1).

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

   Determinando a forma padrão para este caso.

Figura 1.6: Elipse - eixo maior paralelo ao eixo da abscissa



Fonte: Autor (2019)

2. Quando eixo maior é paralelo ao eixo da ordenada (y).

   Fazendo uma translação de eixos, encontramos um novo sistema $x'O'y'$ (Figura 1.7), assim sua equação reduzida

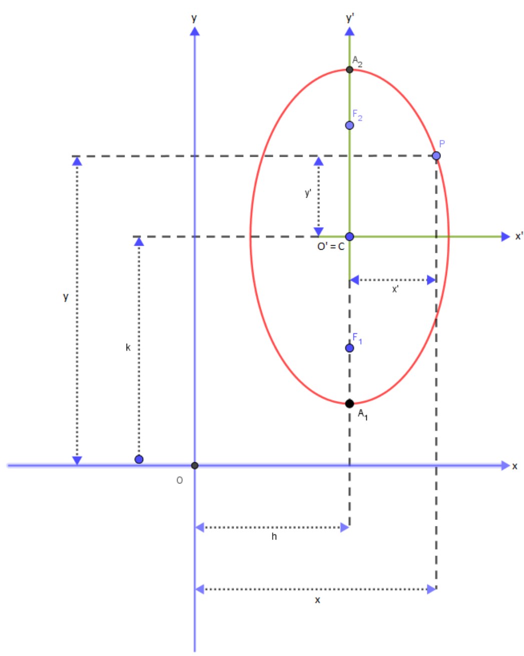
$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \tag{1.2}$$

   Logo temos que $x' = x - h$ e $y' = y - k$, assim podemos relacionar com o sistema original xOy, substituindo os valores na nova equação reduzida (1.2),

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

   Determinamos a forma padrão para este caso.

Figura 1.7: Elipse - eixo maior paralelo ao eixo da ordenada



Fonte: Autor (2019)

1.1.5 Rotação de uma Elipse

Seja α o ângulo de rotação no sentido anti-horário. Fazendo a rotação de eixos, encontramos um novo sistema $x'O'y'$, assim sua equação reduzida

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{1.3}$$

Logo temos que

$$\begin{cases} x = x'.cos\theta - y'sin\theta \\ y = x'sin\theta + y'cos\theta \end{cases}$$

assim podemos relacionar com o sistema original xOy, substituindo os valores na nova equação reduzida (1.3),

$$\frac{(x'.cos\theta - y'sin\theta)^2}{a^2} + \frac{(x'sin\theta + y'cos\theta)^2}{b^2} = 1 \tag{1.4}$$

Determinando a forma padrão para este caso na equação (1.4).

A equação de rotação com os eixos transladados é

$$\frac{((x-h).cos\theta - (y-k)sin\theta)^2}{a^2} + \frac{((x-h)sin\theta + (y-k)cos\theta)^2}{b^2} = 1$$

1.1.6 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, onde identificamos os elementos de uma elipse, mostrar uma conveniente translação de eixos e rotação. Criando os parâmetros para cada elemento da elipse, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, divimos em três etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/azqb4ng2`.

1. Etapa.

   (a) Abra um arquivo no GeoGebra.

   (b) Crie os controles deslizantes a e b;

      - controle a com intervalo de 0,1 a 5.
      - controle b com intervalo de 0,1 a 5.

   (c) Na caixa de entrada digite a equação da elipse

      - $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

2. Etapa (Movimento de translação).

   (a) Crie os controles deslizantes h e k;

      - controle h com intervalo de -5 a 5.
      - controle k com intervalo de -5 a 5.

   (b) Na caixa de entrada digite a equação da elipse

      - $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

3. Etapa (Movimento de rotação).

   (a) Crie os controles deslizantes α;

      - controle α com intervalo de 0^o a 360^o.

   (b) Na caixa de entrada digite a equação da elipse com rotação no sentido anti-horário.

      - $\dfrac{(x.cos(-\alpha) - y.sen(-\alpha))^2}{a^2} + \dfrac{(x.sen(-\alpha) + y.cos(-\alpha))^2}{b^2} = 1$

   (c) Na caixa de entrada digite a equação da elipse de translação.

      - $\frac{((x-h).cos(-\alpha) - (y-k).sen(-\alpha))^2}{a^2} + \frac{((x-h).sen(-\alpha) + (y-k).cos(-\alpha))^2}{b^2} = 1$

   (d) Na caixa de entrada digite os focos da elipse $(c, 0), (-c, 0)$ na equação reduzida, como $a^2 = b^2 + c^2$, portanto $c = \pm\sqrt{(a^2 - b^2)}$.

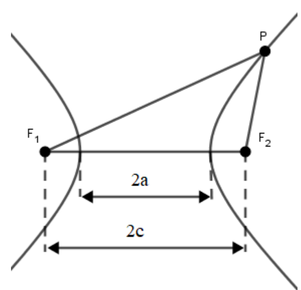
      - $F1(\sqrt{(a^2-b^2)}.cos(-\alpha)+h, -\sqrt{(a^2-b^2)}.sen(-\alpha)+k)$, com uma observação na aba avançado $a > b$;

- $F2(-\sqrt{(a^2-b^2)}.cos(-\alpha)+h, \sqrt{(a^2-b^2)}.sen(-\alpha)+k)$, com uma observação na aba avançado $a > b$;
- $F1'(\sqrt{(b^2-a^2)}.sen(-\alpha)+h, \sqrt{(b^2-a^2)}.cos(-\alpha)+k)$, com uma observação na aba avançado $a < b$;
- $F2'(-\sqrt{(b^2-a^2)}.sen(-\alpha)+h, -\sqrt{(b^2-a^2)}.cos(-\alpha)+k)$, com uma observação na aba avançado $a < b$;

1.2 Hipérbole

Consideremos dois pontos distintos F_1 e F_2, num plano π, sendo que a $d(F_1, F_2) = 2c$. Com $a > 0$, os conjuntos dos pontos de $P\epsilon\pi$ (Figura 1.8) tais que $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$, se dá o nome de hipérbole.

Figura 1.8: Hipérbole



Fonte: Autor (2019)

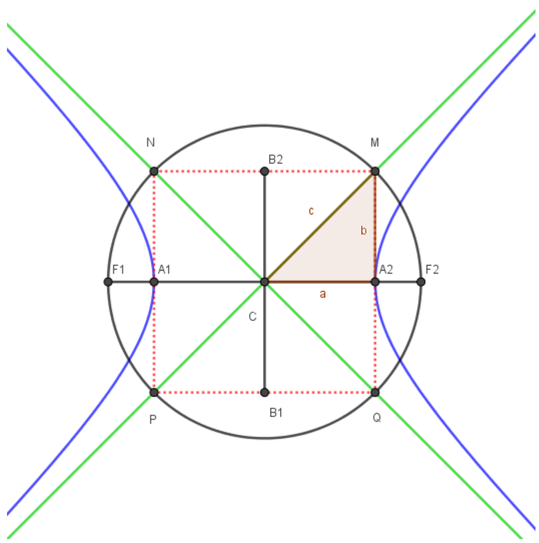
1.2.1 Elementos

Principais elementos da hipérbole, com base na (Figura 1.9).

- F_1 e F_2: focos, com comprimento 2c (distância focal).
- A_1 e A_2: eixo real ou transverso, com comprimento 2a (contém os focos).

- B_1 e B_2: eixo conjugado, com comprimento 2b (é perpendicular a A_1A_2 no seu ponto médio).
- O: centro, ponto médio do segmento F_1F_2.
- $e = \dfrac{c}{a}$: excentricidade $\left(\dfrac{c}{a} > 1\right)$.
- r e s: assíntotas.

Figura 1.9: Elementos da Hipérbole



Fonte: Autor (2019)

1.2.2 Equações reduzidas

Considere a hipérbole de centro O(0,0), analisaremos dois casos.

1. Quando eixo real está sobre o eixo da abscissa (x).

   Sendo os focos F_1=$(-c, 0)$ e F_2=$(c, 0)$ e um ponto P(x, y) da hipérbole (Figura 1.10). De acordo com a definição temos que a

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

ou

$$|\overrightarrow{F_1P}| - |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$$

ou substituindo para coordenadas.

$|(x+c, y-0)| - |(x-c, y-0)| = 2a \Rightarrow$

$\sqrt{(x_p - x_{F1})^2 + (y_p - y_{F1})^2} - \sqrt{(x_p - x_{F2})^2 + (y_p - y_{F2})^2} = 2a \Rightarrow$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$

$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} = 2a + \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} \Rightarrow$

$(\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2})^2 = (2a + \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2})^2 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} + x^2 + y^2 - 2cx + c^2 \Rightarrow$

$-a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} = a^2 - cx \Rightarrow$

$a^2(x^2 + y^2 - 2cx + c^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2) \Rightarrow$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$

$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

Como $b^2 = c^2 - a^2$, logo $-b^2 = a^2 - c^2$, obtemos

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

Agora dividindo ambos os membros da equação por $(-a^2b^2)$, resulta

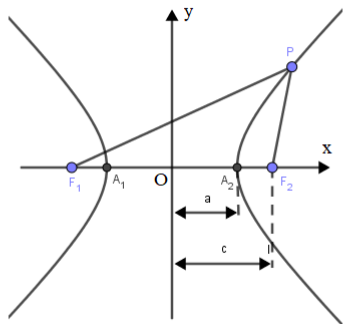
$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Logo encontramos a equação reduzida para este caso.

Figura 1.10: Hipérbole - eixo real está sobre o eixo da abscissa



Fonte: Autor (2019)

2. Quando eixo real está sobre o eixo da ordenada (y).

   Sendo os focos F_1=$(0, -c)$ e F_2=$(0, c)$ e um ponto P(x, y) da hipérbole (Figura 1.11). De acordo com a definição temos que a

   $$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

   ou

   $$|\overrightarrow{F_1P}| - |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$$

   ou substituindo para coordenadas.

   $|(x - 0, y + c)| - |(x - 0, y - c)| = 2a$

   $\sqrt{(x_p - x_{F1})^2 + (y_p - y_{F1})^2} - \sqrt{(x_p - x_{F2})^2 + (y_p - y_{F2})^2} = 2a \Rightarrow$

   $\sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2} - \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = 2a \Rightarrow$

   $\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} = 2a + \sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} \Rightarrow$

   $(\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2})^2 = (2a + \sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2})^2 \Rightarrow$

   $x^2 + y^2 + 2yc + c^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} + x^2 + y^2 - 2yc + c^2 \Rightarrow$

   $-a\sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} = a^2 - yc \Rightarrow$

   $a^2(x^2 + y^2 - 2yc + c^2 = a^4 - 2a^2yc + y^2c^2) \Rightarrow$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2yc + a^2c^2 = a^4 - 2a^2yc + y^2c^2 \Rightarrow$

$a^2x^2 - c^2y^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$

$a^2x^2 + (a^2 - c^2)y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

$-b^2 = a^2 - c^2$, obtemos

$$a^2x^2 - b^2y^2 = -a^2b^2$$

Agora dividindo ambos os membros da equação por $-a^2b^2$, resulta

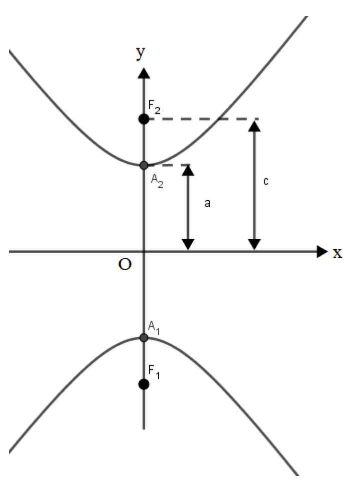
$$\frac{b^2y^2}{a^2b^2} - \frac{a^2x^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

ou

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Logo encontramos a equação reduzida para este caso.

Figura 1.11: Hipérbole - eixo real está sobre o eixo da ordenada



Fonte: Autor (2019)

1.2.3 Parametrização de uma hipérbole

Considere $a > b$ e a hipérbole equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Note que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Da relação trigonométrica, sabemos que;

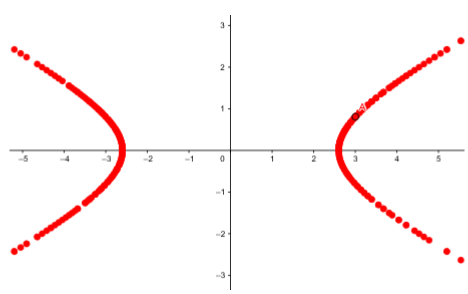
$$sec^2(\alpha) - tan^2(\alpha) = 1.$$

Fazendo $\frac{x}{a} = sec(\alpha)$ ou seja $x = a.sec(\alpha)$ e $\frac{y}{b} = tan(\alpha)$ ou seja $y = b.tan(\alpha)$, temos $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = sec^2(\alpha) - tan^2(\alpha) = 1.$

Parametrização Hipérbole

$$\left(a.sec(\alpha), b.tg(\alpha)\right), \alpha\epsilon(0, 2\pi)$$

Figura 1.12: Formação de uma Hipérbole via parametrização com $a < b$



Fonte: Autor (2019)

Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/pe8ds6pg`. Com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico da atividade.

1.2.4 Translação de uma hipérbole

Considere uma hipérbole de centro O$(h, k) \neq (0, 0)$. Analisaremos os casos da hipérbole onde seus eixos são paralelos aos eixos coordenados em dois casos.

1. Quando eixo maior é paralelo ao eixo da abscissa (x).

   Fazendo uma translação de eixos, encontramos um novo sistema x'O'y' (Figura 1.13), assim sua equação reduzida

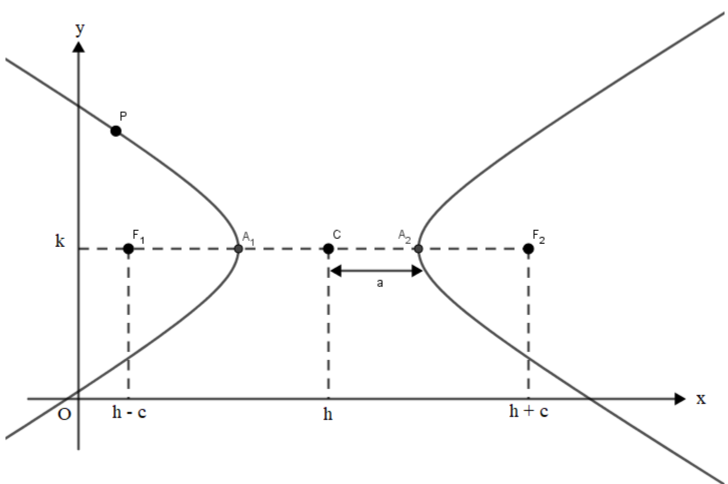
$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{1.5}$$

   Logo temos que $x' = x - h$ e $y' = y - k$, assim podemos relacionar com o sistema original xOy, substituindo os valores na nova equação reduzida (1.5),

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

   Determinando a forma padrão para este caso.

Figura 1.13: Hipérbole - eixo maior é paralelo ao eixo da abscissa



Fonte: Autor (2019)

2. Quando eixo maior é paralelo ao eixo da ordenada (y).

   Fazendo uma translação de eixos, encontramos um novo sistema $x'O'y'$ (Figura 1.14), assim sua equação reduzida

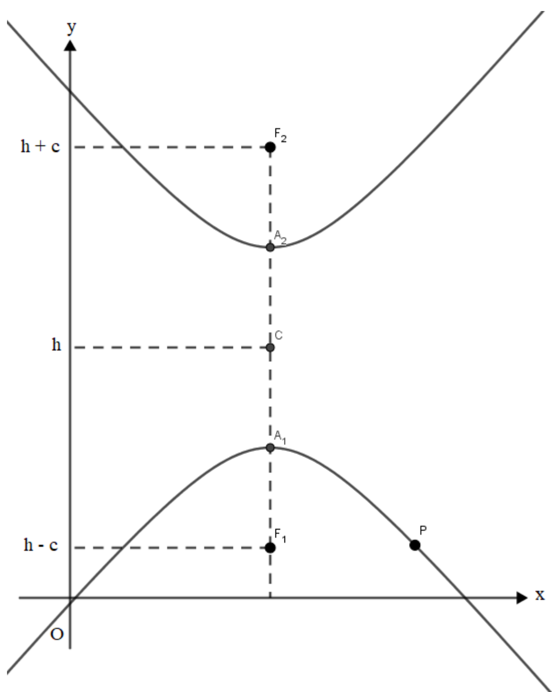
$$\frac{x'^2}{b^2} - \frac{y'^2}{a^2} = 1 \tag{1.6}$$

   Logo temos que $x' = x - h$ e $y' = y - k$, assim podemos relacionar com o sistema original xOy, substituindo os valores na nova equação reduzida (1.6),

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

   Determinamos a forma padrão para este caso.

Figura 1.14: Hipérbole - eixo maior é paralelo ao eixo da ordenada



Fonte: Autor (2019)

1.2.5 Rotação de uma hipérbole

Seja α o ângulo de rotação no sentido anti-horário. Fazendo a rotação de eixos, encontramos um novo sistema $x'O'y'$, assim sua equação reduzida

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{1.7}$$

Logo temos que

$$\begin{cases} x = x'.cos\theta - y'sin\theta \\ y = x'sin\theta + y'cos\theta \end{cases}$$

assim podemos relacionar com o sistema original xOy, substituindo os valores na nova equação reduzida (1.7),

$$\frac{(x'.cos\theta - y'sin\theta)^2}{a^2} - \frac{(x'sin\theta + y'cos\theta)^2}{b^2} = 1 \tag{1.8}$$

Determinando a forma padrão para este caso na equação (1.8)

A equação de rotação com os eixos transladados é

$$\frac{((x-h).cos\theta - (y-k)sin\theta)^2}{a^2} - \frac{((x-h)sin\theta + (y-k)cos\theta)^2}{b^2} = 1$$

1.2.6 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, onde identificamos os elementos de uma hipérbole, mostrar uma conveniente translação de eixos e rotação. Criando os parâmetros para cada elemento da hipérbole, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, dividimos em três etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/jn8e4zkt`.

1. Etapa.

    (a) Abra um novo arquivo no GeoGebra.

    (b) Crie os controles deslizantes a e b;

        - controle a com intervalo de 0,1 a 5.
        - controle b com intervalo de 0,1 a 5.

    (c) Na caixa de entrada digite a equação da hipérbole

        - $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

2. Etapa (Movimento de translação).

    (a) Crie os controles deslizantes h e k;

        - controle h com intervalo de -5 a 5.
        - controle k com intervalo de -5 a 5.

    (b) Na caixa de entrada digite a equação da elipse

        - $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

3. Etapa (Movimento de rotação).

    (a) Crie os controles deslizantes α;

        - controle α com intervalo de 0º a 360º.

    (b) Na caixa de entrada digite a equação da hipérbole com rotação no sentido anti-horário.

        - $\dfrac{(x.cos(-\alpha) - y.sen(-\alpha))^2}{a^2} - \dfrac{(x.sen(-\alpha) + y.cos(-\alpha))^2}{b^2} = 1$

    (c) Na caixa de entrada digite a equação da hipérbole de translação.

        - $\frac{((x-h).cos(-\alpha) - (y-k).sen(-\alpha))^2}{a^2} - \frac{((x-h).sen(-\alpha) + (y-k).cos(-\alpha))^2}{b^2} = 1$

    (d) Na caixa de entrada digite os focos da hipérbole $(c, 0), (-c, 0)$ na equação reduzida, como $a^2 = b^2 + c^2$, portanto $c = \pm\sqrt{(a^2 - b^2)}$.

        - $F1(\sqrt{(a^2 + b^2)}.cos(-\alpha) - h, -\sqrt{(a^2 + b^2)}.sen(-\alpha) - k)$;

- $F2(-\sqrt{(a^2+b^2)}.cos(-\alpha)-h, \sqrt{(a^2+b^2)}.sen(-\alpha)-k)$;

(e) Na caixa de entrada digite os pontos que intercepta os eixos Oy e Ox

- $A_1 : (-a.cos(\alpha)-h, -a.sen(\alpha)-k)$
- $A_2 : (a.cos(\alpha)-h, a.sen(\alpha)-k)$
- $B_1 : (b.sen(\alpha)-h, -b.cos(\alpha)-k)$
- $B_2 : (-b.sen(\alpha)-h, -a.cos(\alpha)-k)$

(f) Na caixa de entrada digite as assíntotas.

- $s : (x+h).sen(-\alpha)+(y+k).cos(-\alpha) = \frac{(-b)}{a}.((x+h).cos(-\alpha)-(y+k).sen(-\alpha))$
- $r : (x+h).sen(-\alpha)+(y+k).cos(-\alpha) = \frac{(b)}{a}.((x+h).cos(-\alpha)-(y+k).sen(-\alpha))$

Atividade

Seja a cônica representada pelo conjunto solução da equação algébrica

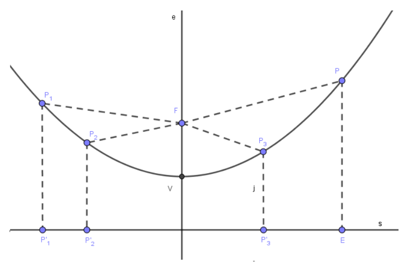
$$g(x,y) = 35x^2 - 2xy + 35y^2 - 34x - 34y - 289 = 0$$

Utlizando a atividade dinâmica desenvolvida no software Geogebra, movendo os parâmetros identifique se a cônica é uma elipse ou uma hipérbole.

1.3 Parábola

Consideremos uma reta d e um ponto F contidos num plano π, com F não pertencente a d (Figura 1.15). O conjunto de todos os pontos contido no plano equidistantes de F e d, temos a **parábola**.

Figura 1.15: Parábola



Fonte: Autor (2019)

1.3.1 Elementos

Principais elementos da parábola, com base na (Figura 1.16).

- F: foco.
- d: reta diretriz.
- e: reta que passa por F e é perpendicular a d.
- V: vértice, ponto de interseção da parábola com seu eixo.

1.3.2 Equações reduzidas

Considere a parábola de vértice V(0,0), analisaremos dois casos.

1. Quando eixo da parábola é o eixo dos y.
   Sendo o foco $F(0, \dfrac{p}{2})$ e diretriz de equação $y = -\dfrac{p}{2}$ e um ponto P(x, y) da parábola

(Figura 1.16). De acordo com a definição temos que a

$$d(P,F) = d(P,P')$$

ou

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{P'P}|$$

ou substituindo para coordenadas, com $P'(x, -\dfrac{p}{2}) \in d$, temos.

$|(x-0, y-\dfrac{p}{2})| = |(x-x, y+\dfrac{p}{2})| \Rightarrow$

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-\dfrac{p}{2})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+\dfrac{p}{2})^2} \Rightarrow$

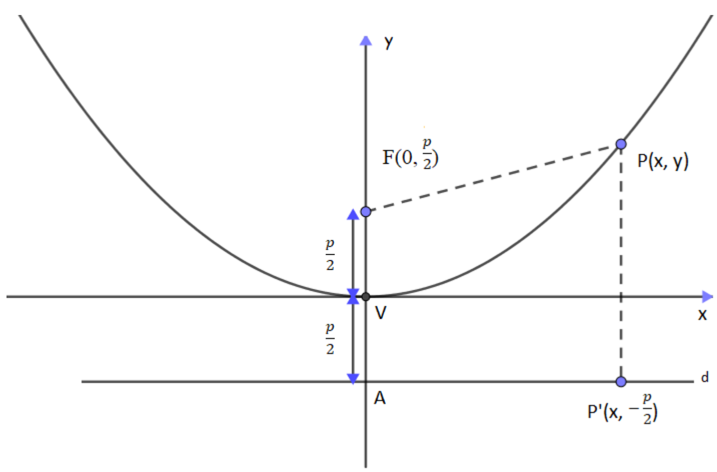
$(x-0)^2 + (y-\dfrac{p}{2})^2 = (x-x)^2 + (y+\dfrac{p}{2})^2 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 - py + \dfrac{p^2}{4} = y^2 + py + \dfrac{p^2}{4} \Rightarrow$

$$x^2 = 2py$$

Logo encontramos a equação reduzida para este caso.

Figura 1.16: Parábola - eixo da parábola é o eixo dos y



Fonte: Autor (2019)

2. Quando eixo da parábola é o eixo dos x.

   Sendo o foco $F(\frac{p}{2}, 0)$ e diretriz de equação $x = -\frac{p}{2}$ e um ponto P(x, y) da parábola (Figura 1.17). De acordo com a definição temos que a

$$d(P, F) = d(P, P')$$

   ou

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{P'P}|$$

   ou substituindo para coordenadas, com $P'(x, -\frac{p}{2}) \in d$, temos.

$$|(x - \frac{p}{2}, y - 0)| = |(x + \frac{p}{2}, y - y)| \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + (y - y)^2} \Rightarrow$$

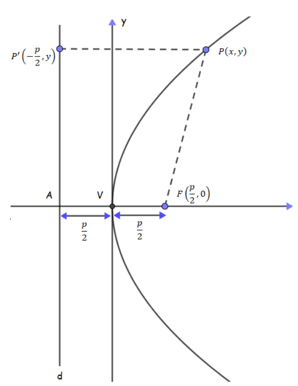
$$(x - \frac{p}{2})^2 + (y - 0)^2 = (x + \frac{p}{2})^2 + (y - y)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Rightarrow$$

$$y^2 = 2px$$

   Logo encontramos a equação reduzida para este caso.

Figura 1.17: Parábola - eixo da parábola é o eixo dos x



Fonte: Autor (2019)

1.3.3 Parametrização de uma parábola

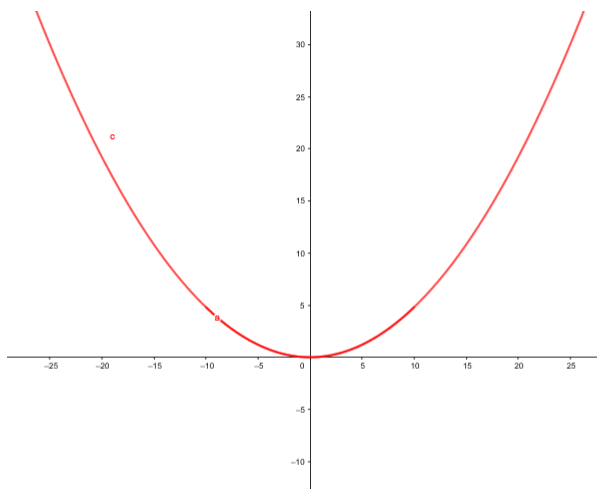
Considere equação da parábola

$$4py = x^2.$$

Parametrização Parábola

$$\left(t, \frac{t^2}{4p}\right) \text{ com t de -10 a 10}$$

Figura 1.18: Formação de uma Parábola via parametrização



Fonte: Autor (2019)

Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/ymvxdpkc`. Com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico da atividade.

1.3.4 Translação de uma parábola

Considere uma parábola de vértice $V(h, k) \neq (0, 0)$. Analisaremos os casos da parábola onde seus eixos são paralelos aos eixos coordenados em dois casos.

1. Quando eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y.

   Fazendo uma translação de eixos, encontramos um novo sistema x'O'y' (Figura 1.19), assim sua equação reduzida

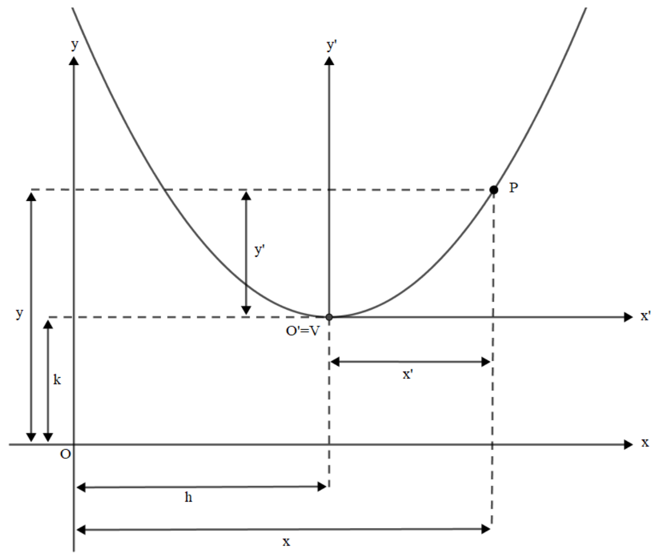
$$x^2 = 2py \tag{1.9}$$

   Logo temos que $x' = x - h$ e $y' = y - k$, assim podemos relacionar com o sistema original xOy, substituindo os valores na nova equação reduzida (1.9),

$$(x - h)^2 = 2p(y - k)$$

   Determinando a forma padrão para este caso.

Figura 1.19: Parábola - eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y



Fonte: Autor (2019)

2. Quando eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x.

   Fazendo uma translação de eixos, encontramos um novo sistema $x'O'y'$ (Figura 1.20), assim sua equação reduzida

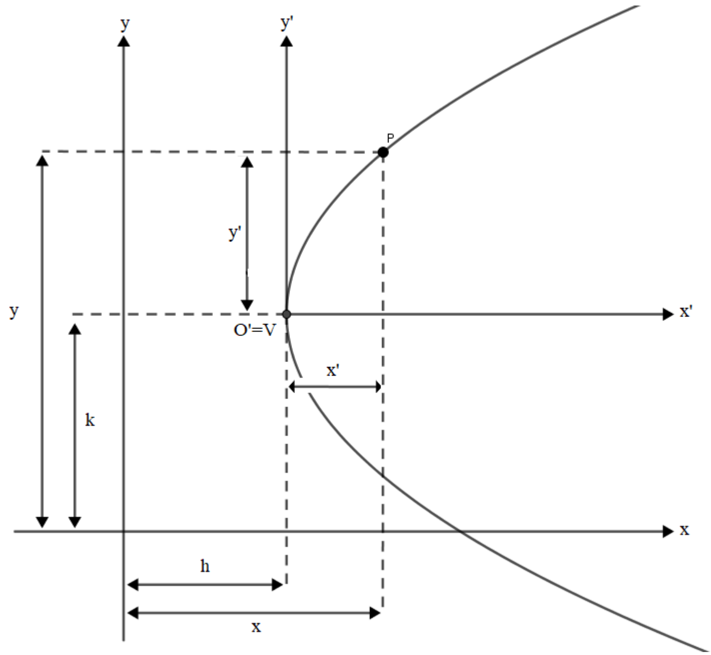
$$y^2 = 2px \tag{1.10}$$

   Logo temos que $x' = x - h$ e $y' = y - k$, assim podemos relacionar com o sistema original xOy, substituindo os valores na nova equação reduzida (1.10),

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

   Determinamos a forma padrão para este caso.

Figura 1.20: Parábola - eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x



Fonte: Autor (2019)

1.3.5 Rotação de uma parábola

Seja α o ângulo de rotação no sentido anti-horário. Fazendo a rotação de eixos, encontramos um novo sistema $x'O'y'$, assim a euqação da parábola

$$y' = 4px'^2 \tag{1.11}$$

Logo temos que

$$\begin{cases} x = x'.cos\theta - y'sin\theta \\ y = x'sin\theta + y'cos\theta \end{cases}$$

,

assim podemos relacionar com o sistema original xOy, substituindo os valores na nova equação (1.11),

$$(x'.sin(\alpha) + y'.cos(\alpha))^2 = 4p(x'.cos(\alpha) - y'.sin(\alpha)) \tag{1.12}$$

Determinando a forma padrão para este caso na equação (1.12).

A equação de rotação com os eixos transladados é

$$(x'.sin(\alpha) + y'.cos(\alpha) + k)^2 = 4p(x'.cos(\alpha) - y'.sin(\alpha) + h)$$

1.3.6 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, onde identificamos os elementos de uma parábola, mostrar uma conveniente translação de eixos e rotação. Criando os parâmetros para cada elemento da parábola, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, dividimos em três etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/mahhvjzw`.

Etapa.

1. Abra um novo arquivo no GeoGebra.

2. Crie o controle deslizante p;

    - parâmetro p com intervalo de -5 a 5.

3. Na caixa de entrada digite a equação da parábola, o ponto $F(Foco)$ e reta diretriz.

    - $y^2 = 4px$
    - $F = (p, 0)$
    - $x + p = 0$

Etapa (Movimento de translação).

1. Crie os controles deslizantes h e k;

- parâmetro h com intervalo de -5 a 5.
- parâmetro k com intervalo de -5 a 5.

2. Na caixa de entrada digite a equação da parábola, substituindo x por $x+h$ e y por $y+k$. Fazendo o mesmo para o Foco e a reta diretriz.

   - $(y+k)^2 = 4p(x+h)$
   - $F = (p-h, 0-k)$
   - $x+h+p=0$

Etapa (Movimento de rotação).

1. Crie os controles deslizantes α;

   - parâmetro α com intervalo de 0^o a 360^o.

2. Na caixa de entrada digite a equação da parábola com rotação no sentido anti-horário, Foco e reta diretriz. Substituindo

$$\begin{cases} x = x'.cos(-\alpha) - y'sin(-\alpha) \\ y = x'sin(-\alpha) + y'4cos(-\alpha) \end{cases}$$

   - $(x'.sen(-\alpha) + y'.cos(-\alpha) + k)^2 = 4p(x'.cos(-\alpha) - y'.sen(-\alpha) + h)$
   - $F = ((p-h).cos(\alpha) - (0-k).sen(\alpha), (p-h).sen(\alpha) + (0-k).cos(\alpha))$
   - $x'.cos(-\alpha) - y'.sen(-\alpha) + h + p = 0$

1.4 Identificação de Cônicas

1.4.1 Identificação de cônicas rotacionadas

Considere a equação

$$(I) Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Fazendo

$$\begin{cases} x = u.cos\theta - vsin\theta \\ y = usin\theta + vcos\theta \end{cases}$$

e substituindo em (I), obtemos:

$A(u^2cos^2(\theta) - 2uvsin(\theta)cos(\theta) + v^2sin^2(\theta) + B(u^2sin(\theta)cos(\theta) + uvcos^2(\theta) - uvsin^2(\theta) - v^2sin(\theta)cos(\theta) + C(u^2sin^2(\theta) + 2uvsin(\theta)cos(\theta) + v^2cos^2(\theta) + D(ucos(\theta) - vsin(\theta) + E(usin(\theta) + vcos(\theta)y + F = 0$

Assim

$(Acos^2(\theta) + Bsin(\theta)cos(\theta) + Csin^2(\theta)u^2 + (-2Asin(\theta)cos(\theta) + B(cos^2(\theta) - sin^2(\theta) + 2Csin(\theta)cos(\theta)uv +$

$(Asin^2(\theta) - Bsin(\theta)cos(\theta) + Ccos^2(\theta)v^2 + (Dcos(\theta) + Esin(\theta)u + (-Dcos(\theta) + Esin(\theta)v + F = 0$

Chamando,

- $A' = Acos^2\theta + Bsin\theta cos\theta + Csin^2\theta$
- $B' = -2Asin\theta cos\theta + B(cos^2\theta - sin^2\theta) + 2Csin\theta cos\theta$
- $C' = Asin^2\theta - Bsin\theta cos\theta + Ccos^2\theta$
- $D' = Dcos\theta + Esin\theta$
- $E' = -Dsin\theta + Ecos\theta$
- $F' = F$

Note que

$B' = -Asin(2\theta) + Bcos(2\theta) + csin(2\theta)$

e

$B' = 0 \Leftrightarrow -Asin\theta + Bcos(2\theta) + Csin(2\theta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen(2\theta)(C - A) = -Bcos(2\theta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tan(2\theta) = \dfrac{B}{A - C}$ e $cotan(2\theta) = \dfrac{A - C}{B}$

Note que,

$A' = (A + C)cos^2\theta + Bsin\theta cos\theta - C(cos^2\theta - sin^2\theta)$

$C' = (A + C)sin^2\theta + Bsin\theta cos\theta + C(cos^2\theta - sin^2\theta)$

Somando as duas equações anteriores, obtemos;

$$A' + C' = (A + C)(cos^2\theta + sin^2\theta) = A + C$$

Subtraindo as duas equações anteriores, obtemos;

$$A' - C' = (A + C)(cos^2\theta - sin^2\theta) + 2Bsin\theta cos\theta - 2C(cos^2\theta - sin^2\theta)$$

ou seja,

$$A' - C' = (A - C)cos(2\theta) + Bsin(2\theta)$$

Resumindo temos,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + C \\ (A - C)cos(2\theta) + Bsen(2\theta) \end{pmatrix}$$

ou equivalente

$$\begin{pmatrix} A' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ C' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A + C' \\ (A - C)cos(2\theta) + Bsen(2\theta) \end{pmatrix}$$

Desta forma concluimos que, fazendo a mudança de variável;

$$\begin{cases} x = ucos\theta - vsin\theta \\ y = usin\theta + vcos\theta \end{cases}$$

Temos que a equação

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

se transforma em

$A'u^2 + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0$

com

$$\begin{pmatrix} A' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ C' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A + C' \\ (A - C)cos(2\theta) + Bsen(2\theta) \end{pmatrix}$$

- $D' = Dcos\theta + Esin\theta$
- $E' = -Dsin\theta + Ecos\theta$
- $F' = F$

1.4.2 Identificação de cônicas com rotacão e translação

Considere a equação

$(III) A'u^2 + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0$

1. Suponha que A' e C' sendo não nulos.

   Fazendo $u = w - h$, $v = t - k$ e substituindo em III, obtemos;

   $A'(w^2 - 2hw + h^2) + C'(t^2 - 2kt + k^2) + D'(w - h) + E'(t - k) + F' = 0$

   ou seja

   $A'w^2 + C't^2 + (-2hA' + D')w + (-2kC' + E')t + F' + A'h^2 + C'k^2 + D'h - E'k = 0$

   Fazendo;

   - $-2hA' + D' = 0 \Rightarrow \left(h = \dfrac{D'}{2A'}\right)$

- $-2kC' + E' = 0 \Rightarrow \left(k = \dfrac{E'}{2C'}\right)$

obtemos;

$A'w^2 + C't^2 + F' + A'h^2 + C'k^2 - D'h - E'k = 0$

$A"w^2 + C"t^2 + F" = 0$

2. Suponha que $A' \neq 0$, $C' = 0$ e $E' \neq 0$.

   Fazendo $u = w - h$ e substituindo em III, obtemos;

   $A'(w^2 - 2hw + h^2) + D'(w - h) + E'v + F' = 0$

   ou seja

   $A'w^2 + (-2hA' + D')w + E'v + F' + A'h^2 - D'h = 0$

   Fazendo;

   - $-2hA' + D' = 0 \Rightarrow \left(h = \dfrac{D'}{2A'}\right)$

   obtemos;

   $A'w^2 = -E'v - F' - A'h^2 + D'h$

   ou seja

   $A'w^2 = -E'\left(v + \dfrac{F' + A'h^2 - D'h}{E'}\right)$

   Neste caso

   $k = -\left(v + \dfrac{F' + A'h^2 - D'h}{E'}\right)$

   Fazendo $t = v - k$ temos;

   $A'w^2 = -E't$

3. Suponha que $A' = 0$, $C' \neq 0$ e $D' \neq 0$.

   Fazendo $v = t - k$ e substituindo em III, obtemos;

   $C'(t^2 - 2kt + k^2) + D'u + E'(t - k) + F' = 0$

   ou seja

   $C't^2 + (-2kC' + E')t + F' + C'k^2 - E'k + D'u = 0$

   Fazendo;

- $-2kC' + E' = 0 \Rightarrow \left(k = \dfrac{E'}{2C'}\right)$

  obtemos;

  $C't^2 = -D'u - F' - C'k^2 + E'k$

  ou seja

  $C't^2 = -D'\left(u + \dfrac{F' + C'k^2 - E'k}{D'}\right)$

  Neste caso

  $h = -\left(\dfrac{F' + C'k^2 - E'k}{D'}\right)$

  Fazendo $w = u - h$ temos;

  $C't^2 = -D'w$

Observação As seguintes observações temos como referência [3].

- Se $B^2 - 4AC < 0$, a cônica só pode ser: vazio, ponto, circunferência ou elipse.

- Se $B^2 - 4AC = 0$, a cônica só pode ser: reta, reunião de duas paralelas, parábola ou vazio.

- $B^2 - 4AC > 0$, trata-se necessariamente de reunião de duas retas concorrentes, ou de hipérbole.

Portanto dizemos que a equação $G(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + f = 0$ é de tipo elítico quando $B^2 - 4AC < 0$, de tipo parabólico quando $B^2 - 4AC = 0$, e de tipo hiperbólico quando $B^2 - 4AC > 0$.

1.4.3 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, identificar as cônicas com rotação e translação. Criando os parâmetros para cada elemento, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, dividimos em três etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/zwkhp3ue`.

1. Etapa.

   (a) Abra um novo arquivo no GeoGebra.

   (b) Crie o controle deslizante A, B, C, D, E e F;

   - parâmetro A com intervalo de -50 a 50.
   - parâmetro B com intervalo de -50 a 50.
   - parâmetro C com intervalo de -50 a 50.
   - parâmetro D com intervalo de -50 a 50.
   - parâmetro E com intervalo de -50 a 50.
   - parâmetro F_1 com intervalo de -500 a 500.

   (c) Na caixa de entrada digite a equação de identificação de cônicas.

   - $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F_1 = 0$

   (d) Na caixa de entrada digite a equação das assíntotas.

   - $xcos(\alpha) + ysin(\alpha) = 0$
   - $-xsin(\alpha) + ycos(\alpha) = 0$

   (e) Na caixa de entrada digite a definição para α, n1, A', C', D', E' e F'.

   - $\alpha = \left(\dfrac{-\dfrac{B}{A-C}}{2} \right)$
   - $n1' = \left(\sqrt{1 + (\dfrac{A-C}{B})^2} + 0 + 0) \right)$
   - $A' = \left(\dfrac{1}{2}(A + C + B.n1 + 0 + 0) \right)$
   - $C' = \left(\dfrac{1}{2}(A + C - B.n1) + 0 + 0 \right)$
   - $D' = (Dcos(\alpha) + Esen(\alpha) + 0 + 0 + 0)$
   - $E' = (-Dsin(\alpha) + Ecos(\alpha) + 0 + 0 + 0)$
   - $F' = (F_1 + 0 + 0)$

2. Etapa (Movimento de rotação).

   (a) Na caixa de entrada digite a equação de identificação de cônicas.

      - $A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$

   (b) Na caixa de entrada digite a definição para α, n1, A', C', D', E' e F'.

      - $\alpha = \left(\dfrac{\dfrac{B}{A-C}}{2}\right)$
      - $A' = \left(\dfrac{1}{2}(A + C + (A - C)cos(2\alpha) + Bsin(2\alpha)\right)$
      - $C' = \left(\dfrac{1}{2}(A + C - (A - C)cos(2\alpha) - Bsin(2\alpha)\right)$
      - $D = (Dcos(\alpha) + Esen(\alpha))$
      - $E' = (-Dsin(\alpha) + Ecos(\alpha))$

3. Etapa (Movimento de rotação e translação).

   (a) 1)*caso* Na caixa de entrada digite a definição para h1, k1, f1, assíntotas, a, b e a equação de identificação canônica.

      - $h1 = \left(\dfrac{D'}{2A'}\right)$
      - $k1 = \left(\dfrac{E'}{2C'}\right)$
      - $F1 = (F' + A'h1" + C'k1 - D'h1 - E'k1)$
      - $xcos(\alpha) + ysin(\alpha) = -h1$
      - $-xsin(\alpha) + ycos(\alpha) = -k1$
      - $A1"x^2 + C1"y^2 + F1 = 0$

   (b) 2)*caso* Na caixa de entrada digite a definição para h2, k2, assíntotas, p2.

      - $h2 = \left(\dfrac{D'}{2A'}\right)$
      - $k2 = \left(-\dfrac{F' + A'h2 - D'h2}{E}\right)$

- $xcos(\alpha) + ysin(\alpha) = -h2$
- $-xsin(\alpha) + ycos(\alpha) = k2$
- $p2 = \left(\dfrac{E'}{4A'}\right)$
- $A2"x^2 + E2"y = 0$

(c) 3)*caso* Na caixa de entrada digite a definição para h3, k3, assíntotas, p3.

- $k3 = \left(\dfrac{E'}{2C'}\right)$
- $h3 = \left(-\dfrac{F' + C'k3 - E'k3}{D'}\right)$
- $xcos(\alpha) + ysin(\alpha) = -h3$
- $-xsin(\alpha) + ycos(\alpha) = -k3$
- $p3 = \left(\dfrac{D'}{4C'}\right)$
- $C3"y^2 + D3"x = 0$

<u>Exercícios</u>

Reconheça as cônicas dadas a seguir:

(a) $3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 1 = 0$

(b) $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x - 30y + 23 = 0$

(c) $5x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$

(d) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$

(e) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0$

(f) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

(g) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 4y + 1 = 0$

Utilizando a atividade dinâmica desenvolvida no Geogebra, mova os parâmetros para identificar as cônicas.

Capítulo 2

SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

As seções seguintes relacionadas ao conceitos e definições de superfícies quádricas no estudo de geometria analítica tem como referência [1], [2], [3], [4],[5],[6], [10], [12] e [13].

2.1 Elipsóides

Os cortes do Elipsóide (Figura 2.1) é representado de forma geral pela equação

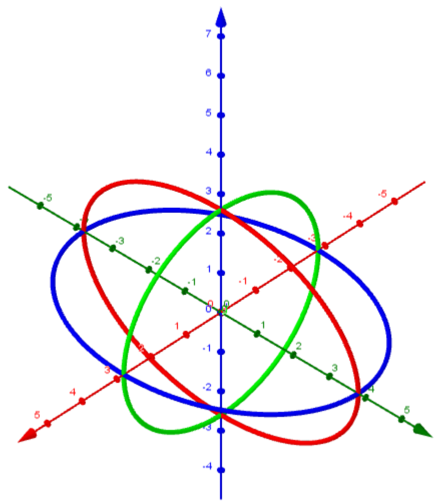
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sendo a, b e c valores reais positivos, medidas do semi-eixos do elipsóide.

- No plano xy o traço é a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$.
- No plano xz o traço é a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$.
- No plano yz o traço é a elipse $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$

As interseções do elipsóide com os planos $x = k$, $y = k$, e $z = k$, formam uma elipse.

Figura 2.1: Cortes do Elipsóide



Fonte: Autor (2019)

Parametrização dos cortes de um Elipsóide

Considere a equação abaixo:

$$\Omega_1(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Analisando os cortes ...

(a) Fazendo $x = m$. Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $x = m$ é a cônica formada pelos pontos (m, y, z) com

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ou equivalente

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2}{a^2} = \frac{a^2 - m^2}{a^2}$$

ou equivalente

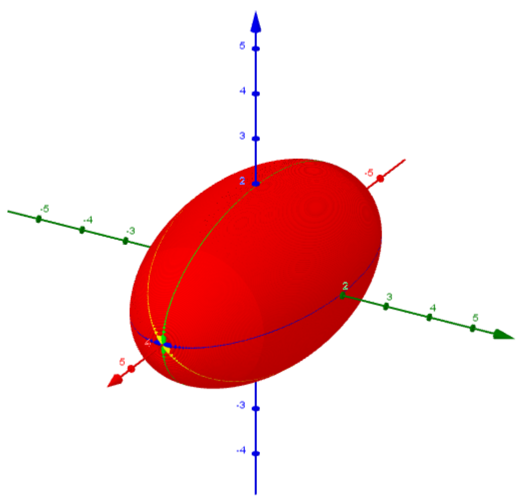
$$\frac{y^2}{\left[\frac{b\sqrt{a^2-m^2}}{a}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[\frac{c\sqrt{a^2-m^2}}{a}\right]^2}=1,\ se\ \ -a<m<a$$

que resulta em uma elipse no plano $x = m$.

A parametrização desta elipse é

$$\left(m, \frac{b\sqrt{a^2-m^2}}{a}cos(t), \frac{c\sqrt{a^2-m^2}}{a}sen(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.2: Elipsóide obtido pelos cortes $x = m$



Fonte: Autor (2019)

(b) Fazendo $y = n$. Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $y = n$ é a cônica formada pelos pontos (x, n, z) com

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ou equivalente

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{n^2}{b^2}=\frac{b^2-n^2}{b^2}$$

ou equivalente

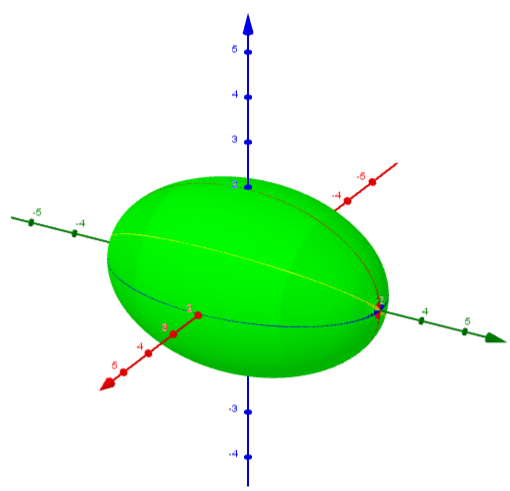
$$\frac{x^2}{\left[\dfrac{a\sqrt{b^2-n^2}}{b}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[\dfrac{c\sqrt{b^2-n^2}}{b}\right]^2}=1,\ se\ \ -b<n<b$$

que resulta em uma elipse no plano $y = n$.

A parametrização desta elipse é

$$\left(\frac{a\sqrt{b^2-n^2}}{b}cos(t), n, \frac{c\sqrt{b^2-n^2}}{b}sen(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.3: Elipsóide obtido pelos cortes $y = n$



Fonte: Autor (2019)

(c) Fazendo $z = k$. Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $z = k$ é a cônica formada pelos pontos (x, y, k) com

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ou equivalente

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}=\frac{c^2-k^2}{c^2}$$

ou equivalente

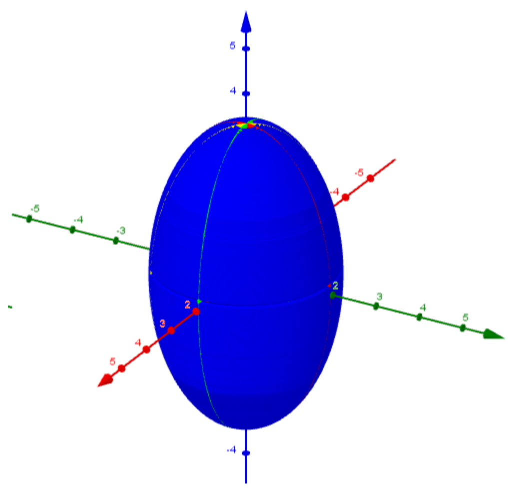
$$\frac{x^2}{\left[\dfrac{a\sqrt{c^2+k^2}}{c}\right]^2}+\frac{y^2}{\left[\dfrac{b\sqrt{c^2+k^2}}{c}\right]^2}=1$$

que é uma elipse no plano $z=k$ sem restrição para k

A parametrização desta elipse é

$$\left(\frac{a\sqrt{c^2+k^2}}{c}cos(t),\frac{b\sqrt{c^2+k^2}}{c}sen(t),k\right),t\in[0,2\pi]$$

Figura 2.4: Elipsóide obtido pelos cortes $z=k$



Fonte: Autor (2019)

2.1.1 Elipsóide de revolução

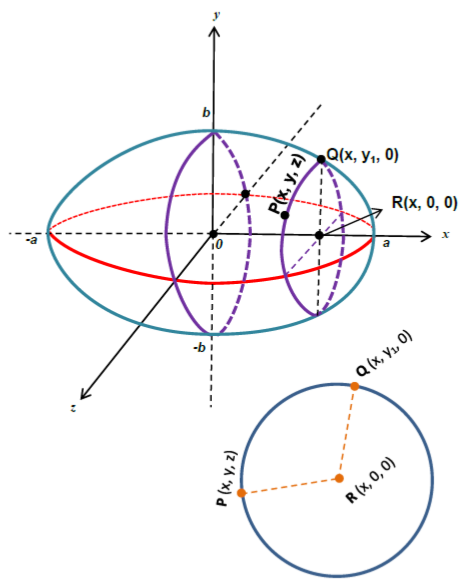
Elipsóide circular ou de revolução da elipse em torno de um de seus eixos, normalmente em torno do eixo maior.

Exemplo: Obtenha a equação e faça o esboço do gráfico da superfície gerada pela revolução da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

em torno do eixo dos x (eixo das abscissas).

Figura 2.5: Superfície gerada pela revolução da elipse



Fonte: http://professor.pucgoias.edu.br

Solução

Seja $Q(x, y_1, 0)$ um ponto pertence à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Logo,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

ou equivalente

$$1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{y_1^2}{b^2}$$

ou equivalente

$$y_1^2 = b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right). \tag{2.1}$$

Ao girar a curva (elipse) em torno do eixo dos $\mathbf{x}$, o ponto $Q(x, y_1, 0)$ descreverá uma circunferência cujo centro é o ponto $R(x, 0, 0)$.

Sendo $P(x,y,z)$ um ponto genérico dessa circunferência, tem-se que $\overline{PR} = \overline{QR} = raio$ da circunferência.

$$\overline{PR} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y_1-0)^2 + (0-0)^2} = \overline{QR}$$

logo

$$y^2 + z^2 = y_1^2. \tag{2.2}$$

Substituindo (2.1) em (2.2), vem: $y^2 + z^2 = b^2\left(\dfrac{a^2 - x^2}{a^2}\right)$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

ou equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Equação da Elipsóide de Revolução ou Circular de eixo de rotação sobre o eixo dos x.

Observação: A equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$, com $a \neq b \neq c$, representa uma elipsóide elíptica (não de revolução), com eixo sobre o eixo **x**. Quando $a = b = c$, a equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$ ou $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ representa uma superfície esférica.

2.1.2 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, onde identificamos os elementos de uma elipsóide, mostrar os cortes que podem ser feitos. Criando os parâmetros para cada elemento da elipsóide, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, divimos em três etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/v9fsxqcx`.

(a) Etapa

  i. Abra um arquivo no GeoGebra.

  ii. Crie os controles deslizantes a,b e c;

  - controle a com intervalo de 0,1 a 5.
  - controle b com intervalo de 0,1 a 5.
  - controle c com intervalo de 0,1 a 5.

  iii. Na caixa de entrada digite a equação da elipsóide.

  - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(b) Etapa (Construindo os cortes).

  i. Crie os controles deslizantes m, n e k;

  - controle m com intervalo de -a a a.
  - controle n com intervalo de -b a b.
  - controle k com intervalo de -c a c.

  ii. para $x = m$, digite na caixa de entrada a curva

  - $\left(m, \frac{b\sqrt{a^2 - m^2}}{a}.cos(t), \frac{c\sqrt{a^2 - m^2}}{a}.sen(t), t, 0, 2\pi\right)$

  iii. para $y = n$, digite na caixa de entrada a curva

  - $\left(\frac{a\sqrt{b^2 - n^2}}{b}cos(t), n, \frac{c\sqrt{b^2 - n^2}}{b}sen(t), t, 0, 2\pi\right)$

  iv. para $z = k$, digite na caixa de entrada a curva

  - $\left(\frac{a\sqrt{c^2 - k^2}}{c}cos(t), \frac{b\sqrt{c^2 - k^2}}{c}sen(t), k, t, 0, 2\pi\right)$

(c) Etapa Etapa (Movimentos de Rotação).

  i. Crie os controles deslizantes α;

  - controle α com intervalo de 0º a 360º.

  ii. Na caixa de entrada digite a equação da curva com rotação no sentido anti-horário, para $x = m$.

  - $\left(m.cos(\alpha) + \frac{c}{a\sqrt{a^2 - m^2}}.sen(t).sen(\alpha), \frac{b}{a\sqrt{a^2 - m^2}}.cos(t), -m.sen(\alpha) + \frac{c}{a\sqrt{(a^2 - m^2)}}.sen(t).cos(\alpha), t, 0, 2\pi\right)$, com uma observação na aba avançado, considere $a = c$.

iii. Na caixa de entrada digite a equação da curva com rotação no sentido anti-horário, para $y = n$

- $\left(\frac{a}{b\sqrt{b^2 - n^2}}.cos(t).cos(\alpha) + n.sen(\alpha), \frac{-a}{b\sqrt{b^2 - n^2}}.cos(t).sen(\alpha) + n.cos(\alpha), \frac{c}{b\sqrt{(b^2 - n^2)}}.sen(t), t, 0, 2\pi\right)$, com uma observação na aba avançado, considere $a = b$.

iv. Na caixa de entrada digite a equação da curva com rotação no sentido anti-horário, para $z = k$

- $\left(\frac{a}{c\sqrt{c^2 - k^2}}.cos(t), \frac{b}{c\sqrt{c^2 - k^2}}.sen(t).cos(\alpha) + k.sen(\alpha), \frac{-b}{c\sqrt{(c^2 - k^2)}}.sen(t).sen(\alpha) + k.cos(\alpha), t, 0, 2\pi\right)$, com uma observação na aba avançado, considere $b = c$.

Exercício

Utilizando a atividade desenvolvida no GeoGebra mova os parâmetros e mostre que se dois dos números a, b, c são iguais, o elipsóide é uma superfície de rotação. Identifique o eixo de rotação em cada caso.

2.2 Hiperbolóides

Os hiperbolóides são superfícies quádricas que se caracterizam por apresentar três tipos de seções planas: hiprboles, elipses (ou círculos) e retas. Sendo que as hipérboles aparecem quando realizamos dois dos três modos de obtermos seções paralelas aos planos coordenados. Isso sugere o nome hiperbolóide, embora exista outro tipo de seção. Há dois tipos de hiperbolóides: de uma folha e de duas folhas.

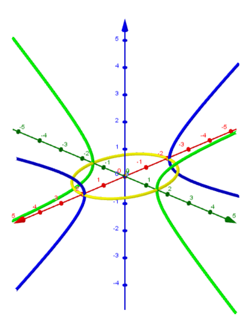
2.2.1 Hiperbolóide de uma Folha

Dados os valores reais positivos a, b, c, denominamos hiperbolóide de uma folha (Figura 2.5).Um hiperbolóide de uma folha é representado de forma geral pela equação chamada forma canônica

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, ao longo do eixo Oz.
- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, ao longo do eixo Oy.
- $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, ao longo do eixo Ox.

Para os traços nos planos $x = k$ e $y = k$, são hipérboles e o traço no plano $z = k$ é uma elipse.

Figura 2.6: Cortes do Hiperbolóide de uma folha



Fonte: Autor (2019)

Parametrização dos cortes de uma Hiperbolóide de uma Folha.

Considere a equação abaixo:

$$\Omega_1(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Analisando os cortes ...

1. Fazendo $x = m$,.

   Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $x = m$ é a cônica formada pelos pontos (m, y, z) com

   $$\frac{m^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   ou equivalente

   $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2}{a^2} = \frac{a^2 - m^2}{a^2}$$

   ou equivalente

   $$\frac{y^2}{\left[\dfrac{b\sqrt{a^2 - m^2}}{a}\right]^2} - \frac{z^2}{\left[\dfrac{c\sqrt{a^2 - m^2}}{a}\right]^2} = 1,\ se\ \ -a < m < a$$

   e

   $$-\frac{y^2}{\left[\dfrac{b\sqrt{|a^2 - m^2|}}{a}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[\dfrac{c\sqrt{|a^2 - m^2|}}{a}\right]^2} = 1,\ se\ m > a\ ou\ m < -a$$

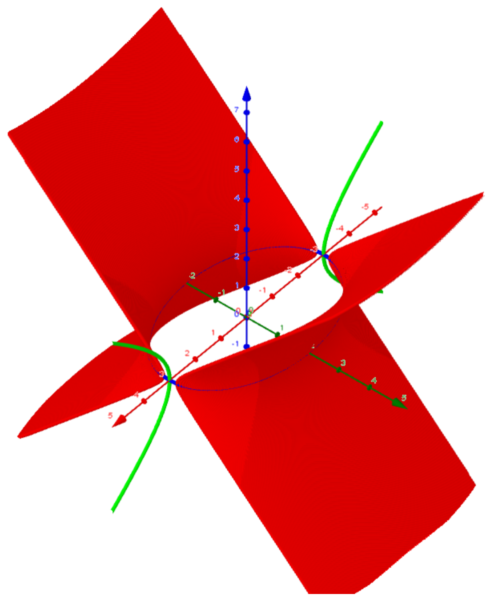
   que são hipérboles no plano $x = m$.

   As parametrizações destas hipérboles são respectivamente

   $$\left(m, \frac{b\sqrt{a^2 - m^2}}{a} sec(t), \frac{c\sqrt{a^2 - m^2}}{a} tan(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

$$\left(m2, \frac{b\sqrt{|a^2-(m2)^2|}}{a}tan(t), \frac{c\sqrt{|a^2-(m2)^2|}}{a}sec(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.7: Hiperbolóide de uma folha obtido pelos cortes $x = m$



Fonte: Autor (2019)

2. Fazendo $y = n$.

   Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $y = n$ é a cônica formada pelos pontos (x, n, z) com

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   ou equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{n^2}{b^2} = \frac{b^2 - n^2}{b^2}$$

   ou equivalente

$$\frac{x^2}{\left[\frac{a\sqrt{b^2-n^2}}{b}\right]^2} - \frac{z^2}{\left[\frac{c\sqrt{b^2-n^2}}{b}\right]^2} = 1,\ \ se\ \ -b < n < b$$

e

$$-\frac{x^2}{\left[\frac{a\sqrt{|b^2-n^2|}}{b}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[\frac{c\sqrt{|b^2-n^2|}}{b}\right]^2} = 1,\ \ se\ |n| > b$$

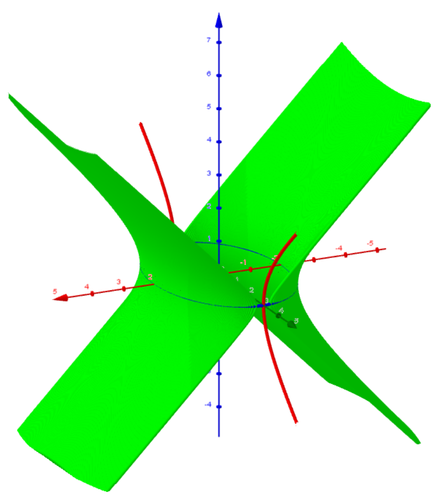
que são hipérboles no plano $y = n$

As parametrizações destas hipérboles são respectivamente

$$\left(\frac{a\sqrt{b^2-n^2}}{b}sec(t), n, \frac{c\sqrt{b^2-n^2}}{b}tan(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

$$\left(\frac{a\sqrt{|b^2-(n2)^2|}}{b}tan(t), n2, \frac{c\sqrt{|b^2-(n2)^2|}}{b}sec(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.8: Hiperbolóide de uma folha obtido pelos cortes $y = n$



Fonte: Autor (2019)

3. Fazendo $z = k$.

   Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $z = k$ é a cônica formada pelos pontos (x, y, k) com

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   ou equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} = \frac{c^2 + k^2}{c^2}$$

   ou equivalente

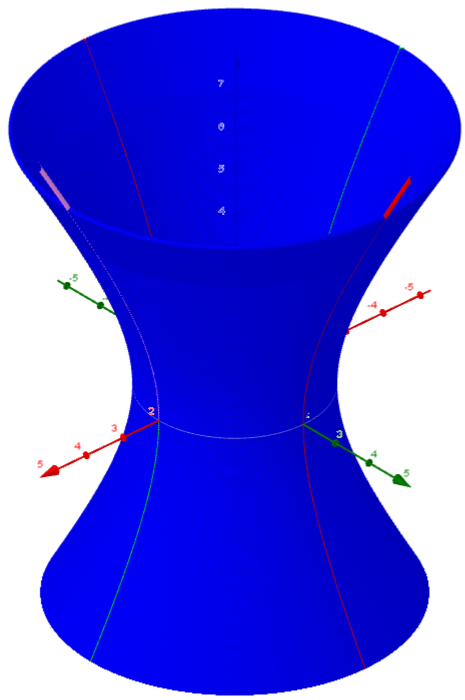
$$\frac{x^2}{\left[\dfrac{a\sqrt{c^2 + k^2}}{c}\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\dfrac{b\sqrt{c^2 + k^2}}{c}\right]^2} = 1$$

   que é uma elipse no plano $z = k$ sem restrição para k

   A parametrização desta elipse é

$$\left(\frac{a\sqrt{c^2 + k^2}}{c} sen(t), \frac{b\sqrt{c^2 + k^2}}{c} cos(t), k\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.9: Hiperbolóide de uma folha obtido pelos cortes $z = k$



Fonte: Autor (2019)

2.2.2 Hiperbolóide de uma folha de revolução

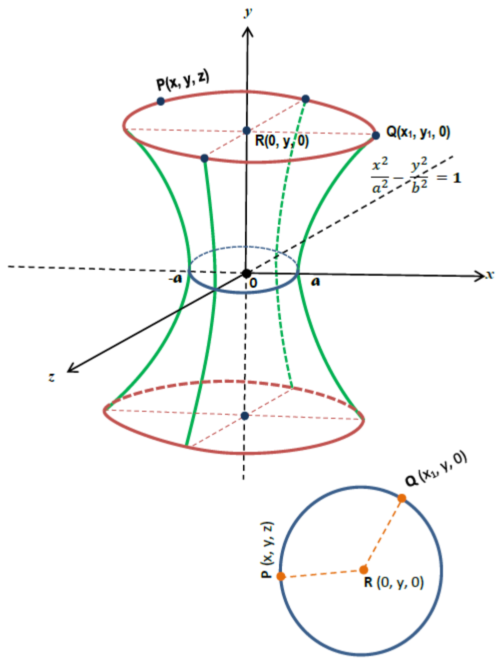
Hiperbolóide circular ou de revolução é a superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma hipérbole da forma,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

em torno de um de seus eixos, eixo transverso ou eixo conjugado, ou em torno de um dos eixos coordenados

Exemplo: Obtenha a equação e faça o esboço do gráfico da superfície gerada pela revolução da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo das ordenadas (eixo dos y).

Figura 2.10: Superfície gerada pela revolução da hipérbole



Fonte: http://professor.pucgoias.edu.br

Solução

Seja $Q(x_1, y, 0)$ um ponto pertencente à hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Logo,

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou equivalente

$$\frac{x_1^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$$

ou equivalente

$$x_1^2 = a^2\left(\frac{b^2 + y^2}{b^2}\right). \tag{2.3}$$

Ao girar a curva (hipérbole) em torno do eixo dos **y**, o ponto $Q(x_1, y, 0)$ descreverá uma circunferência cujo centro é o ponto $R(0, y, 0)$.

Sendo $P(x, y, z)$ um ponto genérico dessa circunferência, tem-se que $\overline{PR} = \overline{QR} = raio$ da circunferência.

$$\overline{PR} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x_1-0)^2 + (y-y)^2 + (0-0)^2} = \overline{QR}$$

logo

$$x^2 + z^2 = x_1^2. \tag{2.4}$$

Substituindo (2.3) em (2.4), vem: $x^2 + z^2 = a^2\left(\dfrac{b^2+y^2}{b^2}\right)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1$$

ou equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

Equação da Hiperbolóide de Revolução de 1 folhas de eixo de rotação sobre o eixo dos y.

Observação: A equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, com $a \neq b \neq c$, representa uma hiperbolóide elíptica (não de revolução) de uma folha, com eixo sobre o eixo dos **y**. Na equação hiperbólica, o termo com sinal diferente dos outros dois termos indica o eixo de rotação da superfície.

2.2.3 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, onde identificamos os elementos de um hiperbolóide de uma folha, mostrar os cortes que podem ser feitos. Criando os parâmetros para cada elemento do hiperbolóide de uma folha, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, divimos em três etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/cbh3xry4`.

1. Etapa.

    (a) Abra um arquivo no GeoGebra.

    (b) Crie os controles deslizantes a,b e c;

    - controle a com intervalo de 0,1 a 5.
    - controle b com intervalo de 0,1 a 5.
    - controle c com intervalo de 0,1 a 5.

    (c) Na caixa de entrada digite a equação do Hiporbolóide de uma Folha.

    - $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

2. Etapa (Construindo os cortes).

    (a) Crie os controles deslizantes m, n e k;

    - controle m com intervalo de -a a a.
    - controle n com intervalo de -b a b.
    - controle k com intervalo de -c a c.
    - controle m2 com intervalo -5 a 5.
    - controle n2 com intervalo -5 a 5.
    - controle α com intervalo 0^o a 360^o.

    (b) para $x = m$, digite na caixa de entrada a curva

    - $\left(m, \dfrac{b.\sqrt{a^2 - m^2}}{a}.sec(t), \dfrac{c.\sqrt{a^2 - m^2}}{a}.tan(t), t, 0, 2\pi\right)$
    - $\left(m2, \dfrac{b.\sqrt{|a^2 - m^2|}}{a}.tan(t), \dfrac{c.\sqrt{|a^2 - m^2|}}{a}.sec(t), t, 0, 2\pi\right)$

    (c) para $y = n$, digite na caixa de entrada a curva

    - $\left(\dfrac{a\sqrt{b^2 - n^2}}{b}sec(t), n, \dfrac{c\sqrt{b^2 - n^2}}{b}tan(t), t, 0, 2\pi\right)$
    - $\left(\dfrac{a\sqrt{|b^2 - n^2|}}{b}tan(t), n2, \dfrac{c\sqrt{|b^2 - n^2|}}{b}sec(t), t, 0, 2\pi\right)$

(d) para $z = k$, digite na caixa de entrada a curva

- $\left(\dfrac{a\sqrt{c^2+k^2}}{c}sen(t), \dfrac{b\sqrt{c^2+k^2}}{c}cos(t), k, t, 0, 2\pi\right)$

3. Etapa (Movimentos de Rotação).

(a) Crie os controles deslizantes α;

- controle α com intervalo de 0º a 360º.

(b) Na caixa de entrada digite a equação da curva com rotação no sentido anti-horário, para $x = m$.

- $\left(\dfrac{a\sqrt{b^2}}{b}.sec(t).cos(\alpha), \dfrac{a\sqrt{b^2}}{b}.sec(t).sen(\alpha), \dfrac{c\sqrt{(b^2)}}{b}.tan(t), t, 0, 2\pi\right)$, com uma observação na aba avançado, considere $a = b$.

<u>Exercício</u>

Utilizando a atividade desenvolvida no GeoGebra mova os parâmetros e mostre que se $a = b$, o hipérbole de uma folha é uma superfície de rotação. Qual é o de rotação?

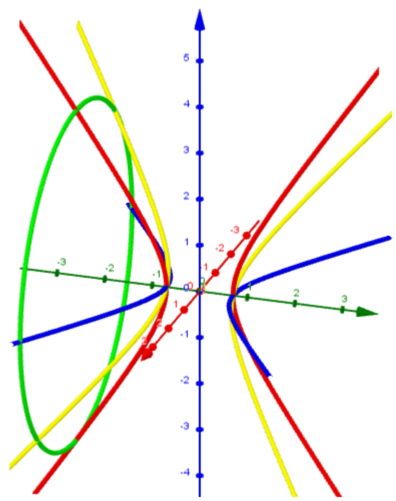
2.2.4 Hiperbolóide de duas Folhas

Dados valores reais positivos a, b, c, denominamos hiperbolóide de duas folhas (Figura 2.9).Um hiperbolóide de duas folhas é representado de forma geral pela equação chamada forma canônica

- $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, ao longo do eixo Oy.
- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, ao longo do eixo Ox.
- $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, ao longo do eixo Oz.

Para os traços nos planos $x=k$, $y=k$ e $z=k$, encontramos hipérboles, elipses, um ponto ou o conjunto vazio.

Figura 2.11: Cortes do Hiperbolóide de duas folhas



Fonte: Autor (2019)

Parametrização dos cortes de uma Hiperbolóide de duas Folhas.

Considere a equação abaixo:

$$\Omega_1(x,y,z)=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Analisando os cortes ...

1. Fazendo $x = m$. Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $x = m$ é a cônica formada pelos pontos (m, y, z) com

$$-\frac{m^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ou equivalente

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{m^2}{a^2} = \frac{a^2 + m^2}{a^2}$$

ou equivalente

$$\frac{y^2}{\left[\frac{b\sqrt{a^2+m^2}}{a}\right]^2} - \frac{z^2}{\left[\frac{c\sqrt{a^2+m^2}}{a}\right]^2} = 1, \; se \; -a < m < a$$

e

$$-\frac{y^2}{\left[\frac{b\sqrt{|a^2+m^2|}}{a}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[\frac{c\sqrt{|a^2+m^2|}}{a}\right]^2} = 1, \; se \; m > a \; ou \; m < -a$$

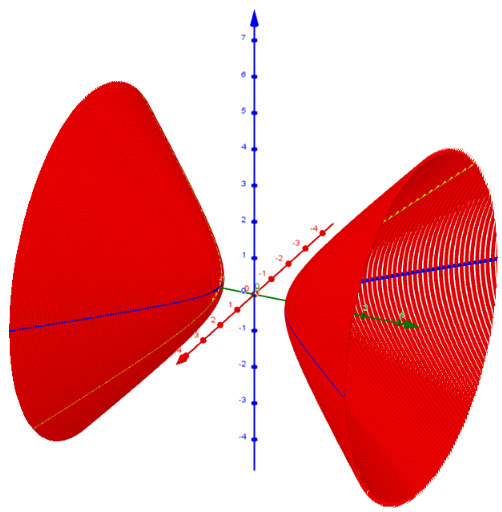
que são hipérboles no plano $x = m$.

As parametrizações destas hipérboles são respectivamente

$$\left(m, \frac{b\sqrt{a^2+m^2}}{a} sec(t), \frac{c\sqrt{a^2+m^2}}{a} tan(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

$$\left(m2, \frac{b\sqrt{|a^2+(m2)^2|}}{a} tan(t), \frac{c\sqrt{|a^2+(m2)^2|}}{a} sec(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.12: Hiperbolóide de duas folhas obtido pelos cortes $x = m$



Fonte: Autor (2019)

2. Fazendo $y = n$. Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $y = n$ é a cônica formada pelos pontos (x, n, z) com

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ou equivalente

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{n^2}{b^2} = \frac{b^2 - n^2}{b^2}$$

ou equivalente

$$-\frac{x^2}{\left[\frac{a\sqrt{b^2 - n^2}}{b}\right]^2} - \frac{z^2}{\left[\frac{c\sqrt{b^2 - n^2}}{b}\right]^2} = 1, \;\; se \;\; -b < n < b$$

e

$$\frac{x^2}{\left[\frac{a\sqrt{|b^2-n^2|}}{b}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[\frac{c\sqrt{|b^2-n^2|}}{b}\right]^2}=1,\ se\ |n|>b$$

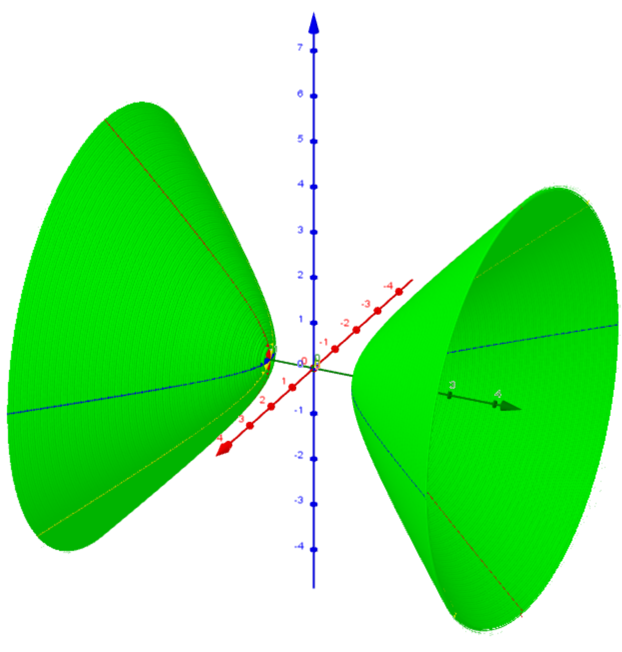
que são hipérboles no plano $y = n$

As parametrizações destas hipérboles são respectivamente

$$\left(\frac{a\sqrt{b^2-n^2}}{b}sec(t), n, \frac{c\sqrt{b^2-n^2}}{b}tan(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

$$\left(\frac{a\sqrt{|b^2-(n2)^2|}}{b}tan(t), n2, \frac{c\sqrt{|b^2-(n2)^2|}}{b}sec(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.13: Hiperbolóide de duas folhas obtido pelos cortes $y = n$



Fonte: Autor (2019)

3. Fazendo $z = k$.

Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $z = k$ é a cônica formada pelos pontos (x, y, k) com

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ou equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} = \frac{c^2 + k^2}{c^2}$$

ou equivalente

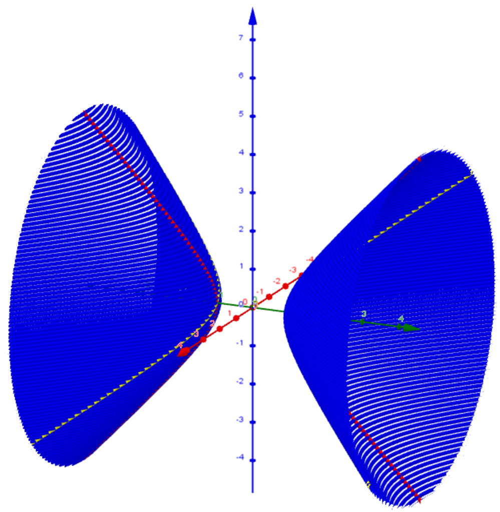
$$\frac{x^2}{\left[\frac{a\sqrt{c^2 + k^2}}{c}\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{b\sqrt{c^2 + k^2}}{c}\right]^2} = 1$$

que é uma elipse no plano $z = k$ sem restrição para k

A parametrização desta elipse é

$$\left(\frac{a\sqrt{c^2 + k^2}}{c} sen(t), \frac{b\sqrt{c^2 + k^2}}{c} cos(t), k\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.14: Hiperbolóide de duas folhas obtido pelos cortes $z = k$



Fonte: Autor (2019)

2.2.5 Hiperbolóide de duas folhas de revolução

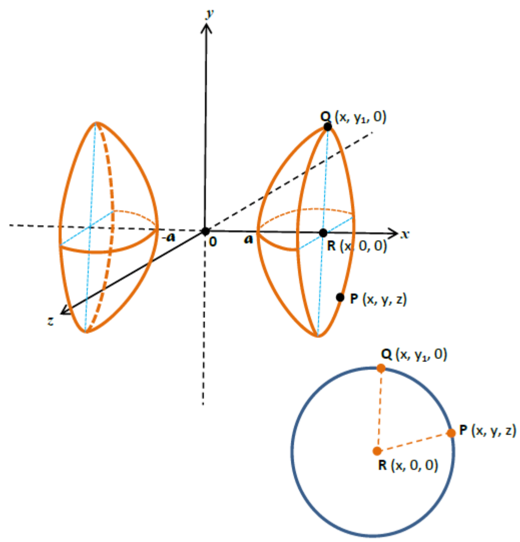
Hiperbolóide circular ou de revolução é a superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma hipérbole da forma,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

em torno de um de seus eixos, eixo transverso ou eixo conjugado, ou em torno de um dos eixos coordenados

Exemplo: Obtenha a equação e faça o esboço do gráfico da superfície gerada pela revolução da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo das abscissas (eixo dos x).

Figura 2.15: Superfície gerada pela revolução da hipérbole



Fonte: http://professor.pucgoias.edu.br

Solução

Seja $Q(x, y_1, 0)$ um ponto pertencente à hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Logo,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

ou equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y_1^2}{b^2}$$

ou equivalente

$$y_1^2 = b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right). \tag{2.5}$$

Ao girar a curva (hipérbole) em torno do eixo dos **x**, o ponto $Q(x, y_1, 0)$ descreverá uma circunferência cujo centro é o ponto $R(x, 0, 0)$.

Sendo $P(x, y, z)$ um ponto genérico dessa circunferência, tem-se que $\overline{PR} = \overline{QR} = raio$ da circunferência.

$$\overline{PR} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y_1-0)^2 + (0-0)^2} = \overline{QR}$$

logo

$$y^2 + z^2 = y_1^2. \tag{2.6}$$

Substituindo (2.5) em (2.6), vem: $y^2 + z^2 = b^2\left(\dfrac{x^2 - a^2}{a^2}\right)$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

ou equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Equação da Hiperbolóide de Revolução de 2 folhas de eixo de rotação sobre o eixo dos x.

Observação: A equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, com $a \neq b \neq c$, representa uma hiperbolóide elíptica (não de revolução) de duas folhas. com eixo sobre o eixo dos **x**. A equação $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, com $a \neq b \neq c$, representa uma hiperbolóide elíptica (não de revolução) de duas folhas. com eixo sobre o eixo dos **y**.

2.2.6 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, onde identificamos os elementos de um hiperbolóide de duas folhas, mostrar os cortes que podem ser feitos. Criando os parâmetros para cada elemento do hiperbolóide de uma folha, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, divimos em três etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/ytpqbyva`.

1. Etapa.

   (a) Abra um arquivo no GeoGebra.

   (b) Crie os controles deslizantes a,b e c;

      - controle a com intervalo de 0,1 a 5.

- controle b com intervalo de 0,1 a 5.
- controle c com intervalo de 0,1 a 5.

(c) Na caixa de entrada digite a equação do Hiporbolóide de duas Folhas.

- $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

2. Etapa (Construindo os cortes).

(a) Crie os controles deslizantes m, n e k;

- controle m com intervalo de -15 a 15.
- controle n com intervalo de -15 a 15.
- controle k com intervalo de -15 a 15.

(b) para $x = m$, digite na caixa de entrada a curva

- $\left(m, \dfrac{b.\sqrt{a^2+m^2}}{a}.sec(t), \dfrac{c.\sqrt{a^2+m^2}}{a}.tan(t), t, 0, 2\pi\right)$

(c) para $y = n$, digite na caixa de entrada a curva

- $\left(\dfrac{a\sqrt{b^2-n^2}}{b}cos(t), n, \dfrac{c\sqrt{b^2-n^2}}{b}sen(t), t, 0, 2\pi\right)$

(d) para $z = k$, digite na caixa de entrada a curva

- $\left(\dfrac{a\sqrt{c^2+k^2}}{c}tan(t), \dfrac{b\sqrt{c^2+k^2}}{c}sec(t), k, t, 0, 2\pi\right)$

3. Etapa (Movimento de Rotação).

(a) Crie os controles deslizantes α;

- controle α com intervalo de 0º a 360º.

(b) Na caixa de entrada digite a equação da curva com rotação.

- $\left(\dfrac{a\sqrt{c^2}}{c}.tan(t).cos(\alpha), \dfrac{b\sqrt{c^2}}{c}.sec(t), \dfrac{a\sqrt{(c^2)}}{c}.tan(t).sen(\alpha), t, 0, 2\pi\right)$, com uma observação na aba avançado, considere $a = c$.

<u>Exercício</u>

Utilizando a atividade desenvolvida no GeoGebra mova os parâmetros e mostre que se $a = b$, o hipérbole de duas folhas é uma superfície de rotação. Qual é o de rotação?

2.3 Parabolóides

Nos parabolóides, elas ocorrem em duas das três formas de obtermos seções (elipses, círculo e hipérboles). As parábolas são as cônicas que "mais aparecem"como seções planas num parabolóide. Um parabolóide é denominado elíptico quando suas seções são parábolas ou elipses e é denominado hiperbólico quando suas seções são parábolas e hipérboles.

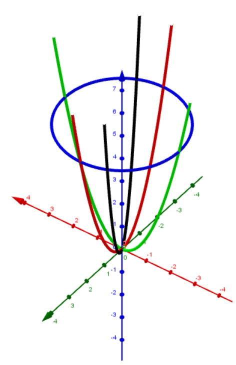
2.3.1 Parabolóide Elíptico

Sejam a e b números reais positivos (Figura 2.13).Um parabolóide elíptico é representado de forma geral pela equação chamada forma canônica

- $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, ao longo do eixo Oz.
- $y = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, ao longo do eixo Oy.
- $x = \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, ao longo do eixo Ox.

Para os traços nos planos $z = k > 0$ são elipses, nos planos $z = k < 0$ são vazios, $x = k$ e $y = k$ são parábolas.

Figura 2.16: Cortes do Parabolóide Elíptico



Fonte: Autor (2019)

Parametrização dos cortes de uma Parabolóide Elíptico.

Considere a equação abaixo:

$$\Omega_1(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

Analisando os cortes ...

1. Fazendo $x = m$.

   Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $x = m$ é a cônica formada pelos pontos (m, y, z) com

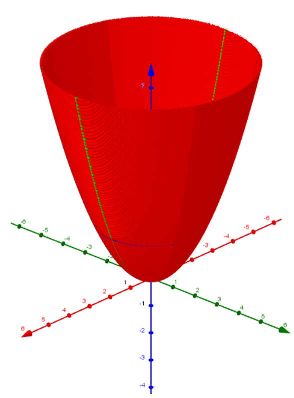
   $$z = \frac{m^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

   que resulta em parábolas no plano $x = m$.

   A parametrização desta parábola é

   $$\left(m, t, \frac{t^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2}\right), t \in R$$

Figura 2.17: Parabolóide Elíptico obtido pelos cortes $x = m$



Fonte: Autor (2019)

2. Fazendo $y = n$.

   Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $y = n$ é a cônica formada pelos pontos (x, n, z) com

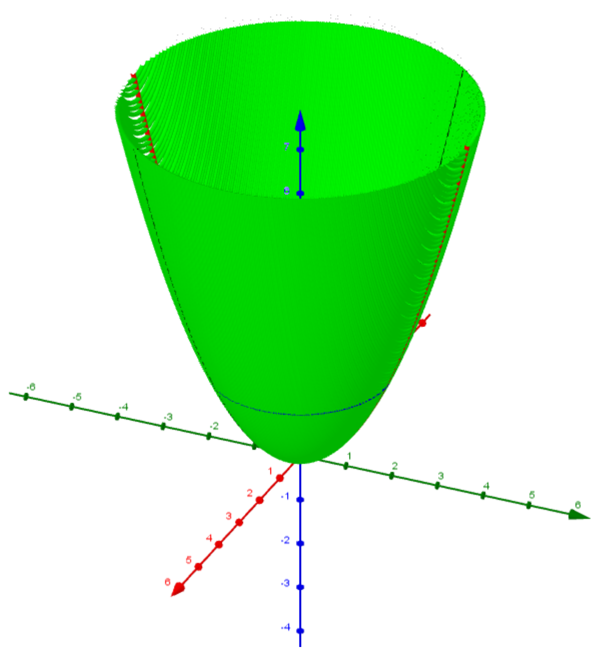
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}$$

   que resulta em parábolas no plano $y = n$.

   A parametrização desta parábola é

$$\left(t, n, \frac{t^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right), t \in R$$

Figura 2.18: Parabolóide Elíptico obtido pelos cortes $y = n$



Fonte: Autor (2019)

3. Fazendo $z = k$.

   Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $z = k$ é a cônica formada pelos pontos (x, y, k) com

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   ou equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} = \frac{c^2 + k^2}{c^2}$$

   ou equivalente

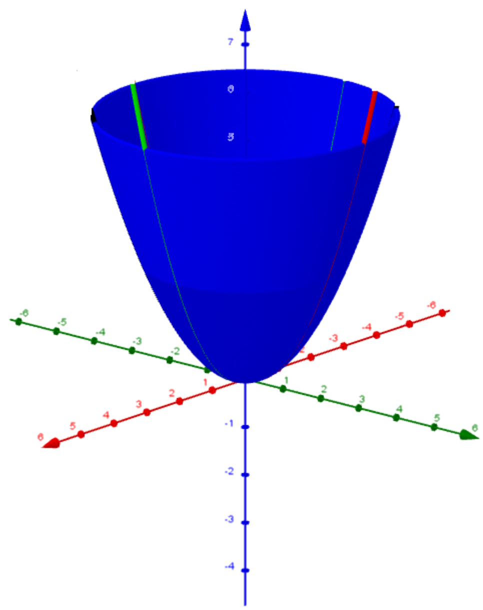
$$\frac{x^2}{\left[\dfrac{a\sqrt{c^2 + k^2}}{c}\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\dfrac{b\sqrt{c^2 + k^2}}{c}\right]^2} = 1$$

   que é uma elipse no plano $z = k$ sem restrição para k

   A parametrização desta elipse é

$$\left(\frac{a\sqrt{c^2 + k^2}}{c} sen(t), \frac{b\sqrt{c^2 + k^2}}{c} cos(t), k\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.19: Parabolóide Elíptico obtido pelos cortes $z = k$



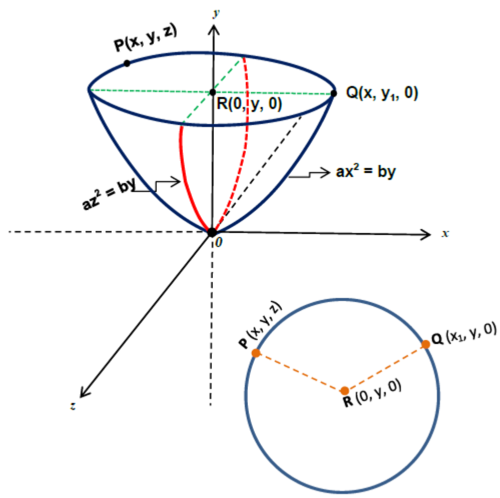
Fonte: Autor (2019)

2.3.2 Parabolóide de Revolução

Parabolóide circular ou de revolução é a superfície gerada pela rotação ou revolução de uma parábola em torno do seu eixo de simetria.

Exemplo: Obtenha a equação e faça o esboço do gráfico da superfície gerada pela revolução da parábola $ax^2 = by$ em torno do eixo dos $\mathbf{y}$ (eixo das ordenadas).

Figura 2.20: Superfície gerada pela revolução da parábola



Fonte: http://professor.pucgoias.edu.br

Solução

Seja $Q(x_1, y, 0)$ um ponto pertencente à parábola $ax^2 = by$. Logo,

$$ax_1^2 = by$$

ou equivalente

$$x_1^2 = \frac{by}{a}. \tag{2.7}$$

Ao girar a curva (parábola) em torno do eixo dos $\mathbf{y}$, o ponto $Q(x_1, y, 0)$ descreverá uma circunferência cujo centro é o ponto $R(0, y, 0)$.

Sendo $P(x, y, z)$ um ponto genérico dessa circunferência, tem-se que $\overline{PR} = \overline{QR} = raio$ da circunferência.

$$\overline{PR} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x_1-0)^2 + (y-y)^2 + (0-0)^2} = \overline{QR}$$

logo

$$x^2 + z^2 = x_1^2. \tag{2.8}$$

Substituindo (2.7) em (2.8), vem: $x^2 + z^2 = \dfrac{by}{a}$

$$ax^2 + az^2 = by$$

Equação da Parabolóide de revolução ou circular de eixo de rotação sobre o eixo dos y.

Observação: A equação $ax^2 + cz^2 = by$, com $a \neq c$, representa uma parabolóide elíptica (não de revolução), com eixo sobre o eixo dos y.

2.3.3 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, onde identificamos os elementos de um parabolóide Elíptico , mostrar os cortes que podem ser feitos. Criando os parâmetros para cada elemento do parabolóide elíptico, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, divimos em três etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/sh8fra88`.

1. Etapa.

   (a) Abra um arquivo no GeoGebra.

   (b) Crie os controles deslizantes a e b;

      - controle a com intervalo de 0,1 a 5.
      - controle b com intervalo de 0,1 a 5.

   (c) Na caixa de entrada digite a equação do parabolóide elíptico.

      - $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

2. Etapa (Construindo os cortes).

   (a) Crie os controles deslizantes m, n e k;

      - controle m com intervalo de -5 a 5.

- controle n com intervalo de -5 a 5.
- controle k com intervalo de 0 a 5,5.

(b) para $x = m$, digite na caixa de entrada a curva

- $\left(m, t, \dfrac{t^2}{b^2} + \dfrac{m^2}{a^2}, t, -5, 5\right)$

(c) para $y = n$, digite na caixa de entrada a curva

- $\left(t, n, \dfrac{t^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}, t, -5, 5\right)$

(d) para $z = k$, digite na caixa de entrada a curva

- $\left(\sqrt{k}.a.cos(t), \sqrt{k}.b.sen(t), k, t, 0, 2\pi\right)$

3. Etapa (Movimento de Rotação).

(a) Crie os controles deslizantes α;

- controle α com intervalo de 0º a 360º.

(b) Na caixa de entrada digite a equação da curva com rotação.

- $\left(-t.sen(\alpha), t.cos(\alpha), \dfrac{t^2}{a^2}, t, -5, 5, t, 0, 2\pi\right)$, com uma observação na aba avançado, considere $a = b$.

<u>Exercício</u>

Utilizando a atividade desenvolvida no GeoGebra mova os parâmetros e mostre que se $a = b$, o parabolóide elíptico é uma superfície de rotação. Qual é o de rotação?

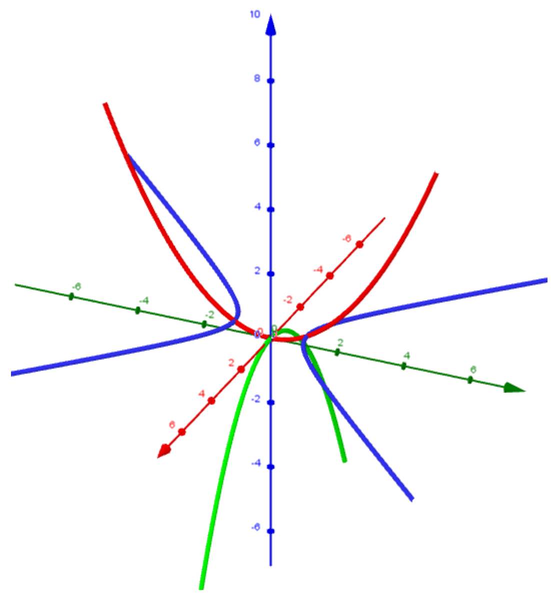
2.3.4 Parabolóide Hiperbólico

Sejam a e b números reais positivos (Figura 2.17).Um parabolóide hiperbólico é representado de forma geral pela equação chamada forma canônica

- $z = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2}$, ao longo do eixo Oz.
- $y = \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2}$, ao longo do eixo Oy.
- $x = \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$, ao longo do eixo Ox.

Para os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas e no plano $z = k$ são hipérboles.

Figura 2.21: Cortes do Parabolóide Hiperbólico



Fonte: Autor (2019)

Parametrização dos cortes de uma Parabolóide Hiperbólico.

Considere a equação abaixo:

$$\Omega_1(x, y, z) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = z$$

Analisando os cortes ...

1. Fazendo $x = m$. Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $x = m$ é a cônica formada pelos pontos (m, y, z) com

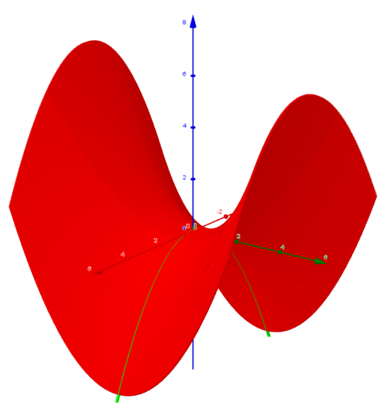
   $$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{m^2}{a^2}$$

   que resulta em parábolas no plano $x = m$.

   A parametrização desta parábola é

   $$\left(m, t, \frac{t^2}{b^2} - \frac{m^2}{a^2}\right), t \in R$$

Figura 2.22: Parabolóide Hiperbólico obtido pelos cortes $x = m$



Fonte: Autor (2019)

2. Fazendo $y = n$. Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $y = n$ é a cônica formada pelos pontos (x, n, z) com

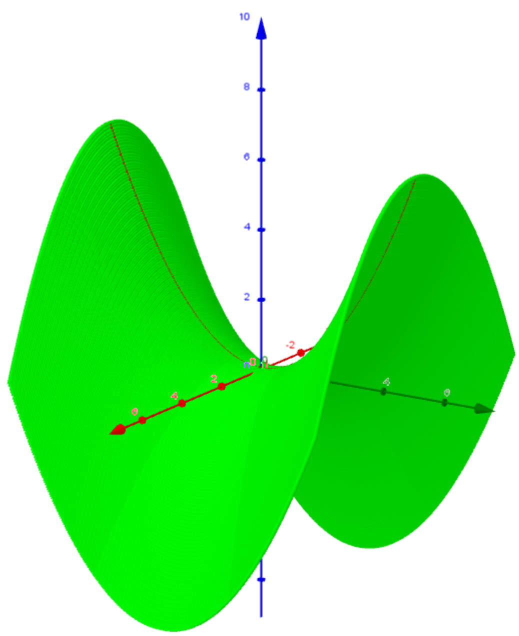
$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

que resulta em parábolas no plano $y = n$.

A parametrização desta parábola é

$$\left(t, n, \frac{n^2}{b^2} - \frac{t^2}{a^2}\right), t \in R$$

Figura 2.23: Parabolóide Hiperbólico obtido pelos cortes $y = n$



Fonte: Autor (2019)

3. Fazendo $z = k$. Fazendo $z = k$, temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $z = k$ é a cônica formada pelos pontos (x, y, k) com

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

ou equivalente

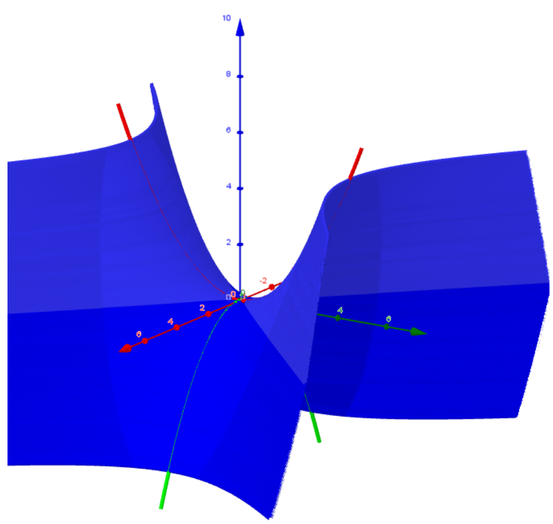
$$k = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

que é uma hepérbole no plano $z = k$ sem restrição para k

A parametrização desta hipérbole é

$$\left(-\sqrt{k}acos(t), \sqrt{k}bsen(t), k\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.24: Parabolóide Hiperbólico obtido pelos cortes $z = k$



Fonte: Autor (2019)

2.3.5 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, onde identificamos os elementos de um parabolóide Hiperbólico, mostrar os cortes que podem ser feitos. Criando os parâmetros para cada elemento do parabolóide hiperbólico, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, divimos em duas etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/h7twqfzg`.

1. Etapa.

   (a) Abra um arquivo no GeoGebra.

   (b) Crie os controles deslizantes a e b;

   - controle a com intervalo de 0,1 a 5.
   - controle b com intervalo de 0,1 a 5.

   (c) Na caixa de entrada digite a equação do parabolóide hiperbólico.

   - $z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

2. Etapa (Construindo os cortes).

   (a) Crie os controles deslizantes m, n e k;

   - controle m com intervalo de -4,5 a 4,5.
   - controle n com intervalo de -5 a 5.
   - controle k com intervalo de -5 a 5.

   (b) para $x = m$, digite na caixa de entrada a curva.

   - $\left(m, t, \dfrac{t^2}{b^2} - \dfrac{m^2}{a^2}, t, -5, 5\right)$

   (c) para $y = n$, digite na caixa de entrada a curva.

   - $\left(t, n, -\dfrac{t^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}, t, -5, 5\right)$

(d) para $z = k$, digite na caixa de entrada a curva

- $\left(-\sqrt{k}.a.tan(t), \sqrt{k}.b.sec(t), k, t, 0, 2\pi\right)$, com uma observação na aba avançado, considere $k > 0$.
- $\left(-\sqrt{|k|}.a.sec(t), \sqrt{|k|}.b.tan(t), k, t, 0, 2\pi\right)$, com uma observação na aba avançado, considere $k < 0$.

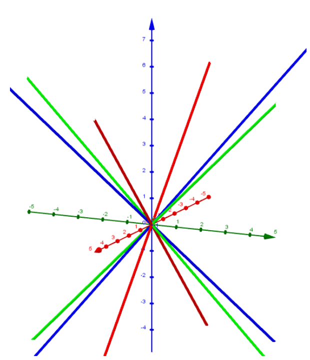
2.4 Cone Elíptico

Considere uma reta g no plano yz, com $z = my$, $x = 0$. Rotacionando esta reta em torno do eixo Oz, encontramos uma superficie cônica circular (Figura 2.21). Uma superfície cônica elíptica é representada de forma geral pela equação

- $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, ao longo do eixo Oz.
- $y^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, ao longo do eixo Oy.
- $x^2 = \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, ao longo do eixo Ox.

Para o traço no plano xy em $z = k$ são elipses, nos planos $x = k$ ou $y = k$ são hipérboles.

Figura 2.25: Cone Elíptico obtido pelas rotações de retas



Fonte: Autor (2019)

Parametrização dos cortes de um cone elíptico.

Considere a equação abaixo:

$$\Omega_1(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Analisando os cortes ...

(a) Fazendo $x = m$.

Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $x = m$ é a cônica formada pelos pontos (m, y, z) com

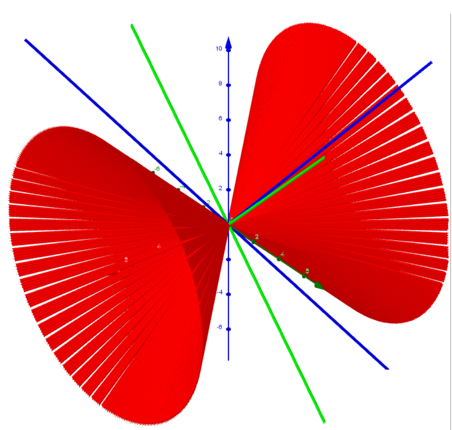
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{m^2}{a^2}$$

que resulta em hipérboles no plano $x = m$.

A parametrização desta hipérbole é

$$\left(m, \frac{bm}{a}sec(t), \frac{cm}{b}tan(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.26: Cone Elíptico obtido pelas rotações de retas $x = m$



Fonte: Autor (2019)

(b) Fazendo $y = n$.

Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $y = n$ é a cônica formada pelos pontos (x, n, z) com

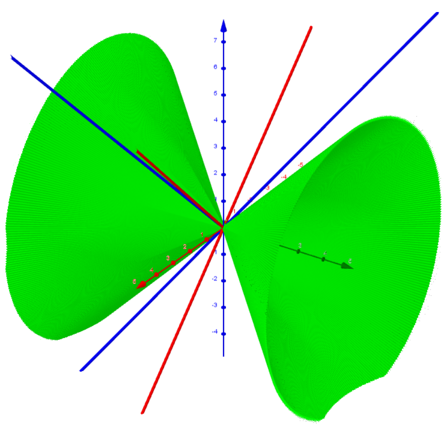
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{n^2}{b^2}$$

que resulta em hipérboles no plano $y = n$.

A parametrização desta hipérbole é

$$\left(\frac{an}{b}tan(t), n, \frac{cn}{b}sec(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.27: Cone Elíptico obtido pelas rotações de retas $y = n$



Fonte: Autor (2019)

(c) Fazendo $z = k$.

Temos que a interseção da quádrica Ω_1 e o plano $z = k$ é a cônica formada pelos pontos (x, y, k) com

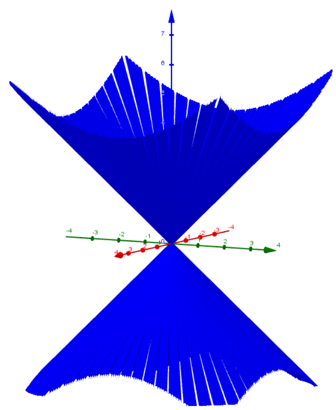
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$$

que resulta em elipses no plano $z = k$.

A parametrização desta elipse é

$$\left(\frac{ak}{c}cos(t), \frac{bk}{c}sen(t), k\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.28: Cone Elíptico obtido pelas rotações de retas $z = k$



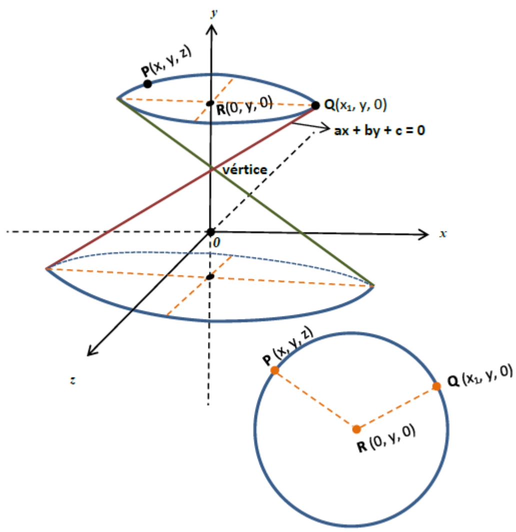
Fonte: Autor (2019)

2.4.1 Superfície de revolução

Superfície cônica ou simplesmente cone é a superfície gerada por uma reta que gira em torno de um dos eixos coordenados, passando sempre por um mesmo ponto, denominado de vértice da superfície cônica.

Exemplo: Obtenha a equação e faça o esboço do gráfico da superfície gerada pela revolução da reta $(r) : ax + by + c = 0$ em torno do eixo dos **y** (eixo das ordenadas).

Figura 2.29: Superfície gerada pela revolução da reta



Fonte: http://professor.pucgoias.edu.br

Solução Seja $Q(x_1, y, 0)$ um ponto pertencente à reta $(r) : ax + by = 0$. Desta forma, $(r) : ax_1 + by = 0$

ou equivalente

$$x_1 = -\frac{by}{a} \tag{2.9}$$

Ao girar a curva (reta) em torno do eixo dos **y**, o ponto $Q(x_1, y, 0)$ descreverá uma circunferência cujo centro é o ponto $R(0, y, 0)$.

Sendo $P(x, y, z)$ um ponto genérico dessa circunferência, tem-se que $\overline{PR} = \overline{QR} = raio$ da circunferência.

$$\overline{PR} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x_1-0)^2 + (y-y)^2 + (0-0)^2} = \overline{QR}$$

logo

$$x^2 + z^2 = x_1^2. \tag{2.10}$$

Substituindo (2.9) em (2.10), vem: $x^2 + z^2 = \left(-\dfrac{by}{a}^2\right)$

$$a^2x^2 + a^2z^2 = (by)^2$$

ou equivalente

$$a^2x^2 + a^2z^2 - (by)^2 = 0$$

Equação da Superfície Cônica de Revolução ou Circular.

Observação: A equação $ax^2 + bz^2 = 0$, com $a \neq b$, representa uma superfície cônica (ou simplesmente cone) não de revolução, ou seja, uma superfície cônica elíptica com vértice na origem $O(0, 0, 0)$

2.4.2 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, onde identificamos os elementos de um Cone Elíptico , mostrar os cortes que podem ser feitos. Criando os parâmetros para cada elemento do cone elíptico, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, divimos em duas etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/md5as3zz`.

Etapa.

(a) Abra um arquivo no GeoGebra.

(b) Crie os controles deslizantes α, β e γ;

- controle α com intervalo de 0^o a 360^o.
- controle β com intervalo de 0^o a 360^o.
- controle γ com intervalo de 0^oa 360^o

Etapa (Construindo as rotações).

(a) em torno do eixo x, digite na caixa de entrada a curva

- $\left(t, -t.sen(\beta), t.cos(\beta), t, -10, 10\right)$
- $\left(t, t.sen(\beta), -t.cos(\beta), t, -10, 10\right)$

(b) em torno do eixo y, digite na caixa de entrada a curva

- $\left(-t.sen(\gamma), t, t.cos(\gamma), t, -10, 10,\right)$
- $\left(t.sen(\gamma), t, -t.cos(\gamma), t, -10, 10,\right)$

(c) em torno do eixo z, digite na caixa de entrada a curva

- $\left(-t.sen(\alpha), t.cos(\alpha), t, t, -10, 10\right)$
- $\left(t.sen(\alpha), -t.cos(\alpha), t, t, -10, 10\right)$

<u>Exercício</u>

Utilizando a atividade desenvolvida no GeoGebra mova os parâmetros e represente o cone elíptico dado pela equação $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{3}$

2.5 Quádricas cilindricas

2.5.1 Geratriz elipse

Quádrica cilíndrica geratriz elipse.

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, variável livre z.
- $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, variável livre x.
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, variável livre y.

<u>Parametrização dos cortes de uma quádrica cilíndrica.</u>

Analisando os cortes ...

(a) Fazendo $x = m$.

Temos que a geratriz da quádrica cilíndrica é uma elipse formada pelos pontos (m, y, z) com

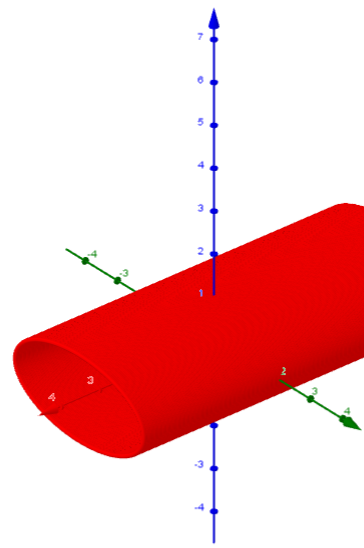
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que resulta em elipses no plano $x = m$.

A parametrização desta elipse é

$$\Bigg(m, a.sen(t), b.cos(t)\Bigg), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.30: Quádrica Cilíndrica geratriz Elipse $x = m$



Fonte: Autor (2019)

(b) Fazendo $y = n$.

Temos que a geratriz da quádrica cilíndrica é uma elipse formada pelos pontos (x, n, z) com

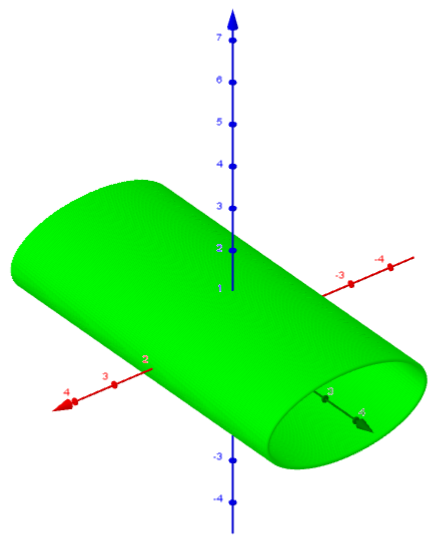
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que resulta em elipses no plano $y = n$.

A parametrização desta elipse é

$$\left(a.cos(t), n, b.sen(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.31: Quádrica Cilíndrica geratriz Elipse $y = n$



Fonte: Autor (2019)

(c) Fazendo $z = k$.

Temos que a geratriz da quádrica cilíndrica é uma elipse formada pelos pontos (x, y, k) com

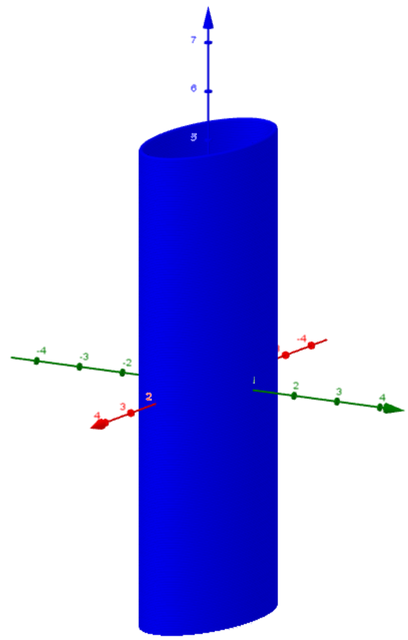
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que resulta em elipses no plano $z = k$.

A parametrização desta elipses é

$$\left(a.cos(t), b.sen(t), k\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.32: Quádrica Cilíndrica geratriz Elipse $z = k$



Fonte: Autor (2019)

2.5.2 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, onde identificamos os elementos de uma Quádrica Cilíndrica elíptica, mostrar as elipses ao longo dos eixos. Criando os parâmetros para cada elemento da quádrica cilíndrica, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, divimos em duas etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/wkfnkdfb`.

Etapa.

(a) Abra um arquivo no GeoGebra.

(b) Crie os controles deslizantes a e b;

- controle a com intervalo de 0,1 a 5.

- controle b com intervalo de 0,1 a 5.

3. Etapa (Construindo a geratriz).

    (a) Crie os controles deslizantes m, n e k;

    - controle m com intervalo de -5 a 5.
    - controle n com intervalo de -5 a 5.
    - controle k com intervalo de -5 a 5.

    (b) para $x = m$, digite na caixa de entrada a curva

    - $\left(m, a.sen(t), b.cos(t), t, 0, 2\pi\right)$

    (c) para $y = n$, digite na caixa de entrada a curva

    - $\left(a.cos(t), n, b.sen(t), t, 0, 2\pi\right)$

    (d) para $z = k$, digite na caixa de entrada a curva

    - $\left(a.cos(t), b.sen(t), k, t, 0, 2\pi\right)$

2.5.3 Geratriz hipérboles

Quádrica cilíndrica geratriz hipérboles

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, variável livre z.
- $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, variável livre x.
- $\dfrac{x^2}{a^2} = z$, variável livre y.

Parametrização dos cortes de uma quádrica cilíndrica.

Analisando os cortes ...

1. Fazendo $x = m$.

   Temos que a geratriz da quádrica cilíndrica é uma hipérbole formada pelos pontos (m, y, z) com

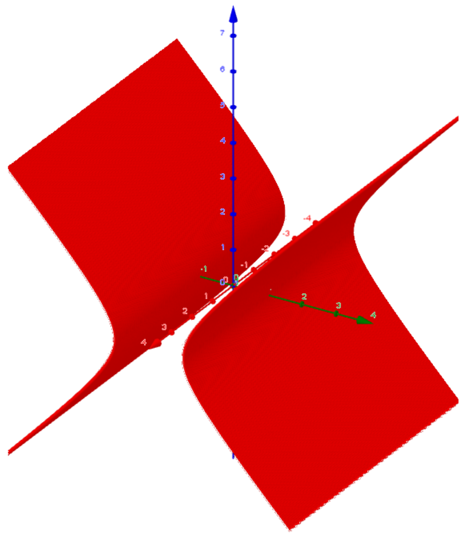
   $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   que resulta em hipérboles no plano $x = m$.

   A parametrização desta hipérbole é

   $$\left(m, a.sec(t), b.tan(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.33: Quádrica Cilíndrica geratriz Hipérbole $x = m$



Fonte: Autor (2019)

2. Fazendo $y = n$.

   Temos que a geratriz da quádrica cilíndrica é uma hipérbole formada pelos pontos (x, n, z) com

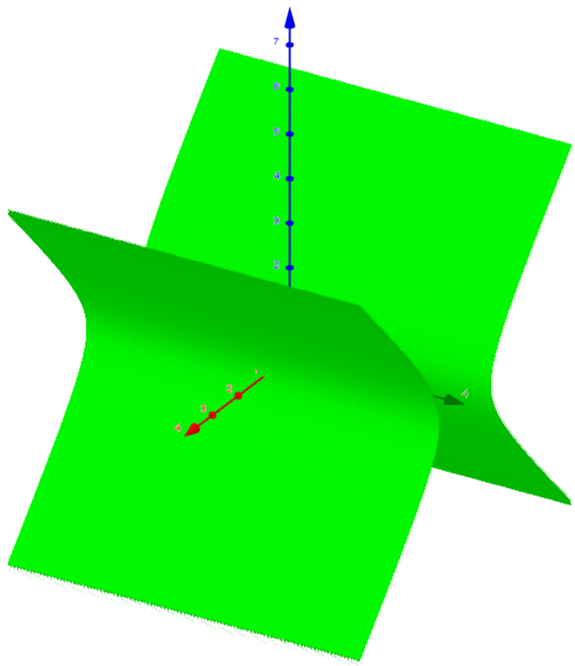
$$\frac{x^2}{a^2} = z$$

   que resulta em hipérboles no plano $y = n$.

   A parametrização desta hipérbole é

$$\left(a.sec(t), n, b.tan(t)\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.34: Quádrica Cilíndrica geratriz Hipérbole $y = n$



Fonte: Autor (2019)

3. Fazendo $z = k$.

   Temos que a geratriz da quádrica cilíndrica é uma hipérbole formada pelos pontos (x, y, k) com

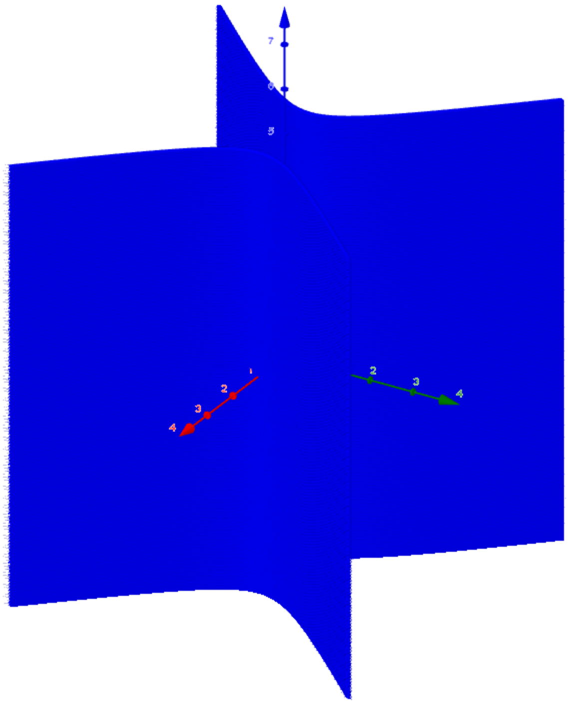
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   que resulta em hipérboles no plano $z = k$.

   A parametrização desta hipérbole é

$$\left(a.sec(t), b.tan(t), k\right), t \in [0, 2\pi]$$

Figura 2.35: Quádrica Cilíndrica geratriz Hipérbole $z = k$



Fonte: Autor (2019)

2.5.4 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, onde identificamos os elementos de uma Quádrica Cilíndrica, mostrar as hipérboles ao longo dos eixos. Criando os parâmetros para cada elemento da quádrica cilíndrica, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, divimos em duas etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/begm2jhn`.

1. Etapa.

    (a) Abra um arquivo no GeoGebra.

    (b) Crie os controles deslizantes a e b;

    - controle a com intervalo de 0,1 a 5.

- controle b com intervalo de 0,1 a 5.

2. Etapa (Construindo a geratriz).

   (a) Crie os controles deslizantes m, n e k;

   - controle m com intervalo de -5 a 5.
   - controle n com intervalo de -5 a 5.
   - controle k com intervalo de -5 a 5.

   (b) para $x = m$, digite na caixa de entrada a curva

   - $\left(m, a.sec(t), b.tan(t), t, 0, 2\pi\right)$

   (c) para $y = n$, digite na caixa de entrada a curva

   - $\left(a.sec(t), n, b.tg(t), t, 0, 2\pi\right)$

   (d) para $z = k$, digite na caixa de entrada a curva

   - $\left(a.sec(t), b.tan(t), k, t, 0, 2\pi\right)$

2.5.5 Geratriz parábola

Quádrica cilíndrica geratriz parábola

- $4px = y^2$, ao longo do eixo z.
- $4py = z^2$, ao longo do eixo x.
- $4px = z^2$, ao longo do eixo y.

<u>**Parametrização dos cortes de uma quádrica cilíndrica.**</u>

Analisando os cortes ...

1. Fazendo $x = A$.

   Temos que a geratriz da quádrica cilíndrica é uma parábola ao longo do eixo x

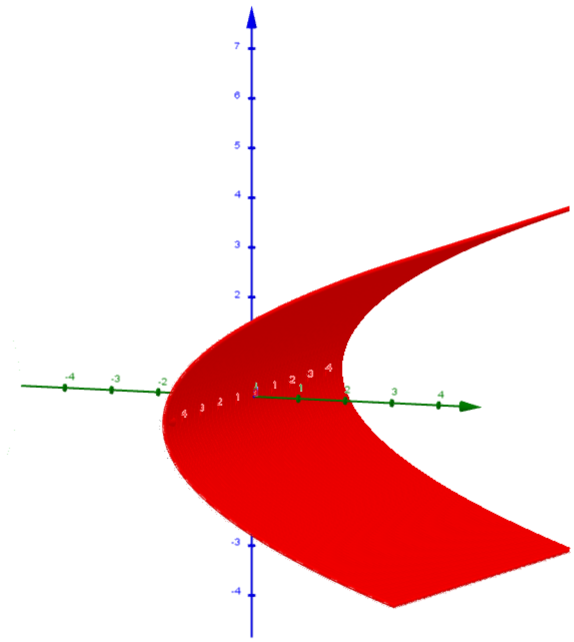
$$4py = z^2$$

   que resulta em parábolas ao longo do eixo x.

   A parametrização desta parábola é

$$\left(A, \frac{t^2}{4p}, t, -10, 10\right)$$

Figura 2.36: Quádrica Cilíndrica geratriz Parábola $x = A$



Fonte: Autor (2019)

2. Fazendo $y = B$.

   Temos que a geratriz da quádrica cilíndrica é uma parábola ao longo do eixo y

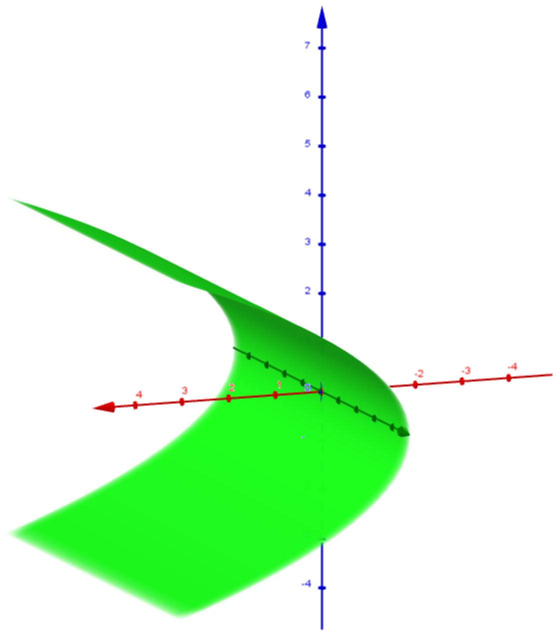
$$4px = z^2$$

   que resulta em parábolas ao longo do eixo y.

   A parametrização desta parábola é

$$\left(\frac{t^2}{4p}, B, t, -10, 10\right)$$

Figura 2.37: Quádrica Cilíndrica geratriz Parábola $y = B$



Fonte: Autor (2019)

3. Fazendo $z = C$.

   Temos que a geratriz da quádrica cilíndrica é uma parábola ao longo do eixo z

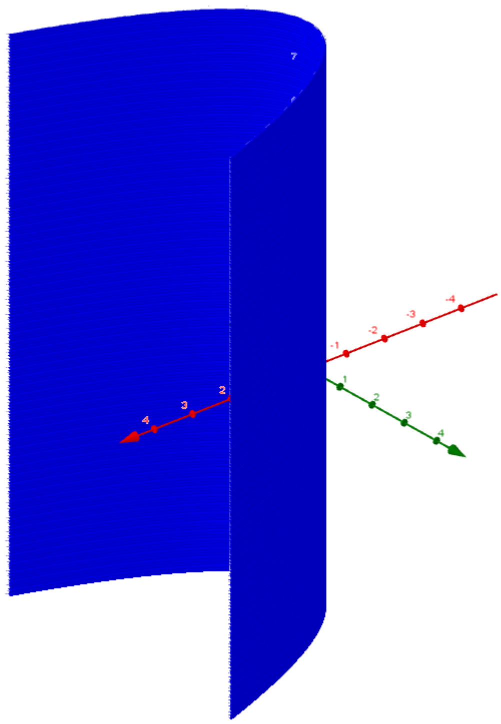
$$4px = y^2$$

   que resulta em parábolas ao longo do eixo $z = k$.

   A parametrização desta parábola é

$$\left(\frac{t^2}{4p}, t, C, -10, 10\right)$$

Figura 2.38: Quádrica Cilíndrica geratriz Parábola $z = C$



Fonte: Autor (2019)

2.5.6 Atividade dinâmica no GeoGebra

O objetivo desta atividade, é mostrar para aluno, onde identificamos os elementos de uma Quádrica Cilíndrica parabólica, mostrar as parábolas ao longo dos eixos. Criando os parâmetros para cada elemento da quádrica cilíndrica, com o mouse, deslocando-se os elementos, temos o efeito dinâmico. Para criação desta atividade, divimos em duas etapas, cada uma com os seguintes passos. Atividade dinâmica está disponível no endereço eletrônico `https://ggbm.at/sbvn5mta`.

Etapa.

1. Abra um arquivo no GeoGebra.

2. Crie os controles deslizantes p, A, B e C;

- controle p com intervalo de -20 a 20.
- controle A com intervalo de -10 a 10.
- controle B com intervalo de -10 a 10.
- controle C com intervalo de -10 a 10.

Etapa (Construindo a geratriz).

1. Digite a equação da parábola, ao longo do eixos;

   - eixo $x \to 4py = z^2$.
   - eixo $y \to 4px = z^2$.
   - eixo $z \to 4px = y^2$.

2. digite na caixa de entrada a parametrização para cada curva

   - $x = A \to \left(A, \dfrac{t^2}{4p}, t, -10, 10\right)$
   - $y = B \to \left(\dfrac{t^2}{4p}, B, t, -10, 10\right)$
   - $z = C \to \left(\dfrac{t^2}{4p}, t, C, t, -10, 10\right)$

<u>Exercícios</u>

Utilizando a atividade desenvolvida no GeoGebra mova os parâmetros e identifique as superfícies expressas pelas equações nos intervalos dados.

1. $x^2 = 2z, -3 \leq y \leq 5$
2. $y^2 + 4z^2 - 4 = 0, -4 \leq x \leq 6$
3. $y^2 - x^2 = 16, 0 \leq z \leq 4$
4. $z = 9 - y^2, -4 \leq x \leq 4$

CONCLUSÃO

Nesta pesquisa a principal finalidade foi aprimorar o ensino aprendizagem de Geometria Analítica, com a utilização do software gratuito GeoGebra, com todas as orientações metodológicas para a construção de cada atividade mostrada neste trabalho acadêmico. Por esta perspectiva, a utilização dessa ferramenta servirá, em futuro próximo, como um dos recursos pedagógicos para profissionais da educação com o intuito de enriquecer conhecimentos, e dar liberdade ao docente em criar aulas dinâmicas e desvencilhar- mesmo que parcialmente- do método tradicional de ensino. Com essas novas ferramentas de ensino, o foco principal foi de podermos atingir pontos positivos na educação e consolidar o interesse no ensino de Matemática, além de aperfeiçoar a formação do corpo docente. Os lecionadores e discentes podem utilizar o software gratuito na internet, do qual facilitará o aprendizado das atividades desenvolvidas e justificadas neste trabalho. Em todos os capítulos foram realizadas todas as construções de forma efetiva e didática, em forma gradativa e teórica, de cada atividade dinâmica sobre cônica e superfície quádrica desenvolvida no software Geogebra. Esta tese teve como relevância acadêmica aprimorar o conhecimento sobre novas ferramentas de software disponíveis via on-line, além de expandir e otimizar o caminho para o aprendizado de discentes, tanto no Ensino Médio quanto no Superior. Por conseguinte, poderemos ter uma melhor formação docente e aprendizagem de novas atividades de cônicas e superfícies quádricas, que auxiliará o docente no processo de ensino referente a Geometria Analítica, obtendo, talvez, melhores resultados e desempenhos no processo de ensino de Matemática através de aulas dinâmicas e práticas por meio do grupo estudantil.

Bibliografia

[1] STEINBRUCH, A. E WINTERLE, P. *Geometria Analítica*. Makron Books do Brasil. São Paulo, 2000.

[2] IEZZI, Gelson. *Geometria Analítica*. Saraiva S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2013.

[3] BOULOS, P. E CAMARGO, I. *Geometria Analítica*. Makron Books do Brasil. São Paulo, 2005.

[4] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Editora unicamp, 2008.

[5] PROFMAT, Coleção do. *Geometria Analítica*. Jorge Delgado et al. Rio de Janeiro, 2013.

[6] Geogebra, *GeoGebra*. `https://www.geogebra.org/`,20 de abril 2019.

[7] YouTube, *Geometria Analítica - Elipse*. Vídeo (11min06s). Disponível em: `https://www.youtube.com/watch?v=BB8dYw9gFNw&list=PLxEB_CPQhRLvy8Z6VO3_j23CQZbGd7_TZ&index=12`. acesso em 16 jan. 2019.

[8] YouTube, *Geometria Analítica - Hipérbole*. Vídeo (10min24s). Disponível em: `https://www.youtube.com/watch?v=L6SuKvi7YsM&list=PLxEB_CPQhRLvy8Z6VO3_j23CQZbGd7_TZ&index=14`. acesso em 17 jan. 2019.

[9] YouTube, *Geometria Analítica - Parábola*. Vídeo (07min08s). Disponível em:`https://www.youtube.com/watch?v=Ubrl5y14uO4&list=PLxEB_CPQhRLvy8Z6VO3_j23CQZbGd7_TZ&index=16`. acesso em 18 jan. 2019.

[10] SILVA, A. B. *Geometria Analítica Dinâmica.*Dissertação de Mestrado PROFMAT. Uberaba-MG, 2015.

[11] Google, *Superfícies quádricas - Hipérbolóides.* Arquivo. Disponível em: `http://www.professores.uff.br/kowada/wp-content/uploads/sites/63/2017/08/ga2V1aula16.pdf`. acesso em 23 jun. 2019.

[12] Google, *Superfícies quádricas - Hipérbolóides.* Arquivo. Disponível em: `http://dcm.ffclrp.usp.br/~jair/listas/Geo-Analitica.pdf`. acesso em 23 jun. 2019.

[13] Google, *Superfícies quádricas de revolução.* Arquivo. Disponível em: `http://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/3176/material/Quadricas%20(novo).pdf`. acesso em 23 jun. 2019.

APÊNDICE

Translação de Eixos

Considere um sistema de eixos XOY, fazendo uma translação de eixos, criando um novo sistema de eixo $X'O'Y'$. Com $P(x, y)$ no sistema OXY; e $P(x', y')$ no sistema $O'X'Y'$

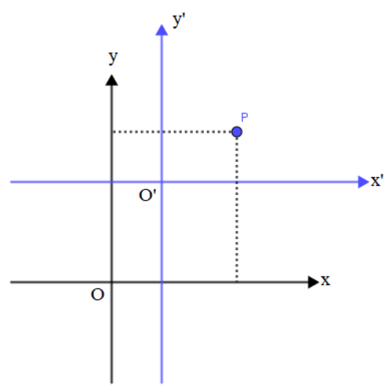


Figura 2.39: Translação de eixos

Então

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Rotação de Eixos

Considere um sistema de eixos XOY, ao girar esse eixo de um ângulo θ, criando um novo sistema de eixo $X'O'Y'$.

- OX' está na direção de $v_1 = (cos\theta, sin\theta)$.
- OY' está na direção de $v_2 = (-sin\theta, cos\theta)$.

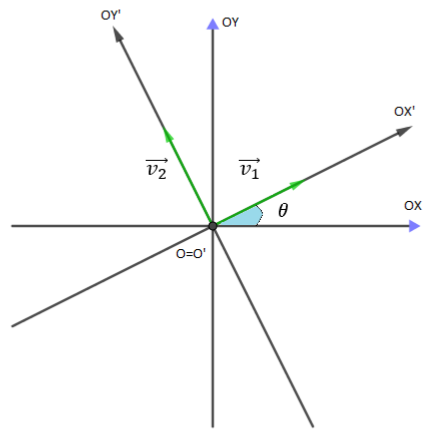


Figura 2.40: Rotação de eixos

Com um ponto P com coordenadas (x, y) no sistema de eixo XOY e (x', y') no novo sistema, assim

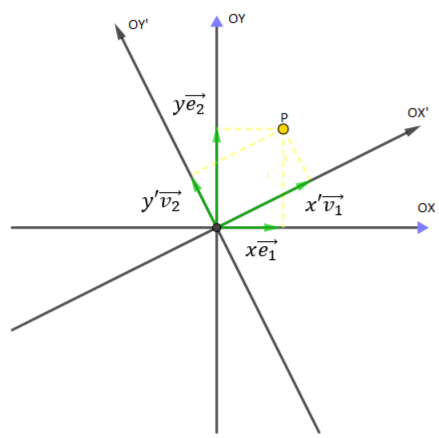


Figura 2.41: Rotação de eixos

$$\begin{cases} x = x'.cos\theta - y'sin\theta \\ y = x'sin\theta + y'cos\theta \end{cases} ou \begin{cases} x' = x.cos\theta + ysin\theta \\ y' = -x'sin\theta + ycos\theta \end{cases}$$