Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Transformações lineares, Autovalores e Autovetores

Marco Aurélio David Ramos

Goiânia

2013

sibi
sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Marco Aurélio David Ramos					
E-mail:	marcaor@ibest.com.br					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	[X]Sim	[ ] Não				
Vínculo empregatício do autor	Professor					
Agência de fomento:	Secretaria Estadual de Educação			Sigla:	SEE	
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:		
Título:	Transformações Lineares, Autovalores e Autovetores.					
Palavras-chave:	Matriz, transformação linear, produto interno, diagonalização, autovalor, autovetor, vetor, sistema de equações.					
Título em outra língua:	Linear Transformations, Eigenvalues and Eigenvectors					
Palavras-chave em outra língua:	Matrix, linear transformations, internal product, diagonalization, eigenvalues, eigenvectors, vector, system of equations.					
Área de concentração:	Matemática Básica.					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	12/04/2013					
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática.					
Orientador (a):	Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva					
E-mail:	eddomingos@hotmail.com					
Co-orientador(a):*	--					
E-mail:	--					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Marco Aurélio David Ramos
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 29/06/2013

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Marco Aurélio David Ramos

Transformações lineares, Autovalores e Autovetores

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

R175t

Ramos, Marco Aurélio David.
Transformações lineares, autovalores e autovetores [manuscrito] / Marco Aurélio David Ramos. - 2013.
57 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.
Inclui lista de tabelas e figuras.

1. Transformações lineares. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Autovalores. 4. Autovetores. I. Título.

CDU: 517.926

Marco Aurélio David Ramos

Transformações Lineares, Autovalores e Autovetores

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 12 de abril de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Edcarlos D. da Silva.

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Profa. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues
UFMT/

Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Marco Aurélio David Ramos graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás. Lecionou em vários colégios da rede privada (Colégio Ateneu Dom Bosco, Objetivo e outros), também lecionou no Colégio da Polícia Militar: Ayrton Senna (em Goiânia) e atualmente é professor da rede estadual de ensino em Goiás.

Aos meus filhos, minha esposa e minha mãe.

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que me apoiaram nesta fase de crescimento da vida. A todos aqueles que de forma direta ou indireta me estenderam sua mão, me incentivaram, perceberam e compreederam este momento, meus agradecimentos.
Um agradeçimento especial à minha esposa amada, Celina, que com muita paciência caminhou comigo todo este tempo ainda que com pouco tempo para ela. À Éllen Louisy e ao Marcos Daniel, dois jovens entusiasmados e extraordinários filhos que Deus me deu. Agradeço à minha mãe, $D^{\underline{na}}$ Diva, que sempre esteve comigo, pela sua preocupação e apoio a este empreendimento. À minha falecida vó que anteviu tudo isto a muito tempo e ao meu pai, também falecido, que sempre torceu por mim ..., minha gratidão! Agradeço aos meus professores pois, sem eles esta caminhada jamais teria se iniciado, principalmente ao meu orientador Dr. Edcarlos Domingos da Silva, inteligente, bem humorado e dedicado. Agradeço também à CAPES pelo suporte financeiro sem o qual seria muito difícil a continuação deste estudo. Finalmente meu agradecimento eterno a Deus pois, Ele já tinha tudo isto preparado para mim.

Resumo

Nesta dissertação estudamos transformações lineares, autovalores e autovetores com o intuito de resolvermos um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes.

Palavras-chave

Matriz, transformação linear, produto interno, diagonalização, autovalor, autovetor, vetor, sistema de equações.

Abstract

In this thesis we study linear transformations, eigenvalues and eigenvectors with the objective of solve a system of linear ordinary differential equations with constant coefficients.

Keywords

Matrix, linear transformations, internal product, diagonalization, eigenvalues, eigenvectors, vector, system of equations.

Sumário

Resumo **6**

Abstract **7**

Introdução **10**

1 Espaços Vetoriais **12**

1.1 Espaço vetorial 12
1.2 Subespaço vetorial 13
1.3 Base de um Espaço Vetorial 14
1.4 Mudança de Base de um Vetor 15

2 Transformações Lineares e Matriz Associada **19**

2.1 Transformação linear 19
2.2 Núcleo de uma transformação linear 21
2.3 Composição, Mudança de Base e Semelhança de Matrizes 22
2.4 Gráfico da mudança de base de uma transformação linear 24
2.5 Matrizes semelhantes 27

3 Produto Interno Euclidiano e a Adjunta de uma Transformação Linear **29**

3.1 Produto interno euclidiano 29
3.2 Vetores ortogonais 29
3.3 Vetores ortonormais 30
3.4 Complemento ortogonal 31
3.5 A adjunta 33
3.6 Operador auto-adjunto 35

4 Autovalores e Autovetores **36**

4.1 Autovalores e autovetores 36
4.2 Polinômio característico 36
4.3 Diagonalização de Operadores 39
4.4 Diagonalização de uma matriz quadrada 39

5 Aplicações **42**

5.1 Sistemas de Equações diferenciais de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes 43

5.2 As 4 possibilidades de um sistema linear 2×2. 44

5.2.1 Sistema com dois autovalores reais e distintos. 44

5.2.2 Sistema com dois autovalores complexos. 46

5.2.3 Sistema com um autovalor real repetido e dois autovetores associados. 48

5.2.4 Sistema com um autovalor real repetido e um único autovetor associado. 49

5.3 Sistema massa-mola simples 51

Conclusão **56**

Referências **57**

Introdução

Uma da grandes surpresas da Matemática é a capacidade que ela possui de encontrar mais de um caminho para a solução de um problema. As vezes estes caminhos são até inesperados. Sem dúvida a Matemática é uma das disciplinas que mais demonstram o caráter criativo do ser humano. Este é exatamente o caso que vamos tratar aqui. O problema, que colocaremos em apreço, é o de um sistema massa-mola simples que vamos resolver via Álgebra Linear.

A primeira seção define de forma clássica um espaço vetorial bem como o subespaço vetorial. Ainda aqui é abordada as combinações lineares, a dependência e a independência linear, que será útil ao longo de todo este trabalho. A base de um espaço vetorial e como fazer uma mudança de base de um vetor são apresentadas aqui também.

Na segunda seção introduziremos as transformações lineares, a matriz associada a uma transformação linear bem como a composição de tais transformações. A definição de transformação linear injetora será feita aqui e retomada no início da quarta seção. A mudança de base de uma matriz é aqui também inserida e generalizada e propiciamente neste momento é apresentada a definição de duas matrizes semelhantes.

Na terceira seção falaremos sobre o produto interno de um espaço vetorial. Definições como norma de um vetor, vetores ortogonais e vetores ortonormais são utilizados. Com uma breve introdução da projeção de um vetor sobre outro chegamos ao processo de ortogonalização de Gram-Schmidt e ainda ao complemento ortogonal de um subespaço. Introduzimos também o teorema da representação de Riesz para em seguida estudarmos o operador adjunto e consequentemente o operador auto-adjunto.

A quarta seção começa estudando os autovalores, através dos polinômios característicos, e autovetores associados. O teorema espectral é enunciado dando ênfase para o caso bidimensional e, por último, a diagonalização de uma matriz que utilizaremos em vários problemas.

Na última seção faremos algumas aplicações aos sistemas de equações lineares com coeficientes constantes de primeira ordem, esgotando todas as possibilidades para um sistema 2×2. Finalmente resolveremos o problema massa-mola proposto, utilizando o fato de que toda equação diferencial linear com coeficientes constantes, pode ser transformada num sistema de equações lineares de primeira ordem com coeficientes constantes.

"*Que nenhum desconhecedor da geometria entre aqui.*"(Inscrição no frontspício da Academia de Platão).

1 Espaços Vetoriais

Na intenção de descrever com rigor os objetos e fenômenos da natureza, podemos descrever alguns deles através de um número simples, um escalar, enquanto outros com maior complexidade deverão ser descritos por meio de vetores[1].

1.1 Espaço vetorial

Definição 1.1.1. *Um conjunto $\boldsymbol{V}$ não vazio de objetos (vetores) é chamado Espaço Vetorial Real se estiverem definidas uma soma $u+v$ (u e $v \in \boldsymbol{V}$) e uma multiplicação por escalar $k.v$ (k escalar) que satisfazem, quaisquer que sejam u, v e $w \in \boldsymbol{V}$ e k e c escalares[2] em $\mathbb{R}$, os axiomas abaixo:*

i. $u+v=v+u$ *(comutativa).*

ii. $(u+v)+w=u+(v+w)$ *(associativa).*

iii. $0+u=u+0$ *(vetor nulo ou zero.)*

iv. $u+(-u)=(-u)+u=0$ *(inverso aditivo ou simétrico de u.)*

v. $k.(u+v)=k.u+k.v$

vi. $(k+c).u=k.u+c.u$

vii. $k.(c.u)=(k.c).u$

viii. $1.u=u$

Exemplo 1.1.1. *$\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial pois dados os vetores $u=(x_1,x_2,\dots,x_n), v=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ e $w=(z_1,z_2,\dots,z_n)$, (u, v e $w \in \mathbb{R}^n$) e ainda k e $c \in \mathbb{R}$, temos:*
i. $u+v=(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)=(y_1+x_1,y_2+x_2,\dots,y_n+x_n)=v+u.$
ii. $(u+v)+w=(y_1+x_1,y_2+x_2,\dots,y_n+x_n)+(z_1,z_2,\dots,z_n)=(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2,\dots,x_n+y_n+z_n)=(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1+z_1,y_2+z_2,\dots,y_n+z_n)=u+(v+w).$

[1] outros mais complexos ainda serão descritos por tensores. Não é nosso objetivo aqui trabalhar com os tais objetos.

[2] Se os escalares estiverem em $\mathbb{C}$ então teremos um Espaço Vetorial Complexo.

iii. tomando $0 = (0, 0, \dots, 0)$ *com* n *zeros, temos por i:* $u + 0 = 0 + u = (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
iv. fazendo $-u = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$*, então:* $u+(-u) = (-u)+u = (x_1, x_2, \dots, x_n)+ (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n-zeros}$
v. $k.(u+v) = k.(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) = (k.(x_1+y_1), k.(x_2+y_2), \dots, k.(x_n+y_n) =$
$(k.x_1 + k.y_1, k.x_2 + k.y_2, \dots, k.x_n + k.y_n) =$
$(k.x_1, k.x_2, \dots, k.x_n) + (k.y_1, k.y_2, \dots, k.y_n) = k.(x_1, x_2, \dots, x_n) +$
$+ k.(y_1, y_2, \dots, y_n) = k.u + k.v$
vi. façamos no ítem anterior $k = c_1 + c_2$ *e* $u + v = w$.
Assim: $(c_1 + c_2).w = k.(u + v) \iff k.u + k.v = c_1u + c_2u + c_1v + c_2v = c_1(u + v) + c_2(u + v) = c_1w + c_2w$.
vii. $k.(c.u) = k.(c.(x_1, x_2, \dots, x_n)) = k.(c.x_1, c.x_2, \dots, c.x_n) =$
$(k.c.x_1, k.c.x_2, \dots, k.c.x_n) = (k.c).(x_1, x_2, \dots, x_n) = (k.c).u$.
viii. $1.u = u$ *é óbvio por vii.*

Exemplo 1.1.2. *Claramente* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$ *são espaços vetoriais.*

1.2 Subespaço vetorial

Definição 1.2.1. *Um subconjunto W de um espaço vetorial V é chamado de subespaço de V se W é um espaço vetorial com os mesmos escalares, a mesma adição e a mesma multiplicação por escalar em V.*

Observe que todas as propriedades do espaço vetorial V são herdados por W, então para que W seja também um espaço vetorial, toda combinação linear de elementos em W devem pertencer a W, isto é, $k_1.a + k_2.b \in W$, $\forall$ *a e* $b \in W$ *e* k_1 *e* k_2 *escalares.*

Exemplo 1.2.1. *O conjunto W das matrizes simétricas* $n \times n$ *é um subespaço de* $M_{n\times n}$ *(conjunto das matrizes* $n \times n$*).*
Obviamente W é não vazio. Então dadas as matrizes A e B, temos $A^T = A$ *e* $B^T = B$.
Assim:
$(k_1.A + k_2.B)^T = (k_1.A)^T + (k_2.B)^T = k_1.A^T + k_2.B^T = k_1.A + k_2.B$*, quaisquer que sejam os escalares* k_1 *e* k_2.
Assim provamos que toda combinação linear de matrizes em W está em W e portanto W é um subespaço.

Exemplo 1.2.2. *Seja $\mathbb{D}$ o conjunto-solução de todas as funções que satisfazem a equação diferencial*

$$f'' + f = 0$$

Então $\mathbb{D}$ é um subespaço pois

$$\begin{aligned}
(k_1.f + k_2.g)'' + (k_1.f + k_2.g) &= (k_1.f'' + k_2.g'') + (f + g) \\
&= (k_1 f'' + k_1.f) + (k_2.g'' + k_2.g) \\
&= k_1.(f'' + f) + k_2.(g'' + g) \\
&= k_1.0 + k_2.0 \\
&= 0 + 0 \\
&= 0,\ \forall\ k_1 \text{ e } k_2\ \in\ \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

E assim $\mathbb{D}$ é um subespaço de $\Im$ (Espaço Vetorial de todas as funções diferenciáveis à valores reais em $\mathbb{R}$).

1.3 Base de um Espaço Vetorial

Definição 1.3.1. *Se $S = \{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$ é um conjunto não-vazio de vetores, a equação vetorial*

$$k_1.v_1 + k_2.v_2 + \cdots + k_n.v_n = 0$$

*será **linearmente independente** se ela admitir uma única solução a saber*

$$k_1 = 0\ k_2 = 0\ \ldots\ k_n = 0$$

*Se houver outras soluções então S é **linearmente dependente**.*

Exemplo 1.3.1. *Os vetores $v_1 = (1, 2, -1), v_2 = (0, -3, 1)$ e $v_3 = (-2, 1, 0)$ são LI (linearmente independentes) pois $k_1.v_1 + k_2.v_2 + k_n.v_n = 0 \Longrightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Alternativamente pode-se verificar que v_1, v_2 e v_3 são LI observando que o determinante da matriz, cujas colunas são os vetores v_1, v_2 e v_3 é diferente de zero.*

Exemplo 1.3.2. *Os vetores $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, 9, 0)$ e $v_3 = (3, 6, 3)$ são LD (linearmente dependentes) já que:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Definição 1.3.2. *Um conjunto $\beta \subset \boldsymbol{V}$ gera o espaço $\boldsymbol{V}$ se para todo $v \in W \subset \boldsymbol{V}$, existirem $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \beta$ e escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que:*

$$v = a_1.v_1 + a_2.v_2 + \cdots + a_n.v_n$$

Definição 1.3.3. *Um conjunto $\beta \subset \boldsymbol{V}$ é uma base de $\boldsymbol{V}$ se:*

- *β gera $\boldsymbol{V}$.*
- *β é linearmente independente.*

Proposição 1.3.1. *Em todo espaço vetorial $\boldsymbol{V}$ finito de base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots$ $\ldots, v_n\}$ um vetor $v \in \boldsymbol{V}$ é escrito de maneira única como combinação linear dos vetores de β.*

Demonstração 1.3.1. *Suponhamos*

$$\begin{aligned} v &= a_1.v_1 + a_2.v_2 + \cdots + a_n.v_n \\ v &= b_1.v_1 + b_2.v_2 + \cdots + b_n.v_n \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{gathered} (a_1 - b_1).v_1 + (a_2 - b_2).v_2 \cdots + (a_n - b_n).v_n = 0 \\ e\ a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n. \end{gathered}$$

Assim $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é a coordenada de v em relação à base β.

Exemplo 1.3.3. *O conjunto $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ em que $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 9, 0)$ e $v_3 = (3, 3, 4)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ pois todo vetor em $\mathbb{R}^3$ é da forma $b = (b_1, b_2, b_3)$ e os vetores $v_1, v_2,$ e v_3 são LI.*

1.4 Mudança de Base de um Vetor

Definição 1.4.1. *Seja $\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $\beta = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial $\boldsymbol{V}$. Um vetor v pode ser escrito como:*

$$(\lambda) \quad \begin{array}{llll} v = x_1.a_1 + & x_2.a_2 + & \cdots + & x_n.a_n \ ou \\ v = y_1.b_1 + & y_2.b_2 + & \cdots + & y_n.b_n \end{array}$$

A coordenada de v em relação à base α é: $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

e em relação à base β é: $[v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

*Podemos escrever $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ em função de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ pois aquele é base de **V**:*

$$(\rho)\begin{cases} b_1 = & c_{11}.a_1 + & c_{21}.a_2 + & \cdots + & c_{n1}.a_n \\ b_2 = & c_{12}.a_1 + & c_{22}.a_2 + & \cdots + & c_{n2}.a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n = & c_{1n}.a_1 + & c_{2n}.a_2 + & \cdots + & c_{nn}.a_n \end{cases}$$

Voltando com estes valores em λ, obtemos:

$v = y_1.b_1 + y_2.b_2 + \cdots + y_n.b_n$

$= y_1.(c_{11}.a_1 + c_{21}.a_2 + \cdots + c_{n1}.a_n) + y_2.(c_{12}.a_1 + c_{22}.a_2 + \cdots + c_{n2}.a_n) +$

$\cdots + y_n.(c_{1n}.a_1 + c_{2n}.a_2 + \cdots + c_{nn}.a_n)$

$= (y_1.c_{11} + y_2.c_{12} + \cdots + y_n.c_{1n}).a_1 + (y_1.c_{21} + y_2.c_{22} + \cdots + y_n.c_{2n}).a_2 + \dots$

$+ (y_1.c_{n1} + y_2.c_{n2} + \cdots + y_n.c_{nn}).a_n$

Mas como temos $v = x_1.a_1 + x_2.a_2 + \cdots + x_n.a_n$ e sendo as coordenadas em uma base únicas:

$$\begin{cases} x_1 = & y_1.c_{11} + & y_2.c_{12} + & \cdots + & y_n.c_{1n} \\ x_2 = & y_1.c_{21} + & y_2.c_{22} + & \cdots + & y_n.c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n = & y_1.c_{n1} + & y_2.c_{n2} + & \cdots + & y_n.c_{nn} \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Fazendo: $[\boldsymbol{P}]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$ *(Esta é a matriz de mudança da base β para base α.)*

E assim: $[v]_\alpha = [\boldsymbol{P}]_\alpha^\beta.[v]_\beta$.

Proposição 1.4.1. *A matriz de mudança de base é invertível.*

Demonstração 1.4.1. *A única solução de* $[\boldsymbol{P}]_\alpha^\beta.X = 0$, *em qualquer base é o vetor identicamente nulo dai,* $[\boldsymbol{P}]_\alpha^\beta \neq 0$. ■
Segue-se imediatamente que:

$$[v]_\beta = ([\boldsymbol{P}]_\alpha^\beta)^{-1}.[v]_\alpha$$

$([\boldsymbol{P}]_\alpha^\beta)^{-1}$ *é a matriz de mudança da base α para base β,isto é,* $([\boldsymbol{P}]_\alpha^\beta)^{-1} = [\boldsymbol{P}]_\beta^\alpha$. *Finalmente temos que*

$$[v]_\beta = ([\boldsymbol{P}]_\beta^\alpha).[v]_\alpha$$

Exemplo 1.4.1. *Quais são as coordenadas de $v = (3,2,1)$ em relação à base $\beta = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$?*
Tomando α como a base canônica, temos

$$[\boldsymbol{P}]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$[\boldsymbol{P}]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Assim as coordenadas de v em relação a β são:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Transformações Lineares e Matriz Associada

Observe o sistema: $\begin{cases} y_1 &= x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= \quad -3x_2 \end{cases}$.

Ele pode ser escrito na forma $Y = A.X$ em que $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Então se $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, teremos: $y_1 = -1 + 2.2 = 3$ *e* $y_2 = -3.2 = -6$

ou $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Fica claro assim que o vetor $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, foi obtido do vetor $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ através da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Em outras palavras houve uma ***transformação*** do vetor X no vetor Y através da matriz A. Isto nós leva a uma definição:

2.1 Transformação linear

Definição 2.1.1. *Uma tranformação linear de um espaço vetorial* ***V*** *para um espaço vetorial* ***W*** *é uma aplicação* ***T:V*** $\rightarrow$ ***W*** *tal que para todo* u *e* $v \in$ ***V*** *e para todos os escalares* $c \in \mathbb{R}$, *temos que*
1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(c.v) = c.T(v)$
Mais especificamente uma transformação ***T:***$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ *é chamada de transformação linear se:*
1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ *para todo* u *e* v *em* $\mathbb{R}^n$
2. $T(c.v) = c.T(v)$ *para todo* v *em* $\mathbb{R}^n$ *e todos os escalares* c.

Exemplo 2.1.1. *$\boldsymbol{T}$:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por* $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ x-y \end{bmatrix}$ *é uma transformação linear. Verifiquemos:*

Tomemos $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ *e* $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$*, então:* $T(u) = T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \end{bmatrix}$ *e* $T(v) = T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \end{bmatrix}$

$T(u+v) = T\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_2+y_1+y_2 \\ x_1+x_2-y_1-y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \end{bmatrix} = T(u) + T(v)$

$T(c.u) = T\begin{bmatrix} c.x_1 \\ c.y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c.x_1 \\ c.x_1+c.y_1 \\ c.x_1-c.y_1 \end{bmatrix} = c.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \end{bmatrix} = c.T(u)$

Exemplo 2.1.2. *Seja* $p = p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *um polinômio em* $\boldsymbol{P}$ *e a função* $\boldsymbol{T}$:$\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n+1}$*, definida por* $T(p) = T(p(x)) = x.p(x) = a_0x + a_1x^2 + \cdots + a_nx^{n+1}$*.*
Então T é uma transformação linear.
Com efeito, temos que
$T(p_1+p_2) = T(p_1(x)+P_2(x)) = x(p_1(x)+p_2(x)) = xp_1 + xp_2 = T(p_1) + T(p_2)$. *e*
$T(k.p) = T(k.p(x)) = x.(k.p(x)) = k.(x.p(x)) = k.T(p(x)) = k.T(p)$

Teorema 2.1.1. *Sendo* $\boldsymbol{T}$:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma transformação linear, então T é uma trasformação por meio de uma matriz, isto é, $T = T_A$, e A é uma matriz $m \times n$ tal que*

$$A = [T(e_1); T(e_2); \ldots; T(e_n)].$$

Demonstração 2.1.1. *Sejam $e_1, e_2, \ldots, e_n$ os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ e v um vetor de $\mathbb{R}^n$. Podemos escrever:*
$v = v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n$ (em que $v_1, v_2, \ldots, v_n$, são as coordenadas de v). Mas, $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)$ são vetores coluna em $\mathbb{R}^n$, então:
$T(v) = T(v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n)$
$T(v) = v_1T(e_1) + v_2T(e_2) + \cdots + v_nT(e_n)$

$$T(v) = [T(e_1); T(e_2); \ldots; t(e_n)]. \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Logo
$T(v) = Av$

É claro que $T(v) = Av$ é uma transformação linear pois:
$T(u + v) = A(u + v) = Au + Av = T(u) + T(v)$ *e*
$T(k.v) = A(k.v) = k.(Av) = k.T(v)$.

Exemplo 2.1.3. *A matriz canônica da transformação linear **T**:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (x + y, x - y)$ é* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

2.2 Núcleo de uma transformação linear

Definição 2.2.1. *Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. O **núcleo** de T, denotado por ker(T), é o conjunto de todos os vetores de V que são levados por T em **0** de W, isto é:*

$$ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

Exemplo 2.2.1. *O núcleo do operador em $\mathbb{R}^3$ dado por*

$$T(x, y, z) = (3x, x - y + z, y - 2x)$$

é:

$$\overbrace{3x}^{a} = \underbrace{x - y - z}_{b} = \overbrace{y - 2x}^{c} = 0$$

$$3x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$de\ a = c,\ obtemos\ 3x = y - 2x \Longrightarrow y = 0$$

$$finalmente\ de\ b = 0\, temos, x - y + z = 0 \Longrightarrow z = 0$$

Portanto $ker(T) = \{0, 0, 0\}$

Definição 2.2.2. $T : V \longrightarrow W$ *é injetora se. para todo* u *e* $v \in V$*,então* $u \neq v$ *implica que* $T(u) \neq T(v)$.

Definição 2.2.3. $T : V \longrightarrow W$ *é sobrejetora se, para todo* $w \in W$*, existe pelo menos um* v *em* V *tal que* $w = T(v)$.

Teorema 2.2.1. *Uma transformação linear* $T : V \longrightarrow W$ *é injetiva se e somente se* $ker(T) = 0$.

Demonstração 2.2.1. *Vamos assumir que* T *é injetiva. Se* v *está no núcleo de* T*, temos* $T(v) = 0$*. Mas* $T(0) = 0$ *provando* $T(v) = T(0)$*. Sendo* T *injetiva então v=0. Assim o vetor nulo é o único vetor no núcleo de* T.

Assumamos agora que $ker(T) = 0$ *e dados vetores* v *e* u *em* V *tais que* $T(v) = T(u)$*. Então* $T(v) - T(u) = 0$ *e* $T(v - u) = 0$*. Assim* $v - u$ *está no núcleo de* T *e como* $ker(T) = 0$*, devemos ter* $v - u = 0$*. Dai v=u, demonstrando dessa forma que* T *é injetiva.*

■

2.3 Composição, Mudança de Base e Semelhança de Matrizes

Teorema 2.3.1. *A composta de transformações lineares* $T : U \longrightarrow V$ *e* $S : V \longrightarrow W$ *é uma transformação linear* $S \circ T : U \longrightarrow W$.

Demonstração 2.3.1. *Sejam* v *e* $w \in U$ *e* k *um escalar. Então:*

$$S \circ T(v + w) = S(T(v + w)) = S(T(v) + T(w)) = S(T(v)) + S(T(w)) =$$
$$(S \circ T)(v) + (S \circ T)(w)$$
$$e$$
$$(S \circ T)(k.v) = S(T(k.v)) = S(k.T(v)) = k.S(T(v)) = k.(S \circ T)(v).$$

Teorema 2.3.2. *Sejam* $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *transformações lineares e ainda* $T \circ S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$*. Então suas matrizes canônicas satifazem*

$$[S \circ T] = [S].[T]$$

Demonstração 2.3.2. *Sejam:*

$$[S] = A_{m\times n} \text{ e } [T] = B_{n\times p} \text{ e } v \text{ um vetor em } \mathbb{R}^m \text{ então:}$$
$$(S \circ T)(v) = S(Tv)) = S(B.v) = A.B.v$$

Exemplo 2.3.1. *Considere a transformação* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dada por* $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ *e a transformação* $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *dada por* $S\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1 \\ y_2 + y_3 \\ 3.y_2 - 2.y_3 \end{bmatrix}$*. Encontre* $(S \circ T)$*.*

Podemos ver que:

$$[S] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Usando o teorema:

$$[S \circ T] = [S].[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$(S \circ T)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.3.3. *Supondo $T = \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$, V n-dimensional e W m-dimensional com bases β e γ, respectivamente e que $R([v]_\beta) = (v)$, define um isomorfismo $R : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ e também $S : \mathbb{R}^m \longrightarrow W$ é outro isomorfismo em que $S(w) = (w)$. Então:*

$$[T(v)]_\gamma = A\,[v]_\beta$$

sendo

$$A = [[T(v_1)]_\gamma, [T(v_2)]_\gamma, \ldots, [T(v_n)]_\gamma)]$$

2.4 Gráfico da mudança de base de uma transformação linear

Observe a ilustração:

$$\begin{tikzcd}
(v)\quad V \arrow[r, "T"] & \bullet T(v)\quad W \arrow[d, bend left, "S^{-1}"] \\
{[v]_\beta\quad \mathbb{R}^n} \arrow[u, "R"] \arrow[r, "S^{-1}\circ T\circ R"'] & \bullet[T(v)]_\gamma\quad \mathbb{R}^m \arrow[u, "S"]
\end{tikzcd}$$

Demonstração 2.4.1. *Sabemos que:*

$$(v)_\beta = [R].[v]_\beta$$
$$[Tv]_\beta = [S].[T(v)]_\gamma$$

mas:

$$[Tv]_\beta = [T].(v)_\beta$$

dai:

$$[S].[T(v)]_\gamma = [T].[R].[v]_\beta$$
$$[Tv]_\gamma = [S]^{-1}.[T].[R].[v]_\beta$$

Finalmente:

$$[Tv]_\gamma = A[v]_\beta$$

A é a matriz de T em relação às bases β e γ.

Exemplo 2.4.1. *Seja T:$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$, procuremos a Transformação associada às bases $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))\}$ e $\gamma = \{(1, 3), (1, 4)\}$.*

$A = [T]_\gamma^\beta$

$A = [\gamma]^{-1}.[T].[\beta]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.4.2. *Dada a base $\alpha = \{(1, -2), (-1, 3)\}$, determinar a matriz, na base α, do operador linear $\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{F}(x, y) = (2x - y, x + y)$.*

$A = [T]_\alpha^\alpha = T_A = [\alpha]^{-1}.[T].[\alpha]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -13 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.4.3. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear representada pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Encontre T em relação à base $\beta = \{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\}$.
Temos:

$$[\beta]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

$$[\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Logo

$$[T]_\beta = [\beta].A.[\beta]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.4.1. *Sejam $\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $\beta = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ duas bases para o espaço vetorial V. Seja $\boldsymbol{T} : V \longrightarrow V$ um operador linear. Então existe uma única matriz invertível P tal que:*

$$\boldsymbol{T}_\beta = P.\boldsymbol{T}_\alpha.P^{-1} \text{ e } \boldsymbol{T}_\alpha = P^{-1}.\boldsymbol{T}_\beta.P.$$

As colunas de P são dadas pelas coordenadas dos vetores da base α com relação à base β, ou seja,

$$P = [[v_1]_\beta, [v_2]_\beta, \ldots, [v_n]_\beta].$$

Demonstração 2.4.2.
$$[v]_\alpha = P^{-1}.[v]_\beta,$$
$$[Tv]_\alpha = P^{-1}.[Tv]_\beta$$
Para todo vetor $v \in V$. Adicionalmente temos:
$$[Tv]_\alpha = [T]_\alpha.[v]_\alpha.$$
Logo,
$$P^{-1}.[Tv]_\beta = [T]_\alpha.P^{-1}.[v]_\beta.$$
Assim,
$$[Tv]_\beta = P[T]_\alpha.P^{-1}.[v]_\beta.$$
Por outro lado temos que
$$[Tv]_\beta = [T]_\beta.[v]_\beta.$$
Logo
$$[T]_\beta.[v]_\beta = P.[T]_\alpha.P^{-1}.[v]_\beta,$$
Provando que
$$[T]_\beta = P.[T]_\alpha.P^{-1}.$$

■

P é a matriz de mudança da base α para base β. Então P^{-1} é a matriz de mudança da base β para base α.
Observe que o exemplo 3.1.4 utilizou especificamente a relação acima.
A relação acima nos remete a seguinte definição.

2.5 Matrizes semelhantes

Definição 2.5.1. *Sejam A e B matrizes $n \times n$. Dizemos que a matriz A é semelhante a matriz B se existir uma matriz $n \times n$ invertível P tal que $P^{-1}.A.P = B$.*

Observe que se $B = P^{-1}.A.P$, então $A = P.B.P^{-1}$ ou ainda $A.P = P.B$.

Exemplo 2.5.1. *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.*

Então $A \sim B$ (A semelhante a B), pois:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.5.1. *Sejam A e B matrizes $n \times n$ com $A \sim B$, então $detA = detB$.*

Demonstração 2.5.1.

$$detA = det(P.B.P^{-1})$$

$$detA = detP.detB.detP^{-1}$$

$$detA = detP.detB.\frac{1}{detP}$$

$$detA = detB$$

■

Observe que o fato do determinante de duas matrizes semelhantes serem iguais é necessário mas, não é suficiente. Assim este argumento é utilizado quando queremos mostrar que duas matrizes $n \times n$ não são semelhantes.

Exemplo 2.5.2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, *não são semelhantes pois* $detA = -6$ *e* $detB = 1$.

3 Produto Interno Euclidiano e a Adjunta de uma Transformação Linear

3.1 Produto interno euclidiano

Definição 3.1.1. *Chamamos de produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^n$ uma função que associa um número real <u,v> a cada par de vetores em $\mathbb{R}^n$. Seu cálculo é dado por:*

$$< u, v >= u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2 + \cdots + u_n.v_n,$$

com $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

Definição 3.1.2. *A **norma** ou comprimento de um vetor $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ em $\mathbb{R}^n$ é dada por $||u|| = \sqrt{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}$*

Obs.: Dado $u \in \mathbb{R}^n$; $u \neq 0$ segue que $v = \dfrac{u}{||u||}$ é unitário.

3.2 Vetores ortogonais

Definição 3.2.1. *Um conjunto de vetores $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto ortogonal se:*

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ i \neq j$$

Além disso se A é ortogonal então todos estes vetores são LI.

Demonstração 3.2.1. *É óbvio pela definição de produto interno euclidiano que se dois vetores são ortogonais então $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e dai $||u||.||v||.cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ e $\langle v_i.v_j \rangle = 0$.*
Por outro lado sabendo que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto ortogonal, então devemos provar que este conjunto é LI. De fato temos que

$$a_1.v_1 + a_2.v_2 + \cdots + a_n.v_n = 0; a_i \in \mathbb{R}$$

implica que

$$\langle a_1.v_1 + a_2.v_2 + \cdots + a_n.v_n, v_i \rangle = a_i.\langle v_i, v_i \rangle = a_i = 0; \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Logo $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI.

Exemplo 3.2.1. *Os vetores* $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $v_2 = (0,1,0)$ *e* $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, *são ortogonais entre si. Assim eles são LI.*

Observe que os vetores do exemplo acima geram $\mathbb{R}^3$

3.3 Vetores ortonormais

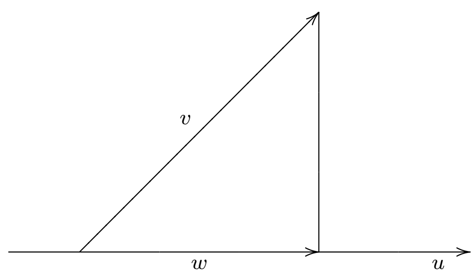
Definição 3.3.1. $v_1, v_2, \dots, v_n$ *é um conjunto ortonormal se:*

$$v_i.v_j = \begin{cases} 1, & se \quad i = j \\ 0, & se \quad i \neq j \end{cases}$$

Os vetores do exemplo 3.0.11 que geram $\mathbb{R}^3$*, formam uma base ortonormal.*

Nota. A projeção do vetor v sobre o vetor u é dada por:

$$w = proj_u(v) = \frac{v.u}{||v||^2} v$$



Basta lembrar que

$$u.v = ||u||.||v||.cos\theta \implies cos\theta = \frac{u.v}{||v||.||u||}$$

$$w = ||w||.\widehat{w} \qquad \left(\widehat{w} = \frac{u}{||u||},\ versor\ de\ u\right)$$

$$||w|| = ||v||.cos\theta$$

Observe também que um vetor perpendicular a u (ou w) é dado, neste caso, por $v - w$.

Teorema 3.3.1. *(Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt) Todo espaço vetorial com produto interno possui uma base ortonormal.*

Demonstração 3.3.1. *Seja $\alpha = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ uma base para um espaço vetorial V, vamos construir uma base ortogonal $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a partir de α utilizando o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt.*
Tomemos $v_1 = x_1$. Agora vamos supor por indução que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sejam vetores ortogonais e formem uma base ortogonal $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ para o subespaço gerado pelos vetores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ em que $1 \leq k \leq m$. Construamos o vetor v_{m+1} através da projeção ortogonal do vetor x_{m+1} sobre o subespaço gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\langle x_{m+1}.v_i \rangle}{||v_i||^2} v_i$$

Assim:

$$v_{m+1} = x_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle x_{m+1}.v_i \rangle}{||v_i||^2} v_i.$$

Então $x_{m+1} \neq 0$, se não ele estaria no subespaço gerado por $x_1, x_2, \ldots, x_m$ e portanto seria uma combinação linear dos mesmos. Além disso, para todo $1 \leq k \leq m$:

$$\langle v_{m+1}, x_k \rangle = \langle x_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle x_{m+1}.v_i \rangle}{||v_i||^2} v_i, x_k \rangle$$

$$= \langle x_{m+1}, x_k \rangle - \langle \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle x_{m+1}.v_i \rangle}{||v_i||^2} v_i, x_k \rangle$$

$$= \langle x_{m+1}, x_k \rangle - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle x_{m+1}.v_i \rangle}{||v_i||^2} \langle v_i, v_k \rangle$$

$$= \langle x_{m+1}, x_k \rangle - \frac{\langle x_{m+1}.v_k \rangle}{||v_k||^2} \langle v_k, v_k \rangle = 0$$

Logo, $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}\}$ é um conjunto de m+1 vetores ortogonais que geram o subespaço formado por $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ de dimensão $m + 1$. Logo é uma base para este espaço. Se quisermos uma base ortonormal basta tão somente agora normalizar cada vetor da nova base encontrada.

3.4 Complemento ortogonal

Definição 3.4.1. *Seja V um espaço vetorial com produto interno e $W \subset V$ um subespaço de V. O complemento ortogonal de W é o subespaço*

$$W^{\perp} = \{w \in V : \langle w, v \rangle = 0, \ \forall \ v \in V\}$$

Exemplo 3.4.1. *Seja* $S = \{u = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | x, y \in \mathbb{R}\}$*, temos então:*

$$S^{\perp} = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \langle v, u \rangle = 0\}, \forall\ u \in S$$

dai

$$\langle v, u \rangle = \langle (x, y, z).(x, y, 0) \rangle = x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0$$

Logo

$$S^{\perp} = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 | z \in \mathbb{R}\}$$

Proposição 3.4.1. *Para qualquer subespaço* $W \subset V$ *temos*

$$V = W \oplus W^{\perp}, \qquad (\oplus \text{ representa a soma direta.})$$

Demonstração 3.4.1. *Seja* $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ *uma base ortogonal do subespaço W. Sendo* $v \in V$

$$w = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v, v_i \rangle}{||v_i||^2} v_i \ \in \ W.$$

Então $u = v - w \ \in W^{\perp}$ *pois* $\langle u, v_j \rangle = 0\ \forall j$*:*

$$\langle u, v_j \rangle = \langle v - w, v_j \rangle = \langle v, v_j \rangle - \langle w, v_j \rangle = \langle v, v_j \rangle - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v, v_i \rangle}{||v_i||^2} \langle v_i, v_j \rangle$$

$$\langle u, v_j \rangle = \langle v, v_j \rangle - \frac{\langle v, v_j \rangle}{||v_j||^2} \langle v_j, v_j \rangle = 0$$

Então $v = w + u$ *em que* $w \in W$ *e* $u \in W^{\perp}$*. Observe ainda que se* $v \in W \cap W^{\perp}$ *então* $\langle v, v \rangle = 0$ *e portanto* $v = 0$*.*

Teorema 3.4.1 (Representação de Riesz)**.** *Seja* $\boldsymbol{V}$ *um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno e* $L \in \boldsymbol{V^*}$ *um funcional linear*[3]*. Então existe um único vetor* $u \in \boldsymbol{V}$ *tal que*

$$L(v) =< v, u > \forall\ v \in \boldsymbol{V}$$

Demonstração 3.4.2. *Tomemos uma base ortonormal de* $\boldsymbol{V}$ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$*. Se* $u \in \boldsymbol{V}$*, então*

[3]transformação linear de **V** em **V***

$$v = \sum_{i=1}^{n} < v, u_i > u_i$$
$$L(v) = \sum_{i=1}^{n} < v, u_i > L(u_i)$$
$$L(v) = \sum_{i=1}^{n} < v, u_i.L(u_i) >$$
$$L(v) = \langle v, \sum_{i=1}^{n} L(u_i).u_i \rangle.$$

Agora tomando

$$u = \sum_{i=1}^{n} L(u_i).u_i$$

segue a igualdade

$$L(v) =< v, u > \forall\ v \in \boldsymbol{V}$$

.

Suponha que exista $w \in V$ tal que

$$L(v) =< v, w > .$$

Então

$$< v, u >=< v, w >\Longrightarrow< v, u - w >= 0,\ \forall\ v\ \in \boldsymbol{V}.$$

Logo

$$u - w = 0,\ ou\ u = w.$$

3.5 A adjunta

Definição 3.5.1. *Sejam **V** e **W** dois espaços vetoriais com um produto interno e $\boldsymbol{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ é uma aplicação linear. Então a aplicação $\boldsymbol{T^*} : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ é a adjunta de **T** se $\langle Tv, u\rangle = \langle v, T^*u\rangle$; $\forall\ u, v \in V$.*

Exemplo 3.5.1. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (3x, 8x - y)$. O operador $T^* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T^*(x, y) = (3x + 8y, -y)$ é o operador adjunto de T.*
Vamos verificar isto tomando dois vetores em $\mathbb{R}^2$. Sejam eles $v : (x_1, y_1)$ e $u : (x_2, y_2)$, então:

$$\langle Tv, u\rangle = \langle v, T^*u\rangle$$

$$\langle (3x_1, 8x_1 - y_1)(x_2, y_2) \rangle = \langle (x_1, y_1)(3x_2 + 8y_2, -y_2) \rangle$$

$$3x_1x_2 + 8x_1y_2 - y_1y_2 = 3x_1x_2 + 8x_1y_2 - y_1y_2$$

Teorema 3.5.1. *Seja V um espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V e $A = [T]_\beta$, então:*

$$a_{ij} = \langle Tv_j, v_i \rangle$$

Demonstração 3.5.1. *Observe em primeiro lugar que cada coluna de $[T]_\beta$, é dada pelas coordenadas do vetor*

$$Tv_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k.$$

Dai

$$\langle Tv_j, v_i \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k, v_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \langle v_k, v_i \rangle = a_{ij}$$

■

Proposição 3.5.1. *Seja **V** um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita e $\boldsymbol{T} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ um operador linear. Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de **V**, e $A = [T]_\beta$ então $A^T = [T^*]_\beta$*

Demonstração 3.5.2. *Seja $B = [T^*]_\beta$*

$$a_{ij} = \langle Tv_j, v_i \rangle$$

$$b_{ij} = \langle T^* v_j, v_i \rangle$$

$$b_{ij} = \langle T^* v_j, v_i \rangle = \langle v_i, T^* v_j \rangle = \langle Tv_i, v_j \rangle = a_{ji}$$

Assim a matriz do operador adjunto T^* é a transposta da matriz do operador T em uma base ortonormal.

Exemplo 3.5.2. *Seja T um operador linear em $\mathbb{R}^2$ definido por:*
$T(x, y) = (x + y, 2x - 3y)$, encontremos T^*.

Observe que a matriz associada a T é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ e a transposta de A é: $A^T = A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Assim $T^*(x, y) = (x + 2y, x - 3y)$

*Observe que no exemplo anterior tomamos como Matriz do operador adjunto T^* a transposta **conjugada** do operador T.*

3.6 Operador auto-adjunto

Definição 3.6.1. *Seja V um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador auto-adjunto se:*

$$T = T^*$$

ou

$$\langle Tv, u \rangle = \langle v, Tu \rangle, \ u, v \in V.$$

Corolário 3.6.1. *Seja V um espaço vetorial real, com produto interno, de dimensão finita e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear auto-adjunto. Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal para V então $A = [T]_\beta$ é uma matriz simétrica.*

Exemplo 3.6.1. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (2x + 5y, 5x - 3y)$ e $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $S(x, y, z) = (x - y, -x + 3y - 2z, -2y)$. Então T e S são operadores auto-adjuntos e suas matrizes correspondentes são simétricas.*

4 Autovalores e Autovetores

4.1 Autovalores e autovetores

Definição 4.1.1. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Dizemos que λ é um autovalor de T se existir um vetor $v \in V$, $v \neq 0$ tal que:*

$$Tv = \lambda v$$

Se λ é um autovalor de T e v é qualquer vetor, não nulo, tal que $Tv = \lambda v$, dizemos que v é um autovetor de T associado a λ.

Definição 4.1.2. *O conjunto $V_\lambda = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$ dos autovetores associados ao autovalor λ pelo operador T é um subespaço de V. De fato V_λ é o núcleo do operador $T - \lambda I$, como λ é um autovalor de $T - \lambda I$ somente se este for não-injetivo, então $det(T - \lambda I) = 0$.*

4.2 Polinômio característico

Definição 4.2.1. *O polinômio $p(x) = det(xI - T)$ é chamado* ***polinômio característico*** *de T. (Observe que as raízes deste polinômio depende diretamente do corpo $\mathbb{K}$ envolvido.)*

Exemplo 4.2.1. *Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, encontremos seus autovalores e autovetores associados.*

$$det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6$$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$ *é o polinômio característico. Encontrando as raízes de $p(\lambda)$, obtemos $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$ como autovalores.*

O autovetor associado a $\lambda_1 = -1$ é:

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 1 & 2 \\ 3 & -1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$-2x_1 + 2x_2 = 0$ *e* $3x_1 - 3x_2 = 0$

Como essas equações são equivalentes, resolvendo uma delas, encontramos:
$x_1 - x_2 = 0$, *fazendo* $x_2 = t$, *segue que* $x_1 = t$. *Portanto*
$v_1 = (t,t) = t(1,1) = (1,1)$
Procedendo da mesma forma com $\lambda_2 = 4$, *obtemos:*
$3x_1 + 2x_2 = 0$, *colocando* $x_2 = t$, *temos* $x_1 = -\frac{2}{3}t$, *assim:*
$v_2 = (-\frac{2}{3}t, t) = t(-\frac{2}{3}, 1) = (-2, 3)$

Exemplo 4.2.2. *O polinômio característico da matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *é:*

$p(x) = det(xI - T) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{bmatrix} = x^2 + 1$, *que não possui raízes em* $\mathbb{R}$ *mas em* $\mathbb{C}$. *De fato seus autovalores são*
$x_1 = -i$ *e* $x_2 = i$.
O autovetor associado a $x_1 = -i$ *é:*

$$\begin{cases} -ix_1 + x_2 & = 0 \\ -x_1 - ix_2 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow -ix_1 + x_2 = 0$$

Tomando $x_1 = 1$, *temos* $x_2 = i$, *então* $v_1 = (1, i)$

Da mesma forma encontramos para $x_2 = i$, $v_2 = (i, 1)$.

Teorema 4.2.1. *Todo operador linear auto-adjunto* $T : V \longrightarrow V$, *possui autovalores reais e seus autovetores associados são ortogonais.*

Demonstração 4.2.1. *Seja* λ *um autovalor de* T *e* v *seu autovetor correspondente (não-nulo) e ainda* A *uma matriz simétrica associada a* T *em alguma base* β *ortonormal.*

$$\overline{v}^t A v = \overline{v}^t \lambda v = \lambda \overline{v}^t v = \lambda ||v||^2.$$

Além disso, temos que

$$\overline{v}^t A v = \overline{v}^t A^t v = (A\overline{v})^t v = \overline{\lambda} \overline{v}^t v = \overline{\lambda} ||v||^2.$$

Portanto

$$\lambda = \overline{\lambda}$$

Sejam agora λ_1 e λ_2 autovalores distintos reais de T e v_1 e v_2 seus autovalores não-nulos correspondentes. Neste caso segue que

$$\begin{aligned}\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = & \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle = & \langle Tv_1, v_2\rangle \\ = & \langle v_1, Tv_2\rangle = & \langle v_1, \lambda_2 v_2\rangle \\ = & \langle v_1, v_2\rangle\lambda_2 &\end{aligned}$$

mas $\lambda_1 \neq \lambda_2$, provando que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$

■

Observe particularmente que todo operador auto-adjunto possui pelo menos um autovalor real e seu autovetor correspondente

Teorema 4.2.2. *(Teorema espectral). Para todo operador auto-adjunto $T : V \longrightarrow V$ de um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno, existe uma base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in V$ constituida por autovetores de T.*

Demonstração 4.2.2. *Utilizemos indução sobre $n = dimV$. Para n=1, o teorema é óbvio. Suponha que o Teorema é válido para $dimV = n - 1$. Se tivermos $dimV = n$ então existe um autovetor v unitário que é um subespaço de dimensão 1. Mas, como $dimV^{\perp} = n - 1$ a hipótese assegura que há uma base ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\} \subset V^{\perp}$. Fazendo $v_n = \frac{v}{||v||}$ a base de V será $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. De fato, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é ortonormal e gera o subespaço V.*

Exemplo 4.2.3. *Provemos o Teorema anterior para o caso bidimensional.*
Seja u e v uma base ortonormal de V, como a matriz do operador auto-adjunto T é simétrica, vem:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de T é:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2)$$

Temos que:

$$\begin{aligned}(a+c)^2 - 4(ac-b^2) &= a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 \\ &= a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 \\ &= (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0\end{aligned}$$

Logo $p(\lambda)$ admite apenas raízes reais.
Se $p(\lambda)$ tiver uma raiz de duplicidade 2 então, u e v servem para comprovar o Teorema.
Se $p(\lambda)$ tiver duas raízes distintas λ_1 e λ_2, teremos:

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1 \text{ e } Tv_2 = \lambda_2 v_2.$$

Mas

$$v_2 T v_1 = v_1 T v_2$$

$$v_2 \lambda_1 v_1 = v_1 \lambda_2 v_2$$

$$\lambda_1 v_1 v_2 = \lambda_2 v_1 v_2$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) v_1 v_2 = 0.$$

Note que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Logo temos que

$$\langle v_1 . v_2 \rangle = 0.$$

Assim v_1 e v_2 são ortogonais. Para obter a base ortonormal basta normalizar cada vetor da base.

4.3 Diagonalização de Operadores

Sabe-se que dado um operador linear $T : V \longrightarrow V$, a cada base B de V, corresponde uma matriz T_B que representa T na base B. O objetivo aqui é encontrar uma base do espaço vetorial V de tal modo que a matriz de T seja a mais simple possível, isto é, de modo que esta matriz seja diagonal.

4.4 Diagonalização de uma matriz quadrada

Definição 4.4.1. *Uma matriz quadrada A é dita diagonalizável se existir uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal. Dizemos, então, que a matriz P diagonaliza A.*

Teorema 4.4.1. *Se uma matriz A n×n é diagonalizável. Então, A possui n autovetores linearmente independentes.*

Demonstração 4.4.1. *Supondo* $P = [P_1, P_2, \ldots, P_n]$ *formado por n autovetores LI, isto é, todos os* P_i *são autovetores associados, respectivamente, a* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ *então a matriz* $D = \begin{bmatrix} \lambda_i & se & i = j \\ 0 & se & i \neq j \end{bmatrix}$ *é uma matriz diagonal.*
Logo $A_{n\times n}$ *possui n autovetores LI.*

$$AP_1 = \lambda_1 P_1; AP_2 = \lambda_2 P_2; \ldots; AP_n = \lambda_n P_n$$
$$\begin{bmatrix} AP_1 & AP_2 & \ldots & AP_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_1 & \lambda_2 P_2 & \ldots & \lambda_n P_n \end{bmatrix}$$
$$A\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$
$$AP = PD \Longrightarrow D = P^{-1}AP.$$

Portanto A é diagonalizável.

Reciprocamente se A é diagonalizável temos que

$$D = P^{-1}AP \text{ ou } PD = AP.$$

Então

$$A\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Como P é invertível então as colunas de $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \end{bmatrix}$ *são autovetores LI de A.*

Teorema 4.4.2. *Se A é ortogonalmente diagonalizável, isto é, $P^tAP = D$, então A é simétrica.*

Demonstração 4.4.2. *Basta usar o* ***corolário 3.6.1****.*

Exemplo 4.4.1. *Vamos diagonalizar a matriz*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Seu polinômio característico é $p(r) = r^3 - 6r^2 + 9r - 4 = (r-4).(r-1)^2$. Dai:

$$r = 1 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad r = 4 \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que os autovetores associados a $r = 1$ são ortogonais ao autovetor associado a $r = 4$. Mas, não são ortogonais entre si. Neste caso aplicamos o processo de Gram-Schmidt obtendo os seguintes vetores:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Normalizando os vetores obtemos

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Assim verificamos diretamente que

$$D = P^tAP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5 Aplicações

Muitos fenômenos que ocorrem na Física, na Química, na Biologia, na Engenharia e na Economia, podem ser descritas por modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais, isto é, equações envolvendo funções e suas derivadas. Vamos aplicar o que vimos até aqui na resolução de alguns tipos de sistemas de equações diferenciais simples.

Iniciemos lembrando que uma das equações diferenciais mais simples pode ser escrita da seguinte forma:

$$x' = a.x$$

tal que $x = f(t)$ é uma função a ser determinada, $x' = \frac{dx}{dt}$ é a sua derivada e a é uma constante real. As soluções desta equação diferencial são do tipo

$$x = c.e^{at},\ t \in \mathbb{R}$$

sendo c é uma constante qualquer. Com efeito, temos que

$$x = c.e^{at}$$

$$x' = a.c.e^{at}$$

Logo

$$x' = a.x;\ t \in \mathbb{R}.$$

Quando o problema for de valor inicial, isto é, quando houver uma condição inicial o mesmo deverá ser levando em conta na busca da solução preliminar sobre x.

Estamos pressupondo que todas as funções aqui apresentadas são contínuas em todo intervalo $[\alpha, \beta],\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

5.1 Sistemas de Equações diferenciais de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes

Um sistema de equações diferenciais de primeira ordem com coeficientes constantes é da forma:

$$\begin{cases} x_1' = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_n' = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Note que $x_1 = f_1(t), x_2 = f_2(t), \ldots, x_n = f_n(t)$, são funções a determinar e os coeficientes a_{ij} são constantes reais.
Matricialmente podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

ou de forma concisa

$$X' = A.X.$$

Tomemos uma solução da forma $X = v.e^{\lambda t}$ sendo v um vetor coluna $n \times 1$. Derivando de ambos os lados, obtemos $X' = v.\lambda.e^{\lambda t}$. Substituindo em $X' = A.X$, vem:

$$X' = A.X.$$

Equivalentemente podemos escrever as seguintes equações:

$$v.\lambda.e^{\lambda t} = A.v.e^{\lambda t}$$

$$A.v = \lambda.v$$

$$(A - \lambda.I).v = 0$$

Mas este é exatamente o modo de se encontrar os autovalores λ e seus autovetores associados aos quais vimos na **Definição 4.0.8**.

5.2 As 4 possibilidades de um sistema linear 2×2.

5.2.1 Sistema com dois autovalores reais e distintos.

Exemplo 5.2.1. *É o caso do seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x_1' = & x_1 + x_2 \\ x_2' = & 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes do sistema acima é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calculemos seus autovalores:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3).(\lambda - 2).$$

Dai $\lambda = 2$ e $\lambda = -3$.
O autovetor associado a $\lambda = 2$ é tal que:

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$x_1 - x_2 = 0 \text{ e } -4x_1 + 4x_2 = 0.$$

Como ambas são idênticas temos $x_1 = x_2$ e assim um autovetor associado será

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De forma análoga, temos para $\lambda = -3$ o autovetor

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Desta forma a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, *diagonaliza* A, *isto é:*

$$D = P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Façamos a seguinte substituição $X = P.Y$ *e* $X' = P.Y'$ *em* $X' = A.X$ *obtendo as seguintes igualdades:*

$$X' = A.X$$

$$P.Y' = A.P.Y$$

$$Y' = P^{-1}.A.P.Y$$

$$Y' = D.Y$$

ou

$$\begin{cases} y_1' = & 2y_1 \\ y_2' = & -3y_2 \end{cases}.$$

Mas este último como já vimos é fácil de resolver. As soluções são dadas pelas seguintes equações:

$$y_1 = c_1.e^{2t} \text{ e } y_2 = c_2.e^{-3t},\ t\ \in \mathbb{R}.$$

Voltando com estes valores em $X = P.Y$, *obtemos*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_1.e^{2t} \\ c_2.e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1.e^{2t} + c_2.e^{-3t} \\ c_1.e^{2t} - 4.c_2.e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Logo a solução geral é dada por

$$X = c_1. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} .e^{-3t};\ t\ \in \mathbb{R}.$$

Aqui c_1 *e* c_2 *são constantes a serem determinadas com as condições iniciais.*

5.2.2 Sistema com dois autovalores complexos.

Obviamente estes autovalores são distintos (pois um é o conjugado do outro), quando as entradas da matriz são reais.

Exemplo 5.2.2. *Resolva o sistema* $X' = A.X$ *para* $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$

Encontremos seus autovalores dados por

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -5 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

Lembrando que se um número complexo é raiz de um polinômio com coeficientes reais então seu conjugado também é raiz deste polinômio. Então $\lambda_1 = 2+3i$ *e* $\lambda_2 = 2-3i$ *são os únicos autovalores para matriz* A*. O autovetor associado a* $\lambda_1 = 2+3i$ *é:*

$$\begin{bmatrix} 2+3i-3 & 2 \\ -5 & 2+3i-1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+3i & 2 \\ -5 & 1+3i \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Logo $(-1+3i)x_1 + 2x_2 = 0$ *e* $-5x_1 + (1+3i)x_2 = 0$*. Então tomando* $x_1 = 2$*, obtemos* $x_2 = 1 - 3i$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-3i \end{bmatrix}.$$

Procedendo da mesma forma com $\lambda_2 = 2-3i$*, encontramos:*

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+3i \end{bmatrix}.$$

Observe que quando os autovalores são complexos os autovetores também são complexos.

Um conjunto fundamental de soluções para o sistema inicial é:

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-3i \end{bmatrix} .e^{(2+3i)t}, \qquad x_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+3i \end{bmatrix} .e^{(2-3i)t}$$

ou em termos gerais:

$$X(t) = c_1.\begin{bmatrix} 2 \\ 1-3i \end{bmatrix}.e^{(2+3i)t} + c_2.\begin{bmatrix} 2 \\ 1+3i \end{bmatrix}.e^{(2-3i)t},\ t\ \in \mathbb{R}.$$

Encontremos um conjunto de soluções reais para equação acima lembrando que $e^{\theta i} = cos\theta + isen\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. *Inicialmente observe que*

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-3i \end{bmatrix}.e^{(2+3i)t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-3i \end{bmatrix} e^{2t}.e^{3it}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1-3i \end{bmatrix}.e^{2t}.[cos3t + isen3t]$$

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+3i \end{bmatrix}.e^{(2-3i)t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+3i \end{bmatrix}.e^{2t}.e^{-3it}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1+3i \end{bmatrix}.e^{2t}.(cos3t - isen3t)$$

Encontremos a parte real e imaginária de x_1 *ou de* x_2*:*

$$x_1(t) = e^{2t}.\left\{ \begin{bmatrix} 2cos(3t) \\ cos(3t) + 3sen(3t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2sen(3t) \\ sen(3t) - 3cos(3t) \end{bmatrix} \right\};\ t\ \in \mathbb{R}.$$

Logo a solução geral do sistema é:

$$X(t) = e^{2t}.\left\{ c_1.\begin{bmatrix} 2cos(3t) \\ cos(3t) + 3sen(3t) \end{bmatrix} + c_2.\begin{bmatrix} 2sen(3t) \\ sen(3t) - 3cos(3t) \end{bmatrix} \right\},\ t\ \in \mathbb{R}.$$

Justificamos o que foi feito acima voltando à equação $X' = A.X$. Seja os autovalores complexos conjugados $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. Então seus autovetores associados associados serão, respectivamente, v_1 e $v_2 = \overline{v_1}$ satisfazendo

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$$

e

$$(A - \overline{\lambda_1} I)\overline{v_1} = 0.$$

Observe que A e I são reais e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ e $v_2 = \overline{v_1}$.

Podemos encontrar duas soluções reais para o sistema $X' = A.X$ correspondente aos autovalores λ_1 e λ_2, utilizando as partes real e imaginária de $x_1(t)$ ou $x_2(t)$ como já fizemos. Tomemos pois $x_1(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}i)e^{(\alpha+\beta i)t}$. Assim:

$$x_1(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}i)e^{\alpha t}.e^{\beta i t} = x_1(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}i)e^{\alpha t}.(cos\beta t + isen\beta t).$$

Separando as partes real e imaginária, vem:

$$x_1(t) = e^{\alpha t}[(\mathbf{a}cos\beta t - \mathbf{b}sen\beta t) + i(\mathbf{a}sen\beta t + \mathbf{b}cos\beta t)].$$

Escrevendo $x_1(t) = u(t) + iw(t)$ segue que uma solução do sistema inicial é:

$$\begin{aligned} u(t) = &\ e^{\alpha t}(\mathbf{a}cos\beta t - \mathbf{b}sen\beta t), \\ w(t) = &\ e^{\alpha t}(\mathbf{a}sen\beta t + \mathbf{b}cos\beta t). \end{aligned}$$

Observe que $\mathbf{a}$ é a parte real de v_1 e $\mathbf{b}$ é a parte imaginária de v_1. Além disso não é difícil provar que $u(t)$ e $w(t)$ são LI.

A solução geral do sistema inicial será:

$$X(t) = c_1.e^{\alpha t}(\mathbf{a}cos\beta t - \mathbf{b}sen\beta t) + c_2.e^{\alpha t}(\mathbf{a}sen\beta t + \mathbf{b}cos\beta t)$$

Novamente c_1 e c_2 são constantes a serem determinadas com as condições iniciais.

5.2.3 Sistema com um autovalor real repetido e dois autovetores associados.

Neste caso não há dificuldades pois a solução do problema fica semelhante ao caso 1).

Exemplo 5.2.3. *Seja o sistema:*

$$\begin{cases} x_1' = & 2x_1 \\ x_2' = & 2x_2 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes do sistema acima é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculemos seus autovalores:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Dai $\lambda = 2$ é o único autovalor.
Os autovetores associados a $\lambda = 2$ satifazem a seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{cases} 2x_1 = & 2x_1 \\ 2x_2 = & 2x_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} 0x_1 = & 0 \\ 0x_2 = & 0. \end{matrix}$$

Portanto os autovetores são dados por

$$v_1 = (1, 0)$$
$$v_2 = (0, 1).$$

Como não houve vantagem nenhuma (a matriz já estava diagonalizada), não há motivos para uma troca de variáveis. Assim uma solução do sistema será: $x_1 = c_1.e^{2t}$ e $x_2 = c_2.e^{2t}$; c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$

ou de forma geral $X = c_1. \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .e^{2t} + c_2. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .e^{2t}$; c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$.

5.2.4 Sistema com um autovalor real repetido e um único autovetor associado.

Consideremos a equação $X' = A.X$ e vamos supor que λ é um autovalor duplo de A, mas existindo apenas um autovetor v associado. Uma solução é dada por:

$$x_1(t) = v.e^{\lambda t}, \ t \ \in \mathbb{R}.$$

tal que v satisfaz

$$(A - \lambda I).v = 0.$$

Considerando $dim\{v \in \mathbb{R}^2; Av = \lambda v\} = 1$ uma segunda solução pode ser encontrada da seguinte forma

$$x_2(t) = v.t.e^{\lambda t} + w.e^{\lambda t},\ t\ \in \mathbb{R}.$$

Aqui lembramos que v satisfaz $(A - \lambda I).v = 0$ e w satisfaz $(A - \lambda I).w = v$. (Pode-se demonstrar que esta última equação tem sempre solução para w).

Para verificar que $x_2(t) = v.t.e^{\lambda t} + w.e^{\lambda t}$ é uma solução de $X' = A.X$, façamos a substituição

$$X' = A.X.$$

Logo obtemos as seguintes equações

$$(v.t.e^{\lambda t} + w.e^{\lambda t})' = A.(v.t.e^{\lambda t} + w.e^{\lambda t})$$

$$v.e^{\lambda t} + \lambda.v.t.e^{\lambda t} + \lambda.w.e^{\lambda t} = A.v.t.e^{\lambda t} + A.w.e^{\lambda t}$$

$$(A.v - \lambda.v).t.e^{\lambda t} + (A.w - \lambda.w - v).e^{\lambda t} = 0.$$

Para que está última equação seja válida devemos ter:

$$(A - \lambda I).v = 0$$

e

$$(A - \lambda.I).w = v.$$

Logo basta resolvermos está equação adicional em relação a w para encontrarmos uma segunda solução.

Exemplo 5.2.4. *Seja a equação diferencial* $X' = A.X$ *em que* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. *Encontremos os autovalores e autovetores. Veja que*

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Então os autovetores são dados pelo seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Assim temos $-x_1 + x_2 = 0$. *Para* $x_1 = 1$ *temos* $x_2 = 1$ *e* $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *é o único autovetor associado à* $\lambda = 2$.
Uma solução é dada pela seguinte equação

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .e^{2t}, \ t \ \in \mathbb{R}.$$

Tomando $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, *resolvamos a seguinte equação:*

$$(A - 2.I).w = v = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Este sistema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} -w_1 + w_2 = & 1 \\ -w_1 + w_2 = & 1. \end{cases}$$

Cuja solução é $w_1 = w_2 - 1$, *fazendo* $w_2 = 1$, *teremos* $w_1 = 0$. *Logo a segunda solução é:*

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .e^{2t}, \ t \ \in \mathbb{R}.$$

Logo a solução geral é dada por:

$$X(t) = c_1. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .e^{2t} + c_2. \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .e^{2t} \right], \ t \ \in \mathbb{R}.$$

5.3 Sistema massa-mola simples

As aplicações são muitas em Física, Engenharia, Economia, Biologia, etc. É possível, por este método, por exemplo, resolver um sistema com duas massas e três molas:

Se supusermos que não há forças externas, isto é, $F_1(t) = F_2(t) = 0$. Então as coordenadas x_1 e x_2, serão:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2$$

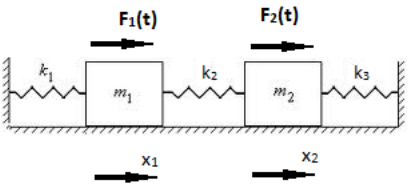


Figura 1: Um sistema massa-mola

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2$$

Que podem ser transformadas em um sistema de quatro equações de primeira ordem e resolvidas de acordo com o que já expusemos até aqui.

Façamos uma aplicação mais simples, escolhendo uma que envolve uma mola de massa **m** e constante **k** de acordo com a equação diferencial:

$$my'' + ky = 0. \qquad (*)$$

Aqui $y(t)$ é o deslocamento da massa no instante t a partir de sua posição de equilíbrio.
a) Sejam $x_1 = y$ e $x_2 = y'$; mostremos que o sistema resultante é dado por:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} x.$$

b) Encontremos os autovalores da matriz para o sistema no ítem (a).
c) Vamos esboçar diversas trajetórias do sistema. Escolhamos uma dessas trajetórias e construamos os gráficos correspondentes de x_1 e de x_2 em função de t, em algum caso particular.

$\boxed{\textbf{Solução:}}$ a) Tomemos $y = x_1$, $y' = x_2$. Assim:

$$x_1' = y' = x_2$$

$$x_2' = y''$$

Substituindo na equação $my'' + ky = 0$, teremos as seguinte equações:

$x'_1 = \quad x_2$

$x''_2 = \quad -\frac{k}{m}x_1.$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

que é da forma $X' = A.X$.

b) Encontremos os autovalores da matriz A. Inicialmente, o polinômio característico é dado por

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{m} & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{m}.$$

Então os autovalores são dados por

$$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}} \ e \ \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

c) Um autovetor associado a λ_1 é:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{bmatrix}.$$

(Observe que $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{bmatrix}$ é o autovetor associado a λ_2).

Assim uma solução para x_1 é dada por

$$x_1 = v_1.e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}.t} = \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{bmatrix} .e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}.t}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{bmatrix} \left[cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t\right) + i.sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t\right)\right], \ t \ \in \mathbb{R}.$$

Defina $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$x_1 = \begin{bmatrix} cos(w.t) \\ -wsen(w.t) \end{bmatrix} + i. \begin{bmatrix} sen(w.t) \\ w.cos(w.t) \end{bmatrix} = u(t) + iw(t)$$

Neste caso a solução geral é dada por

$$X = c_1. \begin{pmatrix} cos(w.t) \\ -w.sen(w.t) \end{pmatrix} + c_2. \begin{pmatrix} sen(w.t) \\ w.cos(w.t) \end{pmatrix}, \ t \ \in \mathbb{R}.$$

Observe que

$$x_1(t) = c_1.cos(w.t) + c_2.sen(w.t), \ t \ \in \mathbb{R},$$

é a posição do bloco em relação à sua posição de equilíbrio. Além disso, temos que

$$x_2(t) = -c_1.w.sen(w.t) + c_2.w.cos(w.t), \ t \ \in \mathbb{R}, \ ou$$

$$x_2(t) = c_4.cos(w.t) - c_3.sen(w.t), \ t \ \in \mathbb{R},$$

ao qual representa sua velocidade.
Assim encontramos a solução do problema (*) bem como descrevemos a posição e a velocidade em cada instante t $\in \mathbb{R}$.

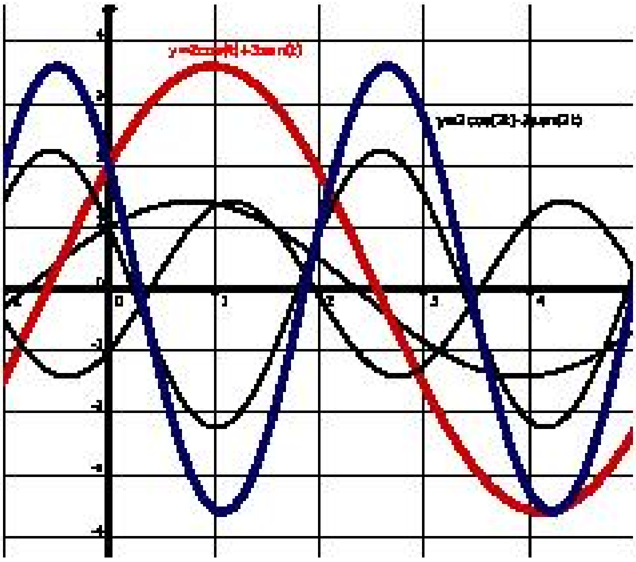


Figura 2: $y = 2cos(t) + 3sen(t)$ $y = 2cos(2t) - 3sen(2t)$

Conclusão

Concluimos que é possível um problema, modelado por uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, ser transformanda num sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem e ser resolvida, utilizando de forma elegante, a álgebra linear.

Referências

[1] **Anton Howard e Chris Rorres**. *Álgebra linear com aplicações*. Tradução Claus Ivo Doering, Porto Alegre, RS, Bookman, 2001.

[2] **David Poole**. *Álgebra linear*. Tradutora Martha S. Monteiro ··· [et al.],São Paulo,SP, Pioneira Thomson Learning, 2004.

[3] **Rodney Josué Biezuner**. *Álgebra linear*. Notas de aula, UFMG, MG, 2008.

[4] **klaus Jänich**. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro, RJ, LTC, 1988.

[5] **José Luis Boldrini ··· [et al.]**. *Álgebra linear*. São Paulo, SP, Harper & Row do Brasil, 1980.

[6] **Elon Lages Lima**. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro, RJ, IMPA, 2011.

[7] **Dennis G. Zill e Michael R. Cullen**. *Equações Diferenciais*. tradução Alfredo Alves de Faria, São Paulo, SP, MAKRON Books, 2001.

[8] **William E. Boyce e Richard C. DiPrima**. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Tradução Valéria de M. Iório, Rio de Janeiro, RJ, LTC, 2010.