



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

CARLOS FÁBIO DE CARVALHO

NÚMEROS HÍBRIDOS E SUA VISUALIZAÇÃO NO GEOGEBRA

FORTALEZA-CEARÁ

2019

CARLOS FÁBIO DE CARVALHO

NÚMEROS HÍBRIDOS E SUA VISUALIZAÇÃO NO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Álgebra.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

FORTALEZA – CEARÁ

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Carvalho, Carlos Fábio de .

Números híbridos e sua visualização no geogebra
[recurso eletrônico] / Carlos Fábio de Carvalho. -
2019.

1 CD-ROM: il.; 4 ¼ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do
trabalho acadêmico com 103 folhas, acondicionado em
caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia,
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional, Fortaleza, 2019.

Área de concentração: Álgebra. .

Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

1. Números híbridos. 2. Números Complexos. 3.
Números Duais. 4. Números Hiperbólicos. I. Título.

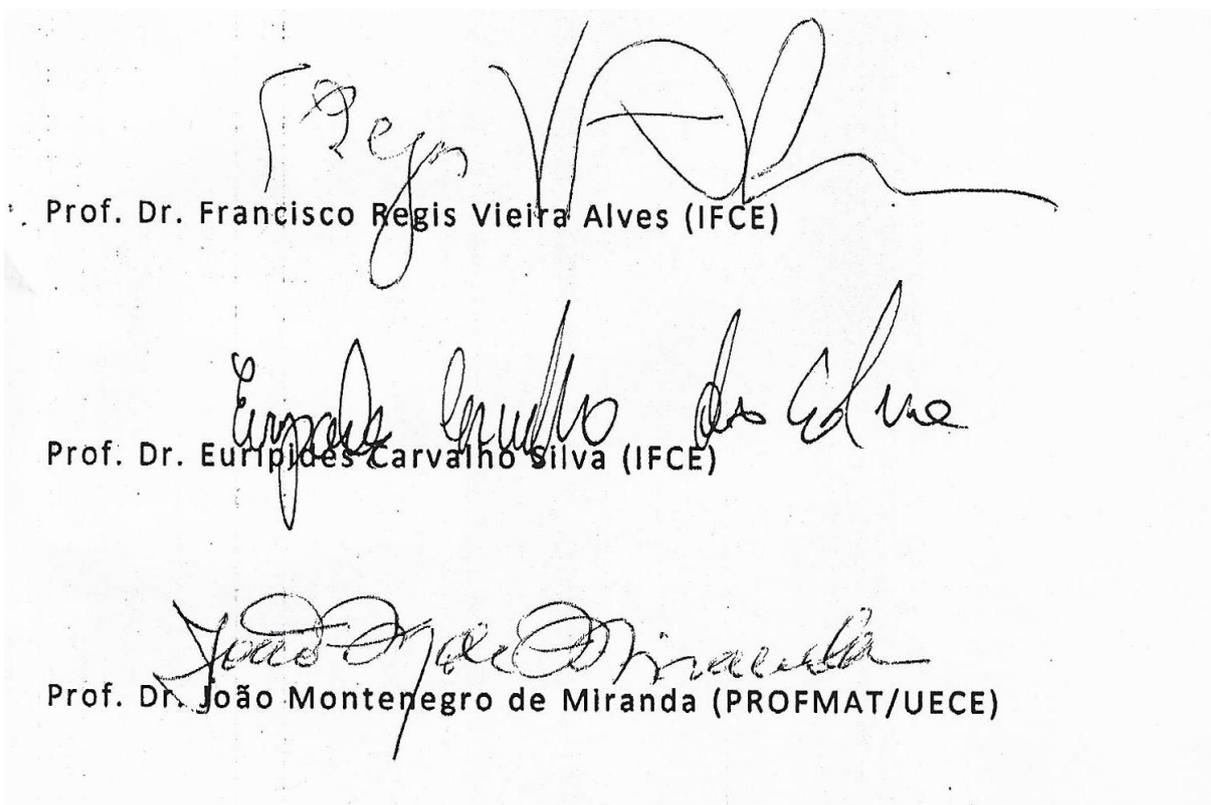
CARLOS FÁBIO DE CARVALHO

NÚMEROS HÍBRIDOS E SUA VISUALIZAÇÃO NO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Rede nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Álgebra.

Aprovado em: 27 de junho de 2019

BANCA EXAMINADORA



À minha mãe (ivonete carvalho)

Ao meu irmão (marcelo)

Aos meus filhos (caio e brunno)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar à Deus que em tudo tem me ajudado, dando-me forças nos momentos em que eu pensava em desistir, fé nos momentos em que acreditava que seria impossível concluir um mestrado e principalmente me fazendo enxergar aquilo que sozinho eu não conseguiria enxergar.

À minha mãe, irmão e filhos que sempre foram o nascedouro de todo o meu desejo de crescer, para que assim pudesse contribuir para tornar suas vidas melhores.

Aos meus colegas de mestrado por compartilhar tantas alegrias e conhecimentos, além de todas as angústias ao longo do curso.

Aos meus professores de curso, que muito pacientemente nos ensinaram tanto.

Ao professor Dr. Francisco Régis Vieira Alves, por me orientar em minha pesquisa proporcionando a rica oportunidade de conhecer mais sobre os Números Híbridos.

E por fim, a todos que fazem parte da minha vida e contribuíram direta e/ou indiretamente para que eu concluísse esse curso tão importante para mim, muito obrigado.

RESUMO

O presente trabalho traz em seu escopo definições, propriedades, representação geométrica, teoremas e axiomas de um novo conjunto numérico, os números Híbridos, a partir da generalização de três conjuntos numéricos amplamente difundidos, a saber, os números Complexos, Duais e Hiperbólicos. A história da evolução destes três conjuntos numéricos, bem como o isomorfismo entre o conjunto dos números híbridos e o conjunto das matrizes quadradas de ordem dois em contribui grandemente para a demonstração de alguns teoremas aqui apresentados. Ao passo que buscamos ampliar o foco de estudo sobre os números híbridos, apresentamos também uma representação geométrica bidimensional de tais números por meio do Geogebra. Pesquisas bibliográficas em trabalhos acadêmicos, em especial o artigo de Odzemir Mustafa sobre os números híbridos, fundamentaram a construção desta dissertação. Nada menos do que ampliar o foco de estudo sobre os números híbridos e contribuir para a formação de professores de Matemática compõe os resultados, por esta pesquisa, esperados.

Palavras-chave: Números híbridos. Números Complexos. Números Duais. Números Hiperbólicos;

ABSTRACT

The present work brings within its scope definitions, properties, geometric representation, theorems and axioms of a new numerical set, the Hybrid numbers, from the generalization of three widely widespread numerical sets, namely Complex, Duo and Hyperbolic numbers. The history of the evolution of these three sets of numbers, as well as the isomorphism between the set of hybrid numbers and the set of square matrices of order two, greatly contributes to the demonstration of some theorems presented here. While we seek to broaden the focus of study on hybrid numbers, we also present a two-dimensional geometric representation of such Odzemir Mustafa's article on hybrid numbers, grounded the construction of this dissertation. Nothing less on than extend the focus of study on hybrid numbers and contributing to the training of mathematics teachers are the results expected by this research.

Keywords: Hybrid Numbers. Complex Numbers. Double Numbers. Hyperbolic Numbers;

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-	Rotações no plano euclidiano, lorentziano e galileano.....	20
Figura 2 –	Diagrama das generalizações.....	27
Figura 3-	Plano hibridiano.....	42
Figura 4-	Triângulos semelhantes no plano.....	84
Figura 5-	Pontos A, B e C alinhados.....	85
Figura 6-	Gráficos de funções afins usando a ferramenta inclinação.....	86
Figura 7-	Gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.....	87
Figura 8-	Representação do hiperplano hibridiano.....	88
Figura 9-	Plano hibridiano.....	89
Figura 10-	Representação Geométrica de $Z = 2 + i + \varepsilon + h$.....	90
Figura 11-	Representação de $W = -3 + 2i + \varepsilon + 2h$.....	91
Figura 12-	Representação da soma de dois híbridos.....	92
Figura 13-	Produto de dois números híbridos.....	94
Figura 14-	Representação do número Z e de seu conjugado \bar{Z}.....	95
Figura 15-	Representação de Z e de seu simétrico	96
Figura 16-	Gráfico do produto de dois números híbridos	97

LISTA DE TABELAS

Tabela 1-	Propriedades gerais dos números complexos, duais e hiperbólicos.....	26
Tabela 2-	Quadro de produto hibridiano.....	31
Tabela 3-	Quadro de classificação dos números híbridos.....	39
Tabela 4-	Produto hibridiano e a classificação dos números híbridos.....	40
Tabela 5-	Tabela de produto escalar.....	44
Tabela 6-	Produto vetorial dos números híbridos.....	46
Tabela 7 -	Formas polares dos números híbridos.....	59
Tabela 8-	Classificação de uma matriz híbrida.....	81

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES SOBRE OS NÚMEROS COMPLEXOS, DUAIS E HIPERBÓLICOS	15
2.1	DEFINIÇÃO E APLICAÇÃO DOS COMPLEXOS, DUAIS E HIPERBÓLICOS	15
2.2	TESSARINA QUADRIDIMENSIONAL E OUTRAS GENERALIZAÇÕES	21
3	OS NÚMEROS HÍBRIDOS	27
3.1	PROPRIEDADES	28
3.2	OPERAÇÕES COM OS NÚMEROS HÍBRIDOS	29
3.3	NORMA E CLASSIFICAÇÃO DOS NÚMEROS HÍBRIDOS.....	33
3.4	RELAÇÕES E REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS	46
3.4.1	Representação Matricial dos Números Híbridos	46
3.4.2	Representação Polar dos Números Híbridos	52
3.5	FÓRMULA DE MOIVRE PARA OS NÚMEROS HÍBRIDOS	61
3.6	RAÍZES DOS NÚMEROS HÍBRIDOS	64
3.7	OS NÚMEROS HÍBRIDOS E A CLASSIFICAÇÃO DE MATRIZES	77
4	SOFTWARE GEOGEBRA E A REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS HÍBRIDO	81
4.1	O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA MATEMÁTICA.....	81
4.2	NOÇÕES DE FUNÇÃO AFIM COM A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA.	82
4.3	REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS HÍBRIDOS.....	87
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
	REFERÊNCIAS	100

1 INTRODUÇÃO

Certa vez Galileu Galilei disse: “A matemática é o alfabeto que Deus usou para criar o mundo “. Galilei, ao pronunciar tal pensamento, foi muito feliz em traduzir nesta frase a importância da Matemática para existência da vida humana. Suas fórmulas e teoremas estão presentes desde uma simples contagem de objetos até as mais sofisticadas tecnologias estruturadas sobre algoritmos matemáticos dos mais simples aos mais complexos.

Dentro da Matemática identificamos, entre outros, três conjuntos numéricos cuja existência contribuiu significativamente para o avanço da ciência, sendo estes os conjuntos dos números Complexos, Duais e Hiperbólicos. Entre as várias aplicações, podemos ver nos números complexos, uma ferramenta que nos permite resolver problemas simples como dividir um fio de arame de em duas partes de tal modo que com essas partes se possam formar dois quadrados distintos. Vemos ainda que a geometria do plano euclidiano pode perfeitamente ser caracterizada com números complexos, conforme (OLARIU, 2000), onde cada número complexo z está associado a um ponto de \mathbb{R}^2 .

Na Física vemos que a ideia de surperespaços vetoriais está ligada aos números duais, conforme (GALPERIN, 2001) e tal número ainda encontra aplicações em mecânica quântica e mecânica clássica de parafusos, como podemos ver em (DIMENTBERG, 1978). Vale salientar que assim como o plano euclidiano pode ser relacionado aos números complexos, o plano de Galileu pode ser relacionado aos números duais.

Por sua vez, segundo (OZDEMIR, 2018), nos números hiperbólicos vemos uma extensão bidimensional dos números reais e pensando de modo análogo às geometrias dos planos de Euclides e de Galileu, o plano lorentziano, com ampla aplicação na física, pode ser descrito em função dos números hiperbólicos, segundo (OLARIU, 2000).

Com uma generalização dos números Complexos, Duais e Hiperbólicos, Ozdemir trouxe à existência um novo conjunto numérico a quem chamou de Números Híbridos. Muito se sabe dos três conjuntos acima mencionados, diferentemente dos números Híbridos, não tão conhecidos e ainda bem pouco difundido, por se tratar de um tema recente.

Mas como estes números se relacionam entre si para formar os números híbridos e qual a importância, para a ciência, dessa generalização na construção de novos saberes? Responder essas perguntas não é algo tão simples, mas após pesquisas sobre os artigos correlatos traremos à luz os passos de Ozdemir na construção desse novo conjunto numérico que ganha cada vez mais destaque no rol de grandes pesquisadores. Neste artigo apresentaremos as propriedades algébricas e geométricas desses números, destacando a importância do isomorfismo entre o anel dos números híbridos e o anel das matrizes quadradas 2×2 na demonstração de alguns teoremas muito importantes à consolidação desse novo conjunto na Álgebra Moderna.

De igual modo é importante visualizar esses números em sua forma geométrica, possibilitando-nos compreendê-los como números representáveis no sistema bidimensional à semelhança do plano cartesiano, no qual terá suas partes, escalar e vetorial, associadas aos eixos escalar e híbrido, respectivamente. Essa representação se mostra perfeitamente exequível quando usamos um software muito usado para tais representações, a saber, o Geogebra.

Ao analisar o artigo de (COUTINHO JÚNIOR, 2018), percebemos que vários softwares possibilitam a visualização desses números em sua representação geométrica, como por exemplo o Calques 3D, o Cabri 3D, o WinGeom, entre outros, mas o que nos motivou a escolher o Geogebra foi o fato dessa ferramenta ser de fácil acesso e simples manipulação, proporcionando uma interação dinâmica entre a Geometria e a Álgebra.

Esta pesquisa visa analisar como os números Complexos, Duais e Hiperbólicos contribuem para a descoberta dos números Híbridos, quais semelhanças entre os conceitos, propriedades e teoremas desses diversos tipos numéricos e como podem ser classificados e representados geometricamente os números Híbridos. Analisaremos também como o isomorfismo entre o conjunto dos números híbridos e o conjunto das matrizes quadradas 2×2 contribui para a demonstração de alguns teoremas muito importantes ao longo dessa pesquisa.

Assim, o breve histórico e afirmativas apresentadas nos parágrafos anteriores pretendem explicitar o seguinte problema de pesquisa: Como a generalização dos números Complexos, Duais e Hiperbólicos deram origem aos números Híbridos e

como o Geogebra pode contribuir para o fortalecimento da compreensão destes números?

A descoberta desse novo conjunto leva sobre si as expectativas de cientistas que anseiam pelo dinamismo da ciência, que certamente passa pela sua evolução, principalmente com a descoberta de aplicações em suas diversas áreas. Os números híbridos são frutos da generalização de três conjuntos numéricos muito conhecidos por pesquisadores na Matemática e na Física, a saber os números complexos, duais e hiperbólicos.

Pelo que pudemos observar de nossas pesquisas, não temos muitos trabalhos acadêmicos publicados sobre os números híbridos em português, como também não há livros-texto publicados no Brasil que trate, mesmo que adjacientemente, do tema, e isto o que nos levou a ter especial interesse na proposta de um material, na língua vernácula, que ofereça suporte de pesquisa aos alunos de licenciatura em Matemática e Física da Universidade Estadual do Ceará, a fim de dar maior robustez a sua formação acadêmica, desbravando assim as regiões inóspitas desse novo conjunto numérico, os números Híbridos.

A construção da ideia de números híbridos se fundamenta essencialmente sobre o que se sabe dos números complexos, duais e hiperbólicos, como podemos ver por exemplo nas relações de Moivre, entre outras, replicadas nestes números. Assim, concentramos o nosso foco de pesquisa em alguns artigos e livros-texto publicados especialmente na última década.

Poderemos ver que os números Complexos trazem uma especial contribuição para os números Híbridos, evidenciada na verossimilhança das construções destes números que vão desde as suas definições até as suas representações no plano, passando pelas fórmulas de Moivre.

Segundo (ATAHIDE, 2018), temos nos números complexos uma extensão dos números reais, uma vez que este contém todos os demais conjuntos numéricos. Em sua pesquisa “NÚMEROS COMPLEXOS E ALGUMAS APLICAÇÕES”, (ATAHIDE, 2018) deixa claro que é necessário compreender as operações entre os números Complexos, bem como suas propriedades trigonométricas e representação geométrica no plano de Argand-Gauss, mas que antes de se aprofundar em tais conhecimentos, é preciso conhecer a história destes números, o que de modo indireto contará a história dos números Híbridos.

Em um recorte de sua pesquisa, (ATAHIDE, 2018) destaca a importância de se conhecer a história da evolução da álgebra ao longo do tempo e como relatos apontam para a correlação entre tal evolução e a construção da teoria dos números complexos.

Gostaríamos de redizer que, fim de compreender os números Híbridos, se faz necessário construí-los geometricamente a fim de que sua visualização nos permita entender como estes se relacionam com os números Complexos, Duais e Hiperbólicos. Para esse fim recorreremos ao software Geogebra e nos sustentamos, entre outras, na pesquisa “UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DE ALGUNS CONCEITOS ENVOLVENDO FUNÇÕES APOIADA PELO SOFTWARE GEOGEBRA”, de (MOREIRA JÚNIOR, 2018).

Em sua pesquisa (MOREIRA JÚNIOR, 2018) apud (LOPES, 2010), ressalta os recursos do software Geogebra e suas contribuições para otimizar o ensino/aprendizagem de trigonometria através da aplicação de um módulo de atividades investigativas em alunos da segunda série do ensino médio.

Em seus estudos (MOREIRA JÚNIOR, 2018) destaca que (LOPES, 2010) aclara a ideia de (BROCADO, 2001), de que em tais atividades alguns processos matemáticos são envolvidos, tais como: formulação de conjecturas, teste de conjecturas e prova das conjecturas. Segundo Moreira Júnior, o software foi um facilitador, permitindo encorajar o processo de descoberta e de autoavaliação dos alunos, possibilitando ao professor obter a verificação dos procedimentos de construção que foram feitos pelos alunos através do recurso “protocolo de construção”.

Em nossos estudos analisaremos a construção dos números híbridos, conheceremos a sua representação geométrica bem como buscaremos ampliar o foco de estudo sobre os números híbridos.

Em nossa pesquisa lançamos mão de um método que buscasse de forma eficaz dar robustez ao nosso projeto garantindo-lhe confiabilidade e, para tanto, nos preocupamos com o propósito de nossa pesquisa, com a abordagem e com a técnica que julgamos ser apropriadas para realizar tal pesquisa, visando assim, de forma clara, apresentar nosso objeto de estudo, a saber, o conjunto dos números híbridos.

A metodologia que norteia o nosso trabalho, quanto ao seu propósito, é explicativa, uma vez que buscamos compreender como a generalização dos números complexos, duais e hiperbólicos contribuirá para a construção dos números híbridos

e como a representação geométrica destes, visualizada no Geogebra, contribui para a formação dos professores de Matemática e Física.

Quanto a abordagem, nossa pesquisa tem caráter qualitativo, onde buscamos compreender e interpretar o comportamento dos números Híbridos e como estes se relacionam com os demais conjuntos numéricos. Quanto à técnica optamos por pesquisas bibliográficas, onde analisaremos alguns artigos nacionais, publicados por alunos do Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT), e artigos internacionais, em especial, o de (OZDEMIR, 2018), sobre os números híbridos.

Analisamos a priori o artigo de (ATAHIDE, 2018), “Números Complexos e Algumas Aplicações”, a fim de entender como surgiram os números complexos, bem como estes tiveram importante papel na resolução de problemas do cotidiano. Analisamos também o artigo “Uma Proposta para o Estudo de Alguns Conceitos Envolvendo Funções Apoiada pelo Geogebra”, de (MOREIRA JÚNIOR, 2018), onde ele de forma muito clara apresenta algumas funcionalidades do Geogebra e como os números complexos podem ser representados geometricamente neste software.

Buscamos ainda informações que consubstanciasse nosso trabalho no artigo de (COUTINHO JÚNIOR, 2018) e deste pudemos perceber a existência de vários outros softwares bem como suas diversidades, de modo que pudéssemos ter precisão na escolha do Geogebra como ferramenta para apresentar no plano bidimensional os números híbridos.

Esperamos, com esta pesquisa, difundir o conceito de números híbridos entre os alunos de licenciatura de Matemática e Física no Brasil, em especial nas universidades públicas do Ceará, apresentando um material conciso e de fácil compreensão, que traga em seu escopo não apenas definições e teoremas, mas também representação geométrica, com o Geogebra, e aplicações.

2 PRELIMINARES SOBRE OS NÚMEROS COMPLEXOS, DUAIS E HIPERBÓLICOS

2.1 DEFINIÇÃO E APLICAÇÃO DOS COMPLEXOS, DUAIS E HIPERBÓLICOS

Números Complexos \mathbb{C} , Hiperbólicos \mathbb{P} e Duais \mathbb{D} são definidos conforme abaixo:

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid i^2 = -1 \text{ e } x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{P} = \{x + yh \mid h^2 = 1, h \neq 1 \text{ e } x, y \in \mathbb{R}\}$$

e

$$\mathbb{D} = \{x + y\varepsilon \mid \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0 \text{ e } x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Os conjuntos supracitados são extensões bidimensionais dos números reais, sendo estes dois últimos definidos de modo similar aos números Complexos. Os conjuntos dos números complexos são instâncias dos números hipercomplexos, assim como os quatérnios, porém, diferentemente dos quatérnios, os complexos são instâncias comutativas. Vale ressaltar que números hipercomplexos são extensões dos números complexos, tendo a sua forma geral dada por

$$a_0 + a_1 \cdot i_1 + a_2 \cdot i_2 + a_3 \cdot i_3 + \dots + a_n \cdot i_n,$$

onde n é um número inteiro $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais arbitrários $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ são tais que

$$a_0 + a_1 \cdot i_1 + a_2 \cdot i_2 + a_3 \cdot i_3 + \dots + a_n \cdot i_n = b_0 + b_1 \cdot i_1 + b_2 \cdot i_2 + b_3 \cdot i_3 + \dots + b_n \cdot i_n$$

se, e somente se,

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_n = b_n.$$

Já os quatérnios de Hamilton, são instâncias dos hipercomplexos definidos por

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}.$$

A geometria do plano euclidiano pode ser identificada com números complexos por serem topologicamente equivalentes, onde cada número complexo Z está

associado a um ponto de \mathbb{R}^2 . Pensando de modo análogo, as geometrias dos Planos de Minkowski e de Galileu podem ser descritas em função de números hiperbólicos e números duais, respectivamente.

Os números hiperbólicos também podem ser chamados de espaço-tempo, duplo, perplexo ou números complexos divididos conforme (BOROTA E OSLER, 2002) e a introdução destes números, segundo (OZDEMIR, 2018), se deu por J. Cockle em 1843. Cockle escreveu uma série de artigos nos quais introduziu uma nova álgebra chamada por ele de Álgebra de Tessarina. Nesse tempo, mais precisamente em 1848, o mesmo introduziu também os números hiperbólicos com coeficientes complexos, sendo estes denominados tessarina quadridimensionais, chamada posteriormente por (AKAR, YUCE E SAHIN, 2018) de números hiperbólicos complexos.

No final do século XX Albert Einstein se baseou nas construções geométricas do plano Lorentziano para desenvolver sua teoria da relatividade especial. Como visto anteriormente, o plano Lorentziano pode ser descrito em função dos números hiperbólicos, logo esses números tiveram uma importância significativa nas construções de Einstein.

Os números duais foram introduzidos em 1873 por William Clifford e hoje são muito usados em Mecânica quântica, segundo (HUDSON, 1966) e mecânica clássica de parafusos, conforme (DIMENTBERG, 1978). O conjunto dos números duais é munido da operação de adição, gozando das propriedades comutativa, associativa, elemento neutro e elemento inverso, e da operação de multiplicação, gozando das propriedades associativa e distributiva.

Proposição 1. O conjunto dos números Duais tem uma estrutura de anel comutativo.

Sejam dois números duais $\mathbb{D}_1 = a + b\varepsilon$, $\mathbb{D}_2 = c + d\varepsilon$ e $\mathbb{D}_3 = e + f\varepsilon$. Assim sendo temos:

Verificação:

ADIÇÃO:

$$i) \quad \mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2 = a + b\varepsilon + c + d\varepsilon$$

$$= (a + c) + (b + d)\varepsilon$$

$$= (c + a) + (d + b)\varepsilon$$

$$= c + d\varepsilon + a + b\varepsilon$$

$$= \mathbb{D}_2 + \mathbb{D}_1;$$

$$ii) \quad (\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2) + \mathbb{D}_3 = (a + b\varepsilon + c + d\varepsilon) + e + f\varepsilon$$

$$= [(a + c) + (b + d)\varepsilon] + e + f\varepsilon$$

$$= (a + c) + e + (b + d)\varepsilon + f\varepsilon$$

$$= (a + c) + e + [(b + d) + f]\varepsilon$$

$$= a + (c + e) + [b + (d + f)]\varepsilon$$

$$= a + (c + e) + b\varepsilon + (d + f)\varepsilon$$

$$= a + b\varepsilon + (c + e) + (d + f)\varepsilon$$

$$= \mathbb{D}_1 + (\mathbb{D}_2 + \mathbb{D}_3).$$

iii) O conjunto dos números duais admite o 0 como elemento neutro, uma vez que

$$\mathbb{D}_1 = a + b\varepsilon + 0 = a + b\varepsilon = \mathbb{D}_1.$$

iv) Dado o número dual $\mathbb{D}_1 = a + b\varepsilon$, $\mathbb{D}_s = -a - b\varepsilon$ é o inverso aditivo de \mathbb{D}_1 uma

vez que $\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_s = a + b\varepsilon - a - b\varepsilon = 0$.

MULTIPLICAÇÃO

$$v) \quad (\mathbb{D}_1 \cdot \mathbb{D}_2) \cdot \mathbb{D}_3 = [(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon)] \cdot (e + f\varepsilon)$$

$$= (ac + ad\varepsilon + bc\varepsilon + bd\varepsilon^2) \cdot (e + f\varepsilon)$$

$$= (ac)e + (ac)f\varepsilon + (ad)e\varepsilon + (ad)f\varepsilon^2 + (bc)e\varepsilon + (bc)f\varepsilon^2 + (bd)e\varepsilon^2 + (bd)f\varepsilon^3$$

$$= a(ce) + a(cf)\varepsilon + a(de)\varepsilon + a(df)\varepsilon^2 + b(ce)\varepsilon + b(cf)\varepsilon^2 + b(de)\varepsilon^2 + b(df)\varepsilon^3$$

$$\begin{aligned}
&= a(ce + cf\varepsilon + de\varepsilon + df\varepsilon^2) + b\varepsilon(ce + cf\varepsilon + de\varepsilon + \\
&df\varepsilon^2) \\
&= (a + b\varepsilon)(ce + cf\varepsilon + de\varepsilon + df\varepsilon^2) \\
&= (a + b\varepsilon)[c(e + f\varepsilon) + d(e + f\varepsilon)\varepsilon] \\
&= (a + b\varepsilon)[(c + d\varepsilon)(e + f\varepsilon)] \\
&= \mathbb{D}_1 \cdot (\mathbb{D}_2 \cdot \mathbb{D}_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
vi) \quad \mathbb{D}_1 \cdot \mathbb{D}_2 &= \\
&= (a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) \\
&= ac + ad\varepsilon + bc\varepsilon + bd\varepsilon^2 \\
&= ca + da\varepsilon + bc\varepsilon + db\varepsilon^2 \\
&= (c + d\varepsilon)(a + b\varepsilon) \\
&= \mathbb{D}_2 \cdot \mathbb{D}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
vii) \quad \mathbb{D}_1 \cdot (\mathbb{D}_2 + \mathbb{D}_3) &= (a + b\varepsilon)[(c + d\varepsilon)(e + f\varepsilon)] \\
&= ac + ad\varepsilon + ae + af\varepsilon + bc\varepsilon + bd\varepsilon^2 + be\varepsilon + bf\varepsilon^2 \\
&= (ac + ad\varepsilon + bc\varepsilon + bd\varepsilon^2) + (ae + af\varepsilon + bc\varepsilon + \\
&bf\varepsilon^2) \\
&= [a(c + d\varepsilon) + b\varepsilon(c + d\varepsilon)] + [a(e + f\varepsilon) + \\
&b\varepsilon(e + f\varepsilon)] \\
&= (a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) + (a + b\varepsilon)(e + f\varepsilon) \\
&= \mathbb{D}_1 \cdot \mathbb{D}_2 + \mathbb{D}_1 \cdot \mathbb{D}_3.
\end{aligned}$$

Como o anel é comutativo $(\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2) \cdot \mathbb{D}_3 = \mathbb{D}_3(\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2) = \mathbb{D}_3\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_3\mathbb{D}_2 = \mathbb{D}_1\mathbb{D}_3 + \mathbb{D}_2\mathbb{D}_3$.

Como o conjunto dos números duais é munido das operações de adição e multiplicação, onde a adição goza das propriedades *i*, *ii*, *iii* e *iv* e a multiplicação goza

das propriedades *v*, *vi* e *vii*, tal conjunto tem uma estrutura de anel. Analogamente aos números duais podemos verificar que o conjunto dos números hiperbólicos também tem uma estrutura de anel.

Os números Duais de Clifford foram amplamente usados no século XX pelo matemático alemão Eduard Study que os usou para representar o ângulo duplo que mede a posição relativa de duas linhas oblíquas no espaço. Tal estudo definiu o ângulo duplo como $\theta + d\varepsilon$, onde θ é o ângulo entre as duas linhas no espaço tridimensional e d é uma distância entre essas linhas.

Uma Álgebra de Clifford como um espaço de quatro dimensões, que é abrangido por $1, e_0, e_1, e_0e_1$ com multiplicação não comutativa, apresenta as seguintes identidades:

$$e_0^2 = -1, e_1^2 = \sigma = \begin{cases} -1, & \text{quando } Cl(e) \text{ for Elíptica} \\ 0, & \text{quando } Cl(e) \text{ for Parabólica, } e_0e_1 + e_1e_0 = 0. \\ 1, & \text{quando } Cl(e) \text{ for Hiperbólica} \end{cases}$$

Para qualquer das Álgebras, elíptica, parabólica ou hiperbólica, a notação $Cl(\sigma)$ pode ser usada, assumindo os valores para $\sigma = \{-1, 0, 1\}$. A subálgebra de $Cl^+(\sigma)$ é isomorfa aos números complexos, números hiperbólicos e números duais, quando se assume os valores $-1, 1$ e 0 para σ , respectivamente. Assim, temos que $Cl^+(-1)$ gerado por $\{1, e_0e_1\}$ é isomorfo aos números complexos e tem-se que:

$$i^2 = (e_0e_1)^2 = (e_0e_1)(e_0e_1) = e_0(e_1e_0)e_1 = -e_0^2e_1^2 = -1.$$

De igual modo temos que $Cl^+(1)$, gerado por $\{1, e_0e_1\}$, é isomorfo aos números hiperbólicos, uma vez que

$$h^2 = (e_0e_1)^2 = (e_0e_1)(e_0e_1) = e_0(e_1e_0)e_1 = -e_0^2e_1^2 = 1$$

e que $Cl^+(0)$ gerado por $\{1, e_0e_1\}$ é isomorfo aos números duais, como podemos ver abaixo:

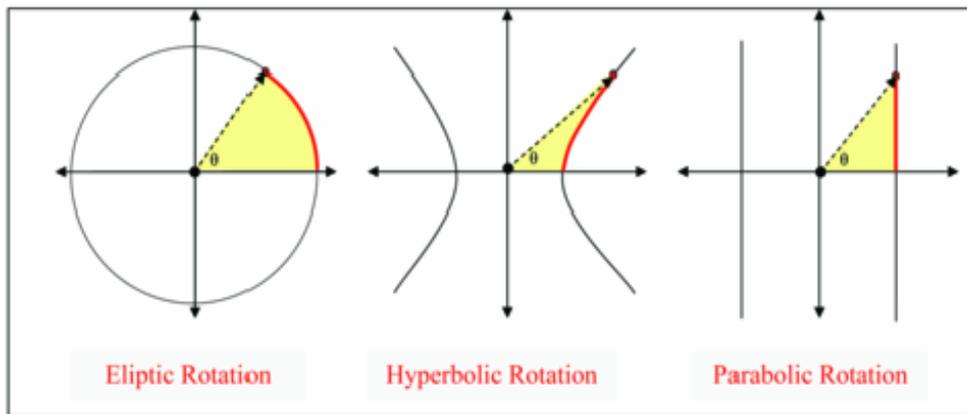
$$\varepsilon^2 = (e_0e_1)^2 = (e_0e_1)(e_0e_1) = e_0(e_1e_0)e_1 = -e_0^2e_1^2 = 0.$$

Conforme (OZDEMIR, 2018), o grupo de rotações euclidianas é isomorfo ao grupo dos números complexos unitários $e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$, isto é, a multiplicação

por $e^{i\theta}$ determina uma rotação no plano euclidiano. Algumas aplicações geométricas dos números complexos podem ser encontradas em (YAGLOM, 1968).

Similarmente, o grupo de rotações Lorentzianas é isomorfo, sendo o isomorfismo de anel melhor exposto a posteriori, ao grupo de números hiperbólicos unitários $e^{h\theta} = \cosh \theta + h \cdot \sinh \theta$, onde essas rotações são conhecidas como rotações hiperbólicas e são geradas a partir da multiplicação por $e^{h\theta}$. Temos ainda que no plano dos números duais, a multiplicação por $e^{\varepsilon\theta}$ leva um número dual em outro número dual, significando um mapa dos números duais em si mesmo, em rotações que podem ser chamadas de rotações parabólicas.

Figura 1- Rotações nos planos euclidiano, lorentziano e galileano



Fonte: (OZDEMIR, 2018)

Admitindo que $e^n = 0$ para todo $n > 1$, temos que

$$e^{\varepsilon\theta} = 1 + \varepsilon\theta + \frac{\varepsilon^2\theta^2}{2!} + \frac{\varepsilon^3\theta^3}{3!} + \dots,$$

onde

$$\varepsilon^2\theta^2 = 0, \quad \varepsilon^3\theta^3 = 0, \dots, \quad \varepsilon^3\theta^3.$$

Dessa forma temos que

$$e^{\varepsilon\theta} = 1 + \varepsilon\theta.$$

2.2 TESSARINA QUADRIDIMENSIONAL E OUTRAS GENERALIZAÇÕES

Tessarina quadridimensionais, de J. Cockle, nada mais são do que números hiperbólicos com coeficientes complexos. Temos tais números definidos conforme abaixo:

$$w = (z_1, z_2) = (x + yi) + h(u + vi),$$

onde

$$z_1 = x + yi \text{ e } z_2 = u + vi$$

e o conjunto destes números é denotado por

$$\mathbb{C}_h = \{w = z_1 + hz_2 / z_1, z_2 \in \mathbb{C}, h^2 = 1, h \neq 1\}.$$

Segundo (CHENG, 1996), a introdução dos números duais com coeficientes complexos, sendo chamados de números duais complexos, que como os números hiperbólicos complexos, também são comutativos. De modo análogo esses números podem ser definidos como:

$$w = (z_1, z_2) = (x + yi) + \varepsilon(u + vi), \text{ onde } z_1 = x + yi \text{ e } z_2 = u + iv,$$

sendo o conjunto destes números denotado por

$$\mathbb{C}_\varepsilon = \{w = z_1 + \varepsilon z_2 / z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0\}.$$

Em (AKAR, YUCE E SAHIN, 2018) foram introduzidos também os números hiperbólicos com coeficientes duais chamados de números hiperbólicos duais, e como os dois números anteriores, também são comutativos. É importante verificar que não há nenhuma diferença entre números hiperbólicos complexos e números complexos hiperbólicos, bem como entre os números complexos duais e números duais complexos ou ainda entre os números hiperbólicos duais e números duais hiperbólicos.

Os números hiperbólicos duais, onde os coeficientes são números duais, são definidos por

$$w = (d_1, d_2) = (x + \varepsilon y) + h(u + \varepsilon v),$$

onde

$$d_1 = x + \varepsilon y \text{ e } d_2 = u + \varepsilon v,$$

sendo o conjunto destes números denotado por

$$\mathbb{D}_{\mathbb{P}} = \{d_1 + h d_2 / d_1, d_2 \in \mathbb{D}, h = 1\}.$$

Já os números duais hiperbólicos, com coeficientes hiperbólicos, são definidos por

$$z = (h_1, h_2) = (x + h_1 u) + \varepsilon (y + h_2 v)$$

e o conjunto destes números é denotado por

$$\mathbb{P}_{\mathbb{D}} = \{h_1 + \varepsilon h_2 / h_1, h_2 \in \mathbb{P}, \varepsilon^2 = 0\}.$$

Se tomarmos o número hiperbólico dual

$$w = (d_1, d_2) = (x + \varepsilon y) + h(u + \varepsilon v).$$

temos que

$$\begin{aligned} w &= (x + \varepsilon y) + h(u + \varepsilon v) \\ &= x + \varepsilon y + hu + h\varepsilon v \\ &= x + hu + \varepsilon y + h\varepsilon v \\ &= (x + hu) + \varepsilon(y + hv), \end{aligned}$$

logo obtemos, a partir de um número hiperbólico dual, um número dual hiperbólico, onde vemos que não há diferença entre estes e aqueles. Podemos mostrar de modo análogo que a verossimilhança vale para os números hiperbólicos complexos e números complexos hiperbólicos, onde se partirmos do número complexo hiperbólico obtemos o número hiperbólico complexo. Conforme segue:

$$\begin{aligned} w &= (h_1, h_2) = (x + hy) + i(u + hv) \\ &= x + hy + iu + ihv \\ &= x + iu + hy + ihv \\ &= (x + iu) + h(y + iv). \end{aligned}$$

Temos também que o número um número dual complexo pode ser transformado em um número complexo dual do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
w &= (z_1, z_2) = (x + iy) + d(u + iv) \\
&= (x + iy) + d(u + iv) \\
&= x + iy + du + div \\
&= x + du + iy + +div \\
&= (x + du) + i(y + +dv).
\end{aligned}$$

Os números hiperbólicos duais ou números duais hiperbólicos, como instâncias dos números hipercomplexos, podem ainda ser escritos em função dos elementos da base $\{1, \varepsilon, h, \varepsilon h\}$ como

$$w = x + \varepsilon y + hu + \varepsilon h v$$

onde x é a parte real de w , y é a parte dual, u é a parte hiperbólica e v é a parte hiperbólica dual ou dual hiperbólica. Os elementos da base $\{1, \varepsilon, h, \varepsilon h\}$ satisfazem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
1. \varepsilon \cdot \varepsilon &= \varepsilon, & 1. h \cdot h &= h, & \varepsilon \cdot \varepsilon &= 0, & h \cdot h &= 1, \\
\varepsilon \cdot h &= -h \cdot \varepsilon, & \varepsilon \cdot (\varepsilon h) &= 0, & h \cdot (\varepsilon h) &= -\varepsilon,
\end{aligned}$$

onde ε representa a unidade dual pura, h representa a unidade hiperbólica pura e $\varepsilon \cdot h$ representa a unidade hiperbólica dual.

As unidades dos números complexos, duais e hiperbólicos podem ser representadas conforme abaixo:

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \varepsilon \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partindo das matrizes acima e da matriz que representa a unidade real, a saber

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

temos:

$$\begin{aligned}
1) \ x + yi &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{II) } x + yh &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III) } x + y\varepsilon &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De acordo com o exposto acima, vemos que os números complexos, duais e hiperbólicos podem ser representados pelas matrizes

$$x + iy \leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad x + hy \leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \quad e \quad x + \varepsilon y \leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Como veremos a posteriori, cada mapeamento acima é um isomorfismo uma vez que as operações de adição e multiplicação em relação aos números complexos, duais e hiperbólicos correspondem às operações de adição e multiplicação com suas respectivas matrizes.

Aqui, as operações de adição e de multiplicação dos números complexos, duais e hiperbólicos gozam das mesmas propriedades que as operações de adição e multiplicação com matrizes, o que nos permite ver que cada mapeamento citado anteriormente é um isomorfismo.

No que tange as fórmulas de Euler, temos as seguintes matrizes representativas para os números complexos, hiperbólicos e duais como segue:

$$\begin{aligned}
 \text{I) } \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta &= \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \operatorname{sen} \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II) } \cosh \theta + h \operatorname{senh} \theta &= \cosh \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \operatorname{senh} \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 \\ 0 & \cosh \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{senh} \theta \\ \operatorname{senh} \theta & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh \theta & \operatorname{senh} \theta \\ \operatorname{senh} \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III) } 1 + \varepsilon \theta &= 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como sabemos que as fórmulas de Euler determinam rotações nos planos complexos, hiperbólicos e duais, as matrizes são as matrizes rotações nos respectivos planos euclidiano, lorentziano e galileano. A seguir vemos brevemente um resumo destes três conjuntos numéricos, por meio da tabela abaixo:

Tabela 1: Propriedades gerais dos números complexos, duais e hiperbólicos

<i>Propriedades</i>	<i>Números Complexos</i>	<i>Números Hiperbólicos</i>	<i>números Duais</i>
<i>Estrutura Algébrica</i>	<i>Campo</i>	<i>Anel comutativo</i>	<i>Anel comutativo</i>
<i>Propriedade</i>	$z = a + bi, i^2 = -1$	$z = a + bh, h^2 = 1$	$z = a + b\varepsilon, \varepsilon^2 = 0$
<i>Conjugado</i>	$\bar{z} = a - bi$	$\bar{z} = a - bh$	$\bar{z} = a - b\varepsilon$
<i>Norma</i>	$ z = \sqrt{a^2 + b^2}$	$ z = \sqrt{a^2 - b^2}$	$ z = a $
<i>Geometria</i>	<i>Euclidiana</i>	<i>Hiperbólica</i>	<i>Galileana</i>
<i>Círculo</i>	$x^2 + y^2 = r^2$	$x^2 + y^2 = \pm r^2$	$ x = r$
<i>Tipo de Rotação</i>	<i>Elíptica</i>	<i>Hiperbólica</i>	<i>Parabólica</i>
<i>Fórmulas de Euler</i>	$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$	$e^{h\theta} = \cosh \theta + h \operatorname{senh} \theta$	$e^{\varepsilon\theta} = 1 + \varepsilon\theta$
<i>Argumento</i>	$\arg z = \arctan \frac{b}{a}$	$\arg z = \ln \frac{ a+b }{\sqrt{ a^2 - b^2 }}$	$\arg z = \frac{b}{a}$

Fonte: (OZDEMIR, 2018)

Diante do uso de uma vasta área dos números complexos se fez necessário uma generalização destes números, de modo a ampliar os seus limites, propiciando uma hibridização com outros números. Nos quatérnios vemos a mais famosa dentre essas generalizações. Lembremos dos quatérnios, uma instância não comutativa dos números hipercomplexos, aqui mencionado, definidos por William Rowan Hamilton como

$$\mathbb{H} = \{z = a + bi + cj + dk / i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 = ijk\}.$$

Já em (COCKLE, 1849), temos a definição dos quatérnios divididos ou coquatérnios como

$$\bar{\mathbb{H}} = \{z = a + bi + cj + dk / i^2 = -1, j^2 = k^2 = jk = 1\}.$$

Sobre os quatérnios e coquatérnios se apoiam as definições das rotações 3D no espaço Euclidiano e Lorentziano, respectivamente.

Uma generalização diferente foi introduzida em (OLARIU, 2000). Trata-se de uma generalização de números complexos n-dimensionais chamada por ele de números bicomplexos e números tricomplexos, onde ele se referiu aos números hiperbólicos como números bicomplexos. Para ver detalhes sobre as propriedades geométricas e algébricas destes números ver os artigos de Olariu “Hyperbolic complex numbers in two dimensions”[7] e “Commutative complex numbers in four dimensions” [8]. O conjunto de números tricomplexos foi definido em (OLARIU, 2000) como

$$\mathbb{C}_3 = \{z = a + hb + kc / a, b, c \in \mathbb{R} e h^2 = k, k^2 = h e hk = 1\}.$$

Antony Harkin e Joseph Harkin generalizaram em 2002 os números complexos bidimensionais como

$$\mathbb{C}_p = \{z = a + ib / i^2 = p e a, b \in \mathbb{R}\}$$

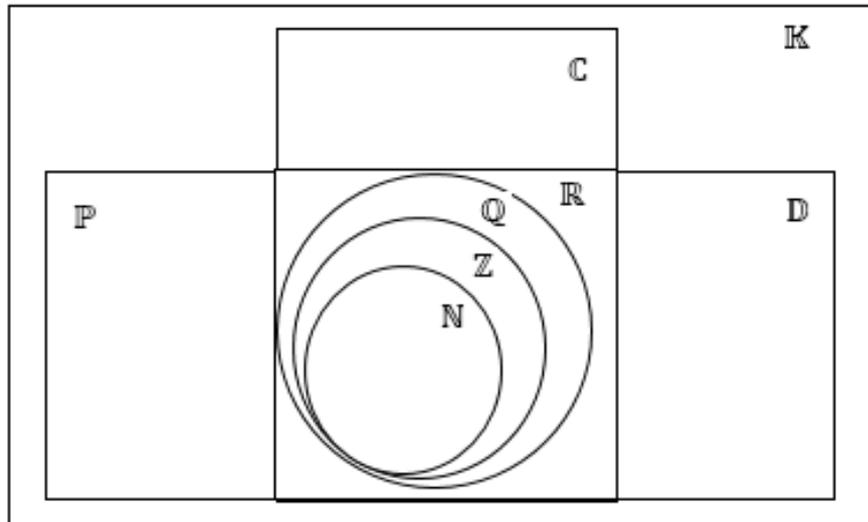
apresentando algumas relações trigonométricas para esta generalização em [23]. Depois disso Catoni, F., Cannata, Catoni, V. e zampetti (2003) definiram os números hipercomplexos bidimensionais como

$$\mathbb{C}_{\alpha, \beta} = \{z = a + bi / i^2 = \alpha + i\beta e a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{C}\},$$

podendo tal generalização ser expressa como o quociente entre o anel $\mathbb{R}[x]$ e o ideal gerado pelo polinômio $x^2 - \beta x - \alpha$, isto é, $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 - \beta x - \alpha \rangle}$.

Mais recentemente, (OZDEMIR, 2018) apresenta uma generalização dos números complexos, hiperbólicos e duais, bem diferente das demais generalizações que antecederam seus estudos sobre o tema. A generalização proposta por Ozdemir apresenta um sistema numérico que sugere a junção dos três sistemas numéricos, a fim de compor um novo conjunto numérico.

Figura 2: Diagrama das generalizações



Fonte: (OZDEMIR, 2018)

3 OS NÚMEROS HÍBRIDOS

Um isomorfismo de matrizes bem particular dos números híbridos foi escolhido para ser o mais apropriado possível para sobrepor com as representações matriciais dos números complexos e hiperbólicos. Portanto, um sistema numérico híbrido se construiu baseando-se nas seguintes representações matriciais, que de forma sutil formam uma base para o conjunto de matrizes 2x2

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } h \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Percebendo que a representação matricial da unidade dual não era consistente com os números híbridos, ele usou uma representação matricial diferente para tal unidade. Uma vez que as matrizes tradicionais de i , ε e h com a matriz unitária não forma uma base do conjunto de matrizes híbridas 2x2, ele usou, para representar a unidade ε , a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Já para as unidades real, complexa e hiperbólica as representações matriciais permanecem inalteradas.

Como esse novo sistema numérico consiste da junção de três sistemas numéricos e as unidades i , h e ε são mencionadas, (OZDEMIR, 2018) preferiu chamar estes números de números híbridos em vez de números generalizados. O conjunto dos números híbridos é denotado por \mathbb{K} e contém números complexos, hiperbólicos e duais em um combinado originado a partir de três tipos de sistemas numéricos bem distintos.

A geometria dos números híbridos é uma geometria mais geral, que surge como fruto da combinação entre as geometrias dos planos euclidianos, de Minkowski e de Galileu, sendo tal geometria chamada de geometria hibridiana. A geometria hibridiana pode ser classificada em elíptica, hiperbólica e parabólica de acordo com o tipo de número, sendo aqui estudada separadamente, sendo o plano hibridiano um subespaço bidimensional de \mathbb{R}^4 .

3.1 PROPRIEDADES

Definição 1 O conjunto de números híbridos, denotado por \mathbb{K} , está definido como

$$\mathbb{K} = \{a + bi + c\varepsilon + dh / a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1 \text{ e } ih = -hi = \varepsilon + i\}.$$

Na definição acima a é a parte real, b é a parte imaginária, c é a parte dual e d é a parte hiperbólica. Neste conjunto numérico as unidades real, complexa, dual e hiperbólica, também conhecidas como unidades híbridas, são definidas, respectivamente, conforme abaixo:

$$1 \leftrightarrow (1, 0, 0, 0), \quad i \leftrightarrow (0, 1, 0, 0), \quad \varepsilon \leftrightarrow (0, 0, 1, 0), \quad h \leftrightarrow (0, 0, 0, 1)$$

Em um número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, o número real a é chamado de parte escalar de z e denotado por $S(Z)$, enquanto a parte $bi + c\varepsilon + dh$ é chamada de parte vetorial e denotada por $V(Z)$.

Uma observação importante que podemos fazer acerca das relações $ih = -hi = \varepsilon + i$ é que a sua consistência está claramente associada ao isomorfismo estabelecido entre os números híbridos e o conjunto de matrizes 2×2 . A partir dos mapeamentos abaixo, a saber,

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } h \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

podemos verificar as relações acima.

$$(i) \quad ih = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad hi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

logo é fácil ver que $ih = -hi$.

$$(ii) \quad \varepsilon + i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = ih = -hi.$$

A verificação destas relações nos mostra que é possível, a partir do isomorfismo de matrizes, definir os números híbridos apropriados para tal isomorfismo.

3.2 OPERAÇÕES COM OS NÚMEROS HÍBRIDOS

Dizemos que dois números híbridos são iguais se, e somente se, seus componentes correspondentes são iguais. Sejam

$$Z = a + bi + c\varepsilon + dh \quad \text{e} \quad W = a' + b'i + c'\varepsilon + d'h,$$

$$Z = W \leftrightarrow a = a', b = b', c = c' \text{ e } d = d'.$$

A adição de dois números híbridos é definida como a soma dos componentes correspondentes de cada número. É importante observar que a adição de dois híbridos tanto é comutativa como é associativa. Tomando Z e W conforme definidos acima, temos que:

$$\begin{aligned} Z + W &= a + bi + c\varepsilon + dh + a' + b'i + c'\varepsilon + d'h \\ &= (a + a') + (b + b')i + (c + c')\varepsilon + (d + d')h, \end{aligned}$$

sendo zero o elemento neutro. Com relação à operação de adição, o elemento simétrico de Z é $-Z$, pois $z + (-Z) = -Z + Z = 0$. Tomando o número híbrido

$$Z = a + bi + c\varepsilon + dh,$$

seu simétrico será

$$-Z = -a - bi - c\varepsilon - dh$$

Sejam os números híbridos z e w abaixo:

$$Z = a + bi + c\varepsilon + dh \quad \text{e} \quad W = a' + b'i + c'\varepsilon + d'h.$$

O produto de z por w é obtido multiplicando-se distributivamente os termos do primeiro número pelos termos do segundo, preservando a ordem da multiplicação das unidades. Dessa forma

$$Z.W = (a + bi + c\varepsilon + dh)(a' + b'i + c'\varepsilon + d'h).$$

Para efetuar o produto acima se faz necessário substituir as unidades mistas, conforme a tabela a seguir:

Tabela 2 - Quadro de produto hibridiano

\cdot	$\mathbf{1}$	i	ε	h
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	i	ε	h
i	i	-1	$\mathbf{1} - h$	$\varepsilon + i$
ε	ε	$h + \mathbf{1}$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon - i$	ε	$\mathbf{1}$

Fonte: (OZDEMIR, 2018)

Dessa forma, sendo $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ e $W = a' + b'i + c'\varepsilon + d'h$, temos que:

$$Z.W = (a + bi + c\varepsilon + dh)(a' + b'i + c'\varepsilon + d'h), \text{ com } i^2 = -1, \\ h^2 = 1 \text{ e } \varepsilon^2 = 0.$$

$$= aa' + ab'i + ac'\varepsilon + ad'h + ba'i + bb'i^2 + bc'i\varepsilon + bd'ih + ca'\varepsilon + cb'\varepsilon i + cc'\varepsilon^2 \\ + cd'\varepsilon h + da'h + db'hi + dc'h\varepsilon + dd'h^2$$

$$\begin{aligned}
&= aa' - bb' + 0 + dd' + (ab' + ba')i + (ac' + ca')\varepsilon + (ad' + da')h + bc'(1 - h) \\
&\quad + cb'(h + 1) + cd'(-\varepsilon) + dc'\varepsilon + db'(-\varepsilon - i) + bd'(\varepsilon + i) \\
&= aa' - bb' + 0 + dd' + (ab' + ba')i + (ac' + ca')\varepsilon + (ad' + da')h + bc' - bc'h \\
&\quad + cb'h + cb' - cd'\varepsilon + dc'\varepsilon - db'\varepsilon - db'i + bd'\varepsilon + bd'i \\
&= (aa' - bb' + dd' + bc' + cb') + (ab' + ba' - db' + bd')i \\
&\quad + (ac' + ca' - cd' + dc' - db' + bd')\varepsilon + (ad' + da' - bc' + cb')h,
\end{aligned}$$

logo, um termo geral para o produto $Z.W$, onde Z e W são dois números híbridos dados, é:

$$Z.W = X + Yi + U\varepsilon + Vh,$$

onde

$$X = aa' - bb' + dd' + bc' + cb', Y = ab' + ba' - db' + bd', U = ac' + ca' - cd' + dc' - db' + bd' \text{ e } V = ad' + da' - bc' + cb'.$$

Assim como, nos números complexos,

$$(i) (a + bi)(a' + b'i) = (a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba'),$$

nos números hiperbólicos,

$$(ii) (a + bh)(c + dh) = (a, b)(a', b') = (aa' + bb', ab' + ba'),$$

nos números duais,

$$(iii) (a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (a, b)(a', b') = (aa', ab' + ba'),$$

nos números híbridos

$$(a + bi + c\varepsilon + dh)(a' + b'i + c'\varepsilon + d'h) = (a, b, c, d)(a', b', c', d') = (aa' - bb' + dd' + bc' + cb', ab' + ba' - db' + bd', ac' + ca' - cd' + dc' - db' + bd', ad' + da' - bc' + cb').$$

Logo acima podemos ver que o produto de dois números híbridos se adequa perfeitamente ao produto de dois números complexos, hiperbólicos ou duais, conforme segue abaixo:

1. Se Z é um número complexo, então $c = d = 0$, logo

$$(a, b, 0, 0)(a', b', 0, 0) = (aa' - bb', ab' + ba', 0, 0);$$

2. Se Z é um número hiperbólico, então $b = c = 0$, logo

$$(a, 0, 0, d)(a', 0, 0, d) = (aa' + dd', ad' + da', 0, 0);$$

3. Se Z é um número dual, então $b = d = 0$, logo

$$(a, 0, c, 0)(a', 0, c', 0) = (aa', 0, ac' + ca', 0).$$

Vale observar, de (i), que

$$i^2 = i \cdot i = (0 + i)(0 + i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 + 0i \therefore i^2 = -1,$$

de (ii) temos que

$$h^2 = h \cdot h = (0 + h)(0 + h) = (0 \cdot 0 + 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (1, 0) = 1 + 0h \therefore h^2 = 1$$

e de (iii) temos que

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \cdot \varepsilon = (0 + \varepsilon)(0 + \varepsilon) = (0 \cdot 0, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (0, 0) = 0 + 0\varepsilon \therefore \varepsilon^2 = 0.$$

É fácil ver, segundo a tabela de multiplicação para os números híbridos dada acima, que $\varepsilon i = h + 1$ usando o isomorfismo de matrizes 2×2 , onde

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De igual modo vemos que $i\varepsilon = 1 - h$, onde

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos ainda que:

$$(I) \quad h \cdot i = -\varepsilon - i$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(II) \quad i \cdot h = \varepsilon + i$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onde $i \cdot h = -h \cdot i$

$$(III) \quad \varepsilon h = -\varepsilon$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

onde $\varepsilon h = -h\varepsilon$.

3.3 NORMA E CLASSIFICAÇÃO DOS NÚMEROS HÍBRIDOS

Definição 2. O conjugado de um número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, denotado por \bar{Z} , é definido como

$$\bar{Z} = S(Z) - V(Z) = a - bi - c\varepsilon - dh$$

como nos quatérnios.

Proposição 2. O conjugado da soma de dois números híbridos é igual a soma de seus conjugados.

Verificação:

Dados $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ e $W = a' + b'i + c'\varepsilon + d'h$,

$$Z + W = (a + a') + (b + b')i + (c + c')\varepsilon + (d + d')h,$$

logo

$$\begin{aligned} \overline{Z + W} &= (a + a') - (b + b')i - (c + c')\varepsilon - (d + d')h \\ &= a + a' - bi - b'i - c\varepsilon - c'\varepsilon - dh - d'h \\ &= (a - bi - c\varepsilon - dh) + (a' - b'i - c'\varepsilon - d'h) \\ &= \bar{Z} + \bar{W}. \end{aligned}$$

Proposição 3. Dado um número complexo $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, verifica-se a seguinte igualdade $Z\bar{Z} = \bar{Z}Z$.

Verificação:

Sendo o número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, tem-se que seu conjugado é dado por $\bar{Z} = a - bi - c\varepsilon - dh$, e sabendo que o produto dos números reais é comutativo, temos:

$$Z\bar{Z} = (a + bi + c\varepsilon + dh)(a - bi - c\varepsilon - dh)$$

$$\begin{aligned}
& a^2 - abi - ac\varepsilon - adh + bai - b^2i^2 - bci\varepsilon - bdih + ca\varepsilon - cbe i - c^2\varepsilon^2 - cd\varepsilon h + dah - \\
& \quad dbhi - dch\varepsilon - d^2h^2 \\
& = a^2 + abi + ac\varepsilon + adh - bai - b^2i^2 - bci\varepsilon - bdih - ca\varepsilon - \\
& \quad cbe i - c^2\varepsilon^2 - cd\varepsilon h - dah - dbhi - dch\varepsilon - d^2h^2 \\
& = (a - bi - c\varepsilon - dh)(a + bi + c\varepsilon + dh) \\
& = \bar{Z}Z,
\end{aligned}$$

logo $Z\bar{Z} = \bar{Z}Z$.

Definição 3. O produto de um número híbrido Z pelo seu conjugado \bar{Z} é denominado caráter do número híbrido e é denotado por

$$C(Z) = Z\bar{Z} = \bar{Z}Z = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2.$$

Fazendo $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ e $\bar{Z} = a - bi - c\varepsilon - dh$ temos:

$$\begin{aligned}
C(Z) &= Z\bar{Z} = (a + bi + c\varepsilon + dh)(a - bi - c\varepsilon - dh) \\
&= a^2 - abi - ac\varepsilon - adh + abi - b^2i^2 - bci\varepsilon - bdih + \\
&ac\varepsilon - bce i - c^2\varepsilon^2 - cd\varepsilon h + adh - bdhi - cdh\varepsilon - d^2h^2 \\
&= a^2 - abi + abi - ac\varepsilon + ac\varepsilon - adh + adh - bdih + \\
&bdih + b^2 - d^2 - cd\varepsilon h + cd\varepsilon h - bc(1 - h) - bc(h + 1) \\
&= a^2 + b^2 - d^2 - bc + bch - bch - bc \\
&= a^2 + b^2 - 2bc + c^2 - c^2 - d^2 \\
&= a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2.
\end{aligned}$$

Proposição 4. A parte real de um número híbrido Z é dado por $(Z + \bar{Z})/2$.

Verificação: Dado o número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ e o seu conjugado $\bar{Z} = a - bi - c\varepsilon - dh$, temos

$$\begin{aligned}
(Z + \bar{Z})/2 &= (a + bi + c\varepsilon + dh + a - bi - c\varepsilon - dh)/2 \\
&= (a + a + bi - bi + c\varepsilon - c\varepsilon + dh - dh)/2 \\
&= (2a)/2
\end{aligned}$$

$$= a,$$

assim sendo,

$$S(Z) = (Z + \bar{Z})/2 = a.$$

Proposição 5. O conjugado do conjugado de Z é Z .

Verificação: Dado $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, temos $\bar{Z} = a - bi - c\varepsilon - dh$. Assim sendo temos que

$$\begin{aligned}\overline{\bar{Z}} &= \overline{(a - bi - c\varepsilon - dh)} \\ &= a + bi + c\varepsilon + dh \\ &= Z,\end{aligned}$$

logo $\overline{\bar{Z}} = Z$.

Definição 4. Para um número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, o vetor $V_Z = (a, (b - c), c, d)$ é chamado de vetor representação de Z .

Exemplo 1. Seja o número híbrido $Z = 1 + 3i + \varepsilon + h$. Determine o caráter e o vetor representação de Z .

Fazendo $a = 1, b = 3, c = 1$ e $d = 1$, temos

$$\begin{aligned}C(Z) &= 1^2 + (3 - 1)^2 - 1^2 - 1^2 \\ &= 1 + 4 - 2 \\ &= 3,\end{aligned}$$

logo o caráter de Z é $C(Z) = 3$ e o vetor representação de Z é $V_Z = (1, 2, 1, 1)$.

Um número híbrido será chamado de (*tipo - espaço*) se $C(Z) < 0$, de (*tipo - tempo*) se $C(Z) > 0$ ou de (*tipo - luz*) se $C(Z) = 0$. Assim, o caráter de um número híbrido Z informa sua classificação. A norma do número híbrido Z é o número

real gerado a partir da expressão $\sqrt{|C(Z)|}$ e será denotado por $\|Z\|$, assim sendo temos

$$\|Z\| = \sqrt{|C(Z)|} = \sqrt{|a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2|}.$$

A norma de um número híbrido é uma norma generalizada perfeitamente adequada às normas de um número complexo, hiperbólico ou dual. De fato temos que:

Proposição 6. Se Z é um número complexo, então $c = d = 0$ e $\|Z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Verificação: Seja o número complexo $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, em que $c = d = 0$. É notório que Z corresponde ao número complexo $Z = a + bi$, cuja norma é $\|Z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Fazendo

$$\begin{aligned} \|Z\| &= \sqrt{|C(Z)|} = \sqrt{|a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2|} \\ &= \sqrt{|a^2 + (b - 0)^2 - 0^2 - 0^2|} \\ &= \sqrt{|a^2 + b^2|}. \end{aligned}$$

Proposição 7. Se Z é um número hiperbólico, então $b = c = 0$ e $\|Z\| = \sqrt{|a^2 - b^2|}$.

Verificação: Seja o número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, em que $b = c = 0$. Fazendo

$$\begin{aligned} \|Z\| &= \sqrt{|C(Z)|} = \sqrt{|a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2|} \\ &= \sqrt{|a^2 + (0 - 0)^2 - 0^2 - d^2|} \\ &= \sqrt{|C(Z)|} = \sqrt{|a^2 + d^2|}, \end{aligned}$$

que corresponde a norma do número hiperbólico $Z = a + dh$.

Proposição 8. Se Z é um número dual, então $b = d = 0$ e $\|Z\| = \sqrt{a^2} = |a|$.

Verificação: Seja o número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, em que $b = d = 0$. Fazendo

$$\|Z\| = \sqrt{|C(Z)|} = \sqrt{|a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2|}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{|a^2 + (0 - c)^2 - c^2 - 0^2|} \\
&= \sqrt{|a^2 + c^2 - c^2|} \\
&= \sqrt{|a^2|},
\end{aligned}$$

Obtemos $\|Z\| = \sqrt{|a^2|}$, que corresponde à norma do número dual $Z = a + c\varepsilon$.

Definição 5. Dado um número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, o vetor $\mathcal{E}_Z = ((b - c), c, d)$ será chamado de vetor híbrido, sendo este, um vetor do espaço de Minkowski \mathbb{E}_1^3 . O número real

$$C_\varepsilon(Z) = -(b - c)^2 + c^2 + d^2 = \langle \mathcal{E}_Z, \mathcal{E}_Z \rangle_{\mathbb{E}_1^3}$$

será chamado de tipo do número híbrido Z . De acordo com o seu tipo, o número híbrido pode ser classificado como elíptico (*complike*), hiperbólico (*hiperlike*) ou parabólico (*duallike*) se $C_\varepsilon(Z) < 0$, $C_\varepsilon(Z) > 0$ ou $C_\varepsilon(Z) = 0$, respectivamente. Onde se lê *complike*, *hiperlike* ou *duallike* entenda-se *tipo – elíptico*, *tipo – hiperbólico* e *tipo – dual*.

A norma do vetor híbrido, denotado por $N(Z)$, será o número real gerado a partir de $\sqrt{|C_\varepsilon(Z)|} = \sqrt{|-(b - c)^2 + c^2 + d^2|}$.

Exemplo 2. Dado o número híbrido $Z = 3 + 2i + \varepsilon + 3h$, determine o tipo, a norma e o vetor híbrido de Z . Sendo $a = 3, b = 2, c = 1$ e $d = 3$,

$$\begin{aligned}
C_\varepsilon(Z) &= -(2 - 1)^2 + 1^2 + 3^2 \\
&= -1 + 1 + 3^2 \\
&= 9,
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
N(Z) &= \sqrt{|C_\varepsilon(Z)|} \\
&= \sqrt{9} \\
&= 3,
\end{aligned}$$

logo o tipo, a norma e o vetor híbrido de Z são respectivamente, $C_\varepsilon(Z) = 9$, $N(Z) = 3$ e $\varepsilon_Z = (1, 1, 3)$.

Da inequação

$$\begin{aligned} C(Z) < 0 &\Rightarrow a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 < 0 \\ &\Rightarrow -a^2 - (b - c)^2 + c^2 + d^2 > 0 \\ &\Rightarrow -(b - c)^2 + c^2 + d^2 > a^2 > 0, \end{aligned}$$

segue que se $C(Z) < 0$, então $C_\varepsilon(Z) > 0$, isto é, se um número híbrido é (*tipo – espaço*), certamente esse número será (*hiperlike*). De modo análogo, o vetor híbrido de um número híbrido (*tipo – luz*) é (*hiperlike*) se a parte escalar $S(Z) \neq 0$ ou (*duallike*) se $S(Z) = 0$, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} C(Z) = 0 &\Rightarrow a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = 0 \\ &\Rightarrow -a^2 - (b - c)^2 + c^2 + d^2 = 0 \\ &\Rightarrow -(b - c)^2 + c^2 + d^2 = a^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Se $a \neq 0 \Rightarrow C_\varepsilon(Z) > 0$ e se $a = 0 \Rightarrow C_\varepsilon(Z) = 0$. Dessa forma vemos que o vetor híbrido de um número híbrido (*tipo – luz*) ou é (*hiperlike*) ou é (*duallike*). Já, se o número híbrido é (*tipo – tempo*), então o seu vetor híbrido ou é (*hiperlike*), ou é (*duallike*) ou é (*complike*), de acordo com o sinal da parte escalar $S(Z)$ e se $(b - c)^2 = c^2 + d^2$.

$$\begin{aligned} C(Z) > 0 &\Rightarrow a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 > 0 \\ &\Rightarrow -a^2 - (b - c)^2 + c^2 + d^2 < 0 \\ &\Rightarrow -(b - c)^2 + c^2 + d^2 < a^2, \end{aligned}$$

logo:

- (I) Se $a = 0 \Rightarrow C_\varepsilon(Z) < 0$, então Z é (*complike*);
- (II) Se $a \neq 0$ e $(b - c)^2 = c^2 + d^2$, então $C_\varepsilon(Z) = 0$, então Z é (*duallike*);
- (III) Se $a \neq 0$ e $(b - c)^2 < c^2 + d^2$, $0 < C_\varepsilon(Z) < a^2$ e Z é (*hiperlike*);
- (IV) Se $a \neq 0$ e $(b - c)^2 > c^2 + d^2$, $C_\varepsilon(Z) < 0$ e Z é (*complike*);

Assim sendo, temos a seguinte tabela:

Tabela 3 - Quadro de classificação dos números híbridos

<i>Tipo-espaço</i>	<i>Tipo-luz</i>	<i>Tipo-tempo</i>
<i>Hiperbólico</i>	<i>Hiperbólico</i>	<i>Hiperbólico</i>
	<i>Parabólico</i>	<i>Parabólico</i>
		<i>Elíptico</i>

Fonte: (OZDEMIR, 2018)

De acordo com o produto híbrido podemos verificar que

$$C(Z_1 Z_2) = C(Z_1) \cdot C(Z_2),$$

logo, considerando que, dependendo do sinal do caráter de um número híbrido Z , ele pode ser *spacelike*, *timelike* ou *lightlike*, se pode verificar a seguinte tabela de classificação para o produto de dois números híbridos quaisquer, conforme abaixo:

Tabela 4 - Produto híbrido e a classificação dos números híbridos

	<i>Tipo-espaço</i>	<i>Tipo-tempo</i>	<i>Tipo-luz</i>
<i>Tipo-espaço</i>	<i>Tipo-tempo</i>	<i>Tipo-espaço</i>	<i>Tipo-luz</i>
<i>Tipo-tempo</i>	<i>Tipo-espaço</i>	<i>Tipo-tempo</i>	<i>Tipo-luz</i>
<i>Tipo-luz</i>	<i>Tipo-luz</i>	<i>Tipo-luz</i>	<i>Tipo-luz</i>

Fonte: (OZDEMIR, 2018)

Exemplo 3. Sejam os números híbridos $Z_1 = 3 + 2i + \varepsilon + 3h$ e $Z_2 = 1 + 3i + \varepsilon + h$. Temos que

$$\begin{aligned} C(Z_1) &= 3^2 + (2 - 1)^2 - 1^2 - 3^2 \\ &= 9 + 1 - 1 - 9 \end{aligned}$$

$$= 0,$$

sendo Z_1 um número híbrido *tipo – luz*.

Temos ainda que

$$\begin{aligned} C(Z_2) &= 1^2 + (3 - 1)^2 - 1^2 - 1^2 \\ &= 1 + 4 - 1 - 1 \\ &= 3 > 0, \end{aligned}$$

logo Z_2 é um número híbrido (*tipo – tempo*). Efetuando o produto de ambos os números híbridos apresentados obtemos

$$\begin{aligned} Z_1.Z_2 &= (aa' - bb' + dd' + bc' + cb') + (ab' + ba' - db' + bd')i + (ac' + ca' - cd' + dc' - db' + bd')\varepsilon + (ad' + da' - bc' + cb')h \\ &= (3 - 6 + 3 + 2 + 3) + (9 + 2 - 9 + 2)i + \\ &(3 + 1 - 1 + 3 - 9 + 2)\varepsilon + (3 + 3 - 2 + 3)h \\ &= 5 + 4i - \varepsilon + 7h. \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} C(Z_1.Z_2) &= 5^2 + (4 + 1)^2 - (-1)^2 - 7^2 \\ &= 25 + 25 - 1 - 49 \\ &= 50 - 50 \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo verifica-se a tabela em que o produto de um número híbrido (*tipo – luz*) por um número híbrido (*tipo – tempo*) é um número (*tipo – luz*), e de modo análogo é possível a prova de todos os demais casos.

É perfeitamente possível mostrar que um determinado número híbrido Z pode ser representado em um sistema de coordenadas bidimensionais, devendo-se, para esse propósito, definir os eixos das abscissas e das ordenadas. Para (OZDEMIR, 2018), a parte real do número híbrido estaria contida no eixo S ou eixo escalar e os

valores de $\sqrt{|C\varepsilon(Z)|} = N(Z)$ desse mesmo número, estariam no eixo \mathbf{V} ou eixo híbrido, sendo este eixo formado pelo vetor híbrido unitário

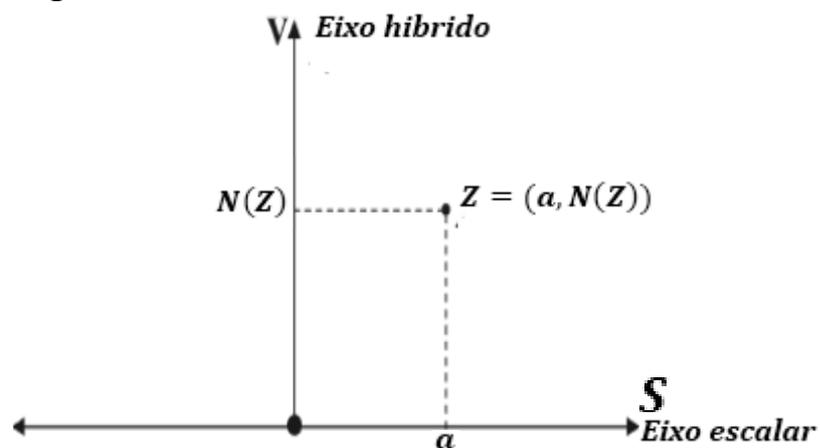
$$V = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{N(Z)}.$$

Esse sistema bidimensional no qual estão representados os números híbridos é denominado “Sistema de Coordenadas Híbridianas”, sendo as coordenadas híbridas de um número híbrido

$$Z = (x, y) = (a, N(Z)) = \left(a, \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|}\right)$$

Segue abaixo o sistema de coordenadas híbridianas:

Figura 3 - Plano híbridiano



Fonte: (ODZEMIR, 2018)

Exemplo 4. Determine as coordenadas do número híbrido $Z = 3 + i + 2\varepsilon + h$.

Dados $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$ e $d = 1$, temos

$$\begin{aligned}
N(Z) &= \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|} \\
&= \sqrt{|-(1-2)^2 + 2^2 + 1^2|} \\
&= \sqrt{|-(-1)^2 + 4 + 1|} \\
&= \sqrt{|-1 + 4 + 1|} \\
&= \sqrt{|4|} \\
&= 2,
\end{aligned}$$

logo as coordenadas de Z são $(3, 2)$, onde

$$V = \frac{i + 2\varepsilon + 1h}{2}.$$

Teorema 1. O inverso de um número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, $\|Z\| \neq 0$, é dado por

$$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{C(Z)},$$

observando evidentemente que números híbridos (Lightlike) não admitem inversos.

Demonstração. Seja o número híbrido Z^{-1} tal que $Z \cdot Z^{-1} = 1$. Assim sendo temos

$$1 = Z \cdot Z^{-1} = \frac{C(Z)}{C(Z)} = \frac{Z \cdot \bar{Z}}{C(Z)} = Z \cdot \frac{\bar{Z}}{C(Z)}$$

$$Z \cdot Z^{-1} = Z \cdot \frac{\bar{Z}}{C(Z)}$$

$$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{C(Z)}.$$

Exemplo 5. Seja o número híbrido $Z = 1 + 3i + \varepsilon + h$. Determine o inverso de Z .

Dados $a = 1, b = 3, c = 1$ e $d = 1$,

$$C(Z) = \sqrt{|a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2|}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{|1^2 + (3-1)^2 - 1^2 - 1^2|} \\
&= \sqrt{|1 + 4 - 1 - 1|} \\
&= \sqrt{3},
\end{aligned}$$

logo

$$Z^{-1} = \frac{1 - 3i - \varepsilon - h}{\sqrt{3}}.$$

Proposição 9. O inverso de um número híbrido é único.

Verificação: Suponhamos que um determinado número híbrido Z admita como inverso os números Z_1^{-1} e Z_2^{-1} , logo

$$1 = Z \cdot Z_1^{-1} = Z \cdot Z_2^{-1}$$

$$Z_1^{-1} = Z_2^{-1}.$$

Teorema 2. Seja $Z_1 = a + bi + c\varepsilon + dh$ e $Z_2 = a' + b'i + c'\varepsilon + d'h$. O produto escalar dos números híbridos é definido conforme abaixo:

$$: g(p, q): \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(Z_1, Z_2): \frac{Z_1 \bar{Z}_2 + Z_2 \bar{Z}_1}{2}$$

$$= \frac{(a + bi + c\varepsilon + dh)(a' - b'i - c'\varepsilon - d'h) + (a' + b'i + c'\varepsilon + d'h)(a - bi - c\varepsilon - dh)}{2}$$

$$= \frac{2aa' + 2bb' - 2bc' - 2b'c - 2dd'}{2}$$

$$= aa' + bb' - bc' - b'c - dd'.$$

O produto escalar dos números híbridos gozam de algumas propriedades, das quais elencamos:

$$(I) \quad g(Z_1, Z_1) = \frac{Z_1 \bar{Z}_1 + Z_1 \bar{Z}_1}{2} = \frac{2Z_1 \bar{Z}_1}{2} = Z_1 \bar{Z}_1 = C(Z) = \sqrt{C(Z)^2} = \|Z\|^2;$$

$$(II) \quad g(Z_1, Z_2) = \frac{Z_1\bar{Z}_2 + Z_2\bar{Z}_1}{2} = \frac{Z_2\bar{Z}_1 + Z_1\bar{Z}_2}{2} = g(Z_2, Z_1) \Rightarrow g(Z_1, Z_2) = g(Z_2, Z_1);$$

$$(III) \quad g(\lambda Z_1, Z_2) = \lambda a a' + \lambda b b' - \lambda b c' - \lambda b' c - \lambda d d' = \lambda(a a' + b b' - b c' - b' c - d d') = \lambda g(Z_1, Z_2);$$

$$(IV) \quad \text{De modo análogo temos } g(Z_1, \lambda Z_2) = \lambda g(Z_1, Z_2);$$

$$(V) \quad g(Z_1 + Z_2, Z_3) = \frac{(Z_1 + Z_2)\bar{Z}_3 + (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)Z_3}{2}$$

$$= \frac{(Z_1\bar{Z}_3 + Z_2\bar{Z}_3) + (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)Z_3}{2}$$

$$= \frac{(Z_1\bar{Z}_3 + Z_2\bar{Z}_3) + (\bar{Z}_1 Z_3 + \bar{Z}_2 Z_3)}{2}$$

$$= g(Z_1, Z_3) + g(Z_2, Z_3).$$

O produto escalar dos números híbridos é um produto escalar generalizado para os sistemas de números complexos, hiperbólicos e duais, dessa forma, podemos então verificar a existência de produto escalar entre dois quaisquer números dentre os complexos, hiperbólicos e dual, segundo a tabela abaixo:

Tabela 5 -Tabela de produto escalares

$g(Z_1, Z_2)$	Complexo Z_2	Hiperbólico Z_2	Dual Z_2
Complexo Z_1	$a_1 a_2 + b_1 b_2$	$a_1 a_2$	$a_1 a_2 - b_1 c_2$
Hiperbólico Z_1	$a_1 a_2$	$a_1 a_2 - d_1 d_2$	$a_1 a_2$
Dual Z_1	$a_1 a_2 - b_2 c_1$	$a_1 a_2$	$a_1 a_2$

Fonte: (OZDEMIR, 2018)

Exemplo 6. Sejam os números híbridos $Z_1 = 2 + 5i$ e $Z_2 = 3 - 2h$. Determine o produto escalar $g(Z_1, Z_2)$.

Solução. Devemos determinar o produto escalar entre um número complexo e um número hiperbólico, logo pela tabela acima temos

$$g(Z_1, Z_2) = 2.3 = 6,$$

de fato

$$g(Z_1, Z_2) = \frac{(2 + 5i)(3 + 2h) + (3 - 2h)(2 - 5i)}{2}$$

$$= \frac{6 + 4h + 15i + 10ih + 6 - 15i - 4h + 10hi}{2}$$

$$= \frac{6 + 4h + 15i + 10ih + 6 - 15i - 4h - 10ih}{2}$$

$$= 6.$$

Podemos ainda ver, de acordo com a tabela acima, que as seguintes igualdades são verificadas:

$$g(1,1) = g(i,i) = 1, \quad g(h,h) = -1 \quad e \quad g(\varepsilon,\varepsilon) = 0$$

$$g(1,i) = g(1,\varepsilon) = g(1,h) = g(i,h) = g(\varepsilon,h) = 0 \quad e \quad g(i,\varepsilon) = -1.$$

Definição 7. Sejam os números híbridos Z_1 e Z_2 . O Produto Vetorial de dois números híbridos Z_1 e Z_2 é definido como $\times : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, em que

$$Z_1 \times Z_2 = \frac{Z_1 \overline{Z_2} - Z_2 \overline{Z_1}}{2}.$$

Do teorema 2 temos que

$$Z_2 \overline{Z_1} = 2g(Z_1, Z_2) - Z_1 \overline{Z_2},$$

logo

$$2Z_1 \times Z_2 = Z_1 \overline{Z_2} - Z_2 \overline{Z_1}$$

$$2Z_1 \times Z_2 = Z_1 \overline{Z_2} - 2g(Z_1, Z_2) + Z_1 \overline{Z_2}$$

$$2Z_1 \overline{Z_2} = 2Z_1 \times Z_2 + 2g(Z_1, Z_2),$$

assim sendo temos

$$Z_1 \overline{Z_2} = Z_1 \times Z_2 + g(Z_1, Z_2).$$

Portanto, podemos escrever a seguinte tabela de produtos vetoriais para os números híbridos:

Tabela 6 - Produto vetorial dos números híbridos

\times	1	i	ε	h
1	0	-i	$-\varepsilon$	-h
i	i	0	h	$-\varepsilon - \mathbf{i}$

Fonte: (OZDEMIR, 2018)

Nesta próxima sessão trataremos do isomorfismo de matrizes e como este isomorfismo propicia a representação dos números híbridos por matrizes 2×2 .

3.4 RELAÇÕES E REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS

As matrizes que representam os números híbridos diferem de acordo com o tipo e caráter desses números. A importância dessas representações se fundamenta na apresentação de um modo mais prático de provar as fórmulas de Moivre e de determinar, com tais representações matriciais, as raízes desses números híbridos.

3.4.1 A Representação Matricial dos Números Híbridos

Já vimos anteriormente que a representação matricial é extremamente importante a fim de facilitar a multiplicação dos números híbridos, uma vez que essas matrizes e o conjunto de tais números são isomorfos. Tanto é possível escrever determinada matriz a partir de um número híbrido como também, a partir de uma matriz, definir determinado número. A classificação dessas matrizes se dá de acordo com o determinante e o discriminante da equação características das matrizes correspondentes 2×2 .

Usando o isomorfismo entre os números híbridos e suas matrizes correspondentes, fazemos

$$\begin{aligned} \varphi(a + bi + c\varepsilon + dh) &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -c \\ c & -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + c & b - c + d \\ -b + c + d & a - c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Logo

$$\varphi(a + bi + c\varepsilon + dh) = \begin{pmatrix} a + c & b - c + d \\ -b + c + d & a - c \end{pmatrix}.$$

Teorema 3. O anel de números híbridos \mathbb{K} é isomorfo ao anel de matrizes reais $M_{2 \times 2}$.

Demonstração: Seja o mapeamento $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow M_{2 \times 2}$ onde

$$\varphi(a + bi + c\varepsilon + dh) = \begin{pmatrix} a - c & b - c + d \\ -b + c + d & a - c \end{pmatrix},$$

para $Z = a + bi + c\varepsilon + dh \in \mathbb{K}$. Primeiro mostraremos que o mapeamento é um isomorfismo de anel. Levando em conta a tabela de adição e multiplicação definida para os números híbridos, as seguintes igualdades

$$(I) \quad \varphi(Z_1 Z_2) = \varphi(Z_1) \varphi(Z_2)$$

$$(II) \quad \varphi(Z_1 + Z_2) = \varphi(Z_1) + \varphi(Z_2)$$

são satisfeitas. Agora mostraremos agora que φ é bijetiva. De fato, se

$$\varphi(Z_1) = \varphi(Z_2)$$

para $Z_1 = a + bi + c\varepsilon + dh$ e $Z_2 = a' + b'i + c'\varepsilon + d'h$, então da igualdade de matrizes temos que $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ e $d = d'$, logo $Z_1 = Z_2$ e φ é injetiva.

Por outro lado, para qualquer matriz real 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

há um número híbrido

$$Z = \left(\frac{a+d}{2}\right) + \left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)i + \left(\frac{a-d}{2}\right)\varepsilon + \left(\frac{b+c}{2}\right)h,$$

de tal forma que $\varphi(Z) = A$, logo φ é sobrejetiva e, portanto, bijetiva. Assim sendo concluímos nossa prova e verificamos que φ é um isomorfismo de anel.

Definição 8. A matriz $\varphi(Z) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ do número híbrido Z é chamada de Matriz Híbrida de Z . Assim, de acordo com o isomorfismo acima, podemos escrever as matrizes híbridas de $Z_1 = 1$, $Z_2 = i$, $Z_3 = \varepsilon$ e $Z_4 = h$, conforme abaixo:

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad \varphi(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim vemos por exemplo que, usando as igualdades

$$\begin{aligned} \varphi(ih) &= \varphi(i) \varphi(h) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \varphi(i) + \varphi(h) \\ &= \varphi(i + h), \end{aligned}$$

temos que $ih = i + h$. Portanto podemos facilmente adicionar e multiplicar números híbridos usando as matrizes correspondentes

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad h \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 4. Seja A uma matriz real $M_{2 \times 2}$, correspondente ao número Z , isto é, $A = \varphi(Z)$. As seguintes igualdades são verificadas:

$$C(Z) = \det A, \quad \|Z\| = \sqrt{|\det A|} \quad e \quad C\varepsilon(Z) = \frac{(\text{Tr } A)^2 - 4 \det A}{4}.$$

Demonstração: Seja o número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$. Então temos

$$\begin{aligned} |\det A| &= \begin{vmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{vmatrix} \\ &= (a+c)(a-c) - (b-c+d)(c-b+d) \\ &= |a^2 + b^2 - 2bc - d^2| \\ &= |a^2 + b^2 - 2bc + c^2 - c^2 - d^2| \\ &= |a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2| \\ &= |Z\bar{Z}| \end{aligned}$$

$$= |C(Z)|.$$

A segunda igualdade se verifica a partir de

$$\begin{aligned} C\varepsilon(Z) &= -(b-c)^2 + c^2 + d^2 \\ &= a^2 - a^2 - (b-c)^2 + c^2 + d^2 \\ &= a^2 - [a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2] \\ &= \frac{4a^2}{4} - (a^2 + b^2 - 2bc + c^2 - c^2 - d^2) \\ &= \frac{4a^2}{4} - (a^2 + b^2 - 2bc - d^2) \\ &= \frac{4a^2}{4} - \frac{4(a^2 + b^2 - 2bc - d^2)}{4} \\ &= \frac{4a^2 - 4(a^2 + b^2 - 2bc - d^2)}{4} \\ &= \frac{(Tr A)^2 - 4 \det A}{4}, \end{aligned}$$

onde $Tr A = 2a$ e $\det A = C(Z)$.

Corolário 4.1. O inverso de um número híbrido $Z \in \mathbb{K}$ existe se, e somente se, o $\det(\varphi(Z)) \neq 0$.

Facilmente vemos da definição de inverso de um número híbrido Z , a saber,

$$= Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{C(Z)},$$

que se $C(Z) = \det(\varphi(Z)) = 0$, Z não admite inverso.

Corolário 4.2. $\Delta A = (Tr A)^2 - 4 \det A$ é igual ao discriminante do polinômio característico da matriz A , dessa forma $C\varepsilon(Z) = \frac{\Delta A}{4}$.

Prova. Partindo da igualdade abaixo obtemos o resultado esperado.

$$C\varepsilon(Z) = -(b-c)^2 + c^2 + d^2$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 - a^2 - (b - c)^2 + c^2 + d^2 \\
&= \frac{4a^2 - 4a^2 - 4(b - c)^2 + 4c^2 + 4d^2}{4} \\
&= \frac{4a^2 - 4[(a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2)]}{4} \\
&= \frac{(Tr A)^2 - 4C(Z)}{4} \\
&= \frac{(Tr A)^2 - 4 \det A}{4} \\
&= \frac{\Delta A}{4}.
\end{aligned}$$

Definição 9. A classificação dos números híbridos depende inteiramente do determinante e do traço da matriz correspondente 2×2 .

Vemos que $C(Z) = \det A$, logo se $\det A > 0$, $\det A = 0$ ou $\det A < 0$, Z é um número híbrido *tipo - tempo*, *tipo - luz* ou *tipo - espaço*, respectivamente. Temos também que $C_\varepsilon(Z) = \frac{\Delta A}{4} = \frac{(Tr A)^2 - 4 \det A}{4}$, logo:

- (I) Se $(Tr A)^2 < 4 \det A$, $C_\varepsilon(Z) < 0$ e Z é *elítico* (*complike*);
- (II) Se $(Tr A)^2 = 4 \det A$, $C_\varepsilon(Z) = 0$ e Z é *parabólico* (*duallike*);
- (III) Se $(Tr A)^2 > 4 \det A$, $C_\varepsilon(Z) > 0$ e Z é *hiperbólico* (*hyperlike*);

Lembremos que os números híbridos são associados a suas matrizes correspondentes pelo isomorfismo de matrizes, onde uma matriz representa um, e somente um número híbrido. Se um isomorfismo distinto fosse usado, as equações básicas da unidade real, dual, complexa e hiperbólica também mudariam. Por exemplo, se tivéssemos o isomorfismo

$$\varphi_1: \mathbb{K}_1 \rightarrow M_{2 \times 2}, \quad \varphi_1(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a + d & b + c \\ -b & a - d \end{pmatrix},$$

teríamos

$$\varphi_1(a, b, c, d) = \varphi_1(a + bi + c\varepsilon + dh) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bi + c\varepsilon + dh = \begin{pmatrix} a + d & b + c \\ -b & a - d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + bi + c\varepsilon + dh = \begin{pmatrix} a+d & b+c \\ -b & a-d \end{pmatrix}$$

$$bi + c\varepsilon + dh = \begin{pmatrix} a+d & b+c \\ -b & a-d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$bi + c\varepsilon + dh = \begin{pmatrix} d & b+c \\ -b & -d \end{pmatrix}$$

$$bi + c\varepsilon + dh = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

logo as matrizes representações das unidades real, complexa, dual e hiperbólica seriam

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad h \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e as relações fundamentais seriam $hi = -ih = 2\varepsilon - i$, o que facilmente pode ser verificadas. Assim sendo, um novo conjunto de números híbridos seria definido como

$$\mathbb{K}_1 = \{a + bi + c\varepsilon + dh, \quad i^2 = -1, \quad h^2 = 1, \quad ih = -hi = 2\varepsilon - i\}$$

de sorte que haveria um grande impacto nas estruturas que se conhece acerca dos números hiperbólicos como por exemplo, nas rotações no plano Lorentziano, cuja matriz rotação seria

$$\cosh \theta + h \sinh \theta = \begin{pmatrix} \cosh \theta + \sinh \theta & 0 \\ 0 & \cosh \theta - h \sinh \theta \end{pmatrix},$$

observando que a mudança em relação a matriz rotação tradicional no plano Lorentziano se dá em função da incompatibilidade da matriz representação da unidade hiperbólica, a saber, $h \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3.4.2 As Representações Polares dos Números Híbridos

A representação polar de um número híbrido está diretamente relacionada ao tipo e caráter deste número, o que indica que esta representação dependerá se o número híbrido é *elíptico*, *hiperbólico* ou *parabólico*, e indica também que números híbridos *tipo – espaço*, *tipo – tempo* ou *tipo – luz* têm representações diferentes. Assim sendo, três teoremas distintos apresentarão as representações polares dos números híbridos.

Teorema 5. Cada número híbrido *elíptico* pode ser escrito como

$$Z = \|Z\|(\cos \theta + V_0 \operatorname{sen} \theta)$$

onde $V_0 = \frac{V(Z)}{N(Z)}$ e $V_0^2 = -1$.

Demonstração: Se o número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ é *elíptico* ($C_\varepsilon(Z) < 0$), então o vetor híbrido $\varepsilon_Z = ((b - c), c, d) \in \mathbb{R}^3$ é *tipo-tempo* ($C(Z) > 0$), logo cada número híbrido é *timelike*. Assim sendo, temos

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(Z) &= -(b - c)^2 + c^2 + d^2 < 0 \\ &= (b - c)^2 - c^2 - d^2 > 0 \\ &= a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 > 0 \\ &= C(Z) > 0 \end{aligned}$$

o que nos permite escrever

$$\|Z\| = \sqrt{a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2} \quad \text{e} \quad N(Z) = \sqrt{(b - c)^2 - c^2 - d^2}.$$

Do plano hibridiano temos que

$$\cos \theta = \frac{a}{\|Z\|}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{N(Z)}{\|Z\|} \quad \text{e} \quad V_0 = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{N(Z)}.$$

Assim sendo

$$\begin{aligned} Z &= a + N(Z)V_0 \\ &= \cos \theta \|Z\| + \operatorname{sen} \theta \|Z\|V_0 \\ &= \|Z\|(\cos \theta + V_0 \operatorname{sen} \theta). \end{aligned}$$

Teorema 6. Cada número híbrido *hiperbólico* Z pode ser escrito como

$$Z = \begin{cases} \pm \|Z\|(\operatorname{senh} \theta + V_0 \cosh \theta), & \text{se } Z \text{ for tipo - espaço} \\ \pm \|Z\|(\cosh \theta + V_0 \operatorname{senh} \theta), & \text{se } Z \text{ for tipo - tempo,} \\ a(1 + V_0), & \text{se } Z \text{ for tipo - luz} \end{cases}$$

onde $V_0 = \frac{V(Z)}{N(Z)}$ e $V_0^2 = 1$.

Demonstração: Se o número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ é *hiperbólico*, então $C\varepsilon(Z) > 0$ e $N(Z) = \sqrt{-(b-c)^2 + c^2 + d^2}$. Por outro lado, o caráter de Z pode ser *tipo – espaço* ($C(Z) < 0$), *tipo – tempo* ($C(Z) > 0$) ou *tipo – luz* ($C(Z) = 0$).

Portanto, nós devemos examinar cada caso separadamente.

(i) Se Z é um número híbrido *hiperbólico tipo – espaço* ($C(Z) < 0$ e $C\varepsilon(Z) > 0$), logo $N(Z) = \sqrt{-(b-c)^2 + c^2 + d^2}$ e $\|Z\| = \sqrt{-a^2 - (b-c)^2 + c^2 + d^2}$. Temos ainda que θ é o ângulo entre o vetor posição de Z e o eixo híbrido, de modo que, do plano híbridiano, temos

$$\cosh \theta = \frac{N(Z)}{\|Z\|}, \quad \sinh \theta = \frac{a}{\|Z\|} \quad \text{e} \quad V_0 = \frac{bi+c\varepsilon+dh}{N(Z)}.$$

Assim sendo

$$\begin{aligned} Z &= a + N(Z)V_0 \\ &= \sinh \theta \|Z\| + \cosh \theta \|Z\| V_0 \\ &= \|Z\|(\sinh \theta + \cosh \theta V_0), \end{aligned}$$

com

$$V_0 = \frac{bi+c\varepsilon+dh}{N(Z)}.$$

(ii) Se Z é um número *hiperbólico tipo – tempo* ($C\varepsilon(Z) > 0$ e $C(Z) > 0$), então $N(Z) = \sqrt{-(b-c)^2 + c^2 + d^2}$ e $\|Z\| = \sqrt{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2}$. Temos ainda que θ é o ângulo entre o vetor de posição de Z e o eixo real, Logo Z pode ser escrito como

$$Z = \pm \|Z\|(\cosh \theta + V_0 \sinh \theta)$$

onde

$$\cosh \theta = \frac{a}{\|Z\|}, \quad \sinh \theta = \frac{N(Z)}{\|Z\|} \quad \text{e} \quad V_0 = \frac{bi+c\varepsilon+dh}{N(Z)}.$$

(iii) Se Z é um número híbrido *hiperbólico tipo – luz* ($C\varepsilon(Z) > 0$ e $C(Z) = 0$), então $a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = 0$, mas como $(b - c)^2 - c^2 - d^2 < 0$, concluímos que $a^2 > 0$ e $\|Z\| = 0$, logo

$$N(Z) = \sqrt{-(b - c)^2 + c^2 + d^2}$$

$$N(Z)^2 = -(b - c)^2 + c^2 + d^2$$

$$N(Z)^2 - a^2 = -a^2 - (b - c)^2 + c^2 + d^2$$

$$a^2 - N(Z)^2 = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = 0$$

$$a = N(Z),$$

logo

$$Z = a + N(Z)V_0$$

$$= a + aV_0$$

$$= a(1 + V_0),$$

onde

$$V_0 = \frac{bi+c\varepsilon+dh}{N(Z)} = \frac{V(Z)}{a} \quad \text{e} \quad V_0^2 = 1.$$

Exemplo 7. Determine a forma polar do número híbrido $Z_1 = 3 + 2i + \varepsilon + 2h$.

Vejamos que

$$C(Z_1) = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2$$

$$= 3^2 + (2 - 1)^2 - 1^2 - 2^2$$

$$= 9 + 1 - 1 - 4$$

$$= 5 > 0$$

e

$$C\varepsilon(Z_1) = -(b - c)^2 + c^2 + d^2$$

$$= -(2 - 1)^2 + 1^2 + 2^2$$

$$= -1^2 + 1^2 + 2^2$$

$$= 4 > 0,$$

logo Z_1 é um número híbrido *hiperbólico tipo – tempo*.

$$\cosh \theta = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \sinh \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad e \quad V_0 = \frac{2i + \varepsilon + 2h}{2}.$$

Assim sendo Z_1 será escrito como

$$\begin{aligned} Z_1 &= \|Z\|(\cosh \theta + V_0 \sinh \theta) \\ &= \sqrt{5} \left(\frac{3}{\sqrt{5}} + V_0 \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \\ &= 3 + 2V_0, \end{aligned}$$

com $V_0^2 = 1$.

Exemplo 8. Vamos determinar a forma polar do número híbrido $Z = 3 + 2i + \varepsilon + 3h$.

$$\begin{aligned} C(Z) &= 3^2 + (2 - 1)^2 - 1^2 - 3^2 \\ &= 9 + 1 - 1 - 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C\varepsilon(Z) &= -1^2 + 1^2 + 3^2 \\ &= 9 > 0, \end{aligned}$$

logo Z é um número híbrido *hiperbólico tipo – luz*. Assim

$$\begin{aligned} Z &= a(1 + V_0) \\ &= 3(1 + V_0) \\ &= 3 + 3V_0, \end{aligned}$$

onde

$$\|Z\| = 0, \quad N(Z) = 3 \quad e \quad V_0^2 = 1.$$

Exemplo 9. Escreva o número híbrido $Z = 1 + i + 2\varepsilon + 3h$ em sua forma polar.

$$\begin{aligned}
C(Z) &= 1^2 + (1-2)^2 - 2^2 - 3^2 \\
&= 1 + 1 - 4 - 9 \\
&= -11 < 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
C\varepsilon(Z) &= -(1-2)^2 + 2^2 + 3^2 \\
&= -1 + 4 + 9 \\
&= 12 > 0,
\end{aligned}$$

logo Z é um número híbrido *hiperbólico spacelike*, assim sendo Z poderá ser escrito, em sua forma polar, como

$$\begin{aligned}
Z &= \|Z\|(\sinh \theta + V_0 \cosh \theta) \\
&= \sqrt{11} \left(\frac{1}{\sqrt{11}} + V_0 \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{11}} \right) \\
&= 1 + \sqrt{12}V_0,
\end{aligned}$$

onde

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{11}}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{11}}, \quad \|Z\| = \sqrt{11} \text{ e } N(Z) = \sqrt{12},$$

com $V_0^2 = 1$.

Corolário. Sempre que um número híbrido hiperbólico $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ não for *tipo - luz*, isto é, $C(Z) \neq 0$ e $C\varepsilon(Z) > 0$, Z pode ser escrito como

$$Z = K\rho(\cosh \theta + V\sinh \theta),$$

onde

$$K = \begin{cases} 1, & \text{se } Z \text{ for tipo - tempo e } a > 0 \\ -1, & \text{se } Z \text{ for tipo - tempo e } a < 0 \\ V, & \text{se } Z \text{ for tipo - espaço e } a > 0 \\ -V, & \text{se } Z \text{ for tipo - espaço e } a < 0 \end{cases}$$

e

$$\rho = \|Z\|, \theta = \ln \left| \frac{a + N(Z)}{\rho} \right| \text{ e } V = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{N(Z)}.$$

Teorema 6. Todo número híbrido parabólico pode ser escrito como

$$Z = \|Z\|(\varepsilon + V_0)$$

onde

$$V_0 = \frac{V(Z)}{\|Z\|}, \quad V_0^2 = 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon = \text{sgn}(S(Z)).$$

Demonstração: Se o número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ é parabólico, então o vetor híbrido $\varepsilon_Z = ((b - c), c, d) \in \mathbb{R}^3$ de Z é um vetor *tipo - luz*, isto significa que $C_\varepsilon(Z) = 0$, por conseguinte, $\|Z\| = |a|$. Assim sendo, de acordo com o sinal de a , o número

$$Z = \|Z\|(\varepsilon + V_0)$$

representa Z , onde

$$V_0 = \frac{V(Z)}{\|Z\|} \quad \text{e} \quad V_0^2 = 0.$$

Exemplo 10. Seja o número híbrido $Z = 2 + 8i + 3\varepsilon + 4h$, um número híbrido parabólico *tipo - tempo*, com $C(Z) = 4 > 0$ e $C_\varepsilon(Z) = 0$. Sendo $a = 2 > 0$, Z pode ser escrito como

$$Z = 2(1 + V_0)$$

onde

$$V_0 = \frac{8i + 3\varepsilon + 4h}{2} \text{ e } V_0^2 = 0.$$

Teorema 7. De acordo com o tipo de um número híbrido *não - tipo - luz* $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, o argumento θ desse número híbrido pode ser definido da seguinte forma:

$$\theta = \begin{cases} \pi - \operatorname{arctg} \frac{N(Z)}{|a|} & \text{se } a < 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{N(Z)}{|a|} & \text{se } a > 0 \end{cases}, \text{ se } Z \text{ for elíptico,}$$

$$\theta = \ln \frac{|a+N(Z)|}{\|Z\|}, \text{ se } Z \text{ for hiperbólico}$$

e

$$\theta = \frac{|c|}{\|Z\|}, \text{ se } Z \text{ for parabólico.}$$

O argumento θ de Z é o valor do ângulo entre o vetor de posição do referido número híbrido e os eixos híbrido ou real, de acordo com o caráter de Z , *tipo – espaço ou tipo – tempo*, respectivamente.

Seja o número híbrido $Z_1 = -3 + 2i + \varepsilon + 2h$. Percebemos a priori que $C(Z_1) = 5 \neq 0$ e $C_\varepsilon(Z_1) = 4 > 0$ e portanto, Z_1 é um número híbrido *não tipo – luz hiperbólico*. Temos $\|Z_1\| = \sqrt{5}$ e $N(Z_1) = 2$, logo

$$\theta = \ln \frac{|a + N(Z_1)|}{\|Z_1\|} = \ln \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

As coordenadas híbridanas de Z_1 são $(-3, 2)$ e encontram-se sobre a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 5$. O argumento de Z_1 é $\ln \frac{\sqrt{5}}{5}$ e θ está entre o vetor posição de Z_1 e o eixo real.

Semelhantemente, o argumento do número híbrido *elíptico tipo – tempo*

$$Z = -1 + 3i + \varepsilon + h$$

é

$$\theta = \pi - \operatorname{arctg} \frac{N(Z)}{|a|} = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{2},$$

uma vez que $a = -1 < 0$ e $N(Z) = \sqrt{2}$. As coordenadas híbridanas de Z são $(-1, \sqrt{2})$ e estão contidas no gráfico do círculo de equação $x^2 + y^2 = 3$. Como

$C(Z) = 3 > 0$, logo o número híbrido Z é *tipo – tempo* e o ângulo θ está contido entre o vetor posição de Z e o eixo real $S(Z)$.

E por fim, tomando como exemplo o número híbrido parabólico $Z = 2 + 8i + 3\varepsilon + 4h$, uma vez que $C_\varepsilon(Z) = 0$, seu argumento é $\theta = 3/2$ e suas coordenadas são $(2, 3)$, com $V_0 = \frac{8i+3\varepsilon+4h}{2} = e$ e $V_0^2 = 0$.

A tabela a seguir sintetiza cada teorema para um determinado número híbrido unitário já apresentado até aqui:

Tabela 7 - Formas polares dos números híbridos

FORMA POLAR	CARÁTER			
	TIPO	<i>Tipo-espaco</i>	<i>Tipo-tempo</i>	<i>Tipo-luz</i>
<i>Elíptico</i>	\emptyset	\emptyset	$\cos \theta + V_0 \sin \theta$	\emptyset
<i>Hiperbólico</i>	$\sinh \theta + V_0 \cosh \theta$	$\cosh \theta + V_0 \sinh \theta$	$a(1 + V_0)$	
<i>Parabólico</i>	\emptyset	$(\epsilon + V_0), \epsilon = \sin \theta$	$S(Z)$	\emptyset

Fonte: (OZDEMIR, 2018)

Teorema 8. Todo número híbrido *hiperbólico não – tipo – luz* Z pode ser escrito como $\ln Z = \ln \rho + V\theta$.

Demonstração: Sendo $Z = k \rho (\cosh \theta + V \sinh \theta)$, com $k \in \{1, -1, V, -V\}$ e $\rho = \|Z\|$, procedemos à derivação de Z conforme segue:

$$\begin{aligned}
 dZ &= k[\rho' (\cosh \theta + V \sinh \theta) + \rho (\sinh \theta + V \cosh \theta)'] \\
 &= k [d\rho (\cosh \theta + V \sinh \theta) + \rho (\sinh \theta + V \cosh \theta) d\theta] \\
 &= k(\cosh \theta + V \sinh \theta) d\rho + k\rho (\sinh \theta + V \cosh \theta) d\theta \\
 &= \frac{k\rho (\cosh \theta + V \sinh \theta) d\rho}{\rho} + Vk\rho(\sinh \theta + V\cosh \theta)d\theta \\
 &= \frac{Zd\rho}{\rho} + VZd\theta \\
 &= Z \left(\frac{d\rho}{\rho} + Vd\theta \right)
 \end{aligned}$$

e a equação logarítmica pode ser escrita como

$$\int \frac{dZ}{Z} = \int \frac{d\rho}{\rho} + V \int d\theta$$

$$\ln Z = \ln \rho + V\theta.$$

É possível escrever ainda Z em função de Euler partindo da forma logarítmica de Z , conforme segue:

$$\ln Z = \ln \rho + V\theta$$

$$e^{\ln Z} = e^{\ln \rho + V\theta}$$

$$e^{\ln Z} = e^{\ln \rho} \cdot e^{V\theta}$$

$$Z = \rho e^{V\theta}.$$

Exemplo 11. Escreva o número híbrido $Z = 3 + 2i + \varepsilon + 2h$ na forma logarítmica.

Temos que $\|Z\| = \sqrt{5}$, $C(Z) = 5 > 0$ e $C\varepsilon(Z) = 4 > 0$, portanto Z é um número híbrido *hiperbólico tipo – tempo*, assim sendo Z pode ser escrito na forma polar

$$Z = \sqrt{5}(\cosh \theta + V \sinh \theta),$$

onde

$$\theta = \ln \sqrt{5} \text{ e } V = \frac{2i + \varepsilon + 2h}{2}, \text{ com } V^2 = 1.$$

Então de

$$\ln Z = \ln \rho + V\theta$$

Temos

$$\ln Z = \ln \sqrt{5} + \frac{2i + \varepsilon + 2h}{2} \ln \sqrt{5},$$

$$= \ln \sqrt{5} \left(1 + \frac{2i + \varepsilon + 2h}{2} \right)$$

$$= \frac{\ln \sqrt{5}}{2} (2 + 2i + \varepsilon + 2h).$$

3.5 FÓRMULA DE MOIVRE PARA OS NÚMEROS HÍBRIDOS

Teorema 9. Seja o número híbrido $Z = x + Vy$, com $V^2 \in \{-1, 0, 1\}$, não *lightlike*.

$$\begin{cases} Z^n = \rho^n (\cos n\theta + V \operatorname{sen} n\theta), & \text{se } Z \text{ for elíptico} \\ Z^n = k^n \rho^n (\cosh n\theta + V \operatorname{senh} n\theta), & \text{se } Z \text{ for hiperbólico} \\ Z^n = \rho^n (\epsilon^n + n\epsilon^{n-1}V)^n, & \text{se } Z \text{ for parabólico} \end{cases}$$

onde

$$\theta = \arg Z, \epsilon = \operatorname{sign}(S(Z)), \rho = \|Z\| \text{ e } k \in \{1, -1, V, -V\}.$$

Obs: Se $Z = a(1 + V)$ é um número híbrido *tipo - luz*, então

$$Z^n = a^n 2^{n-1} (1 + V).$$

Demonstração: Seja Z um número híbrido hiperbólico *não tipo - luz*. Mostraremos por indução sobre n que

$$Z^n = k^n \rho^n (\cosh n\theta + V \operatorname{senh} n\theta).$$

Verifique-se que, se $n = 1$, $Z = K\rho (\cosh \theta + V \operatorname{senh} \theta)$, logo a igualdade é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos que a igualdade seja verdadeira para um certo $n > 1$, devemos provar então que a igualdade também é verdadeira para $n + 1$.

$$Z^{n+1} = Z^n Z^1 = k^n \rho^n (\cosh n\theta + V \operatorname{senh} n\theta) k \rho (\cosh \theta + V \operatorname{senh} \theta)$$

$$= K^{n+1} \rho^{n+1} (\cosh n\theta \cosh \theta + V^2 \operatorname{senh} n\theta \operatorname{senh} \theta +$$

$$V \operatorname{senh} n\theta \cosh \theta + V \operatorname{senh} \theta \cosh n\theta)$$

$$= K^{n+1} \rho^{n+1} (\cosh n\theta \cosh \theta + \operatorname{senh} n\theta \operatorname{senh} \theta + V \operatorname{senh} n\theta \cosh \theta +$$

$$V \operatorname{senh} \theta \cosh n\theta)$$

$$= K^{n+1} \rho^{n+1} [\cosh(n\theta + \theta) + V \operatorname{senh}(n\theta + \theta)]$$

$$= K^{n+1} \rho^{n+1} [\cosh(n + 1)\theta + V \operatorname{senh}(n + 1)\theta].$$

Para $n = 0$, a fórmula vale, pois, sendo $K^0 = 1$, $\rho^0 = 1$, $\cosh 0 = 1$ e $\operatorname{senh} 0 = 0$, temos que

$$Z^0 = k^0 \rho^0 (\cosh(0 \cdot \theta) + V \operatorname{senh}(0 \cdot \theta))$$

$$= 1 (1 + V \cdot 0)$$

$$= 1.$$

Seja $n < 0$ um inteiro. Então $-n > 0$ e $Z^n = (Z^{-1})^{-n}$. Como

$$\begin{aligned} Z^{-1} &= \frac{\bar{Z}}{C(Z)} = \frac{1}{k} \frac{1}{\rho} (\cosh \theta - V \sinh \theta) \\ &= k^{-1} \rho^{-1} (\cosh(-\theta) + V \sinh(-\theta)), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} (Z^{-1})^{-n} &= (k^{-1})^{-n} (\rho^{-1})^{-n} (\cosh((-n)(-\theta)) + V \sinh((-n)(-\theta))) \\ Z^n &= k^n \rho^n (\cosh(n\theta) + V \sinh(n\theta)). \end{aligned}$$

logo a igualdade vale para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Uma vez que

$$Z^{-1} = k^{-1} \rho^{-1} (\cosh \theta - V \sinh \theta)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} Z^{-n} &= k^{-n} \rho^{-n} [(\cosh(n\theta) - V \sinh(n\theta))] \\ &= k^{-n} \rho^{-n} [(\cosh(-n\theta) + V \sinh(-n\theta))]. \end{aligned}$$

Similarmente as fórmulas de Moivre podem ser provadas para os números híbridos elípticos e parabólicos.

Teorema 10. Todo número híbrido Z tipo – luz pode ser escrito como $Z^n = a^n 2^{n-1} (1 + V)$, sendo $Z = a(1 + V)$.

Demonstração: Recorreremos à indução para provar a igualdade acima. Vemos que a igualdade vale para $n = 1$. Admitindo por hipótese que Z^n é verdadeira, temos

$$\begin{aligned} Z^{n+1} &= Z^n Z = a^n 2^{n-1} (1 + V) a(1 + V) \\ &= a^{n+1} 2^{n-1} (1 + V)^2 \\ &= a^{n+1} 2^{n-1} (1 + 2V + V^2) \\ &= a^{n+1} 2^{n-1} (1 + 2V + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{n+1}2^{n-1}(2 + 2V) \\
&= a^{n+1}2^{n-1}2(1 + V) \\
&= a^{n+1}2^n(1 + V),
\end{aligned}$$

logo $Z^n = a^n 2^{n-1}(1 + V)$ vale para todo n .

Exemplo 12. Seja o número híbrido $Z_1 = \sqrt{2} + 3i + \varepsilon + h$. Determine Z^{10} .

Devemos a priori escrever Z_1 em sua forma polar. Como $C_\varepsilon(Z) = -2 < 0$ e $C(Z) = 4 > 0$, portanto Z é um número híbrido *elíptico* e *tipo – tempo*, logo Z pode ser escrito na forma polar como

$$Z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + \frac{3i + \varepsilon + h}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

com

$$V_0 = \frac{3i + \varepsilon + h}{\sqrt{2}}, V_0^2 = -1.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
Z^{10} &= 2^{10} \left[\cos 10 \left(\frac{\pi}{4} \right) + \frac{3i + \varepsilon + h}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} 10 \left(\frac{\pi}{4} \right) \right] \\
&= 2^{10} \left(\cos \frac{5\pi}{2} + \frac{3i + \varepsilon + h}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} \right) \\
&= 2^{10} \left(\frac{3i + \varepsilon + h}{\sqrt{2}} \right) \\
&= 2^9 \sqrt{2} (3i + \varepsilon + h).
\end{aligned}$$

3.6 RAÍZES DOS NÚMEROS HÍBRIDOS

As raízes de um número híbrido serão examinadas do mesmo modo que as raízes dos quatérnios. As raízes serão determinadas de acordo com o tipo do número híbrido, que pode ser elíptico, hiperbólico ou parabólico, e com o seu caráter, que pode ser *tipo – espaço*, *tipo – tempo* ou *tipo – luz*. Seja $W \in \mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$. O número

híbrido $Z \in \mathbb{K}$ que satisfaz a igualdade $Z^n = W$ será chamado de raiz n -ésima de W . Portanto as raízes de $W \in \mathbb{K}$ serão estudadas em dois casos separados, um quando W não for *tipo – luz* e outro quando W for *tipo – luz*.

Teorema 11. Seja $W = a + bi + ce + dh$ um número híbrido que não é um *tipo – luz*. Assim sendo as raízes de W serão dadas conforme segue:

1. Se W é um número híbrido elíptico, então $W = \rho (\cos \theta + V \operatorname{sen} \theta)$ tem n raízes e estas são dadas por

$$Z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + V \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

onde $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Demonstração: Se o número híbrido W é elíptico, então $W = \rho (\cos \theta + V \operatorname{sen} \theta)$ e $V^2 = -1$. Suponhamos que $Z = \rho_z (\cos \alpha + V \operatorname{sen} \alpha)$ seja uma raiz n -ésima da equação $Z^n = W$, logo pelo teorema 2.20 temos que

$$Z^n = \rho_z^n (\cos n \alpha + V \operatorname{sen} n \alpha) = \rho (\cos \theta + V \operatorname{sen} \theta),$$

portanto

$$\rho_z^n = \rho \Rightarrow \rho_z = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{e} \quad n \alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

Assim sendo, substituindo ρ_z e α em Z obtemos

$$Z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + V \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right).$$

2. Se W é um número híbrido hiperbólico, então tal número híbrido é definido por $W = \rho k (\cosh \theta + V \operatorname{senh} \theta)$ e tem suas raízes da forma

$$Z_k = \begin{cases} \sqrt[n]{\rho} \left(\cosh \frac{\theta}{n} + V \operatorname{senh} \frac{\theta}{n} \right), & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ k \sqrt[n]{\rho} \left(\cosh \frac{\theta}{n} + V \operatorname{senh} \frac{\theta}{n} \right), & \text{se } n \text{ é par e } W \text{ é Tipo – tempo com } a > 0 \\ \text{Não há raízes nos outros casos} \end{cases}$$

onde $K \in \{1, -1, V, -V\}$.

Demonstração: Sendo $W \in K$ da forma $W = \rho k (\cosh \theta + V \sinh \theta)$ um número híbrido não-lightlike, temos então que $V^2 = 1$. Suponhamos que $Z = k_z \rho_z (\cosh \alpha + V \sinh \alpha)$, $K \in \{1, -1, V, -V\}$ seja uma raiz n -ésima da equação $Z^n = W$, logo pelo teorema 2.20

$$Z^n = k_z^n \rho_z^n (\cosh n\alpha + V \sinh n\alpha) = \rho k (\cosh \theta + V \sinh \theta),$$

de modo que:

(i) Se n é um número ímpar, então $k_z^n = k_z$ uma vez que $V^2 = 1$, assim a igualdade

$$k_z \rho_z^n (\cosh n\alpha + V \sinh n\alpha) = \rho k (\cosh \theta + V \sinh \theta)$$

será satisfeita se e somente se $k_z = k$. Então

$$\rho_z^n = \rho \Rightarrow \rho_z = \sqrt[n]{\rho}$$

e

$$n\alpha = \theta \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n},$$

de onde concluímos que se n é ímpar, $Z = \sqrt[n]{\rho} \left(\cosh \frac{\theta}{n} + V \sinh \frac{\theta}{n} \right)$.

(ii) Por outro lado, se n é um número par, $k_z^n = 1$. Neste caso teremos a igualdade

$$\rho_z^n (\cosh n\alpha + V \sinh n\alpha) = \rho k (\cosh \theta + V \sinh \theta),$$

em que k deve ser 1 a fim de se obter solução para a igualdade. Fazendo, portanto,

$$\rho_z^n = \rho \Rightarrow \rho_z = \sqrt[n]{\rho}$$

e

$$n\alpha = \theta \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n}$$

obtemos para n par

$$k \sqrt[n]{\rho} \left(\cosh \frac{\theta}{n} + V \sinh \frac{\theta}{n} \right), K \in \{1, -1, V, -V\},$$

observando-se que, uma vez que $K = 1$, que $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ é um número híbrido *Tipo-tempo* com $a > 0$ e há quatro raízes quando n é par.

3. Se W é um número híbrido parabólico, então $W = \rho (\epsilon + V)$, $\epsilon = \text{sgn} (S(Z))$, e suas raízes são da forma

$$\begin{cases} \sqrt[n]{\rho} \left(\epsilon + \frac{V}{n} \right), \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ \pm \sqrt[n]{\epsilon \rho} \left(\epsilon + \frac{V}{n} \right), \text{ se } n \text{ é ímpar e } \epsilon > 0 \\ \text{Não há raízes nos casos em que } \epsilon < 0. \end{cases}$$

Demonstração: Se W é um número híbrido parabólico, então $V^2 = 0$, $W = \rho (\epsilon + V)$ e $\epsilon = \text{sgn} (S(Z))$. Suponhamos que

$$Z = \rho_z (\epsilon + \varphi V)$$

seja uma raiz da equação $Z^n = W$, então

$$Z^n = \rho_z^n (\epsilon^n + \epsilon^{n-1} n \varphi V) = \rho (\epsilon + V).$$

Assim sendo,

$$\rho_z^n \epsilon^n = \rho \epsilon$$

$$\rho_z^n \epsilon^n \epsilon^{-n} = \rho \epsilon \epsilon^{-n}$$

$$\rho_z^n = \rho \epsilon^{1-n}$$

$$\rho_z = \sqrt[n]{\epsilon^{n-1} \rho}$$

e

$$\epsilon^{n-1} n \varphi \rho_z^n = \rho$$

$$\epsilon^{n-1} n \varphi \rho_z^n = \rho_z^n \epsilon^{n-1}$$

$$n \varphi = 1$$

$$\varphi = \frac{1}{n}.$$

1. Se n é um número ímpar, $n - 1$ é par, logo $\epsilon^{n-1} > 0$ e a raiz de W será dada por $Z = \sqrt[n]{\rho} \left(\epsilon + \frac{V}{n} \right)$.

2. Se n é par, então $n - 1$ é ímpar, com $\epsilon^{n-1} > 0$ ou $\epsilon^{n-1} < 0$. Portanto a raiz de W será dada por

$$Z = \pm \sqrt[n]{\epsilon \rho} \left(\epsilon + \frac{V}{n} \right), \text{ com } \epsilon > 0,$$

isto é, quando n for par $W \in \mathbb{K}$ terá Z como raiz se, e somente se a parte escalar de W é positivo.

Seja o número híbrido hiperbólico *tipo - tempo* $W = 3 + 2i + \epsilon + 2h$. Vamos calcular \sqrt{W} . O número híbrido W tem $\|Z\| = \sqrt{5}$ e $N(Z) = 2$, logo W em sua forma polar é escrito como

$$W = \sqrt{5} (\cosh \theta + V \sinh \theta)$$

onde

$$\cosh \theta = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \sinh \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ e } V = \frac{2i + \epsilon + 2h}{2}, \quad V^2 = 1.$$

Das relações trigonométricas hiperbólicas

$$(i) \cosh \theta = \cosh^2 \frac{\theta}{2} + \sinh^2 \frac{\theta}{2}$$

e

$$(ii) \cosh^2 \frac{\theta}{2} - \sinh^2 \frac{\theta}{2} = 1,$$

temos

$$\cosh \theta = \cosh^2 \frac{\theta}{2} + \sinh^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

$$\cosh \theta = 2 \cosh^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

$$\cosh^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cosh \theta + 1}{2}$$

$$\cosh \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh \theta + 1}{2}}$$

$$\cosh \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{\frac{3}{\sqrt{5}} + 1}{2}}$$

$$\cosh \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) \frac{1}{2}}$$

e de (ii) temos

$$\cosh^2 \frac{\theta}{2} - \sinh^2 \frac{\theta}{2} = 1$$

$$\sinh^2 \frac{\theta}{2} = \cosh^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

$$\sinh^2 \frac{\theta}{2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) - \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$\sinh^2 \frac{\theta}{2} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)$$

$$\sinh \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) \frac{1}{2}}$$

Assim sendo

$$\begin{aligned} Z_k &= \sqrt{W} = k\sqrt{\sqrt{5}} \left(\cosh \frac{\theta}{2} + V \sinh \frac{\theta}{2} \right) \\ &= k\sqrt{\sqrt{5}} \left[\left(\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) \frac{1}{2}} + V \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) \frac{1}{2}} \right) \right] \\ &= k \left[\left(\sqrt{\sqrt{5}} \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) \frac{1}{2}} + V \sqrt{\sqrt{5}} \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) \frac{1}{2}} \right) \right] \\ &= k \left[\left(\sqrt{(3 + \sqrt{5})} \frac{1}{2} + V \sqrt{(3 - \sqrt{5})} \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= k \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{(3 + \sqrt{5})} + V \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{(3 - \sqrt{5})} \right). \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\sqrt{(3 + \sqrt{5})} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

e

$$\sqrt{(3 - \sqrt{5})} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

portanto

$$\begin{aligned} Z_k &= k \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) + V \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \right) \\ &= \frac{k}{2} [(\sqrt{5} + 1) + V(\sqrt{5} - 1)] \end{aligned}$$

para $K \in \{1, -1, V, -V\}$.

Seja o número $W = 2 + 8i + 3\varepsilon + 4h$ um número híbrido parabólico *Tipo-luz*. W pode ser escrito em sua forma polar como $W = 2(1 + V)$, onde $V = \frac{8i + 3\varepsilon + 4h}{2}$, uma vez que $N(Z) = a = 2$ e $V^2 = 0$. Podemos ver que \sqrt{W} e $\sqrt[3]{W}$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} Z_k = \sqrt{W} &= \pm\sqrt{2} \left(1 + \frac{8i + 3\varepsilon + 4h}{2} \right) \\ &= \pm\sqrt{2} \left(1 + \frac{8i + 3\varepsilon + 4h}{4} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{W} &= \sqrt[3]{2} \left(1 + \frac{8i + 3\varepsilon + 4h}{3} \right) \\ &= \sqrt[3]{2} \left(1 + \frac{8i + 3\varepsilon + 4h}{6} \right). \end{aligned}$$

Teorema 12. Se W é um número híbrido *tipo – luz*, então $W = a(1 + V)$ e suas raízes são dadas por:

$$Z = \begin{cases} \pm \frac{\sqrt[n]{2a}}{2} (1 + V), \text{ se } n \text{ é par} \\ \frac{\sqrt[n]{2a}}{2} (1 + V) \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} .$$

Demonstração: Suponha que W seja um número híbrido *Tipo – luz*, assim W será da forma $W = a(1 + V)$, $V^2 = 1$. Seja $Z = c(1 + V)$ uma raiz de W , logo $Z^n = W$. Usando o teorema 2.20 temos

$$Z^n = c^n 2^{n-1} (1 + V) .$$

Assim sendo

$$Z^n = W$$

$$c^n 2^{n-1} (1 + V) = a(1 + V)$$

$$c^n 2^{n-1} = a$$

$$c^n = \frac{a}{2^{n-1}}$$

$$c^n = \frac{2a}{2^n}$$

$$c = \pm \sqrt[n]{\frac{2a}{2^n}}$$

$$c = \frac{\pm \sqrt[n]{2a}}{2} ,$$

portanto se n for par, $c = \frac{\pm \sqrt[n]{2a}}{2}$ e se n for ímpar, $c = \frac{\sqrt[n]{2a}}{2}$.

Exemplo 13. Determine as raízes quadradas do número híbrido $Z = 2 + 6i + 3\varepsilon + 2h$.

Como Z é um número lightlike, ele será da forma

$$W = 2(1 + V)$$

onde

$$V = \frac{6i + 3\varepsilon + 2h}{2}, V^2 = 1.$$

Portanto, do teorema acima, as raízes procuradas são

$$Z_1 = 1 + \frac{6i + 3\varepsilon + 2h}{2}$$

e

$$Z_2 = -1 + \frac{6i + 3\varepsilon + 2h}{2}.$$

É possível expressar números híbridos como uma base $\{e_1, e_2\}$, em que e_1 e e_2 são componentes híbridos de tal base, que satisfaz as condições $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$, $e_1 e_2 = 0$, $e_1^2 = e_1$ e $e_2^2 = e_2$, sendo tal base chamada de idempotente. Como $e_1 e_2 = 0$, os vetores representativos destes números híbridos são vetores ortogonais entre si. Uma vez que um número híbrido hiperbólico pode ser expresso como uma base idempotente, veremos como é possível encontrar as raízes desse número de acordo com tal base, sem considerar o uso da fórmula de Moivre. Sejam os números

$$e_1 = \frac{1 - V}{2} \quad e \quad e_2 = \frac{1 + V}{2}$$

pertencentes ao conjunto dos números híbridos hiperbólicos, em que $V^2 = 1$. Uma vez que

$$C(e_1) = C(e_2) = 0,$$

e_1 e e_2 são números híbridos nulos. Estes dois números são ortogonais entre si, portanto, cada número híbrido hiperbólico $Z = x + yV$ pode ser escrito como uma combinação linear de e_1 e e_2 , isto é,

$$Z = (x - y)e_1 + (x + y)e_2,$$

dessa forma, fazendo $z_- = x - y$ e $z_+ = x + y$ temos

$$Z = z_- \mathbf{e}_1 + z_+ \mathbf{e}_2 .$$

Um número híbrido na forma $Z = z_- \mathbf{e}_1 + z_+ \mathbf{e}_2$ também pode ser escrito na forma

$$Z = \left(\frac{z_+ + z_-}{2}, \frac{z_+ - z_-}{2} \right) = \frac{z_+ + z_-}{2} + \frac{z_+ - z_-}{2} V$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{z_+ + z_-}{2} &= \frac{(x + y) + (x - y)}{2} \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{z_+ - z_-}{2} &= \frac{(x + y) - (x - y)}{2} \\ &= \frac{2y}{2} \\ &= y, \end{aligned}$$

sendo $Z = x + yV$ e $V = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$.

Definição 10. O conjunto

$$\mathcal{J} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \frac{1-V}{2}, \mathbf{e}_2 = \frac{1+V}{2} \right\},$$

será uma base para o conjunto dos números híbridos hiperbólico no plano hibridiano e será chamado de base nula ou base idempotente.

As coordenadas de um número híbrido hiperbólico $Z = x + yV$ relativo à base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ serão chamadas de coordenadas nulas de Z , isto é, as coordenadas nulas de Z são $Z_n = (z_-, z_+)$.

Seja, por exemplo, o número híbrido $Z = 3 + 2i + \varepsilon + 2h$. Sendo $a = 3$ e $N(Z) = 2$, temos $Z = 3 + 2V$, onde $V = \frac{2i + \varepsilon + 2h}{2}$, logo as coordenadas nulas de Z são $Z_n = (1, 5)$.

Podemos ver que Z também pode ser escrito como uma combinação linear de E_1 e E_2 do seguinte modo,

$$Z = 1 \left(\frac{1-V}{2} \right) + 5 \left(\frac{1+V}{2} \right), \text{ com } V = \frac{2i + \varepsilon + 2h}{2}.$$

Sejam dois números híbridos hiperbólicos $Z_n = (z_-, z_+)$ e $W_n = (w_-, w_+)$ no plano hibridiano abrangido por $\{1, V\}$. A igualdade destes dois números híbridos está definido como

$$Z_n = W_n \Leftrightarrow (z_-, z_+) = (w_-, w_+) \Leftrightarrow z_- = w_- \text{ e } z_+ = w_+$$

As operações de adição e de multiplicação também podem ser definidas usando as coordenadas nulas conforme abaixo:

$$Z_n + W_n = (z_-, z_+) + (w_-, w_+) = (z_- + w_-, z_+ + w_+);$$

$$Z_n \cdot W_n = (z_-, z_+) \cdot (w_-, w_+) = (z_- w_-, z_+ w_+)$$

Exemplo 14. Sejam os números híbridos hiperbólicos $Z = 3 + 2V$, cujas coordenadas nulas são $Z_n = (1, 5)$ e $W = 5 + 2V'$, de coordenadas nulas iguais a $W_n = (3, 7)$ no plano hibridiano abrangido por $\{1, V\}$. Determine $Z_n + W_n$ e $Z_n \cdot W_n$.

$$Z_n + W_n = (1, 5) + (3, 7) = (1 + 3, 5 + 7) = (4, 12) = 4 + 12V$$

$$Z_n \cdot W_n = (1, 5) \cdot (3, 7) = (1 \cdot 3, 5 \cdot 7) = (3, 35) = 3 + 35V$$

Teorema 13. Seja $Z = x + hy$ um número híbrido hiperbólico de coordenadas nulas $Z_n = (z_-, z_+)$. Assim sendo temos:

(i) O conjugado de Z_n é $\bar{Z}_n = (z_+, z_-)$.

(ii) O caráter de Z_n é $Z\bar{Z} = z_- \cdot z_+$.

(iii) A norma de Z_n é $\|Z_n\| = \|(z_-, z_+)\| = \sqrt{|z_- \cdot z_+|}$.

(iv) O inverso de Z_n é $Z_n^{-1} = (Z_n^{-1}, Z_n^{-1})$.

(v) $Z_n^m = (Z_+^m, Z_-^m)$ se m for ímpar e $Z_n^m = k(Z_+^m, Z_-^m)$ se m for um número par, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $k \in \{1, -1, V, -V\}$.

Demonstração:

(i) Seja $Z = z_- \mathbf{e}_1 + z_+ \mathbf{e}_2 = z_- \left(\frac{1-V}{2}\right) + z_+ \left(\frac{1+V}{2}\right)$. Como o conjugado de $Z = x + hy$ é $\bar{Z} = x - hy$, temos que

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \overline{z_- \mathbf{e}_1 + z_+ \mathbf{e}_2} \\ &= \overline{z_- \left(\frac{1-V}{2}\right) + z_+ \left(\frac{1+V}{2}\right)} \\ &= \overline{z_- \left(\frac{1-(-V)}{2}\right) + z_+ \left(\frac{1+(-V)}{2}\right)} \\ &= z_- \left(\frac{1+V}{2}\right) + z_+ \left(\frac{1-V}{2}\right) \\ &= z_+ \left(\frac{1-V}{2}\right) + z_- \left(\frac{1+V}{2}\right) \\ &= z_+ \mathbf{e}_1 + z_- \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

logo sendo $Z_n = (z_-, z_+)$, $\bar{Z}_n = (z_+, z_-)$.

(ii) Efetuando a multiplicação simples de $Z = x + hy$ por $\bar{Z} = x - hy$ temos

$$\begin{aligned} C(Z) &= Z\bar{Z} \\ &= (x + hy)(x - hy) \\ &= x^2 + xyh - xyh - h^2y^2, \text{ com } h^2 = 1 \\ &= x^2 - h^2y^2 \\ &= x^2 - y^2 \\ &= (x - y)(x + y) \\ &= z_- z_+, \end{aligned}$$

como se queria provar.

(iii) Observemos que a norma de Z é $\|Z_n\| = \sqrt{|C(Z)|}$, por tanto, de (ii) temos que $\|Z_n\| = \sqrt{|z_- \cdot z_+|}$.

(iv) Seja $Z_n = (z_-, z_+)$ um número híbrido hiperbólico não nulo, portanto $z_+ \neq 0$ e $z_- \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
 Z_n^{-1} &= \frac{1}{Z_n} \\
 &= \frac{1}{Z_n} \bar{Z}_n \\
 &= \frac{\bar{Z}_n}{Z_n \bar{Z}_n} \\
 &= \frac{(z_+, z_-)}{z_- z_+} \\
 &= \frac{z_+}{z_- z_+} \mathbf{e}_1 + \frac{z_-}{z_- z_+} \mathbf{e}_2 \\
 &= \frac{1}{z_-} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{z_+} \mathbf{e}_2 \\
 &= \left(\frac{1}{z_-}, \frac{1}{z_+} \right) \\
 &= (Z_n^{-1}, Z_n^{-1}).
 \end{aligned}$$

(v) A prova deste resultado se dá através da multiplicação simples dos números híbridos.

Corolário Seja o número híbrido hiperbólico $Z = x + yV$ de coordenadas nulas $Z_n = (z_-, z_+)$. Assim sendo as raízes m -ésimas de Z são

$$Z_n^{1/m} = \begin{cases} \frac{z_+^{1/m} + z_-^{1/m}}{2} + \frac{z_+^{1/m} - z_-^{1/m}}{2} V, & \text{se } m \text{ for ímpar} \\ k \left(\frac{z_+^{1/m} + z_-^{1/m}}{2} + \frac{z_+^{1/m} - z_-^{1/m}}{2} V \right), & \text{se } m \text{ for par} \end{cases}$$

com $m \in \mathbb{Z}^+$ e $k \in \{1, -1, V, V\}$.

Exemplo 15. Seja, por exemplo, o número híbrido $Z = 13 - 8i - 12\varepsilon - 4h$. Determine \sqrt{Z} e $\sqrt[3]{Z}$.

Como $N(Z) = 12 > 0$, Z é hiperbólico, portanto, para calcular \sqrt{Z} e $\sqrt[3]{Z}$ devemos recorrer ao corolário 2.26. Podemos escrever o referido número híbrido hiperbólico como $Z = 13 - 12V$, com $V = \frac{2i+3\varepsilon+h}{3}$. Sendo $z_{-} = 1$ e $z_{+} = 25$, temos que

$$\begin{aligned} Z^{1/2} &= (13 - 12V)^{1/2} \\ &= (25^{1/2}, 1^{1/2}) \\ &= k \left(\frac{1^{1/2} + 25^{1/2}}{2} + \frac{1^{1/2} - 25^{1/2}}{2} V \right) \\ &= k \left(\frac{1 + 5}{2} + \frac{1 - 5}{2} V \right) \\ &= k (3 - 2V), \end{aligned}$$

em que $k \in \{1, -1, V, -V\}$. Assim sendo, as raízes quadradas de $Z = 13 - 12V$ são obtidas a partir de $k(3 - 2V)$ pelas substituições de k e V , conforme segue:

$$(i) \quad 1 \left[3 - 2 \left(\frac{2i+3\varepsilon+h}{3} \right) \right] = 3 - \frac{4}{3}i - 2\varepsilon - \frac{2}{3}h$$

$$(ii) \quad -1 \left[3 - 2 \left(\frac{2i+3\varepsilon+h}{3} \right) \right] = -3 + \frac{4}{3}i + 2\varepsilon + \frac{2}{3}h$$

$$(iii) \quad V(3 - 2V) = 3V - 2V^2 = -2 + 3V = -2 + 3 \left(\frac{2i+3\varepsilon+h}{3} \right) = -2 + 2i + 3\varepsilon + h$$

$$(iv) \quad -V(3 - 2V) = -3V + 2V^2 = 2 - 3V = 2 - 3 \left(\frac{2i+3\varepsilon+h}{3} \right) = 2 - 2i - 3\varepsilon - h$$

De modo análogo temos

$$\begin{aligned} Z^{1/3} &= (13 - 12V)^{1/3} \\ &= (25^{1/3}, 1^{1/3}) \\ &= \frac{1 + \sqrt[3]{25}}{2} + \frac{1 - \sqrt[3]{25}}{2} V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + \sqrt[3]{25}}{2} + \left(\frac{1 - \sqrt[3]{25}}{2} \right) \left(\frac{2i + 3\varepsilon + h}{3} \right) \\
&= \frac{1 + \sqrt[3]{25}}{2} + \left(\frac{1 - \sqrt[3]{25}}{2} \right) i + \left(\frac{1 - \sqrt[3]{25}}{2} \right) \varepsilon + \left(\frac{1 - \sqrt[3]{25}}{6} \right) h.
\end{aligned}$$

3.7 OS NÚMEROS HÍBRIDOS E A CLASSIFICAÇÃO DE MATRIZES

Já vimos na terceira seção que um número híbrido $Z \in \mathbb{K}$ pode ser perfeitamente representado por uma matriz 2×2 e que sua classificação pode variar de acordo o tipo e caráter no número híbrido. Como as igualdades

$$C(Z) = \det A \text{ e } C_\varepsilon(Z) = \frac{(\text{tr}A)^2 - 4\det A}{4}$$

são satisfeitas vemos que o tipo e caráter de Z depende do determinante e do traço da matriz $\varphi(Z) = A$.

Definição 11. Uma matriz A pode ser classificada de acordo com o determinante e o traço da matriz A , conforme segue abaixo:

$$\begin{cases}
\text{Se } \det A > 0, \text{ a matriz } A \text{ é tipo - tempo} \\
\text{Se } \det A < 0, \text{ a matriz } A \text{ é tipo - espaço} \\
\text{Se } \det A = 0, \text{ a matriz } A \text{ é tipo - luz}
\end{cases}$$

De acordo com o tipo do número híbrido, conforme a segunda seção, nós podemos classificá-lo em elíptico ($C_\varepsilon(Z) < 0$), hiperbólico ($C_\varepsilon(Z) > 0$), ou parabólico ($C_\varepsilon(Z) = 0$).

Definição 12. Uma matriz A correspondente ao número híbrido Z pode ser:

$$\begin{cases}
\text{hiperbólica, se } (\text{tr}A)^2 - 4 \det A > 0 \\
\text{elíptica, se } (\text{tr}A)^2 - 4 \det A < 0 \\
\text{parabólica, se } (\text{tr}A)^2 - 4 \det A = 0
\end{cases}$$

Seja, por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ correspondente ao número híbrido $Z = \frac{5}{2} - \frac{7}{2}i - \frac{3}{2}\varepsilon + 5h$. Como $\det A = -17 < 0$ e $(\text{tr}A)^2 - 4 \det A = 109 > 0$, $\varphi(Z)$ é uma matriz híbrida hiperbólica spacelike. Já a matriz $B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ correspondente ao

número híbrido $W = 2 + 8i + 3\varepsilon + 4h$. O $\det B = 4 > 0$ e $(\text{tr}B)^2 - 4 \det B = 0$, logo $\varphi(Z)$ é uma matriz híbrida parabólica *tipo – tempo*.

Podemos ainda definir os autovalores e os auto vetores da matriz $\varphi(Z) = A$. Sendo I a matriz identidade, A sendo a matriz correspondente ao número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ e \vec{v} um auto-vetor associado ao número híbrido Z , temos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$A\vec{v} = \lambda I\vec{v}$$

$$A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

Uma vez que a igualdade acima é um sistema homogêneo e \vec{v} um autovetor, $\vec{v} \neq 0$, esse sistema é possível e indeterminado, sendo uma de suas soluções a solução nula. Assim sendo, $\det(A - \lambda I) = 0$, logo

$$\left| \begin{pmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a+c-\lambda & b-c+d \\ c-b+d & a-c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (-\lambda+a)+c & d+(b-c) \\ d-(b-c) & (-\lambda+a)-c \end{vmatrix} = 0$$

$$[(-\lambda+a)+c][(-\lambda+a)-c] - [d-(b-c)][d+(b-c)] = 0$$

$$(-\lambda+a)^2 - c^2 - [d^2 - (b-c)^2] = 0$$

$$(-\lambda+a)^2 - c^2 - d^2 + (b-c)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-2a) \pm \sqrt{(2a)^2 - 4[a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2]}}{2}$$

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4[-(b-c)^2 + c^2 + d^2]}}{2}$$

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4[-(b-c)^2 + c^2 + d^2]}}{2}$$

$$\lambda = \frac{2a \pm 2\sqrt{C_\varepsilon(Z)}}{2}$$

$$\lambda = a \pm \sqrt{C_\varepsilon(Z)},$$

assim sendo temos $\lambda_1 = a + \sqrt{C_\varepsilon(Z)}$ e $\lambda_2 = a - \sqrt{C_\varepsilon(Z)}$ são os autovalores da matriz $\varphi(Z)$.

Se considerarmos a igualdade $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ para $\lambda = a \pm \sqrt{C_\varepsilon(Z)}$ temos

$$(i) \begin{pmatrix} a+c-\lambda_1 & b-c+d \\ c-b+d & a-c-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c-(a+\sqrt{C_\varepsilon(Z)}) & b-c+d \\ c-b+d & a-c-(a+\sqrt{C_\varepsilon(Z)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c-a-\sqrt{C_\varepsilon(Z)} & b-c+d \\ c-b+d & a-c-a-\sqrt{C_\varepsilon(Z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c-\sqrt{C_\varepsilon(Z)} & b-c+d \\ c-b+d & -c-\sqrt{C_\varepsilon(Z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (c-\sqrt{C_\varepsilon(Z)})x + (b-c+d)y = 0 \\ (c-b+d)x - (c+\sqrt{C_\varepsilon(Z)})y = 0 \end{cases},$$

logo $\vec{v}_1 = (b-c+d, c-\sqrt{C_\varepsilon(Z)})$ e $\vec{v}_2 = (c+\sqrt{C_\varepsilon(Z)}, c-b+d)$ são autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = a + \sqrt{C_\varepsilon(Z)}$.

$$(ii) \begin{pmatrix} a+c-\lambda_2 & b-c+d \\ c-b+d & a-c-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c-(a-\sqrt{C_\varepsilon(Z)}) & b-c+d \\ c-b+d & a-c-(a-\sqrt{C_\varepsilon(Z)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c-a+\sqrt{C_\varepsilon(Z)} & b-c+d \\ c-b+d & a-c-a+\sqrt{C_\varepsilon(Z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c + \sqrt{C_\varepsilon(Z)} & b - c + d \\ c - b + d & -c + \sqrt{C_\varepsilon(Z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (c + \sqrt{C_\varepsilon(Z)})x + (b - c + d)y = 0 \\ (c - b + d)x + (c - \sqrt{C_\varepsilon(Z)})y = 0 \end{cases}$$

logo $\vec{v}_1 = (c - b - d, c + \sqrt{C_\varepsilon(Z)})$ e $\vec{v}_2 = (c + \sqrt{C_\varepsilon(Z)}, c - b + d)$ são autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = a + \sqrt{C_\varepsilon(Z)}$.

Assim sendo, fazendo $\Delta_A = (\text{tr}A)^2 - 4 \det A$, que corresponde ao discriminante da equação polinomial característica de A , vemos que se $\Delta_A < 0$ os autovalores λ_1 e λ_2 são números complexos, se $\Delta_A > 0$ os autovalores λ_1 e λ_2 são números reais e se $\Delta_A = 0$ os autovalores λ_1 e λ_2 são iguais, dessa forma, os números híbridos correspondentes a matriz A são

$$\begin{cases} \text{Elípticos se } \Delta_A < 0 \\ \text{Hiperbólicos se } \Delta_A > 0 . \\ \text{Parabólicos se } \Delta_A = 0 \end{cases}$$

Da mesma forma que classificamos um número híbrido, podemos classificar qualquer matriz 2x2 correspondente a tal número, considerando o isomorfismo entre os números híbridos e as matrizes quadradas 2x2. Portanto podemos escrever a seguinte tabela:

Tabela 8 - Classificação de uma matriz híbrida

A	$\det A > 0$	$\det A = 0$	$\det A < 0$
$(\text{tr}A)^2 < 4 \det A$	<i>Timelike elíptico</i>	\emptyset	\emptyset
$(\text{tr}A)^2 = 4 \det A$	<i>Timelike parabólico</i>	<i>Lightlike parabólico</i>	\emptyset
$(\text{tr}A)^2 > 4 \det A$	<i>Timelike hiperbólico</i>	<i>Lightlike hiperbólico</i>	<i>Spacelike hiperbólico</i>

Fonte: (OZDEMIR, 2018)

Podemos observar que a matriz rotação no plano euclidiano

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

é elíptica uma vez que

$$\Delta_A = (2 \cos \theta)^2 - 4 \det A = 4 \cos^2 \theta - 4 < 0, \text{ com } \cos^2 \theta < 1.$$

A matriz rotação no plano Lorentziano

$$\begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}$$

é hiperbólica pois

$$\Delta_A = (2 \cosh \theta)^2 - 4 \det A = 4 \cosh^2 \theta - 4 > 0, \text{ com } \cosh^2 \theta > 1.$$

Temos, por fim, que a matriz rotação no plano galileano

$$\begin{bmatrix} \theta + 1 & -\theta \\ \theta & 1 - \theta \end{bmatrix}$$

é parabólica uma vez que

$$\Delta_A = 2^2 - 4 = 0$$

$$\Delta_A = 4 - 4 = 0.$$

Na seção 4 trataremos sobre o software Geogebra e suas funcionalidades, bem como os desafios e possibilidades desta ferramenta no ensino dos números híbridos. Apresentaremos a representação dos números híbridos no plano, bem como a representação de seu vetor híbrido no espaço.

4 SOFTWARE GEOGEBRA E A REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS HÍBRIDOS

Nesta seção daremos enfoque à representação dos números híbridos no sistema de coordenadas bidimensional, com uma breve explanação sobre a representação geométrica de funções afins com vista às semelhanças entre as representações destas funções e dos números híbridos. Apresentaremos também a representação geométrica de seus vetores representação e híbrido através do software Geogebra, refletindo sobre a necessidade de apresentar esse tema de forma diversificada, a fim de que a compreensão destes números seja facilitada.

4.1 O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O uso das tecnologias no ensino da matemática ganhou um importante e significativo papel, o de promover o interesse pela aprendizagem de saberes

matemáticos amplamente contextualizados, mas que precisam de ressignificação, a fim de que a compreensão destes saberes poupe trabalho e economize tempo, melhorando assim a qualidade de vida de quem acomodou tais saberes. Por todos os lados estamos cercados de saberes matemáticos que precisam ser melhor compreendidos e, entre estes destacamos os saberes geométricos, estando estes presentes desde uma simples medição da área de uma parede até os mais complexos projetos de engenharia.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), parte III, entre as competências e habilidades se encontram duas essencialmente importantes no que tange à contextualização sociocultural, a saber, “Entender a relação entre o desenvolvimento de Ciências Naturais e o desenvolvimento tecnológico e associar as diferentes tecnologias aos problemas que se propuser e se propõe solucionar” e “Utilizar elementos e conhecimentos científicos e tecnológicos para diagnosticar e equacionar questões sociais e ambientais.”

Em busca da compreensão destes saberes geométricos temos no software Geogebra uma importante ferramenta de aprendizagem, onde a representação de linhas e formas possibilitam uma melhor interpretação funções, localização de pontos no espaço, entre outros. Nesse ínterim, o computador passa a ser parceiro na busca pela compreensão do mundo em nossa volta, intrinsecamente ligado a ressignificação de saberes amplamente difundidos em nosso cotidiano.

Embora os computadores ainda não estejam amplamente disponíveis para a maioria das escolas, eles já começam a integrar muitas experiências educacionais, prevendo-se sua utilização em maior escala em curto prazo. Isso traz como necessidade a incorporação de estudos nessa área, tanto na formação inicial como na formação continuada do professor do ensino fundamental, seja para poder usar amplamente suas possibilidades ou para conhecer e analisar softwares educacionais (BRASIL, 2001, p. 47).

4.2 NOÇÕES DE FUNÇÃO AFIM COM A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

Definição 13. Conforme (LIMA, 2013) toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $a, b \in \mathbb{R}$, é uma função afim.

Alguns livros didáticos e literaturas matemáticas classificam as funções afins como funções do primeiro grau, porém salientamos que funções não possuem grau, somente os polinômios.

Podemos destacar algumas das funções afins.

- (i) Funções Identidade $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) Funções Lineares $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- (iii) Funções Constantes $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = b$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

Vale salientar que funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = ax + b$ são funções translações da função Identidade $f(x) = x$.

Definição 14. Segundo (LIMA, 2013), uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente quando

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$ e $f(x_1), f(x_2) \in \mathbb{R}$, e decrescente quando

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

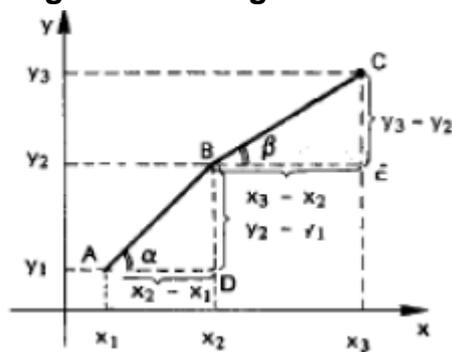
para todo $x_1, x_2 \in X$ e $f(x_1), f(x_2) \in \mathbb{R}$.

A interpretação gráfica de uma função afim é de fundamental importância para a compreensão do comportamento de tal função.

Definição 15. O gráfico de uma função afim $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b, x \in X$ é sempre uma reta oblíqua, onde a é o coeficiente angular da reta.

Prova: Sejam os pontos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, distintos dois a dois, pertencentes ao gráfico de $f(x) = ax + b, a \neq 0$, conforme a figura abaixo.

Figura 4 - Triângulos semelhantes no plano



Fonte: (IEZZI, MURAKAMI, 1993)

Se é verdade que

$$A \in f, B \in f \text{ e } C \in f,$$

então temos:

$$(i) \quad (x_1, y_1) \in f \Rightarrow y_1 = ax_1 + b$$

$$(ii) \quad (x_2, y_2) \in f \Rightarrow y_2 = ax_2 + b$$

$$(iii) \quad (x_3, y_3) \in f \Rightarrow y_3 = ax_3 + b$$

Fazendo $(iii) - (ii)$ obtemos

$$a = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

e efetuando a diferença $(ii) - (i)$ obtemos

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

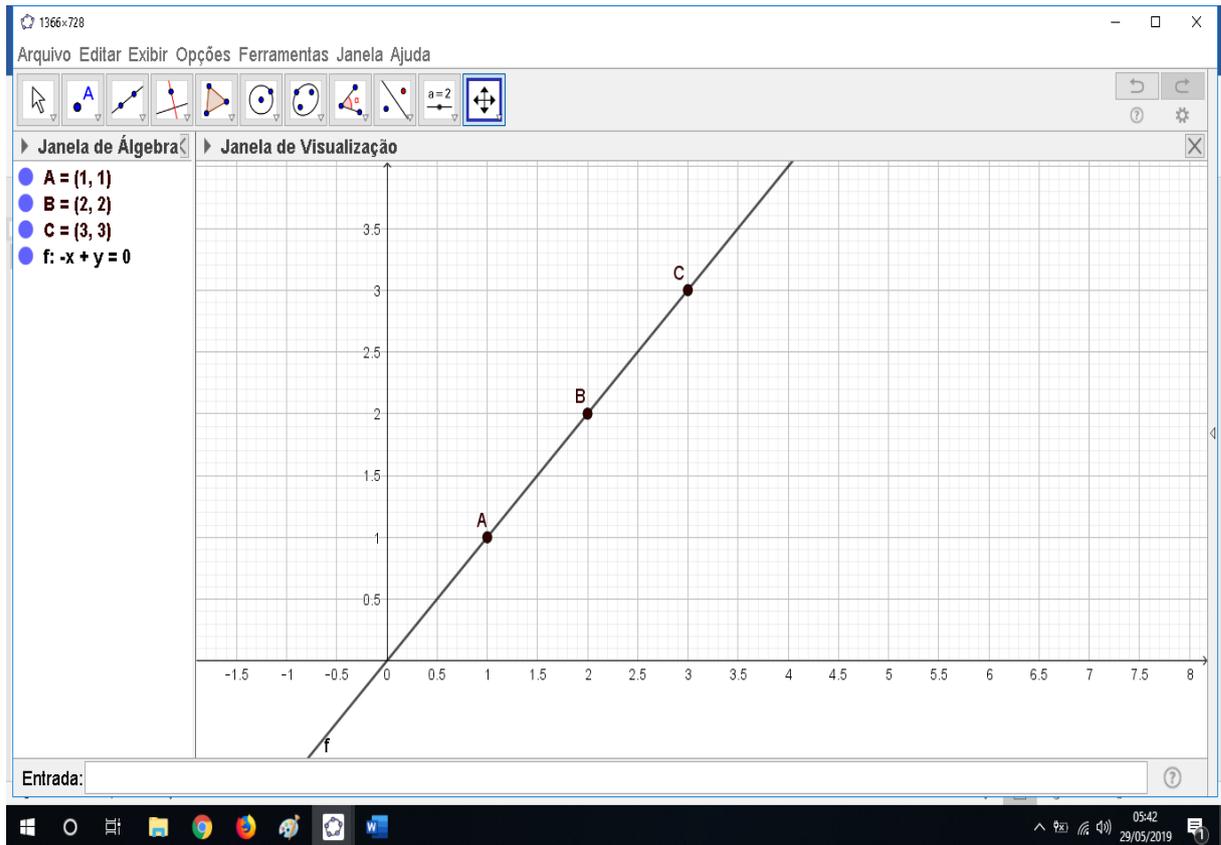
logo

$$a = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

e os triângulos A, B e C são semelhantes, de onde concluímos que A, B e C são colineares.

Segue abaixo o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$ em que figuram os pontos $A(1, 1), B(2, 2)$ e $C(3, 3)$, produzido no Geogebra.

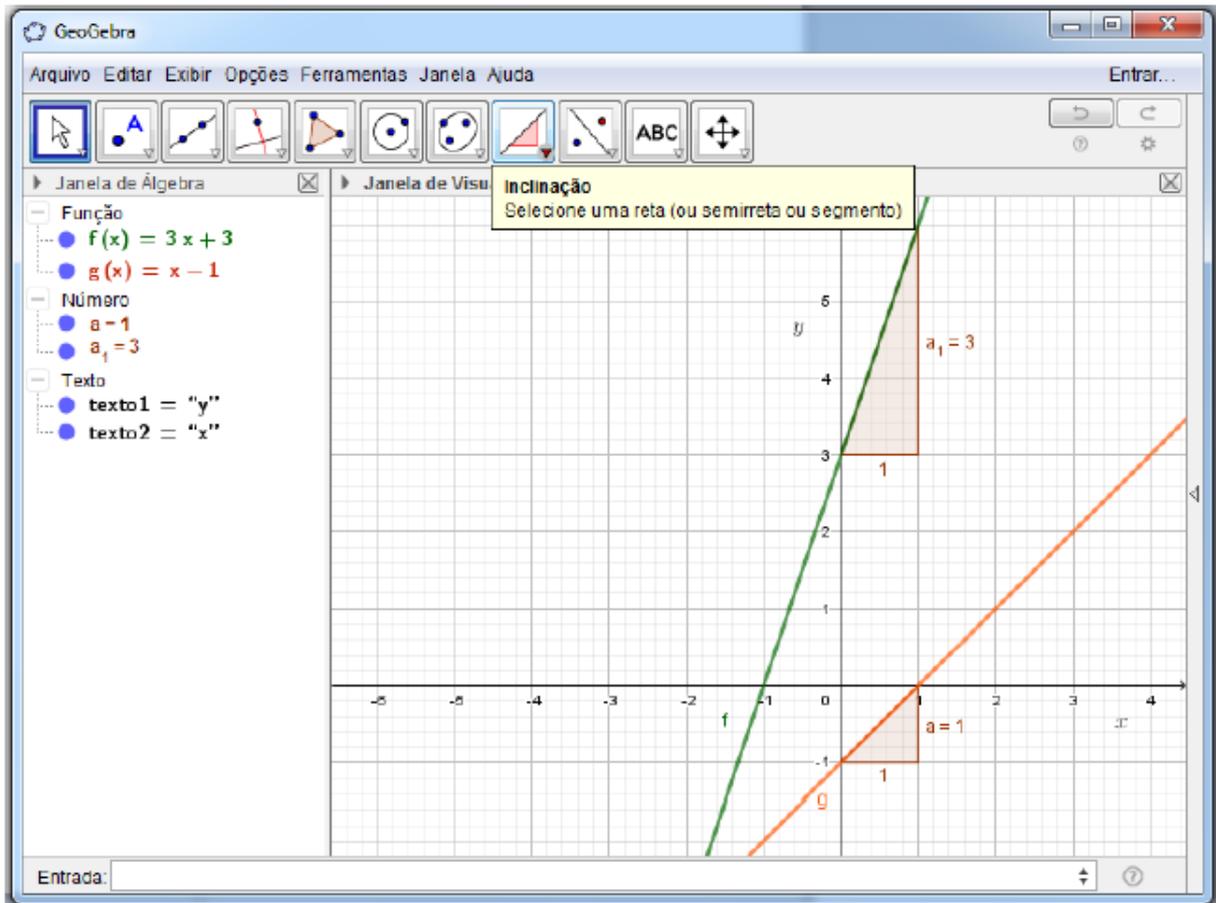
Figura 5 - Pontos A, B e C alinhados



Fonte: Produzido pelo próprio autor

A seguir temos o gráfico demonstrativo das funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = 3x + 3$ e $g(x) = x - 1$, no Geogebra usando a ferramenta “inclinação”, em que uma vez selecionada a reta ou segmento, é dado o coeficiente angular. Foram selecionados para a_f e b_f os valores 3 e 3, respectivamente e para a_g e b_g foram selecionados os valores 1 e -1 , respectivamente.

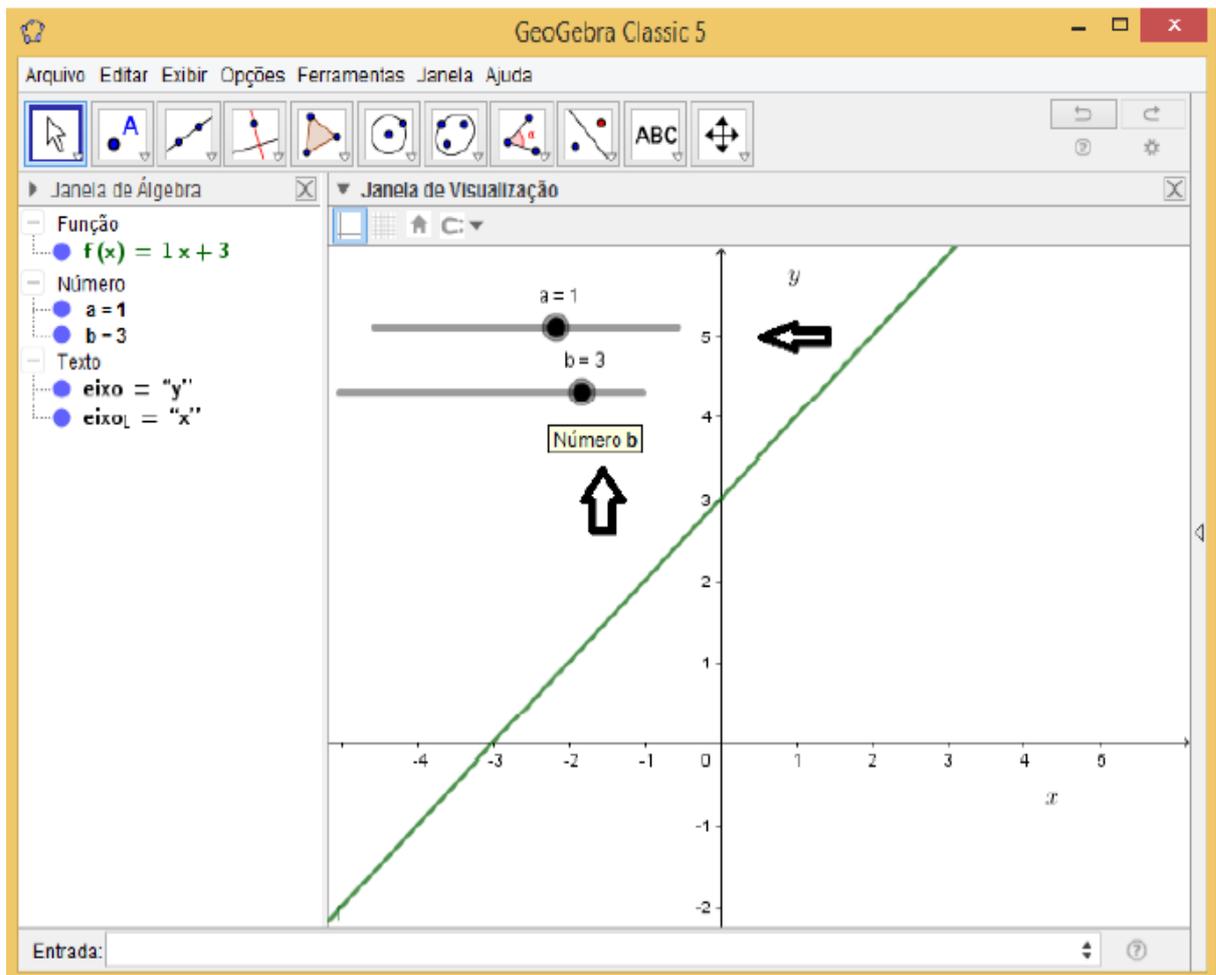
Figura 6 - Gráficos de funções afins usando a ferramenta “INCLINAÇÃO”



Fonte: (JÚNIOR, A.W.S., 2018)

A seguir temos o gráfico demonstrativo da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x + 3$ no Geogebra usando a ferramenta “controle deslizante” em que foram selecionados para a_f e b_f os valores 1 e 3, respectivamente.

Figura 7 - Gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com a ferramenta “controle deslizante”



Fonte: (JÚNIOR, A.W.S., 2018)

4.3 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS HÍBRIDOS

Como exposto anteriormente, um número híbrido é a generalização dos números Complexos, Duais e Hiperbólicos, representados por quatro parâmetros de números reais, a, b, c e d e que pode ser representado pela soma

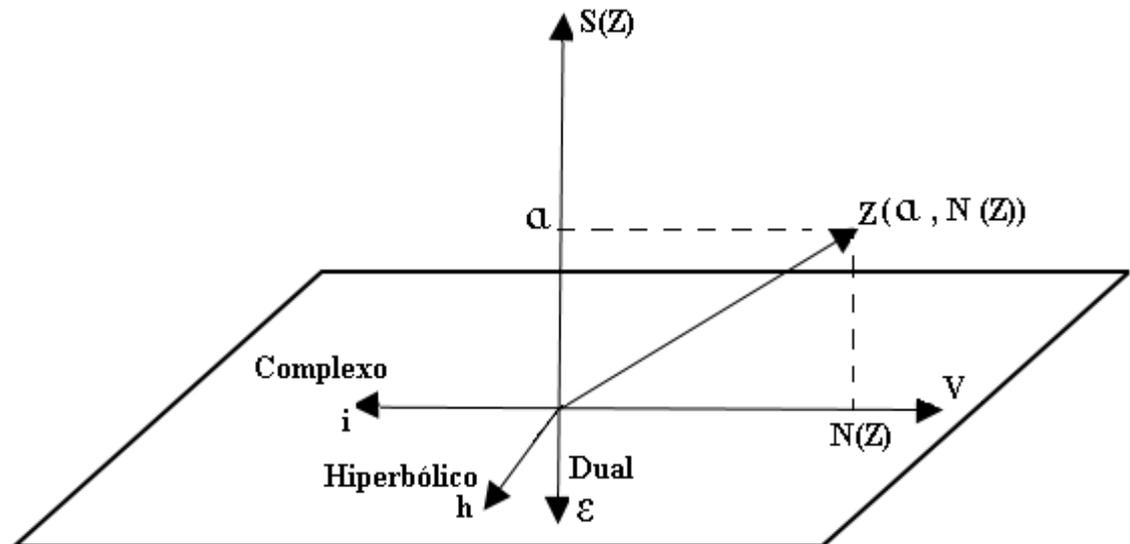
$$z = a + bi + c\varepsilon + dh = x + yV,$$

em que x e y são as partes escalar e vetorial do número híbrido z e a, b, c e d , seus componentes.

Assim sendo os números híbridos são vetores num espaço quadridimensional, em que a quarta dimensão será vista como uma dimensão auxiliar. É importante

perceber que o plano que contém os vetores híbridos é um hiperplano ortogonal à dimensão auxiliar, e que este é visto como o espaço tridimensional usual.

Figura 8 - Representação do hiperplano híbridano



Fonte: (OZDEMIR, 2018)

(OZDEMIR, 2018) mostrou que, com a devida definição dos eixos das abscissas e das ordenadas, é possível representar um número híbrido no sistema de coordenadas bidimensional à semelhança do sistema de coordenadas cartesianas.

A fim de possibilitar a representação dos números híbridos em duas dimensões, foram consideradas a parte real e o vetor híbrido unitário na construção dos eixos híbridanos, sendo tais eixos classificados como eixo real, contendo a parte real, e eixo híbrido, contendo a norma do vetor híbrido. Dessa forma, dado um número híbrido

$$z = a + bi + c\varepsilon + dh = x + yV,$$

o valor a estará no eixo real S e o valor $N(Z) = \sqrt{|C\varepsilon(Z)|}$, em que

$$C\varepsilon(Z) = -(b - c)^2 + c^2 + d^2,$$

no eixo híbrido V .

Esse sistema bidimensional, no qual estão representados os números híbridos, é denominado “Sistema de Coordenadas Híbridianas” ou “Plano Híbridiano”, sendo as coordenadas híbridas de um número híbrido Z dadas por

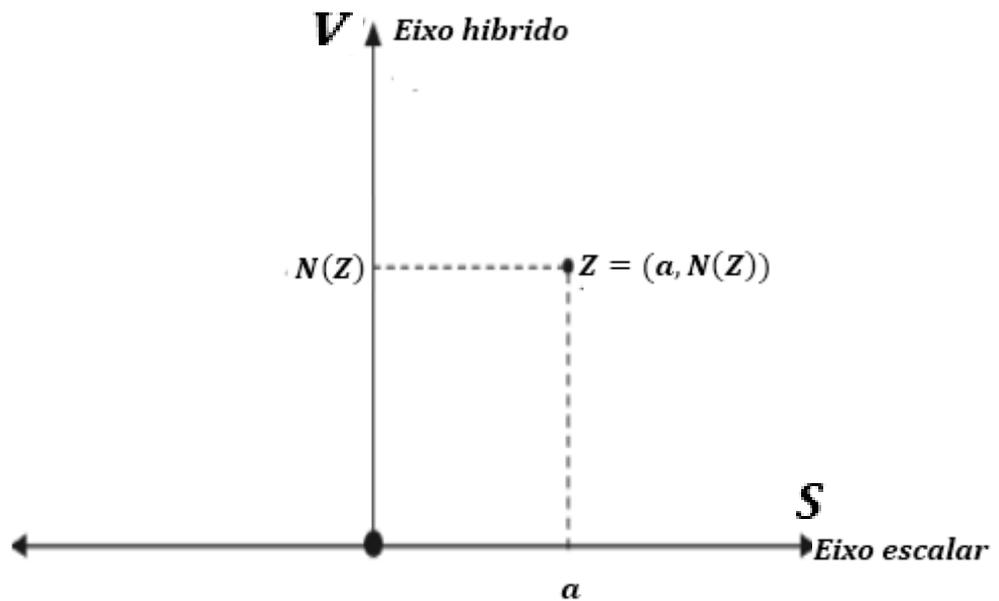
$$Z = (x, y) = (a, N(Z)) = \left(a, \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|} \right).$$

Na construção do plano híbridiano, o eixo híbrido é formado essencialmente pelo vetor híbrido unitário

$$V = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{N(Z)},$$

e conforme exposto acima, temos a seguir o sistema de coordenadas híbridianas:

Figura 9 - Plano híbridiano



Fonte: (OZDEMIR, 2018)

1. Seja o número híbrido $Z = 2 + i + \varepsilon + h$. Temos que

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon}(Z) &= -(b-c)^2 + c^2 + d^2 \\ &= -(1-1)^2 + 1^2 + 1^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

e que

$$N(Z) = \sqrt{|C_{\varepsilon}(Z)|}$$

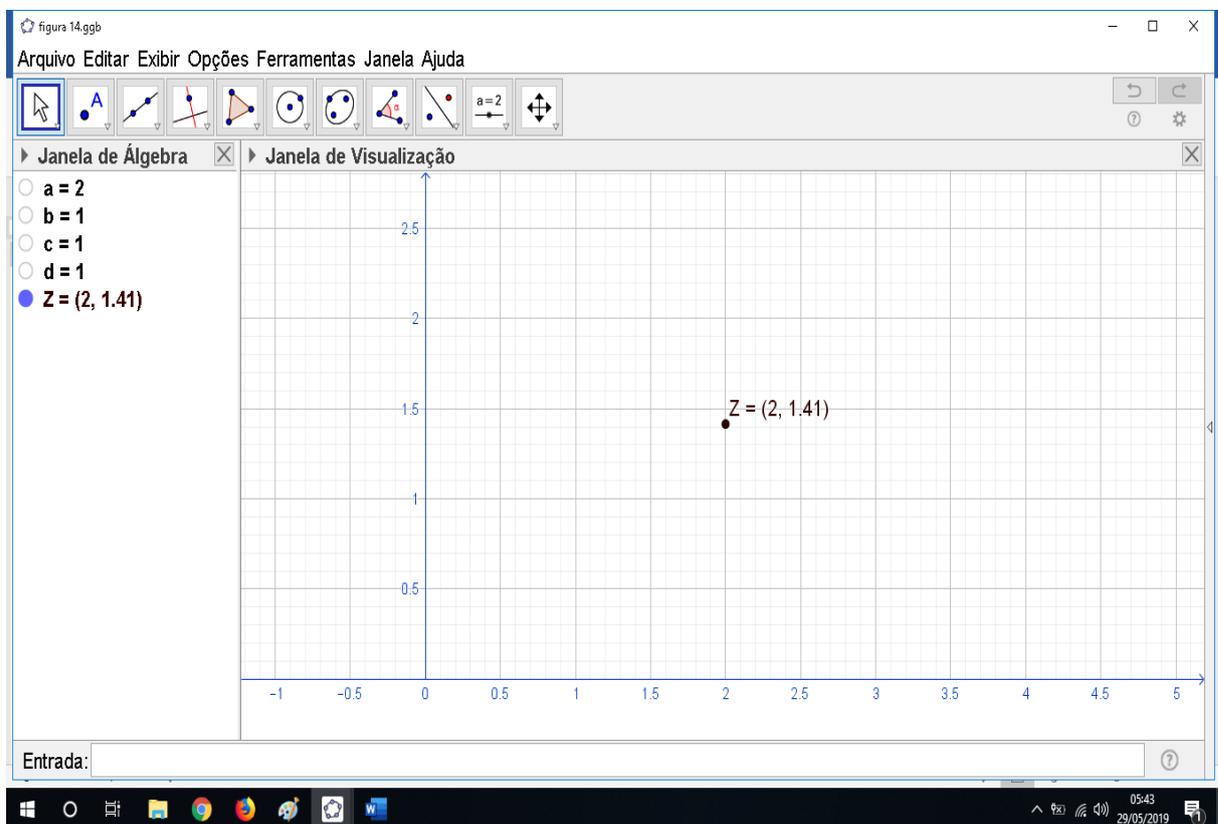
$$= \sqrt{2},$$

logo as coordenadas híbridas de Z são $(2, \sqrt{2})$, e o eixo híbrido, formado pelo vetor híbrido unitário

$$V = \frac{i + \varepsilon + h}{\sqrt{2}}.$$

Assim sendo, com o auxílio do Geogebra, podemos então representar Z conforme segue:

Figura 10: Representação Geométrica $Z = 2 + i + \varepsilon + h$



Fonte: produzido pelo próprio autor

2. Seja o número híbrido $w = -3 + 2i + \varepsilon + 2h$. Temos que

$$C_{\varepsilon}(w) = -(b - c)^2 + c^2 + d^2$$

$$= -(2 - 1)^2 + 1^2 + 2^2$$

$$= -1 + 1 + 4$$

$$= 4$$

e que

$$N(w) = \sqrt{|C\varepsilon(w)|}$$

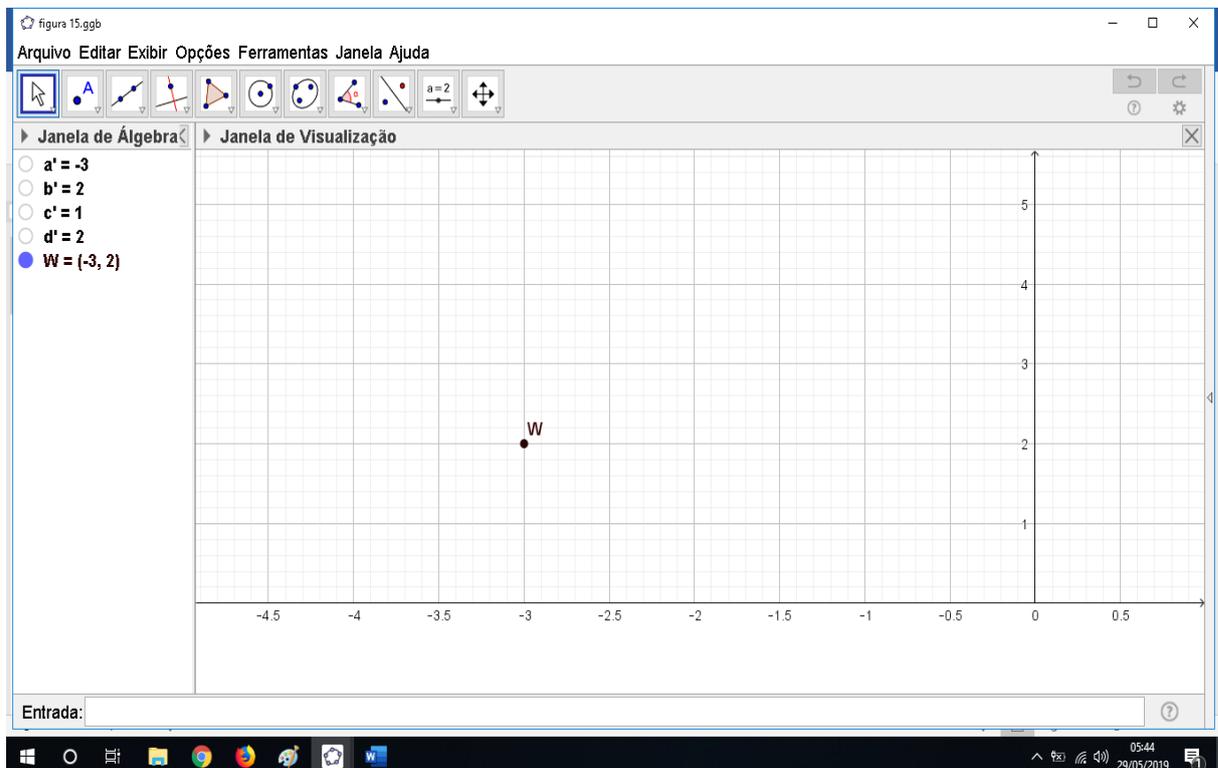
$$= 2,$$

logo as coordenadas híbridas de w são $(-3, 2)$, onde o eixo híbrido é formado pelo vetor híbrido unitário

$$V = i + \frac{1}{2}\varepsilon + h$$

e seu gráfico é dado abaixo:

Figura 11: Representação de $W = -3 + 2i + \varepsilon + 2h$



Fonte: Produzido pelo próprio autor

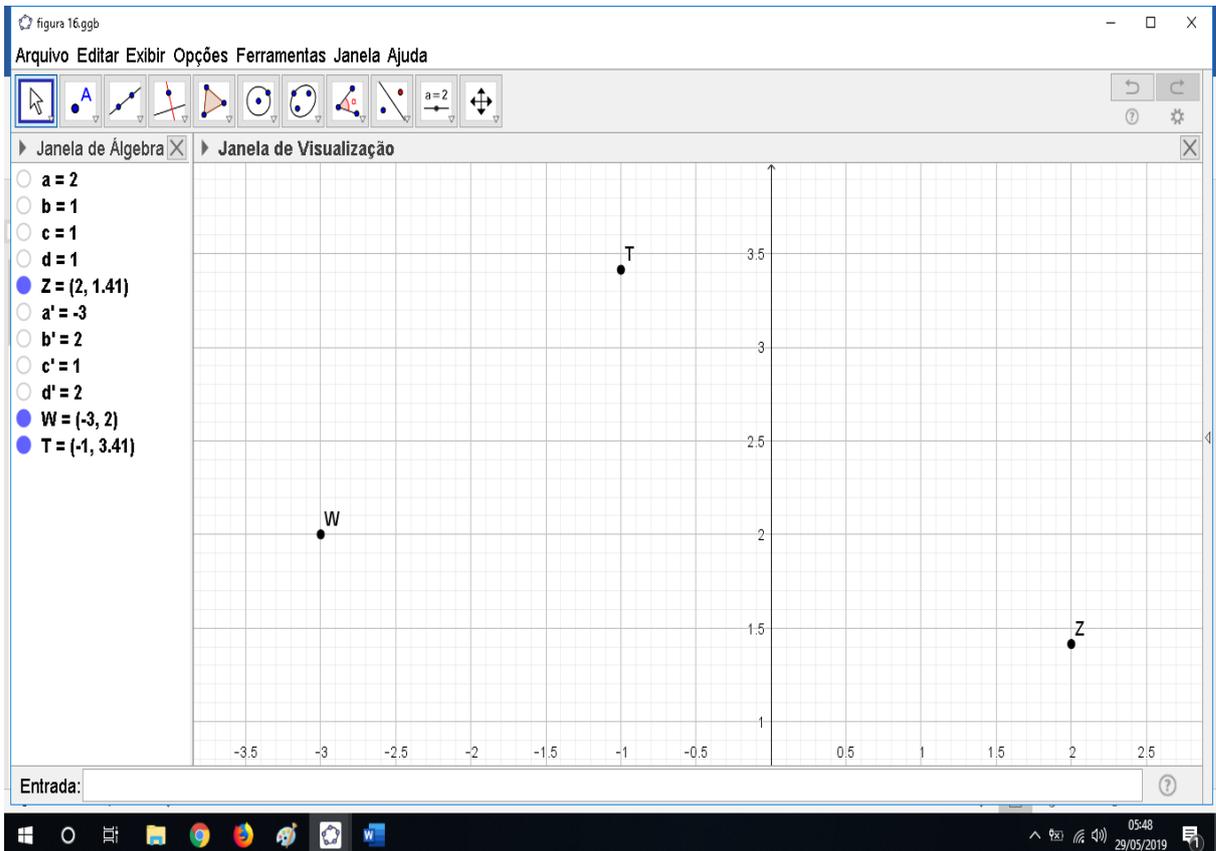
Já sabemos que a adição de dois números híbridos é definida como a soma dos componentes correspondentes de cada número. Sejam $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ e $W = a' + b'i + c'\varepsilon + d'h$ dois números híbridos dados, assim sendo a soma será dada por

$$Z + W = (a + a') + (b + b')i + (c + c')\varepsilon + (d + d')h,$$

sendo zero o elemento neutro.

3. Seja $T = Z + W$, com $Z = 2 + 1i + 1\varepsilon + 1h$ e $W = -3 + 2i + \varepsilon + 2h$. O gráfico de T é dado a seguir:

Figura 12: Representação da soma de dois híbridos



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Como já sabemos da definição 3, em um número híbrido $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, o vetor $V_Z = (a, (b - c), c, d)$ é chamado de vetor representação de Z e pode ser escrito como

$$C(Z) = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = -\langle V_Z, V_Z \rangle E_2^4$$

com os seguintes sinais $(-, -, +, +)$ em E_2^4 .

Vale lembrar, da Álgebra linear, que $a, (b - c), c$ e d nos dão a variação em cada um dos quatro eixos de sistema coordenado de quatro dimensões em que Z está representado.

Da seção 3, mais especificamente de 3.2.1, o produto de z e w é obtido da multiplicação distributiva

$$Z.W = (a + bi + c\varepsilon + dh)(a' + b'i + c'\varepsilon + d'h),$$

preservando a ordem da multiplicação das unidades, considerando a tabela 2.

Assim sendo, dados $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ e $W = a' + b'i + c'\varepsilon + d'h$, temos que

$$Z.W = (a + bi + c\varepsilon + dh)(a' + b'i + c'\varepsilon + d'h), \text{ com } i^2 = -1, \\ h^2 = 1 \text{ e } \varepsilon^2 = 0.$$

é dado por

$$Z.W = X + Yi + U\varepsilon + Vh,$$

onde

$$X = aa' - bb' + dd' + bc' + cb', \quad Y = ab' + ba' - db' + bd', \quad U = ac' + ca' - cd' + \\ dc' - db' + bd' \text{ e } V = ad' + da' - bc' + cb'.$$

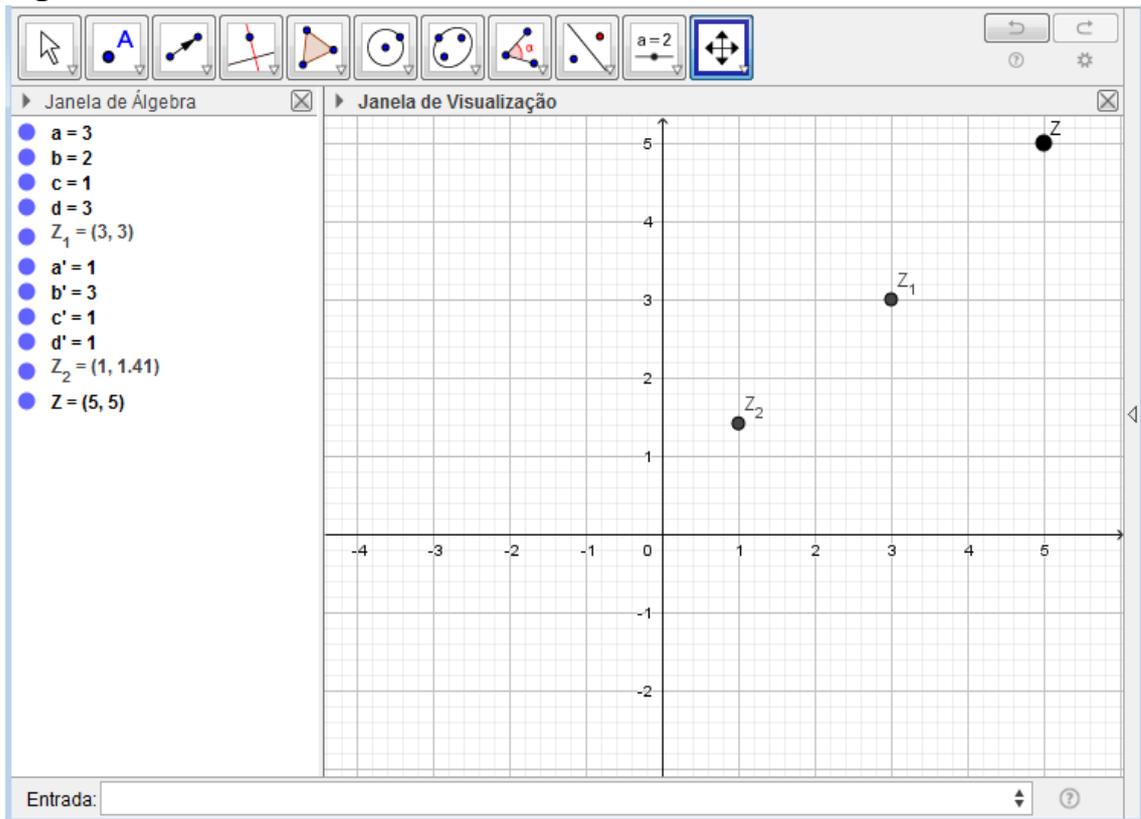
3. Sejam os números híbridos $Z = 3 + 2i + \varepsilon + 3h$ e $W = 1 + 3i + \varepsilon + h$. Temos como coordenadas de $Z = (3, 3)$ e como coordenadas de $W = (1, \sqrt{2})$. Efetuando o produto de ambos os números híbridos apresentados obtemos

$$Z.W = (aa' - bb' + dd' + bc' + cb') + (ab' + ba' - db' + bd')i \\ + (ac' + ca' - cd' + dc' - db' + bd')\varepsilon + (ad' + da' - bc' + cb')h \\ = (3 - 6 + 3 + 2 + 3) + (9 + 2 - 9 + 2)i + (3 + 1 - 1 + 3 - 9 + 2)\varepsilon + (3 + 3 - 2 + 3)h$$

$$Z.W = 5 + 4i - \varepsilon + 7h.$$

Desse modo temos as coordenadas de $Z.W = (5, 5)$. Com o auxílio do Geogebra temos o gráfico de $Z.W$ abaixo:

Figura 13: Produto de números híbridos



Fonte: Produzido pelo próprio autor

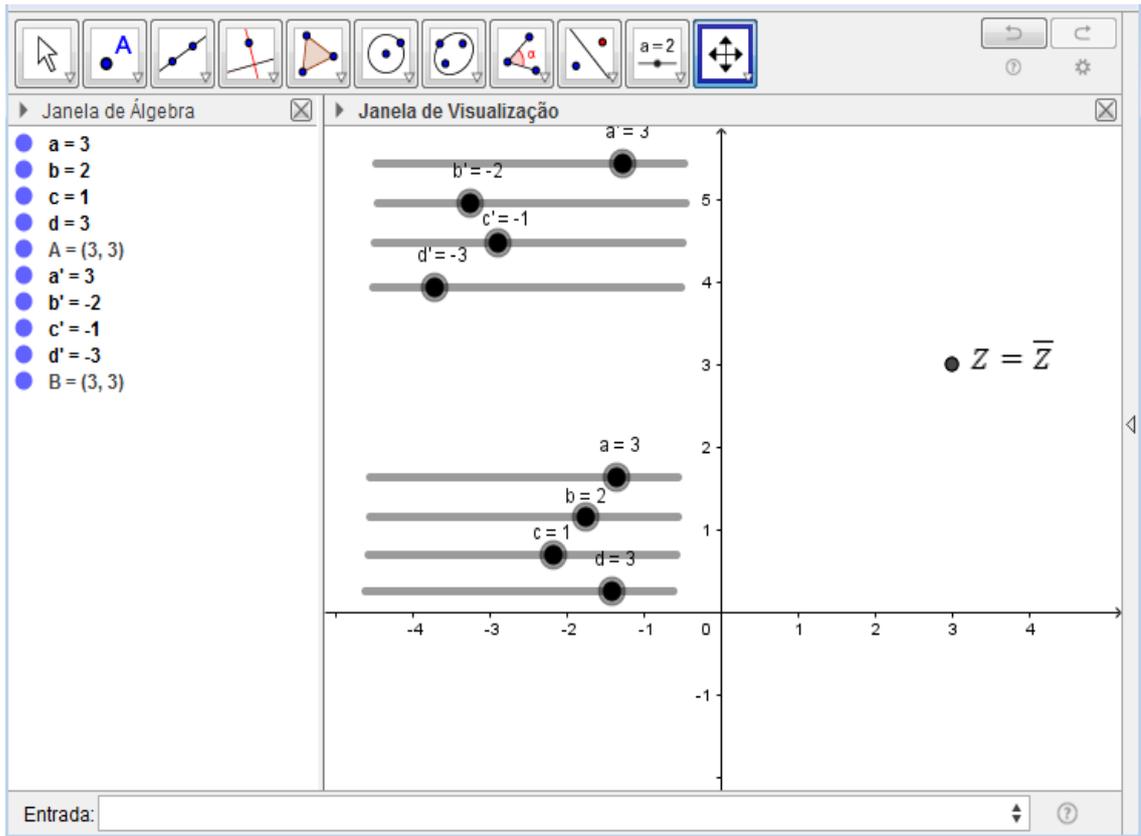
Segundo a definição 3.2 o conjugado de um número híbrido $Z = S(Z) + V(Z) = a + bi + c\varepsilon + dh$, denotado por \bar{Z} , é definido como

$$\bar{Z} = S(Z) - V(Z) = a - bi - c\varepsilon - dh,$$

à semelhança dos quatérnios.

Dado o número híbrido $Z = 3 + 2i + \varepsilon + 3h$, o seu conjugado será $\bar{Z} = 3 - 2i - \varepsilon - 3h$, conservando a mesma norma de Z e a mesma localização geométrica no plano híbrido, tendo o reflexo gerado pela simetria do vetor híbrido percebido apenas no hiperplano, conforme podemos ver no gráfico abaixo:

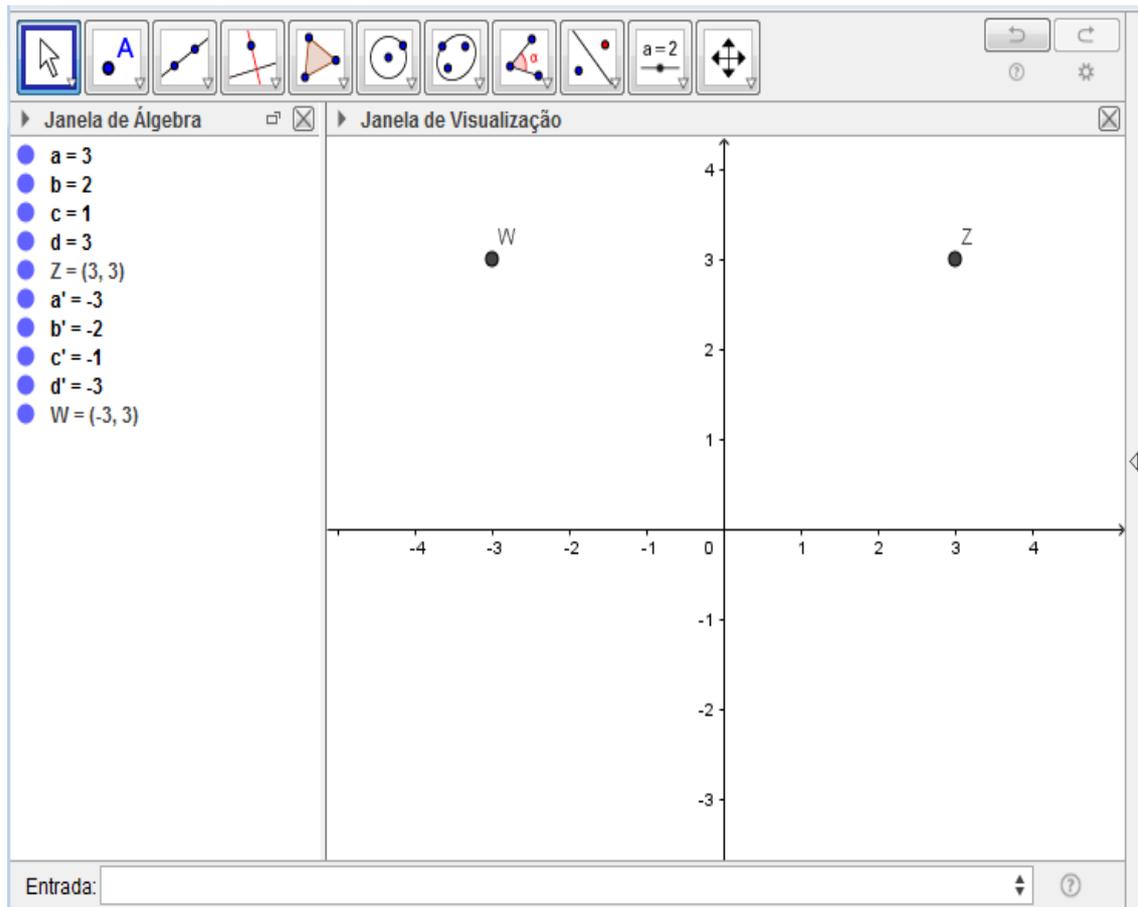
Figura 14: Representação do número Z e de seu conjugado \bar{Z}



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Já os comportamentos de um número híbrido $Z = 3 + 2i + \varepsilon + 3h$ e seu simétrico dado por $W = -3 - 2i - \varepsilon - 3h$ revelam que a simetria das partes escalares dos respectivos números gera uma rotação em torno do eixo híbrido, observando que a simetria da parte vetorial só é perceptível geometricamente no hiperplano, isto é, a simetria da parte vetorial não gera mudança de gráfico no plano hibridiano haja vista que a sua norma não sofre alteração, como se vê no gráfico abaixo:

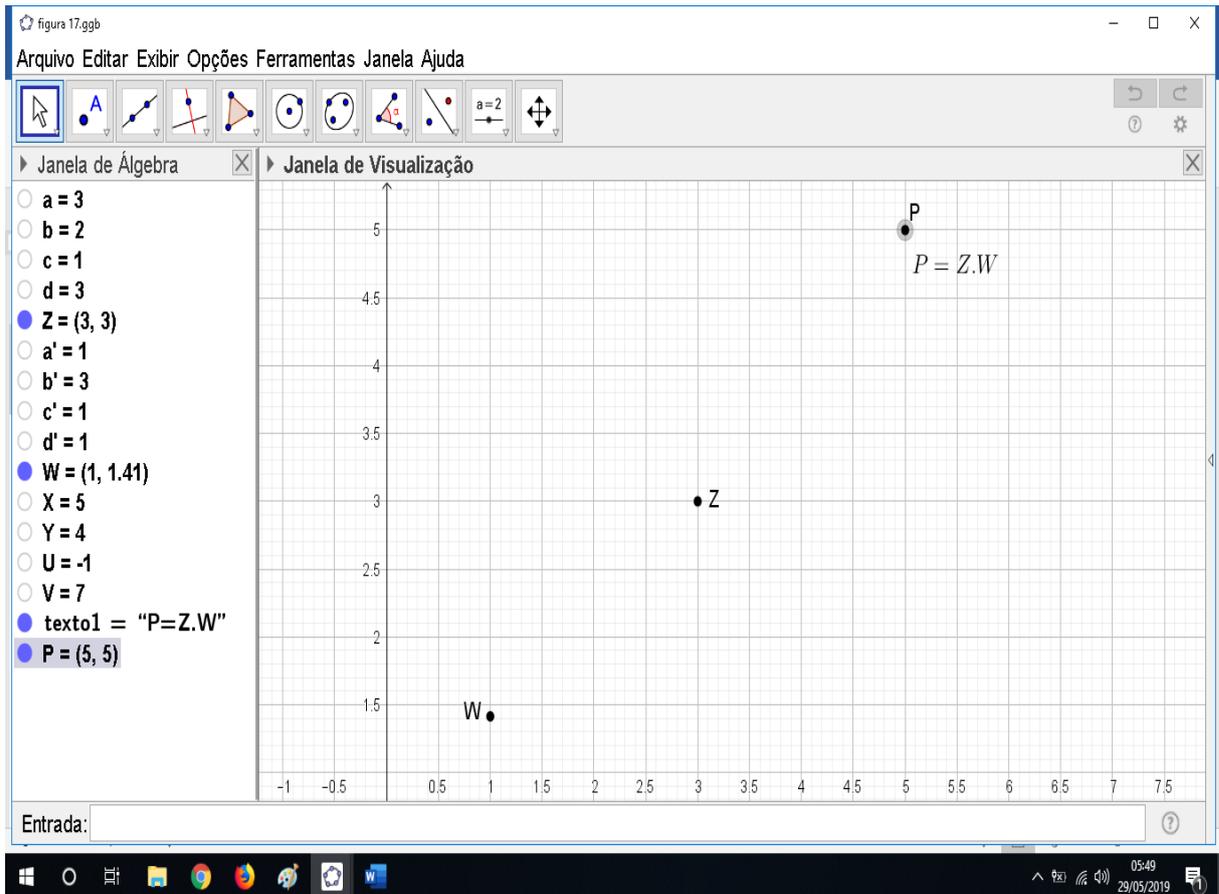
Figura 15: Representação de Z e de seu simétrico



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Como visto anteriormente, o produto de dois números híbridos Z e W é obtido multiplicando-se distributivamente os termos do primeiro número pelos termos do segundo, preservando a ordem da multiplicação das unidades. Dessa forma, sendo $Z = 3 + 2i + \varepsilon + 3h$ e $W = 1 + 3i + \varepsilon + h$, temos que $T = Z.W$ tem sua representação geométrica conforme segue:

Figura 16: Gráfico do produto de dois números híbridos



Fonte: produzido pelo próprio autor

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nossas pesquisas assumimos o desafio de investigar como a generalização dos números Complexos, Duais e Hiperbólicos contribuiu para a construção dos números Híbridos, em especial como estes se relacionam entre si em tal construção, bem como refletir sobre a importância da construção desse novo conjunto numérico para a ciência, na construção de novos saberes.

Neste trabalho pudemos trazer às claras algumas contribuições dos números complexos, Duais e Hiperbólicos para estudos que se consagraram pela aplicação prática nas descobertas científicas ao longo da história, bem como as generalizações destes números contribuíram para a compreensão da construção da ideia de números.

Entendemos como a definição de números Híbridos se deu a partir da generalizações dos três conjuntos acima mencionados, onde estes são instâncias daqueles, conforme sua definição deixa claro, e que a generalização na matemática, em especial a que trouxe à existências os Híbridos, em muito contribui para alargar os limites da ciência, na medida em que multiplica as possibilidades construções e amplia o leque de argumentações.

Depreendemos de nossos estudos que a não comutatividade dos Híbridos em nada prejudica a solidez e a robustez deste novo conjunto, onde o encadeamento dos conceitos, propriedades, teoremas e axiomas sobre os Complexos, Duais e Hiperbólicos contribuíram para a construção de uma estrutura algébrica e geométrica bem consistente.

Acentuamos uma pergunta no início deste trabalho, a saber, “como os números Complexos, Duais e Hiperbólicos se relacionam entre si para formar os números híbridos e qual a importância, para a ciência, dessa generalização na construção de novos saberes? Respondemos a essas perguntas evidenciando como, a partir da estrutura destes três conjuntos, (OZDEMIR, 2018) pôde fundamentar conceitos, propriedades e teoremas sobre os Híbridos, bem como tais relações e propriedades, bem como os diversos teoremas presentes neste trabalho, podem facilmente ser provadas quando se olha sob o prisma do isomorfismo entre estes e o conjunto de matrizes 2×2 .

Acreditamos que esta pesquisa em muito contribuirá para novos estudos sobre os números Híbridos, em especial na formação de professores de Matemática e Física, não somente pelo fato de apresentarmos este trabalho na língua vernácula, mas pela identidade que tentamos imprimir, na medida em que acrescentamos uma linha de pensamento no sentido de reforçar como o isomorfismo se tornou uma importante ferramenta na compreensão da construção destes números, bem como a representação geométrica do Geogebra vislumbra uma nova oportunidade para o estudos destes números.

No Geogebra encontramos um importante na representação dos Híbridos no plano hibridiano, uma vez que nos possibilitou visualizar esses números em sua forma geométrica, possibilitando-nos compreendê-los como números representáveis no sistema bidimensional à semelhança do plano cartesiano, onde temos suas partes, escalar e vetorial, associadas aos eixos escalar e híbrido, respectivamente.

Concluimos que nossos objetivos foram alcançados uma vez que em nossos estudos analisamos a construção dos números híbridos como nos propomos, apresentamos a sua representação geométrica bem como buscamos ampliar o foco de estudo sobre os números híbridos.

Esperamos, com esta pesquisa, difundir o conceito de números híbridos entre os alunos de licenciatura de Matemática e Física no Brasil, em especial nas universidades públicas do Ceará, apresentando um material conciso e de fácil compreensão, que traga em seu escopo não apenas definições e teoremas, mas também representação geométrica, com o Geogebra, e aplicações.

REFERÊNCIAS

- OZDEMIR, Mustafa. Introduction to Hybrid Numbers. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v.28, n.11, 2018.
- BOROTA, N.A., Flores, E., Osler, T.J.: Spacetime numbers the easy way. **Math. Comput. Educ.**, v.36, p.231-239, 2002.
- AKAR, Mutlu, YUCE, Salim, SAHIN, Serdal. On the Dual Hyperbolic Numbers and the Complex hyperbolic numbers. **Journal of Computer Science and Computational Mathematics**, v.8, n.1, mar., 2018.
- DIMENTBERG, F. M.: The Method of screws and calculus of screws applied to the theory of three dimensional mechanism. **Adv. Mech.**, p.91 – 106, 1978.
- HUDSON, R. **Generalised Translation-invariant mechanics**. Oxford: Bodleian Library, 1966.
- YAGLOM, I.M. **Complex Numbers in Geometry**. New York: Academic Press, 1968.
- OLARIU, S. **Hyperbolic complex numbers in two dimensions**. [S. l: s. n.], 2000.
- OLARIU, S. **Commutative complex numbers in four dimensions**. [S.l: s. n.], 2000.
- HARKIN, A.A., HARKIN, J.B. **Geometry of generalized complex numbers**. [S.l: s. n.], 2004.
- CATONI, F., CANNATA, R., CATONI, V., ZAMPETTI, P. Hyperbolic trigonometry in two-dimensional space-time geometry. **Nuovo Cimento B**, v.118, n. 5, p. 475, 2003.
- BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1997.
- BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. 3. ed. Brasília: MEC/SEF, 2001. v. 3.
- JÚNIOR, A.W.S. **Uso do Software Geogebra e Modelagem Matemática no Ensino de Funções**. Disponível em: < en.wikipedia.org/wiki/Hybrid_number... > Acesso em: 15 maio 2019.

CATONI, F., BOCCALETTI, D., CANNATA, R., CATONI, V., NICHELATTI, E., ZAMPETTI, P. The Mathematics of Minkowski Space-Time: With AN Introduction to Commutative Hypercomplex Numbers. **Birkhauser, Basel, 2008.**

GALPERIN, A.S., IVANOV, E.A., OGIEVETSKY, V.I., SOKATCHEV, E.S.: **Harmonic Superspace, 2001.**

BREWER, S.: Projective cross-ratio on hypercomplex numbers. **Adv. Appl.Cliford Algebras, 2013.**