UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Delba Costa da Silva Alves

Fractais: uma ferramenta no ensino médio

RECIFE
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Delba Costa da Silva Alves

Fractais: uma ferramenta no ensino médio

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento

RECIFE
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

A474f Alves, Delba Costa da Silva
Fractais: uma ferramenta no ensino médio / Delba Costa da Silva Alves. – 2019.
78 f.: il.

Orientador: Ross Alves do Nascimento.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Recife, BR-PE, 2019.
Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Fractais 3. Séries geométricas 4. Matemática (Ensino médio) I. Nascimento, Ross Alves do, orient.
II. Título

CDD 510

DELBA COSTA DA SILVA ALVES

FRACTAIS:
UMA FERRAMENTA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 16 / 05 / 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento(Orientador)-UFRPE

Prof. Dr. Rogério da Silva Ignácio – Col. Aplicação/UFPE

Prof. Dr. Severino Barros de Melo– Ded. / UFRPE

À minha família, pelo apoio em todos os momentos.

Agradecimentos

Aos meus filhos, Amanda e Lucas, que de alguma forma, sempre mostraram compreensão em relação às minhas ausências.

Ao meu marido, Rômulo, que me apoiou e incentivou a seguir na caminhada em busca dos meus objetivos.

A todos os professores do PROFMAT – UFRPE, em especial às professoras Anete Cavalcanti, Bárbara Costa, Maria Ângela Didier, Maité Kuleza e ao professor Rodrigo Gondim.

Ao professor Ross Nascimento, pela gentileza de em meio a tantos orientandos, aceitar-me e ser meu orientador. Obrigada pela disposição, paciência, compreensão e competência para me orientar neste trabalho, fornecendo contribuições valiosas para que o mesmo fosse realizado.

DECLARAÇÃO

Eu, **Delba Costa da Silva Alves** declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título **Fractais: uma ferramenta no ensino médio**, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processo administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador **Dr. Ross Alves do Nascimento**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife,16 de maio de 2019.

Delba Costa da S. Alves

Delba Costa da Silva Alves

“Quando a gente acha que tem todas as respostas,
vem a vida e muda todas as perguntas.”
(Luís Fernando Veríssimo)

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de análise da geometria fractal associada aos conceitos de progressões e representação da noção de função, especificamente na aplicação de saberes obtidos em aprendizagens em sala de aula. A proposta foi construída a partir de uma sequência de três atividades, que foi aplicada em uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual. Buscamos investigar se os estudantes trabalhando atividades baseadas em geometria fractal, especificamente, o Triângulo de Sierpinski, procuram por investigação de padrões e de escrita matemática baseada em saberes de progressões aritméticas e geométricas e sobre o conceito de funções.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Modelagem Matemática, Fractal, Progressões.

Abstract

This work presents a proposal of analysis of the fractal geometry associated to the concepts of progressions and representation of the notion of function, specifically in the application of knowledge obtained in learning in the classroom. The proposal was constructed from a sequence of three activities, which was applied in a second year high school class of a state public school. We seek to investigate whether students working in activities based on fractal geometry, specifically the Sierpinski Triangle, seek to investigate patterns and mathematical writing based on arithmetic and geometric progression knowledge and on the concept of functions.

Keywords: Mathematics teaching, Mathematics Modelling, Fractal, Progressions.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

O desenvolvimento da matemática ocorre por necessidade humana de conhecer o mundo ao seu redor e pelas necessidades de sobrevivência. A matemática faz parte da vida de nossas experiências mais cotidianas, desde o ato de contar, até em processo de investigação e desenvolvimento de projetos. O conhecimento adquirido pelo ser humano a partir da apropriação da matemática permite uma melhor compreensão dos fenômenos sociais, econômicos e culturais.

Nesse processo apresenta-se a dificuldade de conhecer saberes matemáticos, observando-se principalmente no processo de ensino da própria matemática, que está atrelado a diversos fatores. Um deles é a própria natureza da ciência, pois um resultado matemático utiliza outros resultados anteriores, e assim por diante, caracterizando-a como uma linguagem. Outro fator é o distanciamento dos conteúdos tratados com o mundo real. Ainda é comum a prática engessada da metodologia da aula expositiva, cópia e exercícios, que são repetitivos a partir da aplicação de um modelo, sem nenhum sentido real para o aluno.

No campo de ensino da geometria, constata-se que muitos professores não detêm parte dos conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas. Esta discussão foi colocada há bastante tempo no trabalho “Os por quês matemáticos dos alunos e as respostas dos professores” (LORENZATO, 1995). Sobre uma pesquisa realizada com 255 professores de 1ª a 4ª séries, cada um com cerca de 10 anos de experiência no magistério, estudo em que foram submetidos a trabalhar 8 (oito) questões referentes à Geometria plana euclidiana (conceitos de ângulos, paralelismo, perpendicularismo, círculo, perímetro, área e volume), observou-se 2.040 respostas erradas, isto é, o máximo possível de erros. E mais, somente 8% dos professores admitiram que tentavam ensinar Geometria aos alunos (LORENZATO, 1995, pág. 3).

Na verdade, o dilema dos professores é o discurso de que tentam ensinar geometria sem conhecer as bases e os fundamentos dessa área da matemática. Há uma clara evidência de que os currículos dos cursos de licenciatura das universidades necessitam incorporar propostas mais eficientes para que se tenha uma formação de professores em geometria com mais qualidade. Outro fato são as modalidades de formação continuada, postas em ação nos últimos anos, basicamente na forma de cursos de capacitação, que não têm atingido um objetivo significativo para mudar esses dados relativos a dificuldade da prática na sala de aula em relação ao ensino de Geometria (ALMOULOUD, 2004).

Apesar dos saberes da geometria se situarem no eixo em que mais se permite uma aproximação com o mundo real, tais saberes ainda são tratados, frequentemente, como um conjunto de conceitos e definições sem qualquer relação com objetos reais, não permitindo, por exemplo, contemplar o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo, percebendo seus objetos e assim representá-los.

A geometria tem sido importante em seus diversos aspectos para a formação dos estudantes. Apesar de dificuldades, a Geometria Euclidiana, durante séculos, foi considerada suficiente para descrever todos os olhares do mundo em que vivemos. Pois, através do seu estudo, se consegue explicar casos de visualização e compreensão de objetos planos com perfeição, mesmo, no século XIX, quando algumas contestações desse paradigma aparecem e, mesmo assim, ele se sustenta. Apesar de percebermos hoje, que muitas formas da natureza, como nuvem, arquitetura de árvores, muitos contornos de montanhas e até a superfície dos pulmões, por exemplo, não poderiam ser descritos pela geometria Euclidiana, requisitando-se outros saberes de uma nova visão da geometria que são característicos de um novo paradigma.

Esse novo paradigma geométrico vem questionar aplicações da geometria plana em campos não usuais ao que ela se sustentava, pois não se tinha ainda observado alguns aspectos. Em 1967, Mandelbrot, matemático polonês, utilizou pela primeira vez, o termo fractal para definir objetos e fenômenos da natureza com formas irregulares e que se observados em diferentes escalas, tem essencialmente a mesma estrutura. Mandelbrot não aceitava a descrição de objetos naturais comparando-os a elementos da geometria tradicional. Esta insatisfação e inquietude levam-no a descrever uma nova forma de geometria com estruturas geometricamente complexas e infinitamente variadas, a Geometria Fractal.

Muito se tem discutido sobre estratégias de abordagens de conteúdos da geometria plana em sala de aula, como um recurso para propor habilidades e conhecimentos nos estudantes a esses novos saberes. A própria prática pedagógica nos faz perceber que apresentar novas abordagens dos saberes geométricos torna a aula mais prazerosa, permitindo ao estudante associar um conteúdo aparentemente apenas intrínseco à disciplina a algo real, valorizando o processo de ensino aprendizagem. Nesse sentido, discutir propostas para trabalhar o estudo dos fractais como forma de apresentar aos estudantes uma compreensão desse novo saber a partir de suas aplicações torna-se importante, pois permite a investigação de conteúdos matemáticos de diversas áreas, como cálculo, geometria plana e espacial e álgebra, por um novo caminho.

Segundo Nunes (2006), a exploração da geometria fractal, no contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, que ocorre na medida em que se promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar, de impulsionar a utilização da matemática na interpretação do real, de reconhecer formas e processos que envolvem conceitos matemáticos e na ajuda da compreensão dos conceitos de perímetro, área e volume, como também ao promover a pesquisa de padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos.

Nesse sentido, experimentar uma abordagem de ensino de matemática através do uso de fractais, no ensino médio, para valorizar o aprendizado dos estudantes em conteúdos que exploram essa visão geométrica é uma proposta que pode enaltecer o trabalho do professor, pois começa a se discutir nesse nível de ensino o que as ciências vêm apresentando.

A Geometria Fractal nos favorece com uma ligação mais próxima da representação de elementos naturais, além de ter uma aplicabilidade em diversas áreas, como Biologia, Medicina, Topografia, Engenharias, Arte, design gráfico em jogos, entre outras, que desperta o interesse do aluno no processo de identificação de formas, provocando a curiosidade do entendimento de alguma delas.

Atualmente se verifica na prática de sala de aula a possibilidade do uso de materiais simples, como papel, lápis, régua e compasso, para construir a representação de fractais, principalmente quando a estrutura escolar não dispõe de recursos computacionais para o uso de software que permite a visualização e sua construção pelo estudante.

No Ensino Médio, quando o estudante está em fase decisiva de formação de opinião e escolhas referentes ao seu futuro acadêmico e profissional, a identificação com os conteúdos apresentados nas diversas disciplinas pode gerar contentamento quando o mesmo consegue associar a importância desses conteúdos com a sua aplicação na vida real.

De acordo com os PCN+ (Brasil, 2002), os temas devem, ainda, permitir uma articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos para garantir maior significação para a aprendizagem, possibilitar ao aluno o estabelecimento de relações de forma consciente no sentido de caminhar em direção às competências da área e, até mesmo, tornar mais eficaz a utilização do tempo disponível. (Pág. 116).

Embora os PCN para o Ensino Médio (Brasil, 1998) não explicitem este tema como conteúdo curricular, a Geometria Fractal, ultimamente, vem sendo objeto de investigação no cenário da Educação Matemática a partir dos estudos de diversos pesquisadores (BARBOSA, 2002; BRANDÃO, 2002; ROMAN, 2004; SALLUM, 2005; GOUVEA, 2005; PIMENTEL, 2005; ALMEIDA, 2006; GONÇALVES, 2007; PALLESI, 2007; FARIA, 2012), que através de discussões em áreas diversas detalharemos nesse estudo em um tópico específico para cada campo matemático trabalhado.

A forma de apresentar um conteúdo da matemática utilizando fractais permite ao aluno a oportunidade de estudar tópicos do currículo da matemática com um novo olhar, no qual, ele poderá articular temas da matemática formal com a natureza. Portanto, a proposta deste trabalho é discutir os resultados da aplicação de uma atividade em que se fez o uso da geometria fractal para desenvolver habilidades em estudantes do ensino médio relativo a identificação de saberes do campo das sequências numéricas, quando visualizadas através da geometria fractal.

Os saberes da geometria fractal a partir dos estudos que vem sendo construídos tornaram-se bastante diversos e atualmente já exploram diversos saberes e campos de aplicação. Portanto, nosso foco de estudo restringe-se apenas ao campo das sucessões numéricas, especificamente progressão aritmética e geométrica. Dessa forma, apresentamos como questão de pesquisa a seguinte indagação: Será que os estudantes do ensino médio trabalhando atividades baseadas em geometria fractal aplicam corretamente saberes obtidos de suas aprendizagens matemáticas de sala de aula, especificamente Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e a Representação da noção de funções (termo geral de uma sequência)?

Para o desenvolvimento dessa proposta de estudo apresentamos a seguir os objetivos que pretendemos seguir como forma de contemplar os aspectos e tópicos importantes que vem sendo tratados nas discussões da literatura.

1 Objetivos

1.1 Objetivo geral

Através de uma sequência de atividades buscamos explorar a geometria fractal como recurso para o entendimento de conteúdos curriculares de matemática relativos a Progressão Aritmética e Geométrica, com estudantes do ensino médio.

1.2 Objetivos específicos

1. Explorar com estudantes do Ensino Médio atividades com foco na geometria fractal;
2. Analisar como os estudantes do Ensino Médio compreendem a geometria fractal associada aos conteúdos trabalhados na sala de aula em seus diversos aspectos;
3. Discutir a associação dos padrões de regularidades visualizados nos fractais que tem ligação com o conceito de P.A. e P.G.

2 Fundamentação teórica

O conjunto de anotações contidas no material histórico, os Elementos de Euclides, é considerado a mais completa obra antiga que trata de geometria. Constituída de 13 livros, expõe resultados de matemática elementar em ordem lógica, desde a época de Tales (600 a. C) até Euclides (300 a. C). A grandeza de sua estrutura axiomática é o que a diferencia de todas as outras que a precederam.

O livro I desse material científico é destinado a apresentação da geometria plana, com 48 proposições deduzidas a partir de 5 axiomas, 5 postulados e 23 termos definidos.

Por mais de dois mil anos, Os Elementos foram aceitos como verdade evidente, com exceção do quinto postulado, conhecido como o postulado das paralelas, que por não ser tão evidente, como os outros, mesmo na antiguidade, despertou o interesse de alguns matemáticos que acreditavam que se tratava de um teorema, passível de ser demonstrado a partir dos demais. Mas todas as tentativas neste sentido falharam.

Apesar de sua aceitação universal por tanto tempo, Os Elementos tem recebido críticas por ter provas e definições insuficientes pelo padrão da matemática moderna. O movimento crítico iniciou-se, provavelmente, no século XVII, sobretudo com John Wallis (1616–1703), matemático britânico com trabalho sobre cálculo percursor aos de Newton (1643-1727), prosseguindo com Lambert (1728-1777) e Gauss (1777-1855). Mas é no século XIX que a crítica chega as últimas consequências, ocorrendo a proposição de geometrias alternativas por Bolyai (1802-1860), Lobachewski (1793-1853) e Riemann (1826-1866), e ademais emerge, em nova fundamentação da geometria euclidiana proposta por Pachs (1843-1930), Dedekind (1831- 1916) e Hilbert (1862-1943), que tentaram reformular os axiomas dos Elementos, inclusive adicionando um axioma de continuidade e um axioma de congruência.

Gauss foi o primeiro a aceitar a independência do quinto postulado. Mas a primeira negação pública foi de Lobachewski, em 1826 que, de acordo com Boyer (2003, p. 360) é chamado de "Copérnico da Geometria", o homem que revolucionou o assunto pela criação de todo um ramo novo, a geometria de Lobachewski, mostrando com isso que a geometria euclidiana não era a verdade absoluta que se supunha ser. Atualmente temos a clareza de que muitos dos problemas do cotidiano e do mundo científico, não são resolvidos pela geometria euclidiana, e sim pelas chamadas geometrias não euclidianas, como por exemplo, as geometrias hiperbólica, elíptica, projetiva, da topologia e a dos fractais (VEJAN, 2011).

Ainda segundo Vejan (2011), alguns comportamentos na natureza que apresentam formas muito irregulares, como as nuvens, as montanhas, os batimentos do coração, as árvores, os formatos visuais da couve-flor e dos brócolis, dentre outros, a geometria euclidiana por nós conhecida se torna inadequada para analisar tais situações, sendo necessário recorrer a Geometria dos Fractais. Talvez seja este um dos maiores méritos da Geometria Fractal: o de melhor representar as formas da natureza. Ideia formalizada em uma famosa frase, pelo criador do termo fractal e percursor da Geometria Fractal, o polonês Benoit Mandelbrot (1924-2010), no seu livro intitulado: “The Fractal Geometry of Nature”, no qual coloca o fato de que nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, a casca das árvores não é lisa e tampouco a luz viaja em linha reta.

A história da Geometria Fractal confunde-se com a do seu criador. Mandelbrot percebia-se descontente com a crescente algebrização da matemática proposta pelo Bourbaki, grupo de jovens matemáticos que visavam uma Matemática formal e pura à qual predominava a abstração e que tinha como um dos membros, seu tio Szolem Mandelbrot, na primeira metade do século XX, na França, onde residia. Em 1948, Mandelbrot mudou-se para os Estados Unidos para trabalhar no Instituto de Pesquisa James Watson da IBM (Internacional Business Machines Corporation), segundo estudos de Barbosa, (2002).

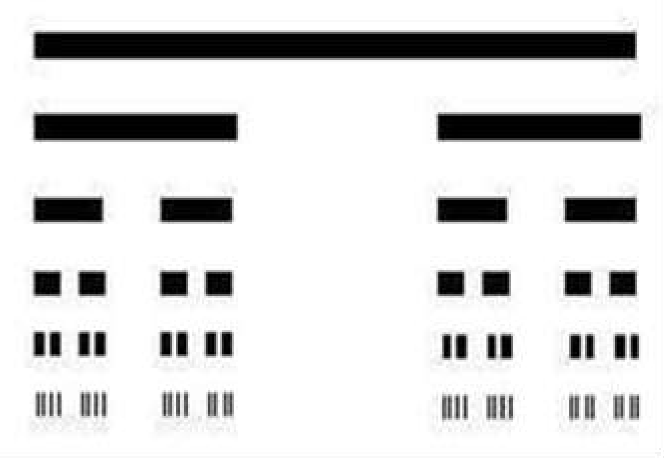
Mandelbrot trabalhou em vários problemas aparentemente independentes. Um deles estava relacionado a medição do litoral da Grã-Bretanha. Barbosa (2002) apresenta a resposta encontrada por Mandelbrot:

> A resposta possível variará conforme a escala de medição. Baías e Penínsulas aparecerão ou não, dependendo da escala adotada. Sabe-se, por exemplo, que em documentos dos dois países vizinhos, a fronteira da Espanha com Portugal difere em cerca de 20%, o mesmo acontecendo por exemplo, com a fronteira da Holanda e da Bélgica. Claro que ao efetuar as medidas cada país empregou instrumentos com unidades de escalas diferentes.(BARBOSA, 2002, p.12).

Em outras palavras, reentrâncias ou saliências menores que um metro e medidas com a base de medição sendo usado o metro, não apareceria. O que indica que a base de medição deveria tender a zero. Mas isto não faria sentido pois a medição tenderia para o infinito.

Segundo Titoneli (2017, p. 92), outro problema estudado por Mandelbrot, agora já na IBM, estava relacionado com ruídos na transmissão de dados entre computadores. Problema este que nem os experientes engenheiros conseguiam resolver. Mas, Mandelbrot seguiu o caminho inverso. Ao invés de tentar eliminá-los, considerou-os inevitáveis, percebendo que os erros vinham em blocos, que se ampliados, revelavam outros blocos menores em sua estrutura intercalados pelos dados da transmissão. Tratando os erros como de maneira semelhante à Poeira de Cantor (Figura 1). Gonçalves (2007, p. 42) discute que o conjunto ou poeira de Cantor, talvez o primeiro objeto a ser reconhecido como fractal, foi publicado em 1883. A partir de um segmento de reta, divida-o em três partes iguais e elimine a parte central. Depois, repita este procedimento a cada parte do segmento que permanece. Programando os computadores para trabalhar assim, diferenciando a informação transmitida e o ruído indesejável, elimina-se a maior parte da interferência, tornando a comunicação viável.

Figura 1 – Representação Fractal conhecida como Conjunto de Cantor.



Fonte:<http://www.principo.org/universidade-de-coimbra.html>.
(Acesso em 11/02/2018)

Após diversos resultados, Mandelbrot reuniu todos os seus trabalhos e os direcionou para o que se conhece hoje como Geometria Fractal. Sendo fractal, que significa quebrado, o termo utilizado para identificar as formas que fazem parte desta geometria.

Segundo Albuquerque (2008, p.1), tecnicamente, um fractal é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida em que a escala, sob a qual o mesmo é analisado, é alterada, mantendo-se a sua estrutura idêntica ao original. Isto não é o que ocorre, por exemplo, com uma circunferência, que parece reduzir a sua curvatura à medida em que ampliamos uma das suas partes.

As principais características de um fractal são autossimilaridade, quando uma porção, de uma figura ou de um contorno, pode ser vista como uma réplica do todo, numa escala menor; complexidade infinita, quando se executa um determinado procedimento, no decorrer do mesmo encontra-se como subprocedimento o próprio procedimento anteriormente executado; dimensão, que ao contrário da geometria euclidiana, não é necessariamente um número inteiro, pode ser uma quantidade fracionária, representando o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém; e iteração, característica que permite que o fractal seja expresso por um procedimento recursivo ou iterativo.

2.1 A Geometria Fractal, Interdisciplinaridade e Ensino

Segundo Barbosa (2002), a Geometria Fractal está intimamente ligada à ciência do Caos, pois as estruturas fragmentadas dos fractais fornecem uma certa ordem, buscando padrões dentro de um sistema que é aparentemente aleatório. A teoria dos fractais apresenta uma maneira simples e coerente de entender um fenômeno complexo.

Ainda segundo Barbosa (2002), as justificativas para se inserir Geometria Fractal em sala de aula se dá pelas conexões com várias ciências e até por deficiências da Geometria Euclidiana no estudo de formas da natureza, desde que é, em geral, apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios, pontes, estradas, máquinas, etc.; os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que se observa nos diversos ambientes; difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização; existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade e a sensação de surpresa diante da ordem na desordem.

2.2 A geometria fractal e sua aplicação na medicina

Nas ciências médicas e biológicas encontramos situações e dados importantes que estão associados à geometria Fractal, por exemplo, que podem ser modelados por fractais. As ramificações pulmonares, veias e artérias seguem padrões de ramificações que são perfeitamente representados por fractais. Um ritmo cardíaco, apesar de aparentar constância, tem variações aleatórias, porém, identificam-se padrões fractais nessas variações em diferentes escalas. A análise de imagem no diagnóstico precoce de câncer pode ser feita através de modelagem utilizando-se a dimensão fractal (RABAY, 2013).

Para aplicação da análise da dimensão fractal em imagens radiográficas foram desenvolvidos algoritmos para quantificar as propriedades texturais de uma imagem. O osso trabecular, tipo de osso responsável por 20% do esqueleto humano e que tem entre outras funções, a manutenção da força e elasticidade do esqueleto, além de alojar a medula óssea, tem um padrão de ramificação que apresenta propriedades fractais como autossimilaridade e falta de escala bem definida. Este fenômeno, a aplicação da geometria fractal e a medição da dimensão fractal pode ser usada para determinar a complexidade estrutural do osso trabecular (KANIS,1994; MARSHALL et al.,1996; SCHUIT et al., 2004 apud SINDEAUX, 2013).

2.3 A geometria fractal e sua aplicação na geografia de mapas

Desde sua criação, a Geometria Fractal vem sendo utilizada em diversas áreas, mas no início dos anos 70 e com o desenvolvimento dos sistemas de informação geográfico e do sensoriamento remoto é que a Geometria Fractal passou a ser incorporada em estudos cartográficos, topográficos e ecológicos (LAWFORD e MASTER, 2002).

A ecologia e a geometria espacial têm ressaltado a importância da métrica utilizada para quantificar o nível de detalhes de mapeamento. A variação da resolução, ou do nível de detalhe das representações espaciais contidas em um mapa, pode ser responsável por distorções de valores de área, perímetro, número e forma dos objetos. Desta maneira, muita atenção tem sido dada à resolução espacial dos arranjos espaciais das paisagens, pois quando a resolução ou o nível de detalhe é alterado, diferentes estruturas e feições espaciais podem aparecer (BENSON e MACKENZIE, 1995).

Segundo Turner (2001), as alterações influenciam diretamente nos valores das métricas utilizadas na quantificação dos padrões espaciais da paisagem, provocando distorções que são responsáveis por variações na estimativa da dimensão fractal de elementos lineares, como é o caso das linhas de costa.

Mandelbrot (1967) já havia concluído que à medida que o tamanho padrão aumenta, os comprimentos aproximados das linhas da costa e das fronteiras diminuem. Este padrão negativo dos gráficos é dependente de duas constantes que podem ser interpretadas como uma dimensão, no caso a dimensão fractal.

2.4 O desenvolvimento da representação fractal a partir do uso de software

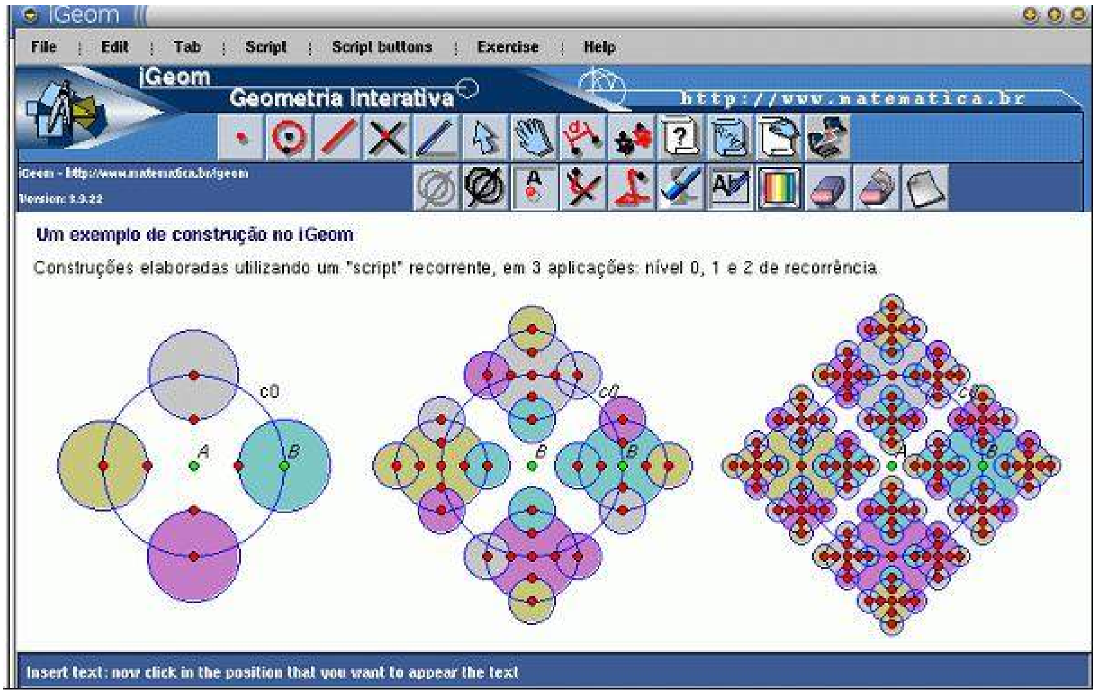
Barbosa (2002) propõe a exploração de temas como contagem, sequências, perímetro, área, volume e algoritmo de programação, buscando o despertar de padrões através da estética dos fractais. Uma abordagem para contagem e sequência dá-se pela construção de fractais pela fronteira, permitindo determinar a sucessão de comprimentos dos níveis, descobrindo o seu termo geral por inferência sobre os casos iniciais; na exploração de descobrir a sucessão das quantidades das formas de paralelepípedos construídos por dobraduras e cortes em uma folha de papel, permitindo a conclusão dada por uma recorrência, dá-se a abordagem de volume; perímetro e área são explorados, por exemplo, em atividades com fractais planos por remoção; e algoritmo de programação, trabalhado de forma interessante como a árvore fractal construída no Cabri-géomètre, software desenvolvido por Laborde e Bellemain (1988).

Roman (2004) utilizou os recursos computacionais para relacionar progressões com fractais. A utilização da Geometria dinâmica permite a simulação no computador de construções usualmente feitas com régua e compasso, possibilitando com apenas uma construção realizar vários testes. Outros estudos (GONÇALVES, 2007; PALLESI, 2007; FARIA, 2012), também fizeram uso da Geometria Dinâmica, hoje bastante requisitada no movimento dos efeitos computacionais.

O uso de software para o desenvolvimento de fractais oferece condições de manipulação de diferentes componentes das figuras construídas permitindo a construção de conjecturas de forma a fundamentar conceitos geométricos e algébricos. Os programas gráficos são capazes de resolver e até ajudam a solucionar problemas de bons projetos, permitindo a visualização imediata do erro e criando no ambiente onde o produto está sendo desenvolvido a antecipação de etapas. No caso das iterações na construção de fractais, permite a generalização de resultados de forma mais rápida e segura. Como exemplo, os softwares Geogebra e o iGeom (figura 2) são alguns dos programas de Geometria Dinâmica que possuem recursos inerentes à construção de fractais geométricos.

Como exemplo, os softwares Geogebra e o iGeom (figura 2) são alguns dos programas de Geometria Dinâmica que possuem recursos inerentes à construção de fractais geométricos.

Figura 2 – Imagem estática do iGeom com um fractal nele construída (usando sua recorrência)



Fonte:<http://www.matematica.br/igeom>.
(Acesso em 11/02/2018)

2.5 Geometria fractal e conceito de progressão aritmética e geométrica

Antes de abordar a geometria fractal em relação aos conceitos de PA e PG, indicamos um estudo de Albuquerque e Nascimento (2016) enfatizando que existem propostas de ensino da Matemática que geram contextos importantes para compreensão do conceito de sucessão aritmética e geométrica que ainda são pouco exploradas e valorizam a discussão de que a geometria sempre foi um campo do conhecimento matemático utilizado como ferramenta auxiliar para a compreensão de outros conceitos da própria Matemática. Tal fato é reforçado por Almeida (2013) quando levanta a questão de que normalmente, os livros didáticos dão pouca ênfase ao uso de representações geométricas para compreensão do conceito de sucessão aritmética e geométrica, aparecendo, geralmente, na prática de exercícios, como forma de colocar o estudante diante da situação.

Albuquerque e Nascimento (2016, p. 48) na justificativa do estudo destacam que:

> O conceito de sucessão é geralmente ensinado com base no contexto da compreensão das funções, apresentando modelos prontos. Portanto, por percebermos o vazio que pode deixar muitos estudantes sem o domínio desse conceito, quando associado a algumas formas geométricas, fomos levados a tratar tal questão como um problema para investigação. Decidimos buscar entendimento do conceito de progressão vivenciado na sala de aula utilizando formas da Geometria [...] o objetivo do trabalho foi entender como os estudantes visualizavam o conceito de progressão por meio das regularidades geométricas possibilitadas no SuperLogo.

Os resultados do estudo de Albuquerque e Nascimento (2016) afirmam que o conceito de progressão, mesmo trabalhado na escola por diversas formas de representação (numérica, algébrica, entre outras), não foi visualizado de forma espontânea pelos estudantes ao manipular esse conceito a partir do recurso geométrico. Parece não ser comum no modo de pensar de alguns estudantes que a geometria também está associada ao desenvolvimento do conceito de progressão em algumas situações de ensino. Esse fato indica a necessidade de estudos para a proposta, a fim de reforçar o conhecimento desse saber com os estudantes.

Partindo deste fato, nosso estudo é uma proposta de análise da geometria fractal associada aos conceitos de Progressão aritmética e geométrica, especificamente em saberes próprios que são trabalhados no ensino médio. Portanto, recorremos a várias pesquisas que colaboram nesse sentido.

Gonçalves (2007) investigou a utilização de fractais com o objetivo de estimular a percepção da autossemelhança e o processo de generalização de fórmulas numa progressão geométrica no Ensino Médio. A pesquisa revela que a construção, manipulação e observação levaram a percepção da autossemelhança, facilitando a generalização dos elementos matemáticos que compõem uma progressão geométrica.

Pallesi (2007) defende o uso de fractais em progressões aritméticas e geométricas no Ensino Médio como fator para tornar as aulas de progressões mais atrativas e dinâmicas. A preocupação em apresentar conteúdos de forma mais atrativa e dinâmica não é apenas de estudiosos em educação matemática, os próprios docentes, através de suas experiências em sala de aula estão buscando propostas de sequências didáticas utilizando Geometria Fractal.

Faria (2012) estudou as contribuições dos padrões dos fractais para generalização de padrões, por permitir trabalhar algumas propriedades como autossemelhança e complexidade infinita. Os resultados obtidos indicaram que o trabalho com tais padrões contribuiu para o processo de generalização de conteúdos matemáticos, dentre os quais PG, por permitir trabalhar com propriedades, como autossemelhança e complexidade infinita.

Pimentel (2005) traz o debate da matemática como a ciência dos padrões, apontando que a lei de correspondência entre cada elemento de uma sequência tem o objetivo de investigar o desenvolvimento de um pensamento algébrico. A autora argumenta que o trabalho com padrões possibilita descobrir uma lei de formação para continuar determinada sequência e conseguir a generalização de todos os termos.

Nicola (2013) destaca que a motivação em trabalhar com fractais deve-se a riqueza e atualidade do tema, objetivando que os alunos verifiquem uma das propriedades fundamentais da geometria, a semelhança, e sejam motivados a estudar conceitos matemáticos de uma forma simples.

Reis (2014) faz referência às indagações sobre as concepções do ensino da matemática que remetem as competências para ser um bom professor. Segundo o autor, a matemática formal está desassociada da realidade e a motivação do seu trabalho deu-se pelas indagações de alunos e professores do porquê da necessidade de estudar conteúdos como sequências e progressões, por exemplo. O autor escolheu a geometria fractal como meio de apresentação de conteúdos de forma mais dinâmica e significativa.

3 Metodologia

3.1 Tipo de Pesquisa

Nosso trabalho está baseado em modelo de pesquisa qualitativa, especificamente num estudo de caso, envolvendo alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual.

3.2 Sujeitos

O público alvo foram 38 alunos da turma do 2º ano do ensino médio técnico, na faixa etária entre 14 e 15 anos. O grupo de trabalho foi selecionado de uma turma de estudantes em que a pesquisadora era professora responsável pela disciplina de matemática.

3.3 Local da Pesquisa

A pesquisa ocorreu na Escola Técnica Estadual Almirante Soares Dutra, localizada na cidade do Recife (PE). A Escola funciona em três modalidades: Integral Integrada; EaD (Educação à Distância) e Subsequente. Todas as modalidades ocorrem por meio de processo seletivo (prova de português e matemática).

Na modalidade Integral Integrada, os alunos ingressam após concluírem o ensino fundamental e fazem opção, no momento do processo seletivo, por um dos dois cursos disponibilizados (Técnico em Nutrição e Dietética ou Técnico em Meio Ambiente). Após três anos, concluem o Ensino Médio e uma modalidade técnica. A modalidade Subsequente é para os que já concluíram o Ensino Médio e desejam a formação técnica em um dos seguintes cursos: Enfermagem, Saúde Bucal, Análise Clínicas, Intérprete em Libras, Prótese Dentária e Segurança no Trabalho. E na modalidade EaD, os cursos oferecidos também são para quem já concluiu o Ensino Médio.

3.4 Atividades da Pesquisa

Foram aplicadas três atividades. As atividades 1 e 2 ocorreram sem prejuízo do andamento da pesquisa, no programa que tínhamos definido. No entanto, a atividade 3, no dia em que marcamos o trabalho, ocorreu uma festividade comemorativa próxima ao bairro onde está situada a escola. Esse fato, provocou a ausência de alguns alunos, pois, do total de 38 que estavam participando, só compareceram, nesse dia, 21 estudantes. Portanto, a atividade 3, que ao nosso ver tem dados significativos de análise, teve esse precedente. Mesmo assim, consideramos não refazer a coleta por analisarmos que o fato não chegava a prejudicar o estudo por ainda se ter um número considerado de sujeitos que trabalhariam com o material.

A primeira atividade é diagnóstica e é composta de três questões. Na primeira questão, pede-se que o aluno desenhe formas geométricas conhecidas por ele e que as identifique, com os seus respectivos nomes. Como as formas poderão ser feitas à mão livre, não se espera rigor na figura, apenas um resgate da demonstração dos saberes de associação do nome, característica, forma e de alguma propriedade quando for feito o desenho. Por exemplo, no triângulo equilátero, identificar que todos os lados são iguais.

Na segunda questão, é apresentada uma tabela onde o aluno deve preencher a segunda coluna identificando a forma geométrica que está associada ao elemento na primeira coluna e na terceira questão, pergunta-se se o aluno teve dificuldade de associação e que justifique a sua resposta.

A segunda atividade é da construção de quatro iterações do fractal Triângulo de Sierpinski. Este fractal foi escolhido devido a facilidade de sua construção utilizando apenas recursos simples, como papel, lápis, régua e esquadro. A terceira atividade é investigativa. Composta de uma tabela explorando perímetro e área de cada iteração do Triângulo de Sierpinski e de três questões discursivas sobre a análise da tabela.

3.5 Procedimento de aplicação das atividades

A primeira atividade teve como objetivo apresentar o conceito de fractal aos estudantes a partir da manipulação de uma situação que o levasse a esse entendimento. Portanto, era para ser realizada em uma hora/aula. Para a sua realização foi entregue uma folha com a atividade impressa, na qual foi solicitado a resolução de forma individual. Tal atividade estava composta de 3 (três) perguntas, conforme a figura 3.

Figura 3 – Questionário da primeira atividade, exploração de formas geométricas.

FRACTAIS: UMA ABORDAGEM LUDICA NO ENSINO MEDIO

Professora: Delba Alves

ATIVIDADE DIAGNÓSTICA 1: Explorando uma nova geometria

1. Desenhe formas geométricas e identifique-as.

2. Que forma geométrica você associaria a cada elemento a seguir:

Elemento da natureza	Forma geométrica
Nuvem	
Montanha	
Couve-flor	
Arvore	
Relâmpago	
Casca do caracol	
Repolho	
Floco de neve	
Estalactites	
Vasos sanguíneos	

3. Você teve dificuldade de associação em algum elemento? Em qual? Por que?

____

Fonte: Material elaborado pela autora.

Nessa atividade buscamos resgatar os saberes do aluno sobre o conhecimento das formas poligonais e superfícies sólidas trabalhadas no ensino fundamental.

Os resultados dessa atividade estão comentados no tópico 5.1 logo adiante.

A segunda atividade teve como referência a construção, com régua e esquadro, de quatro iterações do fractal denominado Triângulo de Sierpinski.

Essa construção é iniciada com um desenho de um triângulo equilátero com medida de lado de 16 cm. Os alunos foram orientados a utilizarem apenas régua, esquadro 30° e 60°, lápis, borracha e uma folha de papel A4. Devendo cada estudante elaborar a partir do triângulo construído (iteração 0), a marcação do ponto médio de cada lado do triângulo e unir estes pontos formando quatro novos triângulos equiláteros de lado de 8 cm e descartar o triângulo central (iteração 1). O procedimento é repetido até os triângulos formados ficarem com lados de medida 1 cm (iteração 4).

Buscamos nesta atividade o desenvolvimento da habilidade de construção de figura geométrica utilizando régua e esquadro, a partir da propriedade da figura, no caso, triângulo equilátero (lados com mesma medida e ângulos de 60°) e a percepção de padrões (semelhança de triângulos).

Figura 4 – Atividade de construção do Triângulo de Sierpinski.

FRACTAIS: UMA ABORDAGEM LÚDICA NO ENSINO MÉDIO

Professora: Delba Alves

<u>ATIVIDADE 2</u> : Construção do Triângulo de Sierpinski

Objetivos: construção de um triângulo equilátero utilizando régua e esquadro e realizar 4 iterações na construção do Triângulo de Sierpinski.

Fonte: Material elaborado pela autora.

Esta atividade de cunho prático, realizada pelos estudantes, tem os resultados comentados no tópico 5.2 logo adiante.

A terceira atividade (Figura 5) é de investigação, baseada no triângulo de Sierpinski construído anteriormente pelos estudantes.

Nessa atividade o aluno deverá preencher uma tabela em que cada coluna refere-se a uma iteração do triângulo de Sierpinski. Nas linhas da tabela, o aluno deve responder sobre: número de triângulos formados, número de triângulos retirados, o perímetro de cada triângulo formado, o perímetro total da figura e área total da figura gerada após cada iteração. Na última coluna da tabela é solicitado um modelo geral da sequência informada pelo aluno, ou seja, a representação matemática do modelo da sequência após n iterações, que deverá ser elaborado pelo aluno após indicar o modelo da situação sequencial (sucessão numérica informada). Após o preenchimento, são apresentadas três perguntas: o que acontece com o perímetro da figura após cada iteração?; o que acontece com a área da figura após cada iteração? E o que acontece com o perímetro e com a área após n iterações?

Espera-se que o aluno perceba que a sequência formada pelos lados do triângulo que vai sendo alterado, pelos números de triângulos formados (quantidade), pelo perímetro e pela área estão em modelo de progressão e assim, consigam escrever na última coluna (iteração n) uma fórmula geral (modelo) a partir da observação dos padrões que aparecem sendo gerados de uma coluna para outra em cada iteração.

Nesta terceira atividade, procuramos identificar qual a compreensão e a ideia de progressão geométrica que o aluno possui, a partir da observação de padrões e generalização.

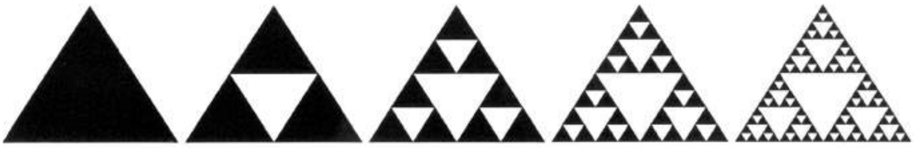
Figura 5 – Atividade de investigação do Triângulo de Sierpinski.

FRACTAIS: UMA ABORDAGEM LÚDICA NO ENSINO MÉDIO

Professora: Delba Alves

<u>ATIVIDADE 3</u>: Investigando o Triângulo de Sierpinski.

Objetivo: preencher a tabela a partir das observações feitas na construção da atividade 2 e fazer generalizações.



Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados						
Nº de triângulos retirados						
Perímetro de cada triângulo						
Perímetro total do triângulo						
Área do triângulo						

1. O que aconteçe com o perímetro da figura de um passo para outro?
2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?
3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

Fonte: Elaborado pela autora a partir do estudo de Pallesi (2007, p. 23)

Como prévia de resolução, apresentamos a seguir, a figura que indica os possíveis resultados das respostas dos estudantes.

Figura 6 – Prévia da resolução da atividade 3.

FRACTAIS: UMA ABORDAGEM LÚDICA NO ENSINO MÉDIO

Professora: Delba Alves

<u>ATIVIDADE 3</u>: Investigando o Triângulo de Sierpinski

Objetivo: preencher a tabela a partir das observações feitas na construção da atividade 2 e fazer generalizações.

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	**1**	**3**	**9**	**27**	**81**	**3^n**
Nº de triângulos retirados	**0**	**1**	**3**	**9**	**27**	**3^{n-1}**
Perímetro de cada triângulo	**3 . L = 48**	**3 . L /2 =24**	**3 . L/4 =12**	**3 . L/8 =6**	**3 . L /16 = 3**	**$3 . L/2^n = 48/2^n$**
Perímetro total do triângulo	**3. L = 48**	**3. 3. L/2 =72**	**9 . 3 . L/4 = 108**	**27 . 3 . L/8 =162**	**81 . 3 . L/16= 243**	**$3^n. (3 . L/2^n) = 3^n.48/2^n$**
Área do triângulo	**A**	**3.A/4**	**$3^2.A/4^2$**	**$3^3.A/4^3$**	**$3^4.A/4^4$**	**$3^n.A/4^n$**

1. O que aconteçe com o perímetro da figura de um passo para outro?
   Aumenta
2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?
   Diminui
3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?
   Para n muito grande, o perímetro vai aumentando infinitamente e a área vai se tornando infinitamente pequena, até zerar.

Fonte: Material elaborado pela autora.

4 Análise dos dados

Nesta seção apresentamos uma descrição geral das análises obtidas a partir das respostas dos estudantes nas atividades (1, 2 e 3), que foram propostas aos estudantes da turma do 2º ano do ensino médio técnico.

4.1 Resultados da atividade 1

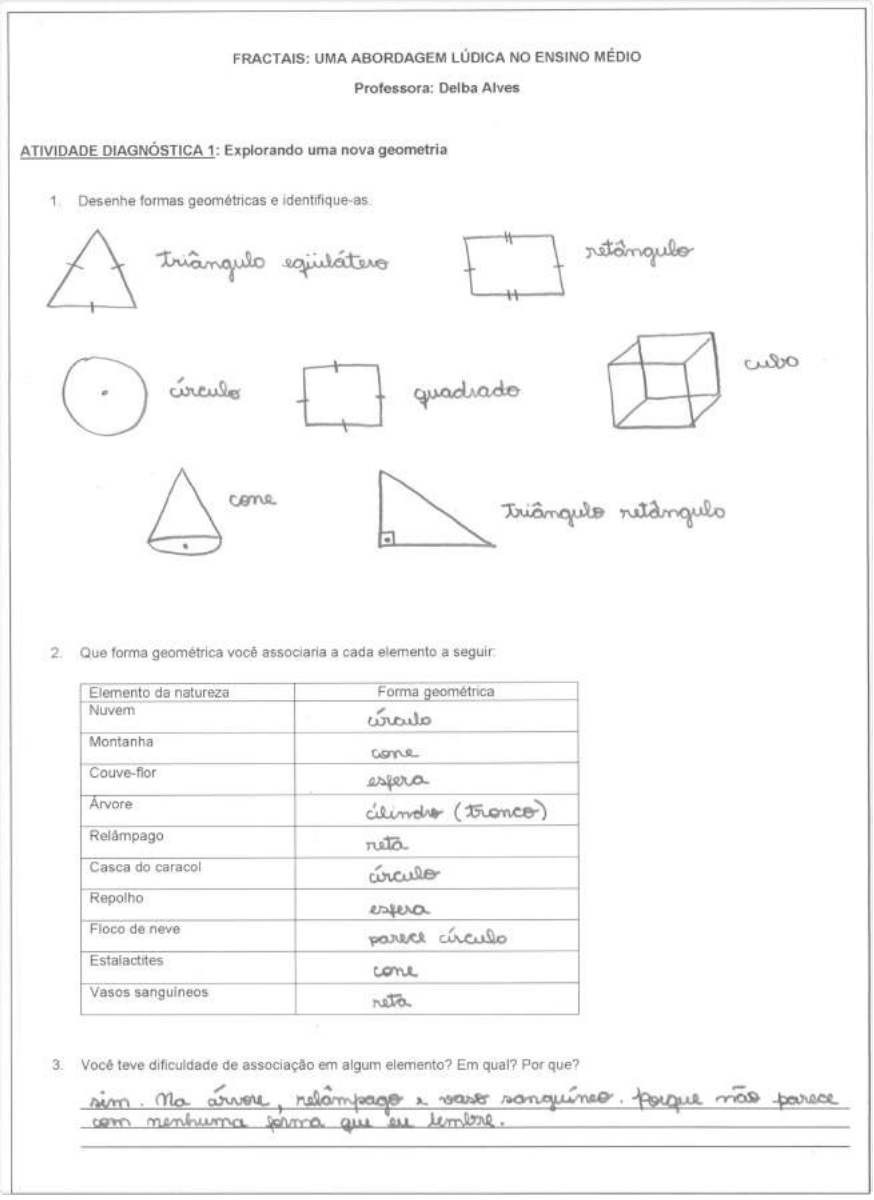
Na questão 1, a maioria das figuras geométricas desenhadas foram na forma plana: triângulos, retângulos e círculos. Identificados por nomenclaturas, como por exemplo, triângulo equilátero, ou por sua propriedade, como por exemplo, possuir os três lados de mesma medida.

Os sólidos geométricos: cubo, cilindro e esfera foram os mais lembrados, embora, na maioria das vezes, não foram representados corretamente. Os alunos demonstraram ter dificuldade em construção geométrica.

Na questão 2, os elementos montanha e estalactites foram associados ao sólido pirâmide; couve-flor e repolho à esfera; árvore ao cilindro (tronco); casca do caracol ao círculo; relâmpago ao triângulo (raio); floco de neve e vasos sanguíneos não foram associados a qualquer sólido, na maioria das vezes.

Na questão 3, a maioria respondeu que teve dificuldade na associação, principalmente no relâmpago (raio), árvore, vaso sanguíneo e floco de neve porque não acreditavam que os sólidos conhecidos por eles conseguissem representar fielmente estes elementos.

Figura 7 – Respostas apresentadas pelo do aluno A10 para a atividade 1.



FRACTAIS: UMA ABORDAGEM LÚDICA NO ENSINO MÉDIO

Professora: Delba Alves

ATIVIDADE DIAGNÓSTICA 1: Explorando uma nova geometria

1. Desenhe formas geométricas e identifique-as.

2. Que forma geométrica você associaria a cada elemento a seguir:

Elemento da natureza	Forma geométrica
Nuvem	círculo
Montanha	cone
Couve-flor	esfera
Árvore	cilindro (tronco)
Relâmpago	reta
Casca do caracol	círculo
Repolho	esfera
Floco de neve	parece círculo
Estalactites	cone
Vasos sanguíneos	reta

3. Você teve dificuldade de associação em algum elemento? Em qual? Por que?

sim. Na árvore, relâmpago e vaso sanguíneo. Porque não parece com nenhuma forma que eu lembre.

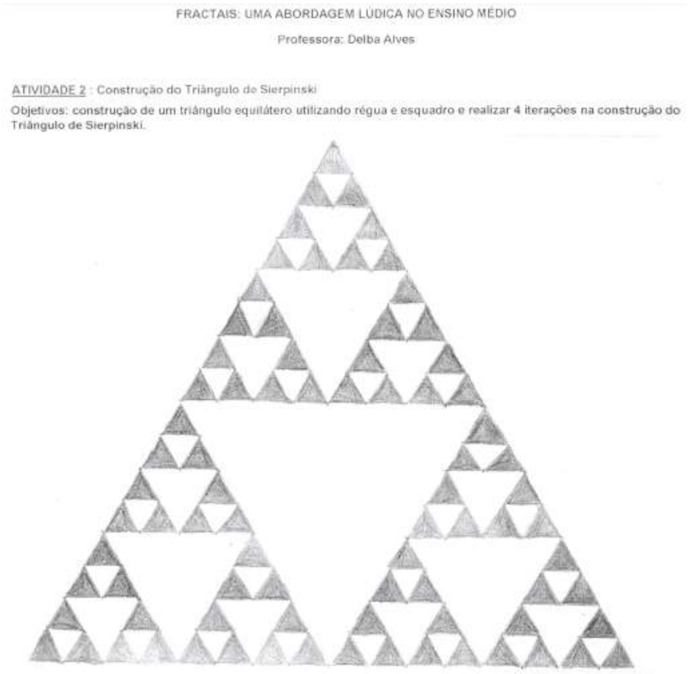
Fonte: Material de pesquisa da autora.

4.2 Resultados da atividade 2

Durante a construção do triângulo de Sierpinski (4 iterações), os alunos demonstraram dificuldade em utilizar os instrumentos régua e esquadro. A principal dificuldade com o uso da régua foi na identificação da medida de um número não inteiro para marcação do ponto médio. Em relação ao esquadro, foi observado um total desconhecimento de sua função, ocorrendo uma rejeição para utilizá-lo para traçar segmentos.

Após a construção das 4 iterações, observou-se muitas medições incorretas, necessitando a reconstrução.

Figura 8 – Respostas apresentadas pelo do aluno A10 para a atividade 2.



Fonte: Material de pesquisa da autora.

4.3 Resultados da atividade 3

Na terceira atividade (triângulo de Sierpinski), buscamos verificar o desenvolvimento do aluno na ideia de progressão (aritmética e geométrica), através da observação de padrões e generalização presentes nos dados do experimento.

Para essa análise da atividade 3, nomeamos os alunos por $(A1, A2, A3, \ldots, A21)$, como forma de identificá-los nos resultados que serão apresentados a seguir respectivamente a partir da ordenação de suas resoluções.

4.3.1 A análise das respostas do estudante A1

Figura 9 – Respostas do estudante A1 para as questões.

ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	$1(3^0)$	$3(3^1)$	$9(3^2)$	$27(3^3)$	$81(3^4$	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	3	9	27	3^{n-1}
Perímetro de cada triângulo	3.16	3.8	3.4	3.2	3.1	3.2^n
Perímetro total do triângulo	3.16	3.3.8	9.3.4	27.3.2	81.3.1	n(3.n)
Área do triângulo	A	3·A/4	9·A/16	27·A/64	81·A/256	$3^n/4^n \cdot A$

1. O que aconteçe com o perímetro da figura de um passo para outro?

É dividido pela metade

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

aumenta 2 vezes

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

aumenta

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A1 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por $(1, 3, 9, 27, 81)$, e corretamente indica a representação geral 3^n;

- A1 descreve a sequência $(0, 1, 3, 9, 27)$ para o número de triângulos retirados, informando ter compreensão do modelo geral ao escrever o termo geral 3^{n-1};

- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A1 chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele $(3.16, 3.8, 3.4, 3.2, 3.1, 3.2^n)$;

- A1 informa a sucessão $(3.16, 3.3.8, 9.3.4, 27.3.21, 81.3.1, n.3.n)$ para o perímetro total do triângulo. Nota-se que ele tem certa compreensão da representação, mas erra na escrita matemática e chega ao modelo geral incoerente como gerador da sequência;

- A1 representa a sequência $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{9A}{16}, \dfrac{27A}{64}, \dfrac{81A}{256}, \dfrac{3^nA}{4^n}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter compreensão do modelo geral que apresenta como gerador da sequência.

4.3.2 A análise das respostas do estudante A2

Figura 10 – Respostas do estudante A2 para as questões.

ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	27	81	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	4	13	40	Contei
Perímetro de cada triângulo	48	24	12	6	3	o perímetro $P \div 2$
Perímetro total do triângulo	48	72	108	162	243	Contei
Área do triângulo	A	$3/4 \cdot A$	$3^2/4^2 \cdot A$	$3^3/4^3 \cdot A$	$\cancel{3/4}$	$\frac{3^n}{4^n}$

1. O que acontece com o perímetro da figura de um passo para outro?

O perímetro aumenta

2. O que acontece com a área da figura de um passo para outro?

A área diminui

3. O que acontece com o perímetro e com a área após n iterações?

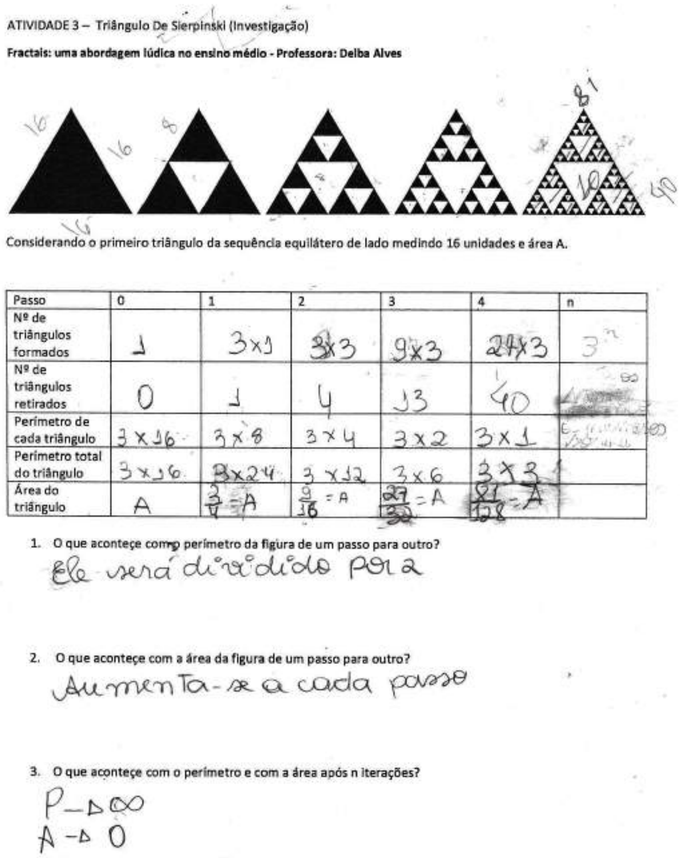
O perímetro é infinito e a área é 0.

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A2 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por $(1, 3, 9, 27, 81)$, e corretamente indica a representação geral 3^n;
- A2 descreve a sequência $(0, 1, 4, 13, 40)$ para o número de triângulos retirados, informando não ter compreensão do modelo geral;
- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A2 chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele $(48, 24, 12, 6, 3)$;
- A2 informa a sucessão $(48, 72, 108, 162, 243)$ para o perímetro total do triângulo. Nota-se que ele tem certa compreensão da representação, mas não chega ao modelo geral coerente com o gerador da sequência;
- A1 representa a sequência $\left(A, \frac{3A}{4}, \frac{3^2A}{4^2}, \frac{3^3A}{4^3}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter compreensão da sua construção, mas não consegue escrever a representação do gerador da sequência.

4.3.3 A análise das respostas do estudante A3

Figura 11 – Respostas do estudante A3 para as questões.



ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3x1	3x3	9x3	27x3	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	4	13	40	[illegible]
Perímetro de cada triângulo	3x16	3x8	3x4	3x2	3x1	[illegible]
Perímetro total do triângulo	3x16	3x24	3x12	3x6	3x3	
Área do triângulo	A	$\frac{3}{4}$ = A	$\frac{9}{16}$ = A	$\frac{27}{32}$ = A	$\frac{81}{128}$ = A	

1. O que acontece com o perímetro da figura de um passo para outro?

Ele será dividido por 2

2. O que acontece com a área da figura de um passo para outro?

Aumenta-se a cada passo

3. O que acontece com o perímetro e com a área após n iterações?

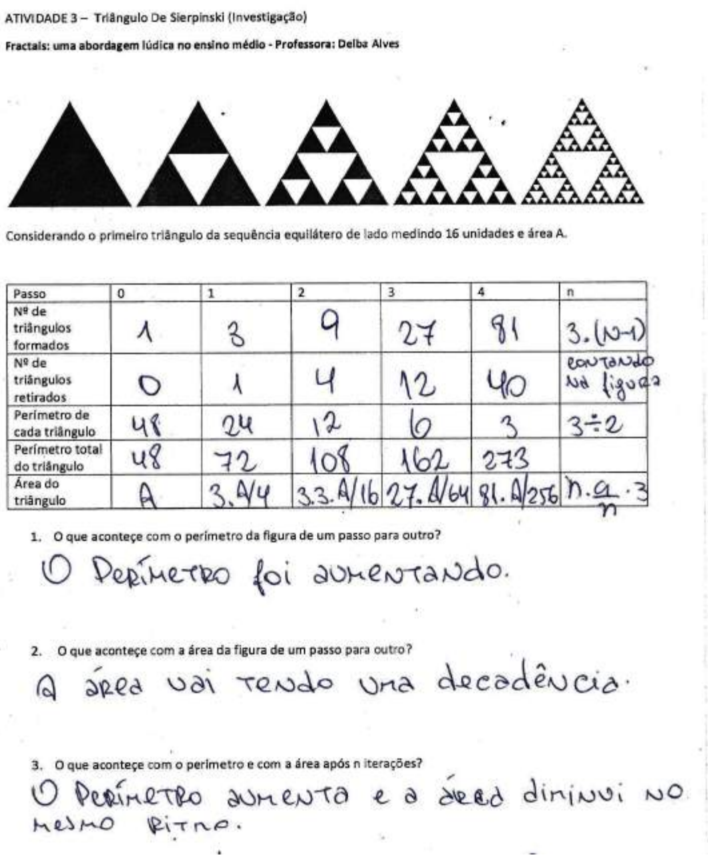
P → ∞
A → 0

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A3 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por $(1, 3.1, 3.3, 9.3, 27.3)$, e corretamente indica a representação geral 3^n;
- A3 descreve a sequência $(0, 1, 4, 13, 40)$ para o número de triângulos retirados, informando não ter compreensão do modelo geral;
- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A3 não chega a um modelo geral para descrever a sequência apresentada por ele $(3.16, 3.8, 3.4, 3.2, 3.1)$;
- A3 informa a sucessão $(3.16, 3.12, 3.12, 3.6, 3.3)$ para o perímetro total do triângulo. Nota-se que ele tem certa compreensão da representação, mas não chega ao modelo geral coerente como gerador da sequência;
- A3 representa a sequência $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{9A}{16}, \dfrac{27A}{64}, \dfrac{81A}{128}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter certa compreensão da formação da sequência, mas não apresenta o termo gerador da sequência.

4.3.4 A análise das respostas do estudante A4

Figura 12 – Respostas do estudante A4 para as questões.



ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	27	81	3.(N-1)
Nº de triângulos retirados	0	1	4	12	40	contando na figura
Perímetro de cada triângulo	48	24	12	6	3	3÷2
Perímetro total do triângulo	48	72	108	162	273	
Área do triângulo	A	3.A/4	3.3.A/16	27.A/64	81.A/256	n.a/n.3

1. O que acontece com o perímetro da figura de um passo para outro?

O perímetro foi aumentando.

2. O que acontece com a área da figura de um passo para outro?

A área vai tendo uma decadência.

3. O que acontece com o perímetro e com a área após n iterações?

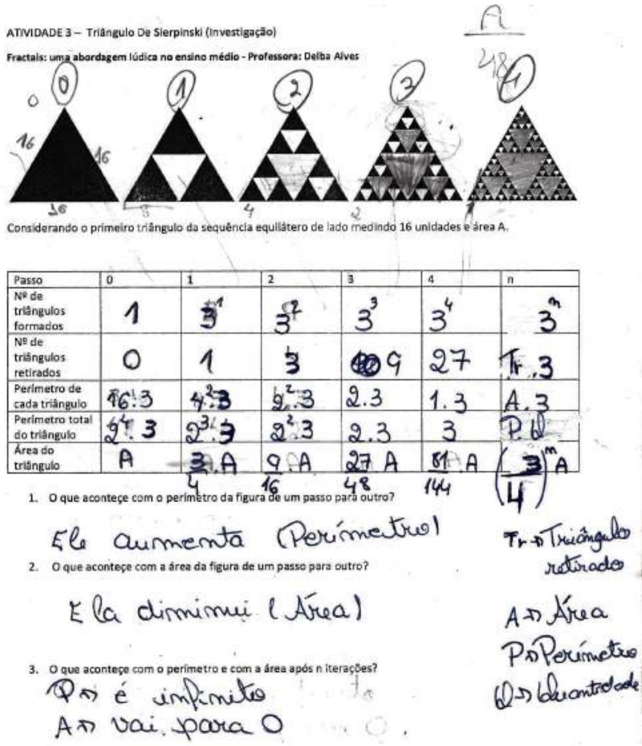
O perímetro aumenta e a área diminui no mesmo ritmo.

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A4 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por (1, 3, 9, 27, 81), mas escreve de forma incorreta a representação geral;
- A4 descreve a sequência (0,1, 4, 12, 40) para o número de triângulos retirados, informando não ter compreensão do modelo geral;
- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A4 não chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele (48, 24, 12, 6, 3);
- A4 informa a sucessão (48, 72, 108, 162, 273) para o perímetro total do triângulo. Nota-se que em parte ele tem certa compreensão da representação, mas não chega ao modelo geral coerente como gerador da sequência;
- A4 representa a sequência $\left(A, \frac{3A}{4}, \frac{9A}{16}, \frac{27A}{64}, \frac{81A}{256}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter certa compreensão da formação da sequência, mas não apresenta o termo gerador da coerente com a sequência.

4.3.5 A análise das respostas do estudante A5

Figura 13 – Respostas do estudante A5 para as questões.


ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3^1	3^2	3^3	3^4	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	3	9	27	Tr.3
Perímetro de cada triângulo	16.3	$4^2.3$	$2^2.3$	2.3	1.3	A.3
Perímetro total do triângulo	$2^4.3$	$2^3.3$	$2^2.3$	2.3	3	P.Q
Área do triângulo	A	$\frac{3}{4}.A$	$\frac{9}{16}.A$	$\frac{27}{48}A$	$\frac{81}{144}.A$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n A$

1. O que aconteçe com o perímetro da figura de um passo para outro?

Ele aumenta (Perímetro)

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

Ela diminui (Área)

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

P → é infinito

A → vai para 0

Tr → Triângulo retirado

A → Área

P → Perímetro

Q → Quantidade

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A5 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por $(1, 3, 3^2, 3^3, 3^4)$, fazendo a sua representação geral 3^n;

- A5 descreve a sequência $(0, 1, 3, 9, 27)$ para o número de triângulos retirados, informando ter uma certa compreensão do modelo geral, mas não escreve corretamente a representação geral;

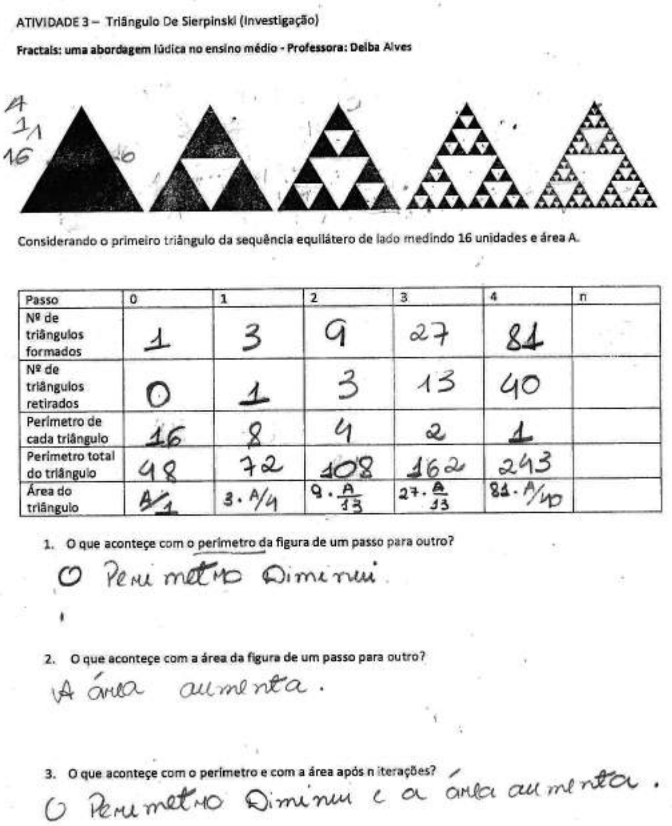
- O aluno A5 escreve a sequência $(16.3, 4^2.3, 2^2.3, 2.3, 1.3)$ para representar o perímetro de cada triângulo. Erra na iteração 1 e na generalização.

- Quanto ao valor do perímetro total do triângulo, A5 escreve a sequência $(2^4.3, 2^3.3, 2^2.3, 2.3,$ $3)$, informando ter noção de sua formação. Mas, erra na escrita matemática no modelo geral como gerador da sequência;

- A5 representa a sequência $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{9A}{16}, \dfrac{27A}{64}, \dfrac{81A}{256}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter certa compreensão da sua construção, e mesmo a sequência não estando correta, consegue escrever a representação do modelo gerador da sequência.

4.3.6 A análise das respostas do estudante A6

Figura 14 – Respostas do estudante A6 para as questões.



ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Deiba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	27	81	
Nº de triângulos retirados	0	1	3	13	40	
Perímetro de cada triângulo	16	8	4	2	1	
Perímetro total do triângulo	48	72	108	162	243	
Área do triângulo	$A/1$	$3 \cdot A/4$	$9 \cdot \frac{A}{13}$	$27 \cdot \frac{A}{13}$	$81 \cdot A/40$	

1. O que acontece com o perímetro da figura de um passo para outro?

O Perimetro Diminui.

2. O que acontece com a área da figura de um passo para outro?

A área aumenta.

3. O que acontece com o perímetro e com a área após n iterações?

O Perimetro Diminui e a area aumenta.

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A6 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, nominada representada por $(1, 3, 9, 27, 81)$, mas não faz a sua representação geral;;

- A6 descreve a sequência $(0, 1, 3, 13, 40)$ para o número de triângulos retirados, informando não ter compreensão do modelo geral;

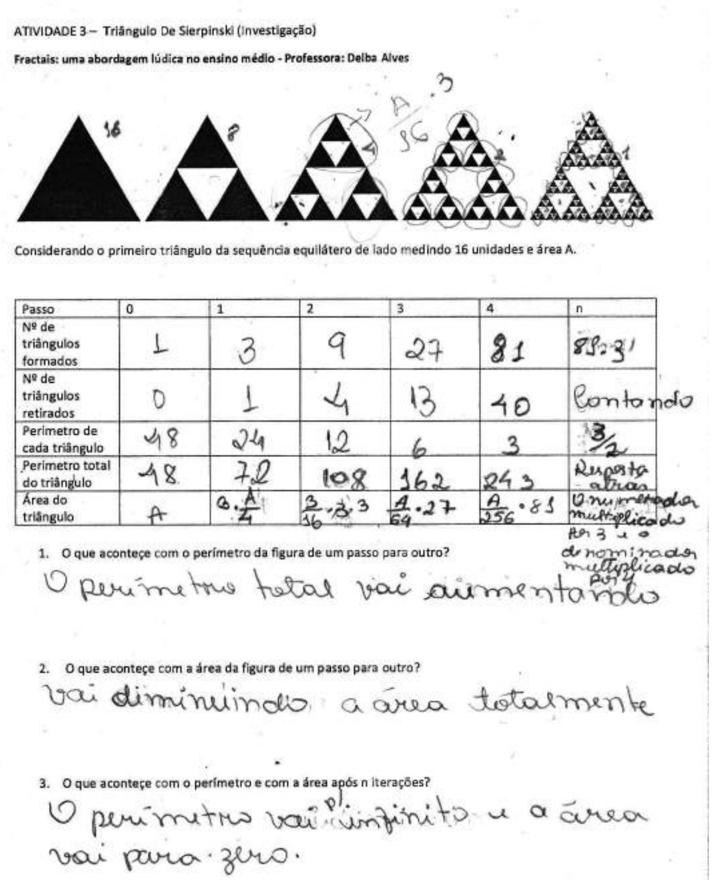
- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A6 escreve a sequência $(16, 8, 4, 2, 1)$ informando não ter compreensão de perímetro;

- A6 apresenta a sucessão $(48, 72, 108, 162, 243)$ para o perímetro do triângulo. Nota-se que em parte ele tem certa compreensão da representação, mas não chega ao modelo geral gerador da sequência;

- A6 representa a sequência $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{9A}{13}, \dfrac{27A}{13}, \dfrac{81A}{40}\right)$ para a área do triângulo, não tendo compreensão do modelo gerador da sequência.

4.3.7 A análise das respostas do estudante A7

Figura 15 – Respostas do estudante A7 para as questões.



ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	27	81	81·3'
Nº de triângulos retirados	0	1	4	13	40	Contando
Perimetro de cada triângulo	48	24	12	6	3	3/2
Perimetro total do triângulo	48	72	108	162	243	Resposta atrás
Área do triângulo	A	3·A/4	3/16·3·3	A/64·27	A/256·81	O numerador multiplicado por 3 e o denominador multiplicado por 4

1. O que aconteçe com o perímetro da figura de um passo para outro?

O perímetro total vai aumentando

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

vai diminuindo a área totalmente

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

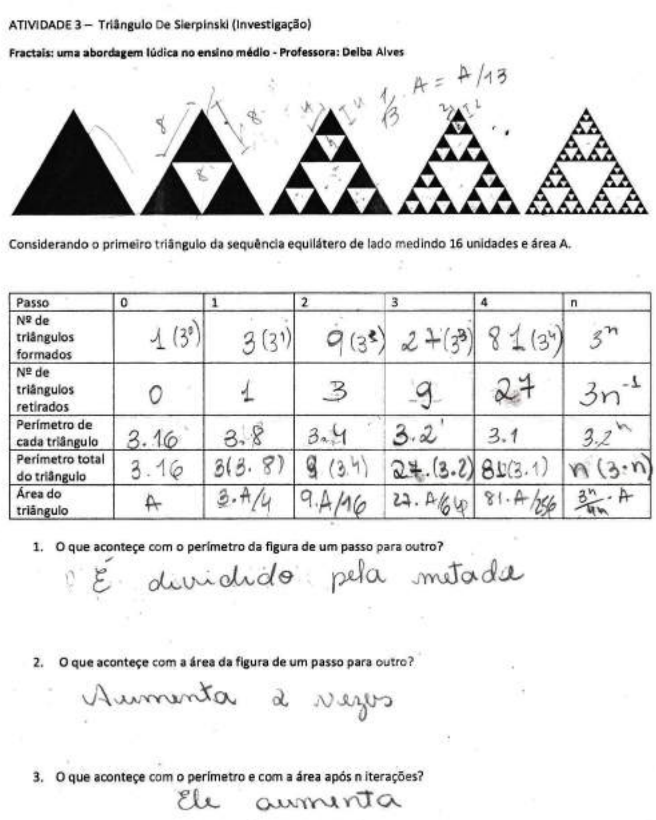
O perímetro vai p/ infinito e a área vai para zero.

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A7 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3 representada por $(1, 3, 9, 27, 81)$, mas não faz a sua representação geral correta;
- A7 descreve a sequência $(0, 1, 4, 13, 40)$ para o número de triângulos retirados, informando não ter compreensão do modelo geral;
- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A7 chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele $(48, 24, 12, 6, 3)$;
- A7 informa a sucessão $(48, 72, 108, 162, 243)$ para o perímetro de cada triângulo. Nota-se que em parte ele tem certa compreensão da representação, mas erra na escrita matemática e chega ao modelo geral $(3n)$ incoerente como gerador da sequência;
- A7 representa a sequência $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{9A}{16}, \dfrac{27A}{64}, \dfrac{81A}{256}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter certa compreensão da sua construção, mas não consegue escrever a representação do gerador da sequência.

4.3.8 A análise das respostas do estudante A8

Figura 16 – Respostas do estudante A8 para as questões.



ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	$1\ (3^0)$	$3\ (3^1)$	$9\ (3^2)$	$27\ (3^3)$	$81\ (3^4)$	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	3	9	27	$3n^{-1}$
Perímetro de cada triângulo	3.16	3.8	3.4	3.2^1	3.1	3.2^n
Perímetro total do triângulo	3.16	3(3.8)	9 (3.4)	27.(3.2)	81(3.1)	n (3.n)
Área do triângulo	A	3.A/4	9.A/16	27.A/64	81.A/256	$\frac{3^n}{4^n}$.A

1. O que aconteçe com o perímetro da figura de um passo para outro?

É dividido pela metada

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

Aumenta 2 vezes

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

Ele aumenta

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A8 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por $(1, 3, 9, 27, 81)$, e corretamente indica a representação geral 3^n;
- A8 descreve a sequência $(0, 1, 3, 9, 27)$ para o número de triângulos retirados, mostrando ter certa compreensão do modelo geral, mas escreve incorretamente o modelo gerador;
- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A8 chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele $(3.16, 3.8, 3.4, 3.2, 3.1, 3.2^n)$;
- A8 informa a sucessão $(3.16, 3.3.8, 9.3.4, 27.3.2^1, 81.3.1, n.3.n)$ para o perímetro total do triângulo. Nota-se que em parte ele tem certa compreensão da representação, mas erra na escrita matemática e chega ao modelo geral incoerente como gerador da sequência;
- A8 representa a sequência $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{9A}{16}, \dfrac{27A}{64}, \dfrac{81A}{256}, \dfrac{3^nA}{4^n}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter compreensão do modelo geral que apresenta como gerador da sequência.

4.3.9 A análise das respostas do estudante A9

Figura 17 – Respostas do estudante A9 para as questões.

ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	27	81	Anterior ×3
Nº de triângulos retirados	0	1	4	13	40	Contagem
Perímetro de cada triângulo	3×16	24	12	6	3	L+L
Perímetro total do triângulo	48	24×3	12×9	6.27	3.81	P.C.TF
Área do triângulo	A	3×A/4	A.9/16	27/64	81/256	[illegible]

1. O que aconteçe com o perímetro da figura de um passo para outro?

O perimento diminui e o total aumenta

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

diminui

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

O perimento almenta e a área diminui

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A9 registra uma sequência numérica para o número de triângulos formados $(1, 3, 27, 81)$, percebendo a formação para o termo geral. Mas, não consegue representar o termo geral;

- A9 escreve a sequência incorreta $(0, 1, 4, 13, 40)$ para o número de triângulos retirados e informa que construiu a sequência através da contagem na figura;

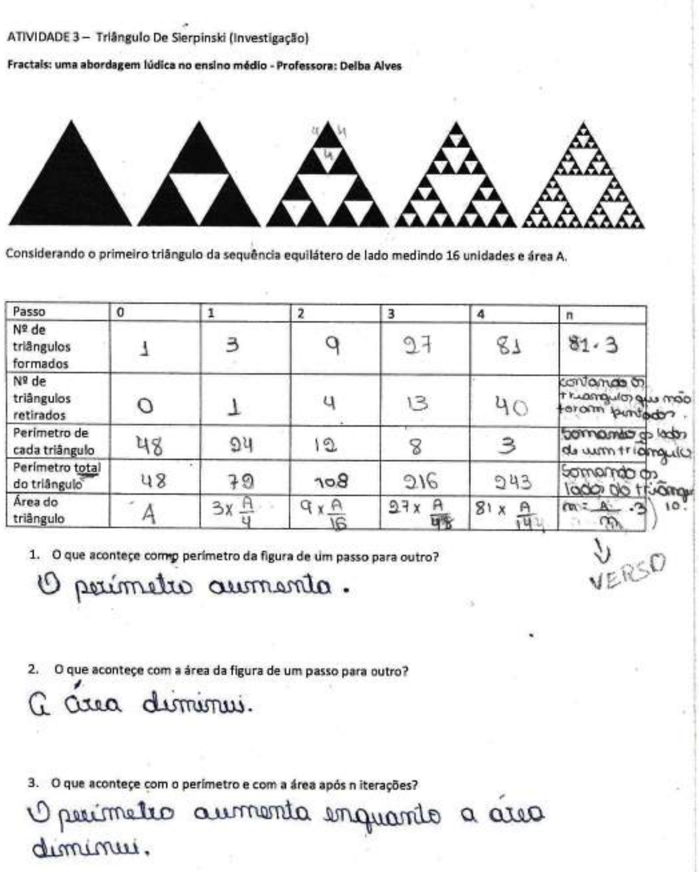
- Para o valor do perímetro em cada figura, A9 considera $(3.16, 24, 12, 6, 3)$, mas escreve um modelo geral incorreto;

- A9 registra o valor de cada perímetro do triângulo pela sequência $(48, 24.3, 12.9, 6.27, 3.81)$, demonstrando ter entendimento da sequência, mas não escreve corretamente o modelo geral;

- A9 representa a sequência das áreas de cada triângulo gerado por $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{A.9}{16}, \dfrac{27}{64}, \dfrac{81}{256}\right)$. Embora a escrita não esteja correta, demonstra certo entendimento da sua construção, mas não consegue chegar ao modelo gerador da sequência.

4.3.10 A análise das respostas do estudante A10

Figura 18 – Respostas do estudante A10 para as questões.


ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	27	81	81·3
Nº de triângulos retirados	0	1	4	13	40	contando os triangulos que não foram pintados.
Perímetro de cada triângulo	48	24	12	8	3	somando os lados de um triângulo
Perímetro total do triângulo	48	72	108	216	243	Somando os lados do triângulo
Área do triângulo	A	3x A/4	9x A/16	27x A/48	81 x A/144	m = A/m .3

VERSO

1. O que aconteçe como perímetro da figura de um passo para outro?

O perímetro aumenta.

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

A área diminui.

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

O perímetro aumenta enquanto a área diminui.

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- Para o número de triângulos formados, o estudante A10 escreve a sequência $(1, 3, 9, 27, 81, 81.3)$ e chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele;

- A10 apresenta a sequência $(0, 1, 4, 13, 40)$ para os triângulos retirados e escreve no modelo geral que a sequência foi obtida por contagem, não conseguindo perceber o padrão para a contagem;

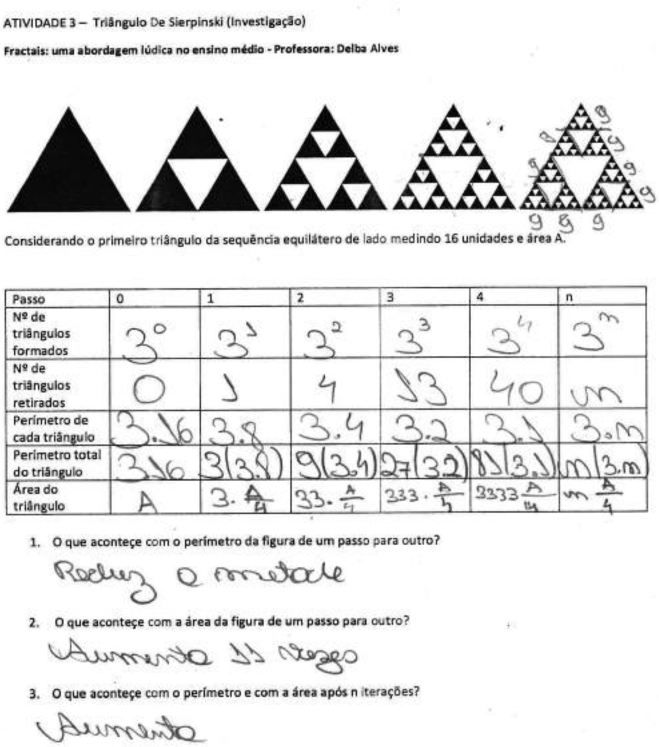
- Para o perímetro de cada triângulo considera a sequência geradora $(48, 24, 12, 8, 3)$. A10 não consegue escrever um modelo gerador para sequência descrita;

- O perímetro total é escrito por A10 pela sequência $(48, 72, 108, 216, 243)$, mas não consegue escrever um modelo gerador para a esta sequência;

- Em relação ao que ocorre com a área do triângulo, A10 descreve a sequência $\left(A, \dfrac{3.A}{4}, \dfrac{9.A}{16}, \dfrac{27.A}{64}, \dfrac{81.A}{256}\right)$, mas não chega a um modelo geral para descrever a sequência.

4.3.11 A análise das respostas do estudante A11

Figura 19 – Respostas do estudante A11 para as questões.



ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	4	13	40	n
Perímetro de cada triângulo	3.16	3.8	3.4	3.2	3.1	3.n
Perímetro total do triângulo	3.16	3(3.8)	9(3.4)	27(3.2)	81(3.1)	n(3.n)
Área do triângulo	A	$3.\frac{A}{4}$	$33.\frac{A}{4}$	$333.\frac{A}{4}$	$3333\frac{A}{4}$	$n\frac{A}{4}$

1. O que aconteçe com o perímetro da figura de um passo para outro?

Reduz a metade

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

Aumenta 11 vezes

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

Aumenta

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- Para o número de triângulos formados, o estudante A11 descreve uma progressão de razão 3, nominada pelos expoentes $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n)$, demonstrando ter compreensão do modelo gerador da sequência;

- A11 descreve a sequência $(0, 1, 4, 13, 40, n)$ para a resposta ao número de triângulos retirados. Nota-se que não tem compreensão do modelo geral, pois, apresenta a variável n como termo geral;

- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A11 responde a partir da sequência $(3.16, 3.8, 3.4, 3.2, 3.1)$ que o termo geral é $3.n$, chegando a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele;

- O estudante A11 considera o perímetro total do triângulo como sendo: $(3.16, 3.3.8, 9.3.4, 27.3.2, 81.3.1, n.3.n)$. Nota-se que ele não tem uma compreensão do modelo gerador da sequência;

- Em relação ao que ocorre com a área do triângulo, A11 descreve a sequência $\left(A, \dfrac{3.A}{4}, \dfrac{3.3.A}{4}, \dfrac{3.3.3.3.A}{4}\right)$, informando não ter compreensão do modelo geral da sequência.

4.3.12 A análise das respostas do estudante A12

Figura 20 – Respostas do estudante A12 para as questões.


ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	27	81	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	3	9	27	3^{n-1}
Perimetro de cada triângulo	3.16	3.8	3.4	3.2	3.1	$3^1.2^n$
Perímetro total do triângulo	3.2^4	$3.3.2^3$	$9.3.2^2$	$3^3.3.2^1$	$3^4.3.2^0$	3.2^{4-n}
Área do triângulo	$\boxed{A}$	$3.\frac{1}{4}A$	$3.3.\frac{1}{4^2}$	$3.3.3.\frac{1}{4^3}$	$3.3.3.3.\frac{1}{4^4}$	$3^n.\frac{A}{4}n$

1. O que aconteçe com o perímetro da figura de um passo para outro?

O Perimetro vai aumentando

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

A área dos triângulos vai diminuindo.

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

O perimetro aumenta para o infinito

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A12 considera que a sequência do número de triângulos formados descreve uma sucessão de razão 3, nominada pelos expoentes $(1, 3, 9, 27, 81, 3^n)$, ao final descreve corretamente a representação geral;
- A12 descreve a sequência $(0, 1, 3, 9, 27, 3^{n-1})$ para o número de triângulos retirados, informando ter compreensão do modelo geral;
- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, chega ao modelo geral a partir da sequência $(3.16, 3.8, 3.4, 3.2, 3.1, 3.2^{n-1})$;
- O estudante A12 considera que o perímetro total do triângulo é dado por meio da sucessão: $(3.2^4, 3.3.2^3, 9.3.2^2, 27.3.2^1, 81.3.2^0, 3^n.2^{4-n})$. Nota-se que ele tem compreensão do modelo geral que apresenta como gerador da sequência;
- A12 representa a sequência $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{3.3A}{4^2}, \dfrac{3.3.3.A}{4^4}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter compreensão do modelo geral que apresenta como gerador da sequência.

4.3.13 A análise das respostas do estudante A13

Figura 21 – Respostas do estudante A13 para as questões.

ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

. Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	$1 = 3^0$	$3 = 3^1$	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$	3^4	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	4	13	40	n
Perímetro de cada triângulo	3.16	(3.8)	3·4	3·2	3·1	3·n
Perímetro total do triângulo	3.16	3(3.8)	9(3·4)	27(3·2)	81(3·1)	n(3·n)
Área do triângulo	$\boxed{A}$	$3.\frac{A}{4}$	$33\cdot\frac{A}{4}$	$333\cdot\frac{A}{4}$	$3333\cdot\frac{A}{4}$	$n\cdot\frac{A}{4}$

1. O que aconteçe como perímetro da figura de um passo para outro?

Reduz a metade

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

Aumenta 11 vezes

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

Aumenta

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A13 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, nominada representada por ($1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, 3^4, 3^n), e corretamente indica a representação geral 3^n;
- A13 escreve a sequência $(0, 1, 4, 13, 40, n)$ para a resposta ao número de triângulos retirados. Nota-se que não tem compreensão do modelo geral, pois, apresenta a variável n como resposta;
- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A13 chega a um modelo geral totalmente longe do que seria correto para descrever a sequência apresentada por ele $(3.16, 3.8, 3.4, 3.2, 3.1, 3.n)$;
- Quanto ao valor do perímetro total, A13 chega a um modelo geral totalmente longe do que seria correto para descrever a sequência apresentada por ele $(3.16, 3.3.8, 9.3.4, 27.3.2, 81.3.1, n.3.n)$;
- Quanto a área do triângulo apresentado na análise, A13 informa a sucessão: $\left(A, \dfrac{3.A}{4}, \dfrac{3.3.A}{4}, \dfrac{3.3.3.A}{4}, \dfrac{3.3.3.3.A}{4}, \dfrac{n.A}{4}\right)$. Nota-se que ele tem certa compreensão da representação, mas erra na escrita matemática e chega ao modelo geral incoerente como gerador da sequência.

4.3.14 A análise das respostas do estudante A14

Figura 22 – Respostas do estudante A14 para as questões.

ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	3^3	3^4	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	3	9	3^3	3^{n-1}
Perímetro de cada triângulo	3.16	3.8	3.4	3.2	3.1	3.2^3
Perímetro total do triângulo	3.16	3.3.8	$3^3.2^2$	$3^4.2$	$3^5.1$	$3^n.1$
Área do triângulo	A	$3.\frac{A}{4}$	$9\,\frac{A}{16}$	$3^3 = \frac{A}{64}$	$3^4 = \frac{A}{4^4}$	$\frac{3^n}{4^n} = A$

1. O que aconteçe como perímetro da figura de um passo para outro?

Eele sempre vai aumentando.

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

a área ela vai diminuindo.

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

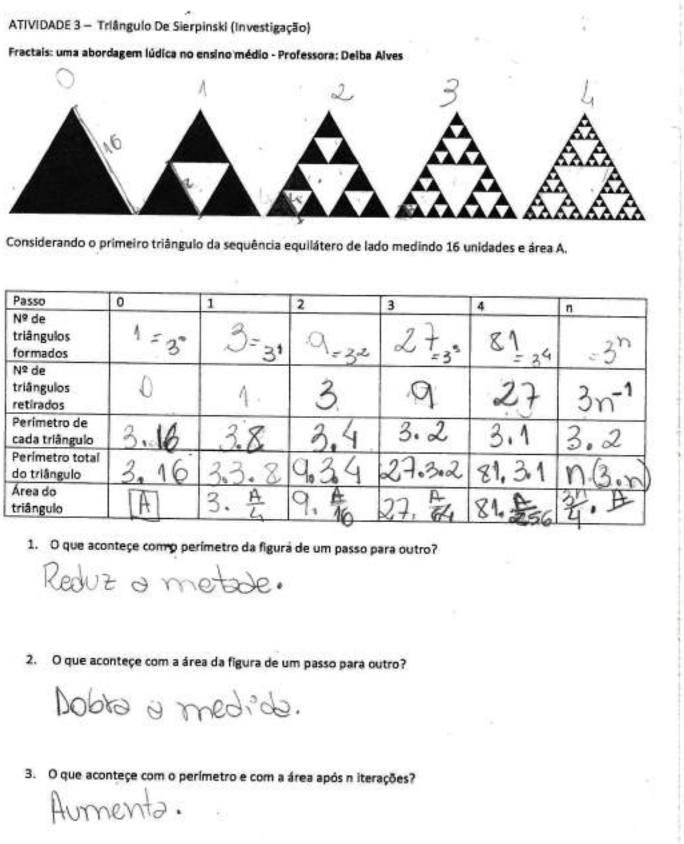
O perimento vai aumentando e a área diminuindo.

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A14 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, nominada representada por $(1, 3, 9, 27, 81, 3^n)$, e corretamente indica a representação geral 3^n;
- A14 descreve a sequência $(0, 1, 3, 9, 3^3, 3^{n-1})$ para o número de triângulos retirados, revelando ter compreensão do modelo geral;
- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A14 chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele $(3.16, 3.8, 3.4, 3.2, 3.1, 3.2^n)$;
- O perímetro total do triângulo é informado pelo estudante A14 por meio da sucessão: $(3.16, 3.3.8, 3^3.2^2, 3^4.2, 3^5.1, 3^n.1)$ chegando a um modelo geral totalmente longe do que seria correto para descrever a sequência apresentada por ele.
- A14 representa a sequência $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{9A}{16}, \dfrac{3^3A}{4^3}, \dfrac{3^nA}{4^n}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter compreensão do modelo geral que apresenta como gerador da sequência.

4.3.15 A análise das respostas do estudante A15

Figura 23 – Respostas do estudante A15 para as questões.



ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

0 1 2 3 4

16

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	$1 = 3^0$	$3 = 3^1$	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$	$81 = 3^4$	$= 3^n$
Nº de triângulos retirados	0	1	3	9	27	$3n^{-1}$
Perímetro de cada triângulo	3.16	3.8	3.4	3.2	3.1	3.2
Perímetro total do triângulo	3.16	3.3.8	9.3.4	27.3.2	81.3.1	n(3.n)
Área do triângulo	$\boxed{A}$	$3.\frac{A}{4}$	$9.\frac{A}{16}$	$27.\frac{A}{64}$	$81.\frac{A}{256}$	$\frac{3^n}{4}.A$

1. O que aconteçe comp perímetro da figurá de um passo para outro?

Reduz a metade.

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

Dobra a medida.

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

Aumenta.

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A15 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por $(1, 3, 9, 27, 81, 3^n)$, e corretamente indica a representação geral 3^n;

- A15 descreve a sequência $(0, 1, 3, 9, 27, 3n^{-1})$ na qual a escrita geral apresenta uma inconsistência na representação do valor 'n', como resposta para o número de triângulos retirados, revelando ter compreensão do modelo geral, mas representado de forma errada;

- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A15 chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele $(3.16, 3.8, 3.4, 3.2, 3.1, 3.2)$;

- Quanto ao perímetro total do triângulo apresentado na análise, A15 considera a sucessão $(3.16, 3.3.8, 9.3.4, 27.3.2, 81.3.1, n.3.n)$. Nota-se que em parte ele tem compreensão da representação, mas erra na escrita matemática e chega ao modelo geral incoerente como gerador da sequência;

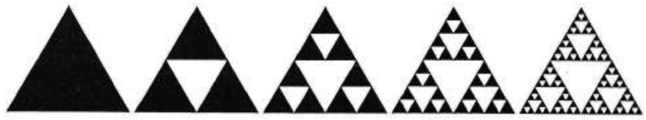
- A15 representa a sequência $\left(A, \frac{3A}{4}, \frac{9A}{16}, \frac{27A}{64}, \frac{81A}{283}, \frac{3^nA}{4}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter compreensão do modelo geral que apresenta como gerador da sequência, embora tenha errado na escrita do termo geral não incluindo a potência para o denominador.

4.3.16 A análise das respostas do estudante A16

Figura 24 – Respostas do estudante A16 para as questões.

ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves



Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	$1 = 3^0$	$3 = 3^1$	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$	$81 = 3^4$	$= 3^n$
Nº de triângulos retirados	0	1	3	9	27	$3n^{-1}$
Perímetro de cada triângulo	3.16	3.8	3.4	3.2	3.1	3.2
Perímetro total do triângulo	3.16	3.3.8	9.3.4	27.3.2	81.3.1	n.(3.n)
Área do triângulo	A	$3 \cdot \frac{A}{4}$	$9 \cdot \frac{A}{16}$	$27 \cdot \frac{A}{64}$	$81 \cdot \frac{A}{256}$	$\frac{3n}{4} \cdot A$

1. O que aconteçe como perímetro da figura de um passo para outro?

Se divide na metade

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

Aumenta 2 vezes

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

Aumenta

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A16 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por (1, 3, 9, 27, 81, 3n), e corretamente indica a representação geral 3^n;

- A16 escreve a sequência $(0, 1, 3, 9, 27, 3^{n-1})$ para o número de triângulos retirados, revelando não ter compreensão do modelo geral;

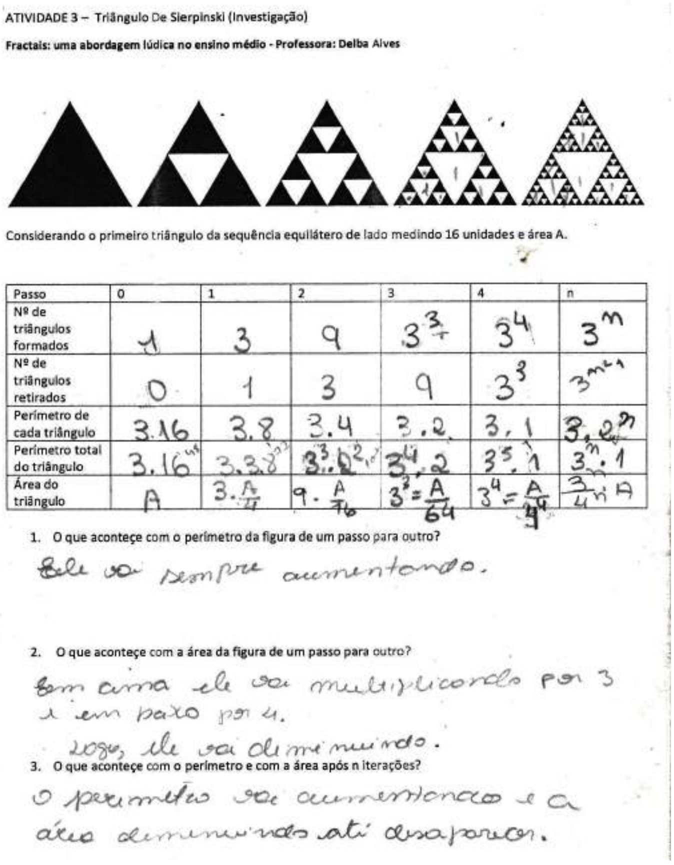
- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A16 chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele $(3.16, 3.8, 3.4, 3.2, 3.1, 3.2)$;

- Quanto ao perímetro total do triângulo apresentado na análise, A16 informa a sucessão $(3.16, 3.3.8, 9.3.4, 27.3.2, 81.3.1, n.3.n)$. Nota-se que em parte ele tem certa compreensão da representação, mas erra na escrita matemática e chega ao modelo geral incoerente como gerador da sequência;

- A16 representa a sequência $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{9A}{16}, \dfrac{27A}{64}, \dfrac{81A}{256}, \dfrac{3^nA}{4}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter compreensão do modelo geral que apresenta como gerador da sequência, embora tenha errado na escrita do termo geral não incluindo a potência para o denominador.

4.3.17 A análise das respostas do estudante A17

Figura 25 – Respostas do estudante A17 para as questões.



ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	3^3	3^4	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	3	9	3^3	3^{n-1}
Perímetro de cada triângulo	3.16	3.8	3.4	3.2	3.1	3.2^n
Perímetro total do triângulo	3.16	3.3.8	$3^3.2^2$	$3^4.2$	$3^5.1$	$3^n.1$
Área do triângulo	A	$3.\frac{A}{4}$	$9.\frac{A}{16}$	$3^3=\frac{A}{64}$	$3^4=\frac{A}{4^4}$	$\frac{3}{4}^n A$

1. O que acontece com o perímetro da figura de um passo para outro?

Ele vai sempre aumentando.

2. O que acontece com a área da figura de um passo para outro?

Em cima ele vai multiplicando por 3 e em baixo por 4.
Logo, ele vai diminuindo.

3. O que acontece com o perímetro e com a área após n iterações?

O perímetro vai aumentando e a área diminuindo até desaparecer.

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A17 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por $(1, 3, 9, 3^3, 3^4, 3^n)$, e corretamente indica a representação geral 3^n;

- A17 descreve a sequência $(0, 1, 3, 9, 3^3, 3^{n-1})$ para o número de triângulos retirados, revelando ter compreensão do modelo geral;

- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A17 chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele $(3.16, 3.8, 3.4, 3.2, 3.1, 3.2^n)$;

- A17 considera a sucessão $(3.16, 3.3.8, 3^3.2^2, 3^4.2^1, 3^5.1, 3^n.1)$ para o perímetro de cada triângulo. Nota-se que ele tem certa compreensão da representação, mas erra na escrita matemática e chega ao modelo geral incoerente como gerador da sequência;

- A17 representa a sequência $\left(A, \frac{3A}{4}, \frac{9A}{16}, \frac{3^3A}{64}, \frac{3^4A}{256}, \frac{3^nA}{4}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter compreensão do modelo geral que apresenta como gerador da sequência.

4.3.18 A análise das respostas do estudante A18

Figura 26 – Respostas do estudante A18 para as questões.

ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	27	81	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	3	9	27	3^{n-1}
Perímetro de cada triângulo	3.2^4	3.2^3	3.2^2	3.2^1	3.1	3.2^{4-n}
Perímetro total do triângulo	$3^0.2^4$	$3^1.3.2^3$	$3^2.3.2^2$	$3^3.3.2^1$	$3^4.3.1$	$3^n.3.2^{4-n}$
Área do triângulo	A	$3.\frac{A}{4}$	$9.\frac{A}{16}$	$27.\frac{A}{64}$	$81.\frac{A}{256}$	$3^n.\frac{A}{4^n}$

1. O que acontece com o perímetro da figura de um passo para outro?

O perímetro vai aumentando

2. O que acontece com a área da figura de um passo para outro?

a área do Δ vai diminuindo.

3. O que acontece com o perímetro e com a área após n iterações?

Vai aumentando infinitamente.

Fonte: Material de pesquisa da autora. 22

- O estudante A18 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por $(1, 3, 9, 27, 81, 3^n)$, e corretamente indica a representação geral 3^n;

- A18 descreve a sequência $(0, 1, 3, 9, 27, 3^{n-1})$ para o número de triângulos retirados, revelando ter compreensão do modelo geral;

- Quanto ao valor do perímetro de cada triângulo, A18 chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele $(3.2^4, 3.2^3, 3.2^2, 3.2^1, 3.1, 3.2^{4-n})$;

- A18 apresenta a sucessão $(3^0.2^4, 3.3.2^3, 3^2.3.2^2, 3^3.3.2^1, 3^4.3.1, 3^n.3.2^{4-n})$ para o perímetro de cada triângulo. Nota-se que ele tem compreensão da representação e chega ao modelo geral coerente com o gerador da sequência;

- A18 representa a sequência $\left(A, \frac{3A}{4}, \frac{9A}{16}, \frac{27A}{64}, \frac{81A}{256}, \frac{3^nA}{4^n}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter compreensão do modelo geral que apresenta como gerador da sequência.

4.3.19 A análise das respostas do estudante A19

Figura 27 – Respostas do estudante A19 para as questões.

ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	27	81	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	3	9	27	3^{n-1}
Perímetro de cada triângulo	3.16	3.8	3.4	3.2	3.1	3.2^{4-n}
Perímetro total do triângulo	3.16	3.3.8	$3^2.3.4$	$3^3.3.2$	$3^4.3.1$	$3^n.3.2^{4-n}$
Área do triângulo	A	$3.\frac{A}{4}$	$9.\frac{A}{16}$	$27.\frac{A}{64}$	$81.\frac{A}{256}$	$3^n.\frac{A}{4^n}$

1. O que acontece com o perímetro da figura de um passo para outro?

O perímetro vai aumentando.

2. O que acontece com a área da figura de um passo para outro?

A área vai diminuindo.

3. O que acontece com o perímetro e com a área após n iterações?

Ele vai aumentando infinitamente.

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A19 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por $(1, 3, 9, 27, 81, 3^n)$, e corretamente indica a representação geral 3^n;
- A19 escreve a sequência $(0, 1, 3, 9, 27, 3^{n-1})$ para o número de triângulos retirados, revelando ter compreensão do modelo geral;
- Para o valor do perímetro de cada triângulo, A19 chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele $(3.16, 3.8, 3.4, 3.2, 3.1, 3.2^{4-n})$;
- A19 apresenta a sucessão $(3.16, 3.3.8, 3^2.3.4, 3^3.3.2, 3^4.3.1, 3^n.3.2^{4-n})$ para o perímetro de cada triângulo. Nota-se que ele tem compreensão da representação e chega ao modelo geral coerente com o gerador da sequência.
- A19 representa a sequência $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{9A}{16}, \dfrac{27A}{64}, \dfrac{81A}{256}, \dfrac{3^nA}{4^n}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter compreensão do modelo geral que apresenta como gerador da sequência.

4.3.20 A análise das respostas do estudante A20

Figura 28 – Respostas do estudante A20 para as questões.


ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

16 8 4 2 1

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	27	81	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	3	9	27	$3.^{n-1}$
Perimetro de cada triângulo	3.2^4	3.2^3	3.2^2	3.2^1	3.1	3.2^{4-n}
Perimetro total do triângulo	$3^0.2^4$	$3^1.3.2^3$	$3^2.3.2^2$	$3^3.3.2^1$	$3^4.3.1$	$3^n.3.2^{4-n}$
Área do triângulo	$\boxed{A}$	$3.\frac{A}{4}$	$3^2.\frac{A}{16}$	$3^3.\frac{A}{64}$	$3^4.\frac{A}{256}$	$3^n.\frac{A}{4^n}$

1. O que aconteçe com o perímetro da figura de um passo para outro?

O perímetro do triângulo vai aumentando.

2. O que aconteçe com a área da figura de um passo para outro?

A área do triângulo vai diminuindo.

3. O que aconteçe com o perímetro e com a área após n iterações?

Vai aumentando infinitamente

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A20 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por $(1, 3, 9, 27, 81, 3^n)$, e corretamente indica a representação geral 3^n;

- A20 descreve a sequência $(0, 1, 3, 9, 27, 3^{n-1})$ para o número de triângulos retirados, revelando ter compreensão do modelo geral;

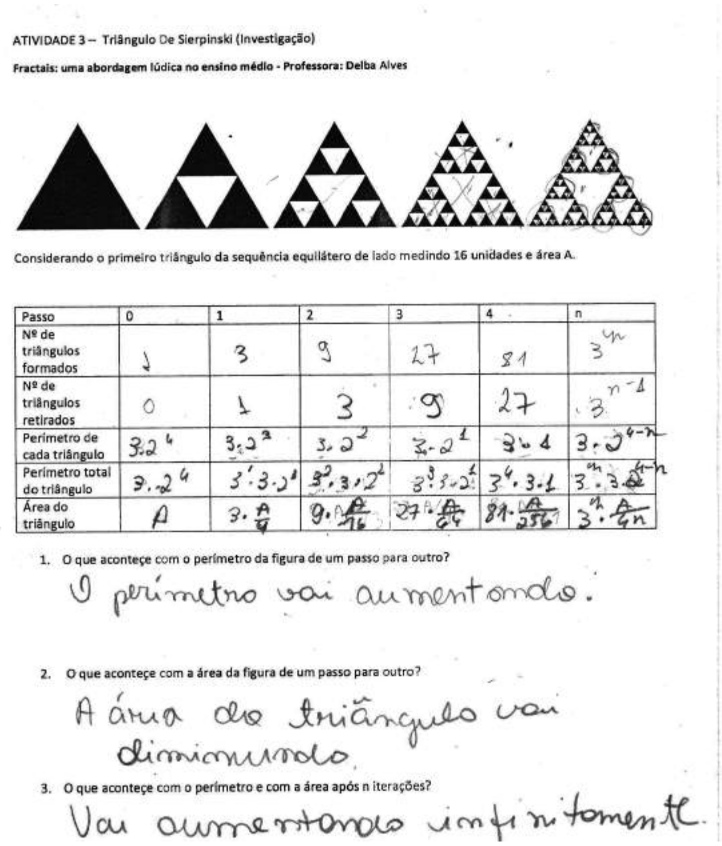
- Para o valor do perímetro de cada triângulo, A20 chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele $(3.2^4, 3.2^3, 3.2^2, 3.2, 3.1, 3.2^{4-n})$;

- A20 apresenta a sucessão $(3.2^4, 3.3.2^3, 3^2.3.2^2, 3^3.3.2^1, 3^4.3.1, 3^n.3.2^{4-n})$ para o perímetro de cada triângulo. Nota-se que ele tem compreensão da representação e chega ao modelo geral coerente com o gerador da sequência;

- A20 representa a sequência $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{3^2A}{16}, \dfrac{3^3A}{64}, \dfrac{3^4A}{256}, \dfrac{3^nA}{4^n}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter compreensão do modelo geral que apresenta como gerador da sequência.

4.3.21 A análise das respostas do estudante A21

Figura 29 – Respostas do estudante A21 para as questões.


ATIVIDADE 3 – Triângulo De Sierpinski (Investigação)

Fractais: uma abordagem lúdica no ensino médio - Professora: Delba Alves

Considerando o primeiro triângulo da sequência equilátero de lado medindo 16 unidades e área A.

Passo	0	1	2	3	4	n
Nº de triângulos formados	1	3	9	27	81	3^n
Nº de triângulos retirados	0	1	3	9	27	3^{n-1}
Perímetro de cada triângulo	3.2^4	3.2^3	3.2^2	3.2^1	3.1	3.2^{4-n}
Perímetro total do triângulo	3.2^4	$3^1.3.2^3$	$3^2.3.2^2$	$3^3.3.2^1$	$3^4.3.1$	$3^n.3.2^{4-n}$
Área do triângulo	A	$3.\frac{A}{4}$	$9.\frac{A}{16}$	$27.\frac{A}{64}$	$81.\frac{A}{256}$	$3^n.\frac{A}{4^n}$

1. O que acontece com o perímetro da figura de um passo para outro?

O perímetro vai aumentando.

2. O que acontece com a área da figura de um passo para outro?

A área do triângulo vai diminuindo.

3. O que acontece com o perímetro e com a área após n iterações?

Vai aumentando infinitamente.

Fonte: Material de pesquisa da autora.

- O estudante A21 escreve a sequência do número de triângulos corretamente descrevendo uma sucessão de razão 3, representada por $(1, 3, 9, 27, 81, 3^n)$, e corretamente indica a representação geral 3^n;

- A21 descreve a sequência $(0, 1, 3, 9, 27, 3^{n-1})$ para o número de triângulos retirados, revelando ter compreensão do modelo geral;

- Para o valor do perímetro de cada triângulo, A21 chega a um modelo geral incorreto para descrever a sequência apresentada por ele $(3.2^4, 3.2^3, 3.2^2, 3.2, 3.1, 3.2^{4-n})$;

- A21 apresenta a sucessão $(3^0.2^4, 3.3.2^3, 3^2.3.2^2, 3^3.3.2^1, 3^4.3.1, 3^n.3.2^{4-n})$ para o perímetro de cada triângulo. Nota-se que ele tem compreensão da representação e chega ao modelo geral coerente com o gerador da sequência;

- A21 representa a sequência $\left(A, \dfrac{3A}{4}, \dfrac{9A}{16}, \dfrac{27A}{64}, \dfrac{81A}{256}, \dfrac{3^nA}{4^n}\right)$ para a área do triângulo mostrando ter compreensão do modelo geral que apresenta como gerador da sequência.

5 Discussão dos resultados

5.1 Análise das respostas das sequências até a iteração 4

Observa-se que todos os alunos conseguiram escrever uma sequência, no caso uma P.G., de razão 3 para representar o número de triângulos formados na construção do Triângulo de Sierpinski. Percebe-se nos alunos A1, A5, A8, A11, A13, A14, A15, A16 e A17 a escrita na forma de potências de 3, revelando uma percepção objetiva da geração da sequência a partir da observação e compreensão da geometria fractal associada ao conteúdo de progressão.

Este resultado leva-nos a ressaltar a importância de propostas de atividades que valorizem, a partir da observação de padrões, a construção de modelos matemáticos, principalmente nos conteúdos de sequências e funções.

Quanto ao número de triângulos retirados de uma iteração para outra, não ocorreu o mesmo sucesso nas representações de suas sequências. Por exemplo A9 e A10 escreveram que fizeram através de contagem direta na figura (Figuras 17 e 18), desconsiderando as características de cada iteração, revelando não ter conhecimento do processo de formação da sequência. O fato da desconsideração da autossimilaridade na construção do fractal gerou o erro na contagem destes alunos.

Apenas o aluno A6 não conseguiu escrever a sequência para perímetro de cada novo triângulo formado. A6 informa ao escrever a sequência (16, 8, 4, 2, 1) que confundiu perímetro de cada novo triângulo com a medida do lado de cada triângulo formado. A apresentação da característica da complexidade infinita do fractal, não encontrada na geometria plana, pode ter gerado um conflito de observações, pois A6 apesar de não conseguir escrever a sequência para perímetro de cada novo triângulo, informa corretamente a sequência para o perímetro total do triângulo de Sierpinski. Os demais alunos relataram, após a atividade, que escrever a sequência para o perímetro de cada triângulo foi a mais fácil, principalmente devido a construção que realizaram na atividade 2.

Com exceção dos alunos A3 e A5, todos os outros conseguiram representar a sequência para o perímetro total do triângulo de Sierpinski. A3 apresentou a sequência $(3.16, 3.24, 3.12, 3.6, 3.3)$. O aluno acerta para a iteração 0, mas a partir da iteração 1, apresenta uma sequência que representa o perímetro de cada triângulo formado e não do fractal. A complexidade infinita do fractal, uma novidade da nova geometria apresentada, pode ter levado o aluno ao erro. Mas, de um modo geral, como ocorreu com todos os outros estudantes, esta característica do Fractal, colabora para que a partir da percepção do perímetro de cada novo triângulo formado, construa-se a sequência para o perímetro do Triângulo de Sierpinski. Apenas os alunos A3, A5, A6, A10, A11 e A13 não escreveram corretamente a sequência para a área do triângulo de Sierpinski.

A13 e A11, por exemplo, escrevem $\left(A, \frac{3.A}{4}, \frac{3.3.A}{4}, \frac{3.3.3.A}{4}, \frac{3.3.3.3.A}{4}\right)$ usando a multiplicação por 3 no numerador, acompanharam a formação dos triângulos no fractal, a cada iteração, mas esquecem de que o lado está sendo dividido pela metade e consequentemente a área dividida por quatro, gerando potências de quatro no denominador.

O fato de a área ter sido determinada por A, e não por um número específico, gerou, a princípio, muita insegurança no preenchimento da linha relativa a área do Triângulo de Sierpinski durante a execução da atividade 3. Mas, a partir da iteração 2, a maioria dos alunos, perceberam a razão da sequência e sua associação com uma progressão geométrica.

Nas informações das sequências até a iteração 4 foi possível observar a compreensão da geometria fractal associada a outros conteúdos em seus diversos aspectos, principalmente, a associação de padrões de regularidades visualizados nos fractais com ligação com os conceitos de progressões geométricas.

A Tabela 1 apresenta, com as células na cor verde, os alunos que escreveram a sequência correta para cada pergunta até a iteração 4 na Atividade 3.

Tabela 1 – Alunos com escrita correta das sequências até a iteração 4.

	Nº de triângulos formados	**Nº de triângulos retirados**	**Perímetro de cada triângulo**	**Perímetro total do triângulo**	**Área do triângulo**
A1					
A2					
A3					
A4					
A5					
A6					
A7					
A8					
A9					
A10					
A11					
A12					
A13					
A14					
A15					
A16					
A17					
A18					
A19					
A20					
A21					

Fonte: Material de pesquisa da autora

5.2 Análise das respostas para as generalizações

Diferentemente das sequências limitadas, observadas até a iteração 4 na construção do triângulo de Sierpinski, apenas alguns alunos conseguem a generalização das representações funcionais das sequências obtidas e numerada por eles. Os alunos A9 e A10, por exemplo, que informaram corretamente praticamente todas as sequências até a iteração 4, não conseguiram qualquer generalização.

Uma observação interessante em A10 é como ele escreve por extenso o que foi pensado por ele para obter as sequências: "somando os lados do triângulo" e "somando os lados de todos os triângulos", para justificar, mas não consegue modelar funcionalmente. O interessante nesta observação é o fato do aluno A10, entre outros, saber o necessário na construção da sequência, mas não saber o suficiente para a escrita do rigor que a matemática exige.

Por outro lado, os alunos A19, A20 e A21 escrevem, a partir da linha do perímetro de cada triângulo, as sequências em potências, informando terem conhecimento da sua formação e relacionando conteúdos como progressão e função. Uma demonstração do uso de um conhecimento já dominado perante a exigência de um novo. A Tabela 2 apresenta, com as células na cor azul, os alunos que escreveram corretamente o modelo geral para cada sequência.

Tabela 2 – Alunos com generalizações corretas.

	Nº de triângulos formados	Nº de triângulos retirados	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total do triângulo	Área do triângulo
A1					
A2					
A3					
A4					
A5					
A6					
A7					
A8					
A9					
A10					
A11					
A12					
A13					
A14					
A15					
A16					
A17					
A18					
A19					
A20					
A21					

Fonte: Material de pesquisa da autora

A dificuldade apresentada pelos alunos neste item deu-se pelo fato de não terem desenvolvido as habilidades necessárias para a observação de padrões, compreensão e construção de modelos. Habilidades estas relacionadas diretamente ao estudo de funções em séries anteriores.

As propostas de ensino trabalhadas no conteúdo de funções apresentam-se através de modelos prontos, que exploram apenas a resolução de equações e construção de gráficos a partir do modelo já construído, seja pelo professor ou pelo autor do livro didático.

5.3 Análise das respostas para as questões discursivas

Nas respostas das questões referentes ao que acontece com o perímetro (questão 1) e a área (questão 2) a cada iteração na construção do Triângulo de Sierpinski observamos que os alunos têm compreensão da relação direta das sequências informadas e a formação do fractal. Independente das respostas terem sido retiradas diretamente da tabela ou da observação da construção (desenho) do fractal, em ambos os aspectos, o aluno aplicou corretamente conhecimentos obtidos de suas aprendizagens matemática de sala de aula.

O aluno A9, por exemplo, responde que "o perímetro diminui e o total aumenta", fazendo uma referência a percepção de que apesar dos triângulos ficarem cada vez menores, o perímetro da figura cresce.

O aluno A17 responde que o perímetro aumenta e em relação a área "em cima ela vai multiplicada por 3 e embaixo multiplicada por 4, logo, ela vai diminuindo". Justificativa interessante devido a utilização do saber aritmético para explicar o que ocorre geometricamente.

As Figuras 30 e 31 apresentam o percentual de alunos que responderam corretamente as questões 1 e 2, respectivamente.

Figura 30 – Respostas para Questão 1 da atividade 3.

Fonte: material de pesquisa da autora.

Figura 31 – Respostas para Questão 2 da atividade 3.

Fonte: material de pesquisa da autora.

Nas respostas referentes a questão 3 da atividade 3, que questiona o que ocorre com o perímetro e com a área da figura após n iterações, repetiram as das questões 1 e 2, de um modo geral. A ideia do qual grande este n pode ser, não foi alcançado pela totalidade dos alunos. O fato de poucos alunos terem respondido para um n suficientemente grande, remete-nos a falta de conhecimento da ideia de limite. Conteúdo matemático investigado em sequência no segundo ano do ensino médio, mas pouco explorado em sala de aula.

O aluno A2 responde que “ o perímetro é infinito e a área é zero”, informando ter conhecimento do que ocorre com o fractal após n iterações para um n grande. E os alunos A3, A5 e A7 consideram que o perímetro vai para o infinito e a área vai para zero. Observamos que o fato de indicar a tendência para o infinito e a tendência para o zero, mesmo sem o rigor da escrita matemática, demonstra uma certa maturidade em relação a ideia de infinito e limite.

A Figura 32 apresenta o percentual de alunos que escreveram a resposta correta para questão da atividade 3.

Figura 32 – Respostas para Questão 3 da atividade 3.

Fonte: material de pesquisa da autora.

Considerações finais

Nosso estudo é uma proposta de análise da geometria fractal associada aos conceitos de progressões e representação da noção de função (termo geral de uma sequência), especificamente na aplicação de saberes obtidos em aprendizagens em sala de aula.

Buscamos através de uma sequência de atividades, sendo duas delas relacionadas de forma direta com o fractal Triângulo de Sierpinski, propiciar ao aluno uma busca investigativa de padrões e de escrita matemática baseada em saberes de progressões aritméticas e geométricas e também sobre o conceito de funções, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades que se relacionem com a formalização de padrões.

A importância do trabalho deve-se a diversos fatores, entre eles, podemos destacar três: a apresentação de uma geometria praticamente desconhecida que não vem sendo explorada no ensino médio; a exigência da utilização do que o estudante domina perante um saber que ele não conhece e a percepção da desvalorização do rigor matemático na escrita em sala de aula.

Apesar de estar presente em alguns livros didáticos do ensino médio, a geometria fractal ainda não faz parte das aulas de matemática. Todos os alunos que participaram das atividades desconheciam o termo fractal. E após conhecerem o Triângulo de Sierpinski, demonstraram extremo interesse em conhecer outros fractais famosos e suas sequências de construção.

A dificuldade mais frequente de ficar diante de um saber que ele não conhece e precisa utilizar o que domina é identificar o que é suficiente e/ou necessário para desvendar o novo. Por exemplo, no caso de informar as sequências formadas pelas iterações, os que identificaram as potências e conseguiram escrevê-las a partir da segunda iteração, concluíram a atividade 3 com mais facilidade.

Um terceiro fator, a percepção da desvalorização do rigor matemático na escrita em sala de aula. Fator diretamente associado à dificuldade dos alunos para generalização por uma função. Dificuldade não apenas dos alunos, mas dos próprios docentes, que a transfere de forma direta durante as aulas. A defasada formação acadêmica nos cursos de licenciatura associada à prática imediatista (ações pedagógicas direcionadas apenas para aprovações em concursos) e saturada de conteúdo do ensino médio contribui para agravar este problema. Por isso, a necessidade de propostas mais eficientes para que se tenha uma formação de professores com mais qualidade e de capacitações mais objetivas.

Um ponto importante das observações feitas nesta pesquisa para o ensino de matemática no ensino médio é a análise do comportamento dos estudantes perante uma situação nova em que lhes são exigidos o uso de conhecimentos obtidos de suas aprendizagens em sala de aula. Através das análises da proposta de atividade baseada na geometria fractal foi possível observar a importância da abordagem em questões que requeiram construções a partir da observação de padrões.

O fato da atividade apresentar uma nova geometria onde algumas de suas propriedades são investigadas durante a sua realização, possibilita que o estudante construa seus conceitos diante de um novo conteúdo matemático, utilizando a geometria fractal para criar situações de aprendizagem da álgebra, principalmente relacionando sequência com a modelagem funcional.

Na observação dos dados da pesquisa, percebemos que algumas dificuldades dos estudantes para representar as generalizações podem estar em parte relacionadas com a forma do ensino de funções na escola, pois, pouco se exige que trabalhem situações de generalização de sequências, nas várias atividades utilizadas pelos docentes, para fugir do modo desarticulado das fórmulas prontas, que pouco contribuem para o desenvolvimento das habilidades referentes à observação de padrões e construção de modelos.

Segundo Nascimento (2007), a capacidade de conexão que o conceito de função tem com os conhecimentos de outras áreas ou com conceitos da própria matemática, torna-o um conceito chave para o desenvolvimento de atividades que busquem explorar a modelagem matemática. Por isso a importância de investigar quais habilidades os estudantes desenvolvem e quais não são observadas nas atividades de ensino de função trabalhadas na sala de aula.

Ainda, segundo Nascimento (2007), a identificação destas habilidades pode levar à compreensão dos elementos das abordagens matemática que levam os alunos a dificuldades para aplicar o conhecimento matemático, ou ainda para compreender o conceito de função.

Baseada nos resultados desta pesquisa que investiga se os estudantes do ensino médio trabalhando atividades baseadas em geometria fractal aplicam corretamente saberes obtidos de suas aprendizagens matemáticas de sala de aula, especificamente progressões e representações de noção de funções (termo geral de uma sequência), sugerimos para prolongamento ou novo estudo investigar a relação e as consequências da falta do rigor matemático em sala de aula no aprendizado da modelagem matemática. Sugerimos a investigação a partir de atividades relacionando geometria fractal e a álgebra.

Referências

- ALBUQUERQUE DE ASSIS, T. *Geometria Fractal: propriedades e características de fractais ideais.* Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 30, n. 2, p. 10, 2008. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v30n2/a05v30n2.pdf>. Acesso em: 13 de abr. 2017.

- ALMEIDA, Theodoro Becker de, et al. *Fractais no Ensino Fundamental: explorando essa nova geometria.* Disponível em <www.sbem.com.br/files/ix_enem/poster/resumos/po00995663033r.doc.> Acesso em: 5 mar. 2017.

- ALMEIDA E. A. M. *Progressões aritméticas e geométricas: praxeologias em livros didáticos.* In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 18 a 21 jul. 2013, Curitiba. XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba: PUC-PR, 2013.

- ALBUQUERQUE, R. A. P. e NASCIMENTO, R. A. *Visualização do conceito de progressões a partir de representações geométricas construídas no software SuperLogo.* Revista REMAT, Caxias do Sul, RS, v. 2, n. 1, p. 46-57, 2016.

- ALMOULOUD, Saddo. *A Geometria na escola básica: que espaços e formas tem hoje?* Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Anais. São Paulo, VII EPEM 2004, p.01.

- BARBOSA, R. M. *Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula.* Coleção Tendências em Educação Matemática. Editora Autêntica. Belo Horizonte, 2002.

- BAULAC Y., LABORDE J.M. & BELLEMAIN F. (1988), *Cabri-Géomètre, un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie, Logiciel et manuel d'utilisation*, version 1.0, Macintosh de Apple, Nathan-Logiciels, Paris.

- BENSON, B.; MACKENZIE. *"Effects of sensor spatial resolution on landscape structure parameters".* Landscape Ecology, v. 10, 1995, p.113 – 120.

- BORSSOY, J. A. *Geometria Fractal: alguns conceitos e aplicações.* Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Trabalho de conclusão de curso (Matemática), 2005.

- BOYER, C. B. *História da matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

- BRANDÃO, L. O. (2002). *Algoritmos e Fractais com Programas de GD.* Revista do Professor de Matemática, São Paulo: SBM, v. 49, p. 27-34.

- BRASIL. Ministério da Educação. PCN +. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf.> Acesso em: 16 jan. 2017.

- BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 1998.* Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2017.

- CORTÊS; ANTUNES; GLADSON. RPM. *Geometria fractal no ensino médio. Teoria e prática.* Número 1, volume 2, 2014.

- BICUDO, Irineu. *Os Elementos/Euclides. Tradução e introdução.* Editora UNESP, São Paulo, 2009.

- FARIA, R. W. S. *Padrões Fractais: contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos.* 2011. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, São Paulo, 2012.

- FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. *Investigação em Educação Matemática.* Campinas: Autores Associados, 2007. 240 p.

- GONÇALVES, A. G. N. *Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais.* 2006. 215f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

- GOUVEA, Flavio Roberto. *Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e softwares de geometria dinâmica.* 2005. v, 259f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2005. Disponível em <http://hdl.handle.net/11449/91080>. Acesso em: 17 abr. 2017.

- LAWFORD, G. J.; MASTERS, E. G. *"Fractal sand the cartographic line"*. Cartography. v. 31. n. 2. 2002, p. 61 – 72.

- LORENZATO, Sérgio. *Porque não ensinar Geometria?* Educação Matemática em Revista, Florianópolis: SBEM, Nº. 04, 1995.

- MANDELBROT, B. *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freemand and Company, 1983.

- NASCIMENTO, Ross Alves. *Modelagem Matemática com Simulação Computacional na Aprendizagem de Funções.* Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007. Disponível em <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4113>. Acesso em: 15 out. 2017.

- NICOLA, Celso Henrique. *Conhecendo fractal no ensino médio – árvore pitagórica.* Trabalho de Conclusão de Curso Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

- NUNES, Raquel Sofia Rabelo. *Geometria Fractal e Aplicações.* Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática Pura - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006. Disponível em <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Acesso em: 6 jun. 2017.

- PALLESI, D. M. *Motivação do Estudo de Progressões Aritméticas e Geométricas Através da Geometria Fractal.* Monografia de Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2007.

- RABAY, Yara Silvia Freire. *Estudo e Aplicações da Geometria Fractal.* Trabalho de Conclusão de Curso Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tese/7651>. Acesso em: 17 abr. 2017.

- REIS, W. *Geometria fractal: uma abordagem voltada para o ensino médio.* Trabalho de Conclusão de Curso Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT – Universidade Federal do Maranhão. São Luís, 2014.

- ROMAN, T. C. *A Geometria Fractal e o software cabri-géomètre II no estudo de Progressão Geométrica.* 2004. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma– SC, 2004.

- SALLUM, Élvia Mureb. *Fractais no ensino médio.* Revista do Professor de Matemática. Nº 57, 2º quadrimestre, 2005.

- SINDEAUX A. R. *Dimensão fractal e a espessura da cortical mandibular em pacientes com e sem osteoporose.* 2013. Trabalho de Conclusão de Mestrado em Ciências da Saúde – Universidade de Brasília. Brasília, 2013.

- TITONELI, L. M. B. A *Observação de Padrões – Modelagem Matemática Através de Sequências Numéricas e Objetos Geométricos.* Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática. Departamento de Matemática - Centro Técnico Cientifico da PUC Rio de Janeiro, 2017.

- TURNER, M. G.; GARDNER, R. H.; O'NEILL, R. V. *Landscape Ecology in theory and practice: pattern on process.* New York:. Springer Verlag, 2001, 401p.

- VALE, I., BARBOSA, A., FONSECA, L., PIMENTEL, T., BORRALHO, A., & CABRITA, I. (2008). *Padrões no currículo de Matemática: presente e futuro.* In R. González, B. Alfonso, M. Machín, L. Nieto (Org.), Investigación en Educación (pp.477-493). Badajoz: SEIEM, SPCE, APM.
- VEJAN, Margareth Pangoni; FRANCO, Valdeni Soliani. *Geometria Não-Euclidiana/ Geometria dos Fractais.* PDE-PR, Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2207-8.pdf>. Acesso em: 17 abr. 2017.