UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO ODÉCIO SALES

DESIGUALDADES E GEOMETRIA: UM TRATAMENTO EUCLIDIANO SOBRE A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

FORTALEZA - CEARÁ

2019

FRANCISCO ODÉCIO SALES

DESIGUALDADES E GEOMETRIA: UM TRATAMENTO EUCLIDIANO SOBRE A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr.Tiago Caula Ribeiro

FORTALEZA - CEARÁ

2019

Sales, Francisco Odécio.
Desigualdades e geometria: um tratamento Euclidiano sobre a desigualdade isoperimétrica [recurso eletrônico] / Francisco Odécio Sales. - 2019.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 84 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.
Área de concentração: Geometria.
Orientação: Prof. Dr. Tiago Caula Ribeiro.

1. Desigualdades. 2. Problemas Isoperimétricos. 3. Desiguldades Geométricas. I. Título.

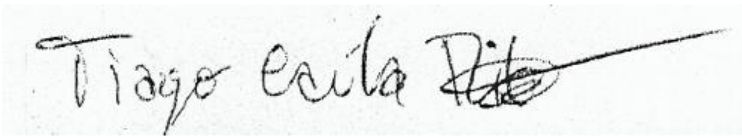
FRANCISCO ODÉCIO SALES

DESIGUALDADES E GEOMETRIA: UM TRATAMENTO EUCLIDIANO SOBRE A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria.

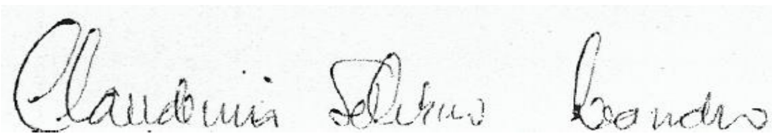
Aprovada em: 23/04/2019

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Tiago Caula Ribeiro (Orientador)

Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro

Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

Universidade Federal do Ceará - UFC

À minha mãe (Fátima).

À minha esposa (Karine).

Ao meu filho (Heitor).

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus pelo dom da vida.

À minha mãe Maria de Fátima pelo amor, carinho e compreensão. E por todo sacrifício de uma vida para que eu pudesse ter as condições de atingir meus objetivos.

À minha querida e amada esposa Karine Moreira e meu abençoado filho Heitor, por todo amor, carinho, apoio e paciência, entendendo que uma vida sem sacrifícios a abdicações é uma vida sem sentido onde, porém frutos são os mais saborosos quando semeados com fé e esperança.

Aos meus amigos de mestrado: Alan Derick, Alan Landislau, Allan Junior, Alisson, Bruno, Annelise, Carlos Fábio, Claudio, Cristiano, Ed, Enio, Fabio, Hugo, Marcilia, Raimundo Neto, Rafael Kaio, Valber e Wesley, por dividir todas as angústias pré-provas e por todos os memes produzidos em 24 meses de amizade.

Aos professores do curso: Tiago Caula, João Montenegro, Claudemir Leandro, Manoel Pereira, João Marques e Robério Rogério, por todos os ensinamentos e dedicação à nossa turma.

Ao meu orientador Prof. Dr. Tiago Caula por aceitar orientar esse trabalho e por toda dedicação, paciência, compreensão e sugestões para o engrandecimento dessa obra ao longo dos meses de escrita.

À CAPES pelo financiamento mediante bolsa desse curso.

A todos que fazem parte de minha vida e que contribuíram direta, ou indiretamente, a chegar tão longe, o meu muito obrigado.

“A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela”.

(Albert Einstein)

RESUMO

O trabalho que se segue traz um tratamento sobre desigualdades algébricas e geométricas com foco em resolver problemas envolvendo Geometria Plana e Espacial. As desigualdades são fortes ferramentas para resolver problemas de otimização em diversos campos da ciência, em especial a geometria que possuem suma importância devido a seu caráter historiográfico e por permitir a caracterização de objetos no plano e no espaço mediante relações métricas e mensuráveis. O trabalho aqui exposto apresentará um tratamento sobre tais desigualdades enfocando a isoperimétrica, dando a mesma um viés mais geométrico e acessível aos alunos da graduação em Matemática. Será realizada uma pesquisa em livros e artigos acadêmicos que tratam do assunto analisando a abordagem dada ao mesmo. Em seguida trabalharemos no texto que acreditamos suprir essa necessidade. O resultado esperado será um tratamento acerca da desigualdade isoperimétrica fazendo uso, em essência, das desigualdades elementares (como desigualdade das médias) e suportada pela geométrica euclidiana plana.

Palavras-chave: Desigualdades. Problemas isoperimétricos. Desigualdades geométricas.

ABSTRACT

The following work brings a treatment of algebraic and geometric inequalities with a focus on solving problems involving Plane and Spatial Geometry. Inequalities are strong tools for solving optimization problems in several fields of science, especially geometry that are extremely important due to their historiographic character and to allow the characterization of objects in the plane and in space through metric and measurable relations. The work presented here will present a treatment on such inequalities focusing on the isoperimétrica, giving the same one more geometric bias to the one accessible to the students of the graduation in Mathematics. Research will be conducted on books and scholarly articles that deal with the subject by analyzing the approach taken to the subject. Then we will work on the text that we believe meets this need. The expected result will be a treatment of isoperimetric inequality using essentially elemental inequalities (as inequality of means) and supported by flat Euclidean geometry.

Keywords: Inequalities. isoperimetric problems. geometric inequalities.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-	**Triângulo ABC..**	22
Figura 2-	**Parametrização de um interval…………………………………………**	33
Figura 3-	**Interpretação geométrica da definição analítica de função convexa..**	34
Figura 4-	**A propriedade fundamental de um epigrafe convexo………………**	35
Figura 5-	**Problema do fazendeiro…………………………………………………**	46
Figura 6-	**Problema do paralelepípedo……………………………………………**	47
Figura 7-	**Retângulo inscrito………………………………………………………**	48
Figura 8-	**Desigualdade triangular……..…………………………………………**	53
Figura 9-	**Desigualdade de Erdös-Mordell………………………………………..**	57
Figura 10-	**Triângulo qualquer………………………………………………………**	58
Figura 11-	**Triângulo inscrito…………………………………………………………**	61
Figura 12-	**Paralelogramo……………………………………………………………..**	65
Figura 13-	**Triângulo inscrito…………………………………………………………**	66
Figura 14-	**Quadrilátero ciclico……………………………………………………**	67
Figura 15-	**Paralelepípedo na esfera………………………………………………..**	69
Figura 16-	**Polígono equilátero……………………………………………………**	72
Figura 17-	**Polígono equiângulo……………………………………………………..**	73
Figura 18-	**Polígono equiângulo II…………………………………………………..**	74
Figura 19-	**Apótema……………………………………………………………………**	75
Figura 20-	**Reflexão……………………………………………………………………**	77
Figura 21-	**Rotação……………………………………………………………………..**	78
Figura 22-	**Convexidade das soluções……………………………………………..**	79
Figura 23-	**Ângulo com a reta R……………………………………………………...**	80

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO...**	11
2	**OBJETIVOS..**	17
2.1	**GERAL..**	17
2.2	**ESPECIFICOS……………………………………………………………**	17
3	**METODOLOGIA………………………………………………………….**	18
4	**DESIGUALDADES ELEMENTARES……………………………….........**	19
4.1	ALGUMAS DESIGUALDADESALGÉBRICAS..	19
4.1.1	**Desigualdade das medias aritmética-geométrica...............................**	20
4.1.2	**Desigualdade de Cauchy-Schwark………………..............................**	23
4.1.3	**Desigualdade entre as médias quadrática e aritmética……….........**	29
4.1.4	**Desigualdade de Bertoulli..**	30
4.1.5	**Desigualdade de Abel……...**	31
4.1.6	**Funções convexas e a desigualdade de Jensen……………………..**	33
4.1.7	**Desigualdade de Young……………………………………………….....**	43
4.1.8	**Desigualdade de Helder……………………………………………….....**	44
4.1.9	**Desigualdade de Minkowsky……………………………………………..**	44
4.2	ALGUMAS APLICAÇÕES DE DESIGUALDADES ALGÉBRICAS............	45
5	**DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS...**	53
5.1	ALGUMAS DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS……..............................	53
5.1.1	**Desigualdade triangular…………………...**	53
5.1.2	**Desigualdade de Weitzenböck…..**	54
5.1.3	**Desigualdade de Erdös-Mordell..**	56
5.1.4	**Desigualdade de Euler…………………………………………..............**	57
6	**UM TRATAMENTO PARA PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS VIA DESIGUALDADES……………………………………………………………**	62
6.1	PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS...	62
7	**A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA..**	70
7.1	UM SOLUÇÃO ATRAVÉS DE POLÍGONOS………………………..........	70
7.2	OUTRA ABORDAGEM SOBRE O PROBLEMA ISOPERIMÈTRICO ATRAVÉS DO MÉTODO DAS REFLEXÕES……………………………......	76
	REFERÊNCIAS………………………..…………………………………......	82

1 INTRODUÇÃO

A Matemática sempre esteve presente na vida do homem e no desenvolvimento da ciência. Desde tempos remotos no qual o homem se mantinha pela caça e pesca, já fazia uso da Matemática de maneira rudimentar, intimista e majoritariamente intuitiva. A Matemática como ciência vem inclusa e tornando-se decisiva no caminho evolutivo da humanidade, interagindo e intervindo em transformações que ocorrem na vida em sociedade e no próprio ser humano. A Matemática vem sendo desenvolvida pelo homem mediante suas necessidades de sobrevivência no meio social, adaptação ao meio natural e, por que não, curiosidade.

Ao decorrer da história um problema curioso e desafiador para os Matemáticos foi o de obter valores extremos (máximos e mínimos) para áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos. Problemas naturais relacionados a determinar valores máximos e mínimos aparecem em situações corriqueiras, tais como: *“Qual o retângulo de perímetro constante que possui a maior área?”,* podem ser resolvidos utilizando a Matemática aprendida na educação básica (extremos de uma função quadrática por exemplo), o que nos leva a questionar, investigar e colecionar um leque de situações-problemas cujas soluções envolvem desigualdades algébricas e de natureza geométricas, a conhecer: desigualdade triangular, desigualdade entre as médias, dentre tantas.

Na perspectiva de sua jornada na educação básica o estudante tem restritas oportunidades de ter contato com problemas envolvendo desigualdades (a não ser as inequações promovidas por funções) e problemas de otimização (geralmente correlatos a funções quadráticas), onde tal experiencia se dá quase sempre e somente na 1ªsérie do ensino médio onde o sujeito resolve de forma passiva e quase sempre descontextualizada situações-problemas no tocante de máximos e mínimos mediado pelas funções quadráticas ou funções limitadas, tais como função seno e função cosseno. De fato tal temática pode ser trabalhada sobre outra abordagem na educação básica por se tratar de um conceito simples com desdobramentos que enriquecem e ampliam a perspectivado estudante no que tange sua compreensão e processo de aprendizagem em matemática, saindo de uma postura intimista e passiva para uma atuação ativa e construtiva de seu conhecimento. Todo amante da matemática reconhece a importância das desigualdades nos mais diversos ramos e campos da matemática, e por vezes até mais importantes do que as próprias identidades, por sua interpretação geométrica, dentre muitas.

O problema de natureza isoperimétrica aqui explorado, da forma que mais se encontra tratado em artigos e citações em livros textos de disciplinas da grade da graduação, é observado como um problema do cerne e campo de ação da Geometria Diferencial, no campo das curvas planas utilizando dentre outras ferramentas integrais de Green, curvas parametrizadas e alguns outros trunfos de análise e cálculo diferencial. A questão é: dado que nos currículos da licenciatura em Matemática nas instituições que formam professores da educação básica nenhum traz como obrigatória tal disciplina. Então como tratar esse teorema em uma perspectiva mais acessível a futuros professores da educação básica?

O advento da Geometria Diferencial como macro campo da Geometria aliando geometria euclidiana com muitas ferramentas da analise matemática e cálculo diferencial e integral leva sobre si as expectativas de cientistas que anseiam pelo dinamismo da ciência, que certamente passa pela sua evolução, principalmente com a descoberta de aplicações em outras áreas do conhecimento humano. Os estudos das curvas parametrizadas, superfícies em espaços de dimensão finita e suas características (curvatura média, gaussiana, dentre outras) torna-se fundamental em diversas outras áreas do conhecimento, como Física, Engenharia, etc.

A desigualdade isoperimétrica, que habitualmente é encontrada no início dos estudos de Geometria Diferencial, traz uma relação entre o comprimento de uma curva fechada e da área encerrada por esta, sob a forma da desigualdade. Toda via tal demonstração é bem carregada e, por vezes, não é apresentada nos cursos de graduação em Matemática; exceto aqueles que possuem a disciplina de Geometria Diferencial (corriqueiramente cursos de Bacharelado ou mesmo o Mestrado/Doutorado).

No trabalho que se segue buscaremos a responder o seguinte questionamento: como tratar no âmbito mais geométrico e “elementar” a desigualdade isoperimétrica na formação inicial de professores de matemática, nas instituições do estado do Ceará, usando como pilares a Geometria Euclidiana Plana e desigualdades elementares, a fim de manter o caráter mais geométrico da demonstração? A resposta dessa pergunta auxiliará na compreensão do processo de construção e consolidação do conhecimento geométrico e reflexo desse tratamento na formação inicial dos professores.

Por ter abordagem diferente da que classicamente encontra-se nos livros indicados para esse estudo (Ver CARMO (2014)), a desigualdade isoperimétrica não aparece com muita frequência em textos ou referencias acadêmicas, livros-texto ou artigos em especial aos destinados aos cursos de graduação em Matemática (em particular aos de Licenciatura Plena) no Ceará, como observa-se nas disciplinas dos cursos da Universidade Federal do Ceará (UFC), Universidade Estadual do Ceará (UECE), Universidade estadual Vale do Acaraú (UVA), Instituto Federal do Ceará (IFCE) e UNILAB.

Esta pesquisa tem como objetivo ampliar o foco de estudo sobre a desigualdade isoperimétrica, explorando propriedades e teoremas relacionadas a si, analisando também e concomitantemente as propriedades e teoremas que tratam de desigualdades geométricas em espaços euclidianos ou espaços métricos normados de dimensão finita, uma vez que na generalização destes se fundamenta a construção de outra geometria mais rebuscada: a Geometria Riemanniana. Buscaremos então fortalecer a compreensão desse resultado mostrando como este se apresenta geometricamente, com rigor e generalidade, além de suas aplicações.

A desigualdade isoperimétrica vem sendo tratada ao longo da História da Matemática, principalmente no desenvolvimento da Geometria ainda é objeto de atenção de muitos estudiosos. Muitas versões e generalizações desse resultado nos mais variados campos da Matemática Moderna ainda é estudada em diferentes ramos.

A desigualdade isoperimétrica clássica diz que dada uma curva fechada e plana no plano euclidiano de comprimento L, que encerra uma área A satisfaz a desigualdade $L^2 - 4\pi A \geq 0$ e pode ser generalizada para espaços euclidianos de dimensão superior (a exemplo do R^n). Das diversas soluções para o problema isoperimétrico para dimensão superior a dois, destacamos Minkowski (1901) e de Blaschke (1916). A propriedade isoperimétrica no contexto tridimensional pode ser representada pela desigualdade

$$A^3 \geq 36\pi V^2$$

sendo “A” a área de superfície e V o volume de um sólido, onde se verifica a igualdade somente em bolas fechadas.

Uma aplicação trivialmente natural, porém, bem significativa para um primeiro contato com o resultado, seria: Existe uma curva simples, fechada e convexa no plano euclidiano cujo perímetro seja 6 u.c e que limite uma área de 3 u.a? Como $\pi > 3$, obtemos $6^2 - 4.\pi.3 = 36 - 12\pi < 0$, contradizendo a desigualdade isoperimétrica. Logo não existe tal curva.

Quando falamos do estudo de geometria resgatamos alguns conceitos e resultados oriundos das etapas iniciadas na educação básica. Segundo Ferreira (1999, p.983) a geometria é:

> ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos” ou ainda “um ramo da matemática que estuda as formas, plana e espacial, com as suas propriedades, ou ainda, ramo da matemática que estuda a extensão e as propriedades das figuras (geometria Plana) e dos sólidos (geometria no espaço).

Já para Boyer (1996, p. 5), “o desenvolvimento da geometria pode ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem”.

Kaleff (2003, p.14) faz referência aos escritos de Van Hiele em que “a visualização, a análise e a organização informal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito”. A questão retórica sobre a observação e interiorização dos conceitos e ideias em geometria é discutida também por Kaleff (2003, p.15) subsidiadas por pesquisas nas quais vê-se que “(...) apontaram para a importância de se incentivar nos meios educacionais o desenvolvimento de habilidades de visualizar”.

Os PNC (Parâmetros Curriculares Nacionais) discutem a relevância do Ensino da Geometria por ser basilar também a outros campos do conhecimento:

> O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades

> e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 39)

O estudo do problema isoperimétrico teve sua escolha motivada por diversas discussões acerca de geometria e suas diversas variações e abordagens. Lima (2012) ressalta a importância de se entender geometria mesmo sem aprender teoremas e fórmulas para determinar medidas. Na mesma discussão, Lima (2012) diferencia a ação de entender fatos geométricos ao fato de saber determina-los mediante algoritmos. O entendimento da geometria passa pela compreensão da situação problema, nas possíveis formas de resolver, na escolha de uma melhor abordagem até a fase da resolução e reflexão acerca do resultado atingido. Para o autor entender é mais amplo que aprender, pois preza mais pelo contexto e significado do que pelo formalismo e rigor matemático. Obviamente essa reflexão cabe mais a educação básica, haja vista que a própria BNCC trata a necessidade de o aluno usar o conhecimento como ferramenta para intervir na sua realidade.

Carmo (2014) apresenta uma introdução à Geometria Diferencial de curvas e superfícies utilizado classicamente como livro texto para um primeiro curso sobre o assunto. É notório que tal livro é referencial nos cursos de bacharelado em matemática e de mestrado em matemática dada sua abrangência e boa didática. Nesse contexto a geometria diferencial traz um tratamento da geometria a luz do cálculo diferencial e integral, onde as curvas e superfícies são os objetos de estudo, o cálculo diferencial a ferramenta e as medidas de natureza intrínseca e extrínseca são os produtos gerados. Tal tratamento da geometria traz um grande salto nos estudos de características das curvas, tais como torção e curvatura. No campo das superfícies destaca-se o estudo das curvaturas média, gaussiana além do advento das superfícies mínimas e variedades diferenciáveis.

Carmo (2014, p. 37) apresenta o problema isoperimétrico mediante seu contexto histórico e localiza temporalmente algumas soluções, todas pautadas em Equações diferenciais e teoria de máximos e mínimos locais. No mesmo texto, entre as páginas 39 e 41 o autor apresenta uma demonstração do fato através de curvas parametrizadas e integrais de linha, deveras bela porem com grande apelo da Geometria Diferencial. Nesse cerne um aluno do curso de graduação que não tenha geometria diferencial na grade sentiria dificuldade na compreensão da solução, o que causaria estranheza dado que o problema em si é de fácil compreensão.

A motivação desse texto é buscar um caminho mais tênue e tangível aos alunos de graduação enfatizando a geometria euclidiana plana e alguns resultados elementares de desigualdades, como a desigualdade entre as médias. Com isso buscamos um caminho alternativo ao estudo do teorema onde o caráter geométrico do mesmo toma a frente dos demais artifícios.

A presente dissertação está subdividida em quatro capítulos. No capítulo I enunciamos e demonstramos algumas importantes e clássicas desigualdades elementares de cunho algébrico, com destaque para as desigualdades de: Cauchy-Schwarz, Jensen, Young, Holder, desigualdades entre médias (suas implicações diretas e indiretas),apresentando ainda suas aplicações em geometria euclidiana e analítica, buscando ainda soluções mais elegantes e menos corriqueiras para alguns problemas de natureza isoperimétrica, a exemplo de: Dado Q um quadrado e T um triângulo de numericamente mesma área, qual dos dois apresenta maior perímetro? Tal problema pode ser resolvido mediante aplicação da desigualdade entre médias. Outra saída simples, porém, de sofisticada elegância, é encontrada em ANDREESCU (2006), mediante desigualdade triangular.

No capítulo II enunciamos e demonstramos resultados mais voltados a geometria trabalhando medidas de lado, ângulos (internos ou externos) de triângulos quaisquer e de certos polígonos regulares ou não. Mais adiante, no capítulo III apresentaremos alguns resultados voltados ao estudo de máximos e mínimos usando desigualdades (sem necessariamente recorrer ao cálculo diferencial e integral e suas ferramentas), prezando por soluções mais elegantes e de cunho mais geométrico, sempre que possível. Por fim, no capítulo IV, chegamos ao ponto alto do texto: enunciar, contextualizar e demonstrar a desigualdade isoperimétrica, enfatizando o uso de desigualdades nessa demonstração.

2 OBJETIVOS

2.1 GERAL

- Apresentar uma solução para o problema isoperimétrico fundamentada em Geometria Plana e nas desigualdades geométricas elementares.

2.2 ESPECÍFICOS

- Descrever o problema isoperimétrico clássico;
- Descrever as desigualdades elementares a fim de preparar o aluno de graduação para o problema isoperimétrico;
- Demonstrar o problema isoperimétrico.

3 METODOLOGIA

Na pesquisa a ser realizada se lança mão de um método que busque de forma eficaz robustecer o projeto garantindo-lhe confiabilidade e, para tanto, preocupamos com o propósito da pesquisa, com a abordagem e com a técnica utilizada para realizar a mesma, visando apresentar de forma clara o objeto de estudo: a desigualdade isoperimétrica.

A metodologia que norteia o trabalho, quanto ao seu propósito, é explicativa, uma vez que buscamos compreender a generalização da desigualdade isoperimétrica, contribuindo para a formação dos professores de Matemática.

Quanto à abordagem, a pesquisa tem caráter qualitativo, buscando compreender e interpretar o comportamento das desigualdades geométricas elementares, com ênfase na isoperimétrica. Quanto à técnica temos as pesquisas bibliográficas, onde se analisará alguns artigos e livros que tratem, mesmo que de forma sutil, a desigualdade isoperimétrica.

Inicialmente será feito um levantamento teórico de livros acadêmicos e artigos sobre o tema, analisando a forma de tratamento do problema e como isso se dá ao longo do curso de graduação em Licenciatura em Matemática nas instituições de ensino superior no estado do Ceará. Logo após será analisada a grade curricular das instituições que mais formam professores de matemática no estado, observando inicialmente se há a disciplina de geométrica diferencial e em caso negativo, se a desigualdade isoperimétrica é contemplada em outra disciplina de caráter obrigatório ou opcional. Por fim, apresentaremos um texto com um tratamento mais geométrico sobre o assunto de forma a poder ser usado como suporte para o tratamento de tal resultado.

4 DESIGUALDADES ELEMENTARES

4.1 ALGUMAS DESIGUALDADES ALGÉBRICAS

Um diversificado leque de problemas isoperimétricos (situações-problema envolvendo a determinação de valores máximos ou mínimos associados a área de figuras planas determinadas por curvas fechadas e convexas de perímetro pré-determinado) podem ser trabalhados mediante o uso de desigualdades algébricas elementares e alguns truques de manipulação. Por outro lado, muitas desigualdades podem (e por bom tom, devem) ser interpretadas pelo seu viés geométrico como apresentaremos a seguir. Um problema recorrente além de belo é a chamada desigualdade das médias, que diz:

Dados x,y reais positivos, a média aritmética entre estes é sempre maior ou igual a sua média geométrica. Escrevendo matematicamente temos:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad (x, y \geq 0)$$

Tal resultado auxilia a tratar problemas de otimização de natureza mais geométrica, a saber:

"Dentre os retângulos com perímetro fixado, o quadrado maximiza a área"

Ou ainda,

"De todos os retângulos com área fixa, o quadrado minimiza o perímetro."

Enunciaremos a seguir alguns resultados voltados a desigualdades algébricas clássicas. Ao lançar mão dessa abordagem no tratamento de problemas de otimização, tais soluções serão apresentadas de forma mais imediata, em casos nos quais ocorre igualdade direta. Pautados nestes paradigmas, ressaltados a importância da uma análise cuidadosa dessa gama de problemas listados ao decorrer do texto, observando como as desigualdades clássicas auxiliam na resolução de problemas de máximos e mínimos em Geometria.

4.1.1 Desigualdade das médias Aritmética-Geométrica

Definição: Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $números\ reais,$ definimos:

Média Aritmética: MA = $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$

Média Geométrica: MG = $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$

Média Quadrática: MQ = $\sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2}{n}}$

Média Harmônica: MH = $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$

Proposição 1.1. Quaisquer que sejam os reais não-negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, temos que,

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$

com a igualdade ocorrendo se e somente se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Demonstração:

i. A desigualdade é válida para n do tipo 2^k, ocorrendo a igualdade se e somente se todos os números forem iguais.

ii. A desigualdade é verdadeira em geral com igualdade ocorrendo se e somente se os números forem todos iguais.

Usemos indução finita sobre $K \geq 1$, onde $n = 2^k$:

Para $k = 1$, temos:

De fato, $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$ é válido para quaisquer x_1 e x_2 positivos. Segue que

$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}.$$

A igualdade ocorre se e somente se $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 0$, ou seja, se e somente se $x_1 = x_2$.

Suponha então que $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ \ldots \ x_n}$, com igualdade ocorrendo se e só se

$$x_1 = \ldots = x_n \text{ para } n = 2^k.$$

Então:

$$\frac{(x_1+\ldots+x_n)+(x_{n+1}+\cdots+x_{2n})}{2n} = \frac{1}{2}\left[\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right] \geq \frac{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}}{2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \ . \ \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}} = \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_n . x_{n+1} \ldots x_{2n}}$$

Na igualdade, deve-se ocorrer que

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 \ \ldots x_n} \ , \frac{x_{n+1}+\ldots x_{2n}}{n} = \sqrt[n]{x_{n+1} \ \ldots \ x_{2n}} =$$

$$= \frac{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}}{2} = \sqrt[2n]{x_1 \ \ldots x_n x_{n+1 \ldots} x_{2n}} \ .$$

Para as duas primeiras igualdades, segue da hipótese de indução que deve ser

$$x_1 = \cdots = x_n \text{ e } x_{n+1} = \cdots = x_{2n}$$

A última igualdade ocorre se e só se $\sqrt[n]{x_1 \ldots \ x_n} = \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}$. Estas duas condições juntasimplicam que devemos ter $x_1 = \cdots = x_n = x_{n+1} = \cdots = x_{2n}$.É também evidente que se os números forem todos iguais a igualdade ocorre.

Seja então n > 1 um natural qualquer e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais não-negativos. Tome *k um número* natural tal que $2^k > n$. Usando a desigualdade das médias para os 2^k números x_1, x_2, ...x_n e $2^k - n$ cópias de $x = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots \ x_n}$, teremos:

$$\frac{x_1+x_2\ \ldots+x_n+x+x+\cdots+x}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{x_1x_2\ \ldots\ x_n\ \cdot\ x^{2^k-n}} = \sqrt[2^k]{x^n\,x^{2^k-n}} = x,$$

e segue portanto que $x_1 + \ldots + x_n + (2^k - n)\,x \geq 2^k x$, ou ainda $\frac{x_1+\ \ldots+x_n}{n} \geq x = \sqrt[n]{x_1x_2\ \ldots\ x_n}$.

Para verificar a igualdade, segue que se deve ter $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$

Em particular todos os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ devem ser iguais.

Reciprocamente, caso esses números sejam todos iguais, decorre de imediato a igualdade.

Vejamos agora uma demonstração mais geométrica desse fato:

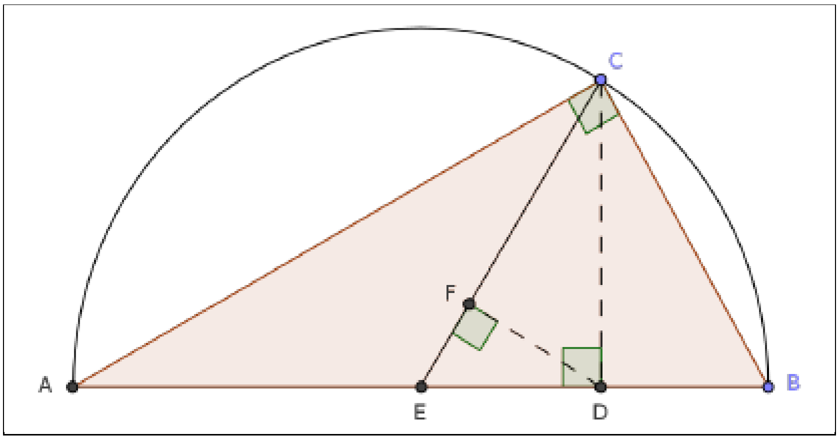
A desigualdade entre as médias aritmética, geométrica e harmônica, dado X = $\{x_{1,}\ \ldots, x_n\}$, para $x_i \in \mathbb{R}_+^*$ e n > 1, apresenta-se da seguinte forma:

MH≤ MG ≤ MA, ocorrendo igualdade se, somente se$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

Nos limitaremos a mostrar a validade desta igualdade para n = 2, por meio de uma prova visual geométrica em que x_1 e x_2 são medidas de segmentos dados.

Considerando a figura abaixo. Temos que $\overline{AD} = x_1$ e $\overline{BD} = x_2$. Considere uma semicircunferência de diâmetro AB e seja C a intercessão dessa circunferência com a perpendicular a AB por D.

Figura 1- Triângulo ABC



Fonte: Elaborado pelo autor

Temos $\overline{AE} = \overline{EB} = \frac{x_1+x_2}{2}$

ou seja, esses segmentos representam a Média Aritmética dos segmentos x_1 e x_2.

Tomemos agora a altura $\overline{CD}$ do triângulo ABC. Por RelaçõesMétricas no Triângulo Retângulo, temos que

$$\overline{CD}^2 = x_1 x_2 \Leftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{x_1 x_2}$$

nos dando que $\overline{CD}$ ilustra a Média Geométrica dos segmentos x_1 e x_2.

Por fim, consideremos os triângulos semelhantes CDF e CDE. Empregando os lados correspondentes convenientemente, obtemos:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \Rightarrow \frac{\overline{CF}}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}$$

Resolvendo essa equação, teremos:

$$\overline{CF} = \frac{(\sqrt{x_1 x_2})^2}{\frac{x_1+x_2}{2}} \Rightarrow \overline{CF} = \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$$

o que nos permite concluir que $\overline{CF}$ é Média Harmônica dos segmentos x_1 e x_2.

Pelos procedimentos acima e observando que o comprimento do cateto nunca supera o comprimento da hipotenusa temos que

$$\text{MH} \leq \text{MG} \leq \text{MA}$$

sendo MH = MG = MA somente no caso de $x_1 = x_2$.

4.1.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

A desigualdade de Cauchy-Schwarz, também conhecida tão somente como desigualdade de Cauchy ou desigualdade de Schwarz apresenta diversas aplicações úteis e manifesta-se em diversos ramos da Matemática como Álgebra Linear (aplicada à vetores) ou ainda em Análise Matemática surgindo no contexto dos estudos das séries infinitas e dos produtos de integrais. Não devemos esquecer ainda sua relevância na Teoria das Probabilidades para determinação e testes de variância e covariância de amostras.

Proposição 1.2(Cauchy-Schwarz)**.** Quaisquer que sejam os números reais x_1, …, x_n, y_1, …, y_n, temos que,

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$

com a igualdade ocorrendo se e só se x_i e y_i são proporcionais, onde i= 1,2,3, …, n.

Demonstração:

Defina f (λ) = $(x_1 \lambda - y_1)^2 + (x_2 \lambda - y_2)^2 + \ldots + (x_n\lambda - y_n)^2$ um polinômio de 2º grau em λ.

Desenvolvendo quadrados e agrupando os termos da forma adequada, temos:

$$f(\lambda) = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\lambda^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)\lambda + (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

Como f (λ) ≥ 0 por ser a soma de quadrados de números reais, para todo λreal, segue que Δ ≤ 0.

Ou seja,

$$4(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

Resulta que:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

Tratemos então o caso da igualdade. Se caso Δ = 0, então f (λ) = 0 e $y_i = \lambda \cdot x_i$, para cada i = 1, 2, 3,…, n. É imediato que, supondo que $y_i = \lambda \cdot x_i$, para todo i = 1, 2, 3,…, n, a igualdade ocorre.

Observação: Apresentemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para espaços vetoriais euclidianos. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de um espaço vetorial V com produto interno. Assim:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot$$

com igualdade ocorrendo se, e só se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD (linearmente dependentes). A desigualdade triangular (que geometricamente nos mostra que cada lado de um triangulo não ultrapassa a soma dos demais dois lados) pode ser demonstrada usando o resultado supracitado.

Veja:

$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}\ .$$

Pela desigualdade de *Cauchy-Schwarz*,

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

Teremos, pois:

$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2\ .$$

donde segue o resultado.

Apresentemos uma aplicação bem geométrica para o resultado acima:

Aplicação: Seja P um ponto no interior de triângulo $A_1A_2A_3\ e\ P_1, P_2, P_3$, os pés das perpendiculares de *P* a A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Localize o ponto *P* tal que

$$\frac{A_1A_2}{PP_3} + \frac{A_2A_3}{PP_1} + \frac{A_3A_1}{PP_2}.$$

seja mínimo.

Solução. As frações envolvidas nessa soma relacionam bases e alturas (pense sempre que distâncias lembram alturas e que alturas lembram área) dos triângulos A_2PA_3, A_2PA_1, A_1PA_2 e, portanto, nos fazem pensar que nas áreas desses triângulos, e área do triângulo $A_1A_2A_3$ será a soma dessas áreas.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$\left(\frac{A_1A_2}{PP_3} + \frac{A_2A_3}{PP_1} + \frac{A_3A_1}{PP_2}\right)(A_1A_2 \cdot PP_3 + A_2A_3 \cdot PP_1 + A_3A_1 \cdot PP_2) \geq (A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1)^2$.

Como

$$A_1A_2 \cdot PP_3 + A_2A_3 \cdot PP_1 + A_3A_1 \cdot PP_2 = 2S$$

e

$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 = p,$$

sendo *S* a área e o *p* o perímetro do triângulo $A_1A_2A_3$, chegamos a

$$\frac{A_1A_2}{PP_3} + \frac{A_2A_3}{PP_1} + \frac{A_3A_1}{PP_2} \geq \frac{p^2}{2S}.$$

Portanto, o candidato a valor mínimo de $\frac{A_1A_2}{PP_3} + \frac{A_2A_3}{PP_1} + \frac{A_3A_1}{PP_2}$ é $\frac{p^2}{2S}$.

Esse valor mínimo será atingido se a igualdade ocorrer na desigualdade. A igualdade na *desigualdade de Cauchy-Schwarz* ocorre com a proporção entre as respectivas parcelas das somas envolvidas, ou seja,

$$\frac{\frac{A_1A_2}{PP_3}}{A_1A_2 \cdot PP_3} = \frac{\frac{A_2A_3}{PP_1}}{A_2A_3 \cdot PP_1} = \frac{\frac{A_3A_1}{PP_2}}{A_3A_1 \cdot PP_2}$$

de onde segue que o valor mínimo é atingindo e é quando P é o incentro do triângulo $A_1A_2A_3$.

Teorema (Cauchy-Schwarz): Dados 2n números reais $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, temos:

$a_1b_1 + b_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$,

Valendo a igualdade se, e somente se,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Com $b_1, b_2, \dots, b_n$ todos diferentes de zero.

Demonstração: Iniciaremos com o fato simples. Dados a e b números reais quaisquer vale que:

$$(a - b)^2 \geq 0$$

Isto acarreta:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \text{(i)}$$

Valendo a igualdade se, e somente se, a = b. Tomando:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\, e\ B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2},$$

Considere os números:

$$\overline{a_i} = \frac{a_i}{A}\, e \overline{b_i} = \frac{b_i}{B}, \text{ com } A \neq 0 \text{ e } B \neq 0.$$

Substituindo estes novos números em (i) conseguiremos as desigualdades abaixo:

$$\overline{a_1}\overline{b_1} \leq \frac{\overline{a_1}^2}{2} + \frac{\overline{b_1}^2}{2}$$

$$\overline{a_2}\overline{b_2} \leq \frac{\overline{a_2}^2}{2} + \frac{\overline{b_2}^2}{2}$$

....

$$\overline{a_n}\overline{b_n} \leq \frac{\overline{a_n}^2}{2} + \frac{\overline{b_n}^2}{2}$$

Somando todas estas desigualdades obtém-se:

$$\overline{a_1}\overline{b_1} + \overline{a_2}\overline{b_2} + \ldots + \overline{a_n}\overline{b_n} \leq \left(\frac{\overline{a_1}^2}{2} + \frac{\overline{a_2}^2}{2} + \ldots + \frac{\overline{a_n}^2}{2}\right) + \left(\frac{\overline{b_1}^2}{2} + \frac{\overline{b_2}^2}{2} + \ldots + \frac{\overline{b_n}^2}{2}\right)$$

Note ainda que:

$$\overline{a_1}^2 + \overline{a_2}^2 + \cdots + \overline{a_n}^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{A^2} = 1.$$

E, do mesmo modo:

$$\overline{b_1}^2 + \overline{b_2}^2 + \cdots + \overline{b_n}^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}{B^2} = 1$$

Substituindo estas duas últimas conclusões no segundo membro da desigualdade:

$$\overline{a_1}\overline{b_1} + \overline{a_2}\overline{b_2} + \ldots + \overline{a_n}\overline{b_n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

O que acarreta em:

$$\frac{a_1}{A} \cdot \frac{b_1}{B} + \frac{a_2}{A} \cdot \frac{b_2}{B} + \cdots + \frac{a_n}{A} \cdot \frac{b_n}{B} \leq 1$$

ou

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leq AB.$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se,

$$\overline{a_1} = \overline{b_1}, \overline{a_2} = \overline{b_2}, \ldots, \overline{a_n} = \overline{b_n}$$

o que equivale a:

$$\frac{a_1}{A} = \frac{b_1}{B}, \frac{a_2}{A} = \frac{b_2}{B}, \ldots, \frac{a_n}{A} = \frac{b_n}{B},$$

Ou ainda:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

4.1.3 Desigualdade entre as médias quadrática e aritmética

Proposição 1.3. Para quaisquer números reais não-negativos$x_1, x_2, ..., x_n$, tem-se que

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

Ocorrendo igualdade se e somente se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

PROVA:

Fazendo $y_1 = y_2 = y_n = 1$ na desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, obtemos:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{n} \text{ (I)}$$

De modo que a igualdade ocorre se, e somente se, se existir um número real positivo λ tal que $x_1 = \lambda$para todo *i* donde se conclui que todos os x_i são iguais. Para se obter a desigualdade pedida basta multiplicar ambos os membros de (I) por *1/n*.

Vejamos então para tal resultado:

Aplicação: Seja c o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem *a* e *b*. Prove que $a + b \leq c\sqrt{2}$.

Solução. Do primeiro exemplo, com $n = 2$, temos:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Daí:

$$\frac{c^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow a + b \leq c\sqrt{2}.$$

A igualdade ocorre se a = b e o triangulo é isósceles e retângulo e por Pitágoras verifica-se que $a = b = c\sqrt{2}/2$

4.1.4 Desigualdade de Bertoulli

Proposição 1.4 (Bernoulli) – *Dados n natural e x* > -1 *real, temos* $(1+x)^n \geq 1 + nx$*, ocorrendo a igualdade para n* >1 *se e só se x* = 0.

Prova. Façamos indução sobre n, sendo o caso $n = 1$ imediato. Suponha, por hipótese de indução, que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$; como $1 + x > 0$, temos

$$(1 + x)^{n+1}= (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + (n+ 1)x + nx^2 \geq 1 + (k + 1)x,$$

ocorrendo a igualdade se e só se $(1 + x)^n = 1 + nx$ e $nx^2 = 0$, i.e., se e só se $x = 0$.

Aplicação 1: Dados n natural e a e b reais positivos, mostre que

$$(1 + \frac{a}{b})^n + (1 + \frac{b}{a})^n \geq 2^{n+1},$$

Ocorrendo a igualdade se e só $a = b$.

Prova. Dividindo ambos os membros da desigualdade do enunciado por 2^n, vemos que basta provar que

$$(1 - \frac{1}{2} + \frac{a}{2b})^n + (1 - \frac{1}{2} + \frac{b}{2a})^n \geq 2.$$

Como $-\frac{1}{2} + \frac{a}{2b} > -1$ e $-\frac{1}{2} + \frac{b}{2a} > -1$, aplicando a desigualdade de Bernoulli a cada parcela do primeiro membro acima e somando os resultados, obtemos

$$(1 - \frac{1}{2} + \frac{a}{2b})^n + (1 - \frac{1}{2} + \frac{b}{2a})^n \geq 2 + n\,(\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - 1).$$

Basta, agora, aplicar a desigualdade entre as médias para obter

$$\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{a}{2b} \cdot \frac{b}{2a}} - 1 = 0,$$

com igualdade se e só se $\frac{a}{2b} = \frac{b}{2a}$, i.e., se e só se $a = b$.

Aplicação 2: *Use a desigualdade Bernoulli para mostrar que a sequência* $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ é crescente, ou seja, que $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$.

Solução: Note que $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n = \frac{(n+1)^n}{n^n}$.
Então $\frac{a_n+1}{a_n} = a_n + 1 \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n^n \cdot (n+2)^{n+1}}{(n+1)^{2n+1}} = =$

$$\frac{(n+2)}{(n+2)} \cdot [\frac{n \cdot (n+2}{(n+1)^2}]^n = \frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot [\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}]^n = \frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot [1 + \frac{-1}{(n+1)^2}]^n \cdot$$

Como $\frac{-1}{(n+)^2} \geq -1$ segue, ela desigualdade de Bernoulli, que

$$\frac{(n+2)}{(n+2)} \cdot [1 + \frac{-1}{(n+1)^2}]^n \geq \frac{(n+2)}{(n+2)} \cdot [1 + \frac{-n}{(n+1)^2}] .$$

Assim segue que $\frac{a_n+1}{a_n} \geq \frac{(n+2)}{(n+2)} \cdot \left[1 + \frac{-n}{(n+1)^2}\right] = \frac{(n+2)}{(n+2)} \cdot \frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2} =$
$\frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$

Portanto $a_{n+1} > a_n$.

4.1.5 Desigualdade de Abel

Proposição 1.5 (Abel). Sejam n> 1 natural e $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ números reais dados, com $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq 0$. Se M e m denotam respectivamente os elementos máximo e mínimo do conjunto de somas $\{b_1, b_1 + b_2, ..., b_1 + b_2 + ... + b_n\}$, então:

$$ma_1 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \leq Ma_1.$$

Prova. Provemos a desigualdade da direita, sendo a prova da desigualdade da esquerda totalmente análoga.

Faça $s_0 = 0$ e $s_i = b_1 + ... + b_i$, para $1 \leq i \leq n$. Então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i (s_i - s_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} s_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) s_i + a_n s_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} M(a_i - a_{i+1}) + Ma_n = Ma_1.$$

Para referência futura, observamos que, nas notações da prova do teorema acima, a igualdade

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) s_i + a_n s_n$$

É conhecida como a **identidade de Abel**, sendo quase tão útil quanto a desigualdade de Abel em si.

Aplicação (Romênia – adaptado). Sejam $n > 1$ inteiro e $x_1, ..., x_n, y_1, ... y_n$ reais positivos tais que $x_1 y_1 < x_2 y_2 < ... < x_n y_n$ e, para $1 \leq k \leq n$, $x_1 + ... + x_k \geq y_1 + ... + y_k$.

Prove que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + ... + \frac{1}{y_n}.$$

Prova. Inicialmente, observe que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - y_i}{x_i y_i}. \qquad (3)$$

Por outro lado, a condição $x_1 + ... + x_k \geq y_1 + ... + y_k$ para $1 \leq k \leq n$ pode ser escrita como

$$(x_1 - y_1) + \ldots + (x_k - y_k) \geq 0$$

para $1 \leq k \leq n$. Assim, fazendo $a_i = \frac{1}{x_i y_i}$ e $b_i = x_i - y_i$ para $1 \leq i \leq n$, temos $0 < a_i <$ $a_2 < \ldots < a_n$, $b_1 + \ldots + b_i \geq 0$ e $\frac{x_i - y_i}{x_i y_i} = a_i\, b_i$ para $1 \leq i \leq n$.

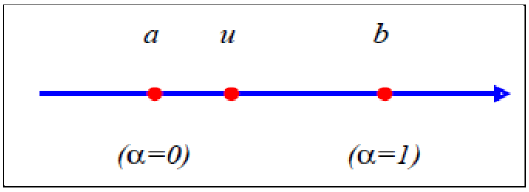
Aplicando a desigualdade de Abel a (3), obtemos então

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq a_n \cdot \min\{ b_1 + \ldots + b_i;\ 1 \leq i \leq n\} \geq 0.$$

4.1.6. Funções Convexas e a Desigualdade de *Jensen*

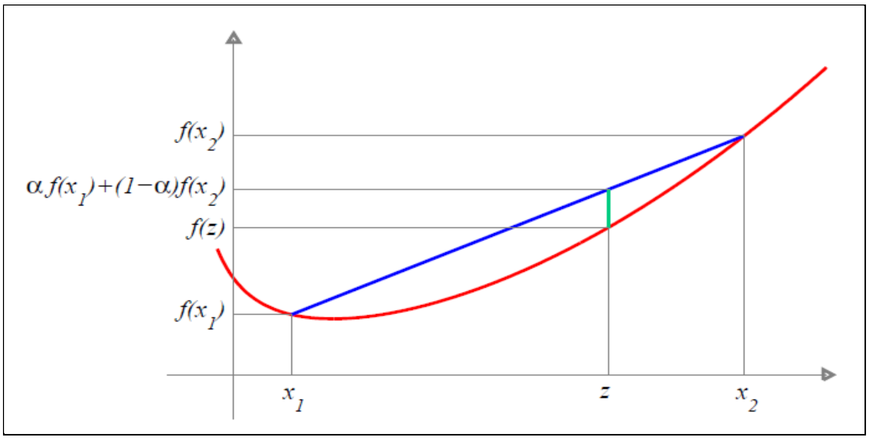
Definição(Analítica) Seja I um intervalo não vazio de$\mathbb{R}$.A função f: I$\longrightarrow \mathbb{R}$é ditaconvexaem I quando $f(\alpha x_0 + (1 - \alpha)x_1) \leq \alpha f(x_0) + (1 - \alpha)\, f(x_1)$, para todos os pares de pontos (x_0, x_1) em I e todo$\alpha \in (0, 1)$.Quando a desigualdade muda de sentido dizemos que a função é côncava. A função f é dita estritamente convexa quando vale a desigualdade estrita para $x_0 \neq x_1$.

Figura 2- Parametrização de um intervalo



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3- Interpretação geométrica da definição analítica de função convexa



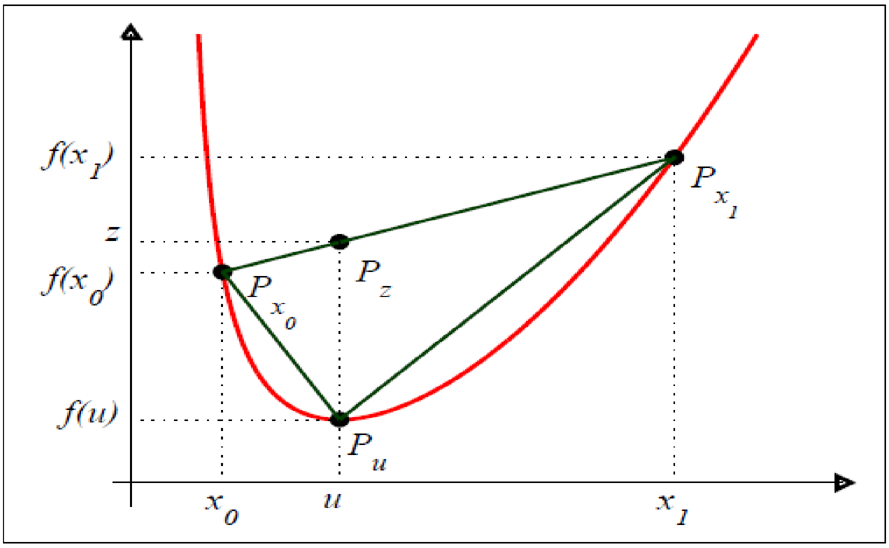
Fonte: Elaborada pelo autor

O significado geométrico de convexidade é claro: considere na Figura3 o segmento que une o ponto (x_1,f (x_1)) ao ponto (x_2, f(x_2)). Dizer que f é convexa significa que, para todos x_1, $x_2$em I e todo z em (x_1, x_2), o ponto (z, f (z)) do gráfico de f está abaixo do segmento que une (x_1, f (x_1)) e (x_2, f (x_2)).

Definição (Geométrica): Seja I um intervalo não vazio de $\mathbb{R}$. A função f: I $\rightarrow\mathbb{R}$ é convexa em I se e somente se E = Epi(f) ={(x,y) | x € I e f(x)≤y} é um conjunto convexo, Epi(f) chama-se epígrafe de f de $\mathbb{R}^2$. A Figura3 sugere que, se u está entre x_0 e x_1 e P_u está abaixo de $P_{x0}P_{x1}$, a inclinação de $P_{x0}P_u$ (ou melhor: da reta que une $P_{x0}P_u$) é menor que a inclinação de $P_{x0}P_{x1}$, que por sua vez é menor que a inclinação de P_uP_{x1}. O próximo resultado de geometria elementar esclarece o argumento.

Proposição: Sejam P_{x0} = (x_0, y_0), P_u = (u, v), e P_{x1} = (x_1, y_2) três pontos sobre o gráfico de f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, onde f é convexa, com u ∊ (x_0, x_1). Então as três propriedades seguintes são equivalentes:

Figura 4- A propriedade fundamental de um epigrafe convexo



Fonte: Elaborada pelo autor

(i) P_u está abaixo de $P_{x0}P_{x1}$;

(ii) inclinação $(P_{x0}P_u) \leq$ inclinação $(P_{x0}P_{x1})$;

(iii) inclinação $(P_{x0}P_{x1}) \leq$ inclinação (P_uP_{x1}).

Prova. A Figura 4 ilustra esta demonstração.

(i) $\Rightarrow$ (ii): A propriedade (i) quer dizer que a imagem de u por f está abaixo da reta que une P_{x0} e P_{x1} (e passa por P_z). A equação desta reta é dada por

$$y - z = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - u). \qquad \text{(i)}$$

Como qualquer ponto da reta que une P_{x0} e P_{x1}, satisfaz a equação (i), em particular o ponto P_{x0}, façamos $x = x_0$ e $y = y_0$; então temos

$$y_0 - z = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_0 - u).$$

Logo, a imagem de u pela reta é dada por

$$z = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(u - x_0).$$

Sabemos que a imagem de u por f é menor que a imagem de u pela reta dada por (i), ou seja, $v \leq z$ onde que $v = f(x)$, ou

$$v \leq y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(u - x_0)$$

Como $u – x_0>0$, temos

$$\frac{v-y_0}{u-x_0} \leq \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

que é justamente a propriedade (ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii): Temos que

$$\frac{v-y_0}{u-x_0} \leq \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}.$$

Como $u – x > 0$ e $x_1 – x_0 > 0$, podemos escrever

$$(v – y_0)(x_1 – x_0) \leq (y_1 – y_0)(u – x_0),$$

$$vx_1 – vx_0 – y_0x_1 + y_0x_0 \leq uy_1 – uy_0 – x_0y_1 + x_0y_0,$$

$$uy_0 -uy_1 - y_0x_1 \leq vx_0 - vx_1 - x_0y_1.$$

Somando $y_1x_1$em ambos os membros da desigualdade, obtemos

$$y_1x_1 - y_0x_1 + uy_0 - uy_1 \leq y_1x_1 - y_0x_1 - vx_1 + vx_0,$$

$$x_1(y_1 – y_0) – u(y_1 – y_0) \leq y_1(x_1 – x_0) - v(x_1 – x_0),$$

$$(x_1 – u) (y_1 – y_0) \leq (y_1 – v) (x_1 – x_0).$$

Como $x_1 – x_0> 0$ e $x_1 – u > 0$, então

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \leq \frac{y_1-v}{x_1-u}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Temos que

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \leq \frac{y_1-v}{x_1-u}.$$

Como $x_1 – x_0> 0$ e $x_1 – u > 0$, então

$$(y_1 - y_0)(x_1 - u) \leq (y_1 - v)(x_1 - x_0),$$

$$y_1x_1 - y_1u - y_0x_1 + y_0u \leq y_1x_1 - y_1x_0 - vx_1 + vx_0,$$

$$vx_1 - vx_0 - x_1y_0 \leq -x_0y_1 + y_1u - y_0u.$$

Somando x_0y_0 em ambos os membros da desigualdade, obtemos

$$vx_1 - vx_0 - x_1y_0 + x_0y_0 \leq x_0y_0 - x_0y_1 + y_1u - y_0u$$

$$v(x_1 - x_0) - y_0(x_1 - x_0) \leq u(y_1 - y_0) - x(y_1 - y_0).$$

Logo, como $x_1 - x_0 > 0$, temos

$$v \leq y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(u - x_0).$$

Em outras palavras, (ii) e (iii) acima significam

$$\frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(u)}{x_1 - u}, \qquad \text{(ii)}$$

expressão que pode ser obtida através da representação de $u \in (x_0, x_1)$ aplicada na definição de convexidade. Temos que $u = \alpha x_0 + (1 - \alpha)x_1$.

Então,

$$\alpha = \frac{x_1 - u}{x_1 - x_0}$$

e

$$1 - \alpha = \frac{u - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Substituindo obtemos

$$f(u) \leq \frac{x_1 - u}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{u - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

Como $x_1 - x_0 > 0$, então

$$f(u)\,(x_1 - x_0) \leq x_1 - u)\, f(x_0) + (u - x_0)\, f(x_1),$$

$$f(u)x_1 - f(u)\, x_0 \leq x_1f(x_0) - uf(x_0) + uf(x_1) - x_0f(x_1).$$

Somando $x_0f(x_0)$ em ambos os membros da desigualdade, obtemos

$$f(u)x_1 - f(u)\,x_0 + x_0f(x_0) \leq x_0f(x_0) + x_1f(x_0) - uf(x_0) + uf(x_1) - x_0f(x_1),$$

$$f(u)(x_1 - x_0) - f(x_0)(x_1 - x_0) \leq f(x_1)(u - x_0) - f(x_0)(u - x_0),$$

$$(f(u) - f(x_0))(\,x_1 - x_0) \leq (f(x_1) - f(x_0))(\,u - x_0).$$

Portanto, como $x_1 - x_0 > 0$,

$$f(u) \leq f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(u - x_0) = f(x_1) + \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_1 - x_0}(x_1 - u)$$

Proposição 1.7 (Jensen). Seja f: (a,b)→ℝuma função duas vezes diferenciável. Se f''(x)≥0 em todo o intervalo (a,b), então para quaisquer $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in (a,b)$ dados vale a seguinte desigualdade:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right).$$

Em particular, f é convexa.

Por outro lado, se *f* ''(*x*) ≤ 0 em todo intervalo (*a*,*b*), temos que para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$ vale a sentença:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right).$$

Demonstração:

Provemos o caso *f''*≤0 pois a demonstração no outro caso é totalmente análoga. Usemos indução finita sobre *n*. O caso *n* = 1 é imediato. Suponha então que a desigualdade seja válida para quaisquer (*n* – 1) números reais no intervalo (*a*, *b*). Façamos então o passo indutivo para *n*.

Fixe inicialmente$x_1, x_2, ..., x_{n-1}$e tome $x_n = x$.

Façamos $x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = l$ e $f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) = k$. Queremos provar que

$$\frac{k+f(x)}{n} \leq f\left(\frac{l+x}{n}\right), \text{ para qualquer } x \in (a,b).$$

Definamos então a função

$$g(x) = \frac{k+f(x)}{n} - f\left(\frac{l+x}{n}\right).$$

Derivando, obtemos

$$g'(x) = \frac{f''(x)}{n} - \frac{1}{n} f'' \left(\frac{l+x}{n}\right).$$

Se x = $\frac{l+x}{n} \Rightarrow x = \frac{l}{n-1}$,então g '(x) = 0.Perceba ainda que f' é monótona não-crescente em (a,b) dado que f'' ≤ 0 pra todo x em (a,b).

Assim, podemos concluir que se $x > \frac{l}{n-1}$, então $g'(x) \leq 0$ e que se $x < \frac{l}{n-1}$, então $g'(x) \geq 0$. Daí, o Cálculo Diferencial nos permite afirmar que $x = \frac{l}{n-1}$ é um ponto de *máximo* global de $g(x)$ no intervalo (a,b). Diante disso temos:

$$g(x) \leq g\left(\frac{l}{n-1}\right) = \frac{k}{n} - \frac{(n-1)f\left(\frac{l}{n-1}\right)}{n}, \frac{k}{n-1} \leq f\left(\frac{l}{n-1}\right) \text{ (Hipótese de indução).}$$

Logo, g(x) < 0 donde $\frac{k+f(x)}{n} \leq f\left(\frac{l+x}{n}\right)$.

As condições para a igualdade dependem bem mais da função *f dada.* No caso mais comum temos $f''< 0$ de forma estrita no intervalo (a,b).Pela demonstração dada conclui-se que a igualdade ocorrerá se e só se $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Observação: Provemos que a desigualdade acima implica na convexidade de f.

Demonstração:

Dado α em (0,1) seja $\frac{m_k}{n_k}$ uma sequência de racionais convergindo para α. Agora, fixados x_0 e x_1 em I, aplique a desigualdade aos n_k números x_0, ... , x_0 (m_k vezes), x_1 ,..., x_1 (n_k - m_k vezes), obtendo

$$f(\frac{m_k}{n_k}). x_0 + (1 - (\frac{m_k}{n_k}). x_1) \leq (\frac{m_k}{n_k}).f(x_0) + (1 - (\frac{m_k}{n_k})f(x_1).$$

Fazendo k tender a infinito, e levando em conta que f é contínua (pois f é derivável), obtem-se a desigualdade desejada: f(α. x_0 +(1- α). x_1) ≤ α.f(x_0) + (1- α).f(x_1).

A desigualdade de Jensen também pode ser aplicada para intervalos quaisquer, desde que a função *f* seja convexa (ou côncava) em todo o referido intervalo.

Um fato interessante é que podemos obter a desigualdade das médias aritmética e geométrica partindo da Desigualdade de *Jensen*. Façamos isso.

Considere então a função logaritmo natural f(x) = lnx. Como f''(x) = -1/x² < 0 então ln é côncava e teremos que:

$\ln\left(\frac{\sum_{i=l}^{n} x_i}{n}\right) \geq \frac{\sum_{i=0}^{n} \ln x_i}{n}$. Isto acarreta que $\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq$ $\ln\left(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\right)$.

Como *f*(*x*) = ln*x* é uma função crescente, concluímos que o resultado se segue.

Teorema(Desigualdade de Jensen generializada)**:** Sejam I um intervalo não vazio de ℝ e f uma função convexa em I. Então, para qualquer coleção {x_1, ..., x_k} de pontos em I e qualquer coleção de números {$α_1$, ..., $α_k$} satisfazendo

$$\alpha_I \geq 0 \text{para I = 1, ..., k e } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \qquad \text{(i)}$$

vale a desigualdade de Jensen:

$$f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i).$$

Demonstração. Considere primeiro k = 2. A relação é trivial se $\alpha_1$ou α_2 é zero; se não, temos justamente f ($\alpha x_0 + (1 - \alpha)x_1) \leq \alpha f(x_0) + (1 - \alpha)$ f (x_1).

Agora, suponha por indução que a relação é verdadeira para k – 1; sejam as coleções {x_1} e {α_i} como em (1.10). Se α_k é 0 ou 1, não há o que provar. Se não, fixemos

$$\overline{\alpha} = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \in (0,1).$$

Então, temos

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,$$

$$\alpha_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i = 1,$$

$$\overline{\alpha} + \alpha_k = 1.$$

Portanto,

$$\alpha_k = 1 - \overline{\alpha},$$

onde $\alpha_k \in (0,1)$. Seja $\overline{\alpha_i} = \frac{\alpha_i}{\overline{\alpha}}$, para i = 1, ..., k – 1. Temos que

$$\overline{\alpha_i} \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{k-1} \overline{\alpha}_i = 1. \quad \text{(ii)}$$

Então

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k-1} \overline{\alpha}_i x_i + (1 - \overline{\alpha})\, x_k.$$

Nesta relação, o ponto $\overline{x} = \sum_{i=1}^{k-1} \overline{\alpha}_i x_i$ está em I, isto é, entre o menor x_i e o maior x_i. Aplicando (ii), obtemos:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) \leq \overline{\alpha} f(\overline{x}) + (1 - \overline{\alpha}) f(x_k) = \overline{\alpha} f(\overline{x}) + \alpha_k f(x_k).$$

Então o resultado segue da suposição de indução aplicada a $\overline{x}$:

$$\overline{\alpha}f(\overline{x}) = \overline{\alpha}.f\left(\sum_{i=1}^{k-1}\overline{\alpha}_i x_i\right) \leq \overline{\alpha}\sum_{i=1}^{k-1}\overline{\alpha}_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i f(x_i).$$

O conjunto descrito por (i) é chamado de simplex unitário de $\mathbb{R}^k$. Uma coleção de α_i's satisfazendo (ii) é chamado de multiplicadores convexos e o correspondente x = $\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i x_i$ é uma combinação convexa dos x_i's.

Aplicação 1: Sabemos que a função – ln é convexa em (0, +∞). Então, vale a desigualdade de Jensen:

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right) \leq -\sum_{i=1}^{k}\alpha_i \ln x_i = -\sum_{i=1}^{k}\ln x_i^{\alpha_i} = -\ln\left(\prod_{i=1}^{k}x_i^{\alpha_i}\right),$$

para todos $x_i > 0$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ no simplex unitário. Através da monotonicidade da função exponencial, obtemos

$$\prod_{i=1}^{k}x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i.$$

No caso particular em que $\alpha_i = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$, temos a clássica desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.\blacksquare$$

Aplicação 2: Veja que a função f(x) = x.lnx é convexa em (0, +∞) pois f'(x) = logx + 1 e f''(x) = 1/x de modo que f''(x) > 0 para todo x em (0, +∞). Aplicando a desigualdade de Jensen, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k}\alpha_i (x_i ln x),$$

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right)^{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i} \leq \sum_{i=1}^{k} ln x_i^{\alpha_i x_i} = \ln\left(\prod_{i=1}^{k}x_i^{\alpha_i x_i}\right).$$

Como a função ln é crescente, temos$\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right)^{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i} \leq \prod_{i=1}^{k}x_i^{\alpha_i x_i}$.■

Aplicação 3. ($M_A \geq M_G$ generalizada) Sejam x_1, x_2, ..., x_n números reais não negativos e $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, com os a_i's números positivos. Vale que:

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{a_i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i,$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Demonstração: Observe inicialmente que se existir i para o qual $x_i = 0$ a desigualdade vai valer, com a igualdade se verificando se $x_i = 0$, $\forall i = 1,2,...n$. Assim, vamos supor x_1, x_2, ..., x_n números reais positivos e $a_1 = a_2 = ... = n_a$ números reais positivos, com $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Usando o fato de f(x) = ln(x) ser uma função côncava (pois $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$) e aplicando as desigualdade de Jensen obtemos:

$$a_1 \cdot ln(x_1) + a_2 \cdot ln(x_2) + \cdots + a_n \cdot ln(x_n) \leq ln(a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n) \Longrightarrow$$
$$ln(x_1)^{a_1} + ln(x_2)^{a_2} + \cdots + ln(x_n)^{a_n} \leq ln(a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n) \Longrightarrow$$
$$ln((x_1)^{a_1} \cdot ln(x_2)^{a_2} \cdot ... \cdot (x_n)^{a_n}) \leq ln(a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n)$$

e pelo fato de f ser crescente, vale o resultado que queremos.

4.1.7 Desigualdade de Young

Proposição 1.8: Sejam a e b reais não-negativos e p, q > 1 satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab,$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se $a^p = b^q$.

Prova: Usando a desigualdade $M_A \geq M_G$ generalizada para os números $x_1 = a^p, x_2 = b^q$ e $w_1 = \frac{1}{p}, w_2 = \frac{1}{q}$, temos:

$$\prod_{i=1}^{2}(x_i)^{w_i} \leq \sum_{i=1}^{2} w_i \cdot x_i,$$

chegamos a

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq (a^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b^q)^{\frac{1}{q}} = ab. \blacksquare$$

4.1.8 Desigualdade de Holder

Proposição 1.9 Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n e y_1, y_2, \ldots, y_n$ números não negativos e p, q > 1, satisfazendo$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i < (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum_{i=1}^{n} y_i^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)\ e\ (y_1^q, y_2^q, \ldots., y_n^q)$ forem proporcionais.

Demonstração: Sejam u = $(\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} e v = (\sum_{i=1}^{n} y_i^q)^{\frac{1}{q}}$. Pela desigualdade de Young,

$$\frac{x_i}{u}\frac{y_i}{v} \leq \frac{1}{p}(\frac{x_i}{u})^p + (\frac{y_i}{u})^q, \text{ para i = 1,2,...,n.}$$

Isto implica em

$$\frac{1}{uv}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \leq \frac{1}{pu^p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p\right) + \frac{1}{qv^q}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^q\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{uv}{pu^p}(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p) + \frac{uv}{qv^q}(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^q) = \frac{uv}{p} + \frac{uv}{q} = uv.$$

4.1.9Desigualdade de Minkowsky

Proposição 1.1.10: Sejam$x_1, x_2, \ldots, x_n e y_1, y_2, \ldots, y_n$ números não negativos e p > 1 então

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i-1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Com a desigualdade ocorrendo se, e somente se, $(x_1, x_2, \dots, x_n)\ e\ (y_1, y_2, \dots, y_{n)}$ forem proporcionais.

Demostração: Para a demonstração desta desigualdade considere a identidade abaixo e nela façamos $z_i = (x_i + y_i)^{p-1}$. Então,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i.$$

Usando a desigualdade de Holder obtemos,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p \leq \sum_{i-1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}} =$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right]^{1-\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{i-1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}] =$$

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{1}{p}}} \cdot \left[\sum_{i-1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}].$$

Donde,

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i-1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

4.2 ALGUMAS APLICAÇÕES DE DESIGUALDADES ALGÉBRICAS

1) Dispondo de 80 metros de arame um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar animais. Qual a área máxima que tal cercado pode assumir admitindo que lado que faz fronteira com o rio *não será* cercado para que os animais possam usar a água do rio para beber?

Figura 5- Problema do fazendeiro

Fonte: Elaborado pelo autor

Solução:

Sejam os lados do retângulo x e y, de sorte que, sem perda de generalidade, $x \leq y$ *(caso contrário seria totalmente análogo)*. Visto que o perímetro da cerca é 80 m, temos que $2x + y = 80$. Usando a desigualdade das médias, segue:

$$\frac{2x+y}{2} \geq \sqrt{2xy}.$$

Dado $2x + y = 80$, então: $\sqrt{2xy} \leq 40$. Elevando ambos os membros ao quadrado, resulta $2xy \leq 1600 \Leftrightarrow xy \leq 800$. Como a área do cercado retangular é expressa por xy, concluímos que a área máxima que tal cercado pode atingir é $800m^2$ ocorrendo quando $y = 2x$, donde $x = 20m$ e $y = 40m$.

Outra solução para tal problema (mais voltada a educação básica) é escrever y como função de x na igualdade $2x + y = 80$, ou seja, $y = 80 - 2x$. Assim, a área S do cercado expressa em função de x será $S = x(80-2x) = -2x^2 + 80x$, cujo valor máximo é dado pela expressão

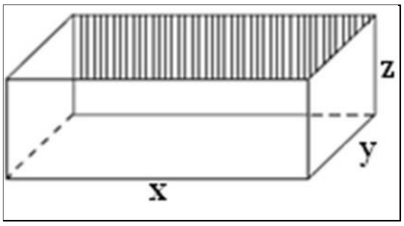
$\max\{S\} = -\frac{6400}{4(-2)} = \frac{6400}{8} = 800$. Uma terceira solução pode ser dada via derivadas, que deixaremos a critério do leitor.

2) Dentre todos os sólidos retangulares sem “tampa” com área de superfície pré-fixada, encontrar aquele que limita o volume máximo.

Solução:

Sejam x, y e z os comprimentos das arestas do paralelepípedo (Figura 5) e *“S”* sua área superficial.

Figura 6- Problema do paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor

Então, $S = xy + 2xz + 2zy$, pela desigualdade entre as médias, temos que:

$$\left(\frac{S}{3}\right)^3 = \left(\frac{xy+2xz+2zy}{3}\right)^3 \geq 4x^2y^2z^2.$$

Assim, para o volume $V = xyz$ do sólido temos que $V \leq \frac{1}{2}\left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$. Portanto o volume máximo é atingido quando ocorre a igualdade, ou seja, quando $xy = 2xz = 2zy$. O último resultado implica que as arestas do sólido com volume maximal são unicamente determinadas e expressas por

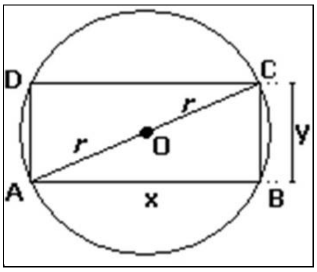
$$x = y = \sqrt{\frac{S}{3}} \text{e} z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}.$$

3) Prove que, dentre todos os retângulos inscritíveis a um círculo de raio "r" fixo, o quadrado é aquele que delimita maior área.

Solução:

Denote por x e y as dimensões do citado retângulo e fixe um real $r > 0$ como raio do círculo no qual o retângulo estará inscrito (Figura 6). Dessa forma a área limitada pelo retângulo será expressa por $S= xy$.

Figura 7- Retângulo inscrito



Fonte: Elaborado pelo autor

Invocando o Teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos que:

$$(2r)^2 = 4r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{(i)}$$

Por outro lado, pela desigualdade das médias, temos também que:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$(x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \ \textbf{(ii)}$$

Por (i) e (ii) conclui-se que $4r^2 \geq 2xy$ e daí que $S = xy \leq 2r^2$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = y$, isto é, se *ABCD* for um quadrado inscrito no círculo.

Comentário: Uma solução alternativa para o problema acima pode ser apresentada através de trigonometria, semelhante ao método de coordenadas polares utilizado nas soluções de integrais. Seja então α a medida do ângulo CÂB na figura 1.3. No triângulo *ABC, retângulo em B*, temos $x = 2r \cdot \cos\alpha$ e $y = 2r \cdot \text{sen}\,\alpha$. Assim, a área $S = xy$ do retângulo *ABCD* pode ser expressa por $S = x.y = (2r.\cos\alpha).(2r.\text{sen}\,\alpha) = 2r^2\,(2\text{sen}\alpha\,\cos\alpha) = 2r^2\text{sen}(2\alpha) \leq 2r^2$ pois qualquer α dado, $\text{sen}(2\alpha) \leq 1$ (o seno é uma função limitada superiormente). Segue o resultado.

O estudo das desigualdades (sejam elas de natureza algébricas, aritméticas ou geométricas) podem ser tratadas a luz trigonometria de forma mais eficaz e direta, fazendo substituições e mudanças de variáveis que auxiliam na melhor compreensão e solução do problema, além de primar o contexto geométrico do mesmo. Um bom artificio para resolver problemas de maximar ou minimizar expressões envolvendo trigonometria é reescrever a expressão resultante, em uma expressão em termos de um único seno (ou cosseno), para que se possa usar o fato de que este é limitado superior e inferiormente, isto é,$|senx|$ ≤ ($|\cos x|$ ≤ 1.

Observemos então alguns problemas com tal abordagem.

4) Para reais positivos satisfazendo *a* + *b* + *c* = *abc*, mostre que $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$, e determine quando a igualdade ocorre.

Solução: Sendo *a*,*b* e *c* reais positivos existem α, βe γ em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$*para os quais*

$$a = tg\alpha \qquad b = tg\beta \qquad c = tg\gamma.$$

Assim, teremos que

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}} + \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\gamma}}.$$

Da trigonometria elementar, nos vem os seguintes resultados:

$$l + tg^2x = \sec^2 x \text{ onde } \sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ qualquer que seja } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Logo,

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

Sabemos que em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a função consseno é côncava, haja vista que cos”*x* = -

$\cos x \leq 0$. Decorre da desigualdade de *Jensen* que $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3} \leq \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$.

Supomos por hipótese que $a + b + c = abc$, *o que implica em* $tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha \,.tg\beta \,.tg\gamma$.

Com um pouco mais de trabalho e usando por duas vezes a tangente do arco duplo obtemos uma expressão para determinar a tangente do arco soma de três arcos α, β, γ em função das três tangentes dadas, a saber:

$$tg\,(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma - tg\alpha\,.tg\beta\,.tg\gamma}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta - tg\beta \cdot tg\gamma - tg\alpha \cdot tg\gamma}\ .$$

Vemos então que $tg(\alpha + \beta + \gamma) = 0$ e $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Concluímos então que $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3} \leq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$donde $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$ e, por fim que

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}\ ,$$

onde igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ ou seja $a = b = c = \sqrt{3}/2$

5) Obtenha o valor máximo de$3x + 4y$ dado que $x^2 + y^2 = 16$ onde x e y são números reais.

Solução:

Dados x e y reais sabemos que existe algum θ o qual satisfaz

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ e } sen\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Assim, sendo $S = 3x + 4y$, tem-se que $\frac{S}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Daí $\frac{S}{4} = 3.\cos\theta + 4.sen\theta$ e consequentemente $S = 4.(3\cos\theta + 4sen\theta)$.

(I).

Admita agora um triângulo retângulo PQR de sorte que seus catetos meçam 3 u.a e 4 u.a. Por Pitágoras sua hipotenusa medirá 5 u.a. Denotemos por αum ângulo agudo interno à ABC. Segue que cos $\alpha = \frac{4}{5}$ e *sen*$\alpha = \frac{3}{5}$. Sem perda de generalidade escrevamos$4 = 5sen\, \alpha$ e $3 = 5\cos\alpha$.

Substituindo em (I):

$S = 4.(5sen\alpha.\cos\theta + 5\cos\alpha.sen\ \theta) = 20\cdot(sen\alpha.\cos\theta + \cos\alpha.sen\theta)$.

Pela expressão que denota o seno da soma dos arcos obtermos $sen\alpha.\cos\theta + \cos\alpha.sen\theta = sen(\alpha + \theta)$, por onde conclui-se que $S = 20.sen\ (\alpha + \theta)$. Para qualquer θ nos reais é certo que$|sen\ \theta| \leq 1$, então$|sen\ (\alpha + \theta)| \leq 1$ ou ainda $-1 \leq sen(\alpha + \theta) \leq 1$.

Manipulando a expressão acima, temos:

$-20 \leq 20.sen(\alpha + \theta) \leq 20 \Leftrightarrow -20 \leq S \leq 20 \Leftrightarrow -20 \leq 3x + 4y \leq 20$.

Logo o valor *máximo para $3x + 4y$*é 20 ao passo que o valor mínimo é -20. Segue o resultado.

Tal problema também pode ser atacado mediante o uso da desigualdade de *Cauchy-Schwarz* para *dimensão 2*, pois é válida a desigualdade$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2)^2$ .Tomando$x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $y_1 = x$, $y_2 = y$, temos: $(3x + 4y)^2 \leq (3^2 + 4^2).(x^2 + y^2) = (9+16).16=25.16=400$.
Daí, $|3x + 4y| \leq 20$. Logo $-20 \leq 3x + 4y \leq 20$, conforme já havíamos concluído na solução anterior.

Tal valor é alcançado quando existe um real positivo λ, tal que $x = 3\lambda$ e $y = 4\lambda$ onde conclui-se facilmente que$\lambda = \frac{4}{5}$ e por consequência $x = \frac{12}{5}$e$y = \frac{16}{5}$.

6) Um quadrado ABCD de lado Le um triângulo PQR de lados a, b e c tem numericamente a mesma área. Determine qual dentre esses polígonos tem o menor perímetro. Existe alguma condição com a qual esses perímetros sejam também numericamente iguais?

Solução:

Dados a, b e c medidas dos lados do triângulo PQR e L a medida do lado do quadrado ABCD temos que $2p = a + b + c$ e $\sqrt{p\ (p-a)(p-b)(p-c)}$ são o perímetro e a área do triângulo, respectivamente, ao passo que $4L$ e L^2 são seus equivalentes do quadrado. Por hipótese temos:

$$\sqrt{p\ (p-a)(p-b)(p-c)} = l^2,$$

Que equivale a escrever

$$p\ (p-a)(p-b)(p-c) = l^4 \qquad \text{(i)}$$

Pela desigualdade das médias:

$$\sqrt[4]{p\ (p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{p+(p-a)+(p-b)+(p-c)}{4} = \frac{4p-(a+b+c)}{4} = \frac{4p-2p}{4} = \frac{2p}{4},$$

$$p\ (p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{2p}{4}\right)^4.$$

Por (i), conclui-se que $l \leq \frac{2p}{4} \Leftrightarrow 2p \geq 4l$. Isso mostra que o perímetro do triangulo é maior que o perímetro do quadrado. Quanto a suposta igualdade, a mesma só ocorreria se, ainda pela desigualdade das médias para fins de igualdade:

$$(p-a) = (p-b) = (p-c) = p \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

O que nos leva a um absurdo. A desigualdade se restringe a $2p > 4l$ e, portanto, o triângulo sempre tem o maior perímetro numérico.

5 DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS

Trataremos aqui de desigualdades geométricas, algumas mais triviais e outras menos imediatas sempre observando suarelevância e aplicações nas diversas áreas e campos das ciências, em particular a Matemática.

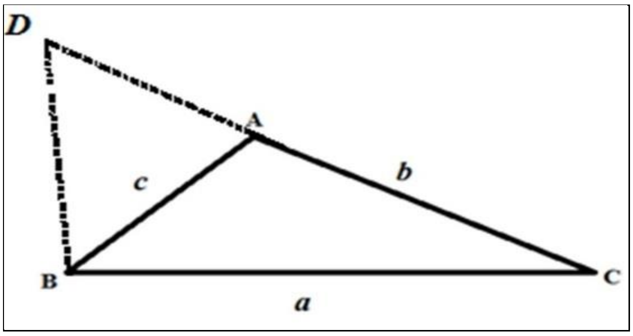
O estudo das desigualdades geométricas remonta temporalmente dos primórdios da própria geometria. O livro I de *Os Elementos*, atribuído a Euclides de Alexandria, apresenta uma gama vasta de resultados acerca de desigualdades entre lados e ângulos de um triângulo, com destaque à Proposição XX, enunciada como: “a soma de dois lados é maior do que o terceiro” que observada como um teorema se faz basilar para tantas outras de igual força e relevância nos estudos de polígonos planos. Um belo resultado que trataremos ao decorrer desse capítulo diz respeito a uma desigualdade entre entre o circunraio R e o inraio r de um triângulo, a saber $R \geq 2r$, atribuída à Euler em 1765.

5.1 ALGUMAS DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS

5.1.1 Desigualdade triangular

Proposição 2.1:A soma das medidas dos comprimentos de quaisquer dois lados de um triângulo dado é superior à medida do terceiro lado.

Figura 8- Desigualdade triangular



Fonte: Elaborada pelo autor

Observando a *figura8acima,* temos então que $\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases}$.

Vale observar que cada um lado tem medida maior que o módulo da diferença das medidas dos outros dois lados.

$$\begin{cases} a > |b - c| \\ b < |a - c| \\ c < |a - b| \end{cases}.$$

Demonstração:

Considere D um ponto sobre a semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{AC}$ satisfazendo*AD* = *AB* (i)

Temos:

$$DC = AC+AD \overset{(i)}{\Rightarrow} DC = AC+AB \quad \text{(ii)}.$$

Observando a figura perceba que ABD é isósceles de base $\overline{BD}$. Implicando que $\angle C\hat{D}B = \angle A\hat{B}D$. Como A é interno ao ângulo $C\hat{B}D$, então $\angle C\hat{B}D > \angle A\hat{B}D$ de onde concluímos que$\angle C\hat{B}D > \angle C\hat{D}B$ (iii).Já em BCD, de posse de (iii) e cientes que o menor ângulo corresponde o menor lado, temos $BC<DC$ e por (ii), temos que $BC<AC+AB$, ou simplesmente, $a<b + c$ *(desigualdade triangular)*.De forma análoga, podemos mostrar que $b<a + c$ (I) e $c<a + b$ (II). Observamos ainda que, por (I), $a>b - c$, e por (II), $a>c - b$. De qualquer modo, $a < |b - c|$. Analogamente verifica-se que $b<|a-c|$ e $c<|a - b|$.

5.1.2 Desigualdade de Weitzenböck

Proposição 2.2: Sejam *a*, *b* e *c* as medidas dos lados de um triângulo *ABC* e *S* a medida de sua área. Então $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3S}$, e a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo *ABC* for equilátero.

PROVA:

Pela *desigualdade triangular* temos:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c - a > 0 \\ a + c - b > 0. \\ a + b - c > 0 \end{cases}$$

Pela desigualdade das médias temos ainda que temos

$$\frac{(b+c-a)+(a+c-b)+(a+b-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)},$$

De onde concluímos que

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \text{ (i).}$$

Em contraponto, para quaisquer reais positivos a, b e c são válidas

$\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ a^2 + c^2 \geq 2ac \end{cases}$. Somando membro a membro obtemos:

$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac) \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ac)$

$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = \sqrt{(a + b + c)^4} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{\frac{1}{9}\,(a + b + c)^4} \Leftrightarrow$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} \quad \text{(ii).}$$

Substituindo (i) em (ii), teremos:

$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)} =$

$\sqrt{6p \cdot (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}$

onde $2p = a+b+c$ é o perímetro de ABC. Dai:

$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3 \cdot 16p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$

$= 4\sqrt{3} \cdot S$,visto que $\sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)} = S$.

A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c$ e notamos que ABC for equilátero.

Apresentamos logo abaixo uma solução com abordagem mais voltada ao uso da trigonometria:

Solução trigonométrica:

Seja α a medida do ângulo interno correspondente ao vértice A, e assim oposto ao lado de medida a. Segundo a Lei dos cossenos, temos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha$. Adicionando $b^2 + c^2$ aos membros da sentença, temos:$a^2 + b^2 + c^2 = 2(b^2 + c^2) - 2bc.\cos\alpha$ (i)

A trigonometria ainda nos dá $S = \frac{1}{2}.b.c.sen\alpha$. Decorre $4\sqrt{3}.S = 2\sqrt{3}.b.c.sen\alpha$ (ii)

Fazendo (i) - (ii), obtemos:

$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S = 2.(b^2+c^2) - 2.b.c.\cos\alpha - 2\sqrt{3}.b.c.sen\alpha = 2(b^2 + c^2) - 4bc\left(\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot sen\,\alpha\right) = 2.(b^2 + c^2) - 4.b.c.cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \geq 2.(b^2 + c^2) - 4bc = 2.(b - c)^2 \geq 0$.

Logo, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3S}$,de sorte que a igualdade decorre se, e só, $cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ e $b = c$. E isso só ocorre se, e somente se, ABC for um triângulo equilátero.

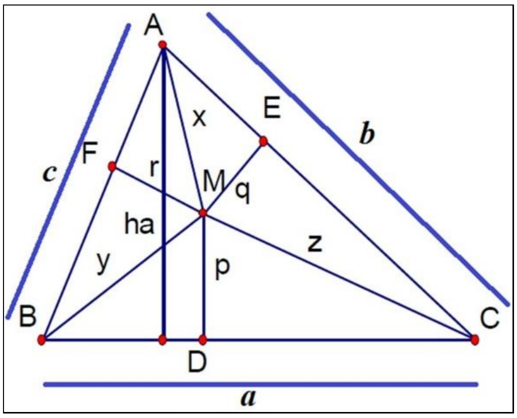
5.1.3 Desigualdade de Erdös-Mordell

Proposição 2.3: Seja ABC um triângulo qualquer, de lados medindo *a*, *b* e *c*, e M um ponto interior, tal que$x$ = AM, y = BM e z = CM. Então, sendo *p*, *q* e *r*, respectivamente, as distâncias de M até os lados BC, AC e AB, então vale a seguinte desigualdade: $x + y + z \geq 2(p + q + r)$.

Demonstração:

Na figura *9*, h_a denota a distância de A até BC. Temos: $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$. Como *S* pode ser obtida como soma das áreas de BMC, AMC e AMB, segue que $a \cdot h_a = 2S = ap + bq + cr$.

Figura 9- Desigualdade de Erdös-Mordell



Fonte: Elaborada pelo autor

Sendo $h_a \leq p + x$, $a\,(p + x) \geq ah_a = ap + bq + cr \Rightarrow ax \geq bq + cr \Rightarrow$ x $\geq \frac{bq}{a} + \frac{cr}{a}$ (i)

Analogamente obtemos as desigualdades y$\geq \frac{pb}{c} + \frac{ar}{c}$(ii) e $z \geq \frac{aq}{b} + \frac{cp}{cb}$(iii).

Somando membro a membro as três desigualdades formuladas acima temos:

$x + y + z \geq\ p\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + q\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + r\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2p + 2q + 2r = 2(p + q + r)$,

usando acima o fato que a soma de um número com seu inverso é sempre maior ou igual a 2 (consequência direta da desigualdade das médias).

Nota histórica: Essa demonstração foi apresentada em um problema proposto por *Paul Erdös* (1913-1996), em 1935 American *Mathematical Montly*e resolvida por *Louis Joel Mordell* (1888-1972). Em 1957, Nikolas Kazarinoff e em 1958 Bankoff apresentaram demonstrações mais elementares abrindo o leque superiora 20 demonstrações distintas para essa desigualdade.

5.1.4 Desigualdade de *Euler*

Proposição 2.4: Sejam $R > 0$ e $r > 0$ raios do circuncírculo e do incírculo de um triângulo qualquer *ABC*, respectivamente, de lados *a*, *b* e *c*. Vale a desigualdade: $R \geq 2r$. Ocorre a igualdade se e somente se o triangulo for equilátero.

Demonstração:

Denote por *S* a área do triangulo *ABC*. Então a geometria nos dá três possibilidades para escrevermos sentenças para S:

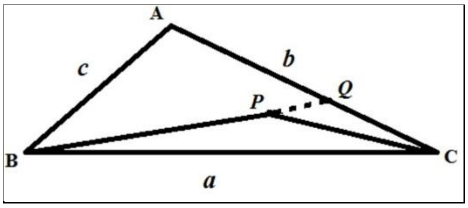
$abc = 4RS$, $S = pr$, $S^2 = p(p - a)(p – b)(p – c)$.

Perceba que $(a + b – c).(b + c – a).(c + a – b) \leq abc$ (i), bastando tomar $x = a + b – c$, $y = b + c – a$ e $z = a + c – b$ e daí concluir que $2a = y + z$, $2b = x + z$ e $2c = x + y$. Pela desigualdade das médias obtemos: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $x + z \geq 2\sqrt{xz}$ e $y + z \geq 2\sqrt{yz}$. Multiplicando as desigualdades, temos que $(x + z).(y + z).(x + y) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{xz} \cdot 2\sqrt{yz} = 8xyz$, ou seja, $(a + b – c)(b + c – a)(c + a – b) \leq abc$.
Por (i) temos que $(2p – 2a).(2p – 2b).(2p – 2c) \leq abc \Leftrightarrow 8(p – a).(p – b).(p – c) \leq abc$. Daí, $\left(\frac{8S^2}{p}\right) \leq 4RS \Leftrightarrow 2S \leq pR$. Como $S = pr$, então $pR \geq 2pr \Leftrightarrow R \geq 2r$.
Para a igualdade devemos ter x = y = z donde decorre que a = b = c e portanto ABC é equilátero.

Apresentemos abaixo alguns outros problemas e resultados que versam sobre desigualdades geométricas e suas aplicações.

P1) Seja P é um ponto interno ao triângulo ABC. Demostre a desigualdade PB + PC < AB + AC.

Figura 10: Triângulo qualquer



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração: Observe o triangulo apresentado acima. Prolongue o segmento$\overline{BP}$ de sorte que este intercepte o segmento $\overline{AC}$ no ponto Q conforme a figura. Aplicando a desigualdade triangular, temos: $AB + AQ > BQ = BP + PQ$ (i) e $PQ + QC > PC$ (ii). Adicionando membro a membro das desigualdades (i) e (ii) obtemos $AB + PQ + AQ + QC > BP + PC + PQ.$ Usando o fato que $AQ + QC =$

AC, concluímos por fim que *PB* + *PC* < *AB* + *AC*.

P2) Dados *p*, *R* e *r* como sendo respectivamente o *semiperímetro*, o *cincunraio* e *inraio* de triângulo ABC qualquer de lados a, b e c deduza a desigualdade

$$\left|p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2\right| \leq 2\,(R - 2r)\sqrt{R\,(R - 2r)}.$$

Prova: Inicialmente temos que

$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \frac{p^3 - p^2(a+b+c) + p\,(ab+bc+ac) - abc}{p} = -p^2 + ab + bc + ac - 4Rr$

Daí, $\sigma_2 = ab + bc + ac = p^2 + r^2 + 4Rr$. Sendo $\sigma_1 = a + b + c = 2p$ e $\sigma_3 = abc = 4pRr$.

Abrindo as contas, temos:

$$(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2 =$$

$$= -4r^2\left((p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2 - 4R\,(R-2r)^3\right).$$

Assim, $(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2 - 4R\,(R-2r)^3 \leq 0$ que equivale a desigualdade $|p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2| \leq 2\,(R - 2r)\sqrt{R\,(R-2r)}$, como queríamos demonstrar.

P3) Sejam lados de um triângulo ABC medindo a, b e c. Verifique que 3(*bc* + *ac* + *ab*) ≤ (*a* + *b* + *c*)²<4.(*bc* + *ac* + *ab*), ocorrendo a igualdade quando *ABC* for equilátero e reciprocamente.

Demonstração: É fácil ver que $2bc \leq b^2 + c^2$, $2ab \leq a^2 + b^2$ e $2ac \leq a^2 + c^2$. Somando as três desigualdades citadas, temos $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab+bc+ac)$. Adicionando $4(ab+bc+ac)$ a essa sentença, temos: $2(a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)) \geq 6(ab + bc + ac) \Leftrightarrow (a + b + c)^2 \geq 3.(ab+bc+ac)$, com igualdade se, e só se, $a = b = c$. Reciprocamente sendo *a*, *b* e *c* lados de um dado triângulo, pela desigualdade triangular temos: $|b - c| < a$, $|c - a| < b$ e $|a - b| < c$. Logo $(b - c)^2 < a^2$,

($c - a)^2 < b^2$ e $(a - c)^2 < c^2$. Somando as desigualdades acima temos $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$ donde $(a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ac)$. Por fim, segue que $3(ab + bc + ac) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ac)$, concluindo nossa demonstração.

P4) Sejam: ABC um triângulo; *a*, *b* e *c* as medidas de seus lados e 2p = *a* + *b* +*c*. Demonstre que vale a desigualdade $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36}{35}\left(p^2 + \frac{abc}{p}\right)$ ocorrendo a igualdade se e só se *ABC* for equilátero.

Demonstração: Como deduzimos anteriormente, temos $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}.(a + b + c)^2$, com igualdade ocorrendo quando $a = b = c$. Tomando $a + b + c = 2p$ vemos que $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}p^2$.Recorrendo a desigualdade das médias obtemos abc $\leq \left[\frac{1}{3}(a + b + c)\right]^3 = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$.

Logo $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}p^2 = \frac{36}{35}\left[p^2 + \left(\frac{2p}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{p}\right] = \frac{36}{35}\left[p^2 + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{p}\right] \geq \frac{36}{35}\left(p^2 + \frac{abc}{p}\right)$. Com igualdade ocorrendo se *ABC* for equilátero e reciprocamente.

P5) Seja ABC um triângulo de lados *a*, *b* e *c*, e cujos ângulos internos respectivamente opostos são denotados por α, β e γ. Mostre que:

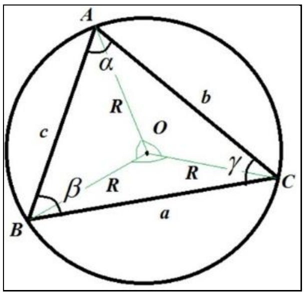
$$\mathbf{0 < sen\,\alpha + sen\,\beta + sen\,\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.}$$

Demonstração: Temos $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ o que nos dá $sen\,\alpha > 0$, $sen\,\beta > 0$ e $sen\,\gamma > 0$ e de imediato $sen\,\alpha + sen\,\beta + sen\,\gamma > 0$. A função $f(x) = senx$ é claramente côncava no intervalo $(0, \pi)$ haja vista que $sen''x = cos'x = -senx < 0$. Pela desigualdade de Jensen temos: $\frac{sen\alpha + sen\beta + sen\gamma}{3} \leq sen\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ visto que são ângulos internos de um triangulo.Logo $sen\,\alpha + sen\,\beta + sen\,\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ e portanto $0 < sen\,\alpha + sen\,\beta + sen\,\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ como desejávamos. Ocorre a igualdade se, e só se, $\alpha = \beta = \gamma$.

P6) Seja ABC conforme o problema anterior e figura abaixo. Prove que $\boldsymbol{sen\,\alpha} + \boldsymbol{sen\,\beta} + \boldsymbol{sen\,\gamma} \geq$ *sen*(2α) +*sen*(2β) +*sen*(2γ).

Resolução: A Lei dos Senos nos oferta que $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R \Leftrightarrow sen\,\alpha + sen\,\beta + sen\,\gamma = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{S}{rR}$. (i)

Figura 11- Triângulo inscrito



Fonte: Elaborada pelo autor

Da formula do seno do arco duplo temos *sen*(2α) +*sen*(2β) +*sen*(2γ) = 2(*sen*α.cosα +*sen*β.cosβ +*sen*γ.cosγ) = $\frac{1}{R}$ (*a*.cosα + *b*.cosβ +*c*.cosγ). Visto que *a*.cosα + *b*.cosβ +*c.*cosγ= $\frac{2S}{R}$, temos *sen*(2α) +*sen*(2β) +*sen*(2γ) = $\frac{2S}{R^2}$. (ii)

Dividido (i) por (ii) segue que:

$\frac{sen\,\alpha + sen\,\beta + sen\,\gamma}{sen(2\alpha) + sen(2\beta) + sen(2\gamma)} = \frac{\frac{S}{Rr}}{\frac{2S}{R^2}} = \frac{S}{Rr} \cdot \frac{R^2}{2S} = \frac{R}{2r} \geq 1$, pois*R* ≥ 2*r* decorrente da *Desigualdade de Euler*. Segue o resultado.

6 UM TRATAMENTO PARA PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS VIA DESIGUALDADES

6.1 PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS

1) Dentre todos os retângulos de perímetro pre-fixado, a área máxima corre no quadrado.

Demonstração: Representemos por *x e y* a medida do comprimento dos lados do retângulo de um retângulo ABCD qualquer. Identifiquemos seu perímetro por *P* donde vem *P* = 2(*x* + *y)*. Advém da desigualdade das médias que $\frac{2x+2y}{2}$ $\geq\sqrt{2x\ \cdot 2y}\Leftrightarrow\frac{P}{2}\geq 2\sqrt{xy}\therefore\sqrt{xy}\leq\frac{P}{4}\Leftrightarrow xy\leq\frac{P^2}{16}$ onde ocorre a igualdade se, e somente, $x = y = \frac{P}{4}$, o que nos leva a concluir que o retângulo em questão é de fato um quadrado cuja medida do lado é $\frac{P}{4}$.

2) Dentre todos os triângulos de perímetro conhecido é o equilátero que apresenta maior área.

Demonstração: Consideremos para tanto um triângulo ABCde lados com comprimentos *a*, *b* e *c* identificando o perímetro como 2*p* = *a* + *b* + *c*. Por *Heron* a área de ABC é expressa por S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Aplicando a desigualdade das médias, temos:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}\leq\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}=\frac{p}{3}.$$

Por isso,

$$S\leq\sqrt{p\left(\frac{p}{3}\right)^3}=\frac{p^2\sqrt{3}}{9}.$$

Ocorrendo igualdade se, e somente se $(p-a) = (p-b) = (p-c)$ implicando em *a* = *b* = *c*. Logo a maior área ocorre no triangulo equilátero.

3) Observados os paralelepípedos reto-retângulos de área fixada, o cubo apresenta maior volume.

Demonstração: Denotemos por *x*, *y* e *z* o comprimento das medidas de cada uma das arestas do paralelepípedo citado. Sua área *S* é tal que $S = 2xy + 2xz + 2yz$ e seu volume *é* dado por $V = xyz$. Pela desigualdade das médias, temos $\frac{2xy+2xz+2yz}{3} \geq \sqrt[3]{2xy \cdot 2xz \cdot 2yz} \Leftrightarrow \frac{S^3}{27} \geq 8x^2y^2z^2$. Segue que $V^2 \leq \frac{1}{8}\left(\frac{S}{3}\right)^3$ donde $V \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$. Temos então que o volume é máximo ocorrendo a igualdade sobre a condição $xy = xz = zy \Leftrightarrow x = y = z$, isto é, se paralelepípedo for de fato um *cubo*.

4) Dados todos os quadriláteros de *lados fixos* aquele que admite maior área é o cíclico ou *inscritível*.

Demonstração: Provemos inicialmente uma fórmula para a área de um quadrilátero Convexo ABCD de lados fixos *a* = AB, *b* = BC, *c* = CD e *d* = DA cujo perímetro denotaremos por $2p = a + b + c + d$.

LEMA: A área de ABCD é expressa por

$$S_q = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c) - \frac{abcd(1+\cos(\hat{A}+\hat{C}))}{2}}.$$

Prova: Traçando a diagonal BD = *x*, através de BD fatiamos ABCD em dois triângulos ABD e CBD. Assim suas áreas ficam definidas como:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}ad \cdot sen\hat{A}$$
$$S_{CBD} = \frac{1}{2}bc \cdot sen\hat{C}.$$

Visto que $S_q = S_{ABD} + S_{CBD}$ temos:

$S_q = \frac{1}{2}ad \cdot sen\hat{A} + \frac{1}{2}bc \cdot sen\hat{C} \Leftrightarrow 2S_q = ad \cdot sen\hat{A} + bc \cdot sen\hat{C}.$

Logo:

$(2S_q)^2 = (ad \cdot sen\hat{A} + bc \cdot sen\hat{C})^2 = a^2d^2\, sen^2\, \hat{A} + b^2c^2\, sen^2\, \hat{C} + 2abcd \cdot sen\hat{A} \cdot sen\hat{C}.$

Logo:

$4S_q^2 = a^2d^2\, sen^2\, \hat{A} + b^2c^2\, sen^2\, \hat{C} + 2abcd \cdot sen\hat{A} \cdot sen\hat{C}$. (i)

Aplicando a lei dos Cossenos em ABD, segue que:

$$x^2 + a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\hat{A}.$$

E agora em CBD obtemos:

$$x^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{C}.$$

Concluímos pois que:

$$a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{C}.$$

E portanto:

$2ad \cdot \cos\hat{A} - 2bc \cdot \cos\hat{C} = a^2 + d^2 - b^2 + c^2 \Rightarrow (2ad \cdot \cos\hat{A} - 2bc \cdot \cos\hat{C})^2 = (a^2 + d^2 - b^2 + c^2)$

$\therefore 4a^2d^2 \cdot \cos\hat{A} + 4b^2c^2 \cdot \cos\hat{C} - 8abcd \cdot \cos\hat{A} \cdot \cos\hat{C} = (a^2 + d^2 - b^2 + c^2)$. Daí,

$a^2d^2 \cdot \cos\hat{A} + b^2c^2 \cdot \cos\hat{C} - 2abcd \cdot \cos\hat{A} \cdot \cos\hat{C} = \frac{(a^2 + d^2 - b^2 + c^2)^2}{4}$. (ii)

Somando (i) e (ii), membro a membro obtemos:

$4S_q^2 + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 + c^2)^2}{4} = a^2d^2\,(\text{sen}^2\hat{A} + \cos^2\hat{A}) + b^2c^2\,(\text{sen}^2\hat{C} + \cos^2\hat{C}) +$

$2abcd \cdot (\text{sen}\hat{A}\text{sen}\hat{C} - \cos\hat{A}\cos\hat{C})$. Portanto,

$4S_q^2 + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 + c^2)^2}{4} = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\cos(\hat{A} + \hat{C})$. Que é equivalente a

$16S_q^2 + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd\cos(\hat{A} + \hat{C})$. Daí,

$16S_q^2 = 4a^2d^2 + 8abcd + 4b^2c^2 - 8abcd - 8abcd\cos(\hat{A} + \hat{C}) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2.$

$16S_q^2 = (2bc - 2ad)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})].$

$16S_q^2 = (2bc + 2ad + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2bc + 2ad - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) -$

$8abcd[1+\cos((\hat{A} + \hat{C})]$

$16S_q^2 = [\,(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2] - 8abcd[1+\cos((\hat{A} + \hat{C})].$

$16S_q^2$ = (a + d – b + c)(a + d + b – c)(b + c – a + d)(b + c + a – d) -8$abcd$[1+cos(($\hat{A}$ + $\hat{C}$)].

Como 2p = a + b + c + d, então:

$16S_q^2$ = (2p – 2a)(2p – 2b)(2p – 2c)(2p – 2d) -8$abcd$[1+cos(($\hat{A}$ + $\hat{C}$)]. Daí,

S_q^2 = (p – a)(p – b)(p – c)(p – d) - $\frac{abcd[1+\cos((\hat{A}+\hat{C})]}{2}$. Logo,

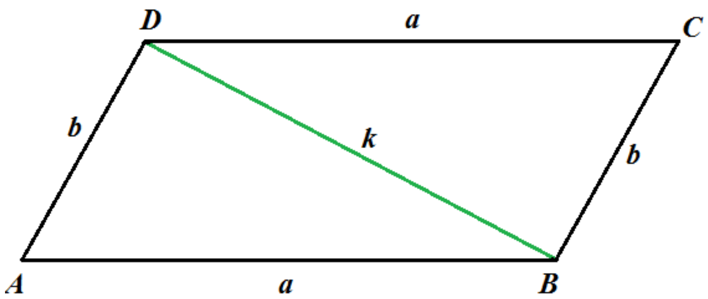
S_q = $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{abcd\,[1+\cos((\hat{A}+\hat{C})]}{2}}$.

Vemos que o valor máximo de S_q ocorrerá no caso em que cos($\hat{A}$ + $\hat{C}$) for mínimo onde certamente cos($\hat{A}$ + $\hat{C}$) = -1. É fácil ver que $\hat{A}$ +$\hat{C}$ = π e concluímos que o quadrilátero dado é *cíclico*.

5) Dentre todos os paralelogramos de lados conhecidos e fixado o comprimento de uma das diagonais, o losango possui área máxima.

Demonstração: Considere o paralelogramo ABCD abaixo e admita BD = k a medida da diagonal BD dada.

Figura 12- Paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor

A área do paralelogramo ABCD é numericamente igual a soma das áreas dos triângulos ABD e CDB (que são congruentes haja vista que AB = a = DC e BC = b = DA e∠DAB = ∠DCB (congruência LAL)). Logo a área de ABCD corresponde ao dobro da área de ABD. Sendo ABD um triângulo qualquer provamos anteriormente que sua área é máxima quando o mesmo for equilátero.

Segue que *a* = *b* e consequentemente ABCD é um losango.

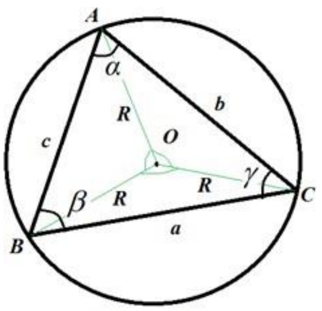
6) Obtenha um trapézio de área unitária de sorte que o comprimento de sua diagonal maior seja mínimo.

Demonstração: Seja ABCD um trapézio de área 1 e tome C_1 e D_1 projeções ortogonais de C e D sobre AB, nessa ordem. Chamemos *h* a altura de ABCD, supondo ainda $AC_1 \geq BD_1$, ou seja, *AC* ≥ *BD*. Dado que $AC_1 + BD_1$ = *AB* + *CD* temos $AC_1 \geq \frac{AB+CD}{2} = \frac{S_{ABCD}}{h} = \frac{1}{h}$. Por Pitágoras, $AC^2 = AC_1^2 + h^2 \geq \frac{1}{h^2} + h^2 \geq 2$ $\Leftrightarrow AC \geq \sqrt{2}$. Observe que $\frac{1}{h^2} + h^2 \geq 2$ vem do fato que a soma de um numero com seu inverso é sempre maior ou igual a 2, decorrência da desigualdade das médias. Provamos então que o menor mínimo para de AC é $\sqrt{2}$.

7) Considere os triângulos inscritos em um círculo de raio R > 0 fixado. O que possui maior área é o equilátero.

Demonstração: Chamemos *a*, *b* e *c*os lados do triângulo ABC inscrito no círculo de centro O e raio R > 0. Sejam também α, β e γ ângulos internos de ABC.

Figura 13- Triângulo inscrito



Fonte: Elaborada pelo autor

Sabemos *que S*= $\frac{abc}{4R}$. Aplicando a Lei dos Senos temos:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R \Leftrightarrow 8R^3 = \frac{abc}{sen\alpha \cdot sen\beta \cdot sen\gamma}.$$

Daí,

$$\frac{4RS}{sen\alpha \cdot sen\beta \cdot sen\gamma} = 8R^3.$$

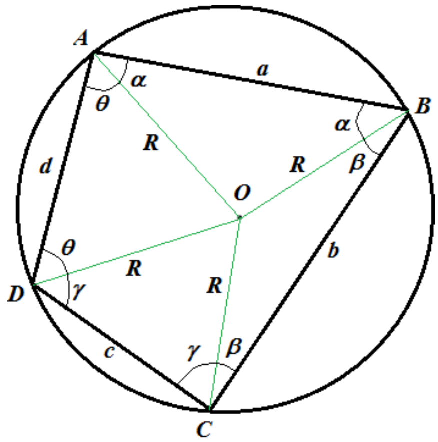
Donde S = $2R^2 \cdot sen\alpha \cdot sen\beta \cdot sen\gamma$. Pela desigualdade das médias, vem $S = 2R^2 \cdot sen\alpha \cdot sen\beta \cdot sen\gamma \leq 2R^2(\frac{sen\alpha+sen\beta+sen\gamma}{3})^3 = \frac{2R^2}{27}(sen\alpha + sen\beta + sen\gamma)^3$.

Como vimos anteriormente, $sen\alpha + sen\beta + sen\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (i).

Segue que S $\leq \frac{2R^2}{27}(sen\alpha + sen\beta + sen\gamma)^3 \leq \frac{2R^2}{27}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}\cdot R^2}{4}$, e tal valor é alcançado em (i), se e somente se $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Logo ABC é equilátero de lados medindo $a = b = c = R\sqrt{3}$.

8) Dentre todos os quadriláteros convexos inscritos em um círculo de raio R > 0, o quadrado possui a maior área.

Figura 14- Quadrilátero ciclico



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração: Identifique por *a* = *AB*, *b* = *BC*, c = *CD* e *d* = *DA* como lados do quadrilátero ABCD, inscrito no círculo de raio *R* > 0 centrado em 0. Trace os raios *AO* = *OB* = *OC* = *OD* = *R.* Construímos aqui OAB, OBC, OCD e ODA triângulos isósceles de lado comum *R* (vide *figura14).*

Na figura observa-se um quadrilátero tal que o centro O é interior a este. Indique comoα, β, γ e θ medidas dos ângulos ∠ABO, ∠BCO, ∠CDO e ∠DAO, nessa ordem e sentido. Usando a *Lei dos senos* em OAB obtemos $\frac{a}{sen(\pi-2\alpha)} = \frac{R}{sen\alpha} \Leftrightarrow a = 2R\cos\alpha$. De forma análoga os triângulos OBC, OCD e ODA nos dão as sentenças b = 2Rcosβ, c = 2Rcosγ e d = 2Rcosθ. Definamos agora por p o semiperímetro de ABCD onde portanto $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ = R(cosα + cosβ + cosγ + cosθ) · (i) A fórmula de *Brahmagupta* (especifica para quadriláteros cíclicos) nos permite escrever $S_{ABCD}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. Pela desigualdade das médias,

Temos $\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)}{4} \geq \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, tendo então $(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)$ = 4p–2p = 2p e por fim $\frac{p}{2} \geq \sqrt{S_{ABCD}} \Leftrightarrow S_{ABCD} \leq \frac{p^2}{4}$. (ii)

Substituindo (i) em (ii) segue que

$$S_{ABCD} \leq \frac{R^2}{4}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\theta)^2.$$

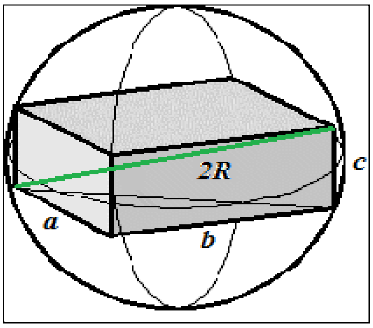
Veja para x em$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a função $f(x)$ = cos$x$ é *côncava* uma vez que $f''(x)$ = -cos$x$ <0 para todo x no fixado intervalo. Suponha sem perda de generalidade que α, β, γ e θ estejam todos em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Usando a *desigualdade de Jensen* temos: $\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\theta)}{4} \leq \cos\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma + \theta}{4}\right)$. Como por hipótese ABCD é cíclico segue que$\alpha + \beta + \gamma + \theta = \pi$. Assim, $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\theta \leq 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

Segue que $S_{ABCD} \leq \frac{R^2}{4}(2\sqrt{2})^2 = 2R^2$ ocorrendo a igualdade $S_{ABCD} = 2R^2$ se, e só se, $\alpha = \beta = \gamma = \theta = \frac{\pi}{4}$. Concluímos assim que *ABCD* é um quadrado cujo lado mede $R\sqrt{2}$. É fácil ver que se um ou dois (mais do que isso é impossível) dos ângulos de ABCD não pertencesse ao intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a desigualdade de Jensen aplicada a função cosx, $\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\theta}{4} \leq \cos\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma + \theta}{4}\right)$ainda assim seria verificada pois a partir de $\frac{\pi}{2}$ o cosseno assume valores negativos, isto é, com ângulos maiores ou iguais a $\frac{\pi}{2}\ rad$, a soma $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\theta$ é ainda assim é menor do que $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9) ***Considerando paralelepípedos retângulos inscritos numa esfera de raio R conhecido, o volume é maximizado quando o paralelepípedo é na verdade um cubo.***

Resolução: Dadas as medidas *a*, *b* e *c* como arestas do paralelepípedo em questão, sabemos que a diagonal *D* é coincidente com um dos diâmetros da esfera, onde portanto temos *D* = 2R.

Figura 15- Paralelepípedo na esfera



Fonte: Elaborada pelo autor

Temos que $D^2 = 4R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ e usando a desigualdade das médias temos que $\frac{4R^2}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \sqrt[3]{V^2}$, onde V é o volume do paralelepípedo. Portanto, $V \leq \left(\frac{4R}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{16R^4}{9}}$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{4R^2}{3}$, ou melhor dizendo, $a = b = c = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Concluímos então que o paralelepípedo em questão é de fato um *cubo*.

7 A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

A desigualdade isoperimétrica clássica diz que toda curva fechada, plana e convexa no plano euclidiano de comprimento L que encerra uma área A satisfaz a desigualdade $L^2 - 4\pi A \geq 0$ e pode ser generalizada para espaços euclidianos de dimensão superior (a exemplo do R^n). Das diversas soluções para o problema isoperimétrico para dimensão superior a dois, destacamos Minkowski (1901) e de Blaschke (1916). A propriedade isoperimétrica no contexto tridimensional pode ser representada pela desigualdade

$$A^3 \geq 36\pi V^2$$

sendo "A" a área de superfície e V o volume de um sólido, onde se verifica a igualdade somente para bolas fechadas.

7.1 UMA SOLUÇÃO ATRAVÉS DE POLÍGONOS

Nessa seção, antes de tratar do problema isoperimétrico para curvas em geral, vamos considerar uma versão restrita aos polígonos de *n* lados, que chamamos *n*−ágonos. Essa solução, por seu caráter geométrico, inclui ideias muitos antigas (Zenodorus, em torno de 200 a. C.).

Problema Isoperimétrico para *n*−ágonos: Fixado *n* natural e um número positivo *A*, dentre todos os *n*−ágonos convexos de área A, qual tem o menor perímetro?

Primeiramente justificamos que existe um *n*-ágono do problema isoperimétrico, que aqui é conveniente pensar na versão equivalente com perímetro fixo L. Observamos que cada *n*-ágono fica determinado pela localização de seus *n* vértices $(x_{1,}y_1)$, $(x_{2,}y_2)$, ..., $(x_{n,}y_n)$ no plano $\mathbb{R}^2$ ={(*x*, *y*) | *x*, *y*∈ $\mathbb{R}$}. Assim, um *n*-ágono P_n pode ser visto como um elemento de $\mathbb{R}^{2n}$. a saber, a 2*n*-upla $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$. Com isso, a área de P_n pode ser interpretada como uma função A: $\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Queremos nos restringir ao conjunto dos n-ágonos convexos de perímetro L e demonstrar que nesse conjunto a função área tem um máximo. Como todos os pontos do plano são 'iguais', podemos fazer mais uma restrição e pensar que o domínio de $\mathbb{R}^{2n}$ ao qual queremos restringir A é o conjunto dos pontos que são vértices de P_n com perímetro L e que além disso o último vértice é a origem, ou seja,

$\{((x_1, y_{1)}, \dots, (x_{n-1,}y_{n-1}), x_n = 0, y_n = 0)$ / $||(x_1, y_1)|| + \sum_{i=1}^{n-1} \| (x_i, y_i) - (x_{i+1}, y_{i+1}) \| = L$, $<((x_j, y_j) - (x_i, y_i), v_i> \geq 0$ }.

Quanto a convexidade, temos: Para cada i, seja u_i o vetor com origem em (x_i, y_i) e extremidade em (x_{i+1}, y_{i+1}). Faça $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$. Agora tome v_i como o vetor obtido de u_i por uma rotação de 90º no sentido anti-horário. Como nestas condições temos conjuntos fechados e limitados, temos a compacidade do conjunto em questão.

Como o conjunto acima é um conjunto compacto e a função *A* é contínua, tem-se que existe um maximizante. Assim, concluímos que o problema isoperimétrico para *n*−ágonos tem solução.

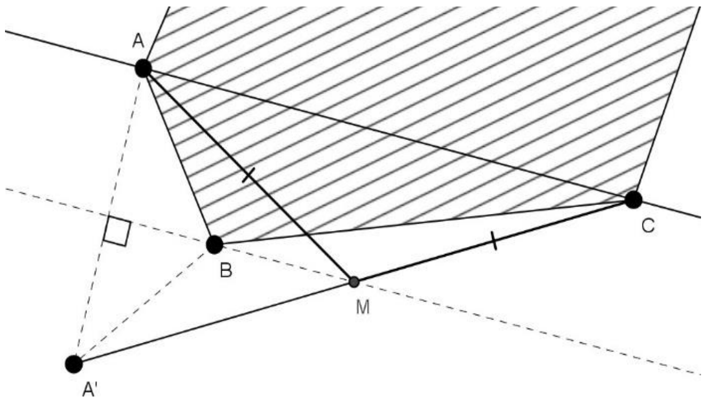
Proposição 4.2.1. *Se P_n é um n-ágono de área A que é solução do PI, então P_n é equilátero, i. e., todos os lados de P_n têm mesma medida*.

Demonstração*:* Vamos supor por absurdo que P_n tem dois lados consecutivos de medidas distintas (*AB* e *BC*) e mostraremos que existe um *n*−ágono de mesma área que P_n, porém com perímetro menor. Com isso, temos um absurdo e podemos concluir que P_n não é a solução que buscamos.

Suponha que AB e BC são lados consecutivos de P_n e considere a reta $\overline{AC}$, que tem o segmento *AC* inteiramente contigo em P_n, já que ele é convexo. Considere *r* a reta paralela a *AC* pelo ponto *B*. Observe que se trocamos *B* por qualquer outro ponto *B′* de *r*, e formarmos um novo polígono *Q*, então *Q* terá a mesma área ponto P_n. Tome *A′* como reflexão de *A* pela reta *r*. Note que os comprimentos |*AB*| e |*A′B*| coincidem, bem como quaisquer comprimentos |*AX*| e |*A′X*| com *X*∈*r*. Assim, trocando *B* por um ponto *B′*∈*r* tal que |*A′B′*| + |*B′C*| é o menor possível, encontramos o ponto *B* por um ponto *B′* que ao substituir *B* diminui o perímetro de P_n. O ponto que minimiza a soma acima é o ponto *M* indicado na Figura 4.1 que satisfaz $|AM| = |CM|$. Com isso concluímos que P_n, é um n-ágono equilátero.

Proposição 4.2.2*Se P_n é um n-ágono que é solução do PI, então P_n é regular, i. e., todos os lados e ângulos de P_n têm mesma medida.*

Figura 16- Polígono equilátero



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração: Pela proposição anterior, já sabemos que P_n é equilátero.

Para a prova dessa proposição vamos considerar a versão equivalente do problema isoperimétrico, i.e, vamos encontrar o *n*−ágono de perímetro fixo que tem a maior área. Vamos demonstrar que os vértices de P_n devem estar todos sobre uma circunferência. Para tal, lembramos um fato sobre circunferências: *Se o segmento PQ é diâmetro de uma circunferência C e X é um ponto do plano tal que $\widehat{PXQ}$ mede 90°, então X está sobre C.*

Caso 1: n = 2*k* é um número par.

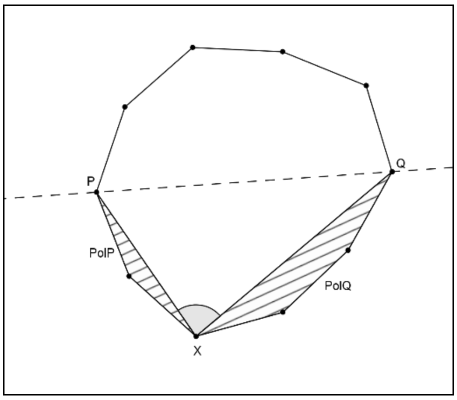
Considere *P* e *Q* dois vértices opostos de Pn, isto é, existem *K* – 1 vértices de P_n entre *P* e *Q*. Seja r a reta por P e Q e observe que r divide P_n em dois polígonos de mesma área. Isso se dá porque os polígonos têm o mesmo perímetro e estamos supondo que P_né solução de problema isoperimétrico. Assim, se um dos polígonos tivesse área menor do que o outro, poderíamos substituir o de área menor pela reflexão de área maior, obtendo assim um polígono de área maior do que *A* é mesmo perímetro de P_n

Seja um dos vértices de P_n entre *P* e *Q*. Afirmamos que $\widehat{PXQ}$ mede 90°.Se *Q* detona o (*k* + 1)-ágono que corresponde a parte P_n que contém *X*, então a área de *Q* é dada por

$$A(Q) = A(PolP) + A(PXQ) + A(PolQ),$$

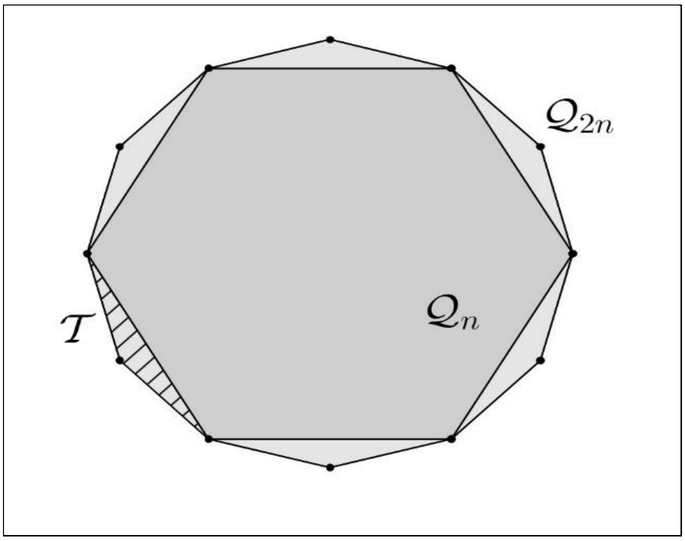
Com *PolP* e *PolQ* como indicados na Figura2.6. Pensando que o polígono *PolQ* da figura é um polígono rígido, vamos mover *Q* sobre a reta *r* carregando o polígono *PolQ* sobre o segmento *XQ*. Observe que isso não altera o perímetro de *Q* nem as áreas de *PolP* e *PolQ*. Assim, se posicionamos *Q* sobre *r* de modo que $P\hat{X}Q$ meça 90º, maximizamos a área de PXQ e portanto a área de Q. Tomando R o polígono que é a união de Q com sua reflexão sore a reta r, temos que ou R = P_n ou R tem área maior do que a área P_n.

Figura 17: Polígono equiângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 18: Polígono equiângulo II



Fonte: Elaborada pelo autor

Com isso concluímos que para qualquer *X* vértice de P_n, temos $P\hat{X}Q$ medindo 90◦. Usando o fato de Geometria Plana acima mencionado, concluímos que P_n tem seus vértices sobre uma circunferência de diâmetro *PQ*. Portanto P_n é regular.

Caso 2: n é um número ímpar.

Considere Q_{2n} o polígono regular de $2n$ lados que sabemos ser solução do PI para $2n$ -ágonos. Ligando n vertices de Q_{2n} pulando um a cada passo, de modo que nenhum par de vertices consecutivos seja utilizado, obtemos Q_n, polígono regular de *n* lados. Além disso, denotamos por *T* o triângulo formado por dois lados consecutivos de Q_{2n} e o lado correspondente de Q_n.

Seja P_no polígono solução do problema isoperimétrico para n-ágonos. Colando sobre cada lado de $P_n$um triângulo T, veja Figura 4.3, obtemos um polígono de $2n$ lados P_{2n}. É necessário que P_{2n} seja congruente a Q_{2n}, caso contrário teríamos uma contradição com o primeiro caso. Mas se $P_{2n} \equiv Q_{2n}$, então $P_n \equiv Q_n$, o que conclui essa demonstração.

Na última proposição não só demonstramos que os polígonos regulares são soluções do problema isoperimétrico, como que eles são as únicas soluções.

Agora vamos comparar polígonos com números de lados diferentes e verificar que se mantemos o perímetro L dos polígonos e comparamos as soluções do problema isoperimétrico para *n*−ágonos com n variando, a área da solução aumenta se *n* aumenta.

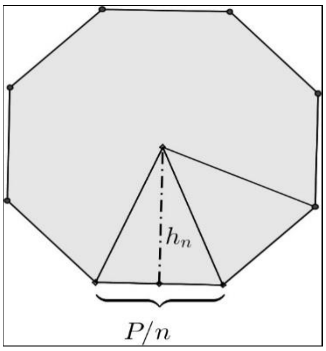
Proposição 4.2.3. *A função A(n) = área do n-ágono regular de perímetro L é uma função crescente.*

Demonstração*.* Seja P_n o *n*−ágono regular de perímetro *L*. Para calcular a área de P_n dividimos P_n em n triângulos isosceles congruentes entre si cuja base mede *L/n* e o ângulo oposto a base mede 2π/n. Assim,

$$A(n) = \frac{Lh_n}{2}$$

com h_n o que se chama apótema P_n, indicada na figura 18.

Figura 19- Apótema



Fonte: Elaborada pelo autor

Tem-se que h_n cresce com *n* e isso pode ser via trigonometria, pois tem-se que $h_n = \frac{L\cot(\pi/n)}{2n}$, que uma função crescente de *n.*

Corolário 1: Vale uma desigualdade isoperimétrica para polígonos, isto é, se *P* é um polígono convexo de perímetro L, então a área A(P) de *P é tal que A(P)* ≤ $A(n)$ satisfaz para todo n ≥ 3,

$$A(P) \leq \frac{L^2 \cot(\pi/n)}{4n} \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

7.2 OUTRA ABORDAGEM SOBRE O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO ATRAVÉS DO MÉTODO DAS REFLEXÕES

Com a suposição de que existe solução para o problema isoperimétrico, pode-se considerar R uma região do plano de área π que é delimitada por uma curva suave C, de modo que C tem o menor dentre todos os possíveis comprimentos de uma curva que delimita uma região de área π.

Inicialmente, analisamos porque podemos escolher a área π sem perda de generalidade. Isso se deve ao que chamamos de homogeneidade do plano euclidiano, que nada mais é do que dizer que olhar o plano com uma lente de aumento não altera suas propriedades. A consequência disso para o problema isoperimétrico é o fato que se conhecemos uma solução de área π, dilatando-a ou encolhendo-a, conhecemos uma solução correspondente à área que escolhermos.

Para justificar esse fato, fixamos um ponto O do plano e definimos uma espécie de multiplicação em relação O, o que nada mais é do que fazer uma homotetia de centro O. Assim, dado um ponto X e uma número positivo λ, o ponto λX é o ponto da semirreta de origem O que contém X que está a uma distância λ multiplicado pelo comprimento de OX, $\lambda|OX|$, do ponto O.

São válidas as seguintes propriedades para as homotetias:

1. Se R é uma região do plano de área a, então a região $\lambda R = \{\lambda X | X \in R\}$ tem área $\lambda^2 a$
2. Se C é uma curva plana de comprimento c, então λC tem comprimento λc

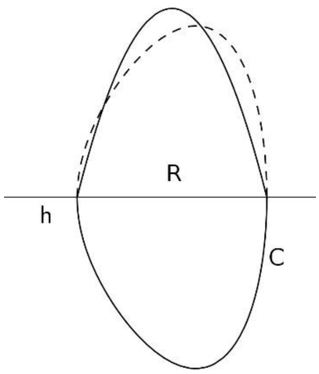
Lema 1 (homogeineidade do problema isoperimétrico). Se R é uma solução do problema isoperimétrico de área a e λ é um número positivo, então λR é uma solução do PI de área $\lambda^2 a$.

Levando em conta o resultado acima, podemos escolher o número positivo π e tratar do problema isoperimétrico para área π.Assim, seja R uma solução do PI de áreaπ.

Proposição 4.3.1. Se h é uma reta horizontal que divide R em duas regiões de mesma área, então h divide a curva C que delimita R em duas curvas de mesmo comprimento.

Demonstração. Essa proposição pode ser demonstrada por absurdo. Suponha que a parte de C abaixo da reta h tem comprimento menor. Então, seria possível substituir R pela região formada pela parte de R que está abaixo de h unida com uma reflexão dessa região através de h, como mostra a Figura. Com essa substituição, a área da nova região permaneceria a mesma de R e o comprimento da sua fronteira ficaria menor.

Figura 20- Reflexão



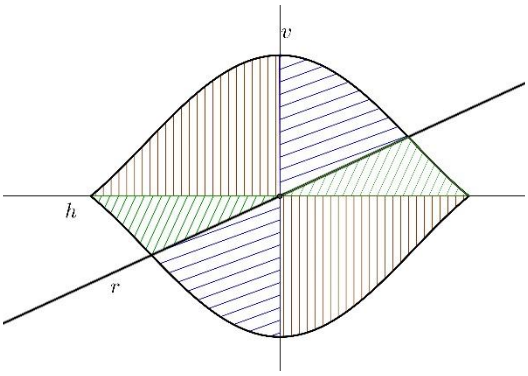
Fonte: Elaborada pelo autor

Por causa da Proposição acima podemos supor que a região R é simétrica com respeito a reflexões em relação a reta h. Caso isso não ocorra, basta substituir R pela região obtida pela metade inferior de R unida com sua reflexão.

O mesmo procedimento da prova da Proposição acima, tomando agora v uma reta vertical que divide R em duas regiões de mesma área, permite concluir que divide C em duas curvas de mesmo comprimento. Assim, podemos supor também que R é simétrica com respeito a reflexões por v.

As retas h e v são perpendiculares. Seja O o ponto em que elas se encontram. Tem-se que qualquer reta pelo ponto O divide R em duas regiões de mesma área delimitadas por curvas de mesmo comprimento.

Figura 21- Rotação



Fonte: Elaborada pelo autor

Até aqui observamos que se o problema isoperimétrico tem uma solução, podemos supor que existe um ponto O, tal que qualquer reta por O divide a região R em duas de mesma área e a curva C em duas de mesmo comprimento.

Uma propriedade sobre soluções do problema isoperimétrico que se verifica em diversos contextos éo fato de que essas soluções são sempre conjuntos convexos. Vamos usar esse fato, cuja prova apresentamos aqui, também em outras soluções do problema isoperimétrico.

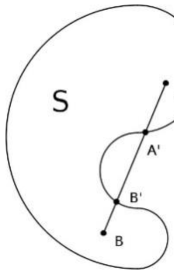
Definição: Uma região S do plano é dita convexa se dados dois pontos A e B pertencentes a S, o segmento AB está contido em S.

Lema 2 (Convexidade). Se S é uma solução do problema isoperimétrico no plano, então S é convexa.

Demonstração. Suponha por absurdo que S é uma solução do PI que não é convexa. Então existem dois pontos A e B de S tais que o segmento AB não está contido em S. Assim, AB deve sair e entrar em S pelo menos uma vez. Sejam A′

e B′ os primeiros pontos de saída e entrada em S. Considere S′ a região obtida substituindo o trecho da fronteira de S que vai de A′ a B′ pelo segmento A′B′.

Figura 22- Convexidade das Soluções



Fonte: Elaborada pelo autor

Tem-se que a região S′ tem área maior do que a área de S e, como o segmento é o caminho mais curto entre dois pontos no plano, S′ tem perímetro menor do que S. Esse fato contradiz a suposição de que S é solução do problema isoperimétrico. Mais precisamente, poderíamos encolher S′ por uma homotetia de modo que a área da região encolhida coincida com a área de S e o perímetro dessa região seria menor do que o de S′, portanto menor do que o de S. Usando a convexidade das soluções do problema isoperimétrico, demonstramos a última proposição dessa solução.

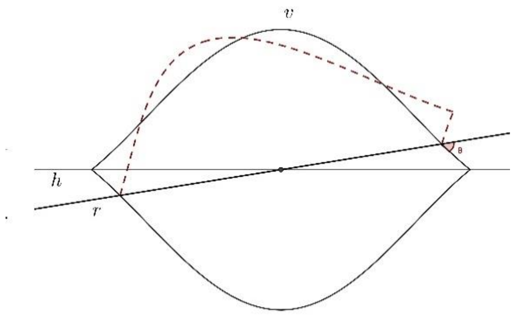
Proposição 4.3.2. Seja R a solução do problema isoperimétrico de área πque estamos supondo simétrica em relação à reflexões com respeito a h e v. Então qualquer reta r pelo ponto Ode intersecção entre h e v encontra a curva C ortogonalmente.

Demonstração. Se existisse uma reta r por O que não interseccionasse C ortogonalmente, como sabemos que r divide R em regiões de mesma área e C em curvas de mesmo comprimento, poderíamos obter uma solução não convexa para o PI, como mostra a Figura. Com isso, teríamos uma contradição com o Lema da convexidade.

As únicas curvas planas que interceptam todas as retas por um ponto O ortogonalmente são os círculos de centro O. Assim, concluímos que se existe uma região isoperimétrica que delimita uma área de medida π, então essa região pode ser delimitada por um ou mais círculos concêntricos. A região delimitada por mais de um círculo concêntrico não é convexa, portanto, a solução que procuramos é necessariamente um círculo.

Observação: Ressaltamos aqui que essa primeira demonstração prova que o círculo é uma solução partido do pressuposto que dentre todas as regiões de área π, existe uma cuja curva de fronteira é o mais curta possível. Essa é uma hipótese bastante forte. Suponha que existe um número natural n que é o maior de todos. Então é fácil mostrar que esse número é 1, já que caso $n \neq 1$, existe um método de obter um número maior que n, a saber, elevá-lo ao quadrado: $n^2 > n$. Todos sabemos que 1 não é o maior número natural, mas a única falha na demonstração acima é supor a existência de um maximizante. Fica a pergunta aqui se não estamos falhando da mesma forma ao supor a existência de uma curva minimizante delimitando uma região de área π.

Figura 23: Ângulo com a reta r



Fonte: Elaborada pelo autor

Veja por fim algumas aplicações da desigualdade isoperimétrica:

Aplicação 1. São dadas uma reta r no plano e uma corda flexível C de comprimento L. Pousando C no plano de forma a que suas extremidades estejam sobre r, obtemos uma figura limitada por r e por C e cuja área depende da forma que dermos à corda. Mostre que a figura de área máxima entre todas as assim obtidas é um semicírculo com base em r.

Demonstração.

Tomando a reta r como eixo de rotação, rebata a figura limitada por r e C no semiplano oposto à essa figura. Suponha por contradição que essa figura com área máxima não seja um semicírculo, assim, se rebatermos a mesma no eixo r, obtemos uma curva fechada simples com área máxima e que não é um círculo. Absurdo, pois contradiz o Teorema da Desigualdade Isoperimétrica.

Aplicação 2. Dados dois pontos p e q no plano e uma corda flexível C de comprimento $L > |p - q|$, determine a figura de maior área entre aquelas limitadas por C e pelo segmento de reta pq.

Demonstração.

Afirmação: A curva obtida com as condições estabelecidas é um arco de círculo. Se $L \leq |p - q|$, então a curva C não delimita área. Construa uma curva C' com comprimento fixo L' tal que a curva $C \cup C' = S$ seja fechada, simples e regular. Pelo Teorema da Desigualdade Isoperimétrica, a área máxima que a curva S pode delimitar é quando S for uma circunferência. Logo segue que a curva estabelecida na proposição acima é um arco de círculo.

REFERÊNCIAS

BURAGO, Y. D.; ZALGALLER, V.A. **Geometric Inequalities**. New York: Springer, 1988.

CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de curvas e superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.

GROMOV, M. **Isoperimetric inequalities in Riemannian manifolds**. New York: Springer-Verlag, 1986.

Lima, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

ANDREESCU, T.; MUSHKAROV, O.; STOYANOV, L. **Geometric Problems on Maxima and Minima**. New York: Birkhauser, 2006.

BOTTEMA, O. Geometric Inequalities. **Wolters-Noordhoff Publishing**, Groningen, v.6, n.8, p.23-28, 1969.

CAMINHA, A. Desigualdades Elementares. **Eureka**, Rio de Janeiro, v. 5, n.7, p. 34-50, 1999.

CAMINHA, A. **Tópicos de Matemática Elementar**: números reais. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

COXETER, S. M. e GREITZER S. L., Geometry Revisited. **The Mathematical Association of America**, v.13, n.9, p.25-35, 1967.

FONTELES, R. T. Trigonometria e desigualdades em problemas de olimpíadas. **Eureka**, Rio de Janeiro, v.11, n.8, p. 24-33, 2001.

IEZZI, G.; POMPEO, J. N. **Os fundamentos da Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, 1991.

LIMBERGER, R. **Abordagens do problema isoperimétrico**. São Paulo: Atual, 2011.