



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

MARCELO RICARDO DE SOUZA

GEOMETRIA ESFÉRICA E O RELÓGIO DE SOL

NATAL-RN

2019

MARCELO RICARDO DE SOUZA

GEOMETRIA ESFÉRICA E O RELÓGIO DE SOL

Dissertação submitida à Coordenação Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a Viviane Simioli Medeiros Campos

NATAL-RN

2019

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Souza, Marcelo Ricardo de.

Geometria esférica e o relógio de sol / Marcelo Ricardo de Souza. - 2019.
51f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Natal, 2019.

Orientadora: Viviane Simioli Medeiros Campos.

1. Matemática - Dissertação. 2. Geometria esférica - Dissertação. 3. Trigonometria esférica - Dissertação. 4. Relógio de sol - Dissertação. I. Campos, Viviane Simioli Medeiros. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 51

Dedico esta dissertação a meu pai, minha mãe (memórias póstumas), minha madrasta, meus irmãos, minha esposa, meus filhos, que com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até essa etapa da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades e permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida. Aos meus familiares, pelo carinho e incentivo durante essa trajetória.

Agradeço aos professores que sempre estiveram dispostos a ajudar e contribuir para um melhor aprendizado, em especial a minha professora orientadora, Dr^a Viviane, pela paciência e dedicação de seu tempo, que tornou possível a conclusão desta dissertação.

Agradeço também, a Universidade Federal do Rio Grande do Norte e ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, que permitiram chegar ao final desse ciclo de maneira satisfatória.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para esta conquista.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos algumas definições e demonstramos alguns resultados da Geometria Esférica com o objetivo de apresentarmos tal geometria e verificarmos suas diferenças em relação à Geometria Euclidiana. Assim como na Geometria Euclidiana existe uma Trigonometria, a Geometria Esférica também tem a sua, que é denominada de Trigonometria Esférica. Apresentamos os teoremas e as relações da Trigonometria Esférica que são fundamentais para os cálculos dos ângulos horários do relógio de Sol. Em relação ao relógio de Sol, apresentamos os argumentos necessários, com embasamento teórico, para a sua construção, seu posicionamento e sua leitura de forma correta. Mostramos passo a passo como fazer a construção e a leitura do relógio de Sol Horizontal em qualquer localização do Brasil e os materiais necessários para essa construção. Por fim, sugerimos uma atividade para ser aplicada aos alunos do ensino básico a partir do 9º ano, na qual propomos explorar algumas diferenças entre as Geometrias Euclidiana e Esférica, utilizando materiais manipuláveis.

Palavras-chave: Geometria Esférica, Trigonometria Esférica, relógio de Sol.

ABSTRACT

In this work we present some elements, definitions and theories of Spherical Geometry that will be necessary for its understanding. We found that some results are different when compared to Euclidean geometry, such as the sum of the internal angles of a triangle. Just as in Euclidian Geometry there is a Trigonometry, Spherical Geometry also has its own, which is called Spherical Trigonometry. We present the Theorems and relations of Spherical Trigonometry that are fundamental for the calculations of the hour angles of the sundial. In relation to the sundial, we present the theoretical arguments necessary for its construction, its positioning and its correct reading . We show step by step how to build and read the Horizontal Sun Clock in any location in Brazil and the materials needed for this construction. Finally, we suggest an activity to be applied to elementary school students from the 9th year, in which we propose to explore some similarities and differences between Euclidean and Spherical Geometries using manipulable materials.

Keywords: Spherical Geometry, Spherical Trigonometry, sundial.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Intersecção de um plano com uma superfície esférica	14
Figura 2 – Intersecção de um plano com uma superfície esférica passando pelo centro	15
Figura 3 – Fuso de uma superfície esférica	15
Figura 4 – Fuso completo de uma esférica	16
Figura 5 – Parametrização σ de R em $\mathbb{R}^3$	16
Figura 6 – Curva parametrizada C	17
Figura 7 – Triângulo esférico	20
Figura 8 – Área de um triângulo esférico	21
Figura 9 – Distância entre os pontos A e B	21
Figura 10 – Triângulo esférico ABC	23
Figura 11 – Ideia de um relógio de Sol equatorial	31
Figura 12 – Sombra do Sol na superfície da esfera.	32
Figura 13 – Componentes de um relógio de Sol.	33
Figura 14 – Obtenção da direção Norte-Sul.	34
Figura 15 – relógio de Sol tangente a superfície do planeta Terra.	35
Figura 16 – Esfera com o relógio de Sol horizontal sendo o seu centro.	36
Figura 17 – Tábua da equação do tempo.	39
Figura 18 – Papel sulfite	41
Figura 19 – Quadrante	41
Figura 20 – gnômon	42
Figura 21 – gnômon colado no quadrante	42

Sumário

	Lista de ilustrações	8
	Sumário	9
1	GEOMETRIA ESFÉRICA	12
1.1	Apresentação à Geometria Esférica	12
1.2	Alguns conceitos da Geometria Esférica	12
1.3	Alguns elementos da teoria de superfícies parametrizadas	16
1.4	A superfície parametrizada S	17
1.5	Trigonometria Esférica	22
2	APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ESFÉRICA	30
2.1	O Relógio de Sol	30
2.1.1	Relógio de Sol Horizontal	33
3	NOÇÕES DA GEOMETRIA ESFÉRICA NUMA ATIVIDADE PRÁTICA	44
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
	Referências	50

INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios aos professores hoje em dia é prender a atenção dos alunos em sala de aula, tornar a disciplina que leciona atrativa e interessante. E foi com esse objetivo, buscando melhorar a prática pedagógica que procuramos um tema atraente tanto para o aluno quanto para o professor.

O tema desta dissertação, *Geometria Esférica e Relógio de Sol*, surgiu em junho de 2014, quando alguns professores da rede pública foram convidados a participar de um curso de astronomia promovido pela Agência Espacial Brasileira, cujo objetivo era divulgar e propagar a astronomia em sala de aula. Nós que participamos do curso percebemos que o ensino da astronomia é uma aliada poderosa em várias disciplinas como geografia, matemática, física e ciências.

Uma forma de divulgar a astronomia era trabalhar com os nossos alunos em sala de aula, algumas das oficinas propostas durante o curso. Uma dessas oficinas foi a construção do relógio de Sol. De acordo com o roteiro disponibilizado no curso, aplicamos a oficina em sala de aula para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, orientamos os alunos e cada um deles construiu o seu relógio de Sol. Na construção e funcionamento do relógio de Sol são necessários alguns conhecimentos matemáticos, na área da geometria e conhecimentos geográficos para obtenção dos pontos cardeais, latitude do lugar e declinação. A partir daí surgiram as indagações, por que usar a latitude do lugar? Por qual motivo posicionar o relógio de Sol na direção Norte-Sul? Como funciona o relógio de Sol? Qual a matemática por trás disso? Sem embasamento teórico e com pouca orientação para pesquisar sobre o assunto de forma correta, as respostas não foram encontradas de imediato.

Logo depois, com o Mestrado Profissional em Matemática, o PROFMAT, na busca de um tema para a dissertação surgiu a ideia de pesquisar sobre o relógio de Sol na intenção de responder aquelas indagações, percebíamos que havia aí uma matemática mais rebuscada, mais refinada a ser aprendida. A partir daí, pesquisamos sobre o assunto e fomos enveredados para outros caminhos como a Astronomia e o estudo da Geometria Celeste que nos levou, finalmente, à Geometria Esférica.

Assim, a proposta fundamental desta dissertação, além de responder àquelas questões sobre o relógio de Sol, se tornou a busca por uma forma mais simples de se divulgar essa geometria fascinante, a Geometria Esférica, tão consistente quanto a geometria euclidiana, mas bem menos conhecida pelos alunos do ensino básico. Desse modo, o trabalho ficou dividido em três capítulos.

No primeiro capítulo, apresentamos uma introdução à Geometria Esférica, abordando os principais conceitos e teoremas que servirão como base para a compreensão dos capítulos

seguintes. No segundo capítulo apresentamos uma aplicação dessa geometria na construção, funcionamento e leitura do relógio de Sol. No terceiro e último capítulo, colocamos uma sugestão de atividade prática na forma de oficina, onde comparamos algumas propriedades desta geometria com a euclidiana.

1 GEOMETRIA ESFÉRICA

1.1 Apresentação à Geometria Esférica

A Geometria Esférica é a geometria que tem como modelo a superfície da esfera, assim como a Geometria Euclidiana é a geometria que tem como modelo o plano. Na Geometria Esférica, dada uma reta $\mathbf{r}$ e um ponto $\mathbf{P}$ fora de $\mathbf{r}$ não existe nenhuma reta paralela $\mathbf{r}$ passando por $\mathbf{P}$, enquanto que na Geometria Euclidiana existe somente uma (quinto postulado de Euclides).

Dentre as outras inúmeras diferenças entre a Geometria Esférica com a Geometria Euclidiana, podemos destacar: por dois pontos (diametralmente opostos) podemos traçar infinitas retas passando por esses dois pontos, enquanto na Euclidiana podemos traçar apenas única reta; duas retas sempre se intersectam, já na Euclidiana essa interseção pode ser vazia; é possível medir o comprimento da reta, mas na Euclidiana não temos como medir pois a reta é infinita; a soma dos ângulos internos de um triângulo é superior a 180° e sabemos que na de Euclides a soma é igual a 180° ; um triângulo pode ter os três ângulos internos retos e na Euclidiana o triângulo pode ter somente um ângulo interno reto.

Não apenas em matemática estudamos e aplicamos a Geometria Esférica, ela é bastante utilizada em outras áreas tais como: física, astronomia e navegação. Uma aplicação interessante desta geometria é abordada, de forma sutil, nas aulas de geografia, no momento em que o professor utiliza o globo terrestre e apresenta os conceitos de meridianos, latitude, longitude e fusos horários.

Apesar de se utilizar das ferramentas da Geometria Euclidiana, o estudo da Geometria Esférica se torna útil onde a Geometria Euclidiana não consegue ser usada de forma precisa. Como dizia o matemático Henri Poincaré: “Nenhuma Geometria é mais correta do que qualquer outra, apenas é mais conveniente.”

1.2 Alguns conceitos da Geometria Esférica

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos da Geometria Esférica: a própria superfície esférica, as circunferências máximas, os fusos completos e o triângulo esférico. Para a demonstração da fórmula da área da superfície esférica e para o cálculo da menor distância entre dois pontos (Seção 1.4), optamos por usar ferramentas do cálculo diferencial e integral de funções de mais de uma variável (Seção 1.3), e assim, descrevemos a superfície esférica

como uma superfície parametrizada suave. Calculadas a área da superfície esférica e usando o fato de que a menor distância entre dois pontos na esfera é realizada por um arco de circunferência máxima, calculamos a área do fuso esférico e como consequência, demonstramos que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° . Por fim, apresentamos os principais teoremas da Trigonometria Esférica, dentre os quais está o resultado que é utilizado diretamente na leitura do relógio de Sol.

Este capítulo está embasado em (1), (2), (3), (4) e (5).

Usualmente nos livros do Ensino Médio a esfera é definida como sendo o conjunto de todos os pontos no $\mathbb{R}^3$, cuja a distância a um ponto fixo O é menor ou igual ao número real positivo r . O ponto O e a distância r são chamados de centro e raio da esfera, respectivamente. Munindo o espaço $\mathbb{R}^3$ do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xyz , a esfera com centro na origem $(0, 0, 0)$ e raio $r > 0$ é descrita como o conjunto:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

Queremos salientar que a Geometria Esférica é a geometria que tem como modelo a superfície de uma esfera, ou seja, toda a sua teoria é desenvolvida sobre a superfície esférica. Sem perda de generalidade, neste trabalho vamos admitir como modelo para a geometria esférica a superfície da esfera centrada na origem e de raio 1, ou seja, o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

o qual pode ser visto também como a união do hemisfério norte:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z \geq 0\}$$

com o hemisfério sul:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z \leq 0\}.$$

A seguir apresentamos alguns teoremas e definições da geometria esférica que darão embasamento as aplicações propostas neste trabalho.

Definição 1.1. ***Circunferência** é um conjunto de pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância não nula dada. O ponto dado é o **centro** e a distância dada é o **raio** da circunferência.*

Teorema 1.1. *A interseção de qualquer plano com uma superfície esférica é uma circunferência.*

Demonstração 1.1. *Seja α um plano que intersepta a superfície esférica de centro O e sejam A e B dois pontos quaisquer dessa circunferência, considere ainda a reta r perpendicular a α e que passa pelo centro O e P o ponto de interseção de r com α conforme a figura 1.*

Note que os triângulos $\triangle OPA$ e $\triangle OPB$ são congruentes, pois os lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são os raios da superfície esférica, os ângulos $\hat{O}PA$ e $\hat{O}PB$ são retos e o lado $\overline{OP}$ é comum aos dois triângulos. Aplicando o teorema de Pitágoras em cada um dos triângulos obtemos que os catetos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são congruentes.

Desse modo, todos os pontos da interseção do plano α com a superfície esférica, tem a mesma distância em relação ao ponto P , logo esta interseção é uma circunferência.

□

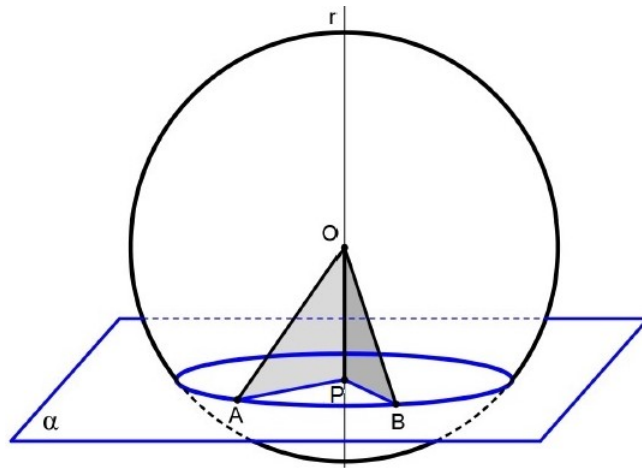


Figura 1 – Intersecção de um plano com uma superfície esférica

Teorema 1.2. A intersecção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência que possui o mesmo raio e o mesmo centro que a superfície esférica.

Demonstração 1.2. Considere uma superfície esférica de centro O e raio r e um plano α passando por O como na figura 2. A intersecção do plano α com a superfície esférica são todos os pontos deste plano que também pertencem à superfície esférica, ou seja, cuja distância em relação ao ponto O , que pertence a α é igual ao raio. Observamos que essa é exatamente a definição de uma circunferência de centro O e raio r .

□

Definição 1.2. Chamamos de **circunferência máxima** a toda circunferência que resulta da intersecção entre uma superfície esférica e um plano passando pelo seu centro.

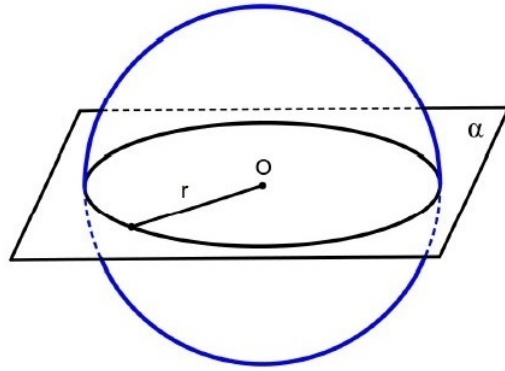


Figura 2 – Interseção de um plano com uma superfície esférica passando pelo centro

Definição 1.3. ***Fuso esférico** é a região compreendida entre duas circunferências máximas em um dos hemisférios da superfície esférica. Essas circunferências têm dois pontos em comum que são diametralmente opostos denominados de **vértices do fuso**. A abertura entre essas duas circunferências máximas é o que chamamos de **ângulo do fuso**. Veja a figura 3.*

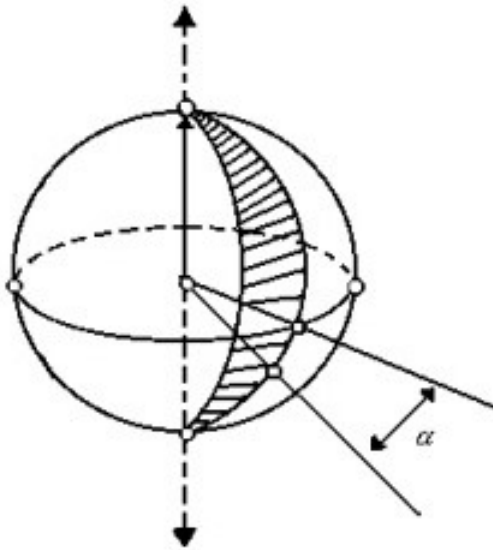


Figura 3 – Fuso de uma superfície esférica

Definição 1.4. ***Fuso completo** é a região da superfície esférica compreendida entre duas circunferências máximas. Veja a figura 4.*

Definição 1.5. *Quando dois pontos de uma esfera são pontos diametralmente opostos, dizemos que são pontos **antípodas**.*

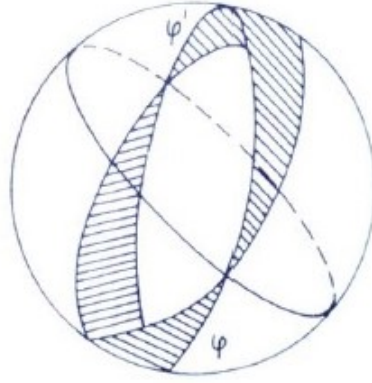


Figura 4 – Fuso completo de uma esférica

1.3 Alguns elementos da teoria de superfícies parametrizadas

Dentre as opções que tínhamos para tratar da área superfície esférica e do comprimento dos arcos de circunferência, optamos por usar ferramentas do cálculo diferencial e integral de funções de mais de uma variável e assim, olhar a superfície esférica S como uma superfície parametrizada suave.

De acordo com Guidorizzi (2011, p. 281-283) uma superfície parametrizada σ é uma função $\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde R é uma região do plano $\mathbb{R}^2$. Supondo que as funções componentes de σ sejam dadas por $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$, para todo $(u, v) \in R$, escrevemos:

$$\begin{aligned}\sigma &: R \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\end{aligned}$$

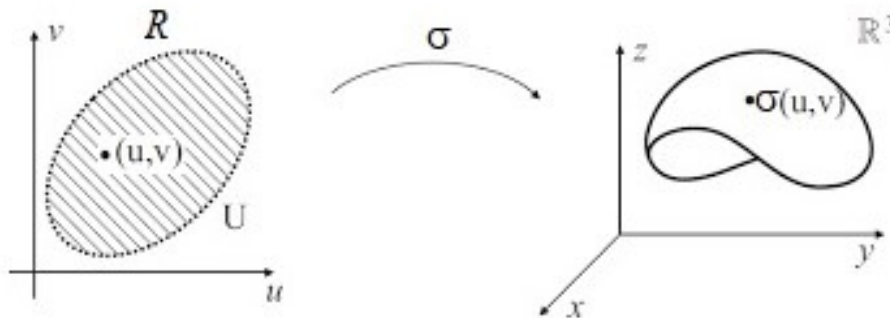


Figura 5 – Parametrização σ de R em $\mathbb{R}^3$

O lugar geométrico descrito por $\sigma(u, v)$ quando (u, v) percorre o conjunto R , é o conjunto imagem de σ :

$$\mathcal{I}m \sigma = \{\sigma(u, v) | (u, v) \in R\} \subset \mathbb{R}^3$$

Dizemos que σ é uma parametrização para o conjunto $\mathfrak{Im} \sigma$ e usualmente nos referimos ao conjunto $\mathfrak{Im} \sigma$ como sendo a superfície parametrizada.

Dizemos ainda que σ é uma superfície parametrizada suave se as funções coordenadas $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ são contínuas e satisfazem $\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| \neq 0$ para $\forall (u, v)$ no interior de R , onde $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$ são, respectivamente, a derivada parcial da função σ em relação à variável u e a derivada parcial da função σ em relação à variável v .

A área da superfície parametrizada suave σ é dada através da integral dupla:

$$\iint_R \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| dA$$

Uma curva parametrizada regular C com ponto inicial A e ponto final B sobre a superfície parametrizada suave σ é o conjunto imagem de uma função $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$ e tal que

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

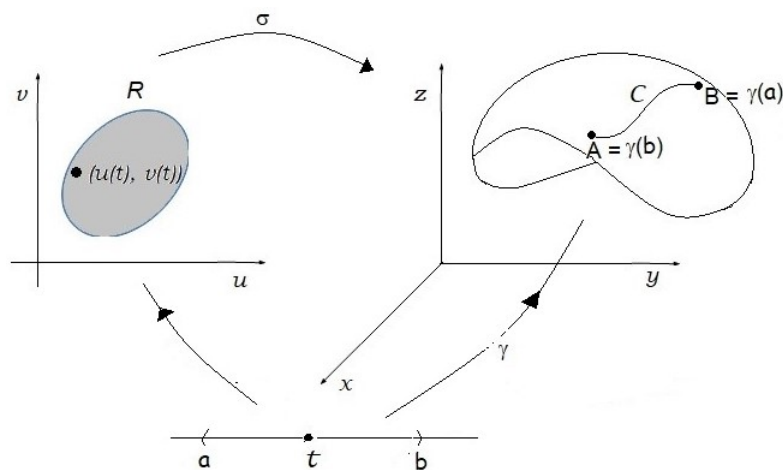


Figura 6 – Curva parametrizada C

O comprimento da curva C é dado através da integral

$$\int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt, \text{ onde } \frac{d\gamma}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}.$$

1.4 A superfície parametrizada S

Vamos mostrar nessa secção que a superfície da esfera centrada na origem e de raio 1 é uma superfície parametrizada suave e assim, poderemos usar os resultados da secção anterior

para calcularmos a área de um fuso e também para provarmos que os arcos das circunferências máximas são as curvas que minimizam caminhos em S .

Vamos mostrar que a função

$$\begin{aligned}\sigma : R &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\phi, \theta) &\mapsto (\text{sen}\phi \cos \theta, \text{sen}\phi \text{sen}\theta, \cos \phi)\end{aligned}$$

onde $R = \{(\phi, \theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq \phi \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ é uma parametrização para a superfície da esfera centrada na origem e de raio 1.

Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ um ponto que pertence ao conjunto $\mathcal{Im} \sigma$, então $x = \text{sen}\phi \cos \theta$, $y = \text{sen}\phi \text{sen}\theta$ e $z = \cos \phi$ para algum par $(\phi, \theta) \in R$. Usando a identidade trigonométrica fundamental, obtemos:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= (\text{sen}\phi \cos \theta)^2 + (\text{sen}\phi \text{sen}\theta)^2 + (\cos \phi)^2 \\ &= \text{sen}^2\phi \cos^2 \theta + \text{sen}^2\phi \text{sen}^2\theta + \cos^2 \phi \\ &= \text{sen}^2\phi(1 - \text{sen}^2\theta) + \text{sen}^2\phi \text{sen}^2\theta + 1 - \text{sen}^2\phi \\ &= \text{sen}^2\phi - \text{sen}^2\phi \text{sen}^2\theta + \text{sen}^2\phi \text{sen}^2\theta + 1 - \text{sen}^2\phi \\ &= 1.\end{aligned}$$

Fazendo ϕ e θ percorrem a região R , vemos que o lugar geométrico descrito por σ é S , ou seja, $\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização para S e mais ainda, S é uma superfície parametrizada suave. De fato, as funções coordenadas $\text{sen}\phi \cos \theta$, $\text{sen}\phi \text{sen}\theta$ e $\cos \phi$ são funções contínuas, pois são produtos das funções contínuas seno e cosseno e suas derivadas parciais

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \phi}(\phi, \theta) = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \text{sen}\theta, -\text{sen}\phi) \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\phi, \theta) = (-\text{sen}\phi \text{sen}\theta, \text{sen}\phi \cos \theta, 0)$$

satisfazem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \phi \cdot \cos \theta & \cos \phi \cdot \text{sen}\theta & -\text{sen}\phi \\ -\text{sen}\phi \cdot \text{sen}\theta & \text{sen}\phi \cdot \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \text{sen}^2\phi \cdot \text{sen}\theta \cdot \vec{j} + \text{sen}\phi \cdot \cos \phi \cdot \cos^2 \theta \cdot \vec{k} + \text{sen}\phi \cdot \cos \phi \cdot \text{sen}^2\theta \cdot \vec{k} + \cos \theta \cdot \text{sen}^2\phi \cdot \vec{i} \\ &= \text{sen}^2\phi \cdot \text{sen}\theta \cdot \vec{j} + \text{sen}\phi \cdot \cos \theta \cdot \vec{k} + \cos \theta \cdot \text{sen}^2\phi \cdot \vec{i}.\end{aligned}$$

E assim:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right\|^2 &= \text{sen}^4 \phi \cos^2 \theta + \text{sen}^4 \phi \text{sen}^2 \theta + \text{sen}^2 \phi \cos^2 \theta \\
&= \text{sen}^4 \phi (\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) + \text{sen}^2 \phi \cos^2 \theta \\
&= \text{sen}^4 \phi + \text{sen}^2 \phi \cos^2 \phi \\
&= \text{sen}^2 \phi (\text{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi) \\
&= \text{sen}^2 \phi
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right\| = \text{sen} \phi \neq 0, \text{ pois } 0 < \phi < \pi.$$

Podemos agora calcular a área da superfície esférica S , $A(S)$, usando $\iint_R \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right\| dA$:

$$\begin{aligned}
A(S) &= \iint_R \text{sen} \phi dA \\
&= \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} \text{sen} \phi d\theta \right] d\phi \\
&= \int_0^\pi \text{sen} \phi \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} d\phi \\
&= 2\pi \int_0^\pi \text{sen} \phi d\phi \\
&= 2\pi (-\cos \phi) \Big|_0^\pi \\
&= 2\pi \cdot [-\cos \pi + \cos(0)] \\
&= 2\pi \cdot 2 \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

□

Com o mesmo procedimento, podemos encontrar a área de um fuso esférico cujo ângulo mede α radianos

$$\begin{aligned}
\text{Area do fuso} &= \int_0^\alpha \int_0^\pi \text{sen} \phi d\phi d\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos \phi \Big|_0^\pi d\theta \\
&= \alpha [-\cos \pi + \cos(0)] \\
&= 2\alpha.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.6. *Triângulo Esférico* é um triângulo formado por três pontos distintos da superfície esférica e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima e cujos vértices estão interligados pelas circunferências máximas que se interceptam duas a duas. Vejamos a figura 7.

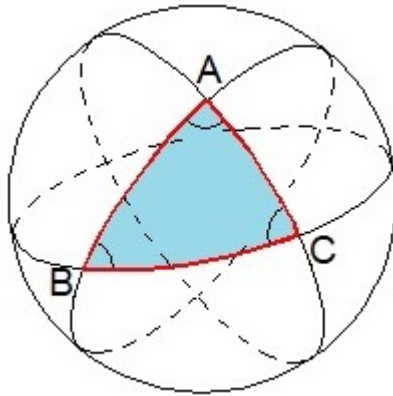


Figura 7 – Triângulo esférico

Chamamos a atenção para os lados do triângulo esférico, suas medidas são expressas em ângulos, pois cada lado é um arco de circunferência. Assim, os lados e os ângulos internos suas medidas são medidas angulares.

Vamos mostrar agora, que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que dois ângulos retos, conforme o teorema a seguir:

Teorema 1.3. *Sejam α , β e γ , os ângulos internos medidos em radianos de um triângulo esférico ABC de área a , então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + a$.*

Demonstração 1.3. *Vejamos a figura 8. Prolongando os lados do triângulo esférico ABC , obtemos o triângulo $A'B'C'$, onde A' , B' , C' são diametralmente opostos a A , B e C respectivamente, assim $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes (caso LLL) e portanto têm a mesma área. Note que as áreas dos três fusos completos que são 4α , 4β , 4γ e que eles cobrem toda a superfície da esfera. Nessa soma de áreas, cada triângulo esférico $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ teve sua área contada 2 vezes mais. Assim, a soma das áreas dos fusos completos ultrapassam a área da superfície da esfera em $4a$ e temos que*

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4a$$

Dividindo a equação acima por 4, obtemos:

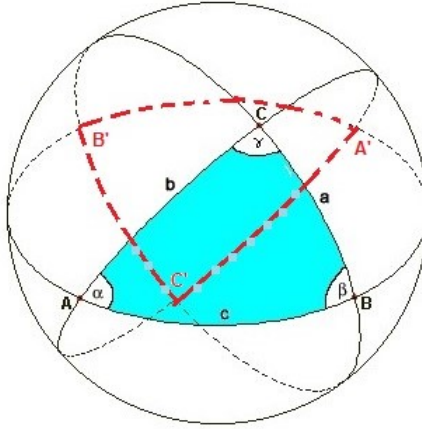


Figura 8 – Área de um triângulo esférico

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + a,$$

ou seja, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que π .

□

Teorema 1.4. *Dentre todas as curvas sobre a superfície S que ligam um ponto A a um ponto B , o arco da circunferência máxima é a curva que realiza a menor distância.*

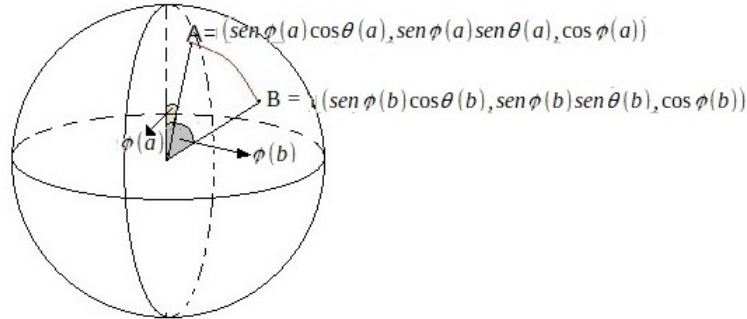


Figura 9 – Distância entre os pontos A e B

Demonstração 1.4. *Seja $\widehat{AB}$ o arco sobre a circunferência máxima, ou seja, $\widehat{AB}$ é um arco de circunferência centrada na origem da superfície esférica e de raio 1, conforme figura 9, portanto:*

$$\text{Comprimento do arco } \widehat{AB} = [\phi(b) - \phi(a)] \cdot 1 = [\phi(b) - \phi(a)].$$

Usando a parametrização $\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ da superfície S podemos descrever uma curva qualquer sobre S que liga o ponto A ao ponto B através da função: $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (\text{sen}\phi(t) \cos \theta(t), \text{sen}\phi(t) \text{sen}\theta(t), \cos \phi(t))$, onde $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$.

O comprimento L de $\gamma(t)$ é dado por $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, onde $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$ e $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são as funções coordenadas da função γ .

Assim:

$$x'(t) = \cos \phi(t) \phi'(t) \cos \theta(t) - \text{sen}\phi(t) \text{sen}\theta(t) \theta'(t);$$

$$y'(t) = \cos \phi(t) \phi'(t) \text{sen}\theta(t) + \text{sen}\phi(t) \cos \theta(t) \theta'(t);$$

$$z'(t) = -\text{sen}\phi(t) \phi'(t).$$

O que nos leva a:

$$\begin{aligned} [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 &= \cos^2 \phi(t) [\phi'(t)]^2 + \cos^2 \theta(t) + \text{sen}^2 \phi(t) \text{sen}^2 \theta(t) [\theta'(t)]^2 \\ &\quad - 2 \text{sen}\phi(t) \text{sen}\theta(t) \cos \phi(t) \cos \theta(t) \phi'(t) \theta'(t) + \cos^2 \phi(t) [\phi'(t)]^2 \text{sen}^2 \theta(t) \\ &\quad + \text{sen}^2 \phi(t) \cos^2 \theta(t) [\theta'(t)]^2 + 2 \cos \phi(t) \phi'(t) \text{sen}\theta(t) \text{sen}\phi(t) \cos \theta(t) \theta'(t) \\ &\quad + \text{sen}^2(t) \phi [\phi'(t)]^2 \\ &= \cos^2 \phi(t) [\phi'(t)]^2 + \text{sen}^2 \phi(t) [\phi'(t)]^2 + \text{sen}^2 \phi(t) [\phi'(t)]^2 \\ &= [\phi'(t)]^2 + \text{sen}^2(t) [\phi'(t)]^2. \end{aligned}$$

Percebamos que $[\phi']^2(t) + \text{sen}^2(t) \cdot \phi'^2(t) \geq 0$, temos a seguinte desigualdade

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{[\phi']^2(t) + \text{sen}^2(t) [\phi']^2(t)} \geq |\phi'(t)| \geq \phi'(t)$$

Assim:

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \geq \int_a^b \phi'(t) dt = [\phi(b) - \phi(a)] = \text{comprimento do arco } \widehat{AB}.$$

□

1.5 Trigonometria Esférica

Não apenas na Geometria Euclidiana, mas também na Geometria Esférica, as relações métricas em um triângulo tem um papel importante. Uma utilidade prática da trigonometria no triângulo esférico está na construção do relógio de Sol horizontal. Vamos apresentar com detalhes a sua aplicação, mas antes, vamos às relações trigonométricas. Preparamos esta

secção com base em (6), (4) e inicialmente, vamos demonstrar a fórmula fundamental da trigonometria esférica:

Teorema 1.5. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico, com lados a , b e c e ângulos internos opostos α , β e γ respectivamente. Então*

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sena} \operatorname{senc} \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sena} \operatorname{senc} \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sena} \operatorname{senb} \cos \gamma$$

Demonstração 1.5. *Considere $\triangle ABC$ um triângulo esférico na superfície da esfera de centro O e raio unitário. Vejamos a figura 10.*

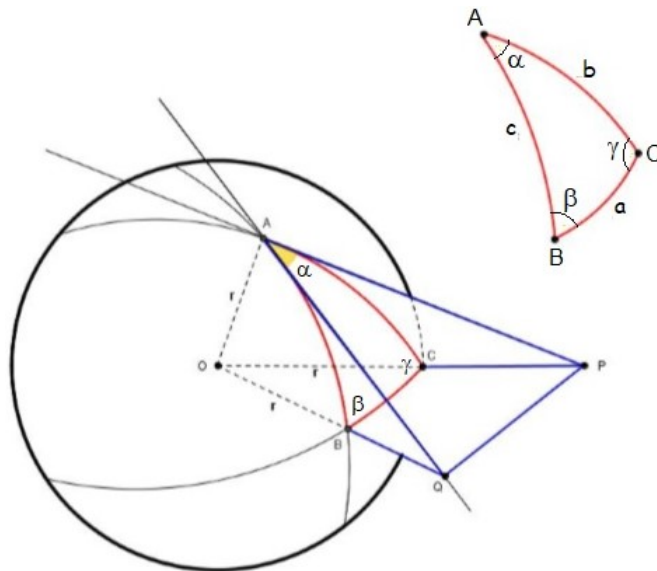


Figura 10 – Triângulo esférico ABC

Os ângulos internos α , β , γ são determinados pelas retas tangentes nos pontos A (tangentes aos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$), B (tangentes aos arcos $\widehat{BA}$ e $\widehat{BC}$) e C (tangentes aos arcos $\widehat{CA}$ e $\widehat{CB}$) nessa ordem.

Seja P a intersecção da reta $\overleftrightarrow{OC}$ com a reta tangente do arco $\widehat{AC}$ no ponto A , e o ponto Q é a intersecção da reta $\overleftrightarrow{OB}$ com a reta tangente do arco $\widehat{AB}$ no ponto A .

Observamos que os triângulos $\triangle OAP$ e $\triangle OAQ$ são retângulos em A , pois $\overline{OA}$ é raio, $\overline{AP}$ e $\overline{AQ}$ são tangentes no ponto A , portanto, são perpendiculares ao raio.

Utilizando-se da trigonometria nos triângulos retângulos $\triangle OAP$ e $\triangle OAQ$, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos b = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}} \\ \operatorname{sen} b = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}} \\ \cos c = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}} \\ \operatorname{sen} c = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Usando o teorema de Pitágoras nos triângulos, obtemos respectivamente as duas igualdades:

$$\begin{aligned} \overline{PO}^2 &= \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 \\ \overline{QO}^2 &= \overline{AO}^2 + \overline{AQ}^2 \end{aligned}$$

que somados nos levam a:

$$\begin{aligned} \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 &= 2\overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 \\ 2\overline{AO}^2 &= \overline{PO}^2 - \overline{AP}^2 + \overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos $\triangle PQO$ e $\triangle PQA$ encontramos as equações:

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO} \overline{QO} \cos a \\ \overline{PQ}^2 &= \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP} \overline{AQ} \cos \alpha \end{aligned}$$

que nos levam a:

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO} \overline{QO} \cos a = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP} \overline{AQ} \cos \alpha$$

Usando 1.2 na igualdade acima, obtemos:

$$2\overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{PO} \overline{QO} \cos a = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP} \overline{AQ} \cos \alpha$$

ou ainda:

$$2\overline{AO}^2 - 2\overline{PO} \overline{QO} \cos a = -2\overline{AP} \overline{AQ} \cos \alpha$$

$$2\overline{PO} \overline{QO} \cos a = 2\overline{AO}^2 + 2\overline{AP} \overline{AQ} \cos \alpha$$

$$\cos a = \frac{\overline{AO}^2}{\overline{PO} \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \overline{AQ}}{\overline{PO} \overline{QO}} \cos \alpha$$

$$\cos a = \frac{\overline{AO} \overline{AO}}{\overline{PO} \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \overline{AQ}}{\overline{PO} \overline{QO}} \cos \alpha$$

Substituindo 1.1 adequadamente na equação acima, obtemos:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sena} \operatorname{senc} \cos \alpha \quad (1.3)$$

De maneira análoga, encontramos as outras duas fórmulas fundamentais da trigonometria esférica:

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sena} \operatorname{senc} \cos \beta \quad (1.4)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sena} \operatorname{senb} \cos \gamma \quad (1.5)$$

□

Demonstraremos mais duas identidades trigonométricas dos triângulos esféricos, Teoremas 1.6 e 1.7. O Teorema 1.6 é conhecido como a lei dos senos, cuja demonstração usa as relações do Teorema 1.5 e o Teorema 1.7, na demonstração utilizaremos os Teoremas 1.5 e 1.6. O resultado do Teorema 1.7 será utilizado na matemática do relógio de Sol.

Teorema 1.6. *Lei dos senos - Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico com os lados a, b e c opostos respectivamente aos ângulos internos α, β, γ , com $0 < a, b, c < \pi$ e $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, então*

$$\frac{\operatorname{sena}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{senb}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\operatorname{senc}}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Demonstração 1.6. *A partir da relação fundamental da trigonometria:*

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \\ \cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta = 1 \\ \cos^2 \gamma + \operatorname{sen}^2 \gamma = 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Podemos reescrever as fórmulas fundamentais da trigonometria esférica 1.3, 1.4 e 1.5 da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \\ \cos \beta &= \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c} \\ \cos \gamma &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ em 1.6 ficamos com:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha &= 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \right)^2 \\ \operatorname{sen}^2 \beta &= 1 - \left(\frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c} \right)^2 \\ \operatorname{sen}^2 \gamma &= 1 - \left(\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \right)^2 \end{aligned}$$

Desenvolvendo as expressões anteriores obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha &= 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{\cos^2 a - 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c} \\ &= \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c} \\ &= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

De maneira análoga, encontramos:

$$\operatorname{sen}^2 \beta = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 c}. \quad (1.8)$$

$$\operatorname{sen}^2 \gamma = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b}. \quad (1.9)$$

Note que os numeradores de cada uma das expressões obtidas em 1.7, 1.8 e 1.9 são iguais, então podemos escrever as seguintes relações:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c = \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 c = \operatorname{sen}^2 \gamma \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \quad (1.10)$$

A partir da primeira igualdade de 1.10, obtemos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c = \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 c$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 b}{\operatorname{sen}^2 \beta}$$

De maneira semelhante, utilizando a segunda igualdade de 1.10, encontramos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 b}{\operatorname{sen}^2 \beta} = \frac{\operatorname{sen}^2 c}{\operatorname{sen}^2 \gamma}$$

E assim:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 b}{\operatorname{sen}^2 \beta} = \frac{\operatorname{sen}^2 c}{\operatorname{sen}^2 \gamma}.$$

A partir primeira igualdade acima e usando as hipóteses $0 < a, b, c < \pi$ e $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, podemos concluir, extraíndo a raiz quadrada, que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\operatorname{sena}}{\operatorname{sen} \alpha} \right)^2 &= \frac{\operatorname{sen}^2 b}{\operatorname{sen}^2 \beta} \\ \frac{\operatorname{sena}}{\operatorname{sen} \alpha} &= \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 b}{\operatorname{sen}^2 \beta}} \\ \frac{\operatorname{sena}}{\operatorname{sen} \alpha} &= \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \beta} \end{aligned}$$

De modo semelhante encontramos,

$$\frac{\operatorname{sena}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{senc}}{\operatorname{sen} \gamma}. \quad (1.11)$$

□

O próximo resultado, que é uma consequência dos dois teoremas anteriores é conhecido como a fórmula dos quatro elementos consecutivos ou ainda, a fórmula das cotangentes. Utilizaremos essa fórmula no cálculo dos ângulos horários do relógio de Sol (Capítulo 2).

Teorema 1.7. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico, com lados a , b e c e ângulos internos α , β e γ , então*

$$\cos a \cos \gamma = \operatorname{sena} \cot b - \operatorname{sen} \gamma \cot \beta. \quad (1.12)$$

Demonstração 1.7. *Com o auxílio das fórmulas fundamentais da trigonometria esférica:*

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sena} \operatorname{senc} \cos \beta \quad (1.13)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sena} \operatorname{sen} b \cos \gamma \quad (1.14)$$

e da lei dos senos 1.11:

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{senc}}{\operatorname{sen} \gamma} \text{ ou ainda } \operatorname{senc} = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta} \quad (1.15)$$

Vamos mostrar que 1.12 vale. De fato, substituindo as expressões 1.14 e 1.15 em 1.13 ficamos com:

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos a (\cos a \cos b + \operatorname{sena} \operatorname{sen} b \cos \gamma) + \operatorname{sena} \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta} \cos \beta \\ &= \cos^2 a \cos b + \operatorname{sena} \operatorname{sen} b \cos a \cos \gamma + \operatorname{sena} \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \gamma \cot g \beta. \end{aligned}$$

E assim:

$$\cos b - \cos^2 a \cos b = \operatorname{sena} \operatorname{sen} b \cos a \cos \gamma + \operatorname{sena} \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \gamma \cot g \beta$$

o que nos leva a:

$$\cos b (1 - \cos^2 a) = \operatorname{sena} \operatorname{sen} b \cos a \cos \gamma + \operatorname{sena} \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \gamma \cot g \beta$$

ou equivalentemente a:

$$\cos b \operatorname{sen}^2 a = \operatorname{sena} \operatorname{sen} b \cos a \cos \gamma + \operatorname{sena} \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \gamma \cot g \beta$$

Dividindo essa igualdade por $\operatorname{sena} \operatorname{sen} b$, obtemos:

$$\cot g b \operatorname{sena} = \cos a \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \cot g \beta,$$

e portanto

$$\cos a \cos \gamma = \operatorname{sena} \cot g b - \operatorname{sen} \gamma \cot g \beta.$$

Como queríamos demonstrar.

□

2 APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ESFÉRICA

2.1 O Relógio de Sol

De acordo com Nogueira (2009, p. 33-37), na época do homem primitivo, há centenas de milhares de anos, surgiram as primeiras noções de marcação do tempo. O homem primitivo através de observações do céu, passou a compreender que o período com o ambiente iluminado é provocado quando o Sol permanece visível no céu, e na ausência deste, acontece o período da escuridão. Estes ancestrais, perceberam também que o Sol aparece sempre na mesma região e se esconde em uma outra região, sempre seguindo o mesmo percurso. Outra observação quando o Sol está visível no céu, levou os povos antigos a perceberem que o tamanho da sombra provocada pela luz do Sol, sobre uma árvore por exemplo, se altera em tamanho e posição. Veremos mais adiante que essa observação é de fundamental importância para construção do relógio de Sol.

Com o desenvolvimento das civilizações e o interesse pelo astro-rei, o homem conheceu mais precisamente as estações do ano, o que lhe permitiu, por exemplo, planejar o plantio e a colheita de seus alimentos. Hoje, com o avanço tecnológico o relógio de Sol deixou de ter utilidade no dia-a-dia das pessoas, mas seu valor científico é inestimável, pois seu estudo envolve áreas da Astronomia e da Matemática.

A figura 11 nos dá, de forma simples, uma compreensão do funcionamento do relógio de Sol. Imaginemos uma secção da Terra passando pela linha do equador formando um disco equatorial e o eixo da Terra sendo um gnômon (eixo que produz a sombra) perpendicular ao plano equatorial. No percurso do Sol na direção e sentido Leste-Oeste sobre o planeta Terra, podemos encontrar as horas a partir da sombra do gnômon projetada no plano equatorial. Desta forma, cada 15° de deslocamento da sombra corresponde ao período de uma hora, pois consideramos que a Terra faz um giro completo em torno do seu eixo em 24 horas e efetuando a divisão $360^\circ/24$, obtemos 15° por hora.

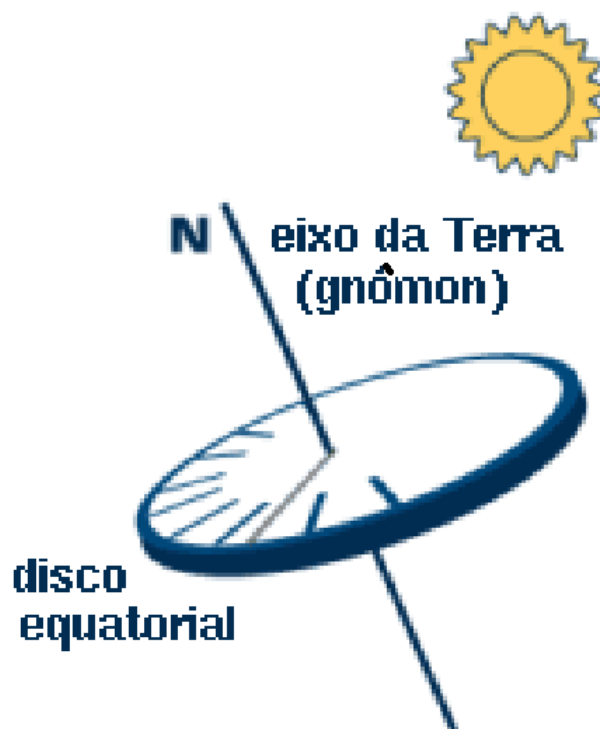


Figura 11 – Ideia de um relógio de Sol equatorial

Na figura 12, imaginamos a Terra como uma esfera oca cuja superfície é uma película translúcida, onde podemos visualizar o seu eixo e um anel na linha do equador. Desta forma, observamos com mais detalhes a projeção da sombra do o eixo da Terra sobre a superfície da esfera. Observe que a projeção da sombra do eixo sobre a superfície representa um meridiano.¹

De acordo com Porto (2018), os mais antigos relógios de Sol seriam os obeliscos construídos no Egito por volta de 3000 a.C.. Em Isaías 38:8, no Velho Testamento, cerca de 700 a.C., é mencionado um relógio de Sol. Não se sabe quando se colocou o gnômon inclinado e apontado na direção do eixo da Terra, mas há registro de um relógio desse tipo em Pompéia datado aproximadamente em 70 d.C.

Eis que farei retroceder dez graus a sombra lançada pelo Sol declinante no relógio de Acaz. Assim retrocedeu o Sol os graus que já tinha declinado. Isaías 38:8

Atualmente, os relógios de Sol são construídos a partir de estudos mais aprofundados do meio científico, com mais rigor e mais informações. Além de nos fornecer as horas, os relógios

¹ Meridiano é qualquer semi-círculo que contenha os pólos da Terra. O termo meridiano vem do latim *meridies* que significa linha do meio-dia. Filho (2014, p. 12)

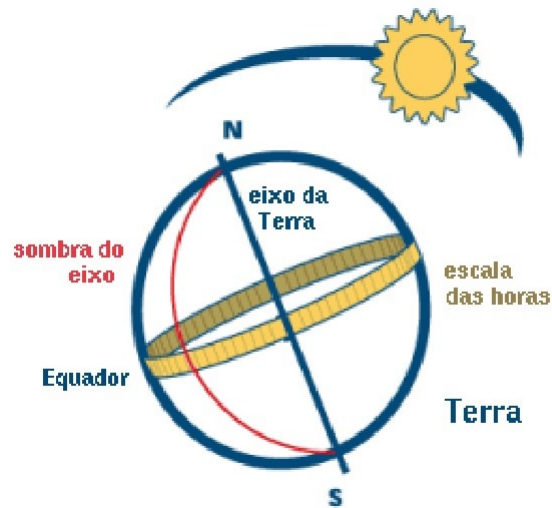


Figura 12 – Sombra do Sol na superfície da esfera.

modernos mostram também o meio dia verdadeiro, as estações do ano e os pontos cardeais, entre outros elementos.

O relógio de Sol tem dois componentes básicos e fundamentais: o instrumento que produz a sombra, o qual recebe o nome de gnômon e a superfície que a projeta definida como quadrante no qual são registrados as linhas horárias, a linha do equinócio e do solstício, entre outros. Alguns gnômons têm o formato triangular outros são apenas uma haste. Os quadrantes de acordo com o seu posicionamento em relação a superfície da Terra: horizontal (tangente a superfície da Terra), vertical (perpendicular a superfície da Terra) e equatorial (paralelo ao equador da Terra) denominam os relógios de Sol Horizontal, Vertical e Equatorial, respectivamente.

A figura 13 nos mostra esses principais componentes dentre outros elementos que fazem parte de sua construção.

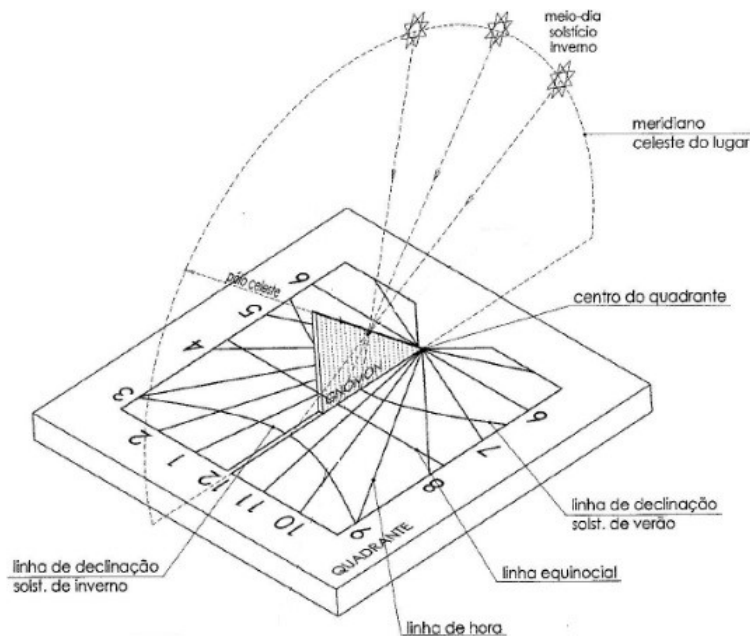


Figura 13 – Componentes de um relógio de Sol.

Apresentaremos a seguir o relógio de Sol Horizontal, ou seja, aquele cujo quadrante é tangente à superfície da Terra. Vamos mostrar sua construção e como fazer a sua leitura.

2.1.1 Relógio de Sol Horizontal

Nesta secção apresentamos como construir o relógio de Sol Horizontal, ou seja, o seu quadrante é tangente à superfície da Terra, assim como também fazer a sua leitura. O texto foi preparado e embasado em (7), (8), (3) e (9).

O relógio de Sol horizontal é composto por um quadrante na horizontal e um gnômon com ângulo de inclinação em relação a horizontal igual a latitude local, direcionado e apontado para o pólo celeste do hemisfério no qual o relógio está localizado.

Como sabemos, a latitude é o ângulo entre o plano do equador e a normal à superfície de referência. A latitude é medida a partir do equador, ou seja, a latitude no equador é 0° e varia de -90° no pólo Sul a $+90^\circ$ ² no pólo Norte. Por exemplo a latitude de Natal/RN-Brasil é $-5^\circ 47' 42''$ ou $5^\circ 47' 52''$ Sul.

Para construirmos um relógio de Sol horizontal precisamos identificar a linha Norte-Sul

² A ideia do ângulo de uma volta corresponder a 360° é atribuída aos babilônios (aproximadamente 1700 a.C.), esta civilização utilizava um sistema de numeração cujos agrupamentos eram de 60 em 60 e acreditava que o Sol girava em torno da Terra em um período de 360 dias. Surgiu assim, uma medida para ângulo, o grau. Souza e Pataro, 2012, p.165.

geográfico, determinar o ângulo de inclinação do gnômon em relação a horizontal e encontrar os ângulo horizontais (ângulos horários) de cada hora inteira no mostrador do relógio.

Uma forma simples de encontrarmos a direção Norte-Sul é a seguinte: em um terreno plano e amplo, com uma haste fixada perpendicularmente ao terreno e sob o Sol da manhã traçamos um segmento de reta no solo a partir do pé da base da haste até o final de sua sombra e com um barbante grosso fazemos um círculo de centro no pé da base da haste e raio de comprimento igual ao tamanho da sombra. À tarde precisamos observar a sombra da haste até que fique do mesmo tamanho da sombra da manhã. No momento em que a sombra tocar a circunferência, traçamos o raio. Finalmente, com a ajuda do barbante e um régua de pedreiro, traçamos a bissetriz do ângulo entre as duas sombras, obtendo assim, a direção Norte-Sul. Veja a figura 14 abaixo.

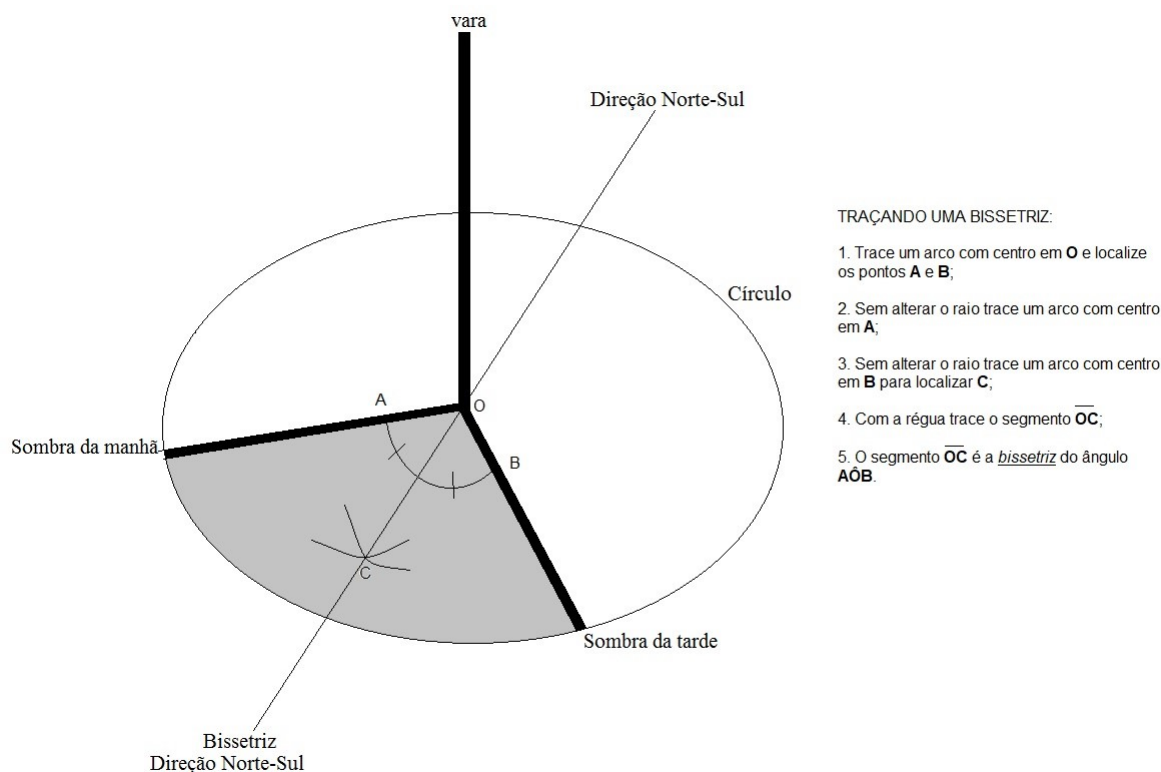


Figura 14 – Obtenção da direção Norte-Sul.

No relógio de Sol horizontal, o ângulo formado entre o gnômon e o mostrador é igual a latitude local. A figura 15 é uma representação de uma secção circular do planeta Terra (consideramos a Terra uma esfera) em relação ao eixo de rotação. O mostrador do relógio está tangente à superfície do planeta e o ângulo entre o gnômon e o quadrante é igual a latitude local, desse modo, o gnômon se posiciona paralelo ao eixo da Terra.

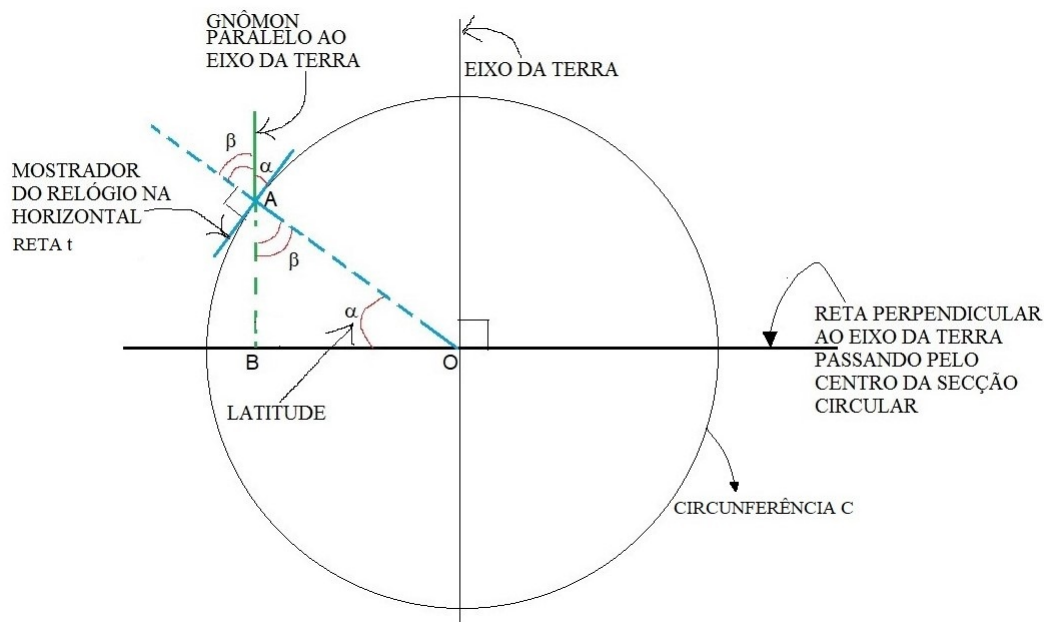


Figura 15 – relógio de Sol tangente a superfície do planeta Terra.

Na figura 15, a circunferência C de centro O representa a seção circular do planeta Terra em relação ao seu eixo de rotação e o segmento de reta t representa o mostrador do relógio de Sol horizontal posicionado sob a superfície da Terra e portanto tangente à circunferência C . Consideremos A o ponto de tangência da reta t com a circunferência C e o ponto B é a interseção entre a direção do gnômon e a a reta perpendicular ao eixo da Terra passando pelo centro O . Denotando por α o ângulo $B\hat{O}A$, a latitude local, temos que o ângulo entre o segmento t e o segmento que representa o gnômon também mede α e seja β o ângulo agudo $O\hat{A}B$. Note que ao prolongarmos a hipotenusa $\overline{OA}$ e o cateto $\overline{AB}$ em A , encontramos o ângulo β , devido a propriedade dos ângulos opostos pelo mesmo vértice. Como o raio $\overline{OA}$ é perpendicular à reta t , encontramos ainda os seguintes ângulos sobre a reta tangente t : o ângulo reto, o ângulo β e o ângulo α , assim α e β são complementares e portanto o gnômon é paralelo ao eixo da Terra.

A latitude do lugar onde vamos colocar o relógio de Sol horizontal, podemos obter com o auxílio de um aparelho de GPS ou simplesmente consultando o site <http://www.apolo11.com/latlon.php> ou http://www.aondefica.com/lat_3_.asp.

Os ângulo horários são calculados utilizando trigonometria esférica, mais especificamente, a fórmula dos quatro ângulos consecutivos do triângulo esférico (Teorema 1.7). Para esse cálculo vamos considerar um relógio de Sol horizontal sendo o centro de uma esfera, o seu quadrante sendo o plano horizontal NAS contendo este centro e o gnômon alinhado na direção Norte-Sul, formando assim um ângulo α (latitude local). Vejamos a figura 16.

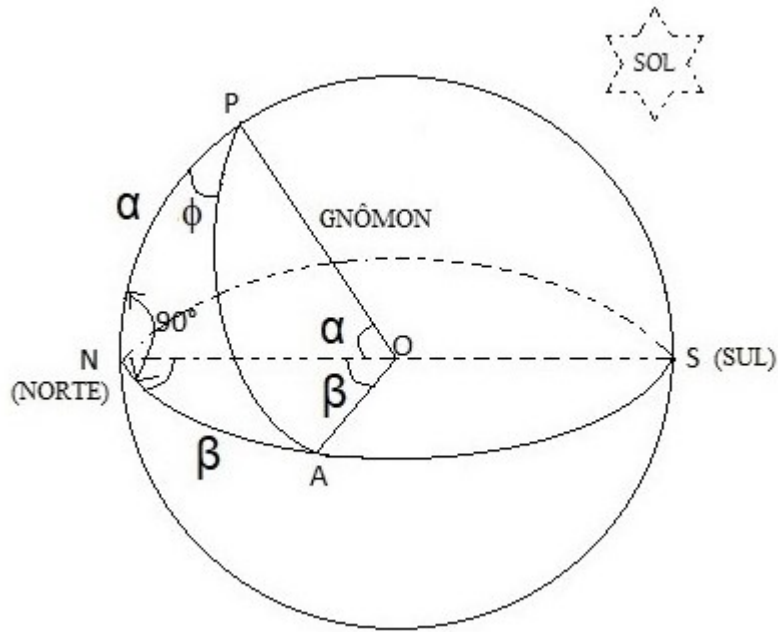


Figura 16 – Esfera com o relógio de Sol horizontal sendo o seu centro.

De acordo com a figura temos:

- O relógio no plano horizontal NAS com o gnômon colocado no centro da esfera no ponto O ;
- $\overline{OP}$ é o gnômon apontando para o pólo P^3 ;
- $\widehat{AP}$ é a projeção da sombra do gnômon $\overline{OP}$ na esfera;
- $\widehat{NPA}$ é o ângulo horário ϕ ;
- $\widehat{NOA} = \beta$ é o ângulo formado pela sombra do Sol no quadrante do relógio de Sol horizontal;
- α é a latitude local.

Ainda nesta figura temos o triângulo esférico ANP e conseguimos identificar quatro medidas de ângulos consecutivos que são:

- O arco $\widehat{AN} \equiv \beta$;
- $m(\widehat{PNA}) = 90^\circ$;

³ É referente ao pólo geográfico terrestre

- O arco $\widehat{NP} \equiv \alpha$;
- $m(\phi) = 15^\circ \cdot h$, com $h = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

O ângulo $\phi = 0^\circ$, corresponde a projeção da sombra às 12 horas determinando o meio dia verdadeiro, esse é o exato momento em que o Sol está passando sobre o meridiano local, ou seja, a sombra do Sol está direcionado na linha Norte-Sul do observador. Quando ϕ for 15° , 30° , 45° , 60° e 75° , encontramos os valores do ângulo β para cada horário correspondendo às 11h/13h, 10h/14h, 9h/15h, 8h/16h, 7h/17h respectivamente.

Aplicando a fórmula 1.12 dos 4 elementos consecutivos da trigonometria esférica, encontramos:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha \cos 90^\circ &= \operatorname{sen} \alpha \cot g \beta - \operatorname{sen} 90^\circ \cot g \phi \\
 0 &= \operatorname{sen} \alpha \cot g \beta - \operatorname{sen} 90^\circ \cot g \phi \\
 \operatorname{sen} \alpha \cot g \beta &= \operatorname{sen} 90^\circ \cot g \phi \\
 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} \\
 \tan \beta &= \operatorname{sen} \alpha \tan \phi \\
 \beta &= \arctan[\operatorname{sen} \alpha \tan \phi].
 \end{aligned}$$

Por exemplo em Natal a latitude local é $\alpha = 5^\circ 47' 42''$ Sul, aproximadamente $\alpha \approx 5,795^\circ$, portanto, os ângulos horários β são:

Tabela 1 – Ângulos horários de Natal/RN

ϕ	HORAS	LATITUDE α	$\beta = \arctg[\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\phi)]$	β
0°	12h	$5,795^\circ$	$\arctg[\operatorname{sen}(5,795^\circ) \cdot \operatorname{tg}(0^\circ)]$	0°
15°	11h/13h	$5,795^\circ$	$\arctg[\operatorname{sen}(5,795^\circ) \cdot \operatorname{tg}(15^\circ)]$	$\approx 1,55^\circ$
30°	10h/14h	$5,795^\circ$	$\arctg[\operatorname{sen}(5,795^\circ) \cdot \operatorname{tg}(30^\circ)]$	$\approx 3,34^\circ$
45°	9h/15h	$5,795^\circ$	$\arctg[\operatorname{sen}(5,795^\circ) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ)]$	$\approx 5,77^\circ$
60°	8h/16h	$5,795^\circ$	$\arctg[\operatorname{sen}(5,795^\circ) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ)]$	$\approx 9,92^\circ$
75°	7h/17h	$5,975^\circ$	$\arctg[\operatorname{sen}(5,795^\circ) \cdot \operatorname{tg}(75^\circ)]$	$\approx 20,65^\circ$

Finalmente para fazer a leitura da hora no relógio de Sol, temos que convertê-lo para o horário civil, pois raramente esses horários coincidem como explica Moraes (2003) (8), o relógio de Sol registra o horário do Sol verdadeiro que tem por base o movimento aparente do Sol e este movimento não é constante durante as duas passagens consecutivas no meridiano do lugar, o que define um dia solar verdadeiro, pois o movimento aparente do Sol não tem

velocidade constante devido ao seu movimento de translação da Terra ser mais acentuado no periélio ⁴ e também devido o ângulo horário ser medido no equador enquanto o movimento do Sol aparente descreve uma trajetória eclíptica, cujo plano é inclinado em relação ao plano do equador.

As distorções do movimento do Sol verdadeiro são corrigidas colocando um Sol médio (fictício) que tem as propriedades diferentes do movimento aparente do Sol. O Sol médio supostamente deve ter sua trajetória no plano do equador e movimento constante, desse modo o dia solar médio são iguais entre si.

Uma relação em comum entre o movimento do Sol verdadeiro e o movimento do Sol médio é que ambos tem o ano solar iguais. Essa diferença entre o tempo do Sol verdadeiro (TSV) e o tempo do solar médio (TSM), determina a equação do tempo (ET).

$$ET = TSV - TSM$$

Segundo Filho (2014) (3), a equação do tempo indica, para cada dia do ano, a diferença, em minutos e segundos, entre a posição real do Sol na eclíptica e a posição fictícia que ele teria no equador celeste, podem variar de 16 minutos positivos a 14 minutos negativos. Veja a tábua da equação do tempo abaixo do Almanaque: O Século, de 1947, arquivo de Fernando Correia de Oliveira.

Para termos uma leitura padrão e universal do tempo civil, que é o tempo do Sol médio, foi adotado em 1884, segundo Pessoa Filho (2014, p. 202), através de uma Conferência Internacional Meridiana, realizada em Washington, o meridiano de referência mundial, a linha Meridiana no Royal Observatory Greenwich (Inglaterra).

Com o tempo legal organizado em fusos de 15° para cada hora, a hora apresentada no relógio de Sol dever ser corrigida de acordo com o meridiano de referência do fuso horário a qual a região se encontra. Por exemplo, em Natal (Brasil), o horário oficial é o de Brasília (Brasil) que utiliza o meridiano 45° W de Greenwiche como referência.

De forma geral para converter a hora do relógio de Sol em tempo civil, inicialmente devemos ajustar a longitude do lugar à do meridiano de referência de lugar. Posteriormente, devemos ajustar o tempo solar verdadeiro ao tempo solar médio através da equação do tempo e finalmente, atender o tempo civil do lugar (acrescentar uma hora caso tenha horário de verão na sua região).

Para uma melhor compreensão do que foi exposto acima, vamos exemplificar a seguinte situação: em Natal (Brasil), no dia 5 de dezembro o relógio de Sol estava marcando 9 horas, qual foi a hora civil?

⁴ Momento em que a Terra está mais perto do Sol. Filho (2014) (3) p.75

O T E M P O

EQUAÇÃO

Como o sol retarda umas vezes, outras se acelera ou parece estacionário, idearam os astrônomos, para maior facilidade dos seus cálculos, reduzir estes movimentos desiguais a um tempo e movimento igual e médio. É o que se chama—Equação do tempo—ou diferença entre o tempo verdadeiro e o tempo uniforme mostrado pela seguin-

te tábua em relação aos dias do mês. Entre outros usos, serve ela, também, para regular os relógios. Se ao ponto do meio-dia, marcado em uma boa meridiana, o relógio mostrar os minutos e os segundos declarados na tabela para antes, ou depois do meio-dia verdadeiro, sabe-se que está certo.

Os minutos com o sinal + devem exceder ao meio-dia verdadeiro, e os que têm o sinal — devem faltar.

T Á B U A

Dias	Janeiro	Dias	Fevereiro	Dias	Março	Dias	Abril	Dias	Maio	Dias	Junho
5 +	5' 50"	5 +	14' 20"	5 +	11' 40"	5 +	2' 42"	5 -	3' 28"	5 -	1' 49"
10 +	7 57	10 +	14 31	10 +	10 26	10 +	1 10	10 -	3 48	10 -	0 53
15 +	9 49	15 +	14 23	15 +	9 2	15 -	0 2	15 -	3 53	15 -	0 8
20 +	11 24	20 +	14 58	20 +	7 34	20 -	1 11	20 -	3 44	20 +	1 13
25 +	12 42	25 +	13 16	25 +	6 2	25 -	2 9	25 -	3 20	25 +	2 18
30 +	13 39	29 +	12 44	30 +	4 30	30 -	3 55	30 -	2 45	30 +	3 20
Dias	Julho	Dias	Agosto	Dias	Setembro	Dias	Outubro	Dias	Novembro	Dias	Dezembro
5 +	4' 15"	5 +	5' 43"	5 -	1' 29"	5 -	11' 37"	5 -	16' 16"	5 -	9' 5"
10 +	5 2	10 +	5 5	10 -	3 11	10 -	13 1	10 -	15 55	10 -	6 53
15 +	5 38	15 +	4 18	15 -	4 56	15 -	14 12	15 -	15 12	15 -	4 31
20 +	6 2	20 +	3 8	20 -	6 41	20 -	15 9	20 -	14 8	20 -	2 2
25 +	6 13	25 +	1 52	25 -	8 25	25 -	15 50	25 -	12 45	25 +	0 28
30 +	6 8	30 +	0 26	30 -	10 4	30 -	16 13	30 -	11 3	30 +	2 15

Figura 17 – Tábua da equação do tempo.

A cidade de Natal está localizada a 35,21° W de longitude e a longitude oficial do lugar adotada por Brasília é 45° W. Então há uma diferença de 9,79°. Como o Sol demora cerca de 4 minutos para percorrer um grau de longitude, então ele irá demorar 39,16 minutos do meridiano de Natal até o meridiano oficial em Brasília. Em seguida, devemos tirar das 9 horas 39,16 minutos (39min09s) para nos aproximarmos da hora civil.

$$9h - 39min09s = 8h20min51s$$

Logo depois, consultando a tábua da equação do tempo (figura 17) no dia 5 de dezembro o Sol encontra-se adiantado 9min5s em relação ao Sol médio, portanto, o tempo civil em Natal nesse momento é

$$8\text{h}20\text{min}51\text{s} - 9\text{min}5\text{s} = 8\text{h}11\text{min}46\text{s}$$

A partir da teoria exposta neste capítulo, vamos orientar passo a passo na construção e leitura de um relógio de Sol horizontal em qualquer local do Brasil utilizando os seguintes materiais:

- Papel sulfite tamanho A4;
 - Papel peso 40
 - Papelão do tamanho do papel sulfite;
 - Cola branca;
 - Tesoura;
 - Régua;
 - Transferidor;
 - Calculadora científica;
 - Lápis, caneta e borracha;
1. Pesquise no site apolo11.com/latlon.php a latitude e a longitude de sua localidade;
 2. Complete o quadro abaixo com o auxílio da calculadora científica para obter as medidas dos ângulos horários;

ϕ	HORAS	LATITUDE α	$\beta = \arctan[\text{sen}\alpha \cdot \tan \phi]$	β
0°	12 h			
15°	11h/13h			
30°	10h/14h			
45°	9h/15h			
60°	8h/16h			
75°	7h/17h			

3. Agora vamos construir o quadrante (mostrador) do relógio de Sol horizontal com suas linhas horárias. Vamos considerar o papel sulfite um retângulo $ABCD$, onde os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são os lados de menores medidas. Trace uma reta unindo os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, esta será a linha das 12 horas, depois trace uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$ a 2 cm deste lado. Seja O o ponto de interseção entre as duas retas, conforme figura 18.

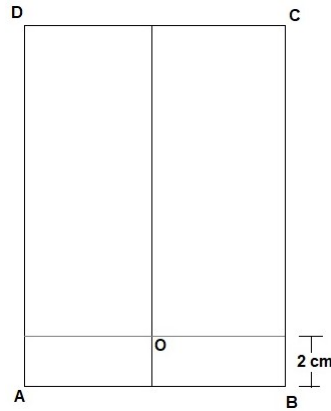


Figura 18 – Papel sulfite

Finalmente vamos traçar as linhas horárias com o auxílio do transferidor marcando as medidas dos ângulos horários β obtidos no passo 2. Marcamos, portanto, todos os ângulos horários de forma simétrica em relação a linha das 12 horas no papel sulfite. Veja a figura 19 abaixo.

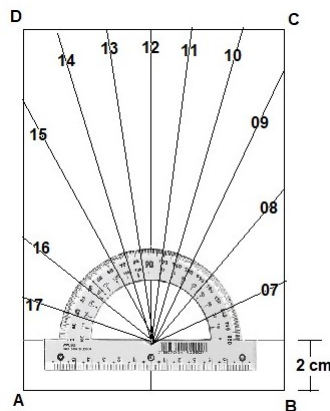


Figura 19 – Quadrante

4. Agora vamos construir o gnômon (ponteiro) que projetará a sombra a sombra do Sol sobre o quadrante. Com o papel peso 40 construímos um triângulo retângulo $\triangle EFG$

com o cateto $\overline{EF}$ medindo 10 cm e a medida do ângulo entre a hipotenusa e esse cateto igual a latitude local. Ainda neste cateto deixe uma aba retangular com 2 cm de largura, de acordo com a figura 20.

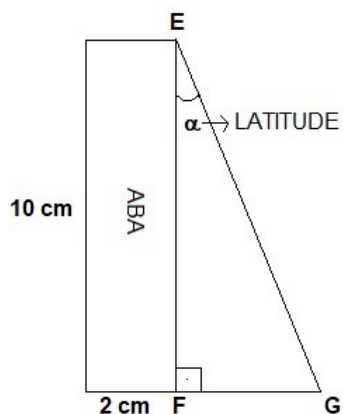


Figura 20 – gnômon

5. Cole a aba do gnômon no quadrante de modo que o cateto $\overline{EF}$ esteja alinhado sobre a linha das 12 h e o vértice E coincida com o ponto O . O gnômon neste formato de triângulo deve ser colado perpendicularmente ao quadrante. Observe a figura 21.

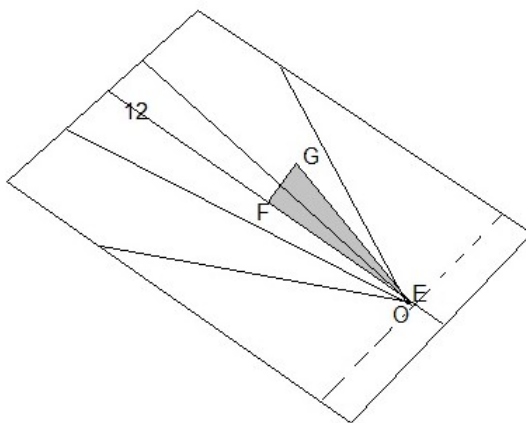


Figura 21 – gnômon colado no quadrante

O relógio de Sol horizontal está pronto. Precisamos agora posicioná-lo corretamente em um plano horizontal para fazermos a leitura das horas.

6. Vamos encontrar a linha Norte-Sul, conforme procedimento demonstrado na página 33 deste trabalho.

7. Posicionamos o relógio de Sol de modo que a linha das 12 horas esteja sobre a linha Norte-Sul com o gnômon apontando para o Sul. A sombra projetada do gnômon sobre o quadrante estará marcando a horário verdadeiro e não o horário civil.

Finalmente para encontrarmos o horário civil, faremos dois ajustes. Um deles consultamos a equação do tempo, figura 17, acrescentamos (caso o valor dos minutos for positivo) ou diminuímos (se o valor dos minutos for negativo) alguns minutos no horário obtido no relógio de Sol e o outro, precisamos calcular o tempo em que o Sol demora para se deslocar do meridiano oficial do Brasil (em Brasília) em relação ao seu meridiano local ou vice-versa, lembramos que o Sol demora 4 minutos para percorrer um grau de longitude. Finalmente encontramos o horário civil, acrescentando (se você estiver a oeste de Brasília) ou diminuindo (se você estiver a oeste de Brasília) esse tempo ao horário anterior.

3 NOÇÕES DA GEOMETRIA ESFÉRICA NUMA ATIVIDADE PRÁTICA

Para a descrição dessa atividade prática, utilizamos o formato do plano de aula que realizamos no dia-a-dia em nosso planejamento para as aulas do ensino básico. O plano de aula é a descrição específica do que será utilizado em sala de aula em um determinado período, no qual constam um tema, justificativa, objetivos, metodologia, materiais utilizados, cronograma e desenvolvimento e avaliação.

TEMA

Comparando alguns resultados da Geometria Euclidiana com a Geometria Esférica.

JUSTIFICATIVA

Esta atividade foi elaborada com o interesse de explorar um assunto pouco divulgado e levar ao conhecimento dos alunos do ensino básico a admirável e apaixonante Geometria Esférica. Apesar de ser pouco ou nada conhecida, inclusive entre alguns professores de matemática, esta geometria é abordada sutilmente nos currículos de ciências e geografia quando estudamos sistemas de coordenadas geográficas. Saindo das estruturas curriculares encontramos utilidade para o estudo de Geometria Esférica quando nos deparamos com o relógio de Sol, pois seu funcionamento como vimos no capítulo 2 depende diretamente da geometria esférica. A apropriação dos conceitos e propriedades dessa geometria, proporcionam aos alunos o desenvolvimento de um raciocínio lógico-dedutivo.

OBJETIVOS

Levar o conhecimento aos alunos que existem outras Geometrias, além da Euclidiana. Perceber que alguns resultados da Geometria Euclidiana não funcionam na Geometria Esférica, tais como: na Geometria Esférica as retas são finitas, porém ilimitadas; não há retas paralelas; duas retas sempre se interceptam em dois pontos; a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° . Constatar que a Geometria Esférica está presente em outras disciplinas como geografia e ciências.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada na atividade foi explorar alguns conceitos e resultados que são bem conhecidos na Geometria Euclidiana e mostrar que eles não se aplicam à Geometria Esférica, através da manipulação de materiais adequados para a aula, pois segundo Lima (2010, p. 187) no ensino e na aprendizagem da geometria deve haver uma relação entre o

concreto e abstrato, é importante se valorizar o manuseio, a manipulação e a visualização de objetos do mundo físico para o aprendizado dos conceitos abstratos. Foi embasado nesse contexto que procuramos desenvolver uma atividade prática, lidando com materiais concretos, para facilitar o aprendizado da Geometria Esférica.

MATERIAIS UTILIZADOS

Para o desenvolvimento da atividade serão utilizados os seguintes materiais:

- Papel sulfite A4;
- Régua (30 cm);
- Transferidor;
- Liga elástica ou elástico;
- Bolas de isopor (150 mm);
- Lápis, caneta, hidrocor, borracha.

CRONOGRAMA E DESENVOLVIMENTO

A atividade será realizada em cinco aulas de 50 minutos cada.

Na primeira aula solicitaremos aos alunos que em grupos de quatro, pesquisem na internet na sala de informática da escola, a respeito da Geometria Euclidiana e respondam as seguintes perguntas:

- Quem foi Euclides de Alexandria?
- Qual foi sua obra mais importante?
- O que são axiomas?
- O que são teoremas?

Na aula seguinte, os grupos deverão socializar as suas pesquisas para a turma a fim de discutí-las para uma melhor compreensão. Se necessário o professor poderá intervir para complementar o estudo ou tirar as dúvidas ocorridas.

Na terceira aula, através de aula expositiva o professor revisará alguns conceitos, propriedades e resultados da Geometria Euclidiana.

Para a quarta aula em um primeiro momento os alunos trabalharão em grupo de 3 e serão solicitados para realizarem a seguinte tarefa:

- Desenhe num papel sulfite uma reta.

- Desenhe uma reta em uma bola de isopor.
- Desenhe num papel sulfite duas retas paralelas.
- Desenhe duas retas paralelas numa bola de isopor.

Para a realização desta tarefa serão disponibilizados aos alunos papel sulfite, régua, elástico, bola de isopor e hidrocor.

No segundo momento através de aula expositiva e utilizando material concreto, o professor irá apresentar as noções básicas da Geometria Esférica, tais como: uma reta na esfera, ângulo entre duas retas, triângulo esférico.

Para a última aula os alunos em grupos de três realizarão a seguinte atividade com o auxílio dos materiais citados anteriormente e responderão a seguinte lista de exercícios:

1. Desenhe (trace) uma reta em:
 - a) um papel sulfite.
 - b) uma bola de isopor.
2. Uma reta na superfície esférica é finita ou infinita?
3. É possível medir o comprimento de uma reta:
 - a) Num plano?
 - b) Numa superfície esférica?

Nestas 3 atividades espera-se que os alunos compreendam a noção de reta em uma superfície plana e esférica e percebam através de sua construção que na superfície plana a reta é infinita enquanto a superfície esférica a reta é finita mas ilimitada.

4. Qual o comportamento entre duas retas:
 - a) No plano?
 - b) Na superfície esférica?

Espera-se nessa atividade que os alunos percebam que na superfície esférica duas retas sempre se interceptam, ou seja, não há retas paralelas, enquanto na superfície plana podemos ter retas paralelas ou retas concorrentes.

5. É possível dividir a reta em semirretas por um ponto?
 - a) No plano?

b) Na superfície esférica?

Nessa questão espera-se que os alunos percebam que não há semirretas na superfície esférica.

6. Por um ponto podemos traçar quantas retas:

a) No plano?

b) Na superfície da esfera?

7. Por dois pontos podemos traçar quantas retas passando por esses pontos:

a) No plano?

b) Na superfície da esfera?

Nas questões 6 e 7 esperamos que os alunos percebam que na superfície esférica pode-se construir infinitas retas com um ou dois pontos e na superfície plana é possível traçar infinitas retas a partir de um ponto e com dois pontos apenas uma única reta.

8. Marque dois pontos numa superfície plana. Trace a menor distância entre eles. Faça o mesmo em uma superfície esférica.

Espera-se nessa atividade que os alunos percebam que a menor distância entre dois pontos na superfície plana é um segmento de reta e na superfície esférica é um arco de circunferência máxima.

9. Desenhe uma reta e um ponto fora dela numa superfície plana. Trace uma outra reta paralela a essa reta passando por esse ponto. Faça o mesmo procedimento numa superfície esférica.

Nessa atividade espera-se que os alunos percebam que não há retas paralelas na superfície esférica e contradiz o quinto postulando de Euclides.

10. Desenhe um triângulo num plano. Com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos internos e depois determine a soma desses ângulos?

Desenhe um triângulo esférico numa superfície esférica. Com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos internos e depois determine a soma desses ângulos?

Nessa atividade espera-se que os alunos percebam empiricamente que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo no plano é igual a dois retos, enquanto que na superfície esférica é maior que dois retos.

11. É possível termos em um triângulo dois ângulos retos? E os três ângulos retos?

Por fim, perceber que é possível ambas as situações de modo que o triângulo seja construído em uma superfície esférica.

AVALIAÇÃO

Finalmente os alunos serão avaliados continuamente desde a primeira aula, verificando o seu desempenho, participação, observação da troca de ideias entre eles, na manipulação dos materiais e instrumentos de medidas e cumprimento das tarefas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho partiu de indagações surgidas em sala de aula sobre o funcionamento e construção do relógio de Sol. A partir daí entra um elemento fundamental no processo ensino aprendizagem, o professor. Na intenção de motivar a aula, prender a atenção dos seus alunos, dar significados aos conteúdos abordados, cabe então ao professor pesquisar sobre o assunto, elaborar um planejamento e aplicá-lo, em outras palavras, o professor deve ser um pesquisador.

Esperamos que esta dissertação possa contribuir de alguma forma para a sociedade, desde uma simples apreciação da leitura até um aprofundamento sobre o tema para que possa ser explorado em sala de aula, proporcionando assim uma discussão sobre a existência de outras Geometrias, como a Geometria Esférica. Elas estão presentes no nosso dia-a-dia, em determinadas situações utilizamos por exemplo a Geometria Euclidiana, já em outras a Geometria Esférica, ou seja, como dizia o matemático Henri Poincaré: “*Nenhuma Geometria é mais correta do que qualquer outra, apenas é a mais conveniente.*”

Destacamos que a proposta da atividade prática que apresentamos não foi aplicada em sala de aula. Pretendemos em um futuro próximo aplicá-la e dar continuidade, analisando e divulgando os resultados obtidos.

Por fim, não poderia deixar de comentar o enriquecimento do conhecimento adquirido ao longo das pesquisas realizadas que com certeza contribuíram de forma direta ou indireta no desempenho da prática pedagógica desenvolvida em sala de aula.

Referências

- [1] DO CARMO, M. P., *Geometrias Não-Euclidianas. Matemática Universitária*, volume 6, SBM, Rio de Janeiro, 1987.
- [2] GUIDORIZZI, H. L., *Um Curso de Cálculo*, volume 2, LTC, São Paulo, 5ª edition, 2011.
- [3] DE SOUZA OLIVEIRA FILHO, K. et al., *Astronomia e Astrofísica*, Livraria da Física, Rio Grande do Sul, 3ª edition, 2014.
- [4] COUTINHO, L., *Trigonometria Esférica: a matemática de um espaço curvo*, Interciência, Rio de Janeiro, 1 edition, 2015.
- [5] COUTINHO, L., *Convite às Geometrias Não-Euclidianas*, Interciência, Rio de Janeiro, 3 edition, 2018.
- [6] SILVA JÚNIOR, E. D. S., *O teorema da função implícita em um contexto aplicado e algumas conexões no cálculo de áreas de regiões planas*, 2008.
- [7] CANALLE, J. B. G. et al., *Astronomia: Ensino Fundamental e Médio*, volume 11, MEC, Brasília, 2009.
- [8] MORAIS, C. A. L., *Astronomia do Ensino da Matemática*, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2003.
- [9] OLIVEIRA, F. C. D., *Equação do Tempo*, <http://estacaochronographica.blogspot.com/2015/01/equacao-do-tempo.html>, Acessado em 01/12/18.