

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Um estudo sobre cônicas: equações polinomiais de segundo grau

Jorge Paulo da Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Jorge Paulo da Silva

Um estudo sobre cônicas: equações polinomiais de segundo grau

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon

USP – São Carlos
Julho de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S586e Silva, Jorge Paulo
Um estudo sobre cônicas: equações polinomiais de
segundo grau / Jorge Paulo Silva; orientador Tiago
Henrique Picon . -- São Carlos, 2019.
121 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Cônicas. 2. Equações polinomiais. 3. Álgebra
linear.. 4. Geometria analítica.. 5. Dobraduras. I.
Picon , Tiago Henrique , orient. II. Título.

Jorge Paulo da Silva

A study on conic: second-degree polynomial equations

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon

USP – São Carlos
July 2019

*Este trabalho é dedicado aos meus pais Mário (in memoriam) e Vita Paulino, a minha esposa
Bruna e minha filha Íris.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que iluminou todo o meu caminho durante esta caminhada e por ter me possibilitado estar firme durante toda essa trajetória.

Aos meus pais Mário (in memoriam) e Vita, que embora não tiveram a oportunidade de estudar, me incentivaram sempre.

A minha esposa Bruna Ferreira de Marco Silva, por ter acompanhado cada etapa dessa nova conquista, com muita paciência e amor, fazendo-me sempre seguir em frente e não permitindo que eu desistisse mesmo em momentos que parecia tão difícil continuar.

A todos os docentes do PROFMAT da USP – Ribeirão Preto, que tão importantes foram nesta etapa de minha vida, em especial ao professor Dr. Tiago Henrique Picon que com muita dedicação e paciência foi de suma importância durante essa longa e árdua jornada em busca do conhecimento.

Agradeço aos amigos que conquistei durante o curso, apoiando uns aos outros e com harmonia conseguimos alcançar nossos objetivos.

Por fim, agradeço à CAPES pelo suporte e à Sociedade Brasileira de Matemática – SBM – pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

“A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza.”
(Stephen Hawking)

RESUMO

SILVA, J. P. **Um estudo sobre cônicas: equações polinomiais de segundo grau**. 2019. 121 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Este trabalho tem como objetivo estudar equações polinomiais de segunda ordem em duas variáveis que podem ser representadas, através de uma mudança de variáveis adequada, por uma equação reduzida de uma cônica (degenerada ou não). Elementos básicos em Álgebra Linear e Geometria Analítica são necessários para o estudo.

Palavras-chave: Cônicas, Equações polinomiais, Álgebra linear, Geometria analítica, Dobraduras.

ABSTRACT

SILVA, J. P. **A study on conic: second-degree polynomial equations.** 2019. 121 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

This work aims to study second order polynomial equations in two variables that can be represented by a suitable change of variables by a reduced equation of a conic (degenerate or not). Basic elements in Linear Algebra and Analytical Geometry are required for the study.

Keywords: Conic, Polynomial Equations, Linear Algebra, Analytical Geometry, Folding.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Retas paralelas	24
Figura 2 – Paralelas	25
Figura 3 – Plano cartesiano	25
Figura 4 – Construção do ponto C	26
Figura 5 – Vetores paralelos	27
Figura 6 – Soma vetorial	28
Figura 7 – Comutatividade	28
Figura 8 – Associatividade	29
Figura 9 – Vetor oposto	29
Figura 10 – Associatividade com ponto	29
Figura 11 – Multiplicação de vetor por escalar	30
Figura 12 – Reta AB	31
Figura 13 – Soma ponto mais vetor	32
Figura 14 – Plano α	33
Figura 15 – Ponto X do plano	33
Figura 16 – Interseção das retas r e AC	33
Figura 17 – Interseção das retas s e AB	34
Figura 18 – Vetores no plano	34
Figura 19 – Escada vetorial	35
Figura 20 – Combinação linear	38
Figura 21 – Plano \mathbb{R}^2	40
Figura 22 – Vetor \vec{v} na base β	41
Figura 23 – Escada vetorial	42
Figura 24 – Lei dos cossenos	45
Figura 25 – Vértices sobre a reta não focal	48
Figura 26 – Vértice entre os focos	48
Figura 27 – Elementos da elipse	49
Figura 28 – Elipse	51
Figura 29 – Elementos da elipse Exemplo 18	52
Figura 30 – Elementos da elipse Exemplo 20	52
Figura 31 – Pontos da Hipérbole	53
Figura 32 – Focos da Hipérbole	54
Figura 33 – Focos e vértices da hipérbole	54

Figura 34 – Hipérbole	56
Figura 35 – Elementos da hipérbole 1	57
Figura 36 – Elementos da hipérbole 2	57
Figura 37 – Parábola	59
Figura 38 – Elipse transladada	69
Figura 39 – Hipérbole transladada	70
Figura 40 – Retas paralelas	77
Figura 41 – Translação e rotação da elipse	81
Figura 42 – Parábola rotacionada	83
Figura 43 – Rotação e translação da hipérbole	89
Figura 44 – Rotação e translação da elipse	91
Figura 45 – Parábola rotacionada	93
Figura 46 – Elipse	96
Figura 47 – Hipérbole	97
Figura 48 – Parábola	97
Figura 49 – Circunferência	98
Figura 50 – Pontos sobre a circunferência	99
Figura 51 – F_2 sobre ponto A_1	99
Figura 52 – Primeiro vinco	100
Figura 53 – F_2 sobre o ponto A_2	100
Figura 54 – Formando a elipse	101
Figura 55 – Evolução nos traços da Elipse	101
Figura 56 – Elipse	102
Figura 57 – Elipse no plano cartesiano	102
Figura 58 – Distâncias d_1 e d_2	103
Figura 59 – Distâncias entre os vértices focais e não focais	103
Figura 60 – $d(PF_1) + d(PF_2) = R$	105
Figura 61 – Reta e ponto	105
Figura 62 – Foco e Diretriz	106
Figura 63 – Pontos sobre a diretriz	106
Figura 64 – Ponto sobre foco	107
Figura 65 – Primeiro vinco	107
Figura 66 – Mediatriz	108
Figura 67 – Evolução na construção	108
Figura 68 – Vértice da Parábola	109
Figura 69 – Mediatriz com reta focal	109
Figura 70 – Retas $s \parallel t$	110
Figura 71 – Parábola no plano cartesiano	110
Figura 72 – Parábola completa	111

Figura 73 – Definição de parábola	112
Figura 74 – Focos da Hipérbole	113
Figura 75 – Pontos sobre a Hipérbole	113
Figura 76 – F_2 sobre a circunferência	114
Figura 77 – Focos da Hipérbole	114
Figura 78 – Formando a Hipérbole	115
Figura 79 – Construindo a hipérbole	115
Figura 80 – Hipérbole	116
Figura 81 – Hipérbole	116
Figura 82 – Reta focal da hipérbole	117
Figura 83 – Hipérbole	117
Figura 84 – Hipérbole	118
Figura 85 – Hipérbole e seus elementos	118
Figura 86 – Definição de hipérbole	119

SUMÁRIO

1	PRELIMINARES	23
1.1	Vetores	23
1.1.1	<i>Grandezas escalares</i>	23
1.1.2	<i>Grandezas vetoriais</i>	23
1.1.3	<i>Operações com vetores</i>	26
1.2	Equação vetorial da reta	31
1.3	Equação vetorial do plano	32
1.4	Alguns conceitos em Álgebra Linear	36
1.5	Conceito de Base	39
1.6	Produto interno	43
2	UM ESTUDO GEOMÉTRICO DAS CÔNICAS	47
2.1	Elipse	47
2.2	Hipérbole	53
2.3	Parábola	58
3	CÔNICAS	61
3.1	Forma matricial	61
3.2	Um estudo sobre as equações cujo termo $a_{12} = 0$	64
3.3	Autovalores e Autovetores	71
3.4	Um estudo sobre equações com $a_{13} = a_{23} = 0$	74
3.5	Estudo das equações no caso geral	78
3.6	Exemplos	86
4	APLICAÇÕES DIDÁTICAS	95
4.1	Introdução	95
4.2	Objetivos	95
4.3	Público	95
4.4	Teoria	96
4.5	Metodologia	98
4.6	Descrição	98
4.6.1	<i>Construção geométrica da Elipse</i>	98
4.6.2	<i>Elipse: um estudo analítico da construção</i>	102
4.6.3	<i>Construção geométrica da Parábola</i>	105

4.6.4	<i>Parábola: um estudo analítico da construção</i>	108
4.6.5	<i>Atividades</i>	111
4.6.6	<i>Construção geométrica da Hipérbole</i>	112
4.6.7	<i>Hipérbole: um estudo analítico da construção</i>	116
REFERÊNCIAS		121

INTRODUÇÃO

Os historiadores atribuem ao matemático Menaecmus (380 - 320 a.C. aproximadamente), discípulo de Eudóximo na Academia de Platão, a descoberta das curvas cônicas ou seções cônicas quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo. Foi ele o primeiro a mostrar que elipses, parábolas e hipérbolas são obtidas como seções de um cone quando cortado por planos não paralelos à sua base. Mais tarde, o astrônomo e matemático grego Apolônio de Perga (262-190 a.C.) recompilou e aprimorou os resultados conhecidos até então sobre o assunto na sua obra *Seções Cônicas*. (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013)

Porém, o enfoque analítico das cônicas só acontece com Fermat, uma vez que os matemáticos gregos não possuíam uma notação algébrica adequada. Seus estudos e análises deram lugar a sete equações que ele podia obter como formas irredutíveis a partir da equação polinomial de segunda ordem em duas variáveis.

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}, \text{ no qual } a_{ij} \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Segundo os valores dos coeficientes dessa função, Fermat classificou os lugares geométricos de $f(x, y) = 0$, obtidos na seguinte nomenclatura: reta, hipérbole equilátera, par de retas concorrentes, parábola, círculo, elipse e hipérbole axial.

Nosso objetivo é classificar os pontos que satisfazem $f(x, y) = 0$ no qual f é dada em (1) nos casos em que ao menos um dos coeficientes dos termos quadráticos (a_{11} ou a_{12} ou a_{22}) seja não nulo.

Inicialmente, reservamos o Capítulo 1 para abordar conceitos básicos de Álgebra Linear e Geometria Analítica. No Capítulo 2 apresentaremos formalmente as principais cônicas não degeneradas a saber: elipse, hipérbole e parábola tanto do ponto de vista geométrico quanto algébrico. Já no Capítulo 3, faremos um estudo da função (1) em três casos particulares:

1. As funções quadráticas (1) no qual $a_{12} = 0$.
2. As funções quadráticas, tal que a_{13} e a_{23} de (1) sejam nulos.
3. As funções quadráticas (1) com o caso geral.

No Capítulo 4 apresentaremos uma proposta de atividade pedagógica que poderá ser desenvolvida com alunos da Terceira Série do Ensino Médio, com o objetivo de estabelecer uma relação entre Cônicas e Dobraduras.

PRELIMINARES

Neste capítulo, vamos apresentar o conceito de vetores e suas aplicações no estudo de retas e planos.

1.1 Vetores

A palavra grandeza é frequentemente utilizada para definirmos termos científicos e pode ser definido como tudo aquilo que pode ser medido ou contado.

Em Matemática distinguimos dois tipos de grandezas: as escalares e as vetoriais.

1.1.1 Grandezas escalares

Existe um grupo de grandezas que são definidas quando conhecemos seu valor numérico (magnitude ou módulo) e a unidade de medida correspondente, essas grandezas são chamadas de grandezas escalares. Vejamos alguns exemplos a seguir:

1. $8kg$ de Massa;
2. $25m^2$ de Área;
3. $45^{\circ}C$ de Temperatura.

1.1.2 Grandezas vetoriais

Existem porém, um grupo de grandezas que, além do valor numérico e da unidade associada, requer-se outras características para uma descrição completa.

Definimos grandezas vetoriais como uma entidade matemática que possui três características associadas: um valor numérico, uma direção e sentido.

Neste trabalho estamos interessados em definir uma grandeza vetorial associada a pontos em um plano. Dados dois pontos A e B distintos pertencentes a um plano, denotamos por \overrightarrow{AB} o vetor associado a esses dois pontos definidos conforme as três características associadas a seguir:

- (i) O número associado a \overrightarrow{AB} é um número real positivo indicado por $|\overrightarrow{AB}|$, também chamado de módulo de \overrightarrow{AB} , definido como a distância (comprimento segundo uma unidade fixada) entre os pontos A e B , representada por $d(A, B)$. (BARBOSA, 1985)

Tal distância satisfaz as seguintes propriedades:

- a) Para quaisquer dois pontos A e B do plano, tem-se $d(A, B) \geq 0$. Além disso, $d(A, B) = 0$ se e somente se $A = B$.
- b) Para quaisquer dois pontos A e B do plano, tem-se $d(A, B) = d(B, A)$.
- c) Para quaisquer três pontos do plano A, B e C , tem-se $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. Igualdade só ocorre se C pertence ao segmento AB .
- (ii) Uma direção associada a $\overrightarrow{AB} \doteq$ feixe de retas paralelas à reta que passa pelos pontos A e B .
- (iii) Um sentido associado a $\overrightarrow{AB} \doteq$ escolha da orientação de uma das retas paralelas à reta determinada por AB . Usualmente definimos o apontamento de A para B . Veja a figura abaixo.

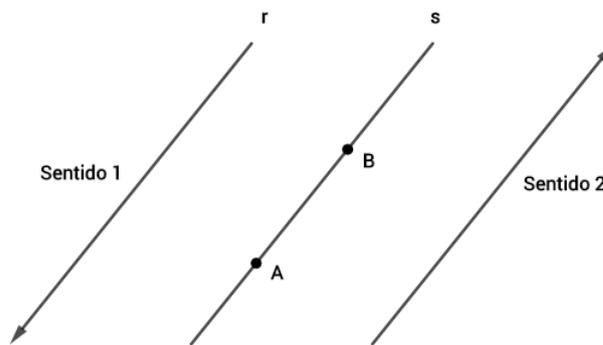


Figura 1 – Retas paralelas

Ao longo deste texto adotaremos a notação de vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ quando $A \neq B$ e denotamos $\vec{v} \doteq \overrightarrow{AA} \doteq \vec{0}$.

Dessa forma não podemos chamar um vetor de segmento de reta orientado. De fato, suponhamos as retas s e t paralelas a reta r . Sejam os pontos A e B pertencentes à reta s , e os pontos C e D pertencentes à reta t , tal que $d(A, B) = d(C, D)$. Considere $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}_2 = \overrightarrow{CD}$. Temos claramente que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

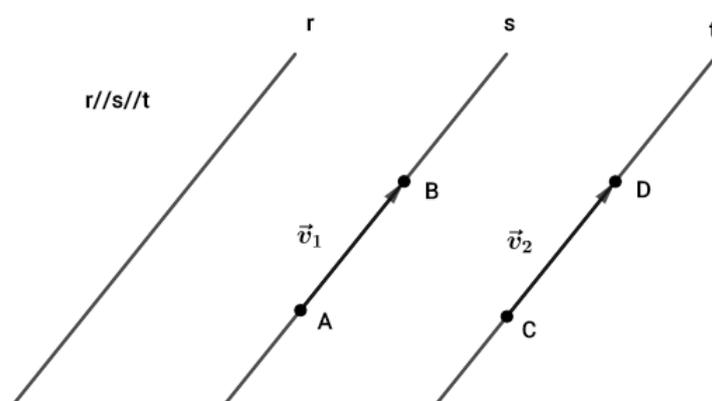


Figura 2 – Paralelas

Vamos verificar a igualdade segundo os axiomas.

- (i) $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$ pois $d(A, B) = d(C, D)$.
- (ii) A reta que passa por A e B é paralela a reta que passa por C e D , isto é $s \parallel t$.
- (iii) \vec{v}_1 possui o mesmo sentido de \vec{v}_2 , uma vez que \vec{v}_1 parte de A para B e \vec{v}_2 parte de C para D .

Como conclusão, podemos afirmar que o segmento orientado CD é uma das infinitas representações possíveis que um vetor pode ter.

Vamos utilizar Geometria Analítica para ilustrar exemplos de vetores. No sistema cartesiano abaixo considere os seguintes pontos.

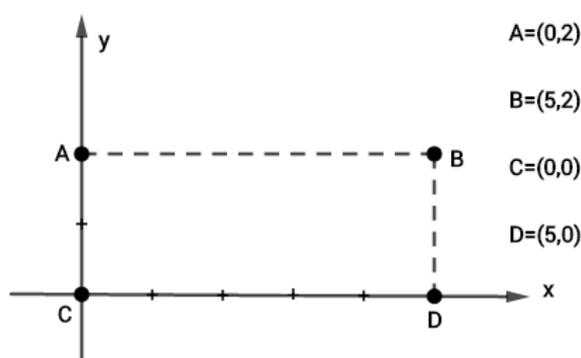


Figura 3 – Plano cartesiano

Podemos afirmar que os vetores \vec{AB} e \vec{CD} são idênticos mas \vec{AB} não é idêntico a \vec{DC} . Analogamente \vec{BA} é idêntico a \vec{DC} mas \vec{BA} não é idêntico a \vec{CD} .

- (i) $|\vec{AB}| = |\vec{CD}| = |\vec{DC}| = |\vec{BA}|$ pois $d(A, B) = d(C, D) = d(D, C) = d(B, A) = 5$.

(ii) \vec{AB} , \vec{CD} , \vec{DC} e \vec{BA} possuem a mesma direção pois a reta que passa por A e B é paralela a reta que passa por C e D .

(iii) \vec{AB} e \vec{CD} possuem o mesmo sentido mas \vec{CD} e \vec{DC} não.

Definição 1. Dado um vetor $\vec{v} = \vec{AB}$, definimos seu vetor oposto por $-\vec{v} \doteq \vec{BA}$.

Exemplo 1. Na Figura 3 os vetores \vec{AB} e \vec{DC} são opostos.

1.1.3 Operações com vetores

Nesta seção vamos apresentar algumas operações usuais com vetores.

1. Soma de um ponto com um vetor

Dado um ponto P e um vetor $\vec{v} = \vec{AB}$ em um plano, podemos exibir um (único) ponto C tal que $\vec{PC} = \vec{AB}$. Chamamos o ponto C a soma do ponto P com o vetor \vec{v} , isto é

$$C = P + \vec{v} \Leftrightarrow \vec{PC} = \vec{v}$$

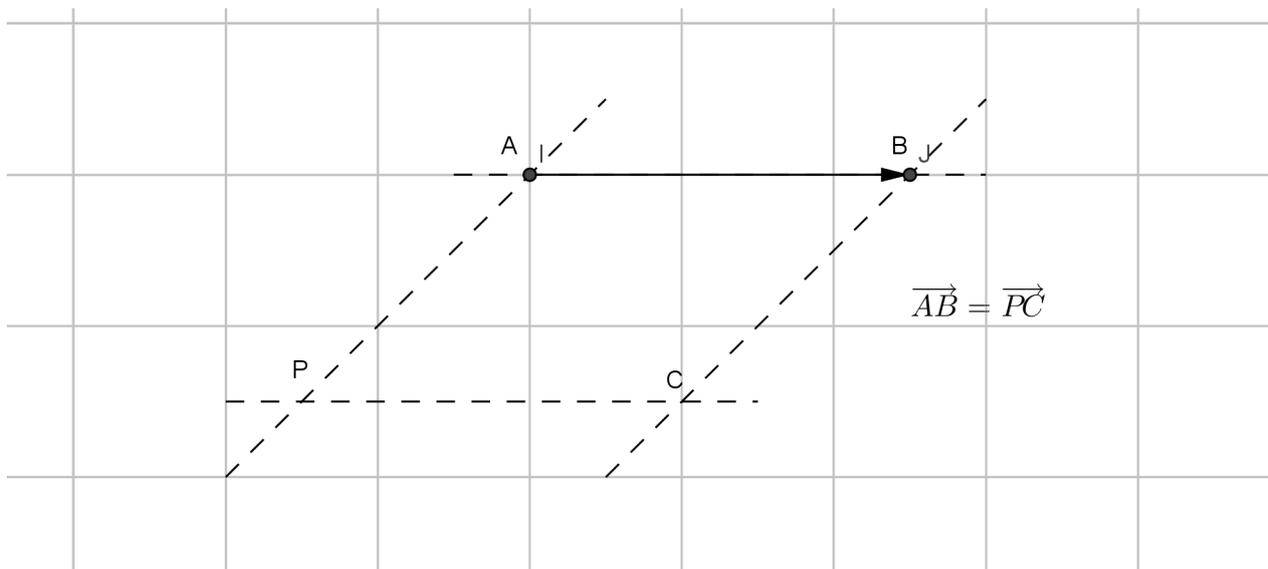


Figura 4 – Construção do ponto C

São válidas as seguintes propriedades.

(i) $A + \vec{0} = A$. Pela definição, $X = A + \vec{0} = A + \vec{AA} \Leftrightarrow \vec{AX} = \vec{AA} \Leftrightarrow X = A$.

(ii) $A + \vec{AB} = B$. Pela definição, $X = A + \vec{AB}$ é o único ponto tal que $\vec{AX} = \vec{AB}$. Logo, $X = B$.

(iii) $(A - \vec{v}) + \vec{v} = A$. De fato $X + \vec{v} = A \Leftrightarrow \vec{XA} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{AX} = -\vec{v} \Leftrightarrow X = A - \vec{v}$.

(iv) $A + \vec{v} = B + \vec{v} \Rightarrow A = B$ (cancelamento do vetor).

Justificativa geométrica. Indicando $X = A + \vec{v} = B + \vec{v}$, por definição temos $\vec{AX} = \vec{BX}$. Assim,

os segmentos \overline{AX} e \overline{BX} são paralelos e os pontos A, B e X são colineares. Veja a Figura 5.

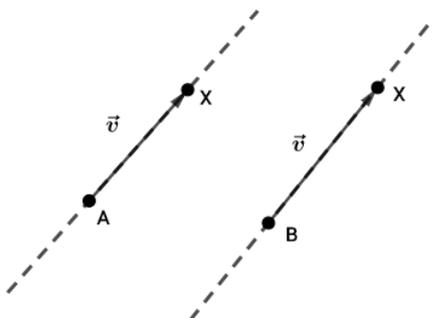


Figura 5 – Vetores paralelos

Também temos $|\overline{AX}| = |\overline{BX}|$ e então, como os vetores \overrightarrow{AX} e \overrightarrow{BX} possuem o mesmo sentido, temos $A = B$.

Justificativa algébrica. Escrevendo $X = A + \vec{v} = B + \vec{v}$ temos $\overrightarrow{AX} = \vec{v} = \overrightarrow{BX}$. Logo,

$$\overrightarrow{XA} = -\vec{v} = \overrightarrow{XB}.$$

Portanto, pela propriedade, concluímos $A = X + \overrightarrow{XA} = X + \overrightarrow{XB} = B$.

(v) $A + \vec{u} = A + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$ (cancelamento do ponto).

Indicando $X = A + \vec{u} = A + \vec{v}$, temos $\overrightarrow{AX} = \vec{u}$ e também $\overrightarrow{AX} = \vec{v}$. Logo, $\vec{u} = \vec{v}$.

2. Soma de vetor com vetor

Definição 2. Dois vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} são equipolentes quando eles possuem a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Indica-se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Definição 3. Sejam dados dois vetores $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$. Definimos a soma desses vetores com um vetor $\vec{s} = \overrightarrow{OP}$ que se obtém construindo, a partir de um ponto arbitrário O do espaço, os segmentos \overrightarrow{OM} e \overrightarrow{MP} , respectivamente, equipolentes aos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} .

Façamos a partir de O as seguintes aplicações:

$$O + \vec{v} = M \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{OM} \quad (1)$$

$$M + \vec{w} = P \Rightarrow \vec{w} = \overrightarrow{MP} \quad (2)$$

Somando (1) e (2) temos,

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{w} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \\ &= \overrightarrow{OP}. \end{aligned}$$

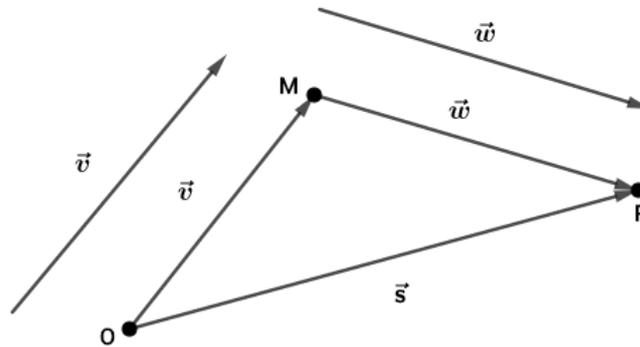


Figura 6 – Soma vetorial

O método utilizado para somar dois vetores no exemplo acima é chamado de regra do polígono ou poligonal. Esse método não se restringe apenas a dois vetores, podemos somar n vetores, basta para isso ajustar a extremidade de um vetor na origem do outro, o vetor soma será dado pelo vetor que une a origem do primeiro vetor com a extremidade do último vetor a ser somado, como mostrado na Figura 6.

São válidas as seguintes propriedades.

1. Comutatividade: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. Associatividade: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$
3. Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. Elemento simétrico: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
5. Associatividade soma com ponto: $P + (\vec{u} + \vec{v}) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$

As propriedades anteriores podem ser descritas geometricamente.

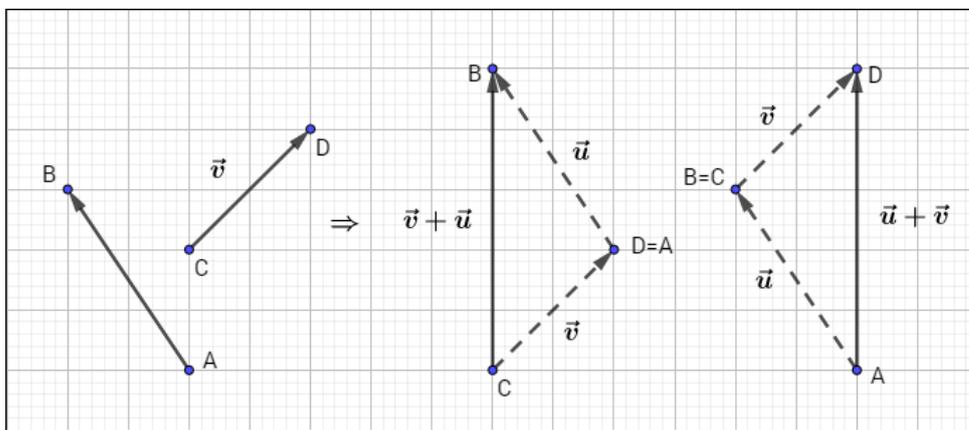


Figura 7 – Comutatividade

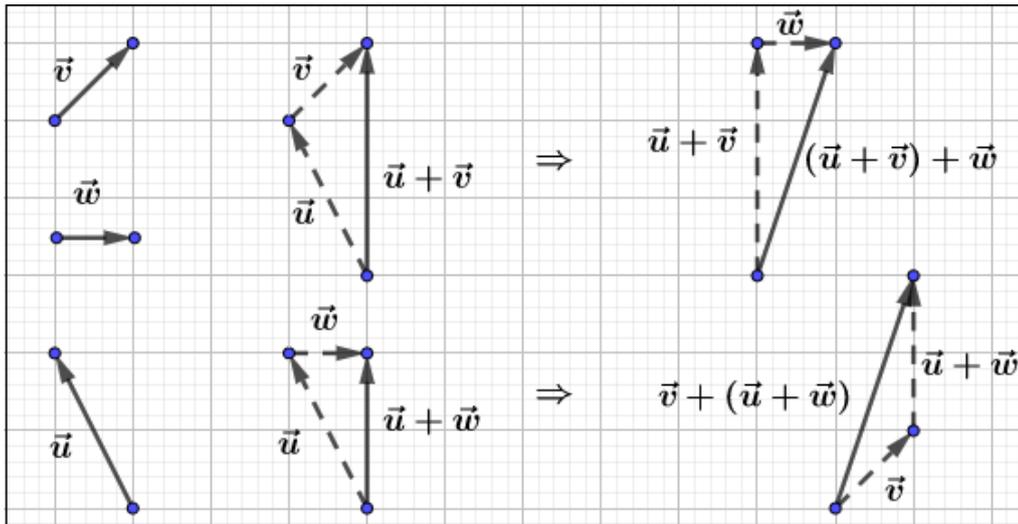


Figura 8 – Associatividade

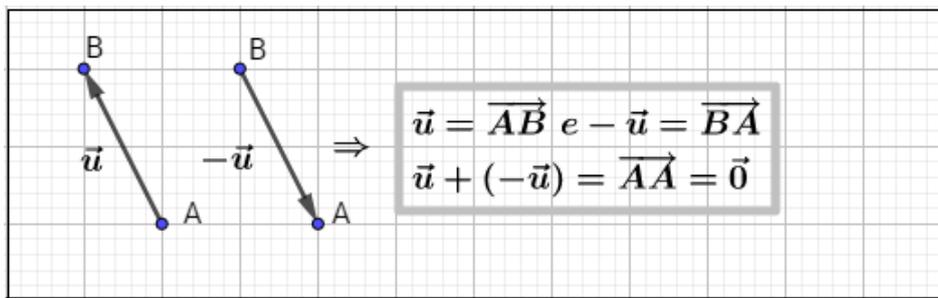


Figura 9 – Vetor oposto

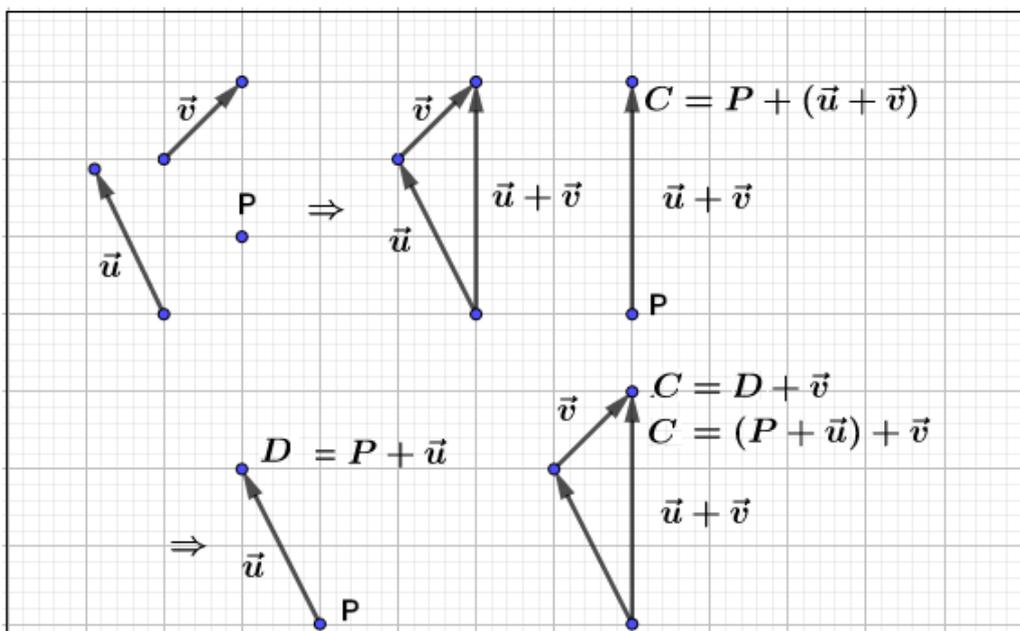


Figura 10 – Associatividade com ponto

3. Multiplicação de um número real por um vetor

Definição 4. Dados um número real $\lambda \neq 0$ e um vetor \vec{u} , o produto λ pelo vetor \vec{u} é um vetor $\lambda \cdot \vec{u}$ (ou $\lambda\vec{u}$) definido da seguinte forma: (segundo a definição de vetor)

- (i) Módulo: $|\lambda\vec{u}| \doteq |\lambda| \cdot |\vec{u}|$;
- (ii) Direção de $\lambda\vec{u}$ é a mesma de \vec{u} ;
- (iii) Sentido de $\lambda\vec{u}$ será o mesmo de \vec{u} se $\lambda > 0$ e, sentido contrário ao de \vec{u} , se $\lambda < 0$.

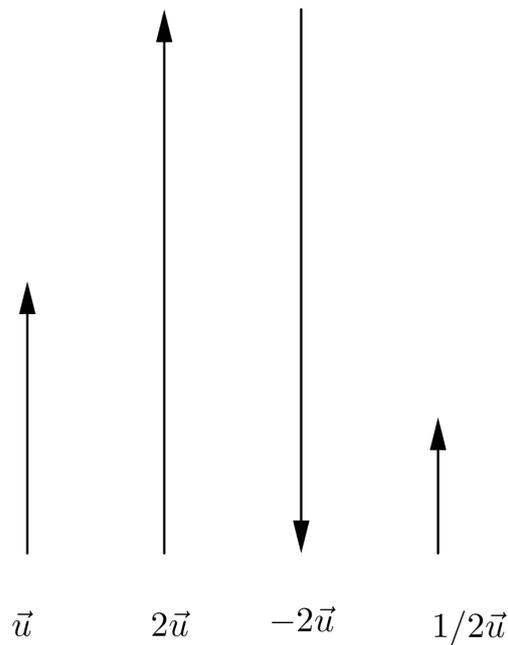


Figura 11 – Multiplicação de vetor por escalar

São válidas as seguintes propriedades:

1. Distributiva da multiplicação em relação à adição de escalares

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}.$$

2. Distributiva da multiplicação em relação a adição de vetores

$$\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Associatividade

$$\alpha \cdot (\beta \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1.2 Equação vetorial da reta

Pelo axioma de incidência, dados dois pontos A e B distintos, existe uma única reta r que contém os pontos A e B .

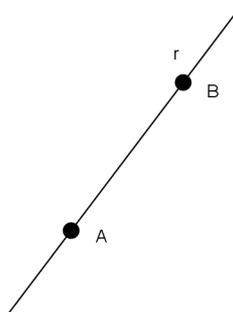


Figura 12 – Reta AB

Seja X um ponto qualquer pertencente a reta r . Uma questão natural é indagarmos se X pode ser determinado em função de A e B . De fato, todo X pode ser expresso da seguinte forma

$$X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

no qual a igualdade significa que $\overrightarrow{AX} = t \cdot \overrightarrow{AB}$.

A entidade (1.1) é chamada de equação vetorial da reta AB .

Exemplo 2. Se $t = 0$, então,

$$\begin{aligned} X &= A + t \cdot \overrightarrow{AB} \\ X &= A + 0 \cdot \overrightarrow{AB} \\ X &= A. \end{aligned}$$

Equivalentemente, $\overrightarrow{AX} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow X = A$.

Exemplo 3. Se $t = 1$, então

$$\begin{aligned} X &= A + t \cdot \overrightarrow{AB} \\ X &= A + 1 \cdot \overrightarrow{AB} \\ X &= B. \end{aligned}$$

Equivalentemente, $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow X = B$.

Exemplo 4. Todo ponto do segmento AB pode ser expresso da forma.

$$X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}, \text{ no qual } 0 < t < 1.$$

Observação: A equação vetorial da reta AB também pode ser expressa da forma

$$Y = B + s \overrightarrow{AB}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Dado P pertencente a reta r e \vec{v} um vetor direção da reta r (isto é $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, $\forall C, D$ pertencente a reta r com $C \neq D$), então a equação vetorial da reta r pode ser expressa da seguinte forma

$$X = P + t \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} = t \cdot \vec{v}, \text{ no qual } t \in \mathbb{R}.$$

Podemos interpretar a equação acima, como a rapidez com que o ponto X se desloca sobre a reta r , com velocidade vetorial constante \vec{v} , no tempo t e posição inicial P . (BOULOS; CAMARGO, 1987)

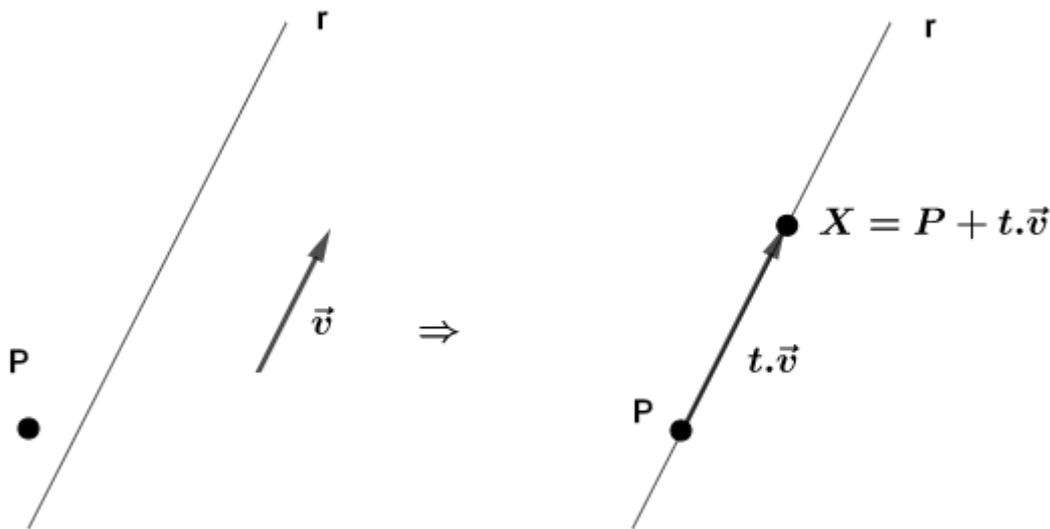
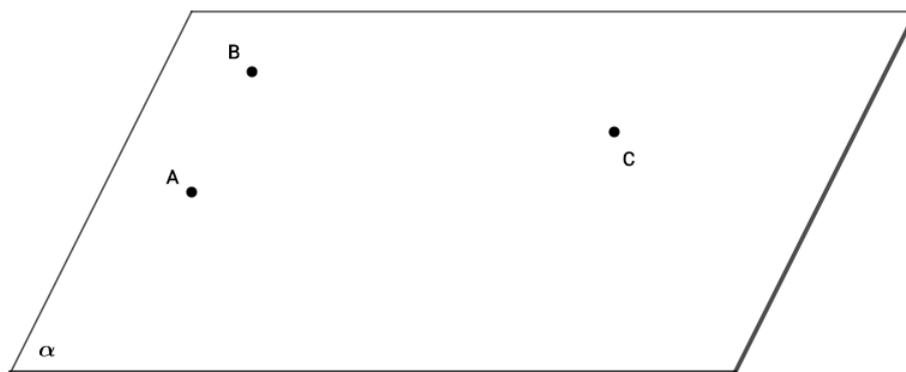


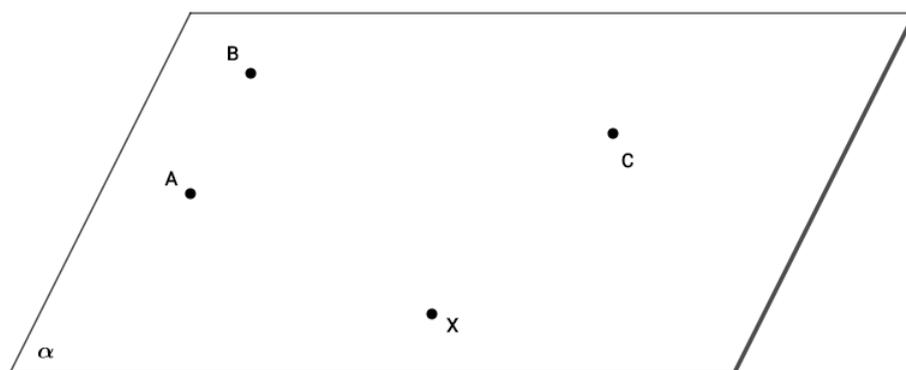
Figura 13 – Soma ponto mais vetor

1.3 Equação vetorial do plano

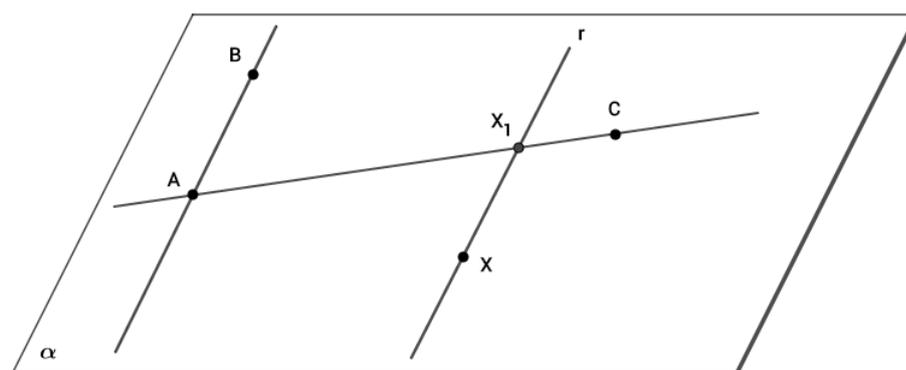
Considere três pontos não colineares (não pertencem simultaneamente a uma reta comum). Afirimo que existe um único plano α que contém os pontos A, B e C .

Figura 14 – Plano α

Seja X um ponto qualquer do plano α . Uma questão natural, é saber se X pode ser expresso em função dos pontos A , B e C .

Figura 15 – Ponto X do plano

Seja r a reta paralela a reta AB (ou \overleftrightarrow{AB}) passando por X . Como A , B e C são não colineares, então a reta r intersecta \overleftrightarrow{AC} . Considere X_1 o ponto de interseção entre essas retas, isto é $X_1 \doteq r \cap \overleftrightarrow{AC}$.

Figura 16 – Interseção das retas r e AC

Tomemos s a reta paralela a AC passando por X . Novamente, como A, B e C são não colineares, então a reta s intercepta a reta AB . Seja X_2 o ponto de interseção entre essas retas, isto é, $X_2 \doteq s \cap \text{reta } AB$

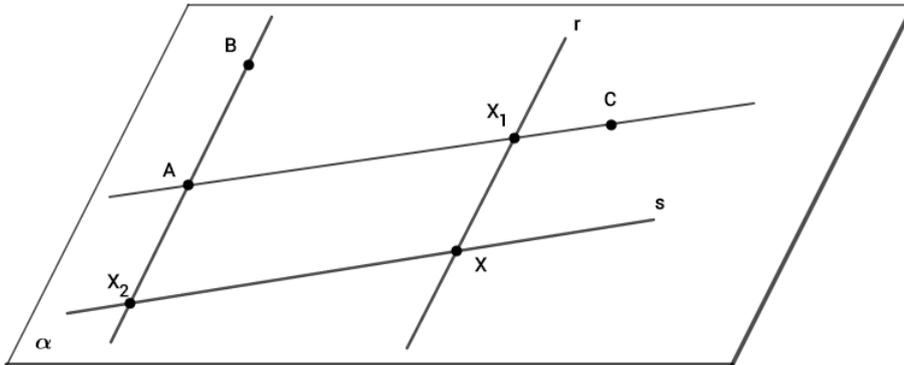


Figura 17 – Interseção das retas s e AB

Como X_1 pertence a reta AC e X_2 pertence a reta AB , então

$$\exists t_1 \in \mathbb{R} \text{ tal que } X_1 = A + t_1 \cdot \overrightarrow{AC} \text{ isto é } \overrightarrow{AX_1} = t_1 \cdot \overrightarrow{AC}$$

e

$$\exists t_2 \in \mathbb{R} \text{ tal que } X_2 = A + t_2 \cdot \overrightarrow{AB} \text{ isto é } \overrightarrow{AX_2} = t_2 \cdot \overrightarrow{AB}.$$

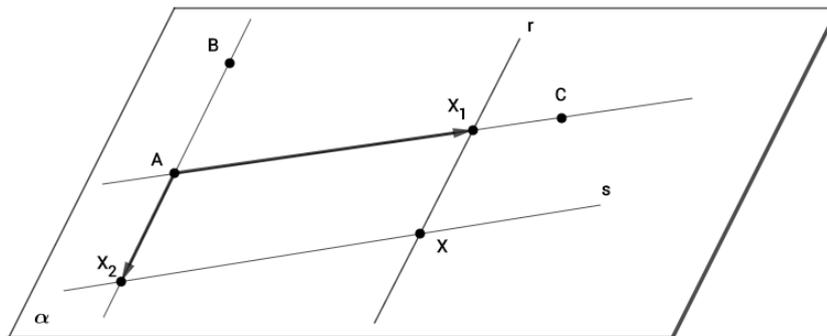


Figura 18 – Vetores no plano

Como $\overrightarrow{AX_2} \parallel \overrightarrow{X_1X}$, podemos descrever a soma $\overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{AX_2}$ por $\overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{X_1X} = \overrightarrow{AX}$. Assim,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{AX_2} \\ \overrightarrow{AX} &= t_1 \overrightarrow{AC} + t_2 \overrightarrow{AB} \\ X &= A + t_1 \overrightarrow{AC} + t_2 \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Concluimos que dado qualquer ponto X pertencente ao plano α formado por três pontos A, B, C não colineares, podemos escrevê-lo da seguinte forma

$$X = A + t_1 \overrightarrow{AC} + t_2 \overrightarrow{AB}, \quad (1.2)$$

com $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Note que a identidade dada em (1.2), não é a única maneira de representar o ponto X no plano. Analogamente podemos escrever da seguinte forma.

$$X = B + s_1 \vec{BA} + s_2 \vec{BC}$$

com $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

Definição 5. Sejam \vec{v} , \vec{u} vetores não nulos e não colineares, e P um ponto. A expressão $X = P + t_1 \vec{v} + t_2 \vec{u}$, com $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ é chamada de equação vetorial do plano determinado por \vec{v} , \vec{u} passando por P .

Vamos ilustrar os conceitos de reta e plano vetorial no exemplo abaixo.

Exemplo 5. Considere a escadinha representada na figura abaixo. Queremos determinar:

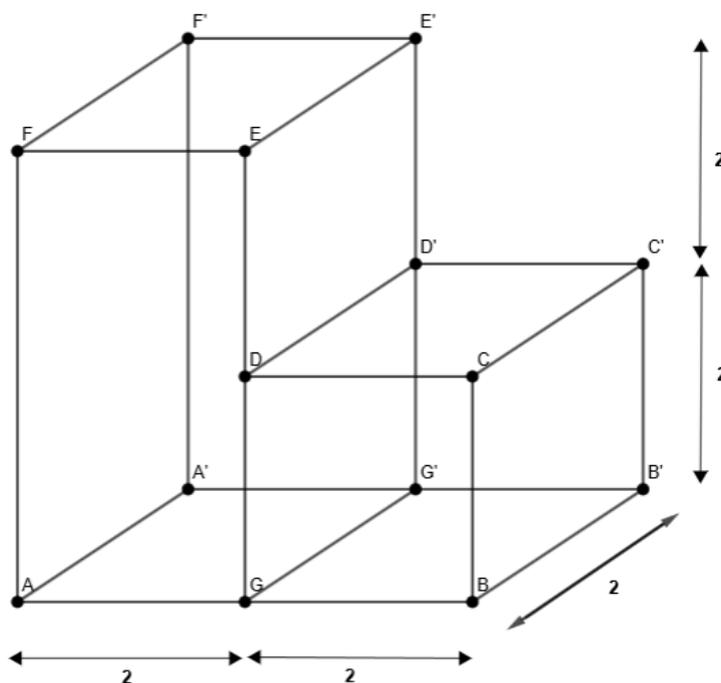


Figura 19 – Escada vetorial

- (a) A equação vetorial da reta FB' ,
- (b) A equação vetorial da reta paralela a reta FB' que passa por C ,
- (c) A equação vetorial do plano $A'BF$,
- (d) A equação vetorial do plano $A'BF$ passando por F' ,
- (e) A entidade geométrica que representa a intersecção do plano $A'BF$ com a reta AC' ,
- (f) A entidade algébrica que representa a intersecção dos planos $A'BF$ e CEE' .

Resolução:

(a) A equação vetorial da reta FB' é dada por:

$$X = F + t\overrightarrow{FB'}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) A equação vetorial da reta FB' que passa por C é dada por:

$$X = C + t\overrightarrow{FB'}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) A equação vetorial do plano $A'BF$ é dada por.

$$X = A' + t_1\overrightarrow{A'B} + t_2\overrightarrow{A'F}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) A equação vetorial do plano $A'BF$ passando por F' é dada por:

$$X = F' + t_1\overrightarrow{A'B} + t_2\overrightarrow{A'F}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

(e) A entidade algébrica que representa a interseção do plano $A'BF$ com a reta AC' , é dada por:

$$\begin{cases} X = A' + t_1\overrightarrow{A'B} + t_2\overrightarrow{A'F}, & t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \\ X = A + s\overrightarrow{AC'}, & s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(f) A entidade algébrica que representa o plano $A'BF \cap CEE'$, é dada por:

$$\begin{cases} X = A' + t_1\overrightarrow{A'B} + t_2\overrightarrow{A'F}, & t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \\ X = C + s_1\overrightarrow{CE} + s_2\overrightarrow{CE'}, & s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.4 Alguns conceitos em Álgebra Linear

Iniciaremos a seção com o conceito de espaço vetorial.

Definição 6. Um espaço vetorial real E consiste de um conjunto não vazio, cujos elementos são chamados vetores, munido de duas operações, $+$: $E \times E \rightarrow E$ chamada soma e, \cdot : $E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ chamada multiplicação por um número real que satisfaz as seguintes propriedades:

Considere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$,

- Comutatividade,

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

- Associatividade,

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}).$$

- Elemento neutro: existe $\vec{0} \in E$ tal que,

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}.$$

- Elemento simétrico: dado $\vec{u} \in E$ existe $-\vec{u} \in E$ tal que,

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$$

- Distributividade.

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}.$$

- Multiplicação por 1

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}.$$

- Comutatividade,

$$(\alpha\beta) \cdot \vec{u} = \alpha(\beta \cdot \vec{u}).$$

- Distributividade,

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$$

Exemplo 6. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, o símbolo \mathbb{R}^n representa o espaço vetorial euclidiano n -dimensional. Os elementos de \mathbb{R}^n são as listas ordenadas $\vec{u} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, de n números naturais. No qual $\alpha_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, n$.

Por definição, a igualdade vetorial $\vec{u} = \vec{v}$ significa n igualdades numéricas $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, \dots, n$.

Os números $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são chamados as coordenadas do vetor \vec{u} . As operações do espaço vetorial \mathbb{R}^n são definidas por

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n), \\ \alpha \cdot \vec{u} &= (\alpha\alpha_1, \dots, \alpha\alpha_n). \end{aligned}$$

O conjunto \mathbb{R}^n munido das operações $+$ e \cdot (soma e produto) satisfaz os axiomas de um espaço vetorial real, em especial o elemento neutro é $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ e o elemento simétrico de $\vec{u} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é $-\vec{u} = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$.

Exemplo 7. Um matriz real $a = [a_{ij}]_{m \times n}$ é uma lista de números reais a_{ij} com índices duplos, no qual $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Representa-se a matriz a como um retângulo numérico com m linhas e n colunas, no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento da i -ésima linha pela j -ésima coluna:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

O vetor $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ é o i -ésimo vetor linha da matriz a e o vetor $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$ é o j -ésimo vetor coluna da matriz a . Quando $m = n$, diz-se que a é uma matriz quadrada. O conjunto $M(m)$ de todas as matrizes $m \times n$ é um espaço vetorial munido da operação soma dada por $a + b = [a_{ij} + b_{ij}]$ no qual $a = [a_{ij}]$ e $b = [b_{ij}]$ e da operação multiplicação por escalar, $\alpha a = [\alpha a_{ij}]$. A matriz nula $0 \in M(m \times n)$ é dado por $a_{ij} = 0$ para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ e o simétrico de $a = [a_{ij}]$ é $-a = [-a_{ij}]$.

Definição 7. Um vetor \vec{v} é uma combinação linear (CL) dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ se existirem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n. \quad (1.3)$$

Algumas observações e comentários

- (i) O vetor nulo $\vec{0}$ é combinação linear de qualquer vetor \vec{v} , uma vez que $\vec{0} = 0\vec{v}$.
- (ii) O vetor \vec{v} é sempre uma combinação linear dele mesmo, pois $\vec{v} = 1\vec{v}$.
- (iii) O vetor \vec{v} será múltiplo do vetor \vec{u} , se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.
- (iv) Dizemos que \vec{v} é gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ quando \vec{v} for combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$.

Exemplo 8. Dada a figura abaixo temos a seguinte combinação linear $\vec{v} = 1 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2$:

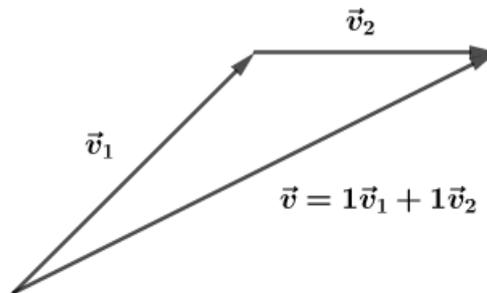


Figura 20 – Combinação linear

Observamos que se \vec{v} é combinação linear de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$, os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, podem não ser únicos. Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 9. Considere \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v} como na Figura 20. O vetor \vec{v} é uma combinação linear de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}\}$ e pode ser representado das seguintes formas:

$$\vec{v} = 1\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2$$

e

$$\vec{v} = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v} + 0\vec{v}_2.$$

Definição 8. Dizemos que um conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é linearmente independente (LI) quando, dados $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tivermos $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exemplo 10. Sejam dois vetores \vec{a} e \vec{b} não paralelos e não nulos num plano. Vamos verificar que os vetores são linearmente independentes. Considere a combinação linear abaixo:

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}.$$

Suponhamos que $\lambda_1 \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{a} &= -\lambda_2 \vec{b} \\ \vec{a} &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{b}. \end{aligned}$$

Nota-se que os vetores \vec{a} e \vec{b} possuem a mesma direção, o que é uma contradição pois \vec{a} e \vec{b} foram escolhidos não paralelos, o que conclui $\lambda_1 = 0$. Voltando a equação inicial temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} &= \vec{0} \quad (\lambda_1 = 0) \\ \lambda_2 \vec{b} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Como $\vec{b} \neq \vec{0}$ temos $\lambda_2 = 0$. Logo, com $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ chegamos a conclusão que os vetores $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ são linearmente independentes.

Definição 9. Dizemos que um conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, com $n \geq 2$, é linearmente dependente quando não for linearmente independente.

Se $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ são vetores linearmente dependentes, então existe $\lambda_k \neq 0$ para algum $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$.

Consequentemente existem $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}_k = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_{k-1} \vec{v}_{k-1} + \beta_{k+1} \vec{v}_{k+1} + \dots + \beta_n \vec{v}_n$.

Exemplo 11. Sejam três vetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v} como na Figura 20. Vamos verificar a dependência linear entre os vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}\}$. Como

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{v} - \vec{v}_1 - \vec{v}_2 &= \vec{0} \\ 1\vec{v} - 1\vec{v}_1 - 1\vec{v}_2 &= \vec{0}, \end{aligned}$$

logo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -1$, portanto não nulos. Assim chegamos a conclusão que os vetores são linearmente dependentes.

1.5 Conceito de Base

Agora estamos interessados em encontrar dentro de um espaço vetorial E um conjunto de vetores tais que qualquer outro vetor de E seja uma combinação linear deles. Denominaremos um conjunto de vetores desse tipo de base. (BOLDRINI *et al.*, 1980)

Definição 10. Uma base β para um espaço vetorial E é um conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ tais que

- (i) Todo vetor \vec{v} pertencente ao espaço vetorial E é uma combinação linear dos vetores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$;
- (ii) O conjunto dos vetores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é linearmente independente.

Como consequência, dado $\vec{v} \in E$, existem únicos escalares $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = t_1\vec{v}_1 + \dots + t_n\vec{v}_n.$$

Denotamos por $(\vec{v})_\beta = (t_1, \dots, t_n)$ as coordenadas do vetor \vec{v} na base β .

Exemplo 12. Suponhamos $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e P um ponto do primeiro quadrante do plano formado pelos vetores \vec{e}_1, \vec{e}_2 ortogonais passando pelo ponto O .

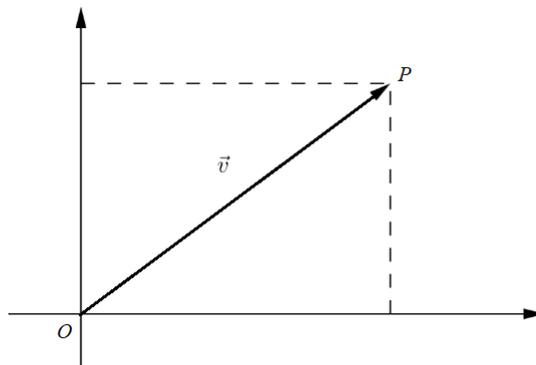


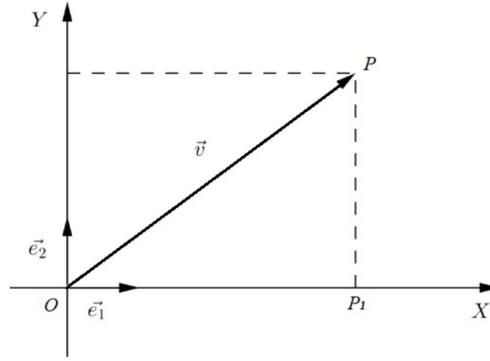
Figura 21 – Plano \mathbb{R}^2

Considere X a reta que contém O e direção \vec{e}_1 e seja P_1 pertencente a reta X o único ponto tal que $\overrightarrow{P_1P}$ é ortogonal a reta X . Consequentemente $\overrightarrow{OP_1}$ é combinação linear de \vec{e}_1 e $\overrightarrow{P_1P}$ é combinação linear de \vec{e}_2 , isto é, existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $(\vec{v})_\beta = (t_1, t_2)$ e

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} &= t_1\vec{e}_1, \\ \overrightarrow{P_1P} &= t_2\vec{e}_2.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} \\ \overrightarrow{OP} &= t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2.\end{aligned}$$

Figura 22 – Vetor \vec{v} na base β

A demonstração pode ser estendida a qualquer ponto de \mathbb{R}^2 (outros quadrantes).

Conclusão, \vec{v} é combinação linear de \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e pelo Exemplo 10 o conjunto determina uma base para o plano.

Exemplo 13. Considere a Figura 19. A coleção $\beta_1 = \{\vec{AF}, \vec{AA'}, \vec{AB}\}$ determina uma base em \mathbb{R}^3 .

Como os vetores são dois a dois ortogonais, repetindo o argumento do Exemplo 11 e utilizando projeção de pontos no espaço nos respectivos planos $AA'B$, $AA'F$, podemos escrever qualquer vetor \vec{OP} no qual P é um ponto genérico no espaço como combinação linear dos vetores $\{\vec{AF}, \vec{AA'}, \vec{AB}\}$, isto é

$$\begin{aligned}\vec{AP} &= \vec{AP_1} + \vec{P_1P} \\ &= t_1\vec{AF} + t_2\vec{AA'} + \vec{P_1P} \\ &= t_1\vec{AF} + t_2\vec{AA'} + t_3\vec{AB},\end{aligned}$$

para $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$.

Afirmamos que a combinação linear é única. Suponhamos que existam $t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\vec{v} = t_1\vec{AF} + t_2\vec{AA'} + t_3\vec{AB}$$

e

$$\vec{v} = s_1\vec{AF} + s_2\vec{AA'} + s_3\vec{AB}.$$

Subtraindo as identidades temos,

$$(t_1 - s_1)\vec{AF} + (t_2 - s_2)\vec{AA'} + (t_3 - s_3)\vec{AB} = 0. \quad (1.4)$$

Suponhamos que $(t_1 - s_1) \neq 0$, então

$$\begin{aligned}\vec{AF} &= -\frac{(t_2 - s_2)}{(t_1 - s_1)}\vec{AA'} - \frac{(t_3 - s_3)}{(t_1 - s_1)}\vec{AB} \\ F &= A + \left[-\frac{(t_2 - s_2)}{(t_1 - s_1)}\vec{AA'} - \frac{(t_3 - s_3)}{(t_1 - s_1)}\vec{AB} \right].\end{aligned}$$

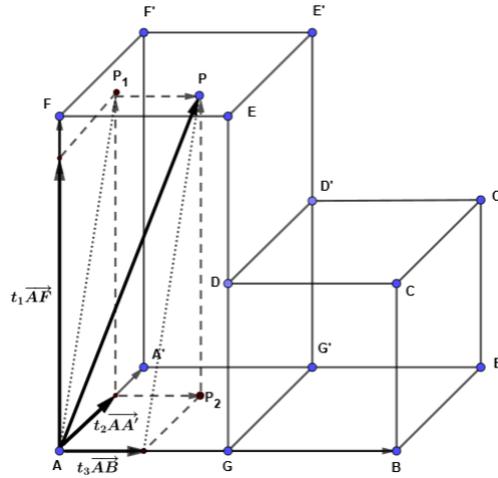


Figura 23 – Escada vetorial

Concluimos que F pertence ao plano $AA'B$ que é um absurdo. Portanto $t_1 - s_1 = 0$, isto é $t_1 = s_1$. Retornando a (1.4) temos,

$$\begin{aligned} (t_1 - s_1)\overrightarrow{AF} + (t_2 - s_2)\overrightarrow{AA'} + (t_3 - s_3)\overrightarrow{AB} &= \mathbf{0} \quad (t_1 = s_1) \\ (t_2 - s_2)\overrightarrow{AA'} + (t_3 - s_3)\overrightarrow{AB} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Suponhamos $t_2 - s_2 \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} &= -\frac{(t_3 - s_3)}{(t_2 - s_2)}\overrightarrow{AB} \\ A' &= A + \frac{(s_3 - t_3)}{(t_2 - s_2)}\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Concluimos que A' pertence a reta AB que é uma contradição. Portanto $t_2 - s_2 = 0$, isto é $t_2 = s_2$. Voltando à equação dada em (1.4) temos,

$$\begin{aligned} (t_1 - s_1)\overrightarrow{AF} + (t_2 - s_2)\overrightarrow{AA'} + (t_3 - s_3)\overrightarrow{AB} &= \mathbf{0} \quad (t_1 = s_1), (t_2 = s_2) \\ (t_3 - s_3)\overrightarrow{AB} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$, temos que $t_3 - s_3 = 0$ o que implica $t_3 = s_3$. Conclusão, $t_1 = s_1$, $t_2 = s_2$ e $t_3 = s_3$ e isto nos mostra que a combinação linear é única.

O exemplo anterior nos mostra mais. Sejam $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base em \mathbb{R}^3 e Q um ponto qualquer. Definimos os pontos

$$\begin{aligned} P_1 &\doteq Q + \vec{e}_1, \\ P_2 &\doteq Q + \vec{e}_2, \\ P_3 &\doteq Q + \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Logo, P_1, P_2, P_3 e Q não podem estar no mesmo plano. Consequentemente seguindo o argumento anterior, temos $\{\overrightarrow{QP_1}, \overrightarrow{QP_2}$ e $\overrightarrow{QP_3}\}$ forma uma base no espaço.

Exemplo 14. Analisando a Figura 23, podemos verificar que $\{\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FE}\}$ determina uma base.

De fato, Sejam P_1, P_2, P_3 dados por

$$P_1 = E + \overrightarrow{B'B},$$

$$P_2 = E + \overrightarrow{DE},$$

$$P_3 = E + \overrightarrow{FE}.$$

Pela observação anterior, como P_1, P_2, P_3 são não coplanares, então $\{\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FE}\}$ determina uma base.

Exemplo 15. Considere as bases $\beta_1 = \{\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AF}\}$ e $\beta_2 = \{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AA'}\}$ para o espaço dado na Figura 22. A representação do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AF'}$ em cada uma das bases será dada por:

Na base β_1 :

$$(\vec{v})_{\beta_1} = (0, 1, 1) \text{ pois } \vec{v} = 0\overrightarrow{AG} + 1\overrightarrow{AA'} + 1\overrightarrow{AF}.$$

Na base β_2 :

$$(\vec{v})_{\beta_2} = (1, 0, 1) \text{ pois } \vec{v} = 1\overrightarrow{AF} + 0\overrightarrow{AG} + 1\overrightarrow{AA'}.$$

Observação. Analisando o exemplo anterior, percebemos que a ordem dos elementos de uma base é importante. Logo se trocarmos a ordem dos vetores em uma base obtemos outra base e consequentemente novas coordenadas do vetor \vec{v} .

1.6 Produto interno

Se quisermos enriquecer nosso estudo sobre espaços vetoriais, introduzindo noções geométricas tais como perpendicularismo, ângulo, distância, etc, precisaremos adicionar aos axiomas, uma ferramenta chamada de produto interno (LIMA, 2006).

Definição 11. Um produto interno num espaço vetorial real E é um funcional bilinear, simétrico e positivo em E , ou seja, o produto interno é uma função $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de vetores $\vec{x}, \vec{y} \in E$ um número real denotado por $\langle x, y \rangle$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Bilinearidade (linearidade em cada entrada): dados quaisquer $x, y, z, w \in E$ e $\lambda, \in \mathbb{R}$ temos

$$\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle, \quad (\text{linearidade na primeira entrada}).$$

$$\langle x, z + \lambda w \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle x, w \rangle, \quad (\text{linearidade na segunda entrada}).$$

(ii) Simétrico: dados $x, y \in \mathbb{R}$ temos

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle .$$

(iii) Positividade: para qualquer $x \in E$ temos

$$\langle x, x \rangle \geq 0.$$

Exemplo 16. Seja $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no qual $f(x, y) = x \cdot y$. Vamos verificar que a função f representa um produto interno para \mathbb{R} .

(i) Bilinearidade: dados $\forall x_1, x_2, y, \lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} f(x_1 + \lambda x_2, y) &= (x_1 + \lambda x_2) \cdot y \\ &= x_1 \cdot y + \lambda x_2 \cdot y \\ &= f(x_1, y) + \lambda f(x_2, y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(x, y_1 + \lambda y_2) &= x \cdot (y_1 + \lambda y_2) \\ &= x \cdot y_1 + x \cdot \lambda y_2 \\ &= f(x, y_1) + \lambda f(x, y_2). \end{aligned}$$

(ii) Simetria: dados $\forall x, y \in \mathbb{R}$ temos

$$f(x, y) = f(y, x), \text{ uma vez que } x \cdot y = y \cdot x.$$

(iii) Positividade: dado $\forall x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} f(x, x) &= x \cdot x \\ &= x^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Exemplo 17. Considere o espaço euclidiano \mathbb{R}^n . A função

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \doteq x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n,$$

no qual $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ determina um produto interno.

Demonstração:

(i) Bilinearidade: considere $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, então $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ e $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} + \lambda \vec{z}, \vec{y} \rangle &= (x_1 + \lambda z_1)y_1 + \dots + (x_n + \lambda z_n)y_n \\ &= x_1 y_1 + \lambda z_1 y_1 + \dots + x_n y_n + \lambda z_n y_n \\ &= (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) + \lambda (z_1 y_1 + \dots + z_n y_n) \\ &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \lambda \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} + \beta \vec{z} \rangle &= x_1(y_1 + \beta z_1) + \dots + x_n(y_n + \beta z_n) \\ &= x_1 y_1 + \beta x_1 z_1 + \dots + x_n y_n + \beta x_n z_n \\ &= (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) + \beta (x_1 z_1 + \dots + x_n z_n) \\ &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \beta \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle. \end{aligned}$$

(ii) Simetria: dados $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle.$$

(iii) Positividade: dado $\forall x, \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1 x_1 + \dots + x_n x_n = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0.$$

O produto interno definido no Exemplo 17 é chamado de produto interno canônico do \mathbb{R}^n . Vejamos agora uma propriedade interessante do \mathbb{R}^3 . Considere $\beta = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal do espaço (base constituída por vetores dois a dois ortogonais e unitários). Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores no espaço e θ a medida do ângulo entre eles. Vamos denotar $(\vec{u})_\beta = (x_1, x_2, x_3)$ e $(\vec{v})_\beta = (y_1, y_2, y_3)$ as coordenadas dos vetores \vec{u} e \vec{v} na base β .

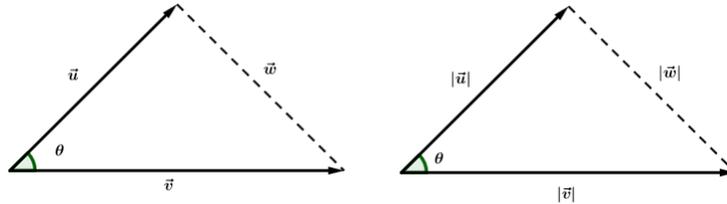


Figura 24 – Lei dos cossenos

Pela Lei dos cossenos

$$\begin{aligned} |\vec{w}|^2 &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta \\ |\vec{v} - \vec{u}|^2 &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta \\ |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta &= \frac{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{v} - \vec{u}|^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Os módulos dos vetores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ em função das suas respectivas coordenadas em relação a base β são dados por

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= ((x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2)^{\frac{1}{2}} \\ |\vec{v}| &= ((y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2)^{\frac{1}{2}} \\ |\vec{u} - \vec{v}| &= ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Substituindo em (1.5) temos

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{v} - \vec{u}|^2}{2} &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]), \\ &= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3. \end{aligned}$$

Conclusão:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta. \quad (1.6)$$

A identidade (1.6) é uma representação geométrica do produto interno definido no Exemplo 17 em \mathbb{R}^3 .

UM ESTUDO GEOMÉTRICO DAS CÔNICAS

Neste capítulo abordaremos o estudo das Cônicas, que é um assunto bem antigo segundo a história da Matemática. Os historiadores atribuem ao matemático Menaecmus (380 - 320 a.C. aproximadamente), discípulo de Eudócio na Academia de Platão, a descoberta das curvas cônicas ou seções cônicas quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo. Foi ele o primeiro a mostrar que elipses, parábolas e hipérbolas são obtidas como seções de um cone quando seccionado por planos não paralelos à sua base.

Nos escritos de Pappus de Alexandria, credita-se ao geômetra grego Aristeu (370-300 a.C.) a publicação do primeiro tratado sobre seções cônicas. Mais tarde, o astrônomo e matemático grego Apolônio de Perga (262-190 a.C.) recompilou e aprimorou os resultados conhecidos até então sobre o assunto na sua obra *Seções Cônicas*.(DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013)

2.1 Elipse

Nesta seção realizaremos um estudo sobre elipses, definindo-as inicialmente do ponto de vista geométrico. Posteriormente com elementos de Geometria Analítica, obteremos uma expressão algébrica que as representem.

Definição 12. Considere α um plano e $0 \leq c < a$. Considere dois pontos F_1 e F_2 distintos pertencentes ao plano α e $d(F_1, F_2) \doteq 2c$. Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos P pertencente ao plano α cuja soma de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 é igual a constante $2a$, isto é

$$\mathcal{E}_{lip} = \{P \in \alpha : d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}. \quad (2.1)$$

Uma pergunta natural é a seguinte: como podemos encontrar tais pontos do conjunto \mathcal{E}_{lip} ? Sejam C o ponto médio do segmento $\overline{F_1 F_2}$ e r a reta mediatriz ao segmento passando por C .

Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da elipse e a reta passando por F_1 e F_2 é chamada de reta focal.

Por construção geométrica existem pontos B_1 e B_2 , denominados vértices da elipse, pertencentes a reta ortogonal à reta focal, passando por C , denominada reta não focal r tal que $d(B_1, F_1) + d(B_2, F_2) = 2a$, uma vez que $a > c$. De fato, como a reta r é a mediatriz ao segmento F_1F_2 , temos que $B_1, B_2 \in r \cap \mathcal{E}_{lip}$ se e somente se $d(B_1, F_1) = d(B_2, F_2) = a$. Logo pelo Teorema de Pitágoras temos $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ é a distância de B_1 e B_2 ao centro C da elipse.

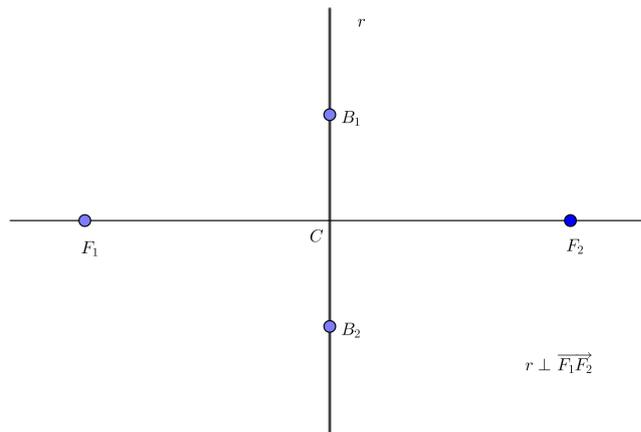


Figura 25 – Vértices sobre a reta não focal

Note que existem somente dois pontos distintos pertencentes a elipse e a reta focal, denotados por A_1 e A_2 , chamados de vértices da elipse sobre a reta focal. Vamos agora determinar a localização do vértice A_1 sobre a reta focal, por simplicidade (análogo para A_2).

Inicialmente suponhamos que A_1 pertença ao segmento F_1F_2 . Então,

$$\begin{aligned} d(F_1, A_1) &= d(F_1, F_2) - d(A_1, F_2) \\ d(F_1, A_1) + d(A_1, F_2) &= d(F_1, F_2) \\ 2a &= 2c \\ a &= c, \end{aligned}$$

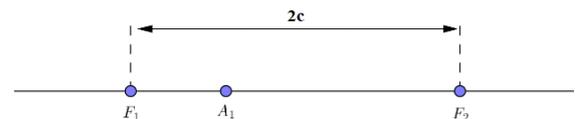


Figura 26 – Vértice entre os focos

contradição. Logo A_1 e A_2 não pertencem ao segmento F_1F_2 .

Afirmamos que existe um ponto A_1 a esquerda de F_1 , pertencente a elipse tal que $d(A_1, F_1) = a - c > 0$. De fato,

$$d(A_1, F_2) = d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2)$$

$$d(A_1, F_2) = a - c + 2c = a + c$$

$$d(A_1, F_2) = 2a - a + c$$

$$d(A_1, F_2) = 2a - d(A_1, F_1)$$

$$d(A_1, F_2) + d(A_1, F_1) = 2a.$$

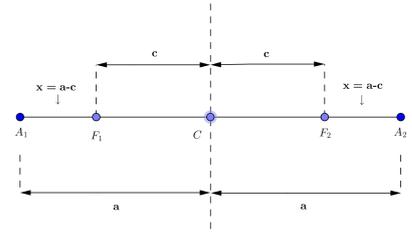


Figura 27 – Elementos da elipse

Portanto $A_1 \in \mathcal{E}_{lip}$.

Analogamente, podemos mostrar que o simétrico ao ponto A_1 em relação a C denominado A_2 , distante $a - c$ do foco F_2 também pertence a elipse. Conseqüentemente o tamanho do segmento $\overline{A_1A_2}$ é $2a$, conforme a Figura 27 acima.

Vamos agora encontrar outros pontos pertencentes à elipse distintos dos anteriores. Para isso fazemos o uso da Geometria Analítica. Definimos o sistema de coordenadas dado por $S = \{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ no qual \vec{u}_1 é o versor de $\overrightarrow{CA_2}$ e \vec{u}_2 é o versor de $\overrightarrow{CB_1}$. Por definição, em coordenadas em relação ao sistema S , um ponto $P = (x, y)$ pertence ao conjunto \mathcal{E}_{lip} quando:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (2.2)$$

⇓

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \quad (2.3)$$

⇕

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

⇕

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

Simplificando e reagrupando os termos temos,

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

⇕

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \quad (2.4)$$

Elevando novamente ao quadrado temos,

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2 \quad (2.5)$$

⇕

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

De fato, como $a > c > 0$, segue que $a^2 - c^2 > 0$. Logo,

$$x^2 + \frac{a^2y^2}{(a^2 - c^2)} = a^2.$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$ segue

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Esta é a chamada equação geral da elipse \mathcal{E}_{lip} na sua forma reduzida referente ao sistema S .

Vamos agora justificar que de fato as passagens (2.2) \Rightarrow (2.3) e (2.4) \Rightarrow (2.5) são equivalentes. Precisamos mostrar que se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Então,

$$a^2 - cx \geq 0 \text{ e } 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \geq 0.$$

Com efeito, como $0 < c < a$ e $a^2 = b^2 + c^2$, temos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a \\ &\Rightarrow a^2 - cx \geq a^2 - ca > a^2 - a^2 \Rightarrow a^2 - cx \geq 0. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow y^2 \leq b^2 \Rightarrow -b^2 + y^2 \leq 0 \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &\leq a^2 + 2a^2 + a^2 - b^2 + y^2 \leq 4a^2 \\ &2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Em resumo temos a representação da elipse com seus elementos.

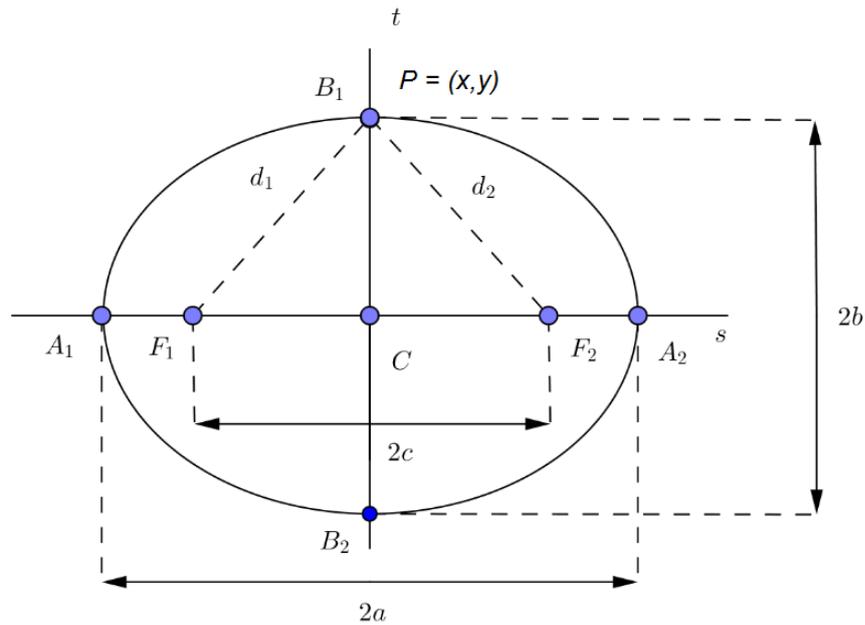


Figura 28 – Elipse

Nomenclatura:

- F_1, F_2 : focos.
- A_1, A_2 : vértices sobre a reta focal.
- B_1, B_2 : vértices sobre a reta não focal.
- C : centro.
- $2c$: distância focal $d(F_1, F_2) = 2c$.
- A_1A_2 : eixo focal de comprimento $d(A_1, A_2) = 2a$.
- B_1B_2 : eixo não focal de comprimento $d(B_1, B_2) = 2b$.

Vamos apresentar agora alguns exemplos de elipses e sua equação reduzida, referente ao sistema S de coordenadas.

Exemplo 18. Dados os focos $F_1 = (-4, 0)$, $F_2 = (4, 0)$ e $a = 5$ vamos determinar a equação reduzida da elipse.

Os focos da elipse são $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$. Se $d(F_1, F_2) = 2c$, então

$$d(F_1, F_2) = 2c \Rightarrow c = 4$$

e

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$$

Logo, a equação geral da elipse referente ao sistema S é dada por

$$\mathcal{E}_{lip} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\mathcal{E}_{lip} : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

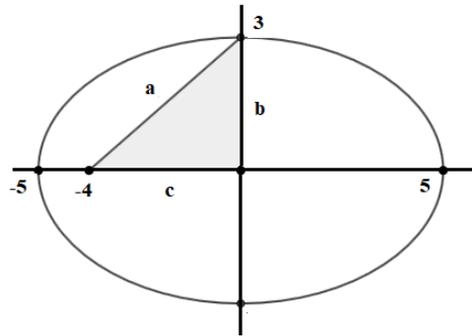


Figura 29 – Elementos da elipse Exemplo 18

Exemplo 19. Considere uma elipse de vértices $A_1 = (0, 6)$ e $A_2 = (0, -6)$, passando pelo ponto $(2, \frac{12\sqrt{5}}{5})$. Vamos determinar a equação reduzida da elipse e esboçar seu gráfico destacando seus principais elementos.

Como os vértices da elipse são $A_1 = (0, 6)$ e $A_2 = (0, -6)$, então

$$d(A_1, A_2) = 2a \Rightarrow a = 6.$$

Temos que o ponto $(2, \frac{12\sqrt{5}}{5})$ pertence a elipse, então

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} &= 1, \\ \frac{2^2}{b^2} + \frac{(\frac{12\sqrt{5}}{5})^2}{6^2} &= 1, \\ \frac{4}{b^2} + \frac{4}{5} &= 1, \\ b &= \sqrt{20}. \end{aligned}$$

Logo, a equação geral da elipse referente ao sistema S é dada por

$$\mathcal{E}_{lip} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

$$\mathcal{E}_{lip} : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

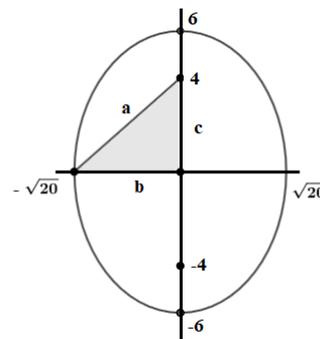


Figura 30 – Elementos da elipse Exemplo 20

2.2 Hipérbole

Nesta seção realizaremos um estudo sobre hipérbolas. Iniciaremos com a definição seguindo uma abordagem geométrica apresentando sua construção, destacando seus principais elementos e posteriormente apresentamos sua forma analítica e a obtenção da sua equação na forma reduzida.

Definição 13. Considere α um plano e $c > a > 0$. Considere dois pontos F_1 e F_2 distintos pertencentes ao plano α e $d(F_1, F_2) \doteq 2c$. Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P , pertencentes a este plano α cujo o módulo da diferença de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 seja constante e igual a $2a$, isto é

$$\mathcal{H}_{ip} = \{P \in \alpha : |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}. \quad (2.6)$$

Sejam C o ponto médio do segmento $\overline{F_1 F_2}$ e A_1 um ponto da reta $F_1 F_2$. Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da hipérbole e a reta passando por F_1 e F_2 é chamada de reta focal, que por simplicidade denotamos por r . Vamos averiguar se A_1 pode ser um ponto da hipérbole.

Inicialmente suponhamos que existe um ponto A_1 a esquerda de F_1 pertencente à hipérbole. Então,

$$\begin{aligned} d(A_1, F_1) &= d(A_1, F_2) - d(F_1, F_2) \\ d(A_1, F_2) - d(A_1, F_1) &= d(F_1, F_2) \\ 2a &= 2c \\ a &= c, \end{aligned}$$

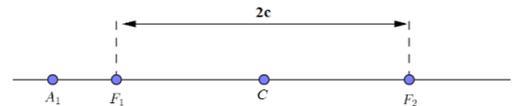


Figura 31 – Pontos da Hipérbole

contradição. Logo A_1 não pode estar a esquerda de F_1 .

Afirmamos que A_1 pertence ao segmento $\overline{F_1 F_2}$ de tal modo que $d(A_1, F_1) = c - a > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} d(A_1, F_2) &= d(F_1, F_2) - d(A_1, F_1) \\ d(A_1, F_2) &= 2c - (c - a) = c + a \\ d(A_1, F_2) &= 2a + c - a \\ d(A_1, F_2) &= 2a + d(A_1, F_1) \\ d(A_1, F_2) - d(A_1, F_1) &= 2a. \end{aligned}$$

Portanto $A_1 \in \mathcal{H}_{ip}$. Analogamente, podemos mostrar que o simétrico ao ponto A_1 em relação a C denominado A_2 , distante $c - a$ do foco F_2 também pertence à hipérbole. Consequentemente o tamanho do segmento $\overline{A_1 A_2}$ é $2a$, conforme a Figura 32.

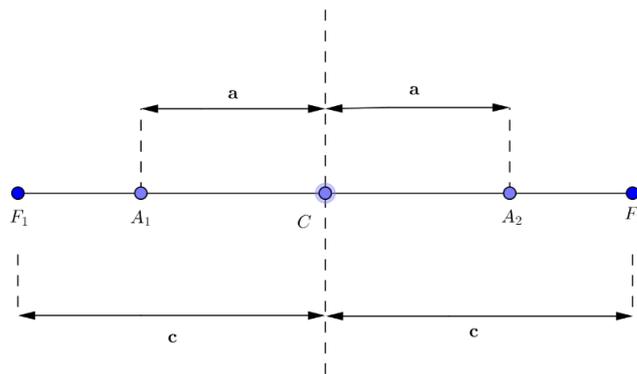


Figura 32 – Focos da Hipérbole

Considere a reta ortogonal à reta focal passando por C , denominada reta não focal, onde C é o ponto médio de F_1F_2 . Podemos afirmar que não existe nenhum ponto da reta não focal pertencente a hipérbole. De fato,

Se B pertence a reta não focal e a hipérbole então por definição temos

$$|d(B, F_1) - d(B, F_2)| = 2a.$$

Como $d(B, F_1) = d(B, F_2)$, então

$$|d(B, F_1) - d(B, F_2)| = 2a \Rightarrow a = 0, \text{ contradição!}$$

Portanto B não pertence a \mathcal{H}_{ip} .

Considere B_1 e B_2 dois pontos distintos pertencentes a reta não focal tal que $d(B_i, C) = b$, no qual $b^2 = c^2 - a^2$ para $i = 1, 2$. Denominamos os pontos B_1 e B_2 por vértices da hipérbole sobre a reta não focal.

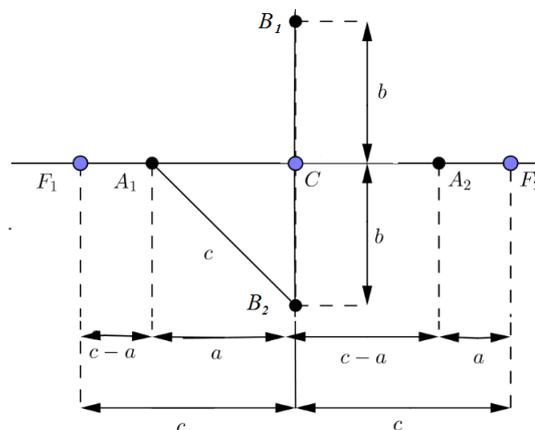


Figura 33 – Focos e vértices da hipérbole

Analogamente ao caso da elipse, vamos encontrar outros pontos pertencentes à hipérbole distintos dos anteriores. Para isso fazemos o uso da Geometria Analítica.

Definimos o sistema de coordenadas dado por $S = \{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ no qual \vec{u}_1 é o versor de $\overrightarrow{CA_2}$ e \vec{u}_2 é o versor de $\overrightarrow{CB_1}$. Por definição, em coordenadas em relação ao sistema S , um ponto $P = (x, y)$ pertence ao conjunto \mathcal{H}_{ip} quando:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

que é equivalente a

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Elevando os dois membros ao quadrado temos,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\ (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ \Downarrow \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2. \end{aligned}$$

Simplificando e reagrupando os termos temos,

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4xc - 4a^2 \Rightarrow \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Elevando a expressão anterior ao quadrado temos,

$$\begin{aligned} a^2(x-c)^2 + a^2y^2 &= (cx - a^2)^2 \\ \Downarrow \\ a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 \\ \Downarrow \\ a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 \\ \Downarrow \\ a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ \Downarrow \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2). \end{aligned}$$

Como $c > a > 0 \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$, logo

$$x^2 - \frac{a^2y^2}{(c^2 - a^2)} = a^2. \quad (2.7)$$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$ e assim, a expressão (2.7) torna-se

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Esta é a chamada de equação geral da hipérbole \mathcal{H}_{ip} na sua forma reduzida referente ao sistema de coordenadas S .

Reescrevendo a equação da hipérbole temos que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2}.$$

Note que para x suficientemente grande temos:

$$y = \pm \sqrt{\frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2} \Rightarrow y \approx \pm \frac{b}{a} x.$$

Obtemos então as assíntotas da hipérbole, que são duas retas que passam pela origem do sistema de coordenadas e têm inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação ao eixo CF_2 (reta focal).

A Figura 34 abaixo representa uma hipérbole e os principais elementos, no sistema $S = \{C; \overrightarrow{CF_2}, \overrightarrow{CB_1}\}$.

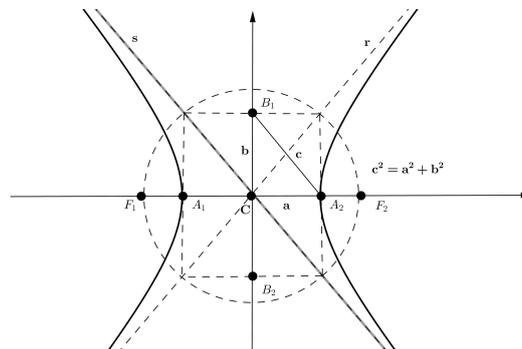


Figura 34 – Hipérbole

Nomenclatura:

- F_1, F_2 : focos.
- A_1, A_2 vértices.
- C : centro.
- $2c$: distância focal $d(F_1, F_2) = 2c$.
- A_1A_2 : eixo focal de comprimento $d(A_1, A_2) = 2a$.
- B_1B_2 : eixo não focal de comprimento $d(B_1, B_2) = 2a$.
- r, s : assíntotas.

Vamos apresentar agora alguns exemplos de hipérbolas e como determinar sua equação reduzida referente ao sistema fixado S .

Exemplo 20. Dados os focos $F_1 = (-\sqrt{7}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{7}, 0)$ e $a = 2$ vamos determinar a equação reduzida da hipérbole e suas assíntotas.

Os focos da hipérbole são $F_1 = (-\sqrt{7}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{7}, 0)$. Se $d(F_1, F_2) = 2c$, então

$$d(F_1, F_2) = 2c \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

e

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 2^2} = \sqrt{3}.$$

Portanto, a equação geral da hipérbole é:

$$\mathcal{H}_{ip} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\mathcal{H}_{ip} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Observe que as equações das assíntotas são:

$y = \pm \frac{b}{a}x$. Logo:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad e \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

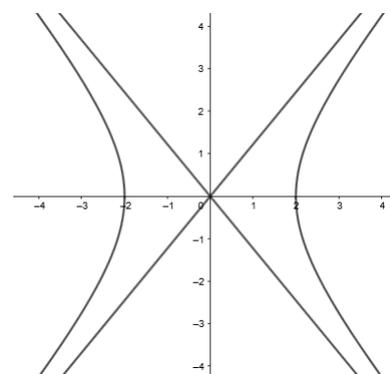


Figura 35 – Elementos da hipérbole 1

Exemplo 21. Vamos determinar a equação reduzida da hipérbole sabendo que $F_1 = (0, \sqrt{10})$, $F_2 = (0, -\sqrt{10})$, $a = 2$ e a hipérbole passa pelo ponto $(\frac{\sqrt{30}}{2}, 3)$.

Os focos da hipérbole são $F_1 = (0, \sqrt{10})$ e $F_2 = (0, -\sqrt{10})$. Se $d(F_1, F_2) = 2c$, então

$$d(F_1, F_2) = 2c \Rightarrow c = \sqrt{10}$$

e

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 2^2} = \sqrt{6}.$$

Portanto, a equação geral da hipérbole é:

$$\mathcal{H}_{ip} : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

$$\mathcal{H}_{ip} : \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{6} = 1.$$

Observe que as equações das assíntotas são:

$y = \pm \frac{a}{b}x$. Logo:

$$y = \frac{\sqrt{6}}{3}x \quad e \quad y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x.$$

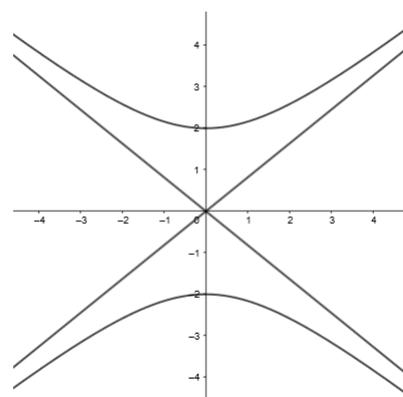


Figura 36 – Elementos da hipérbole 2

2.3 Parábola

Nesta seção apresentamos um estudo sobre parábolas, definindo-as inicialmente do ponto de vista geométrico. Posteriormente com elementos de Geometria Analítica, obteremos uma expressão algébrica que a represente.

Definição 14. Considere α um plano. Sejam r uma reta e F um ponto do plano não pertencente a r . Definimos por parábola de foco F e diretriz r o conjunto dos pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a r , isto é

$$\mathcal{P}_{arab} = \{P \in \alpha : d(P, F) = d(P, r)\}. \quad (2.8)$$

Seja C o ponto de interseção da reta perpendicular à reta diretriz r passando por F , tal que a distância do foco à reta diretriz é chamado de parâmetro da parábola dado por $d(F, r) = 2p$.

Vamos inicialmente definir um ponto V da parábola com a seguinte propriedade: V é o ponto médio do segmento \overline{FC} , então

$$d(V, F) = d(V, C) = p.$$

Como C pertence a reta diretriz r , então $d(V, F) = d(V, r)$. Portanto o ponto V pertence a parábola. A esse ponto chamamos de vértice da parábola.

Seja R pertencente a reta s , onde s é a reta paralela à reta diretriz r passando pelo vértice da parábola. Definimos o sistema de coordenadas dado por $S = \{V; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ no qual \vec{u}_1 é o versor de \overrightarrow{VR} e \vec{u}_2 é o versor de \overrightarrow{VF} .

Por definição, em coordenadas em relação ao sistema S , um ponto $P = (x, y)$ pertence ao conjunto \mathcal{P}_{arab} quando $d(P, F) = d(P, r)$.

Seja P' um ponto pertencente a reta diretriz r , tal que $P' = (x, -p)$. Por definição temos que

$$\begin{aligned} d(P, F) &= d(P, r) = d(P, P') \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2} \\ \sqrt{x^2 + (y-p)^2} &= \sqrt{(y+p)^2}. \end{aligned}$$

Elevando ambos membros ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} x^2 + (y-p)^2 &= (y+p)^2 \\ x^2 + y^2 - 2yp + p^2 &= y^2 + 2py + p^2. \end{aligned}$$

Simplificando e reagrupando os termos, temos

$$x^2 = 4py$$

isto é,

$$y = \frac{x^2}{4p}. \quad (2.9)$$

A equação dada em (2.9) é chamada equação geral da parábola \mathcal{P}_{arab} na sua forma reduzida referente ao sistema S .

Em resumo temos a representação da parábola com seus elementos.

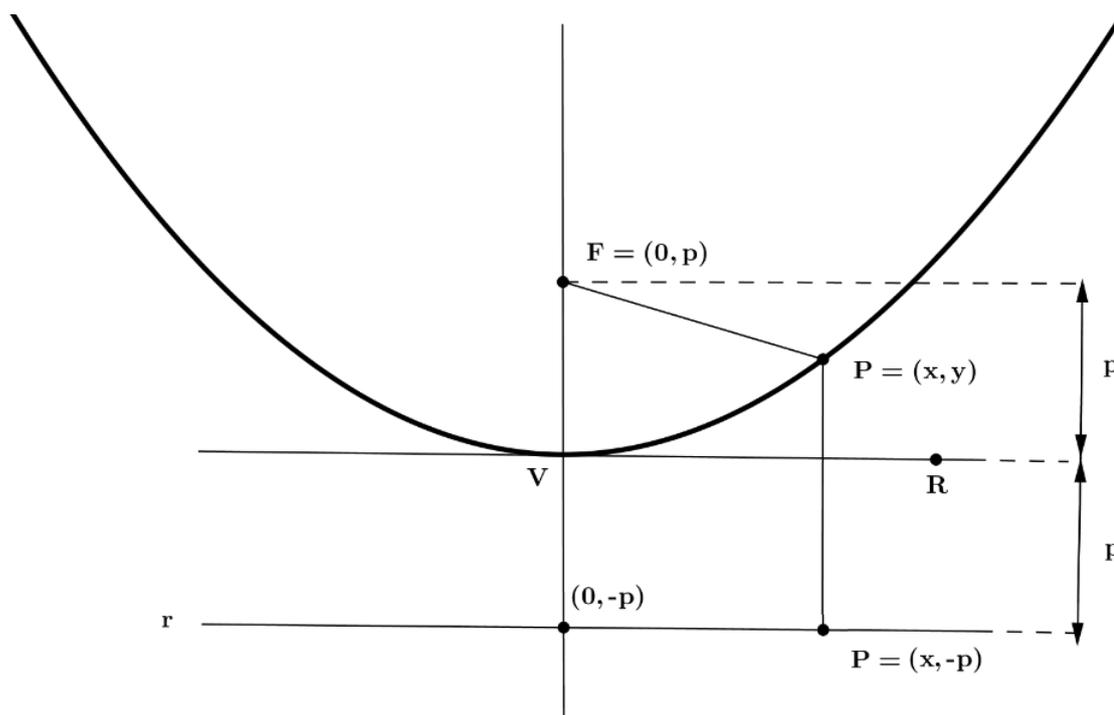


Figura 37 – Parábola

Nomenclatura:

- F : foco.
- $2p$: parâmetro.
- r : diretriz.
- V : vértice.

Vamos apresentar agora alguns exemplos de parábolas e sua equação geral reduzida referente ao sistema S de coordenadas.

Exemplo 22. Vamos determinar a equação geral da parábola de foco $F = (0, -3)$ e reta diretriz $r : y = 3$.

Usando a definição da parábola, temos

$$d(P, F) = d(P, r) = d(P, P')$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-3)^2},$$

$$\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(y-3)^2}.$$

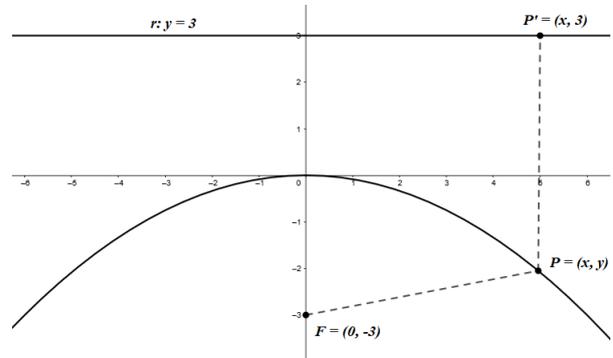
Elevando ambos membros ao quadrado, temos

$$x^2 + (y+3)^2 = (y-3)^2,$$

$$x^2 + y^2 + 6y + 9 = y^2 - 6y + 9.$$

Simplificando e reagrupando os termos, temos

$$y = -\frac{x^2}{12}.$$



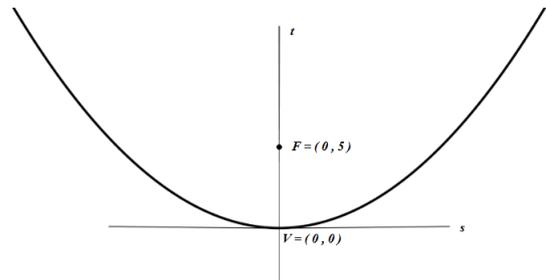
Exemplo 23. Vamos esboçar e determinar a equação geral da parábola com vértice $V = (0, 0)$ na origem, cujo foco é o ponto $F = (0, 5)$.

Se $V = (0, 0)$ e $F = (0, 5)$, então

$$d(V, F) = p \Rightarrow p = 5.$$

Logo a equação geral da parábola é representada por:

$$y = \frac{x^2}{20}.$$



CÔNICAS

Nessa seção iremos demonstrar que toda equação polinomial de segunda ordem em duas variáveis, define uma cônica (degenerada ou não) no plano.

3.1 Forma matricial

Fixamos o conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que pode ser identificado como um plano gerado por dois vetores $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ ortogonais e unitários passando por um ponto O no qual $O \cong (0, 0)$, $\vec{i} \cong (1, 0)$, $\vec{j} \cong (0, 1)$. Dessa forma podemos associar o sistema de coordenadas $S = \{0; \vec{i}, \vec{j}\}$ no qual $(\vec{i})_S = (1, 0)$, $(\vec{j})_S = (0, 1)$, por abuso de notação o $(\vec{v})_S = (\vec{v})_\beta$ no qual $\beta = \{\vec{i}, \vec{j}\}$. Além do mais se P é um ponto de \mathbb{R}^2 , temos $(P)_S = (\overrightarrow{OP})_S = (x, y)$.

Considere uma função polinomial de segunda ordem, também chamada de função quadrática, dada por

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}, \quad (3.1)$$

no qual $a_{ij} \in \mathbb{R}$, com $a_{11} \neq 0$ ou $a_{22} \neq 0$.

Dada uma função da forma (3.1), definimos o conjunto \mathcal{C} dos pontos P , em relação ao sistema S de coordenadas, $(P)_S = (x, y)$ que satisfaz $f(x, y) = 0$, isto é

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

Nosso objetivo é demonstrar que o conjunto \mathcal{C} é identificado como uma cônica ou um de seus casos degenerados, isto é: o conjunto vazio, um ponto, uma reta ou duas retas.

Exemplo 24. Dadas as funções $f(x, y)$ abaixo, vamos encontrar o conjunto \mathcal{C} que satisfaz $f(x, y) = 0$ e identificar a cônica associada.

$$1. f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 1 = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \emptyset.$$

O conjunto solução para $f(x,y) = 0$ é um conjunto vazio.

$$2. f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(0,0)\}.$$

O conjunto solução para $f(x,y) = 0$ é dado por um ponto.

$$3. f(x,y) = (x+y)^2$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y)^2 = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x, -x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

O conjunto que satisfaz $f(x,y) = 0$ é representado por uma reta.

$$4. f(x,y) = (x+y)(x+y-2)$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y)(x+y-2) = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x, -x), \forall x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 2-x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Temos como solução para $f(x,y) = 0$, duas retas paralelas.

$$5. f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - y^2) = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y)(x-y) = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x, -x)\} \cup \{(x, x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

O conjunto solução para $f(x,y) = 0$ será representado por duas retas concorrentes.

$$6. f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

O conjunto solução para $f(x,y) = 0$ é dado por uma circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1.

$$7. f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}.$$

A solução para $f(x,y) = 0$ é dado por uma elipse centrada em $(0,0)$.

$$8. f(x,y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1\}.$$

A conjunto solução para $f(x,y) = 0$ é dado por uma hipérbole.

$$9. f(x,y) = y^2 - 2x$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 2x = 0\}.$$

O conjunto solução para $f(x,y) = 0$ é dado por uma parábola.

Considere a função polinomial de segunda ordem dado em (3.1). Vamos identificá-la na forma matricial,

$$f(x,y) = X^t A X + 2B X + a_{33},$$

no qual

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 25. Dada a função $f(x,y) = 4x^2 + 5xy + 3y^2 + 5x - 5y + 3$ temos:

$$a_{11} = 4, a_{22} = 3, a_{12} = \frac{5}{2}, a_{13} = \frac{5}{2}, a_{23} = -\frac{5}{2} \text{ e } a_{33} = 3.$$

Logo sua representação matricial é dada por:

$$f(X) = X^t \begin{pmatrix} 4 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{pmatrix} X + 2 \begin{pmatrix} 5/2 & -5/2 \end{pmatrix} + 3.$$

Exemplo 26. A função quadrática na sua forma matricial $f(X) = X^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X - 4$ pode ser identificada por

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4 \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 4. \end{aligned}$$

Exemplo 27. A função quadrática na sua forma matricial $f(X) = X^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ pode ser identificada por

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Vamos simplificar o estudo do conjunto \mathcal{C} associado a função (3.1) em dois casos particulares:

- (i) As funções quadráticas (3.1) no qual a_{12} seja nulo.
- (ii) As funções quadráticas tal que a_{13} e a_{23} em (3.1) sejam nulos.

3.2 Um estudo sobre as equações cujo termo $a_{12} = 0$.

O objetivo dessa seção é estudar $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ no qual f é dada por (3.1) e $a_{12} = 0$. Para isso, vamos introduzir algumas definições e propriedades sobre matrizes, pois estas serão de suma importância no estudo a seguir.

Definição 15. Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, denominamos a matriz transposta de A a matriz $A^t = [a'_{ij}]_{n \times m}$ tal que $a'_{ij} = a_{ji}$, para todo $i = 1, \dots, m$ e todo $j = 1, \dots, n$.

Vamos apresentar alguns exemplos da definição apresentada acima.

Exemplo 28. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$, sua transposta é representada por,

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}.$$

Exemplo 29. Dada a matriz $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}_{1 \times 3}$, sua transposta é representada por,

$$B^t = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}_{3 \times 1}.$$

Definição 16. Uma matriz é chamada simétrica ou auto adjunta quando $A^t = A$.

Decorre da definição que, $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ é uma matriz simétrica, se e somente se $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$ para $i, j = 1, \dots, n$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 30. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$, sua transposta será representada por,
 $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$. Como $A = A^t$, então A é uma matriz simétrica.

Exemplo 31. Dada a matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ então $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ e assim B é uma matriz simétrica.

Note que, os elementos de uma matriz simétrica são dispostos simetricamente em relação à diagonal principal. Vamos apresentar algumas propriedades sobre operação transposta de matrizes.

Propriedades:

(i) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

(ii) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) $(AB)^t = B^t A^t$.

(iv) $A \in M_{1 \times 1}[\mathbb{R}]$ isto é, $A = a \in \mathbb{R}$ então $A^t = a$.

(v) Se $A, B \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$ e $A = A^t, B = B^t$, então AB é auto adjunto $\Leftrightarrow AB = BA$.

Vamos omitir a demonstração dos itens (i) a (iv) e apenas apresentar a justificativa para o item (v). De fato, se AB é auto adjunto então $AB = (AB)^t = B^t A^t = BA$.

Por outro lado, $AB = BA = B^t A^t = (AB)^t$. Logo AB é auto adjunto.

Voltamos ao início da Seção 3.1. Considere uma função polinomial (3.1) cujo termo a_{12} seja nulo, isto é,

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}, \text{ no qual } a_{ij} \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Exemplo 32. Considere $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2 + 4x + 3y - 8$.

Suponhamos que exista uma mudança de variáveis $(x, y) \rightarrow (x', y')$ tal que a equação

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow g(x', y') = 0,$$

no qual $g(x', y') = \tilde{a}_{11}(x')^2 + \tilde{a}_{22}(y')^2 + \tilde{a}_{33}$, isto é, a função $f(x, y)$ pode ser escrita em novas variáveis (x', y') no qual os termos lineares $\tilde{a}_{13} = \tilde{a}_{23} = 0$. Vamos propor a seguinte mudança de

variáveis

$$\begin{cases} x = x' + c_1, \\ y = y' + c_2, \end{cases}$$

no qual $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ serão escolhidos futuramente. Note que tal mudança preserva a natureza da função $f(x, y)$, isto é $g(x', y')$ ainda permanece como uma função quadrática. De fato,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \\ &= a_{11}(x' + c_1)^2 + a_{22}(y' + c_2)^2 + 2a_{13}(x' + c_1) + 2a_{23}(y' + c_2) + a_{33} \\ &= \tilde{a}_{11}(x')^2 + \tilde{a}_{22}(y')^2 + 2\tilde{a}_{13}x' + 2\tilde{a}_{23}y' + \tilde{a}_{33} \doteq g(x', y') \end{aligned}$$

no qual

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= a_{11}, \\ \tilde{a}_{22} &= a_{22}, \\ \tilde{a}_{13} &= 2a_{11}c_1 + 2a_{13}, \\ \tilde{a}_{23} &= 2a_{22}c_2 + 2a_{23}, \\ \tilde{a}_{33} &= a_{11}c_1^2 + a_{22}c_2^2 + 2a_{13}c_1 + 2a_{23}c_2 + a_{33}. \end{aligned}$$

Vamos impor uma mudança de variáveis como anteriormente tal que $\tilde{a}_{13} = \tilde{a}_{23} = 0$.

Para isso considere a mudança do sistema de coordenadas, $S = (0; \vec{i}, \vec{j})$ para o sistema de coordenadas $S' = \{C; \vec{i}', \vec{j}'\}$ no qual,

$$(C)_S = (c_1, c_2)^t, \quad (X)_S = (x, y)^t \text{ e } (X')_{S'} = (x', y')^t.$$

Na forma matricial a equação é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(X) &= X^t A X + 2B X + a_{33} \\ &= X^t \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} X + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} X + a_{33}, \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} g(X') &= f(X' + C) = (X' + C)^t A (X' + C) + 2B(X' + C) + a_{33} \\ &= [(X')^t + C^t] A X' + [(X')^t + C^t] A C + 2B X' + 2B C + a_{33} \\ &= (X')^t A X' + \underbrace{C^t A X' + (X')^t A C + 2B X'}_{\text{parte linear}} + \underbrace{C^t A C + 2B C + a_{33}}_{\text{número real}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nosso objetivo é encontrar $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que a parte linear de (3.3) seja nula, ou seja

$$C^t A X' + (X')^t A C + 2B X' = 0, \quad \forall X'.$$

Observe que como A é uma matriz simétrica então $A^t = A$, logo

$$(C^tAX')^t = (X')^tA^t(C^t)^t = (X')^tAC.$$

Assim

$$\begin{aligned} C^tAX' + (X')^tAC + 2BX' &= 0 \quad \forall X' \\ 2C^tAX' + 2BX' &= 0 \quad \forall X' \\ 2(C^tA + B)X' &= 0 \quad \forall X' \\ \Downarrow \\ C^tA + B &= 0 \\ C^tA &= -B \quad (\text{aplicando a transposta}) \\ (C^tA)^t &= (-B)^t \\ A^tC &= -B^t \quad (A = A^t) \\ AC &= -B^t. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Assim, temos que se o Sistema (3.4) for possível então existirá uma mudança de variáveis $X = X' + C$ tal que $f(x, y) = 0$ torna-se $g(x', y') = (X')^tAX' + k = 0$, no qual

$$k = f(C) = C^tAC + 2BC + a_{33}.$$

Substituindo $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ em (3.4), temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{a_{13}}{a_{11}}, \\ c_2 = -\frac{a_{23}}{a_{22}}, \end{cases}$$

supondo que $a_{11}, a_{22} \neq 0$. Concluimos que, se $AC = -B^t$ possuir solução, então $\mathcal{C} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid g(x', y') = 0\}$, no qual

$$g(x', y') = 0$$

\Downarrow

$$a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + f(C) = 0,$$

com

$$f(C) = C^tAC + 2BC + a_{33}.$$

Vamos ilustrar a discussão anterior com um exemplo.

Exemplo 33. Considere $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2 + 4x + 3y - 8$.

Sua representação matricial é dada por:

$$f(X) = X^t \underbrace{\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_A X + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3/2 \end{pmatrix}}_B X - 8.$$

Assim,

$$AC = -B^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -8, \\ c_2 = -3/2. \end{cases}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} f(c_1, c_2) &= \begin{pmatrix} -8 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -3/2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -3/2 \end{pmatrix} - 8 \\ &= - \begin{pmatrix} 8 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3/2 \end{pmatrix} + 2 \left(-16 - \frac{9}{4} \right) - 8 \\ &= \left(16 + \frac{9}{4} - 32 - \frac{18}{4} - 8 \right) \\ &= -\frac{105}{4}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{C} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid g(x', y') = 0\}$, no qual

$$\begin{aligned} g(x', y') &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \frac{105}{4} \\ &= \frac{1}{4}(x')^2 + (y')^2 - \frac{105}{4}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \left\{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x')^2}{\sqrt{105}} + \frac{(y')^2}{\frac{\sqrt{105}}{2}} = 1 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x+8)^2}{\sqrt{105}} + \frac{(y+3/2)^2}{\frac{\sqrt{105}}{2}} = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Logo o conjunto solução $f(x, y) = 0$ é representado por uma elipse, e seu esboço é dado pela Figura 38.

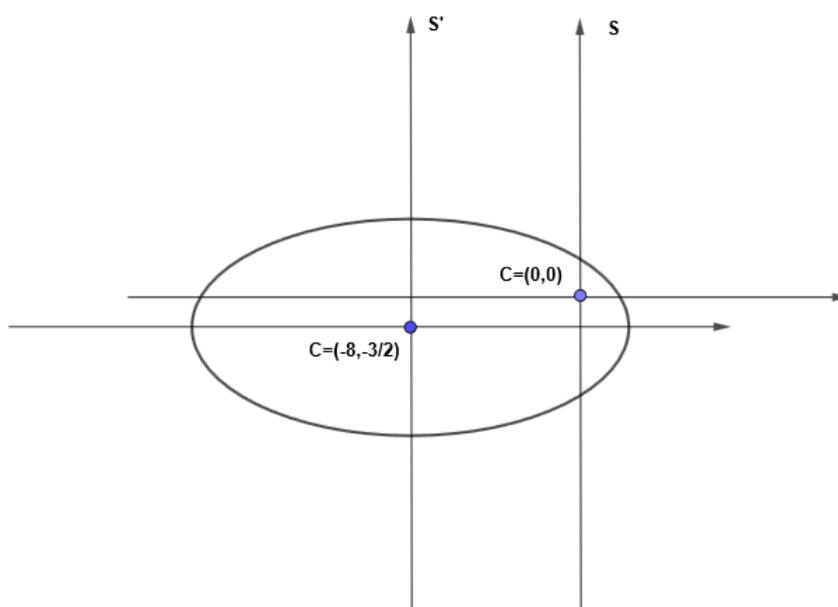


Figura 38 – Elipse transladada

Exemplo 34. Vamos esboçar o conjunto dado por $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$, no qual $f(x, y) = -3x^2 + 4y^2 + 16x - 12y$.

Na forma matricial temos

$$f(X) = X^t A X + 2B X, \text{ no qual}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$a_{11} = -3, a_{22} = 4, a_{12} = 0, a_{13} = \frac{16}{2} = 8, a_{23} = \frac{-12}{2} = -6 \text{ e } a_{33} = 0.$$

$$\text{Logo, } AC = -B^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 8/3, \\ c_2 = 3/2. \end{cases}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} f(c_1, c_2) &= \begin{pmatrix} 8/3 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/3 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \frac{128}{3} - \frac{36}{2} \\ &= \begin{pmatrix} 8/3 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{128}{3} - \frac{36}{2} \\ &= -\frac{64}{3} + \frac{18}{2} + \frac{128}{3} - \frac{36}{2} \\ &= \frac{37}{3}. \end{aligned}$$

Como $AC = -B'$ possui solução, então o conjunto $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ pode ser escrito em relação ao sistema $S' = \{C; \vec{i}, \vec{j}\}$, da forma $\mathcal{C} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid g(x', y') = 0\}$, no qual

$$\begin{aligned} g(x', y') &= (X')^t A X' + f(C) \\ &= -3(x')^2 + 4(y')^2 - \frac{37}{3}. \end{aligned}$$

Dessa forma $(x', y') \in \mathcal{C}$ se e somente se

$$\frac{(x')^2}{\left(\frac{\sqrt{37}}{3}\right)^2} - \frac{(y')^2}{\left(\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{12}}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{8}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{37}}{3}\right)^2} - \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{12}}\right)^2} = 1. \quad (3.5)$$

O conjunto \mathcal{C} dado em (3.5) é uma hipérbole na sua forma reduzida referente ao sistema $S' = \{C; \vec{i}, \vec{j}\}$ ou uma hipérbole transladada referente ao sistema $S = \{0; \vec{i}, \vec{j}\}$.

Abaixo temos o esboço da cônica.

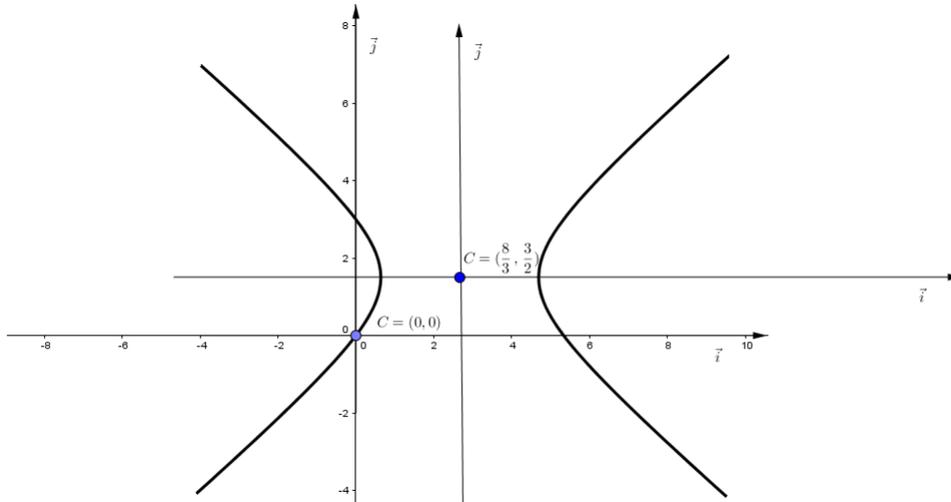


Figura 39 – Hipérbole transladada

Ao analisarmos o esboço acima, concluímos que quando propomos no início do estudo desta seção, um sistema de coordenadas conveniente para escrever (esboçar a cônica), estávamos na verdade provocando uma translação no sistema de coordenadas S , conseqüentemente, anulando os termos lineares de (3.1) podendo assim classificá-la como uma das cônicas estudadas no final do Capítulo 2.

Antes de avançarmos no estudo das equações quadráticas, faremos um estudo sobre alguns conceitos de suma importância, a saber: autovalores e autovetores.

3.3 Autovalores e Autovetores

Definição 17. Seja $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais $n \times n$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ se existe um $\vec{v} \neq 0$ tal que

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}. \quad (3.6)$$

Um vetor \vec{v} que satisfaz a igualdade dada em (3.6) é chamado de autovetor associado ao autovalor λ da matriz A .

Considere a matriz identidade $I_d = [a_{ij}]_{n \times n}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Note que, se existe $\vec{v} \neq 0$ tal que vale (3.6), então

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= \lambda I_d \vec{v} \\ A\vec{v} - A\vec{v} &= \lambda I_d \vec{v} - A\vec{v} \\ (A - \lambda I_d)\vec{v} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

A identidade acima representa um sistema linear com n equações e n incógnitas, no qual n representa a ordem da matriz A , \vec{v} é o vetor com as incógnitas e a matriz $(A - \lambda I_d)$ é a matriz dos coeficientes. Como $\vec{v} \neq 0$, então temos um sistema homogêneo que admite solução não trivial, logo

$$p(\lambda) \doteq \det(A - \lambda I_d) = 0. \quad (3.7)$$

O polinômio $p(\lambda)$ dado em (3.7) é chamada de polinômio característico da matriz A . Assim para encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que (3.6) seja válido, basta estudarmos as raízes do polinômio característico dado em (3.7).

Vamos ilustrar com um exemplo, partindo de uma matriz quadrada 2×2 qualquer A e calcular o polinômio característico associado a mesma.

Exemplo 35. Considere a matriz, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ no qual $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}$. Logo

$$(A - \lambda I_d) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico temos

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb.$$

Uma pergunta natural é questionar se autovalores distintos podem gerar os mesmos autovetores. O próximo teorema nos responde.

Teorema 1. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são autovalores dois a dois distintos de uma matriz simétrica A , então os autovetores correspondentes v_1, \dots, v_m são dois a dois ortogonais e consequentemente linearmente independentes.

Demonstração: Sejam $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distintos. Então

$$\begin{aligned} (\lambda_i - \lambda_j) \cdot \langle v_i, v_j \rangle &= \lambda_i \cdot \langle v_i, v_j \rangle - \lambda_j \cdot \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle - \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle \\ &= \langle Av_i, v_j \rangle - \langle v_i, Av_j \rangle \\ &= \langle v_i, A^t v_j \rangle - \langle v_i, Av_j \rangle \\ &= \langle v_i, Av_j \rangle - \langle v_i, Av_j \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, se $\lambda_i \neq \lambda_j$ temos que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ ou seja $v_i \perp v_j$. □

Definição 18. Uma matriz $A_{n \times n}$ é diagonalizável quando existir R uma matriz $n \times n$ invertível tal que $R^{-1}AR$ seja uma matriz diagonal.

Teorema 2. $A \in M_{2 \times 2}$ é uma matriz simétrica, então $p(\lambda)$ possui pelo menos uma raiz real. Consequentemente A é uma matriz diagonalável.

Demonstração.

Como a matriz A é simétrica, temos que $A = A^t \Rightarrow b = c$. Logo,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \\ (a - \lambda)(d - \lambda) - c^2 &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - c^2 &= 0. \end{aligned}$$

Faremos uma análise das soluções em função dos possíveis valores do discriminante. De fato,

$$\begin{aligned} \Delta &= (a + d)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (ad - c^2) \\ &= a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4c^2 \\ &= a^2 - 2ad + d^2 + 4c^2 \\ &= (a - d)^2 + 4c^2. \end{aligned}$$

Note que $p(\lambda)$ possui ao menos uma raiz real pois $\Delta \geq 0$.

1. $\Delta > 0$, teremos como solução duas raízes reais e distintas.

2. $\Delta = 0$, então $a = d$ e $c = 0$. Logo A é diagonalizável.

Como o polinômio $p(\lambda)$ possui duas raízes e garantimos ao menos uma raiz real, automaticamente a outra raiz também será real. Conclusão, sempre existirá um autovalor real associado a matriz A . \square

Exemplo 36. Dado a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ vamos determinar os autovalores de A e os autovetores correspondentes.

Inicialmente vamos calcular o polinômio característico associado a matriz A . Note que a matriz A é simétrica.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4.$$

Consequentemente $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ são raízes de $p(\lambda)$ e assim autovalores de A .

Vamos calcular os autovetores associados a cada autovalor.

(i) $\lambda_1 = -1$.

Se \vec{v} é um autovetor associado a $\lambda_1 = -1$, então:

$$(A - \lambda_1 Id)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & -2 \\ -2 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, resolvendo a primeira equação do sistema (que é equivalente a segunda) temos

$$2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y.$$

Como $\vec{v}_1 = (x, y)$ e $x = y$ temos que $\vec{v}_1 = (x, x)$ então $\vec{v}_1 = x(1, 1)$, no qual $x \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores.

(ii) $\lambda_2 = 3$.

Se \vec{v} é um autovetor associado a $\lambda_2 = 3$, então:

$$(A - \lambda_2 Id)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & -2 \\ -2 & 1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, resolvendo o sistema temos

$$-2x - 2y = 0 \Rightarrow y = -x.$$

Como $\vec{v}_2 = (x, y)$ e $y = -x$, temos que $\vec{v}_2 = (x, -x)$ então $\vec{v}_2 = x(1, -1)$, no qual $x \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores.

3.4 Um estudo sobre equações com $a_{13} = a_{23} = 0$.

Considere uma função polinomial como em (3.1) cujos coeficientes satisfazem $a_{13} = a_{23} = 0$, isto é,

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33}. \quad (3.8)$$

O objetivo dessa seção é estudar o conjunto $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$.

A representação matricial da função $f(x, y)$ é dada por

$$f(x, y) = X^t A X + a_{33}, \quad (3.9)$$

no qual

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Da seção anterior vimos que se o sistema $AC = -B^t$ for possível, então existirá uma mudança de variável $X = X' + C$ tal que $f(x, y) = 0$ torna-se $g(x', y') = (X')^t A X' + k = 0$, no qual os termos lineares sejam nulos, o que não remete a este caso, pois os termos lineares já são nulos. De partida, nosso objetivo é propor uma nova mudança de variável no qual o termo misto nas novas variáveis seja nulo.

Suponhamos então, que exista uma nova mudança de variável $(x, y) \rightarrow (x'', y'')$ tal que a equação

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow h(x'', y'') = 0$$

no qual $h(x'', y'') = \tilde{a}_{11}(x'')^2 + \tilde{a}_{22}(y'')^2 + \tilde{a}_{33}$, isto é, a função $f(x, y)$ pode ser escrita em novas variáveis (x'', y'') no qual o termo misto $\tilde{a}_{12} = 0$.

Vamos propor uma mudança no sistema de coordenadas de $S = \{0; \vec{i}, \vec{j}\}$ para $S'' = \{0; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ no qual \vec{u}_1 e \vec{u}_2 são os autovetores unitários associados aos autovalores da matriz A .

Para isso propomos a seguinte mudança de variável, $X = R X''$, no qual R é a matriz $R_{2 \times 2}$ formada pelos autovetores unitários associados a matriz A .

Em coordenadas se $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, são os autovetores associados aos respectivos autovalores λ_1 e λ_2 de A , então temos,

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right) \text{ e } \vec{u}_2 = \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \right)$$

e assim,

$$R = \begin{pmatrix} \overbrace{\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}}^{\vec{u}_1} & \overbrace{\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}}^{\vec{u}_2} \\ \overbrace{\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}} & \overbrace{\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Tal matriz possui uma importante propriedade de diagonalização, isto é

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Esse processo é chamado diagonalização de uma matriz e será justificado na sequência.

Vamos demonstrar (3.11). Note inicialmente que a matriz R definida em (3.10) possui a propriedade que $R^t = R^{-1}$. De fato, a primeira coluna de R é formada pelas coordenadas do autovetor \vec{u}_1 unitário.

Como $|\vec{u}_1| = 1$ podemos escrever $\vec{u}_1 = (\cos\theta, \sen\theta)$ para algum $\theta \in [0, 2\pi[$. Sabemos que \vec{u}_2 é unitário e ortogonal a \vec{u}_1 , dessa forma $\vec{u}_2 = (-\sen\theta, \cos\theta)$ ou $\vec{u}_2 = (\sen\theta, -\cos\theta)$. Assumindo S um sistema de coordenadas positivo,

Assim claramente temos $R^t = R^{-1}$. Além do mais

$$A \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sen\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \cos\theta \\ \lambda_1 \cdot \sen\theta \end{pmatrix}$$

pois $\vec{u}_1 = (\cos\theta, \sen\theta)$ é autovetor de λ_1 e.

$$A \begin{pmatrix} -\sen\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \cdot \sen\theta \\ \lambda_2 \cdot \cos\theta \end{pmatrix}$$

pois $\vec{u}_2 = (-\sen\theta, \cos\theta)$ é autovetor de λ_2 . Dessa forma

$$AR = A \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sen\theta & 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 0 & -\sen\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Multiplicando (3.12) por R^{-1} obtemos

$$\begin{aligned} R^{-1}AR &= R^tAR \\ &= R^t \left[A \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sen\theta & 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 0 & -\sen\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \right], \\ &= R^t \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \cos\theta & 0 \\ \lambda_1 \cdot \sen\theta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_2 \cdot \sen\theta \\ 0 & \lambda_2 \cdot \cos\theta \end{pmatrix} \right], \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sen\theta \\ -\sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \cos\theta & -\lambda_2 \cdot \sen\theta \\ \lambda_1 \cdot \sen\theta & \lambda_2 \cdot \cos\theta \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando a mudança de variável $X = RX''$ e utilizando (3.11) temos

$$\begin{aligned}
 f(X) &= X^t A X + a_{33} = 0 \\
 &= (RX'')^t A R X'' + a_{33} \\
 &= (X'')^t R^t A R X'' + a_{33} \\
 &= (X'')^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X'' + a_{33} \\
 h(x'', y'') &= \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + a_{33}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Note que em (3.13) preserva a natureza da função, isto é $f(RX'')$ permanece uma função quadrática análogo ao caso estudado na Seção 3.2.

Façamos uma aplicação do estudo desenvolvido acima, no Exemplo 37 abaixo.

Exemplo 37. Considere $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 3xy + \frac{3}{2}y^2 - 5$, no qual

$$a_{11} = \frac{3}{2}, a_{22} = \frac{3}{2}, a_{12} = \frac{3}{2}, a_{13} = 0, a_{23} = 0 \text{ e } a_{33} = -5.$$

A representação matricial dessa função é dada por.

$$f(x, y) = X^t A X + a_{33}, \tag{3.14}$$

no qual

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Note que em (3.13) os coeficientes dos termos lineares são nulos.

Vamos escrever o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no qual $f(x, y) = 0$ no conjunto $\mathcal{C} = \{(x'', y'') \in \mathbb{R}^2 \mid h(x'', y'') = 0\}$, no qual $X = RX''$ e R é a matriz dos autovetores unitários associados a matriz A .

Para isso vamos encontrar os autovalores e autovetores correspondentes da matriz A . Os autovalores da matriz A são as raízes do polinômio característico, logo

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} 3/2 - \lambda & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 - \lambda \end{vmatrix} = (3/2 - \lambda)^2 - (3/2)^2.$$

As raízes do polinômio característico são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$.

Vamos determinar agora os autovetores unitários associados aos autovalores da matriz A que formarão a base do sistema a ser considerado.

1º) $\lambda_1 = 0$.

$$(A - \lambda_1 I_d) \vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3/2 - 0 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 - 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2 \left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -x.$$

Como $\vec{v}_1 = (x, y)$ e $y = -x$ temos que $\vec{v}_1 = (x, -x) = x(1, -1)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$, com $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ representando o gerador unitário dessa família.

$$2^\circ) \lambda_2 = 3.$$

$$(A - \lambda_1 I_d)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3/2 - 6/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 - 6/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Fazendo a multiplicação, obtemos } \begin{cases} -3x/2 + 3/2y = 0, \\ 3x/2 - 3/2y = 0. \end{cases}$$

Assim

$$-3x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Como $\vec{v}_2 = (x, y)$ e $y = x$ temos que $\vec{v}_2 = (x, x) = x(1, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$, com $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ representando o gerador unitário dessa família.

Escrevendo o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no qual $f(x, y) = 0$ no conjunto $\mathcal{C} = \{(x'', y'') \in \mathbb{R}^2 \mid h(x'', y'') = 0\}$, no qual $X = RX''$ e R é a matriz dos autovetores unitários associados a matriz A . Temos

$$\begin{aligned} h(x'', y'') &= \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + a_{33} = 0 \\ 0.(x'')^2 + 3.(y'')^2 - 5 &= 0 \\ y'' &= \pm\sqrt{\frac{5}{3}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

A função dada em (3.15) é representada graficamente por duas retas paralelas referente ao sistema de coordenadas $S'' = \{0; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

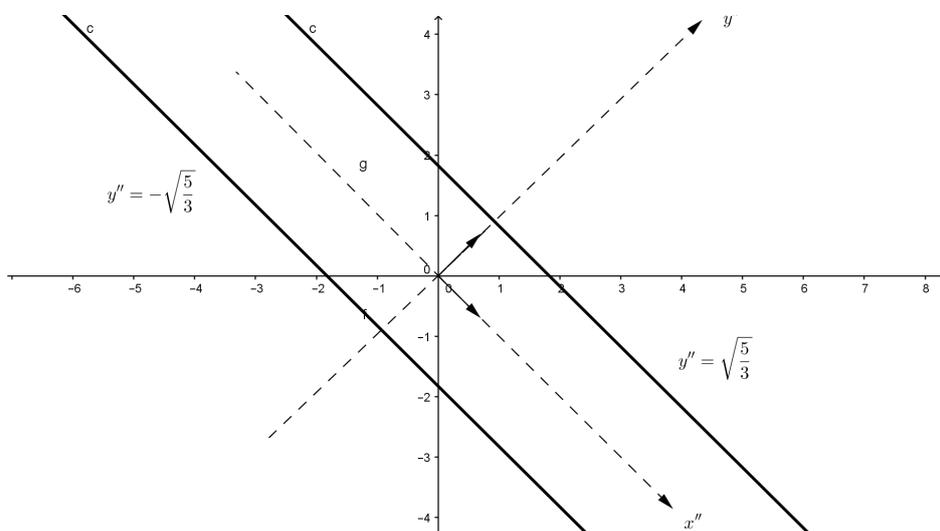


Figura 40 – Retas paralelas

3.5 Estudo das equações no caso geral

Considere uma função polinomial como em (3.1), no qual ao menos um dos coeficientes associados aos termos de ordem 2 sejam não nulos, isto é

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

no qual $a_{ij}, k \in \mathbb{R}$, com a_{11} ou $a_{22} \neq 0$.

O polinômio acima pode ser identificado na forma matricial,

$$f(x, y) = f(X) = X^tAX + 2BX + a_{33},$$

no qual

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Utilizaremos as ferramentas apresentadas nas seções anteriores, isto é, iremos propor um novo sistema de coordenadas, tal que o conjunto \mathcal{C} seja apresentado de uma forma elementar $\mathcal{C} = \{(x'', y'') \in \mathbb{R}^2 \mid h(x'', y'') = 0\}$, no qual $h(x'', y'')$ representa a equação reduzida de uma cônica (degenerada ou não).

Exemplo 38. Vamos determinar a cônica \mathcal{C} , dada a função quadrática $f(x, y) = 4x^2 - 4yx + 7y^2 + 12x + 6y - 9$.

Da Seção 3.2 vimos que se o sistema $AC = -B^t$ for possível, então existirá uma mudança de variável $X = X' + C$ tal que $f(x, y) = 0$, torna-se $g(x', y') = (X')^tAX' + k = 0$, isto é, os termos lineares sejam nulos no novo sistema de coordenadas. Analisando a função $f(x, y)$ temos:

$$a_{11} = 4, a_{22} = 7, a_{12} = -2, a_{13} = 6, a_{23} = 3 \text{ e } a_{33} = -9,$$

no qual

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$AC = -B^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2, \\ c_2 = -1. \end{cases}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
f(C) &= C^t A C + 2BC + a_{33} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} - 30 - 9 \\
&= \begin{pmatrix} -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} - 39 \\
&= 12 + 3 - 39 \\
&= -24.
\end{aligned}$$

Como $AC = -B^t$ possui solução, o conjunto $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ pode ser escrito em relação ao sistema $S' = \{C, \vec{i}, \vec{j}\}$, na forma $\mathcal{C} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } g(x', y') = 0\}$, no qual

$$\begin{aligned}
g(x', y') &= (X')^t A X' + 2BC + f(C) \\
&= 4(x')^2 - 4(x')(y') + 7(y')^2 - 24.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Note que, ao estabelecermos a mudança de variável, conseguimos eliminar os termos lineares da função f , que corresponde a realizarmos uma translação do sistema $S = \{0; \vec{i}, \vec{j}\}$ para o sistema $S' = \{C; \vec{i}, \vec{j}\}$. Devemos então prosseguir nosso estudo na tentativa de eliminarmos o termo misto de (3.16), para isso vamos recorrer à mudança de variável estudada na Seção 3.4. Propomos a seguinte mudança de variável $X' = R X''$, no qual R é a matriz formada pelos autovetores associados ao respectivos autovalores da matriz A que resulta em:

$$h(x'', y'') = \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + f(C),$$

no qual λ_1 e λ_2 são autovalores associados a matriz A .

Para encontrarmos os autovalores associados a matriz A , basta encontrarmos as raízes do polinômio característico dado abaixo.

$$p_A(\lambda) \doteq \det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ -2 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 24.$$

Logo os autovalores de A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 8$.

Vamos determinar os autovetores unitários associados aos autovalores da matriz A que formarão a base do sistema.

1º) Os autovetores associados a $\lambda_1 = 3$ são dados por:

$$(A - \lambda_1 I_d) \vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 - 3 & -2 \\ -2 & 7 - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação, obtemos
$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ -2x + 4y = 0. \end{cases}$$

Assim

$$x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = x/2.$$

Como $\vec{v}_1 = (x, y)$ e $y = x/2$ temos que $\vec{v}_1 = (x, x/2) = x(1, 1/2)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$, com $\vec{u}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ representando o gerador unitário dessa família.

2º) Os autovetores associados a $\lambda_2 = 8$ são dados por:

$$(A - \lambda_1 I_d)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-8 & -2 \\ -2 & 7-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fazendo a multiplicação, obtemos
$$\begin{cases} -4x - 2y = 0, \\ -2x - y = 0. \end{cases}$$

Assim

$$-2x - y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

Como $\vec{v}_2 = (x, y)$ e $y = -2x$ temos que $\vec{v}_1 = (x, -2x) = x(1, -2)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores associado ao autovalor $\lambda_2 = 8$, com $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ representando o gerador unitário dessa família.

Escrevendo o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no qual $f(x, y) = 0$ no conjunto $\mathcal{C} = \{(x'', y'') \in \mathbb{R}^2 \mid h(x'', y'') = 0\}$, no qual $X = RX''$ e R é a matriz dos autovetores unitários associados a matriz A . temos

$$\begin{aligned} h(x'', y'') &= \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f(C) = 0 \\ 3(x'')^2 + 8(y'')^2 - 24 &= 0 \\ \frac{(x'')^2}{(\sqrt{8})^2} + \frac{(y'')^2}{(\sqrt{3})^2} &= 1. \end{aligned} \tag{3.17}$$

A equação em (3.17) é representada graficamente por uma elipse no sistema de coordenadas $S'' = \{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

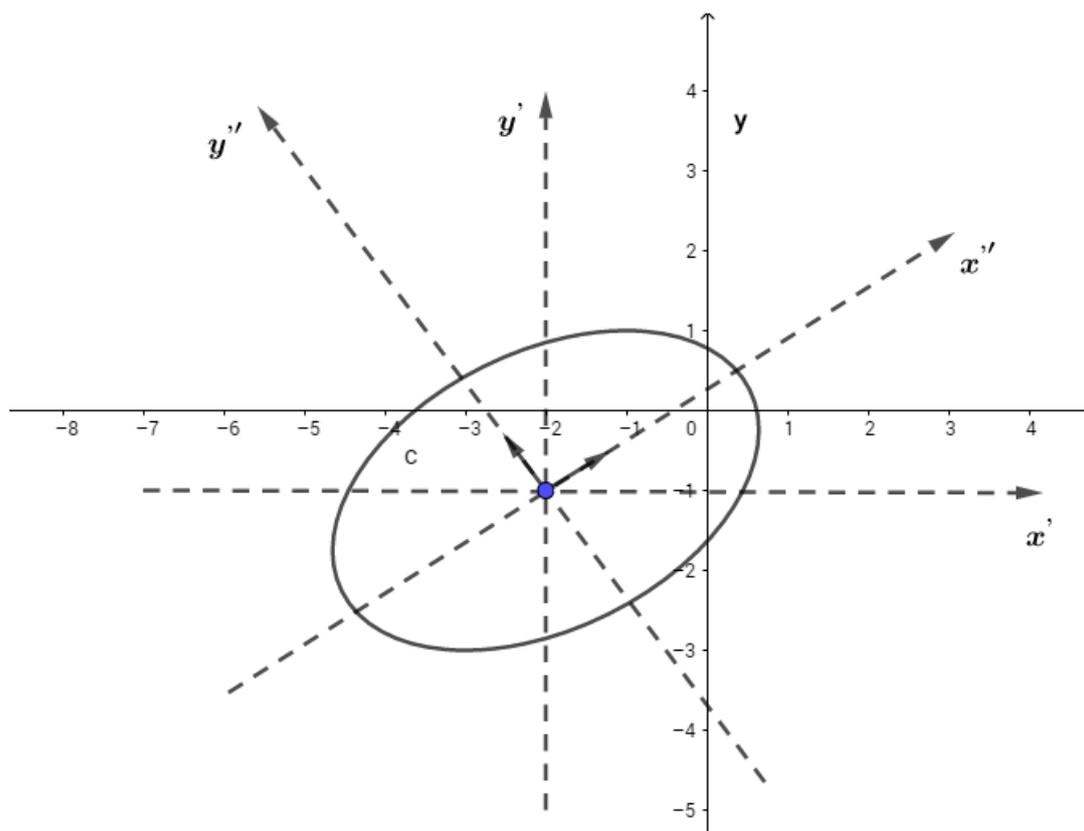


Figura 41 – Translação e rotação da elipse

Exemplo 39. Considere $f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + 3xy + \frac{3}{2}y^2 + x - y$. Vamos determinar a cônica \mathcal{C} , tal que

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x,y) = 0\}.$$

Temos que

$$a_{11} = \frac{3}{2}, a_{22} = \frac{3}{2}, a_{12} = \frac{3}{2}, a_{13} = \frac{1}{2}, a_{23} = -\frac{1}{2} \text{ e } a_{33} = 0.$$

Logo a representação matricial dessa função é dada por.

$$f(x,y) = X^t A X + 2B X + a_{33},$$

no qual

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Da Seção 3.2 vimos que se o sistema $AC = -B^t$ for possível, então existirá uma mudança de variável $X = X' + C$ tal que $f(x,y) = 0$, torna-se $g(x',y') = (X')^t A X' + k = 0$, isto é, os termos lineares sejam nulos no novo sistema de coordenadas. Analisando a função $f(x,y)$ temos:

$$AC = -B^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{1}{3}, \\ c_1 + c_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Como $AC = -B^t$ não possui solução, o conjunto $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ não pode ser escrito em relação ao sistema $S' = \{C, \vec{i}, \vec{j}\}$. Devemos então seguir nosso estudo na tentativa de eliminarmos o termo misto de $f(x, y)$.

Vamos escrever o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no qual $f(x, y) = 0$ no conjunto $\mathcal{C} = \{(x'', y'') \in \mathbb{R}^2 \mid h(x'', y'') = 0\}$, no qual $X = RX''$ e R é a matriz dos autovetores unitários associados a matriz A .

Para isso vamos encontrar os autovalores e autovetores correspondentes da matriz A . Os autovalores da matriz A são as raízes do polinômio característico, logo

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} 3/2 - \lambda & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 - \lambda \end{vmatrix} = (3/2 - \lambda)^2 - (3/2)^2.$$

As raízes do polinômio característico são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$.

Vamos determinar agora os autovetores unitários associados aos autovalores da matriz A que formarão a base do sistema a ser considerado.

1º) Os autovetores associados a $\lambda_1 = 0$ são dados por:

$$(A - \lambda_1 I_d)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3/2 - 0 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 - 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2 \left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -x.$$

Como $\vec{v}_1 = (x, y)$ e $y = -x$ temos que $\vec{v}_1 = (x, -x) = x(1, -1)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$, com $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$ representando o gerador unitário dessa família.

2º) Os autovetores associados a $\lambda_2 = 3$ são dados por:

$$(A - \lambda_2 I_d)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3/2 - 6/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 - 6/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação, obtemos
$$\begin{cases} -3x/2 + 3y/2 = 0, \\ 3x/2 - 3y/2 = 0. \end{cases}$$

Assim, $-3x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = x$.

Como $\vec{v}_2 = (x, y)$ e $y = x$ temos que $\vec{v}_2 = (x, x) = x(1, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$, com $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ representando o gerador unitário dessa família.

Escrevendo o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no qual $f(x, y) = 0$ no conjunto $\mathcal{C} = \{(x'', y'') \in \mathbb{R}^2 \mid h(x'', y'') = 0\}$, no qual $X = RX''$ e R é a matriz dos autovetores unitários

associados a matriz A , temos que

$$\begin{aligned}
 f(X) &= X^t A X + 2 B X + k = 0 \\
 &= (X'')^t R^t A R (X'') + 2 B R (X'') \\
 &= \begin{pmatrix} x'' & y'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \\
 h(x'', y'') &= 3 \cdot (y'')^2 + \sqrt{2} x'' = 0 \\
 (y'')^2 &= -\frac{\sqrt{2}}{3} x''.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

A função dada em (3.18) é representada graficamente por uma parábola referente ao sistema de coordenadas $S'' = \{0; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

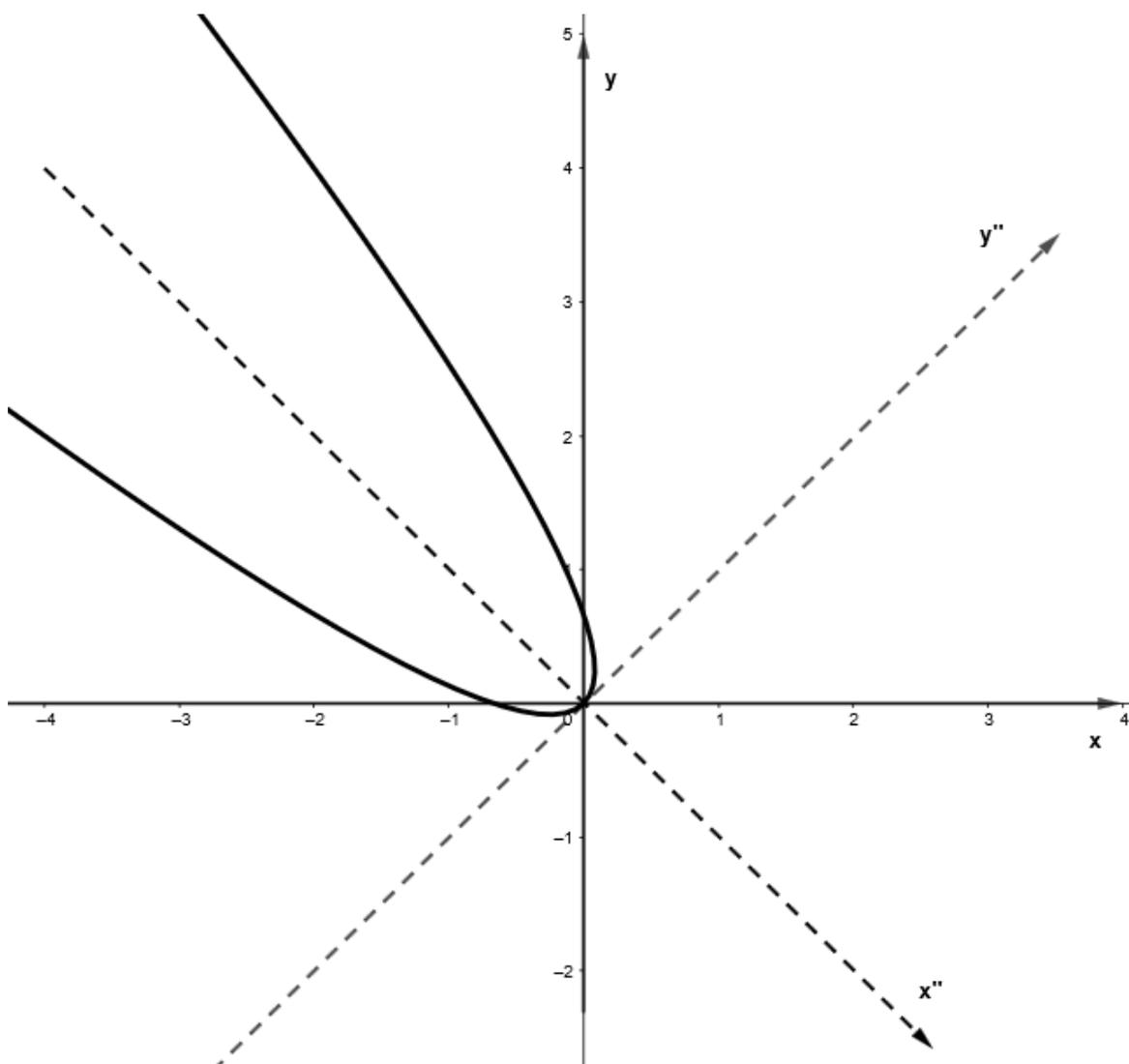


Figura 42 – Parábola rotacionada

Resumo da Classificação das Cônicas

Considere um sistema de coordenadas $S = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ em \mathbb{R}^2 e a cônica

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x, y) = 0\},$$

no qual

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + k, \quad (3.1)$$

para $a_{ij}, k \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade vamos supor que a_{11} ou $a_{22} \neq 0$. A função f pode ser escrita na forma matricial,

$$f(x, y) = f(X) = X^t A X + 2B X + k,$$

no qual $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$. Vamos reescrever o conjunto \mathcal{C} seguindo os seguintes passos.

PASSO 1. Verificando se a cônica possui centro transladado. Para isso devemos verificar a solução do sistema $AC = -B^t$, isto é,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{13} \end{pmatrix}.$$

PASSO 2. Caso o sistema anterior possua solução, definimos $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ e a cônica em relação ao sistema $S' = \{C; \vec{i}, \vec{j}\}$, é escrita na forma $\mathcal{C} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } g(x', y') = 0\}$ para

$$g(x', y') = (X')^t A X' + f(C),$$

no qual $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ e $f(C) = C^t A C + 2B C + k$.

PASSO 3. Considere o sistema de coordenadas $S'' = \{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, no qual \vec{u}_i é o autovalor unitário correspondente ao autovalor λ_i da matriz A . Dessa forma a cônica pode ser escrita da forma

$$\mathcal{C} = \{(x'', y'') \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } h(x'', y'') = 0\}$$

no qual

$$h(X'') = \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f(C). \quad (3.19)$$

PASSO 4. Analisar o significado da expressão (3.19) do Passo 3. São eles:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 > 0 \quad f(C) > 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{\emptyset\} \\ \lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 > 0 \quad f(C) < 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{\text{elipse}\} \\ \lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 > 0 \quad f(C) = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{C\} \\ \lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 < 0 \quad f(C) > 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{\text{elipse}\} \\ \lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 < 0 \quad f(C) < 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{\emptyset\} \\ \lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 < 0 \quad f(C) = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{C\} \\ \lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 < 0 \quad f(C) > 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{\text{hipérbole}\} \\ \lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 < 0 \quad f(C) < 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{\text{hipérbole}\} \\ \lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 < 0 \quad f(C) = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{\text{retas concorrentes}\} \\ \lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad f(C) > 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{\emptyset\} \\ \lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad f(C) < 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{\text{retas paralelas}\} \\ \lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad f(C) = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{\text{reta}\} \end{array} \right.$$

Note que se $AC = -B^t$ possuir solução, então todos os casos possíveis estão contemplados na descrição acima. De fato, se o sistema $AC = -B^t$ possui solução única então $\det A \neq 0$. Como a matriz A é diagonalizável (veja na Seção 3.3 Teorema 2) temos que $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ e assim $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

PASSO 5. Caso o sistema linear $AC = -B^t$ não possua solução passamos diretamente ao Passo 3, isto é vamos calcular os autovalores da matriz A e os autovetores associados aos respectivos autovalores de A . Sem perda de generalidade, considere $\lambda_2 = 0$. De fato como $\det A = 0$ automaticamente $\lambda = 0$ é raiz do polinômio característico. Dessa forma, a equação da cônica com relação ao sistema $S' = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ dada pela mudança de variáveis $X = RX'$ é satisfeita pela equação

$$\begin{aligned} X'^t A X + 2B X + k &= 0 \\ (X')^t R^t A R (X') + 2B R (X') + k &= 0 \\ g(x', y') \doteq (X')^t \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X' + 2B R X' + k &= 0, \end{aligned}$$

no qual R é a matriz formada pelas colunas dos autovetores unitários correspondente aos autovalores λ_1 e $\lambda_2 = 0$. Observe que não adianta aplicarmos o Passo 2 na equação anterior, isto é o sistema $\tilde{A}C = -\tilde{B}^t$ para

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{B} = B R,$$

não possui solução. Matricialmente

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = -(BR)^t$$

não possui solução. Entretanto podemos encontrar solução c_1 que satisfaça apenas a primeira equação desse sistema, em outras palavras c_1 é solução da primeira equação do sistema $C^t \tilde{A} + BR = 0$. Considere $C^t = (c_1, 0)$ e o sistema $S'' = \{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. Aplicando a mudança de coordenadas $X' = X'' + C$ na equação $g(x', y') = 0$ temos

$$\begin{aligned} (X')^t \tilde{A} X' + 2BRX' + k &= 0 \\ (X'' + C)^t \tilde{A} (X'' + C) + 2BR(X'' + C) + k &= 0. \end{aligned}$$

Seguindo a redução da equação anterior conforme a Seção 3.2 temos

$$(X'')^t \tilde{A} (X'') + 2(C^t \tilde{A} + BR) X'' + g(c_1, 0) = 0$$

e pela definição de c_1 temos

$$(X'')^t \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (X'') + 2 \begin{bmatrix} 0 & \eta \end{bmatrix} X'' + g(c_1, 0) = 0.$$

no qual η é a segunda entrada da matriz linha BR . Dessa forma $g(x', y') = 0$ é escrita como $h(x'', y'') = 0$ em que

$$h(x'', y'') = \lambda_1 (x'')^2 + \eta y'' + g(c_1, 0).$$

Trata-se portanto, de uma **parábola**.

Nem sempre é fácil reconhecer essas curvas do conjunto \mathcal{C} a partir de suas equações. No entanto, a partir de rotações e translações do sistema de coordenadas conseguimos reduzir as equações às formas mais simples e a identificação das curvas cônicas tornam-se quase que imediata. Vamos aplicar os passos apresentados dentro desta seção nos exemplos que se seguem.

3.6 Exemplos

Exemplo 40. Dada a função quadrática,

$$f(x, y) = \frac{-11x^2}{80} + \frac{3xy}{10} - \frac{y^2}{20} + \frac{9x}{40} - \frac{7y}{10} - 1 + \frac{29}{80}$$

Vamos determinar a cônica

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x, y) = 0\}.$$

PASSO 1. Vamos verificar se a cônica possui centro transladado. Para isso devemos verificar a solução do sistema $AC = -B^t$, isto é

$$A = \begin{pmatrix} -11/80 & 3/20 \\ 3/20 & -1/20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9/80 & -7/20 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$AC = -B^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -11/80 & 3/20 \\ 3/20 & -1/20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/80 \\ 7/20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3, \\ c_2 = 2. \end{cases}$$

PASSO 2. O sistema anterior possui solução, definido por $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e a cônica em relação ao sistema $S' = \{C; \vec{i}, \vec{j}\}$, é escrita na forma $\mathcal{C} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } g(x', y') = 0\}$ para

$$g(x', y') = (X')^t A X' + f(C),$$

no qual $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ e $f(C) = C^t A C + 2BC + k$, então

$$\begin{aligned} f(C) &= C^t A C + 2BC + a_{33} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11/80 & 3/20 \\ 3/20 & -1/20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 109/80 \\ &= \begin{pmatrix} -9/80 & 7/20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 109/80 \\ &= -80/80 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Reescrevendo a cônica em relação ao sistema $S' = \{C; \vec{i}, \vec{j}\}$, temos

$$g(x', y') = (X')^t A X' + 2BC + f(C)$$

$$g(x', y') = \frac{-11(x')^2}{80} + \frac{3(x')(y')}{10} + \frac{(y')^2}{20} - 1. \quad (3.20)$$

PASSO 3. Considere o sistema de coordenadas $S'' = \{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, no qual \vec{u}_i é o autovalor unitário correspondente ao autovalor λ_i da matriz A .

Propomos a seguinte mudança de variável, $X' = R X''$. A cônica pode ser escrita da seguinte forma

$$h(x'', y'') = \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + f(C).$$

Para encontrarmos os autovalores associados a matriz A , basta encontrarmos as raízes do polinômio característico dado abaixo:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} -11/80 - \lambda & 3/20 \\ 3/20 & -1/20 - \lambda \end{vmatrix} = 64\lambda^2 + 12\lambda - 1.$$

Logo os autovalores de A são $\lambda_1 = 1/16$ e $\lambda_2 = -1/4$.

Vamos determinar os autovetores unitários associados aos autovalores da matriz A que formarão a base do sistema.

1º) Os autovetores associados a $\lambda_1 = \frac{1}{16}$ são dados por:

$$(A - \lambda_1 I_d)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -11/80 - 1/16 & 3/20 \\ 3/20 & -1/20 - 1/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação, obtemos $\begin{cases} -16x/80 + 3y/20 = 0 \\ 3x - 9y/80 = 0. \end{cases} \Rightarrow -16x + 12y = 0 \Leftrightarrow x = 3y/4$.

Como $\vec{v}_1 = (x, y)$ e $x = 3y/4$ temos que $\vec{v}_1 = (3y/4, y) = y(3/4, 1)$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores associado ao autovalor $\lambda_1 = \frac{1}{16}$, com $\vec{u}_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ representando o gerador unitário dessa família.

2º) Os autovetores associados a $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ são dados por:

$$(A - \lambda_2 I_d)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -11/80 + 1/4 & 3/20 \\ 3/20 & -1/20 + 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação, obtemos $\begin{cases} 9x/80 + 3y/20 = 0 \\ 3x/20 + y/5 = 0. \end{cases} \Rightarrow 3x/20 + y/5 = 0 \Leftrightarrow y = -3x/4$.

Como $\vec{v}_2 = (x, y)$ e $y = -3x/4$ temos que $\vec{v}_2 = (x, -3x/4) = x(1, -3/4)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores associado ao autovalor $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$, com $\vec{u}_2 = (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$ representando o gerador unitário dessa família.

$$\begin{aligned} h(x'', y'') &= \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + f(C) \\ h(x'', y'') &= \frac{1}{16} (x'')^2 - \frac{1}{4} (y'')^2 - 1. \end{aligned}$$

O conjunto $\mathcal{C} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid g(x', y') = 0\}$ em relação ao sistema $S'' = \{C, \vec{u}_1; \vec{u}_2\}$, é escrita na forma $\mathcal{C} = \{(x'', y'') \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } h(x'', y'') = 0\}$.

$$h(x'', y'') = \frac{(x'')^2}{4^2} - \frac{(y'')^2}{2^2} - 1. \quad (3.21)$$

PASSO 4. Analisando (3.21) verificamos que o conjunto solução para $h(x'', y'') = 0$, é representada por uma hipérbole no sistema de coordenadas $S'' = \{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, graficamente dada por

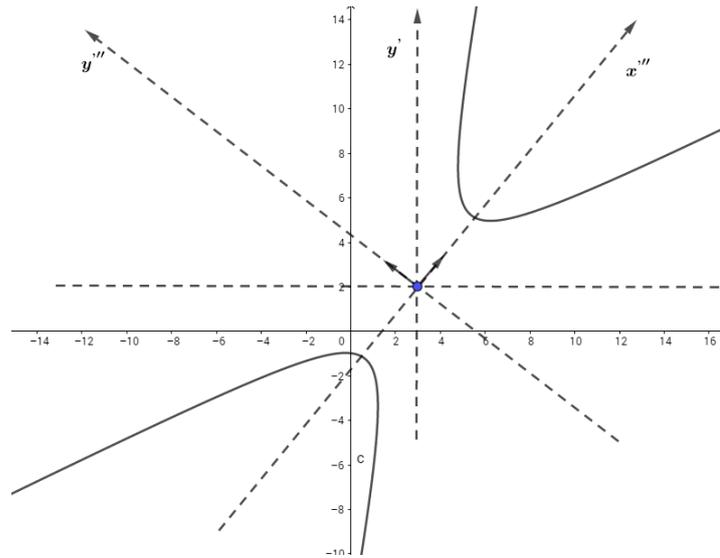


Figura 43 – Rotação e translação da hipérbole

Exemplo 41. Dada a função quadrática

$$f(x,y) = \frac{5x^2}{36} + \frac{xy}{9} + \frac{2y^2}{9} + \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}$$

Vamos determinar a cônica

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x,y) = 0\}.$$

PASSO 1. Vamos verificar se a cônica possui centro transladado. Para isso devemos verificar a solução do sistema $AC = -B^t$, isto é

$$A = \begin{pmatrix} 5/36 & 1/18 \\ 1/18 & 2/9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$AC = -B^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5/36 & 1/18 \\ 1/18 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2, \\ c_2 = 2. \end{cases}$$

PASSO 2. O sistema anterior possui solução, definido por $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e a cônica em relação ao sistema $S' = \{C; \vec{i}, \vec{j}\}$, é escrita na forma $\mathcal{C} = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } g(x',y') = 0\}$ para

$$g(x',y') = (X')^t AX' + f(C),$$

no qual $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ e $f(C) = C^t AC + 2BC + k$, então

$$\begin{aligned} f(C) &= C^t AC + 2BC + a_{33} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5/36 & 1/18 \\ 1/18 & 2/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \\ &= 1 - 2 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Reescrevendo a cônica em relação ao sistema $S' = \{C; \vec{i}, \vec{j}\}$, temos

$$\begin{aligned} g(x', y') &= (X')^t AX' + 2BC + f(C) \\ &= \frac{5(x')^2}{36} + \frac{(x')(y')}{9} + \frac{(2y')^2}{9} - 1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

PASSO 3. Considere o sistema de coordenadas $S'' = \{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, no qual \vec{u}_i é o autovalor unitário correspondente ao autovalor λ_i da matriz A .

Propomos a seguinte mudança de variável, $X' = RX''$. A cônica pode ser escrita da seguinte forma

$$h(x'', y'') = \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f(C),$$

Para encontrarmos os autovalores associados a matriz A , basta encontrarmos as raízes do polinômio característico dado abaixo.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} 5/36 - \lambda & 1/18 \\ 1/18 & 2/9 - \lambda \end{vmatrix} = 324\lambda^2 - 117\lambda + 9.$$

Logo os autovalores de A são $\lambda_1 = 1/4$ e $\lambda_2 = 1/9$.

Vamos determinar os autovetores unitários associados aos autovalores da matriz A que formarão a base do sistema.

1º) Os autovetores associados a $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ são dados por:

$$(A - \lambda_1 I_d)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5/36 - 1/4 & 1/18 \\ 1/18 & 2/9 - 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação, obtemos $\begin{cases} -\frac{x}{9} + \frac{y}{18} = 0 \\ \frac{x}{18} - \frac{y}{9} = 0. \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x.$

Como $\vec{v}_1 = (x, y)$ e $y = 2x$ temos que $\vec{v}_1 = (x, 2x) = x(1, 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores associado ao autovalor $\lambda_1 = \frac{1}{4}$, com $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ representando o gerador unitário dessa família.

2º) Os autovetores associados a $\lambda_2 = \frac{1}{9}$ são dados por:

$$(A - \lambda_2 I_d)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5/36 - 1/9 & 1/18 \\ 1/18 & 2/9 - 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação, obtemos $\begin{cases} \frac{x}{36} + \frac{y}{18} = 0 \\ \frac{x}{18} + \frac{y}{9} = 0. \end{cases} \Rightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y.$

Como $\vec{v}_2 = (x, y)$ e $x = -2y$ temos que $\vec{v}_2 = (-2y, y) = y(-2, 1)$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores associado ao autovalor $\lambda_2 = \frac{1}{9}$, com $\vec{u}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ representando o gerador unitário dessa família.

$$h(x'', y'') = \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + f(C)$$

$$h(x'', y'') = \frac{1}{4}(x'')^2 + \frac{1}{9}(y'')^2 - 1.$$

O conjunto $\mathcal{C} = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid g(x', y') = 0\}$ em relação ao sistema $S'' = \{C, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, é escrita na forma $\mathcal{C} = \{(x'', y'') \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } h(x'', y'') = 0\}$.

$$h(x'', y'') = \frac{(x'')^2}{2^2} + \frac{(y'')^2}{3^2} - 1 \quad (3.23)$$

PASSO 4. Analisando (3.23) verificamos que a função é representada por uma elipse no sistema de coordenadas $S'' = \{C, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, graficamente dada por

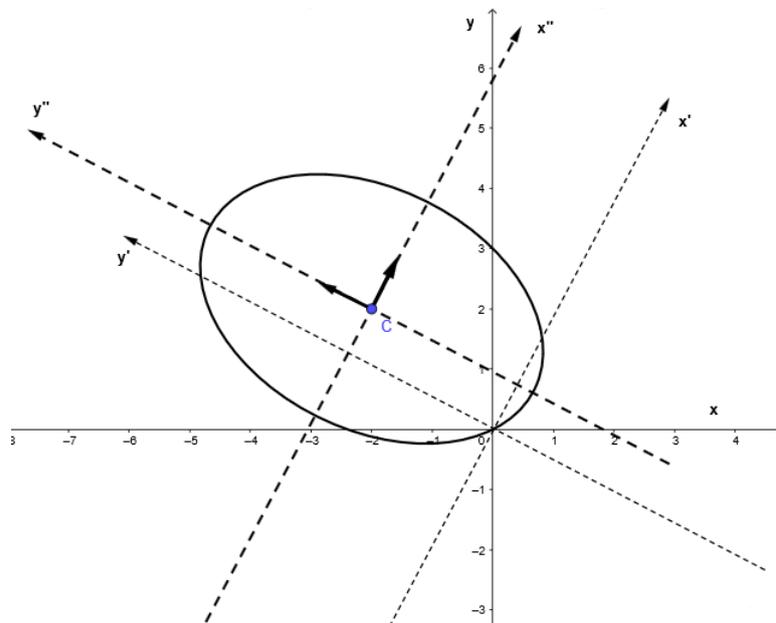


Figura 44 – Rotação e translação da elipse

Exemplo 42. Dada a função quadrática $f(x, y) = 4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y$. Vamos determinar a cônica

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x, y) = 0\}.$$

PASSO 1. Vamos verificar se a cônica possui centro trasladado. Para isso devemos verificar a solução do sistema $AC = -B^t$, isto é

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -15/2 & -3 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$AC = -B^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4c_1 - 10c_2 = \frac{15}{2}, \\ 4c_1 - 10c_2 = -\frac{6}{5}. \end{cases}$$

Camo o sistema linear $AC = -B^t$ não possui solução passamos diretamente ao Passo 3, isto é vamos calcular os autovalores da matriz A e os autovetores associados aos respectivos autovalores de A

PASSO 3. Vamos escrever o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no qual $f(x, y) = 0$ no conjunto $\mathcal{C} = \{(x'', y'') \in \mathbb{R}^2 \mid h(x'', y'') = 0\}$, no qual $X = RX''$ e R é a matriz dos autovetores unitários associados a matriz A .

Para isso vamos encontrar os autovalores e autovetores correspondentes da matriz A . Os autovalores da matriz A são as raízes do polinômio característico, logo

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -10 \\ -10 & 25 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 29\lambda.$$

As raízes do polinômio característico são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 29$.

Vamos determinar agora os autovetores unitários associados aos autovalores da matriz A que formarão a base do sistema a ser considerado.

1º) Os autovetores associados a $\lambda_1 = 0$ são dados por:

$$(A - \lambda_1 I_d)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 - 0 & -10 \\ -10 & 25 - 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação, obtemos $\begin{cases} 4x - 10y = 0, \\ -10x + 25y = 0. \end{cases}$

Assim, $4x - 10y = 0 \Leftrightarrow x = 5y/2$.

Como $\vec{v}_1 = (x, y)$ e $x = 5y/2$ temos que $\vec{v}_1 = (5y/2, y) = y(5/2, 1)$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$, com $\vec{u}_1 = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$ representando o gerador unitário dessa família.

2º) Os autovetores associados a $\lambda_2 = 29$ são dados por:

$$(A - \lambda_2 I_d)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -25 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação, obtemos
$$\begin{cases} -25x - 10y = 0, \\ -10x - 4y = 0. \end{cases}$$

Assim, $-10x - 4y = 0 \Leftrightarrow y = -5y/2$.

Como $\vec{v}_2 = (x, y)$ e $y = -5x/2$ temos que $\vec{v}_2 = (x, -5x/2) = x(1, -5/2)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ é uma família de autovetores associado ao autovalor $\lambda_2 = 29$, com $\vec{u}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}\right)$ representando o gerador unitário dessa família.

Escrevendo o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no qual $f(x, y) = 0$ no conjunto $\mathcal{C} = \{(x'', y'') \in \mathbb{R}^2 \mid h(x'', y'') = 0\}$, no qual $X = RX''$ e R é a matriz dos autovetores unitários associados a matriz A , temos que

$$\begin{aligned} f(X) &= X^t A X + 2B X + k = 0 \\ &= (X'')^t R^t A R (X'') + 2B R (X'') \\ &= \begin{pmatrix} x'' & y'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -15/2 & -6/2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A expressão anterior é dada por

$$h(x'', y'') = 29 \cdot (y'')^2 - 3\sqrt{29}x''.$$

Dessa forma, $h(x'', y'') = 0$ pode ser escrita como:

$$(y'')^2 = \frac{3\sqrt{29}}{29}x''. \quad (3.24)$$

A função dada em (3.24) é representada graficamente por uma parábola referente ao sistema de coordenadas $S'' = \{0; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

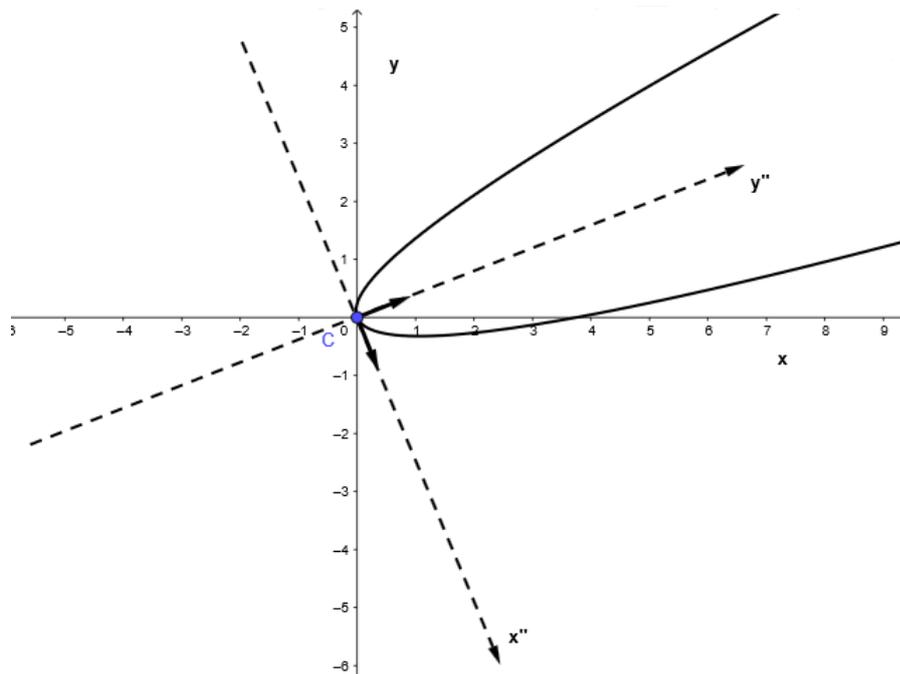


Figura 45 – Parábola rotacionada

APLICAÇÕES DIDÁTICAS

Apresentaremos nesse capítulo uma proposta de atividade pedagógica que poderá ser desenvolvida com alunos da Terceira Série do Ensino Médio, com o objetivo de estabelecer uma relação geométrica e algébrica sobre Cônicas.

4.1 Introdução

Sabemos que através de dobraduras podemos explorar uma série de conceitos em Geometria. Então podemos propor o seguinte desafio: seria possível construir uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, utilizando apenas dobraduras? A fim de responder a essa pergunta, com uso de materiais simples, apresentaremos nesse Capítulo três propostas de atividades pedagógicas.

4.2 Objetivos

Pretendemos com a proposta dessas atividades tornar o aluno protagonista, permitindo que o mesmo, seguindo simples etapas, construa geometricamente através de dobraduras as principais cônicas (parábola, elipse e hipérbole) e fazendo uso de conceitos e teorias, possa verificar algebricamente a veracidade das construções.

4.3 Público

As atividades apresentadas serão divididas em duas etapas: a primeira poderá ser desenvolvida no Ensino Fundamental com foco na construção geométrica através de dobraduras e a segunda etapa destinada a alunos a Terceira Série do Ensino Médio, no intuito de formalizar conceitos utilizando Geometria Analítica, Geometria Plana e Álgebra.

4.4 Teoria

Nesta atividade estaremos recordando as definições e as equações reduzidas das cônicas estudadas no Capítulo 3. Seja α um plano, $0 < c < a$ e F_1, F_2 distintos pertencentes ao plano α . Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos P cuja soma de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 é igual a constante $2a \geq 0$, isto é

$$\mathcal{E}_{lip} = \{P \in \alpha : d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

Nomenclatura:

- F_1, F_2 : focos.
- A_1, A_2 : vértices sobre a reta focal.
- B_1, B_2 : vértices sobre a reta não focal.
- C : centro.
- $2c$: distância focal.
- A_1A_2 : eixo maior
- B_1B_2 : eixo menor.

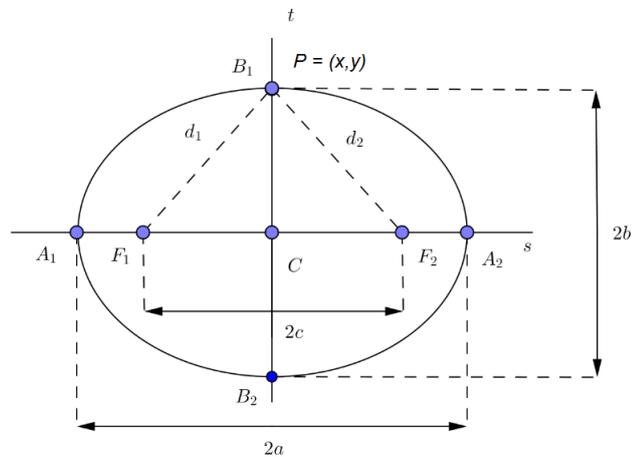


Figura 46 – Elipse

Adotando o sistema de coordenadas $S = \{C; \overrightarrow{CA_2}, \overrightarrow{CB_1}\}$ com $\overrightarrow{CA_2} \perp \overrightarrow{CB_1}$ e C o ponto médio entre F_1 e F_2 , temos:

$$F_1 = (-c, 0) \quad A_1 = (-a, 0) \quad B_1 = (0, b)$$

$$F_2 = (0, c) \quad A_2 = (0, a) \quad B_2 = (-b, 0),$$

No qual, a equação reduzida da elipse se torna a abaixo:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Seja α um plano, $2c > 2a > 0$ e F_1, F_2 distintos pertencentes ao plano α . Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P , pertencentes a este plano, cujo o módulo da diferença de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 seja constante e igual a $2a$, isto é

$$\mathcal{H}_{ip} = \{P \in \alpha : |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}.$$

Nomenclatura:

- F_1, F_2 : focos.
- A_1, A_2 : vértices.
- C : centro.
- $2c$: distância focal.
- A_1A_2 : eixo transverso.
- B_1B_2 : eixo conjugado.
- r, s : assíntotas.

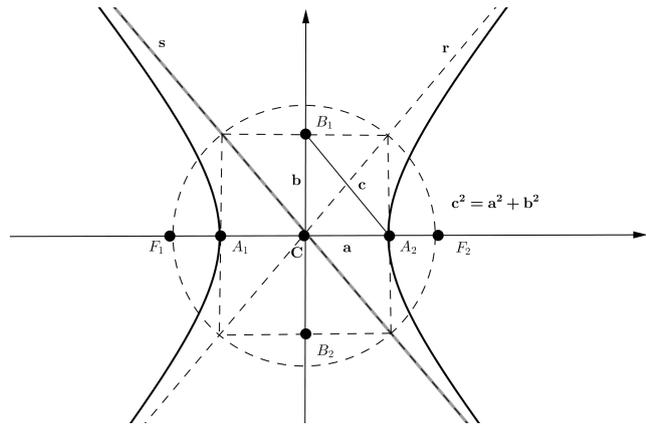


Figura 47 – Hipérbole

No sistema de coordenadas $\{C; \overrightarrow{CA_2}, \overrightarrow{CB_1}\}$ com $\overrightarrow{CA_2} \perp \overrightarrow{CB_1}$ e C o ponto médio entre F_1 e F_2 , a equação reduzida da hipérbole é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Seja α um plano, dados uma reta r e um ponto F , pertencentes ao plano, com F não pertencente a r . Uma Parábola é o conjunto dos pontos P do plano que estão à mesma distância de F e r , isto é

$$\mathcal{P}_{arab} = \{P \in \alpha | d(P, F) = d(P, r)\}.$$

Nomenclatura:

- F : foco.
- $2p$: parâmetro.
- r : diretriz.
- V : vértice

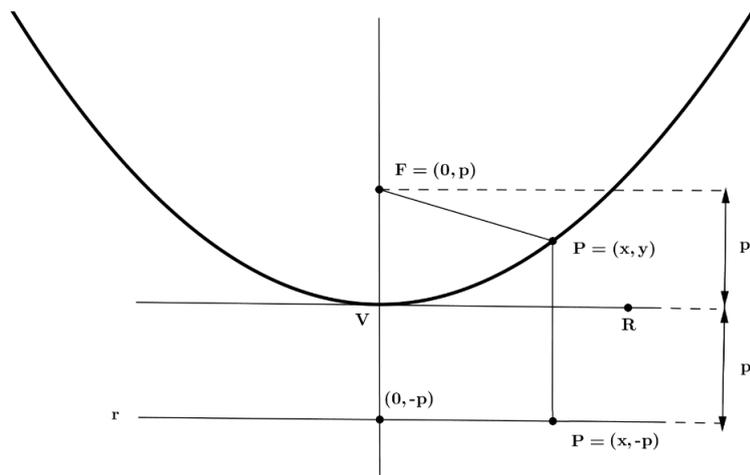


Figura 48 – Parábola

Usando o sistema de coordenadas $\{V; \overrightarrow{VR}, \overrightarrow{VF}\}$, a equação reduzida da parábola é dada por

$$y = \frac{x^2}{4p}.$$

4.5 Metodologia

As atividades serão desenvolvidas em duas etapas. A princípio daremos ênfase na construção geométrica das Cônicas, elaboradas por meio de uma sequência de dobraduras com papel vegetal. Em seguida, complementaremos o estudo com uma análise algébrica. Utilizando a construção da atividade justificando as propriedades.

4.6 Descrição

4.6.1 Construção geométrica da Elipse

Fixamos dois pontos distintos F_1 e F_2 , sobre o papel vegetal e utilizando um compasso, partiremos com a construção de uma circunferência genérica centrada em um dos pontos, cujo raio seja maior que o segmento F_1F_2 . Como mostra a Figura 49 abaixo ¹.

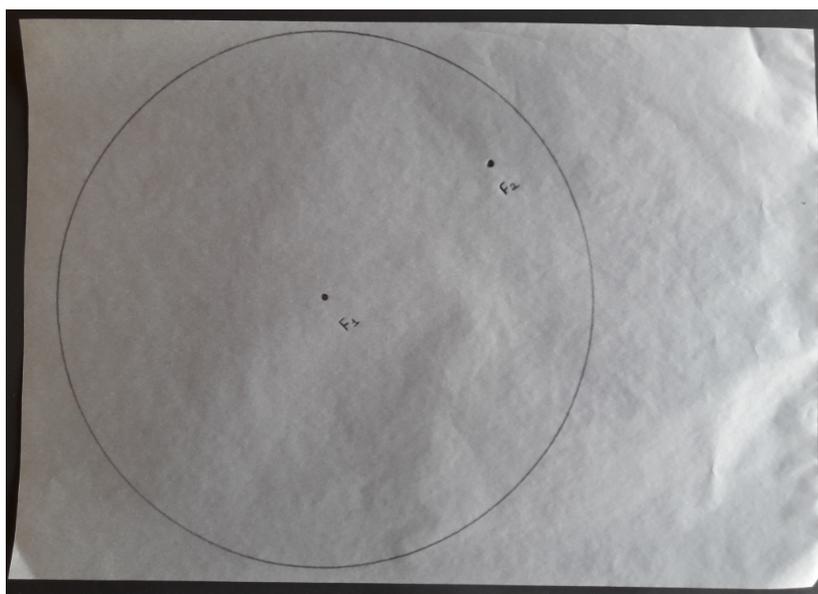


Figura 49 – Circunferência

Observação: uma elipse tem uma característica importante, ela possui dois focos. Denominamos por F_1 e F_2 os focos da elipse a ser construída.

Marcaremos vários pontos ao longo de toda a circunferência. Para fixar ideias escolhemos pontos, distantes entre si em aproximadamente 2cm.

Devemos fazer com que o foco, F_2 fique sobreposto a cada um desses pontos, para isso destacaremos quatro pontos (A_1, A_2, A_3 e A_4) como exemplos, para demonstrar a sequência das dobraduras, como mostra a Figura 50.

¹ Como sugestão, distância entre focos de 8cm e raio da circunferência 10cm

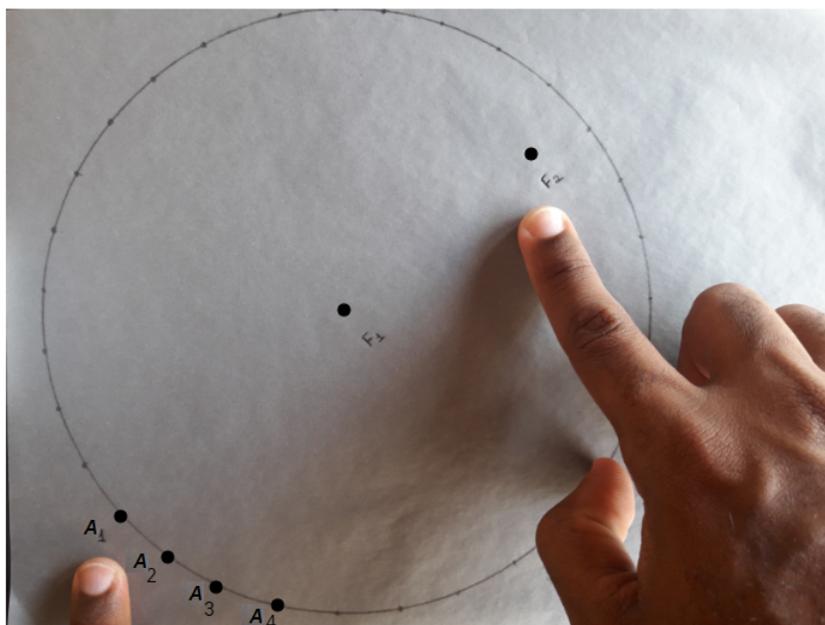


Figura 50 – Pontos sobre a circunferência

Dobramos a folha de tal modo que o segundo foco F_2 fique sobreposto a cada um dos pontos, iniciaremos com o ponto A_1 , como mostra a Figura 51.

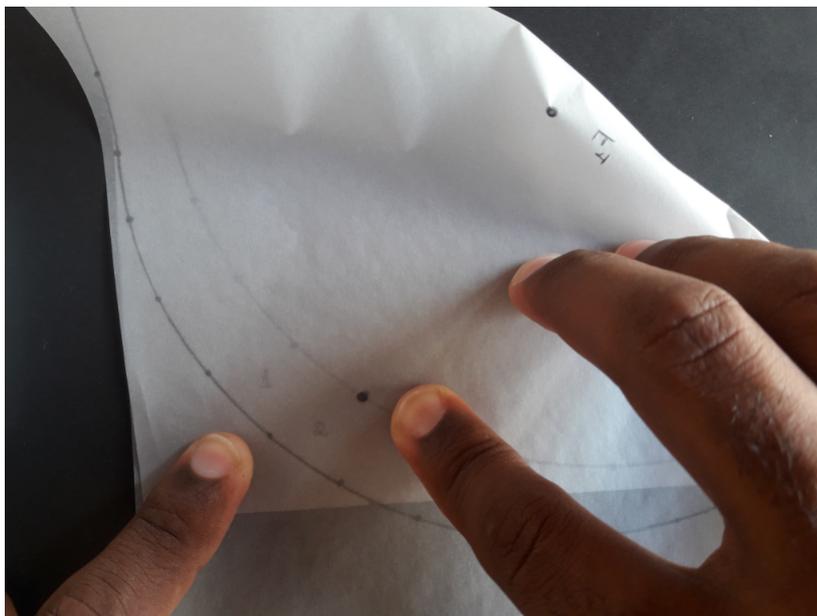
Figura 51 – F_2 sobre ponto A_1

Com o segundo foco F_2 sobre o ponto A_1 , vinque a folha na dobra, passando o dedo com muito cuidado para não rasgar, como mostra a figura abaixo.



Figura 52 – Primeiro vinco

Com a folha na mesma posição, mantenha a parte inferior fixa sobre a mesa com uma das mãos e com a outra mão deslize a parte superior da folha, permitindo que F_2 fique sobreposto ao próximo ponto A_2 e vinque novamente a dobra como a Figura 53.

Figura 53 – F_2 sobre o ponto A_2

A condição que vamos usar é que o segundo foco deva repetir o procedimento acima, deslizando-se sobre toda a circunferência e para cada ponto marcado sobre a mesma, a dobra

seja vincada.

A Figura 54 mostra como deve ficar a construção depois de oito pontos escolhidos e vincados.

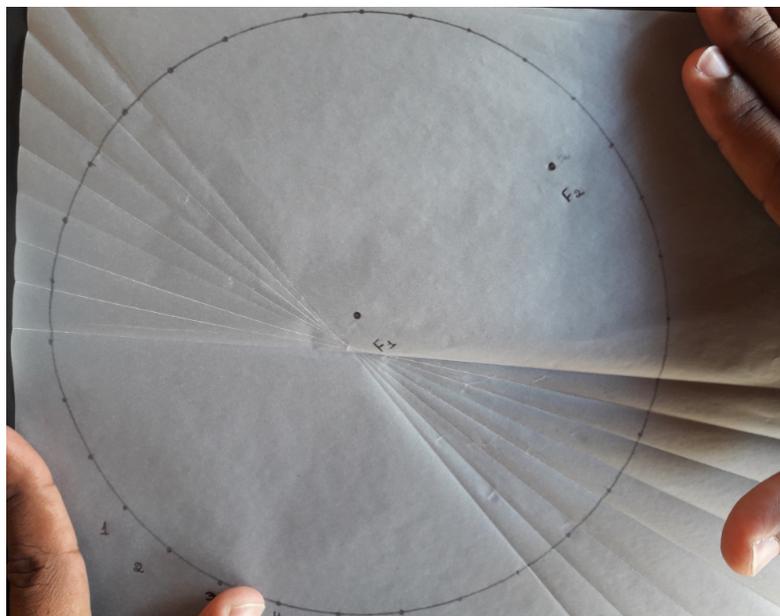


Figura 54 – Formando a elipse

A qualidade no traço da elipse, estará diretamente associado com a quantidade de dobraduras executadas, sendo assim, quanto maior a quantidade de pontos escolhidos, mais definido ficará a curva da elipse.

Veja na Figura 55 abaixo, a evolução na definição da curva da elipse na medida que se aumenta a quantidade de vincos onde cada vinco representa uma reta tangente à curva da elipse.

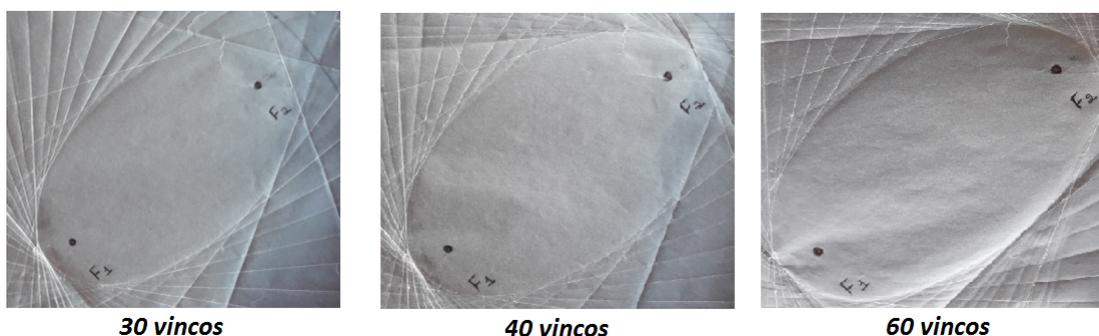


Figura 55 – Evolução nos traços da Elipse

Se executado as etapas com detalhes, sua dobradura ficará semelhante à Figura 56.

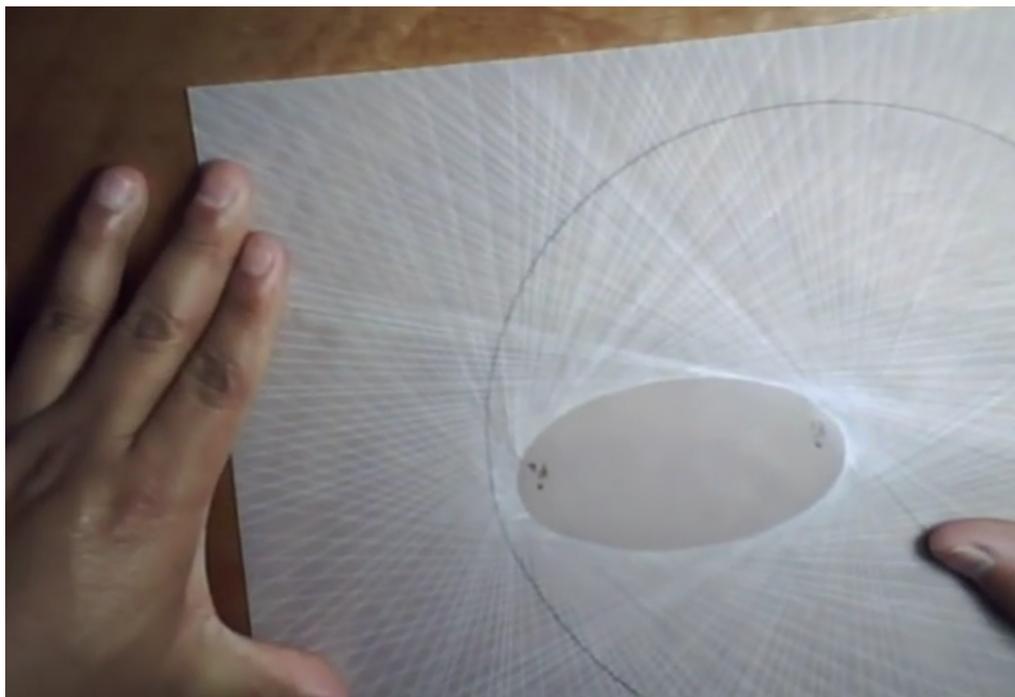


Figura 56 – Elipse

Construção da elipse com papel vegetal <<https://youtu.be/FjMPaBpHKEo>>

4.6.2 *Elipse: um estudo analítico da construção*

Com a elipse construída, fazemos agora a segunda parte da proposta.

Primeiramente adotaremos o plano associado a elipse com o sistema de coordenadas dado na Seção 4.4, como mostra a Figura 57.

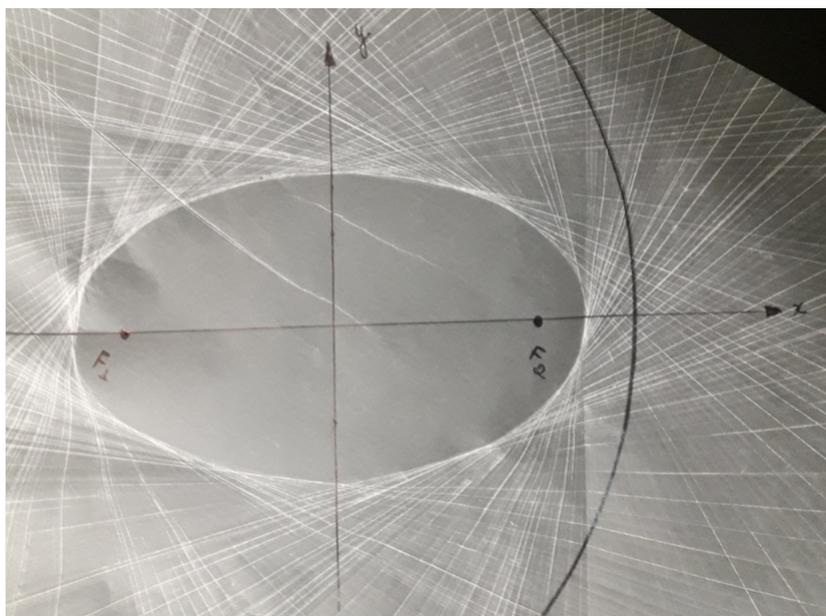


Figura 57 – Elipse no plano cartesiano

Adotaremos um ponto qualquer sobre a curva da elipse e denotado por P_1 e então traçaremos os segmentos $\overline{F_1P_1}$ com distância d_1 e $\overline{F_2P_1}$ com distância d_2 como a Figura 58.

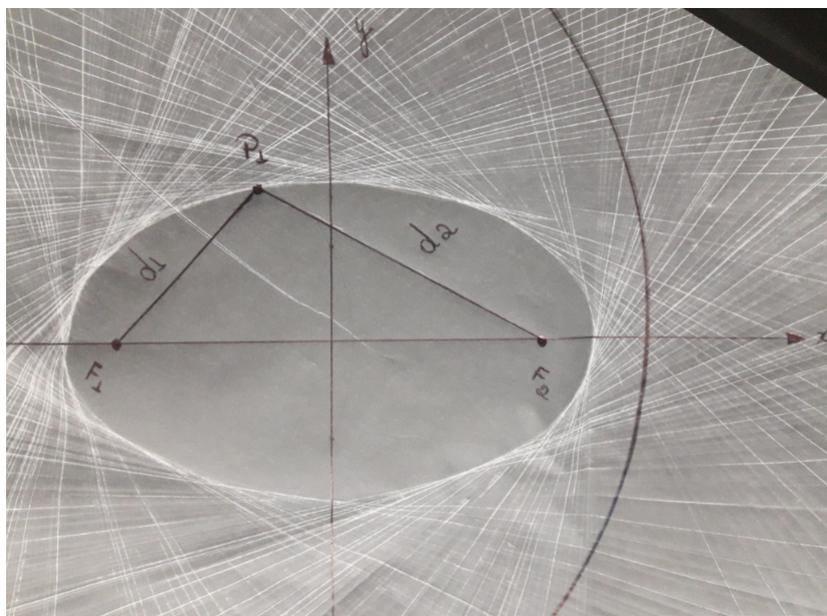


Figura 58 – Distâncias d_1 e d_2

Para finalizarmos as marcações, definiremos os vértices sobre o eixo focal e não focal e as distâncias entre os focos, entre os vértices focais e não focais, como mostra a Figura 59.

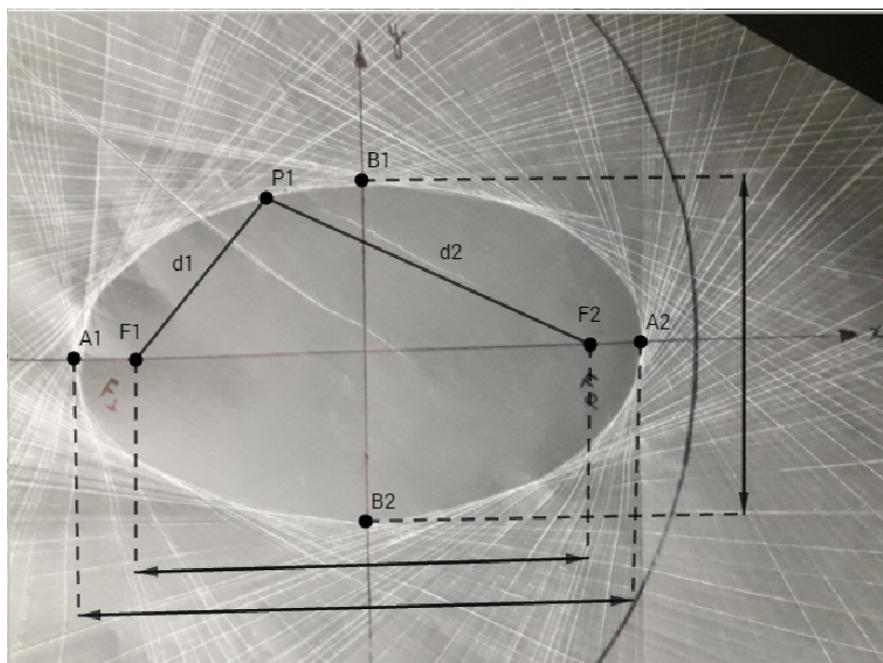


Figura 59 – Distâncias entre os vértices focais e não focais

Analisando a Figura 59 e com o auxílio de uma régua, responda as questões abaixo:

1. Determine as distâncias d_1 e d_2 .

$$d_1 = 4\text{cm}$$

$$d_2 = 6\text{cm}$$

2. Determine as distâncias entre os vértices focais A_1A_2 e não focais B_1B_2 .

$$A_1A_2 = 10\text{cm}$$

$$B_1B_2 = 6\text{cm}$$

3. Determine as distâncias entre os focos F_1 e F_2 .

$$F_1F_2 = 8\text{cm}$$

4. Analisando a teoria descrita na Seção 4.4. Determine os valores de a , b e c .

$$\text{Sendo, } 2a = A_1A_2 \Rightarrow a = 5\text{cm};$$

$$\text{Sendo, } 2b = B_1B_2 \Rightarrow b = 3\text{cm};$$

$$\text{Sendo, } 2c = F_1F_2 \Rightarrow c = 4\text{cm}.$$

5. Monte a equação reduzida da elipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Subsídios ao professor.

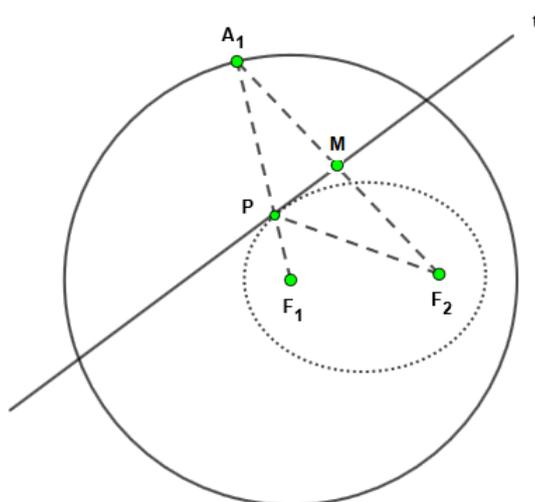
Para um melhor controle da atividade, seria interessante o professor aconselhar os alunos a escolherem os pontos F_1 e F_2 , distantes entre si não mais que 8 cm com F_1 nas proximidades do centro da folha de papel vegetal.

Provar para os alunos que ao dobrarmos a folha de maneira a sobrepor um ponto da circunferência ao ponto F_2 sucessivas vezes, obtemos uma elipse envolta por suas tangentes com focos F_1 e F_2 .

Justificativa: ao se dobrar o papel fazendo um dos pontos da circunferência, digamos (analisando a Figura 60), A_1 , sobrepor F_2 , determinamos na dobra a reta t que é a mediatriz do segmento A_1F_2 , isto é, a reta t que passa pelo ponto M , ponto médio do segmento A_1F_2 e que é perpendicular ao segmento.

O ponto P , obtido com a intersecção da reta t com o segmento A_1F_1 , é um ponto da elipse cujos focos são os pontos F_1 e F_2 . Verificamos esta última afirmação observando que a congruência LAL dos triângulos ΔF_2PM e ΔA_1PM nos garante que a soma das distâncias $PF_1 + PF_2 = PF_1 + PA_1 = R$, sendo $R = 2a$ o raio da circunferência inicial. Temos, então, a propriedade métrica que define a elipse cujos focos são F_1 e F_2 e cujo semi-eixo maior é o raio da circunferência.

$$d(PF_1) + d(PF_2) = 2a$$

Figura 60 – $d(PF_1) + d(PF_2) = R$

4.6.3 Construção geométrica da Parábola

No papel vegetal, utilizando uma régua, partiremos com a construção de uma reta r e um ponto qualquer, não pertencente a reta. Como mostra a Figura 61 abaixo².

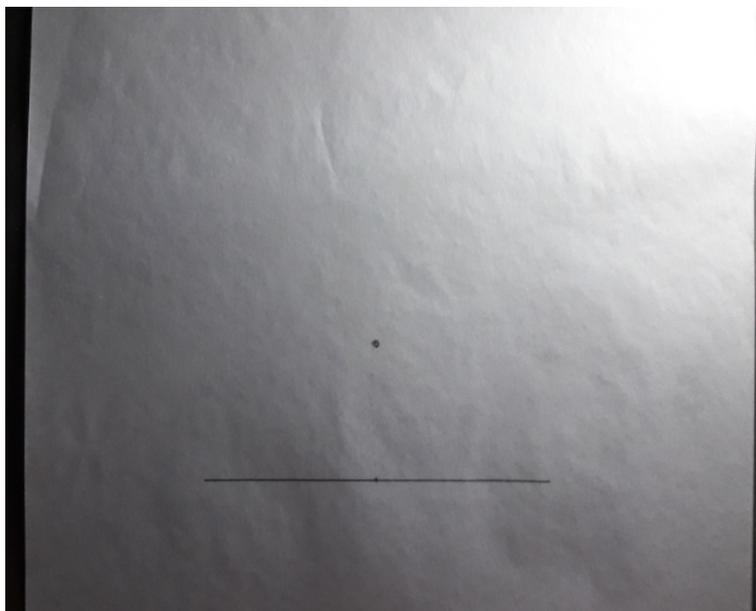


Figura 61 – Reta e ponto

Sabemos, conforme a nomenclatura de Seção 4.4 que uma parábola possui vários elementos dentre eles um foco e uma reta diretriz. Sendo assim no decorrer da construção provaremos

² Dimensões adotadas na Figura, Reta com comprimento de 10cm e ponto distante da reta em 4cm

que o ponto escolhido de e e a reta r são respectivamente o foco e a reta diretriz como mostra a Figura 62.

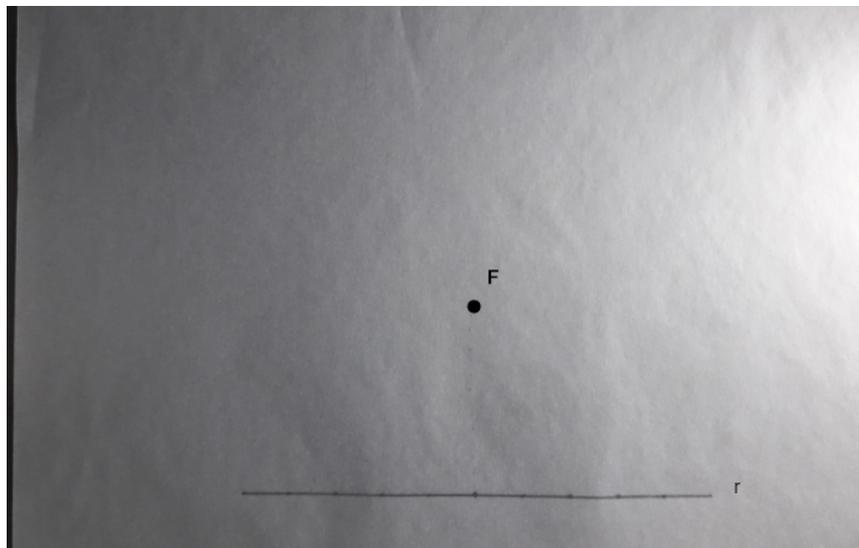


Figura 62 – Foco e Diretriz

Sobre a reta diretriz r marcaremos vários pontos. Para fins didáticos, escolheremos pontos distantes entre si em aproximadamente 1cm.

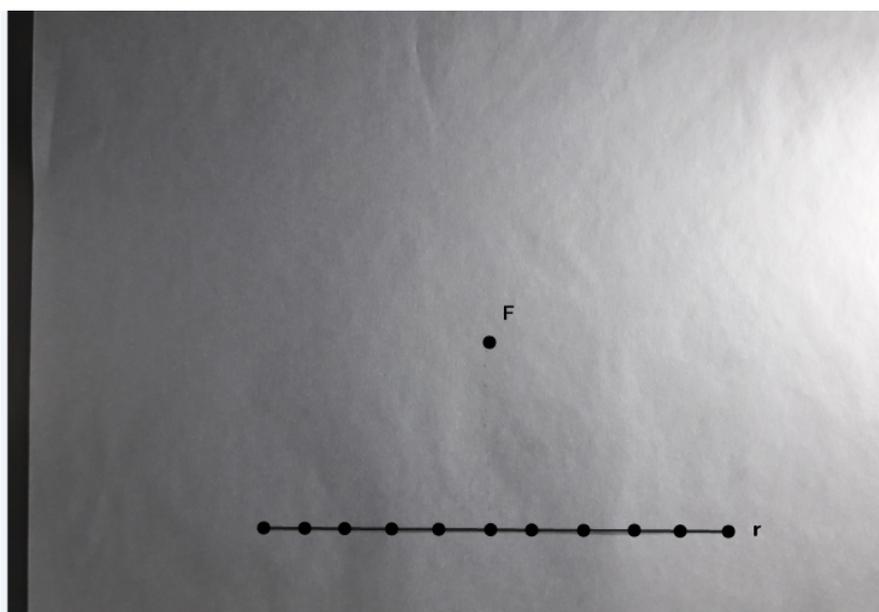


Figura 63 – Pontos sobre a diretriz

Devemos dobrar a folha, escolhendo um dos pontos marcados sobre a reta diretriz, de tal modo que o mesmo fique sobreposto ao foco, como mostra a figura abaixo.

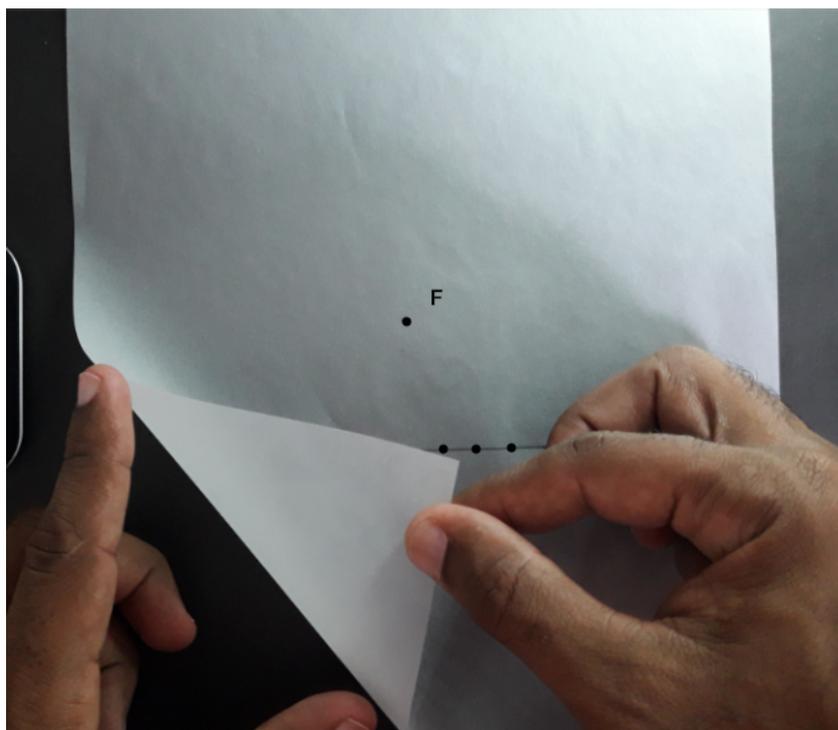


Figura 64 – Ponto sobre foco

Para cada ponto marcado sobre a reta diretriz, devemos sobrepor-lo ao ponto do foco e vincar a dobra com cuidado.

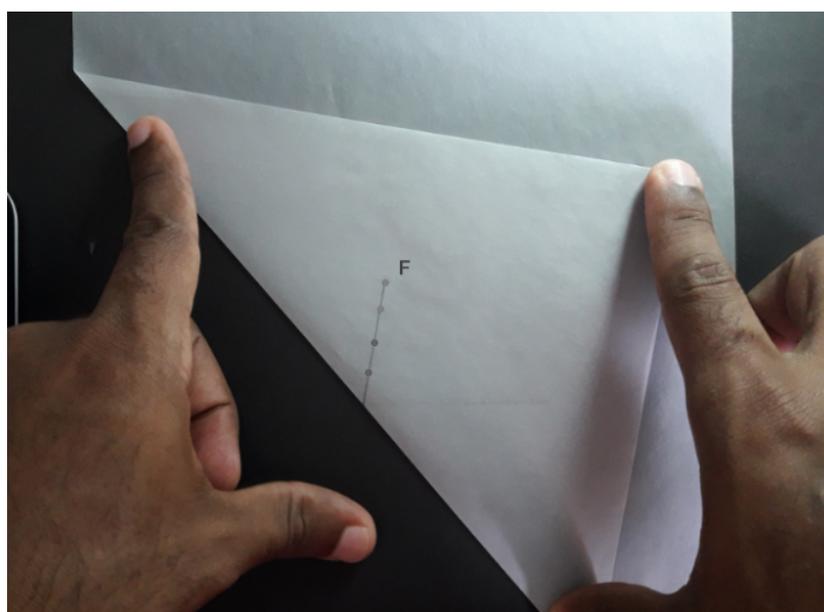


Figura 65 – Primeiro vinco

Note na Figura 66 que o vinco representa a reta mediatriz do segmento A_1F .

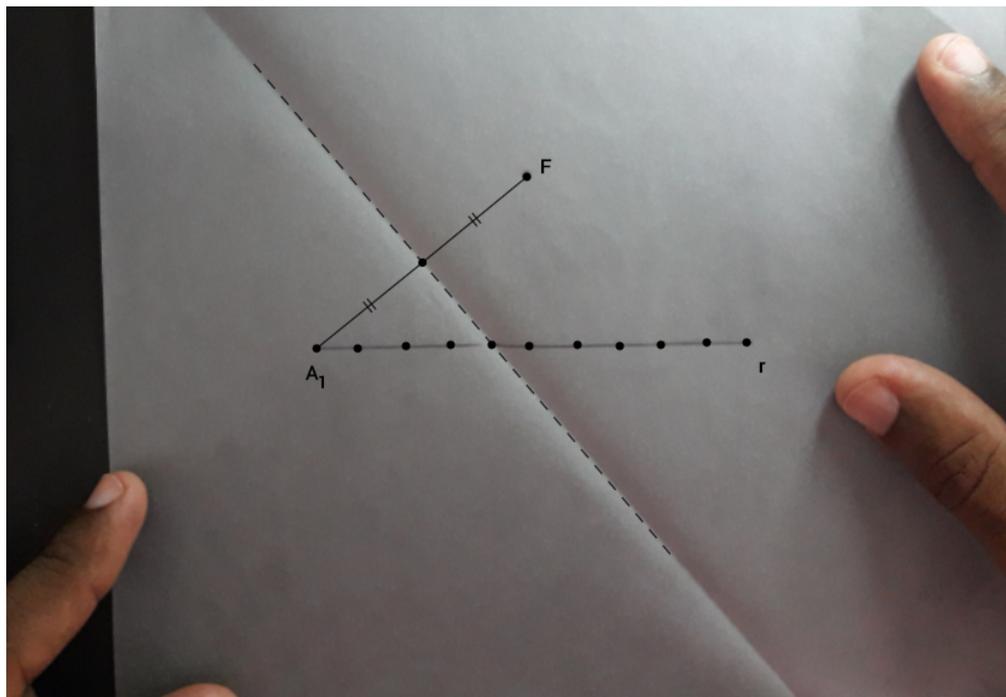


Figura 66 – Mediatriz

A condição que vamos usar é que seja repetido o procedimento para cada ponto escolhido sobre a reta diretriz. Quanto mais pontos escolhidos, mais definido ficará o traço da parábola.

Uma melhor visualização da parábola acontece na medida que aumentamos o número de pontos escolhidos sobre a reta diretriz.



Figura 67 – Evolução na construção

Note na Figura 67 que a curva é formada pelas mediatrizes associadas a cada vinco que também são retas tangentes ao traço da parábola.

Construção da parábola com papel vegetal <<https://youtu.be/OSwcUtKCWQM>>

4.6.4 Parábola: um estudo analítico da construção

Com a parábola já construída, fazemos agora a segunda parte da proposta, isto é uma abordagem analítica da construção.

1. Primeiramente vamos traçar uma reta t , passando pelo foco F e que seja perpendicular a diretriz r .

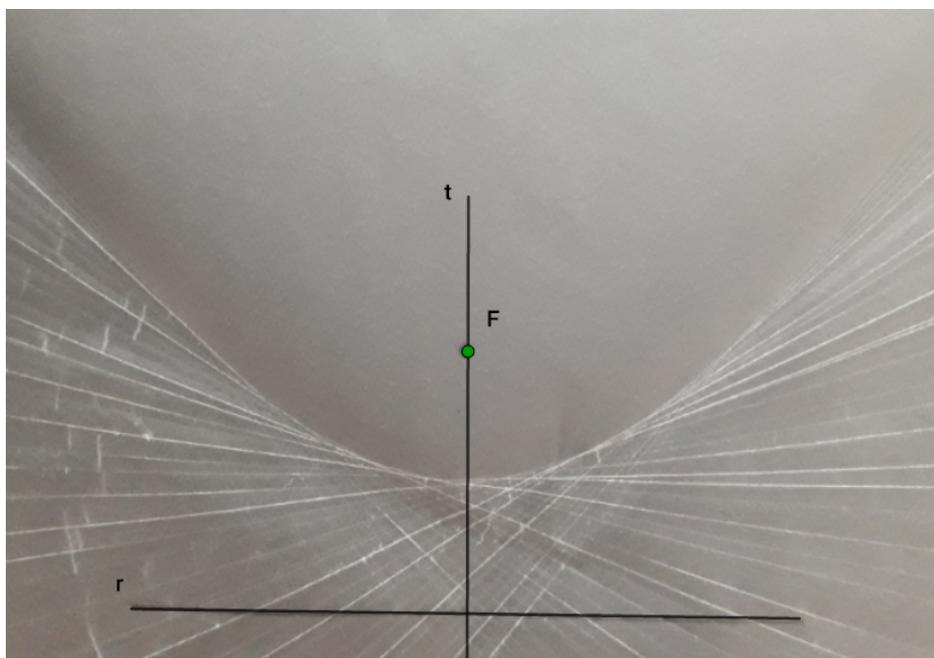


Figura 68 – Vértice da Parábola

2. As intersecções da reta t com a parábola e com a reta r chamaremos de V e L respectivamente.

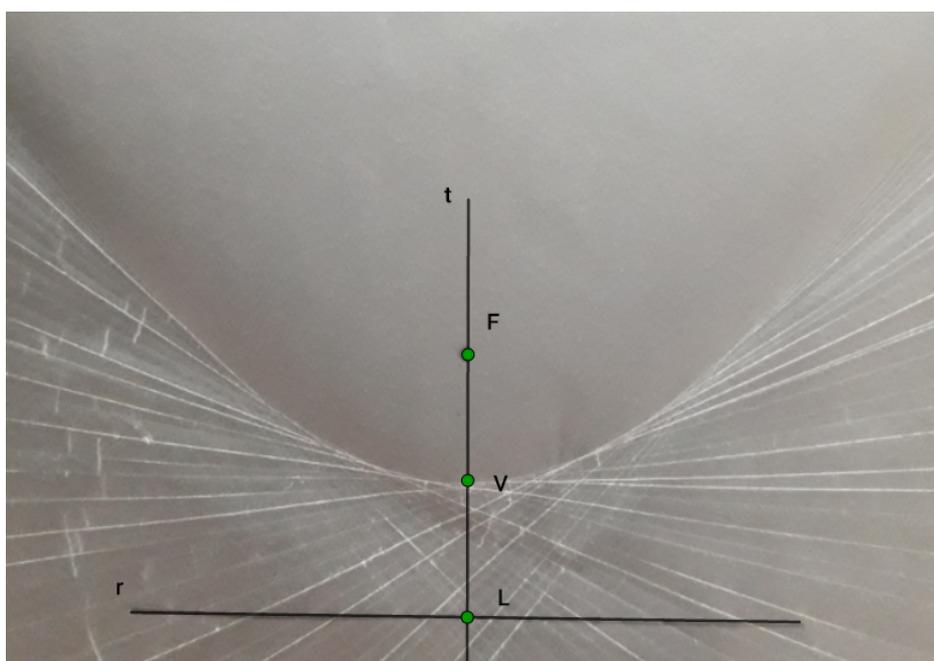
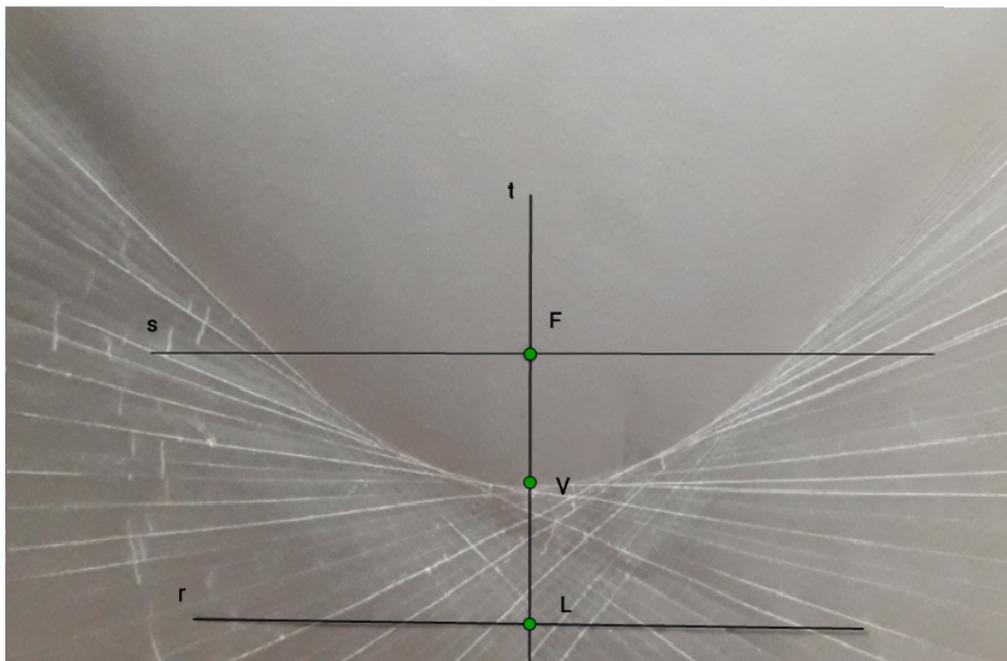


Figura 69 – Mediatriz com reta focal

3. Traçaremos uma reta perpendicular a t , passando pelo foco F e chamaremos de s

Figura 70 – Retas $s \parallel t$

4. Chamaremos de A e A' as respectivas intersecções da reta s com a Parábola.

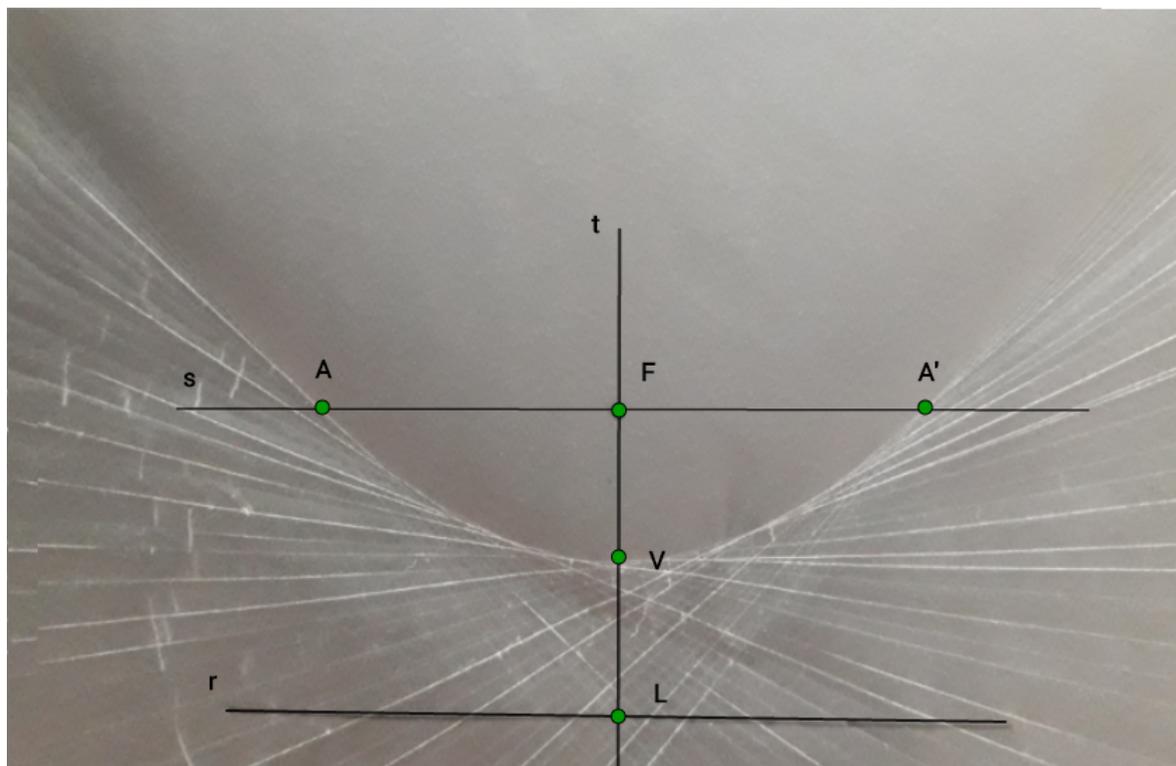


Figura 71 – Parábola no plano cartesiano

4.6.5 Atividades

Analisando a Figura 71 e com o auxílio de uma régua, responda as questões abaixo:

1. Determine as distâncias e a relação entre os segmentos FV e VL .

$$FV = 2cm$$

$$VL = 2cm$$

2. Determine o parâmetro e monte a equação reduzida da parábola?

O parâmetro é dado por $2p$ onde p é distância FV ou VL

sendo assim, o parâmetro $FL = 4cm$

Logo,

$$y = \frac{x^2}{4p}$$

$$y = \frac{x^2}{8}$$

3. Qual a relação entre os segmentos AA' e FV ?

$$AA' = 8cm$$

$$VF = 2cm$$

Logo,

$$AA' = 4FV$$

4. Marque um ponto qualquer pertencente a parábola e verifique que o ponto satisfaz a equação reduzida encontrada em 2.

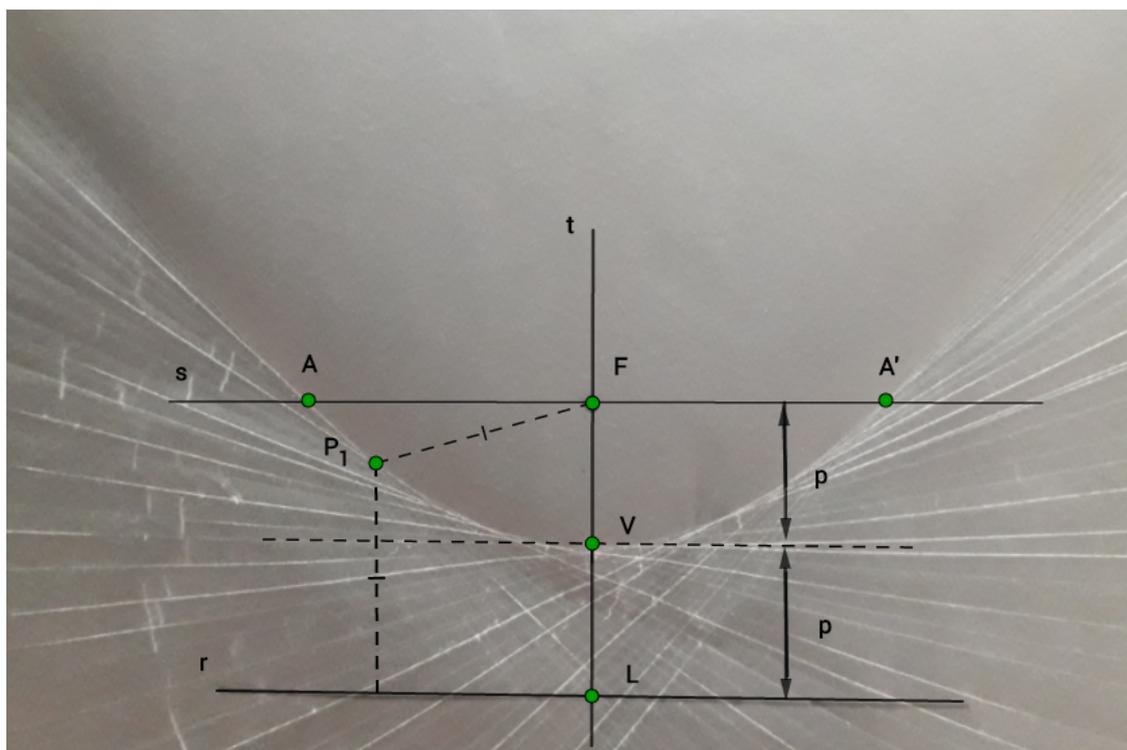


Figura 72 – Parábola completa

Subsídios ao professor.

Para um melhor controle da atividade, seria interessante o professor aconselhar os alunos a escolherem a distância do ponto F à reta r entre 4cm e 10cm .

Provar para os alunos que ao dobrarmos o papel de modo a sobrepor pontos da reta r ao ponto F . Repetindo o processo algumas vezes, temos uma parábola envolta por suas tangentes.

Justificativa: quando se faz um ponto A_1 da reta r sobrepor F , se obtém na dobra uma reta t que é a mediatriz de FA_1 passando pelo ponto M , ponto médio do segmento FA_1 e que é tangente a parábola em P , conforme a Figura 73.

O ponto P pertencente à parábola é o ponto de intersecção da reta t com a parábola. Verificamos que as distâncias PA_1 e PF são iguais, pois os triângulos ΔFPM e ΔA_1PM são congruentes pelo caso LAL.

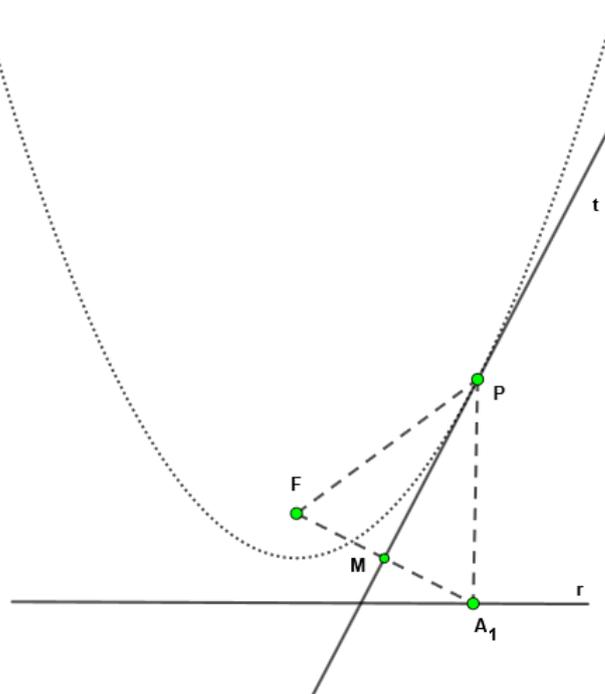


Figura 73 – Definição de parábola

4.6.6 Construção geométrica da Hipérbole

Fixamos dois pontos distintos F_1 e F_2 , sobre o papel vegetal e utilizando um compasso, partiremos com a construção de uma circunferência genérica centrada em um dos pontos, cujo raio seja menor que o segmento F_1F_2 . Como mostra a Figura 74 abaixo³.

³ Como sugestão, distância entre focos de 10cm e raio da circunferência 8cm

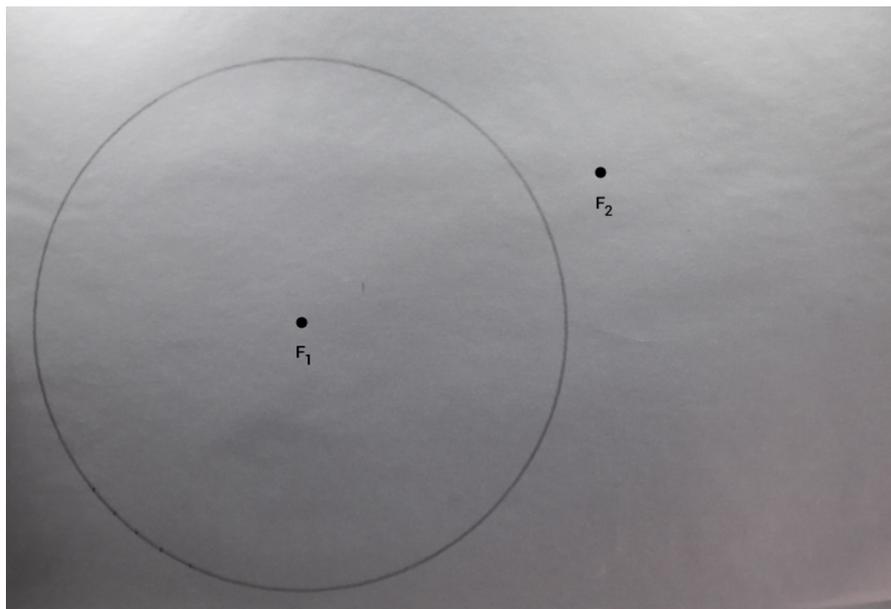


Figura 74 – Focos da Hipérbole

Observação: uma hipérbole tem uma característica importante, ela possui dois focos. Denominamos por F_1 e F_2 os focos da hipérbole a ser construída.

Marcaremos alguns pontos ao longo de toda a circunferência. Para fixar ideias escolhemos pontos, distantes entre si em aproximadamente 1cm.

Devemos fazer com que o foco, F_2 fique sobreposto a cada um desses pontos, para isso destacaremos quatro pontos ($A_1, A_2, A_3, e A_4$) como exemplos, para demonstrar a sequência das dobraduras, como mostra a Figura 75.

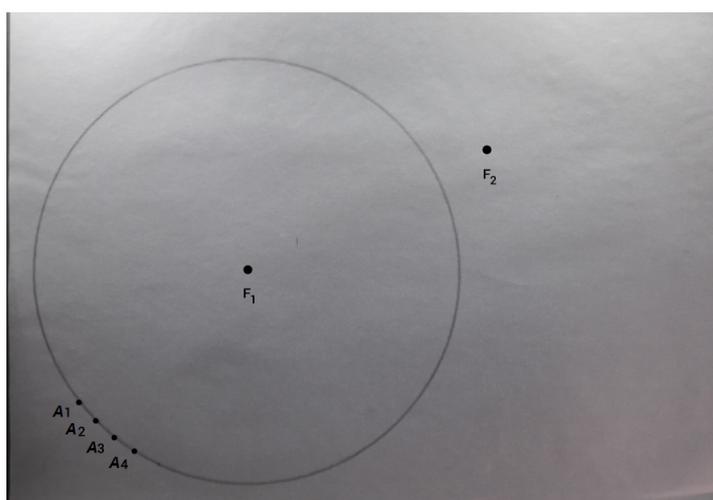
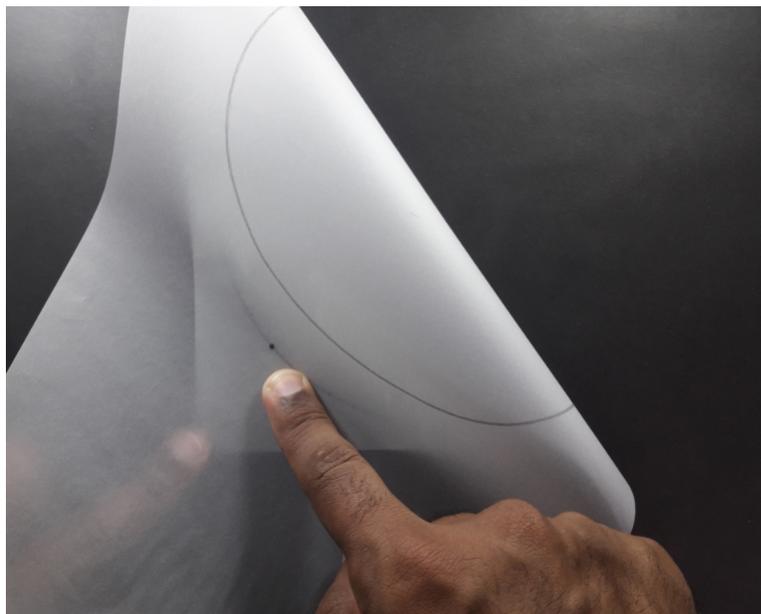


Figura 75 – Pontos sobre a Hipérbole

Dobramos a folha de tal modo que, o segundo foco F_2 fique sobreposto a cada um dos pontos. Iniciaremos com o ponto A_1 , como mostra a Figura 76.

Figura 76 – F_2 sobre a circunferência

Com o segundo foco F_2 sobre o ponto A_1 , vinque a folha na dobra, passando o dedo com muito cuidado para não rasgar, como mostra a figura abaixo.

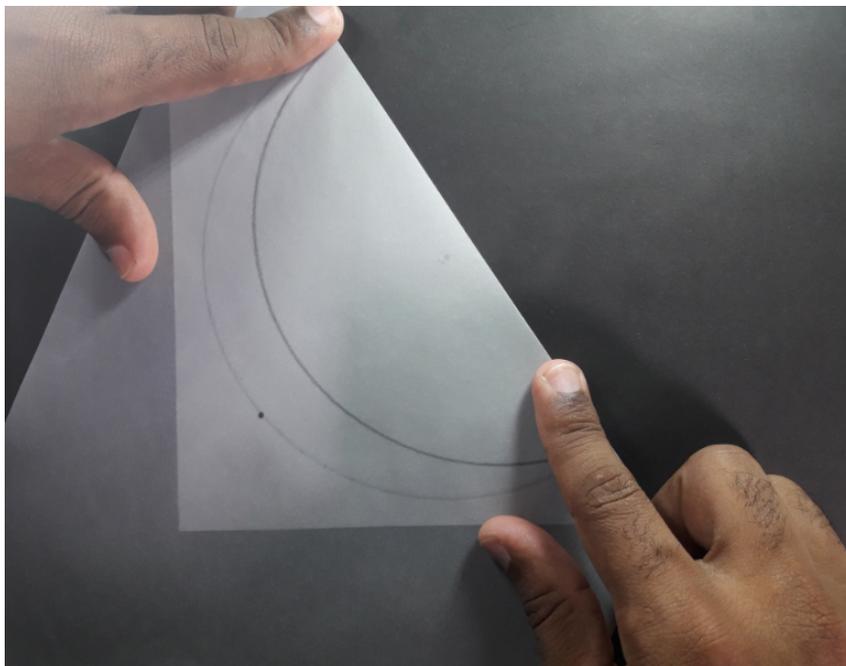


Figura 77 – Focos da Hipérbole

Com a folha na mesma posição, mantenha-a fixa sobre a mesa com uma das mãos e com a outra mão deslize F_2 para o próximo ponto A_2 e vinque novamente a dobra como a Figura 78.

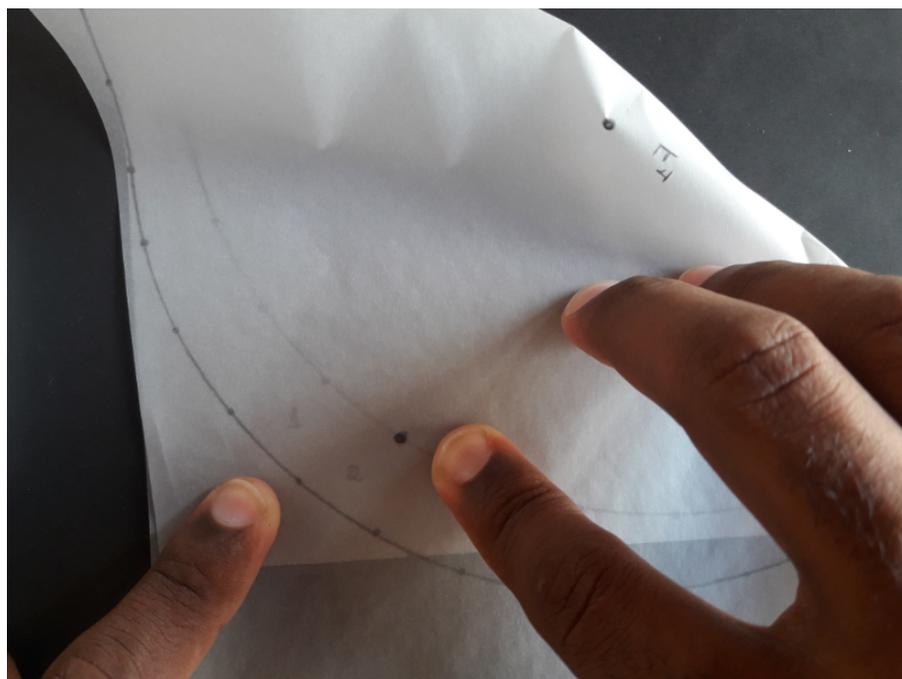


Figura 78 – Formando a Hipérbole

A figura abaixo mostra como deve ficar a construção depois de quatro pontos escolhidos e vincados.

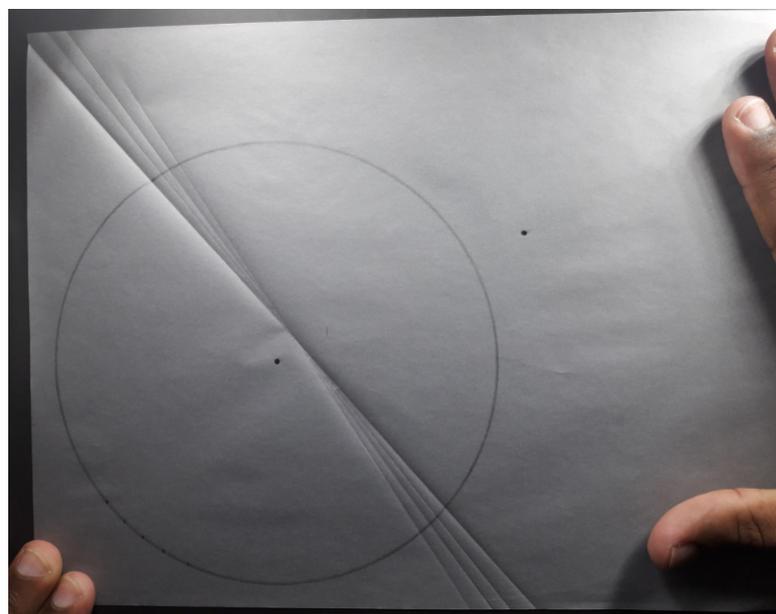


Figura 79 – Construindo a hipérbole

Semelhante a construção da elipse, repetiremos o procedimento deslizando-se o foco F_2 sobre toda a circunferência.

Para ter uma melhor visualização na qualidade da hipérbole, aumente a quantidade de pontos e conseqüentemente de dobras vincadas, sendo assim, quanto maior a quantidade de

pontos escolhidos, mais definido ficará a curva da hipérbole. Veja na figura abaixo, a evolução na definição da curva da hipérbole para diferentes quantidades de vincos.

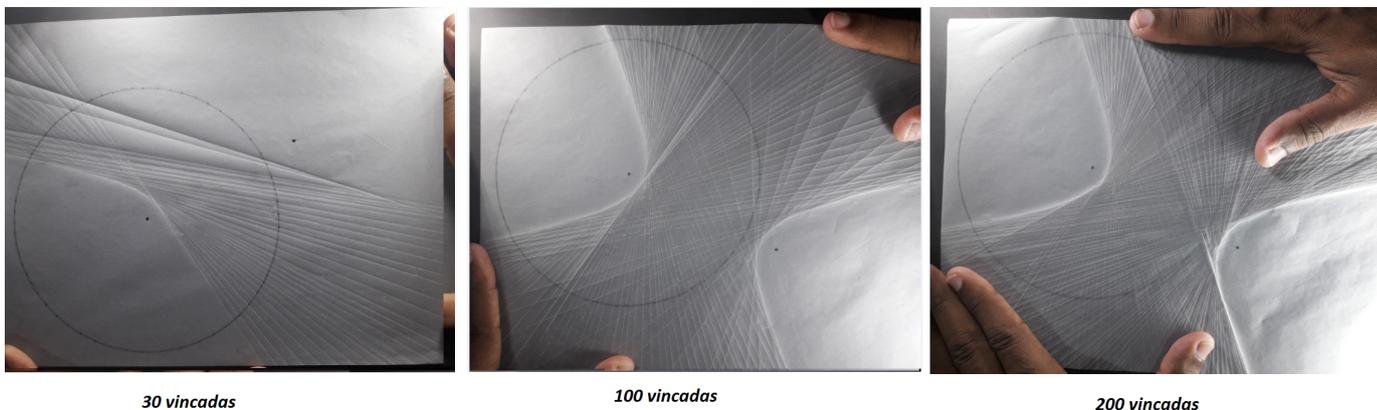


Figura 80 – Hipérbole

Essa etapa deve ser realizada com paciência, pois exige uma precisão nas dobras. Se executado com detalhes, o resultado final será semelhante à Figura 81.

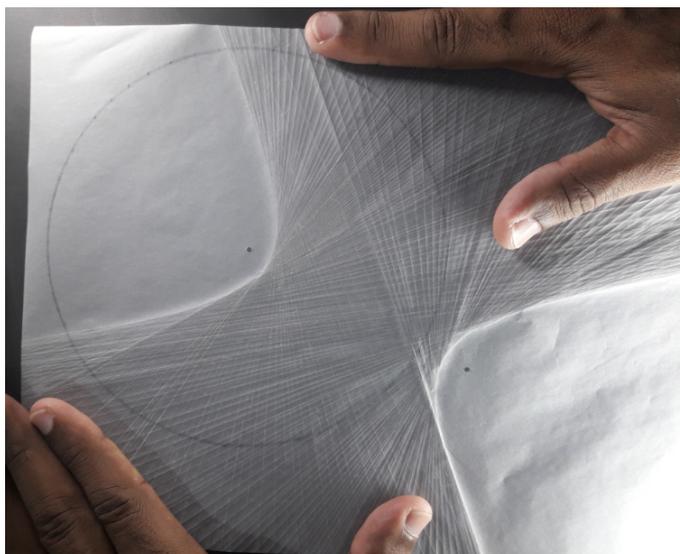


Figura 81 – Hipérbole

Construção da hipérbole com papel vegetal <<https://youtu.be/aIXkGOq6nII>>

4.6.7 Hipérbole: um estudo analítico da construção

Partindo da Figura 81 e com a nomenclatura adotada Seção 4.4, façamos agora a segunda parte da proposta.

1. Primeiramente vamos marcar os focos e traçar o eixo focal F_1F_2 .

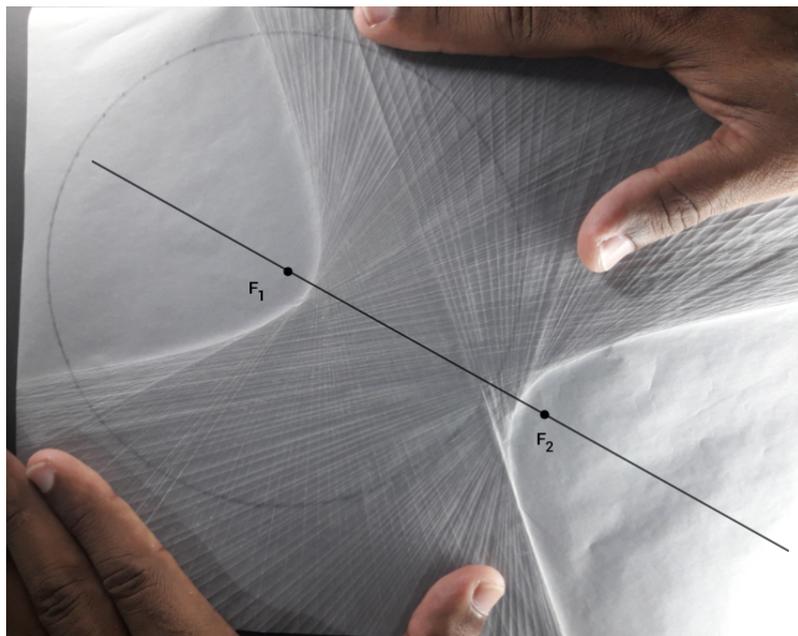


Figura 82 – Reta focal da hipérbole

2. Marque os vértices da hipérbole e determine o valor do parâmetro a .

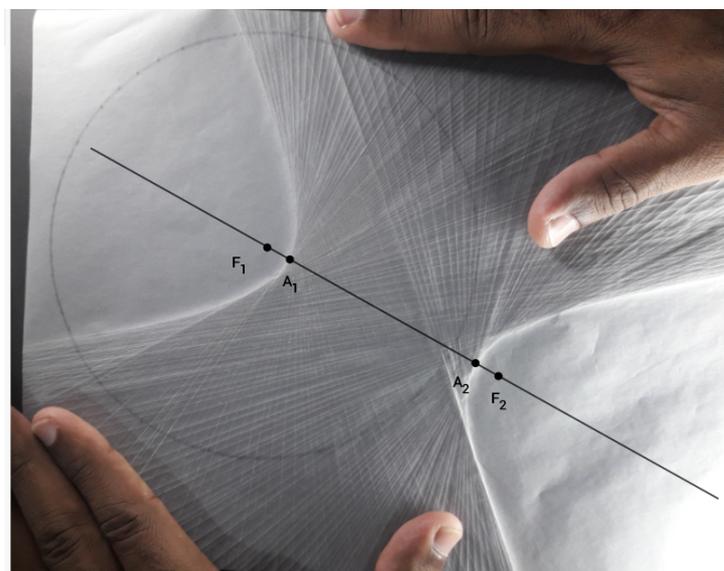


Figura 83 – Hipérbole

3. Determine o valor da distância focal.
Diretamente com a régua chega-se ao valor do parâmetro c .
4. Utilizando o Teorema de Pitágoras, determine o valor do parâmetro b .
Com os valores de a e c , facilmente encontramos b .
5. Escolha um ponto qualquer pertencente a hipérbole e com o auxílio de uma régua determine d_1 e d_2 .

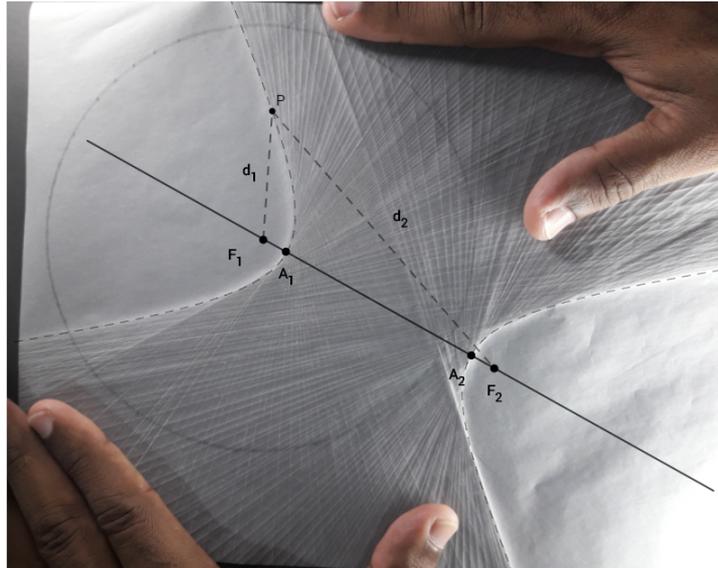


Figura 84 – Hipérbole

6. Determine as assíntotas da hipérbole.

No exemplo ao lado

$$a = 4\text{cm};$$

$$b = 3\text{cm};$$

$$c = 5\text{cm}.$$

Assim a equação das assíntotas é dado por, $y = \pm \frac{3}{4}x$.

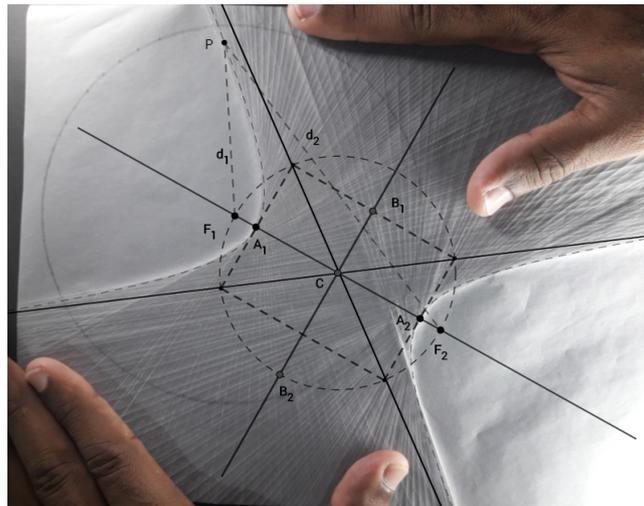


Figura 85 – Hipérbole e seus elementos

7. Montar a equação reduzida da hipérbole.

No exemplo anterior, a equação reduzida da hipérbole é dada por,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Subsídios ao professor.

Provar para os alunos que ao dobrarmos a folha repetidas vezes, de modo que um ponto A_1 da circunferência se sobreponha ao ponto F_2 . Pouco a pouco vão surgindo no papel dois ramos de uma hipérbole envolta por suas tangentes.

Justificativa: ao colocar um ponto A_1 da circunferência sobre F_2 , produzimos novamente, na dobra, uma reta t que é a mediatriz de A_1F_2 por M .

Podemos verificar que a reta t tangencia a curva no ponto P , ponto de intersecção da reta t com a reta que passa pelos pontos F_1 e A_1 , como vemos na Figura 86.

Temos os triângulos ΔF_2PM e ΔA_1PM congruentes pelo caso LAL, logo $A_1P = PF_2$. Conseqüentemente, $PF_1 - PF_2 = PF_1 - PA_1 = A_1F_1 = 2a$, que é constante, pois se trata do raio da circunferência. Portanto, o ponto P pertence à hipérbole, que, por definição, é a curva em que a diferença das distâncias de qualquer um de seus pontos a cada um dos pontos fixos (os seus focos) se mantém constante.

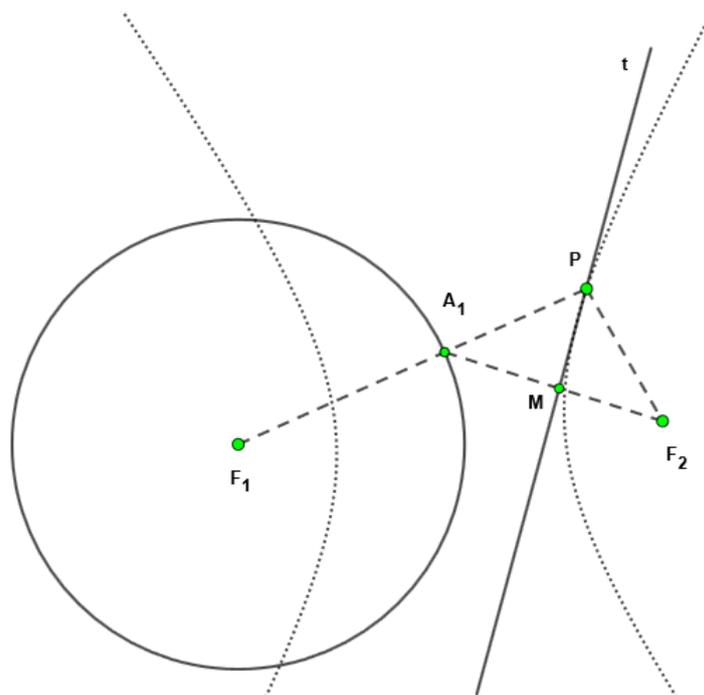


Figura 86 – Definição de hipérbole

Essa atividade foi inspirada no projeto de aula extraída do portal do professor (O Portal, lançado em 2008 em parceria com o Ministério da Ciência e Tecnologia, tem como objetivo apoiar os processos de formação dos professores brasileiros e enriquecer a sua prática pedagógica. Este é um acesso público e pode ser acessado por todos os interessados) desenvolvida pelo professor "GUILHERME ERWIN HARTUNG" intitulada "Construção das Cônicas com Dobraduras".

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985. Citado na página 24.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I.; FIGUEREDO, V.; WETZLER, H. G. **Álgebra linear**. [S.l.]: Harper & Row, 1980. Citado na página 39.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. de. Geometria analítica. **CEP**, v. 4533, p. 004, 1987. Citado na página 32.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. Geometria analítica. **Rio de Janeiro: SBM**, 2013. Citado nas páginas 21 e 47.

LIMA, E. L. **Álgebra linear: coleção matemática universitária**. **IMPA, Rio de Janeiro, Brasil**, 2006. Citado na página 43.

