UNIVERSIDADE RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

LUIZ CARLOS MEDEIROS DE OLIVEIRA

GEOMETRIA E LIVROS DIGITAIS: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DIDÁTICA COM ABORDAGEM INVESTIGATIVA

MOSSORÓ/RN
2019

LUIZ CARLOS MEDEIROS DE OLIVEIRA

GEOMETRIA E LIVROS DIGITAIS: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DIDÁTICA COM ABORDAGEM INVESTIGATIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Odacir Almeida Neves

MOSSORÓ/RN
2019

O48g Oliveira, Luiz Carlos Medeiros de.
GEOMETRIA E LIVROS DIGITAIS ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DIDÁTICA COM ABORDAGEM INVESTIGATIVA / Luiz Carlos Medeiros de Oliveira. - 2019.
64 f. : il.

Orientador: Odacir Almeida Neves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2019.

1. Investigação matemática. 2. Livros digitais. 3. Geometria. 4. Ensino de matemática. 5. Ensino e aprendizagem. I. Neves, Odacir Almeida, orient. II. Título.

LUIZ CARLOS MEDEIROS DE OLIVEIRA

GEOMETRIA E LIVROS DIGITAIS: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DIDÁTICA COM ABORDAGEM INVESTIGATIVA

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, *Campus* Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 26 /04/2019

BANCA EXAMINADORA

Dr. Odacir Almeida Neves – UFERSA
Presidente

Fabricio de Figueredo Oliveira

Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira – UFERSA
Membro interno

Dr. Marcelo Bezerra de Moraes – UERN
Membro externo ao Programa

MOSSORÓ/RN, 2019

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria da Graça Medeiros e Mauri Abdias de Oliveira, por todo o amor que sempre me deram e por sempre me incentivar, apoiar e acreditar em mim.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à Deus por tudo que fez em minha vida.

Gostaria de agradecer aos meus pais e aos meus irmãos, por sempre estarem ao meu lado.

À minha querida esposa, Alécia Pereira da Silva, por sempre me apoiar. Por me incentivar e acreditar em mim sempre; e por todo amor e cuidado.

Ao meu orientador professor Dr. Odacir Almeida Neves, por seus conselhos, suas aulas e orientações durante todo o curso.

Aos meus colegas de curso, que permaneceram durante estes dois anos, batalhando a cada dia para construir nosso conhecimento, ajudando uns aos outros. Em especial, à Cleiton, que dividiu comigo as cansativas viagens das sextas-feiras, para Mossoró.

A todos os professores que colaboraram e construíram bases sólidas no meu desenvolvimento e aprendizagem para o crescimento profissional. Dedico-lhes minha profunda admiração e respeito.

RESUMO

Atualmente, muitas pesquisas investigam a prática docente na procura de um ensino e aprendizagem com bons resultados, contudo, ainda são muitas as dificuldades encontradas. Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo geral investigar as contribuições do uso metodológico de atividades investigativas de geometria através de livros digitais para a aprendizagem matemática. Para isso, apresenta como objetivos específicos: elaborar e aplicar uma sequência de atividades sobre as relações que existem entre os ângulos na circunferência; identificar se os alunos conseguem reconhecer e escrever padrões; analisar o desenvolvimento dos alunos quanto à formalização de ideias a partir de padrões e Identificar se os alunos se sentem motivados a participar das atividades. Apresenta-se uma proposta metodológica de como explorar a geometria de forma investigativa, com foco nas relações entre os ângulos em uma circunferência. Trata-se de uma pesquisa qualitativa baseada na observação e interação do autor com os alunos durante a aplicação das atividades e na produção das suas investigações, além de um questionário de opinião. A aplicação das atividades consolidou-se com alunos do ensino médio do *Campus* Caicó – IFRN. Nos resultados, observou-se a metodologia como aspecto facilitador e motivador da aprendizagem, ressaltando a importância da utilização de estratégias metodológicas diferenciadas.

Palavras-chave: Investigação matemática. Livros digitais. Geometria. Ensino de matemática. Ensino e aprendizagem.

ABSTRACT

Currently, many researches investigate teaching practice in search of teaching and learning with good results, however, there are still many difficulties encountered. In this context, the present work has as general objective to investigate the contributions of the methodological use of research activities of geometry through digital books for mathematical learning. For this, it presents as specific objectives: to elaborate and to apply a sequence of activities on the relations that exist between the angles in the circumference; identify whether students can recognize and write patterns; to analyse the students' development regarding the formalization of ideas from standards; Identify whether students feel motivated to participate in activities. We present a methodological proposal on how to explore geometry in an investigative way, focusing on the relationships between the angles in a circle. It is a qualitative research based on the observation and interaction of the author with the students during the application of the activities and in the production of their investigations, besides an opinion questionnaire. The application of the activities was consolidated with high school students of the *Campus* Caicó - IFRN. In the results, the methodology was observed as a facilitating and motivating aspect of learning, emphasizing the importance of the use of differentiated methodological strategies.

Keywords: Mathematical research. Digital books. Geometry. Mathematics teaching. Teaching and learning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Interface inicial do aplicativo Sigil......29
Figura 2 - Imagens exibidas na animação da atividade 1 33
Figura 3 - Imagens exibidas na animação da atividade 2. 34
Figura 4 - Primeiro grupo de imagens exibidas na animação da atividade 3 35
Figura 5 - Segundo grupo de imagens exibidas na atividade 3......36
Figura 6 – Investigando o ângulo inscrito – grupo A 39
Figura 7 – Investigando com auxílio de tabela – grupo B......40
Figura 8 – Investigando o ângulo inscrito – grupo C 40
Figura 9 – Investigando o ângulo excêntrico interno – grupo C. 41
Figura 10 – Relacionando ângulo excêntrico interno ao ponto médio – grupo D. 41
Figura 11 – Relacionando ângulo excêntrico interno à P.A. – grupo E. 42
Figura 12 – Investigando o ângulo excêntrico externo – grupo B......43
Figura 13 – Investigando o ângulo excêntrico externo – grupo E......43
Figura 14 - Resposta do aluno A1......45
Figura 15 - Resposta do aluno A5......45
Figura 16 - Respostas dos alunos A11 e A12. 46
Figura 17 - Circunferência......51
Figura 18 - Círculo......52
Figura 19 - Elementos de um círculo......52
Figura 20 - Reta secante à circunferência......53
Figura 21 - Reta exterior a circunferência 53
Figura 22 - Reta tangente à circunferência 54
Figura 23 - Perpendicularidade da reta tangente à círculo......55
Figura 24 - Ângulo Central 55
Figura 25 - Medida do ângulo central......56
Figura 26 - Ângulo inscrito......56
Figura 27 - Medida do ângulo inscrito. 57
Figura 28 - Medida do ângulo inscrito - 1º caso 57
Figura 29 - Medida do ângulo inscrito - 2º caso 58
Figura 30 - Medida do ângulo inscrito - 3º caso. 58

Figura 31 - Ângulo de segmento 59
Figura 32 - Demonstração do teorema do ângulo de segmento 59
Figura 33 - Ângulo excêntrico interno..60
Figura 34 - Demonstração do teorema do ângulo excêntrico interno........................61
Figura 35 - Ângulo excêntrico externo..62
Figura 36 - Demonstração do teorema do ângulo excêntrico externo.......................62

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Evolução dos resultados do Brasil no Saeb entre os anos de 2005 e 2015 com relação as proficiências médias em Matemática...14
Gráfico 2 - Evolução dos resultados do Brasil no Saeb entre os anos de 1995 e 2015 com relação às proficiências médias em Matemática...15
Gráfico 3 - Sobre como o aluno se sentiu estimulado a descobrir as relações entre os objetos matemáticos...45
Gráfico 4 - Investigar as animações inseridas no texto fez diferença no seu entendimento dos assuntos abordados?...46

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
IFRN	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais
TICs	Tecnologias de Informação e Comunicação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PNAD	Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
TPE	Todos Pela Educação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12
2 REFERENCIAL TEÓRICO 18
2.1 SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA 18
2.2 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA 20
2.2.1 As investigações matemáticas no ensino de geometria 23
2.3 TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO 25
2.4 LIVROS DIGITAIS 27
3 METODOLOGIA 30
4 UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE DE INVESTIGAÇÃO 32
4.1 ATIVIDADE 1 33
4.2 ATIVIDADE 2 34
4.3 ATIVIDADE 3 35
5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS 38
5.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE 1 38
5.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE 2 40
5.3 ANÁLISE DA ATIVIDADE 3 42
4.4 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO 44
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 47
REFERÊNCIAS 49
APÊNDICE 51
APÊNDICE A - ÂNGULOS EM UMA CIRCUNFERÊNCIA 51
A.1 Circunferência 51
A.2 Círculo 51
A.3 Posições relativas de reta e circunferência 53
A.4 Ângulos e a circunferência 55
A.5 Ângulo de segmento 59
A.6 Ângulo excêntrico interno 60
A.7 Ângulo excêntrico externo 62
APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO DE OPINIÃO 64

1 INTRODUÇÃO

A primeira vez que entrei em uma sala de aula para lecionar matemática foi no ano de 2008, quando ainda era estudante do curso de Licenciatura em Matemática no CERES – Centro de Ensino Superior do Seridó, na UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Desde este primeiro momento pude observar que, mesmo estando presente por toda parte no nosso cotidiano, a matemática é vista por muitos como uma matéria desinteressante e difícil. E esta visão vem desde o ensino fundamental e se estende pelo ensino médio.

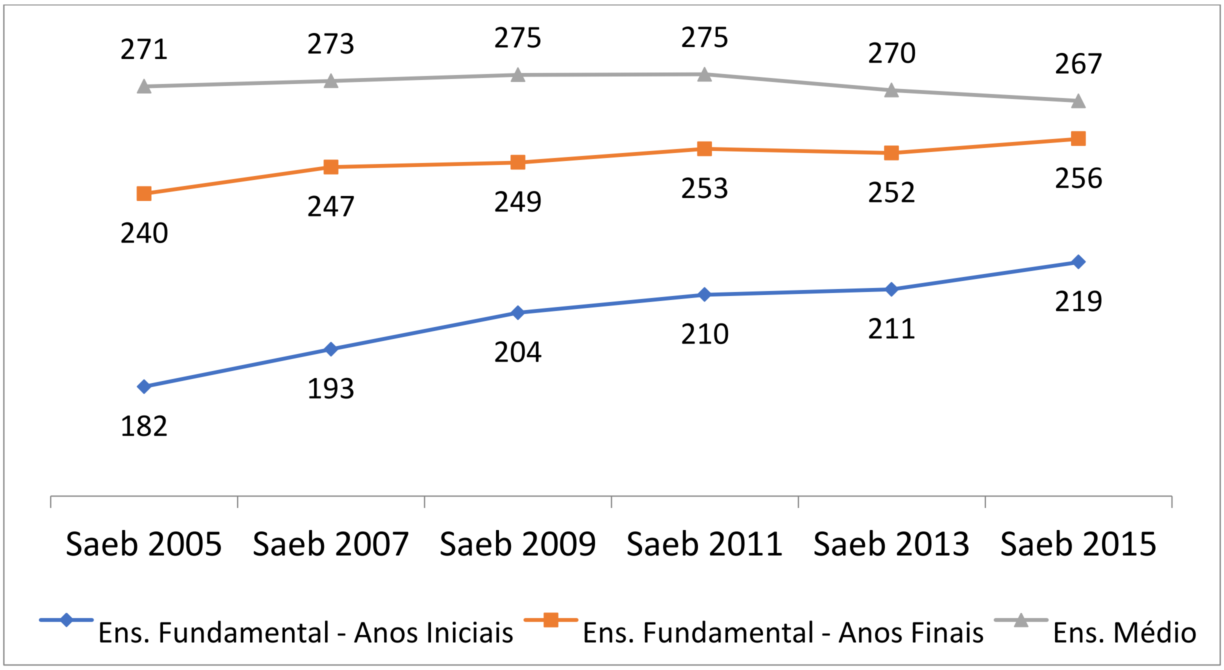
Os alunos geralmente reclamam de ter que decorar e entender fórmulas complicadas. Reclamam ainda que os professores não explicam direito o conteúdo, nem o tornamos interessante. Não é incomum ouvir de um aluno a pergunta: “Professor, pra que isso serve?”. Isso ocorre porque os alunos não conseguem perceber bem onde irão usar o conhecimento e, sem ver sentido nisto, sentem-se obrigados a estudá-lo.

Partindo desta situação, iniciou-se um questionamento sobre a maneira de ensinar os alunos e até mesmo a questionar-se sobre a forma como a matemática é ensinada na grande maioria das escolas. Mas, ao pesquisar sobre como anda o ensino de Matemática no Brasil, tem-se uma surpresa.

O ensino de matemática do ensino médio no Brasil passa por um momento desafiador. É o que diz os dados da última edição do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) divulgados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP).

O gráfico 1 mostra a evolução dos resultados do Brasil no SAEB entre os anos de 2005 e 2015 com relação as proficiências médias em Matemática.

Gráfico 1- Evolução dos resultados do Brasil no SAEB entre os anos de 2005 e 2015 com relação às proficiências médias em Matemática.

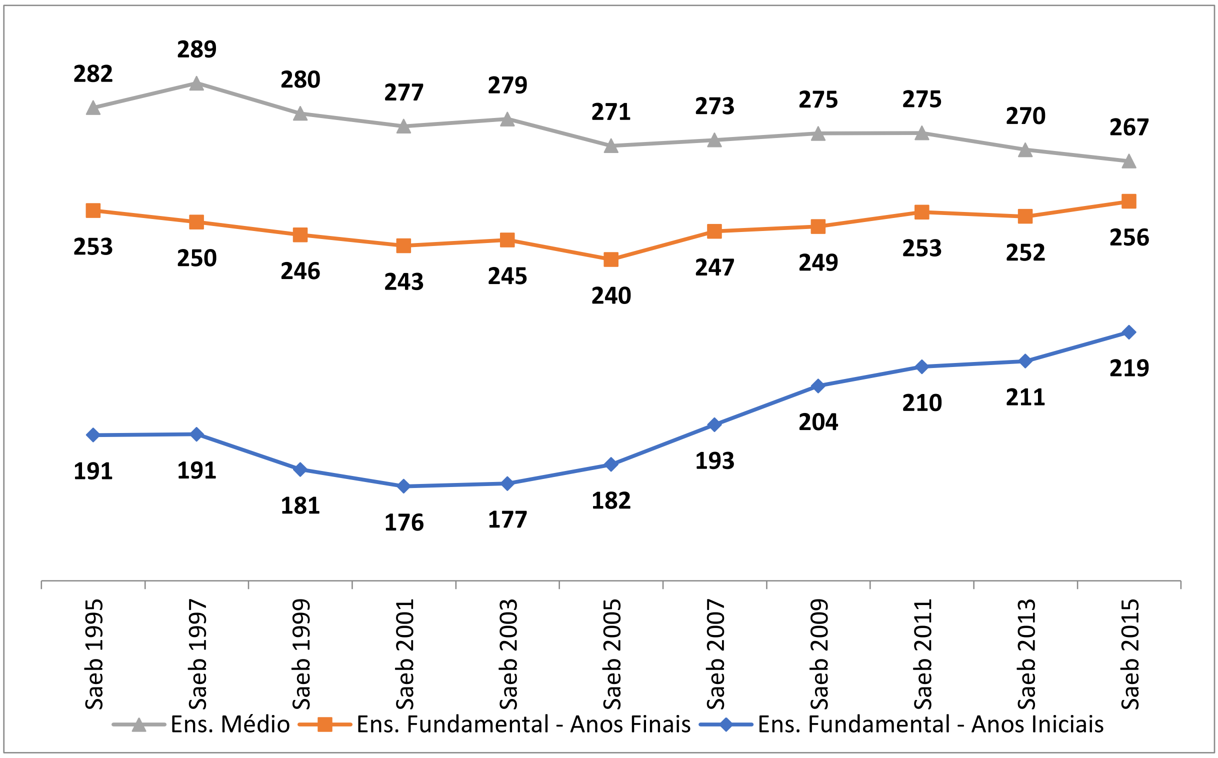


Fonte: INEP (2015).

A partir do gráfico 1 podemos observar que as proficiências médias em Matemática evoluíram nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, mas caíram no Ensino Médio pela segunda vez consecutiva.

Observando o gráfico 2, que mostra a evolução dos resultados do Brasil no Saeb entre os anos de 1995 e 2015 referente as proficiências médias em Matemática, fica evidente que, enquanto a matemática no ensino fundamental está evoluindo positivamente, no ensino médio não evoluiu, nos últimos anos. Pelo contrário, o gráfico mostra um movimento de queda e hoje tem o menor índice das últimas décadas.

Gráfico 2 - Evolução dos resultados do Brasil no SAEB entre os anos de 1995 e 2015 com relação as proficiências médias em Matemática.



Fonte: INEP (2015).

Segundo o Todos Pela Educação (TPE), movimento da sociedade brasileira que tem como propósito melhorar o País impulsionando a qualidade e a equidade da Educação Básica, a situação do Ensino Médio é crítica. Para o TPE (2015), o percentual de alunos do País com aprendizado adequado em matemática, caiu de 9,3% em 2013 para 7,3% em 2015. O índice é ainda menor quando consideradas apenas as escolas públicas. Apenas 3,6% têm aprendizado adequado. Conforme a tabela 1.

Já segundo a análise do relatório do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) Publicada pelo INEP (2015), com base nos resultados da avaliação de 2015, que afere conhecimentos e habilidades dos estudantes de 15 anos em leitura, matemática e ciências, contrastando com resultados do desempenho de alunos dos países membros da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), além de 35 países/economias parceiras, divulgados pela OCDE, o Brasil está entre os países com pior desempenho em matemática. 70,25% dos nossos alunos estão abaixo dos níveis básicos de proficiência em matemática.

Tabela 1 - Aprendizagem em matemática.

Aprendizagem adequada em Matemática (%)				
	Pública	Total 2013	Total 2015	Diferença
Brasil	3,6	9,3	7,3	-2,0
Norte	2,0	3,6	3,5	-0,1
Nordeste	2,1	5,7	4,7	-1,0
Sudeste	4,8	12,1	9,3	-2,8
Sul	4,3	12,2	9,0	-3,2
Centro-oeste	3,5	9,5	7,7	-1,8

Fonte: Todos pela educação (2015), adaptado.

Ainda segundo o INEP (2015), verificou-se que os estudantes encontram maiores dificuldades na resolução de problemas envolvendo assuntos que trabalham com a geometria ou conteúdos afins.

São várias as causas para esta situação. Podem-se listar, entre outras causas que contribuem para estes resultados insatisfatórios, a “má” formação de professores desde sua formação nas universidades e a falta de capacitação docente no decorrer da carreira, falta de incentivos na carreira docente, falta de compreensão e domínio dos pré-requisitos fundamentais que ajudariam o estudante a obter um bom desenvolvimento nas aulas de matemática. (CHAGAS, 2004).

Chagas (2004, p. 242) destaca como causa que contribui para os resultados insatisfatórios da aprendizagem de matemática o fato de não ser raro encontrar “professores de matemática ensinando esta disciplina de forma “rotineira”, onde os conteúdos trabalhados são aqueles presentes no livro didático adotado e o método de ensino se restringe a aulas expositivas e a exercícios de fixação”. Segundo a autora, essa postura do professor faz com que os educandos fiquem presos a mera memorização.

Diante deste quadro, visando melhorar o desenvolvimento de sua atividade docente, há a necessidade de o professor aprender novas formas de pensar e agir para atender as demandas exigidas em sua atuação profissional. Fica clara a necessidade de buscar novas formas de ensinar, buscando a superação da rotina e a melhoria da qualidade de ensino e aprendizagem. Principalmente a geometria, que tem sua aprendizagem marcada pela forma tradicional de ensino.

Tendo em vista a situação apresentada, este trabalho visa contribuir para a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem de matemática. Para isto, estudaremos as contribuições do uso metodológico de atividades investigativas em sala de aula a partir de livros digitais.

Partindo deste tema, realizou-se neste trabalho o desenvolvimento de atividades que envolveram a investigação matemática, utilizando livros digitais para o ensino de geometria. O objetivo geral é investigar as contribuições do uso metodológico de atividades investigativas de geometria através de livros digitais para a aprendizagem matemática. Para isto, toma-se os seguintes objetivos específicos:

- Elaborar e aplicar uma sequência de atividades sobre as relações que existem entre os ângulos na circunferência.
- Identificar se os alunos conseguem reconhecer e escrever padrões;
- Analisar o desenvolvimento dos alunos quanto à formalização de ideias a partir de padrões;
- Identificar se os alunos se sentem motivados a participar das atividades;

A pesquisa realizada no trabalho tem caráter qualitativo e se baseia na observação e interação do autor com os alunos durante a aplicação das atividades e na produção das suas investigações, além de um questionário de opinião.

Visando à melhor compreensão, o segundo capítulo trata do referencial teórico acerca do desafiador processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Nesta inventada, destacamos o uso das Tecnologias da Informação e da Comunicação (TICs), mostrando a sua importância, e a necessidade de um planejamento para utilizá-la. Abordamos ainda a metodologia de investigação matemática como forma de fuga à rotina das aulas, principalmente, na geometria.

O terceiro capítulo traz uma revisão sobre as relações entre os ângulos em uma circunferência. Já o quarto capítulo, apresenta uma proposta contendo atividades a serem trabalhadas, tomando como base o conteúdo programático do Capítulo 3 e a metodologia de investigação matemática.

O quinto capítulo discorre sobre a metodologia adotada no trabalho. No sexto capítulo, analisamos a aplicação em sala de aula, descrevendo como foi desenvolvida a aula. Por último, trazemos nossas considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão “detetivesca” indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (BRAUMANN, 2002, p. 5).

2.1 SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática, para desempenhar seu papel de mediador do conhecimento matemático para o aluno, há a necessidade de que o professor tenha um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. (BRASIL, 1998).

Contudo, não é esta a concepção de matemática que é vista em nossas escolas. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), a matemática é vista usualmente como um corpo de conhecimento organizado de forma lógica e dedutiva, qual edifício sólido, paradigma do rigor e da certeza absolutas.

Segundo a Base Nacional Curricular Comum (BNCC),

> apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática. (BRASIL, 2018, p. 265).

Dessa forma, a BNCC mostra a importância de que o processo de investigação e descoberta na criação da matemática tenha espaço na sala de aula. O que não acontece comumente.

A forma mais comum de ensinar matemática tem sido aquela na qual o professor apresenta o conteúdo oralmente para a turma, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e imagina que o aluno aprenda pela reprodução. (BRASIL, 1998).

Ainda segundo Brasil (1998, p. 37), “a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos”. Um dos motivos pelo qual, segundo o autor, essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz.

Já Chagas (2004) vai além. Segundo a autora,

> essa postura do professor faz com que os educandos entendam o processo de estudo como sendo mera memorização, desestimulando, com isso, atividades mais elaboradas que envolvam raciocínio. Além disso, estes mesmos estudantes tornam-se excessivamente dependentes do professor e do livro didático, uma vez que seu principal objetivo dentro da instituição educacional é obter nota suficiente para serem aprovados (CHAGAS, 2004, p. 243).

Diante disto, surge a necessidade de buscarmos desenvolver uma matemática participativa, fazendo com que os alunos possam estar ativos na sua aprendizagem.

Embora identifiquem o ensino dito tradicional como ineficaz, os PCN de matemática não indicam qual o caminho que facilita a aprendizagem para os alunos. Pelo contrário, segundo este, “não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática”. (BRASIL,1998, p. 42)

No entanto, este processo passa por conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula. Segundo a Brasil (2018, p. 531), para que o processo de aprendizagem matemática se concretize, os alunos devem “mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados”.

Assim buscando uma aprendizagem matemática satisfatória, começam a surgir metodologias em que os alunos possam: desenvolver o pensamento matemático, atribuir novos significados aos conteúdos que já conhecidos e trabalhar de forma participativa. Uma destas, é a metodologia das investigações matemáticas.

2.2 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

A matemática apresentada hoje em nossas escolas é resultado de séculos de acúmulo de conhecimento. Conjecturas, testes, novas conjecturas, muitas teorias foram criadas e descartadas por não terem validade até que o nosso conhecimento fosse construído como se apresenta hoje.

Não é incomum a matemática surgir a partir de acontecimentos inesperados. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) trazem um relato de Henri Poincaré, matemático francês, sobre o processo de descoberta de um tipo de funções que ele batizou de funções fuchsianas.

> Havia já quinze dias que me esforçava por demonstrar que não podia existir nenhuma função análoga às que depois vim a chamar funções fuchsianas. Estava, então, na mais completa ignorância; sentava-me todos os dias à minha mesa de trabalho e ali permanecia uma ou duas horas ensaiando um grande número de combinações e não chegava a nenhum resultado. Uma tarde, contra meu costume, tomei um café preto e não consegui adormecer; as ideias surgiam em tropel, sentia que me escapavam, até que duas delas, por assim dizer, se encaixaram formando uma combinação estável. De madrugada tinha estabelecido a existência de uma classe de funções fuchsianas, as que derivam da série hipergeométrica. Não tive mais que redigir os resultados, o que apenas me levou algumas horas. Quis, em continuação, representar estas funções pelo quociente de duas séries: esta ideia foi completamente consciente e deliberada, era guiado pela analogia com as funções elípticas. Perguntava a mim mesmo quais seriam as propriedades destas séries, se é que existiam, e logrei sem dificuldade formar as séries que chamei tetafuchsianas. (POINCARÉ, 2006 *apud* PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 11-12).

Este aspecto de descoberta, de construção da matemática raramente é mostrado em nossas escolas. A impressão que temos é de uma matemática acabada, imutável, organizada de forma lógica e dedutiva, modelo de rigor e certezas. O que, de certa forma, nega a natureza investigativa do processo de criação da matemática.

Isto pode ser um reflexo da forma como a matemática é ensinada em nossas escolas. O ensino tradicional de matemática já não faz sentido para os alunos. Assim, hoje, os professores se veem desafiados a usar novas e diferentes metodologias para o ensino desta matéria, que é uma das mais importantes, que colabora para o desenvolvimento lógico mental e para a compreensão dos fenômenos do cotidiano.

A sociedade atual carece de cidadãos pensantes, proativos, com espírito investigativo, capazes de solucionar problemas, intervindo de forma autônoma e crítica em situações adversas. (BRASIL, 1998). Assim, com o ideal de contribuir para a formação de cidadãos com essas atribuições surge, entre outras formas de ensinar, a metodologia da Investigação Matemática que tem como autor de maior destaque o português João Pedro da Ponte. Para este autor, é possível que o aluno construa conceitos e significados a partir de uma vivência de investigação.

Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. Procurar metódica e conscientemente descobrir algo, principalmente através do exame e observação. Há vários contextos em que usamos a expressão "investigação": investigação jornalística, investigação de crimes, investigação da causa de acidentes, investigação cientificas, entre outras. Um destes contextos é a Matemática.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), em matemática “investigar é descobrir relações entre objetos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar respectivas propriedades". Ainda segundo os autores, uma investigação se desenvolve em torno de problemas, mostrando uma relação estreita entre investigação e resolução de problemas.

As investigações matemáticas são parecidas com jogos de raciocínio ou problemas de lógica, ou até mesmo com a metodologia de resolução de problemas. Mas diferente da resolução de problemas, em que o discente deseja obter a resposta do problema, a investigação matemática enfatiza o caminho a ser percorrido, no qual o aluno tem a responsabilidade de descobrir e justificar suas descobertas. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016),

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática não citam a metodologia de investigações matemáticas diretamente. Contudo, estas estão de acordo com os seus princípios, uma vez que segundo os PCN de matemática,

> (...) aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático. Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 41).

A BNCC também tratas das investigações. Segundo esta,

> para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. (BRASIL, 2018, p. 529)

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), investigar em matemática não se trata de trabalhar em problemas muito difíceis. Trata-se de explorar problemas cuja solução, em vez de, simplesmente, se desenvolver objetivamente, abre possibilidades inteiramente novas. Segundo os autores, uma investigação envolve quatro momentos principais.

> O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 15).

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), um dos maiores objetivos da investigação matemática é resgatar essa capacidade de o aluno acreditar na sua capacidade de resolver problemas e ocupar aquele espaço de realmente ser um matemático, um verdadeiro estudante. Para os autores, um verdadeiro estudante busca, encontra e valida, ou seja, confirma ou nega resultados. Esse é o objetivo das investigações Matemáticas.

O desafio que se mostra é tornar este tipo de experiencia acessível a todos os alunos. E neste momento o professor tem grande importância. Ao trabalhar com este tipo de atividades, o professor tem três grandes momentos decisivos. No início das atividades o professor tem uma de suas funções mais importantes: deve buscar envolver os alunos na realização da tarefa. Durante a atividade, o professor observa se os alunos estão conseguindo formular e testar as conjecturas, procurando justificá-las, auxiliando-os e instigando-os. No fim da atividade, cabe ao professor ouvir quais as conclusões a que os alunos chegaram e saber se as justificam e o que aprenderam.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira,

> existe, por vezes, a ideia de que, para que o aluno possa, de fato, investigar, é necessário deixá-lo trabalhar de forma totalmente autônoma e, como tal, o professor deve ter somente um papel de regulador da atividade. No entanto, o professor continua a ser um elemento-chave mesmo nessas aulas, cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 19).

Na abordagem da investigação matemática, o nosso papel como professor é passar para os alunos o protagonismo da aprendizagem. Deve-se estimular o aluno a tomar a frente de sua aprendizagem, ou seja, estimulá-lo a construir o próprio conhecimento. Contudo, quando o professor perceber que o aluno não está conseguindo descobrir muitas coisas, que está com certas dificuldades, deve intervir, mas não fornecendo as respostas: ele tem que aprender a desenvolver as perguntas que possam facilitar o caminho da aprendizagem. Aí está o processo de mediação.

2.2.1 As investigações matemáticas no ensino de geometria

Embora cada vez mais importante para as nossas atividades cotidianas, o ensino de matemática, principalmente o de geometria, se mostra como um dos principais desafios para a escola.

Segundo os PCN de matemática, Brasil (1998), os conceitos geométricos têm uma grande importância quando se analisa o currículo de Matemática no ensino fundamental. Isto porque, “por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”. (BRASIL, 1998, p. 39).

É muito comum ouvir que a geometria está em toda parte. Ainda que seja preciso reconhecê-la. Isso porque podemos perceber que a geometria está nas casas, nas artes, na arquitetura. Além disso, cotidianamente, recorremos às ideias de paralelismo, perpendicularismo, semelhança, comprimentos, áreas e volumes, entre tantas outras. Mostrando-se a geometria como um conhecimento indispensável para a vida.

Contudo, mesmo com toda esta importância em nossa vida, ficam claras as dificuldades em sala de aula, principalmente porque os alunos não conseguem se interessar pela geometria. Há uma resistência muito grande, principalmente, ao abordar demonstrações.

Há também muitas reclamações por parte dos alunos quanto à geometria. Como já citado, eles consideram um conteúdo difícil; reclamam, principalmente, de ter que decorar uma grande quantidade de axiomas, proposições, teoremas e fórmulas. Não conseguindo ver sentido, muitas vezes, em estudar a matéria.

Não é difícil ver que muitos alunos chegam ao fim do ensino básico encontrando grandes dificuldades para resolverem questões que envolvem noções elementares de geometria, como congruência de triângulos, semelhança de triângulos, ângulos na circunferência, inclusive com o Teorema de Pitágoras.

Isto pode estar relacionado à forma como a geometria é tradicionalmente ensinada aos alunos. Tudo pronto, acabado, transmitindo aos alunos a impressão de que há apenas a necessidade de que eles decorem as fórmulas. Assim, acabam utilizando desse meio, quando o fazem, apenas para serem aprovados na disciplina.

A geometria pode ser trabalhada de modo que a compreensão de fatos e relações geométricas possam ir muito além da simples memorização e utilização de técnicas para resolver exercícios. Há vários modos de abordar o assunto sem recorrer à forma tradicional. Um deles é abordá-la pela investigação matemática, possibilitando aos alunos se envolverem ativamente com a construção de seu conhecimento.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 52), “a geometria é particularmente propicia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa”.

> As investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações. A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 52).

Trabalhando a geometria por meio das investigações matemáticas podemos, antes de tudo, fazer com que os alunos sintam interesse em descobrir a geometria. Segundo Moran, Masetto e Behrens (2012), aprendemos mais quando o assunto nos interessa. Assim, as investigações matemáticas podem contribuir para melhores resultados no processo de aprendizagem de geometria.

Não se defende neste trabalho que o professor se limite a propor em suas aulas apenas a realização de investigações. O desafio que prevalece é associar diferentes tipos de tarefa de modo a constituir uma prática interessante, capaz de promover o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho.

É muito comum ver atividades investigativas apresentadas de forma tradicional, impressas em papel. Contudo, o uso das TICs pode acrescentar muito a essa metodologia, contribuindo para a criação de contextos para estas atividades, como também fornecendo instrumentos para a construção das estratégias de resolução. Principalmente, com a utilização de livros virtuais

2.3 TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

O uso da informática tem adquirido importância cada vez maior no dia-a-dia. As possibilidades de interatividade e contato com o mundo são inúmeras. Hoje, nossos alunos possuem smartphones, notebooks, tablets, internet, ou seja, eles vivem um contexto diferente do nosso, quando estávamos na escola. Neste novo cenário, a utilização das tecnologias ganha espaço no campo educacional sendo considerado também como material de apoio didático. Diversas pesquisas mostram que a tecnologia pode constituir um instrumento capaz de contribuir significativamente para a aprendizagem dos alunos.

Para Moran, Masetto e Behrens (2012), as novas tecnologias de informação e comunicação influenciam o ensino e o sistema educacional. Mas, essas novas tecnologias devem ser aplicadas à educação? O autor conclui que a resposta é sim, uma vez que elas fazem parte de uma inovação tecnológica e estão inseridas no cotidiano de toda nossa sociedade. Contudo, aplicação destas novas tecnologias na educação depende de uma mediação pedagógica, pois não se trata apenas de aplicar recursos tecnológicos, mas de utilizá-los em prol da aprendizagem, ou seja, de uma educação de qualidade.

Um exemplo é o modo de uso do projetor. Era muito comum no ensino de matemática, o professor chegar na sala de aula e escrever no quadro negro o assunto a ser estudado no dia, mostrar e demonstrar seus axiomas e propriedades; e pedir que os alunos resolvam exercícios de fixação. Nos últimos anos, vários destes profissionais de educação passaram a substituir o quadro negro ou branco pelo projetor. Contudo, a forma como suas aulas eram dadas não mudou. O projetor serviu apenas como uma forma de passar ainda mais conteúdo por dia. O que acabou deixando as aulas ainda mais cansativas e despertando várias reclamações por parte dos alunos. Isto mostra que a simples substituição do quadro negro pelo projetor não traz benefício significativo para a aprendizagem dos alunos.

Para Brasil (1998),

> a incorporação das inovações tecnológicas só tem sentido se contribuir para a melhoria da qualidade do ensino. A simples presença de novas tecnologias na escola não é, por si só, garantia de maior qualidade na educação, pois a aparente modernidade pode mascarar um ensino tradicional baseado na recepção e na memorização de informações (BRASIL, 1998a, p. 140).

É inegável que o uso das novas tecnologias pode contribuir para a melhoria do ensino. Contudo, o aluno não aprende mais simplesmente porque está diante dessas tecnologias e de uma quantidade maior de informações. Não basta usar novas tecnologias. É necessário organização, planejamento e recursos pedagógicos que estejam alinhados com estes recursos tecnológicos, bem como um estrito alinhamento aos conteúdos com os quais se pretende trabalhar. (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2012).

> Há uma expectativa de que as novas tecnologias nos trarão soluções rápidas para o ensino. Sem dúvida as tecnologias nos permitem ampliar o conceito de aula, de espaço e tempo, de comunicação audiovisual, e estabelecer pontes novas entre o presencial e o virtual, entre o estarmos juntos e o estarmos conectados a distância. Mas, se ensinar dependesse só de tecnologias, já teríamos achado as melhores soluções há muito tempo. Elas são importantes, mas não resolvem as questões de fundo. Ensinar e aprender são os desafios maiores que enfrentamos em todas as épocas e particularmente agora em que estamos pressionados pela transição do modelo de gestão industrial para o da informação do conhecimento (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2012, p. 12).

Ainda segundo Moran, Masetto e Behrens (2012), há uma diferença entre ensinar e educar. Para o autor, ensinar refere-se a organizar uma série de atividades didáticas para ajudar os alunos a aprender áreas especificas do conhecimento. Já a educação compreende, além de ensinar, ajudar a integrar ensino e vida. Educar é transformar a vida em um processo constante de aprendizagem.

Há ainda de se falar sobre o processo de aprendizagem. Segundo Moran (2012):

> Aprendemos melhor quando vivenciamos, experimentamos, sentimos. Aprendemos quando relacionamos, estabelecemos vínculos, laços, entre o que estava solto, caótico, disperso, integrando-o em um novo contexto, dando-lhe significado, encontrando um novo sentido. [...]
>
> Aprendemos mais, quando conseguimos juntar todos os fatores: temos interesse, motivação clara; desenvolvemos hábitos que facilitam o processo de aprendizagem; e sentimos prazer no que estudamos e na forma de fazê-lo. (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2012, p. 23-24).

Consequentemente, precisamos fazer com que os alunos possam vivenciar a matemática. Proporcionar um ensino a partir do qual o aluno possa experimentar, se envolver. De modo que o aluno possa se sentir à frente de seu aprendizado. E esta inovação deve partir principalmente de nossos professores.

Precisamos de professores que desafiem e estimulem seus alunos, que dialoguem, que sejam curiosos, que sejam flexíveis, que sejam humildes para ensinar o que sabem, mas também estejam abertos para aprender aquilo que não sabem, inclusive a partir de ideias dos próprios alunos. E precisamos de alunos que queiram aprender, que queiram participar, que se motive para os estudos, que sejam mais curiosos, que sejam mais pesquisadores. (MORAN; MASETTO; BEHRENS 2012).

Uma das possibilidades tecnológicas que vem ganhando espaço entre professores e estudantes é o e-book, o livro digital. Um dos motivos para isso é provavelmente a possibilidade de se explorar recursos que vão muito além do que é apresentado no livro didático impresso.

2.4 LIVROS DIGITAIS

Segundo a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD contínua) TIC 2016 realizada pelo IBGE (2018), o celular está presente em 92,6% dos 69,3 milhões de domicílios brasileiros. Por possuírem acesso a milhares de aplicativos, estes aparelhos podem nos auxiliar imensamente em nossas vidas no contexto pessoal. E, observando melhor, podem também ajudar e muito no ambiente escolar.

Aliado à uma mediação pedagógica planejada, o celular pode ser um importante instrumento facilitador de aprendizagem. Fazendo uso do celular o professor tem a possibilidade de oferecer aulas mais interativas que possam despertar o interesse dos alunos em participar do processo de aprendizagem, até mesmo de estarem à frente do próprio aprendizado.

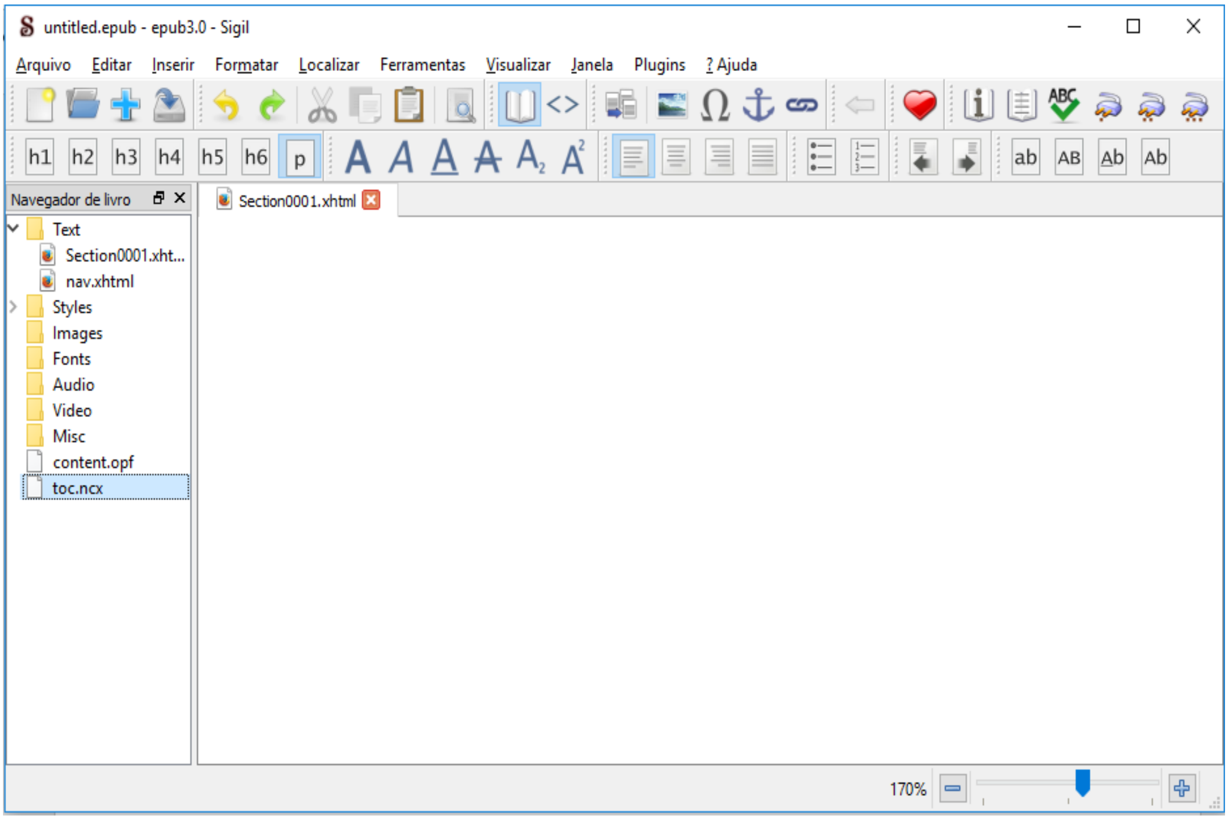
São inúmeras as possibilidades. Com este aparelho, é possível pesquisar por informações e notícias na internet, acessar plataformas de ensino, além de ter acesso à leitura digital, à e-books, entre outras.

Uma destas possibilidades é uma ferramenta que ainda é pouco explorada e que pode contribuir para a melhoria da aprendizagem em matemática: o e-book em formato EPUB 3. Um e-book é um livro digital, ou seja, ele é semelhante a um livro de papel, contudo utiliza como mídia o formato digital, que pode ser lido em equipamentos eletrônicos tais como computadores, tablets e celulares.

Os principais formatos de e-books são o PDF e o EPUB. O primeiro, mais conhecido, imita o livro tradicional de papel. Trata-se de livros digitalizados com textos estáticos, conforme formato padrão. O aluno usa este formato de livro digital como usa o livro físico, o que não traz um maior atrativo em relação a este. Já o formato EPUB, a versão atual é a EPUB 3**,** é o padrão aberto de publicações digitais, ou seja, o padrão de livro digital, que possibilita a inserção do conteúdo dos livros impressos conjugados com outros objetos educacionais digitais, como vídeos, imagens, áudios, textos, gráficos, tabelas, tutoriais, aplicações, mapas, jogos educacionais, animações, infográficos, páginas web e outros elementos.

Os principais softwares utilizados para criar e editar e-books no formato EPUB 3 são o *Indesign* e o *Sigil*. O Indesign é um software profissional pago e sua licença tem valor de mercado elevado. Além disso, demanda muito tempo de aprendizagem. Já o Sigil é um software livre, considerado um dos melhores na categoria para produção de EPUB 3. Muito simples de usar, o Sigil parece muito com os editores de texto a que estamos acostumados. Além disso, encontramos facilmente vários cursos, vídeos e tutoriais de como trabalhar com ele na internet. Por estes motivos, foi o escolhido para desenvolver as atividades deste trabalho.

Figura 1- Interface inicial do aplicativo Sigil.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Os livros digitais favorecem o uso de atividades interativas, dinâmicas, investigativas. Contudo, o simples uso do livro digital, assim como o Datashow, apenas para dar uma roupagem nova aos conteúdos substituindo imagens estáticas por animações ou vídeos não trará a melhoria na aprendizagem que se espera. Sua aplicação tem de vir aliada a uma mediação pedagógica que contribua para uma aprendizagem mais significativa.

O uso de atividades de natureza investigativa, na Matemática, traz grandes benefícios como o desenvolvimento do pensamento matemático e da capacidade de o estudante trabalhar de forma autônoma, atribuindo novos significados aos conhecimentos.

3 METODOLOGIA

A pesquisa, que trataremos neste trabalho, possui uma abordagem de caráter qualitativo que não se preocupa prioritariamente com números, ao contrário, preocupa-se em compreender pormenorizadamente um determinado grupo social (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

Buscamos conhecer as contribuições do uso metodológico de atividades investigativas em sala de aula a partir de livros digitais. Para isto, nos basearemos na observação e interação do autor com os alunos durante a aplicação das atividades e na produção das suas investigações, além de um questionário de opinião, possibilitando aos alunos se posicionarem sobre se gostaram ou não da metodologia de Investigação matemática.

O questionário consistia de quatro perguntas, três objetivas e uma subjetiva em que se perguntou: se os alunos gostavam de geometria; se os alunos se sentiram estimulados a descobrir as relações entre os ângulos nas animações; se fez diferença no aprendizado investigar as animações; e se eles gostariam que a metodologia fosse utilizada em mais aulas, e o porquê disso.

Para que o produto fosse aplicado fez-se necessário escolher uma turma dentre algumas opções de série e escolas onde a aplicação se mostraria viável. A aplicação das atividades desenvolvidas aconteceu no *Campus* Caicó do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN, no dia 28 de novembro de 2018.

O *Campus* Caicó oferece cursos em diferentes eixos tecnológicos, no sentido de atender as demandas da região, tais como: Controle e Processo Industrial (Técnico em Eletrotécnica, nas modalidades, subsequente e integrado e Técnico em Segurança do Trabalho, na modalidade Ensino à Distância); Informação e Comunicação (Técnico em Informática nas modalidades subsequente e integrado) e Produção Industrial (Técnico em Vestuário e Técnico em Têxtil nas modalidades subsequente e integrado regular). Além desses, há ainda a graduação de Licenciatura em Física e Design de Moda.

A aplicação ocorreu na turma do 2º Ano do curso integrado de Eletrotécnica, composta por 39 alunos. Destes, cinco vinham de escolas privadas e os 34 restantes de escolas públicas. Porém, no dia da aplicação estavam presentes 22 alunos. A turma foi escolhida por ser nesta série do ensino médio que normalmente se aprende as relações entre os ângulos na circunferência.

Vale salientar que este conteúdo não faz parte do currículo desta série na instituição e que os alunos não conheciam o conteúdo. Caso os alunos já soubessem de antemão as relações entre os ângulos em uma circunferência, a investigação não aconteceria. Uma vez que eles não iriam precisar comparar os ângulos para enunciar suas conjecturas.

Os alunos foram convidados a incluir nas suas investigações não só as conclusões que tiraram da realização de uma tarefa de investigação, mas também os processos que usaram para chegar a essas conclusões. Processos como as questões levantadas acerca da atividade, outras fontes consultadas, o modo como organizaram os dados, as conjecturas provadas e não provadas, entre outros.

Isto, porque a inclusão destes processos poderia ser interessante, por permitir ao autor conhecer não só as conclusões a que os alunos chegaram, mas também os processos por eles utilizados.

Com a colaboração de um professor e da turma, foi disponibilizado duas aulas que ocorriam em sequência para a implementação das atividades na data já mencionada.

Em todas as atividades, os alunos foram divididos em grupos de duas ou três pessoas. Na oportunidade, os alunos estavam com seus celulares. Como o *Campus* Caicó oferece acesso à internet em todas as salas de aula, foi solicitado aos alunos que baixassem um aplicativo leitor de EPUB 3. O aplicativo recomendado pelo autor foi o Gitden Reader, aplicativo gratuito, mas disponível apenas para smartphones com sistema operacional Android. O e-book com as atividades foi enviado para a turma através de aplicativo de troca de mensagens.

No início da aula foi perguntado aos alunos se já haviam realizado uma investigação em matemática e se tinham se perguntado como a matemática foi inventada. Os alunos afirmaram nunca ter realizado qualquer atividade do tipo e também o desconhecimento desta metodologia de ensino. Após comentar sobre as atividades de um pesquisador matemático e sobre como se deu a construção da matemática que temos hoje, os alunos foram desafiados a serem pesquisadores e buscar investigar as relações existentes entre os ângulos em uma circunferência.

4 UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE DE INVESTIGAÇÃO

Fundamentado nos capítulos anteriores, propõem-se algumas atividades de investigação na perspectiva da Metodologia da Investigação Matemática que nos permitam compreender as relações entre os ângulos na circunferência. Todas as atividades foram desenvolvidas com o apoio de e-books no formato EPUB 3.

Neste trabalho, resolveu-se escolher o formato digital EPUB 3 pelo fato de ser facilmente visualizado em celulares, tablets e computadores, com o uso de aplicativos gratuitos e, principalmente, pela possibilidade de explorar vídeos e animações em sala de aula. Formatos que estão presentes no dia-a-dia da grande maioria dos adolescentes.

Como já foi discutido, a matemática é um campo que é frequentemente investigado. Para os pesquisadores matemáticos, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos e até desconhecidos, procurando identificar suas propriedades. É isso que abordam os exercícios, buscando levar os alunos a experimentar um pouco dos desafios de fazer matemática.

Assim, nesta abordagem levaremos aos alunos animações de alguns objetos matemáticos em que algumas de suas propriedades estão destacadas. É esperado que os alunos possam por meio da observação e interação com estes objetos, construir suas próprias conjecturas, testá-las e se possível, justificá-las.

O objetivo destas atividades é levar os alunos a investigar as relações que existem entre os ângulos e arcos em uma circunferência. Trabalhando o ensino desse modo, poderemos fazer com que os alunos se sintam desafiados, e que isto os motive a se verem responsáveis por seu aprendizado.

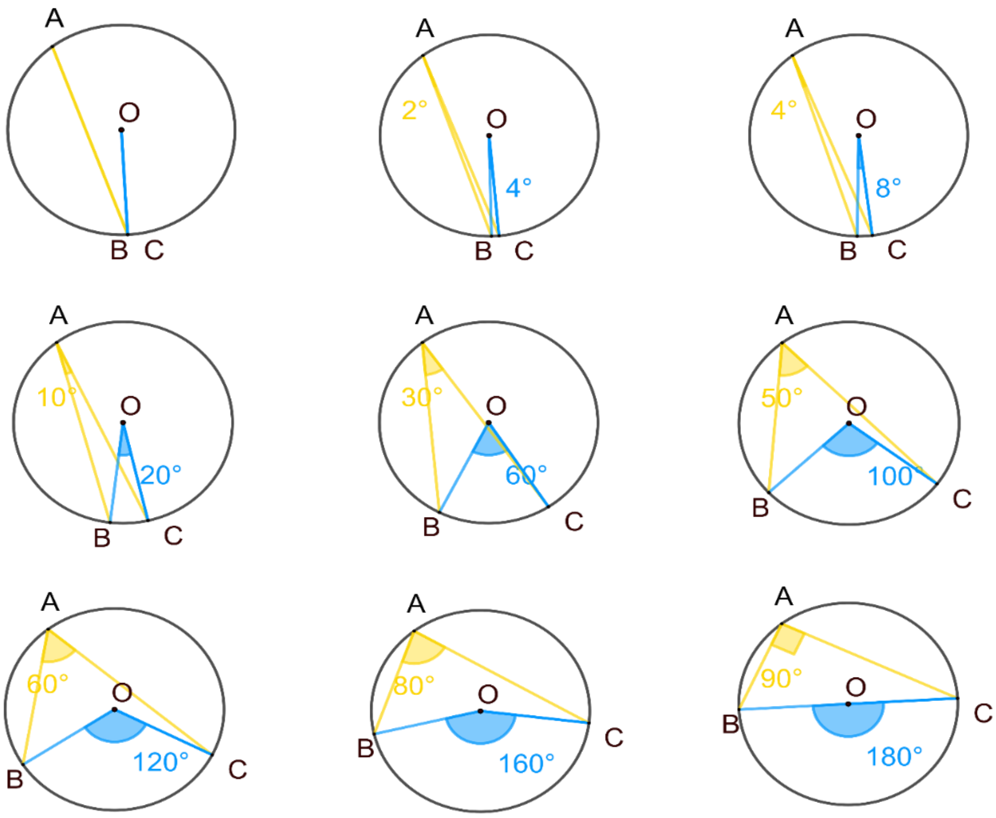
Em todas as atividades exploramos animações em formato “.gif” com o auxílio do software gratuito *geogebra*. A utilização do e-book no formato EPUB 3 se mostra importante pois, dentre outras potencialidades, possibilita a visualização das animações. A utilização das animações facilita a visualização e percepção das relações entre os elementos. Por exemplo, o movimento gerado pela animação nos dá a certeza de que o crescimento de um dos ângulos está relacionado ao crescimento do outro. Isso faz com que o aluno tenha uma pista ao observar para encontrar as relações.

O e-book encontra-se disponível no endereço eletrônico https://1drv.ms/u/s!AlM10Ead8j8JmDoqaogbri1NkKJa?e=0tQeRt.

4.1 ATIVIDADE 1

A Figura 2 mostra uma perspectiva da animação da circunferência e do ângulo $B\hat{A}C$ que parte de um de seus pontos, chamado ângulo inscrito. O ângulo $B\hat{O}C$ é dito ângulo central. Qual a relação entre o ângulo inscrito e o arco determinado por ele na circunferência? Você consegue demonstrar este resultado?

Figura 2 - Imagens exibidas na animação da atividade 1



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na atividade 1, utilizamos a animação como forma de facilitação para a visualização das relações entre o ângulo inscrito e o ângulo central.

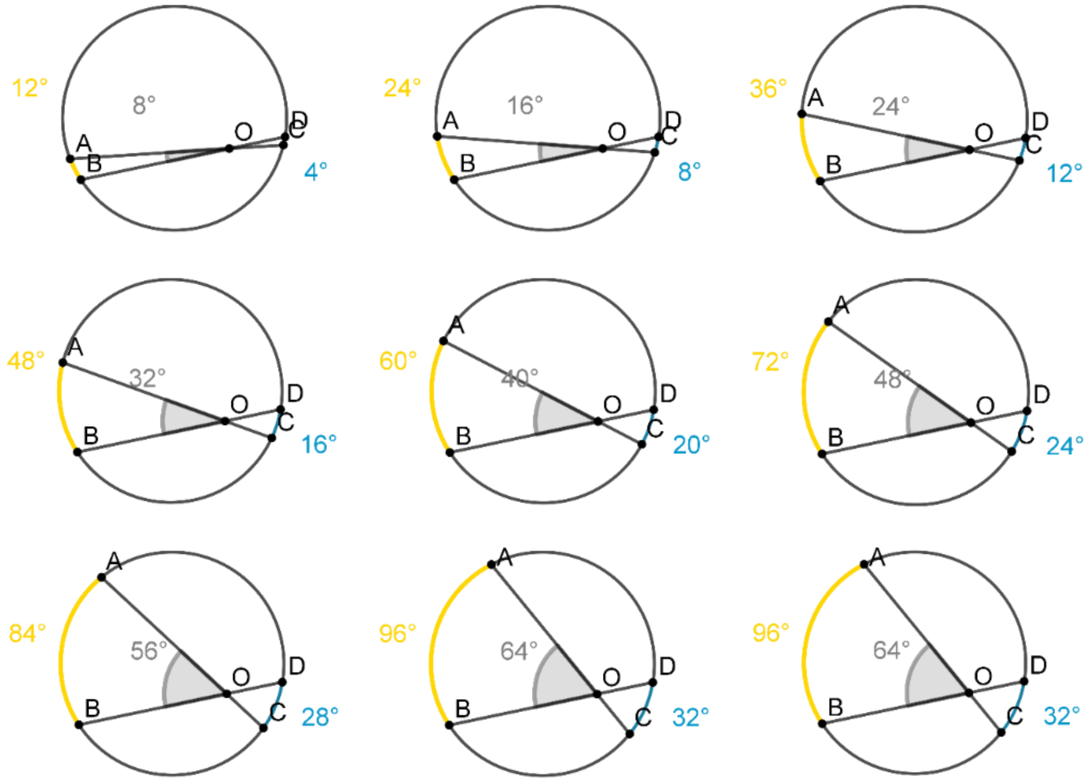
Como há apenas dois ângulos envolvidos na atividade, há a expectativa de que os alunos não encontrem dificuldades para perceber que o ângulo inscrito possui metade da medida do ângulo central ou, dito de outra forma, que o ângulo central é o dobro do ângulo inscrito.

O objetivo da atividade é que o aluno possa perceber a relação entre o ângulo inscrito e o ângulo central observando as suas medidas e comparando-as, enunciando as conclusões a que chegou.

4.2 ATIVIDADE 2

A Figura 3 mostra uma perspectiva da animação de uma circunferência na qual os pontos A e C estão em movimento gerando os arcos AB e CD e o ângulo $A\hat{O}B$. Investigue qual a relação existente entre os arcos AB, CD e o ângulo $A\hat{O}B$ desta circunferência. Faça uma conjectura sobre esta relação. Você consegue demonstrar este resultado?

Figura 3 - Imagens exibidas na animação da atividade 2.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na atividade 2, utilizamos a animação como forma de facilitação para a visualização das relações entre o Ângulo Excêntrico Interno e os arcos que a ele se relacionam.

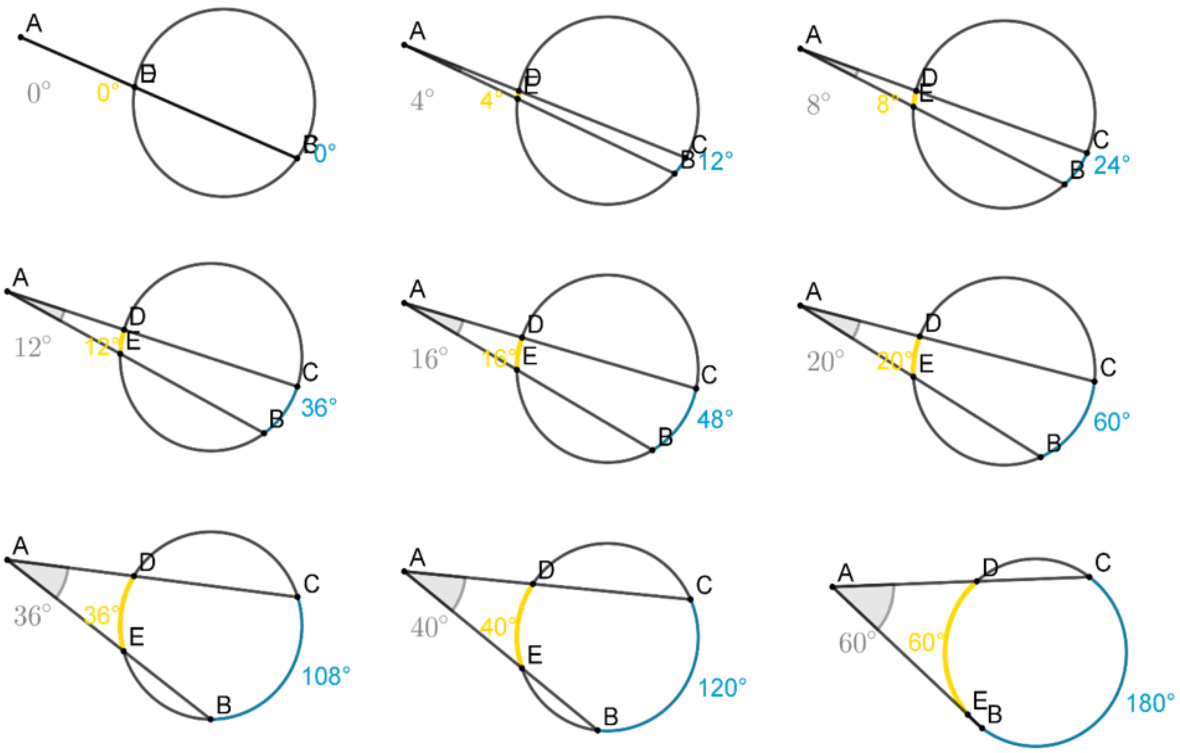
Como há mais dois ângulos envolvidos na atividade, o processo de simples visualização e comparação entre os valores possivelmente não será suficiente para que os alunos percebam que a medida do Ângulo Excêntrico Interior é igual a média das medidas dos arcos que estão relacionados a ele. Assim, o professor pode solicitar aos alunos que utilizem alguns recursos que os ajudem a interpretar o problema. São exemplo destas ferramentas Tabelas e Gráficos.

O objetivo da atividade é que o aluno possa perceber a relação entre o Ângulo Excêntrico Interior e os arcos a ele relacionados observando as suas medidas e comparando-as. Enunciando as conclusões a que chegou.

4.3 ATIVIDADE 3

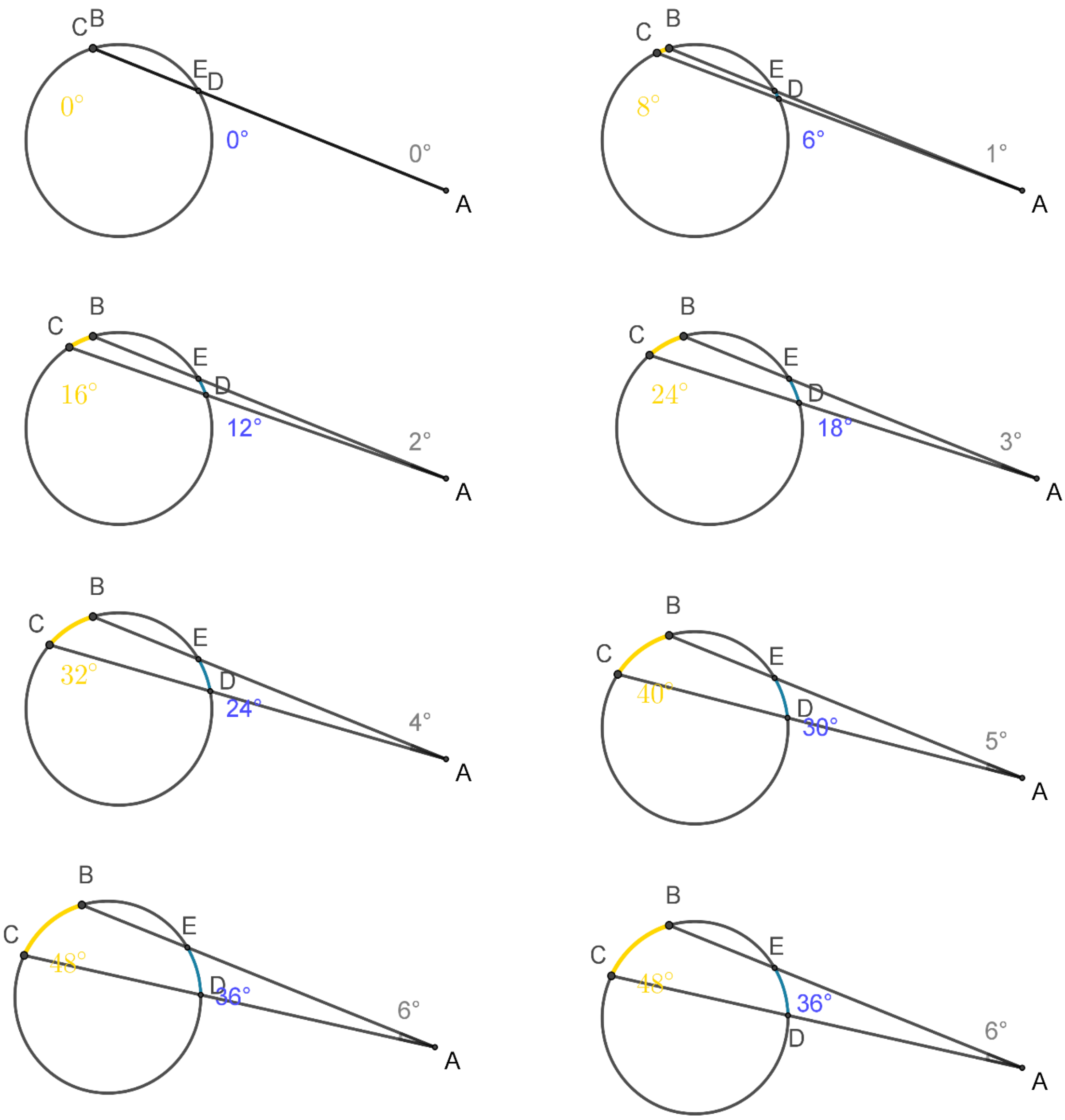
A Figuras 4 e 5 mostram perspectivas das animações de uma circunferência na qual os seguimentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ estão em movimento gerando os arcos BC e DE e o ângulo $B\hat{A}C$. Investigue qual a relação existente entre os arcos BC, DE e o ângulo $B\hat{A}C$ desta circunferência. Faça uma conjectura sobre esta relação. Você consegue demonstrar este resultado?

Figura 4 - Primeiro grupo de imagens exibidas na animação da atividade 3



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5 - Segundo grupo de imagens exibidas na atividade 3



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na atividade 3, utilizamos a animação como forma de facilitação para a visualização das relações entre o Ângulo Excêntrico Externo e os arcos que a ele se relacionam.

Esta atividade é muito semelhante a atividade dois, de modo que nesta questão também o processo de simples visualização e comparação entre os valores possivelmente não será suficiente para que os alunos percebam que a medida do Ângulo Excêntrico Exterior é igual a metade da diferença das medidas dos arcos que estão relacionados a ele. Assim, também nesta questão, o professor pode solicitar aos alunos que utilizem tabelas e gráficos visando compreender melhor o problema.

Nesta atividade, incluímos duas animações. Isto porque na primeira os valores do Ângulo Excêntrico Exterior aparentam medir um terço da medida de um dos arcos que ele delimita. Como esta conclusão não corresponde a uma regra geral, inserimos uma segunda animação, o que mostra aos alunos que uma regra embora possa ser válida para um caso específico pode não valer em todas as situações. Solicitando então que eles avancem na investigação buscando uma regra que atenda as duas animações.

O objetivo da atividade é que o aluno possa perceber a relação entre o Ângulo Excêntrico Exterior e os arcos por ele delimitados, observando as suas medidas e comparando-as. E por fim, enunciando as conclusões a que chegou.

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

O exame dos relatórios produzidos pelos alunos tem por objetivo possibilitar a compreensão das as contribuições do uso metodológico de atividades investigativas de geometria através de livros digitais para a aprendizagem dos alunos, como também verificar se esta nova forma de ensino foi útil para formação de seus conhecimentos. Na análise que segue, os grupos serão identificados como A, B, C, etc. Já na análise do questionário de opinião, cada aluno será identificado como A1, A2, etc.

5.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE 1

Ao iniciar a atividade 1, os alunos se depararam com uma animação que permitia a visualização das relações entre o ângulo inscrito e o ângulo central. O objetivo da atividade é que o aluno possa perceber a relação entre o ângulo inscrito e o ângulo central observando as suas medidas e comparando-as. E assim, partindo desta observação, enunciar as conclusões a que chegou.

A possibilidade de usar o celular para investigar objetos matemáticos mostrou-se motivadora e todos demonstraram muito interesse em investigar o assunto a ser trabalhado. Contudo, por se tratar de uma turma que ainda não trabalhara com essa abordagem, os alunos ficaram inicialmente confusos.

Inicialmente, porque a atividade 1 pediu que os alunos investigassem a relação do ângulo inscrito com o arco determinado por ele, que não tinha valores. Esse problema foi superado ao explicar aos alunos que o valor do arco em questão e o valor do ângulo central são correspondentes na animação.

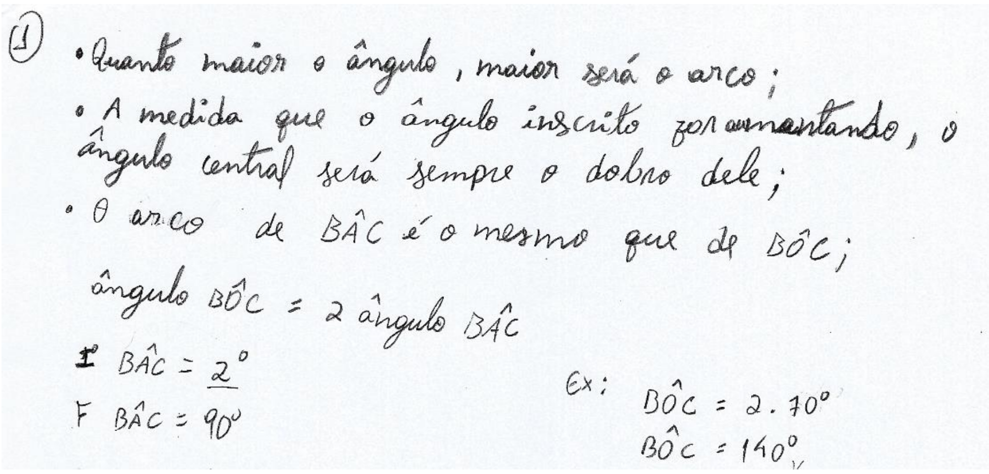
Superado esse momento, os alunos não iniciaram a atividade pois entendiam o que esta pedia que eles fizessem. Assim, foi feita uma reflexão sobre a forma como eles geralmente aprendiam. Segundo os alunos, os professores geralmente iniciam as aulas, ensinam as propriedades e os teoremas dos assuntos, as demonstram e depois passam atividades para que eles façam. E então foi explicado que na abordagem de investigação matemática, eles é que deveriam descobrir as propriedades dos objetos matemáticos e se possível justificá-los.

Um dos alunos questionou: “é como se fosse um jogo?”. Então, foi falado que se pode pensar nesse tipo de atividade como um jogo, no qual o aluno assume o papel de investigador, buscando vencer o desafio que é descobrir as relações entre os objetos matemáticos, no caso desta atividade, as relações entre os ângulos de uma circunferência.

Passado este momento, a maioria dos alunos observou os valores dos ângulos e os comparou. Logo perceberam uma relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito. Todos chegaram a uma resposta para a atividade 1, embora enunciada de maneiras diferentes. Nesse momento, passaram a se comunicar e checar a resposta dos colegas.

Pôde-se observar que os alunos realmente se interessaram em conseguir vencer o desafio, ou seja, em descobrir as relações, as propriedades daquelas animações. A Figura 6 mostra as investigações do grupo A. Eles notaram a relação de crescimento entre os dois ângulos, além de observar a relação entre o ângulo inscrito e o ângulo central.

Figura 6 – Investigando o ângulo inscrito – grupo A


1

• Quanto maior o ângulo, maior será o arco;

• A medida que o ângulo inscrito for aumentando, o ângulo central será sempre o dobro dele;

• O arco de BÂC é o mesmo que de BÔC;

ângulo BÔC = 2 ângulo BÂC

I BÂC = 2°

F BÂC = 90°

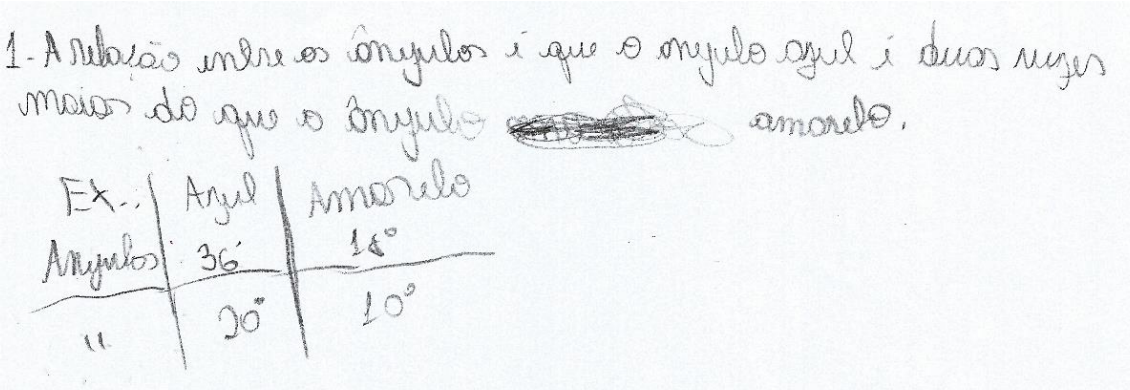
Ex: BÔC = 2 . 70°

BÔC = 140°

Fonte: Acervo deste trabalho (2019).

O grupo B chegou à mesma conclusão. Mas, para isso, usaram uma tabela de valores para chegar à conjectura. Contudo, não enunciaram o nome dos ângulos. Eles os identificaram pelas cores.

Figura 7 – Investigando com auxílio de tabela – grupo B

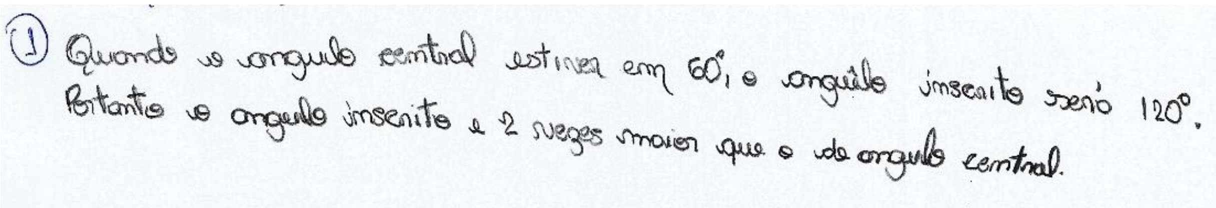

1- A relação entre os ângulos é que o ângulo azul é duas vezes maior do que o ângulo ~~amarelo~~ amarelo.

Ex.:	Azul	Amarelo
Ângulos	36°	18°
"	20°	10°

Fonte: Acervo deste trabalho (2019).

Ficou claro que vários grupos estavam concluindo que as suas conjecturas eram válidas baseadas apenas nos exemplos, como resposta do grupo C destacada na Figura 8.

Figura 8 – Investigando o ângulo inscrito – grupo C


1 Quando o angulo central estiver em 60°, o angulo inscrito será 120°. Portanto o angulo inscrito e 2 veges maior que o do angulo central.

Fonte: Acervo deste trabalho (2019).

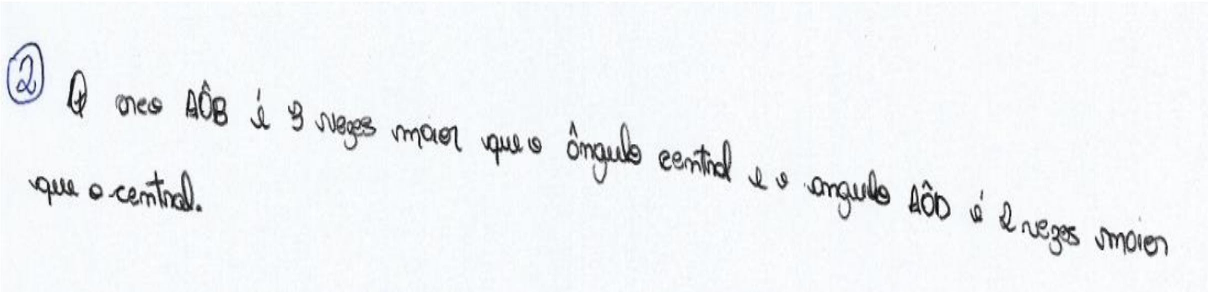
5.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE 2

Quando iniciaram a atividade 2 os alunos já não tinham dúvidas quanto ao que fazer, uma vez que esta é semelhante a atividade 1. Contudo, eles não conseguiram encontrar a relação entre os arcos e os ângulos somente visualizando as animações como aconteceu na Atividade 1.

Assim, foi sugerido que eles usassem tabelas ou gráficos como ferramentas para organizarem as informações que eles obtivessem do e-book. Foi sugerido ainda aos alunos que após a organização dos dados eles experimentassem manipular os dados. Observando se, por exemplo, o valor de uma coluna não era a combinação de outras duas.

Nesta atividade apareceram muitas respostas descritivas, relacionando a com a atividade 1. A Figura 9 mostra a interação dos alunos com a metodologia.

Figura 9 – Investigando o ângulo excêntrico interno – grupo C.

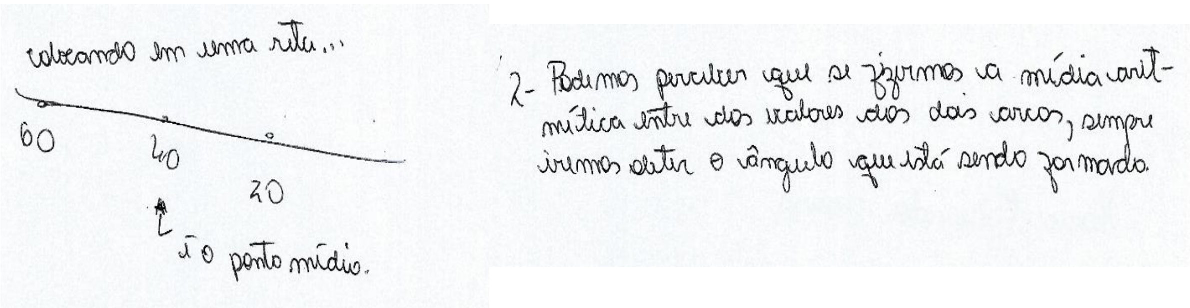


Fonte: Acervo deste trabalho (2019).

Houve também respostas que relacionam a geometria com outras areas da matemática. O grupo D observou que, conforme eram colocados os valores das medidas dos ângulos e dos arcos em uma reta, o valor do ângulo estava sempre no meio.

Assim, foi perguntado ao grupo se eles conheciam a definição de ponto médio. Após obter uma resposta negativa, o professor pediu que eles pesquisassem esse tema no livro didático ou na internet e conseguiram chegar a conclusão mostrada na imagem 10 abaixo.

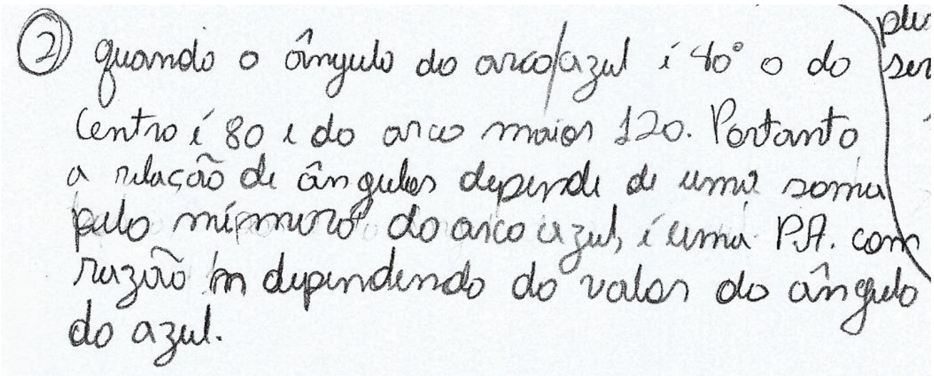
Figura 10 – Relacionando ângulo excêntrico interno ao ponto médio – grupo D.



Fonte: Acervo deste trabalho (2019).

Já um outro grupo, o grupo E, observou uma relação entre os valores das medidas dos arcos e do ângulo e uma Progressão Aritmética, como mostra a Figura 11.

Figura 11 – Relacionando ângulo excêntrico interno à P.A. – grupo E.



2 quando o ângulo do arco azul é 40° o do
centro é 80 e do arco maior 120. Portanto
a relação de ângulos depende de uma soma
pelo mínimo do arco azul, é uma P.A. com
razão dependendo do valor do ângulo
do azul.

Fonte: Acervo deste trabalho (2019).

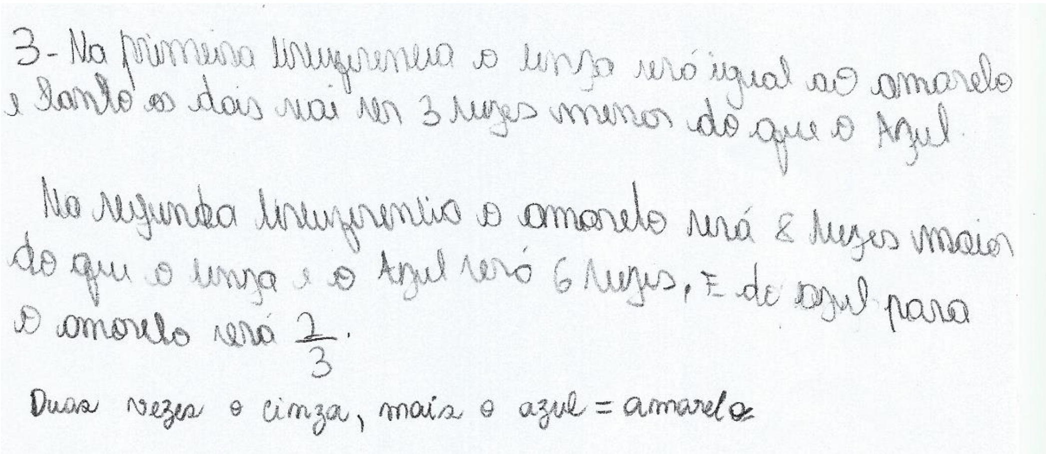
5.3 ANÁLISE DA ATIVIDADE 3

A atividade 3 se diferencia da anterior, principalmente porque havia duas animações. Isso acarretava um aumento das informações e uma dificuldade a mais, uma vez que se deveria encontrar uma regra única que fosse válida em todas as situações.

O grupo B, enunciou duas conjecturas que não eram válidas antes de conseguir encontrar uma relação geral. O grupo começou por enunciar uma regra para primeira animação. E, após eles próprios testarem, perceberam que esta não servia para a segunda animação. Por isto, foi abandonada. Em outro momento, o grupo enunciou uma regra para a segunda animação. E chegou também à conclusão que não servia para a primeira. Vários grupos agiram igualmente.

Como os alunos sentiram grandes dificuldades em organizar os dados das medidas dos ângulos e arcos foi sugerido que eles organizassem os dados das duas animações em uma única tabela e que então verificassem a possibilidade de uma coluna ser a combinação das outras. Como resultado, apenas dois grupos conseguiram encontrar a relação entre o ângulo excêntrico exterior e os arcos que ele delimita na circunferência.

Figura 12 – Investigando o ângulo excêntrico externo – grupo B.


3- Na primeira circunferência o cinza será igual ao amarelo e tanto os dois vai ser 3 vezes menor do que o Azul.

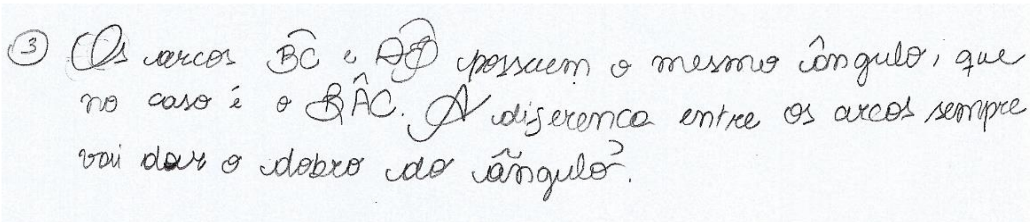
No segunda circunferência o amarelo será 2 vezes maior do que o cinza e o Azul será 6 vezes, E do azul para o amarelo será $\frac{2}{3}$.

Duas vezes o cinza, mais o azul = amarelo

Fonte: Acervo deste trabalho (2019).

O grupo E também conseguiu descobrir a regra do ângulo excêntrico externo, conforme Figura 13. Contudo, este grupo o fez verificando apenas a primeira animação.

Figura 13 – Investigando o ângulo excêntrico externo – grupo E.


3 Os arcos $\widehat{BC}$ e $\widehat{AD}$ possuem o mesmo ângulo, que no caso é o $B\hat{A}C$. A diferença entre os arcos sempre vai dar o dobro do ângulo.

Fonte: Acervo deste trabalho (2019).

Finalizadas as atividades, quando os alunos concluíram as investigações, o professor fez uma intervenção. Foi questionado se a partir daquelas descobertas tinha-se certeza de que as propriedades eram válidas, ou seja, se a observação realizada era uma prova de que o resultado estava correto.

Rapidamente todos disseram que sim. Assim, nesse momento, foi explicado que a conclusão a que todos chegaram era uma conjectura e que ainda era necessário provar tal resultado para todos os ângulos. Daí, foi pedido que eles tentassem demonstrar o resultado. Os alunos passaram a tentar demonstrar, mas não conseguiram, e então, pediram ao professor que as demonstrasse.

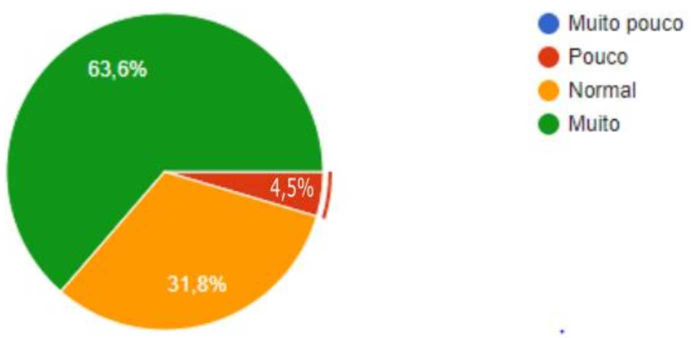
Foi muito gratificante observar que os alunos buscaram compreender a demonstração. Isto porque geralmente eles não veem sentido nesta etapa do ensino de geometria. Após este momento, a demonstração das 3 atividades foi mostrada.

4.4 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

Após a realização das atividades, os alunos responderam um questionário virtual de maneira que pudessem expor suas opiniões e conclusões a respeito das atividades de investigação matemática com o auxílio do e-book em formato EPUB 3.

Todos os alunos foram enfáticos em responder que gostaram das atividades. Para eles, fez grande diferença poder observar e investigar as relações entre os ângulos através do e-book. 95% dos alunos sentiram-se estimulados a descobrir as relações entre os objetos matemáticos. Isto mostra que o uso das novas tecnologias aliada a uma mediação pedagógica pode contribuir para um interesse maior na aprendizagem.

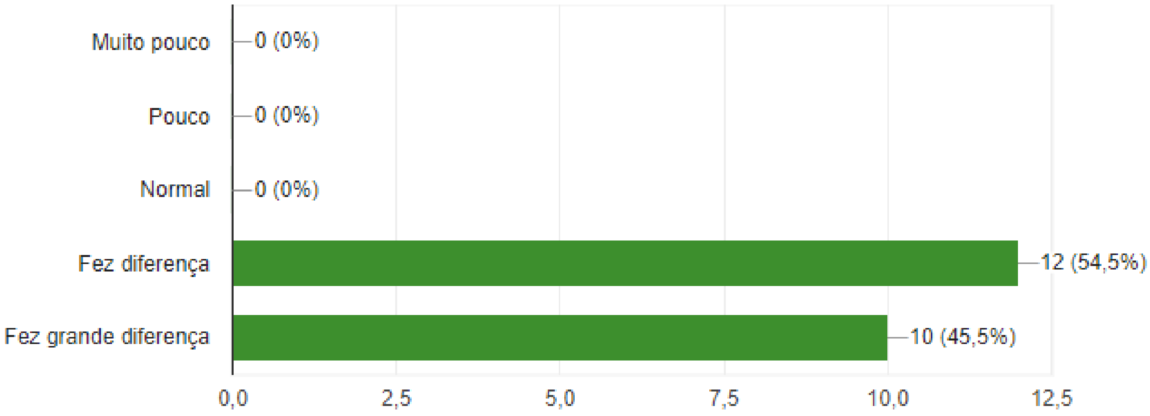
Gráfico 3 - Sobre como o aluno se sentiu estimulado a descobrir as relações entre os objetos matemáticos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Além disso, segundo os alunos, investigar as animações fez diferença para o aprendizado, conforme o gráfico 4.

Gráfico 4 - Investigar as animações inseridas no texto fez diferença no seu entendimento dos assuntos abordados?



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Em seguida, foi perguntado aos alunos se eles gostariam que esta metodologia, investigação matemática com o auxílio de e-book, fosse utilizada em mais aulas, e solicitado que eles justificassem a resposta. Todos responderam positivamente. Entre as respostas, um dos alunos destacou a fuga da rotina, conforme mostra a Figura 14.

Figura 14 - Resposta do aluno A1

Sim. O e-book é uma forma alternativa de ensino, fugindo da rotina de sempre. Leva o aluno a procurar o saber e fixá-lo, ao invés de esperar pelo professor.

Fonte: Acervo deste trabalho (2019).

Para outro aluno, a metodologia de investigação matemática através de e-books contribui para o aprendizado. Ele destacou ainda, como pode se observar na Figura 15, o fato de alguns que alunos apenas decoram as fórmulas.

Figura 15 - Resposta do aluno A5.

Sim, uma vez que com essa metodologia os alunos buscam compreender a situação proposta, ajudando no entendimento, antes do professor ensinar fórmulas que muitos apenas memorizam e não sabem sua aplicação.

Fonte: Acervo deste trabalho (2019).

Outros alunos destacaram as relações do e-book com o livro didático tradicional. Para um deles o uso do e-book torna o aprendizado mais intuitivo em relação ao livro didático. Já para o outro, esta metodologia faz com que os alunos se desprendam do livro e contribui para que tenham uma visão da matemática além das fórmulas.

Figura 16 - Respostas dos alunos A11 e A12.

Sim, pois nos desprende do livro, e nos faz ter uma visão que vai além de fórmulas prontas, nos faz imaginar e buscar cada vez mais.

Sim, isso se torna mais intuitivo com relação aos alunos, os livros didáticos as vezes não conseguem explicar com grande facilidade fenômenos matemáticos.

Fonte: Acervo deste trabalho (2019).

Após toda a aplicação e análise da sequência de atividades e do questionário de opinião fica claro que os alunos conseguem reconhecer e escrever os padrões que foram mostrados nas animações do e-book. Observa-se também que os alunos conseguem formalizar ideias válidas e relacionar suas observações a outros conteúdos matemáticos.

Por último, deve-se destacar a metodologia como aspecto facilitador e motivador da aprendizagem. As atividades investigativas com o uso do celular podem ter grande capacidade de atrair a atenção dos alunos. Toda a turma estava envolvida, se esforçando para descobrir as relações entre os ângulos da circunferência. Donde concluímos que tal experiência foi muito proveitosa para os alunos e para o autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo é investigar as contribuições do uso metodológico de atividades investigativas de geometria através de livros digitais para a aprendizagem matemática. Através da aplicação de sequência de atividades ao longo do processo, identificou-se que os alunos conseguiram reconhecer os padrões destacados nas animações; além de formalizar ideias a partir destes padrões.

Após analisar as investigações produzidas pelos alunos, percebe-se que as atividades propostas favoreceram o ensino da matemática de forma participativa. Essa metodologia possibilitou aos alunos construírem o próprio conhecimento por meio de observação e dedução, assim como os motivou a buscar o conhecimento pesquisando em fontes como livros e internet.

As investigações matemáticas propostas ainda oportunizaram aos alunos a possibilidade de usar os conhecimentos que eles já possuíam para justificar novos conhecimentos. O que permite atribuir ainda mais sentido na aprendizagem de cada conteúdo de matemática.

Analisando os comentários deixados pelos alunos no questionário, foi possível perceber que os alunos se sentiram-se motivados a participar das atividades. A aceitação dos alunos para esse tipo de abordagem foi muito interessante. Quase todos os comentários foram muito positivos, destacando-se, segundo os alunos, a fuga da rotina.

O uso das novas tecnologias, em nosso caso o e-book, se mostrou como uma excelente alternativa de recurso pedagógico, ostentando um papel inovador e dinâmico no ensino da Geometria, favorecendo o processo de ensino e aprendizagem e ajudando na construção do conhecimento.

Desse modo, conclui-se que é válido o uso da metodologia, uma vez que ela contribui não só para a aprendizagem como para uma postura ativa dos alunos em buscar o conhecimento.

Por fim, é claro que este trabalho não tem a pretensão de esgotar o assunto.

Esperamos, com ele, apontar motivos para o uso das investigações matemáticas e das TICs para o ensino de Geometria. Ainda, ansiamos que as ponderações aqui apresentadas possibilitem a outros professores a realização deste tipo de atividades ou uma adaptação delas de acordo com a realidade de seus alunos.

Com o intuito de contribuir para trabalhos futuros, sugerimos estudos que busquem identificar quais outras áreas da matemática podem ser exploradas a partir das investigações matemáticas com o auxílio de e-books e outras TICs.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998a.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (matemática)**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 02 maio 2019.

BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. Lisboa: SPIEM, 2002. Disponível em: http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2002.pdf. Acesso em 05 fev. 2019.

CHAGAS, E. M. P. F. Educação matemática na sala de aula: problemáticas e possíveis soluções, **Millenium**, Viseu, n. 29, p. 240-248, 2004. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/Millenium29/31.pdf. Acesso em 20 fev. 2018.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D.T. **Métodos de pesquisa**. Porto alegre: editora da UFRGS, 2009. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 20 jan. 2019.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATISTICA**. Pesquisa Nacional Por Amostra de Domicílios Contínua**. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. Disponível em: ftp://ftp.ibge.gov.br/Trabalho_e_Rendimento/Pesquisa_Nacional_por_Amostra_de_Domicilios_continua/Anual/Acesso_Internet_Televisao_e_Posse_Telefone_Movel_2016/Analise_dos_Resultados.pdf. Acesso em: 20 jan. 2019.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **13ª edição do sistema de avaliação da educação básica**. Brasília: INEP, 2015. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/inep-apresenta-resultados-do-saeb-prova-brasil-2015/21206. Acesso em: 07 fev. 2018.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Pisa 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes na avaliação**. São Paulo: Fundação Santillana, 2016. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados//2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf. Acesso em: 08 fev. 2018.

MORAN, J. M.; T.; MASETTO, M. T; BEHRENS, M. A**. Novas tecnologias e mediação pedagógica**.19. ed. Campinas: Editora Papirus, 2012.

PESCO, D. U.; ARNAUT, R. G. T. **Geometria básica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. rev. ampl. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

TODOS PELA EDUCAÇÃO. **De olho nas metas 2015-16**. São Paulo: TPE, 2015. Disponível em: https://www.todospelaeducacao.org.br//arquivos/bib//lioteca/olho_metas_2015_16_final.pdf. Acesso em: 07 fev. 2018.

APÊNDICE

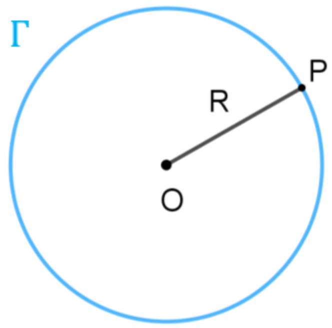
APÊNDICE A - ÂNGULOS EM UMA CIRCUNFERÊNCIA

Nesta parte do trabalho, são abordados os conteúdos matemáticos que embasam o método desenvolvido. Usamos como referência para este capítulo os trabalhos de Pesco e Arnault (2010).

A.1 Circunferência

Definição: Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo desse plano é uma constante positiva. A figura 17 representa uma circunferência Γ (lê-se gama) de centro em O e raio de medida R.

Figura 17 - Circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

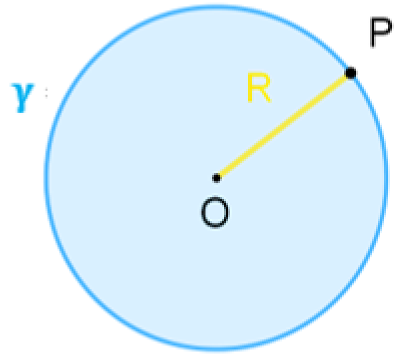
Em símbolos,

$$C = \{P \in \Gamma \mid \overline{OP} = R\}.$$

A.2 Círculo

Definição: círculo é a reunião de uma circunferência com o seu interior. A figura 18 representa um círculo γ de centro em O e raio de medida R.

Figura 18 - Círculo



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

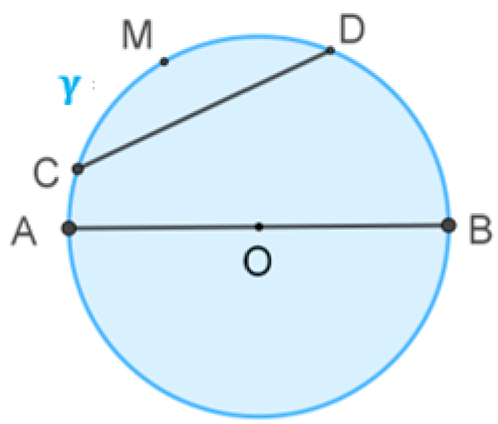
Em símbolos,

$$\gamma = \{P \in \gamma \mid \overline{OP} \leq R\}.$$

A.2.1 Elementos de um círculo

Seja o círculo γ de centro O da Figura 19.

Figura 19 - Elementos de um círculo



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

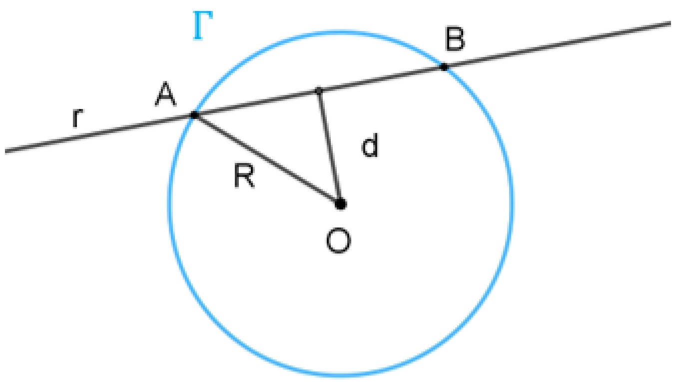
Sendo, $\overline{AO}$ é o raio; $\overline{AB}$ é o diâmetro; $\overline{CD}$ é a corda; $C\widehat{M}D$ é um arco. Tomando R como sendo a medida do raio, tem se $\overline{AO} = R$ e $\overline{AB} = 2R$.

A.3 Posições relativas de reta e circunferência

Seja r uma reta, Γ, uma circunferência de centro na origem O e raio R, e d a distância do centro O à reta r. A reta e a circunferência podem ocupar entre si, uma das três posições:

- A reta r é secante à circunferência Γ, isto é, a reta tem dois pontos distintos comuns com a circunferência nos pontos A e B. Note que $d < R$ e $r \cap \Gamma = \{A, B\}$.

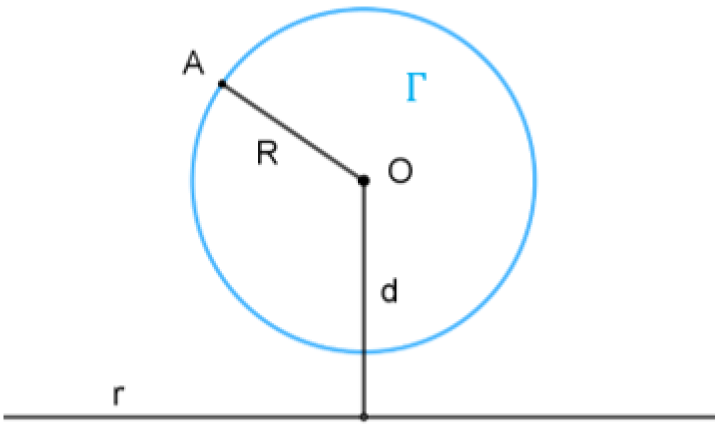
Figura 20 - Reta secante à circunferência.



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

- A reta r é exterior à circunferência Γ, isto é, r não tem ponto comum com Γ. Todos os pontos da reta r são exteriores à circunferência Γ, ou seja, $\Gamma \cap r = \emptyset$.

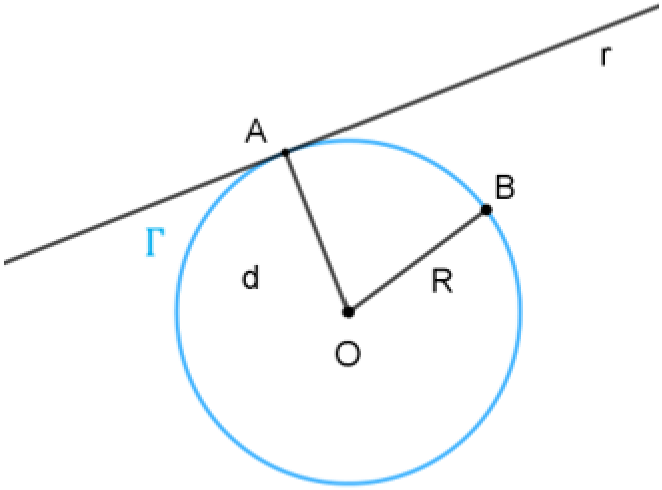
Figura 21 - Reta exterior a circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

- A reta r é tangente à circunferência Γ, isto é, a reta tem um só ponto comum com a circunferência, e os outros pontos da reta são exteriores à circunferência. Note que $d = R$ e $r \cap \Gamma = \{A\}$.

Figura 22 - Reta tangente à circunferência



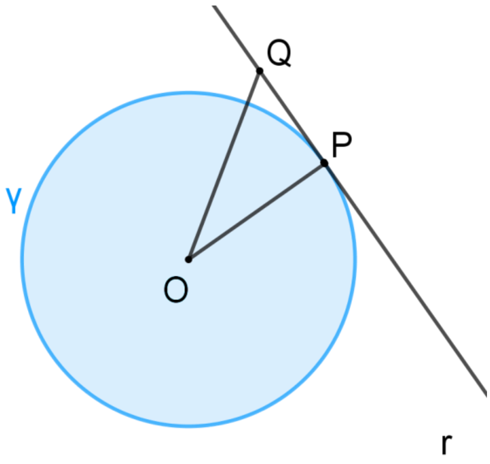
Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

Teorema: Sejam γ um círculo de centro O e P um ponto de γ. Se t é a reta que passa por P e é perpendicular a $\overline{OP}$, então a reta t é tangente a γ.

Demonstração:

Seja R o raio de γ. Se $Q \neq P$ é outro ponto de t, temos $\overline{QO} > \overline{PO} = R$, uma vez que $Q\hat{P}O = 90°$ é o maior ângulo do triângulo OPQ. Portanto, $Q \notin \gamma$ e, assim, P é o único ponto comum a t e a γ.

Figura 23 - Perpendicularidade da reta tangente à círculo

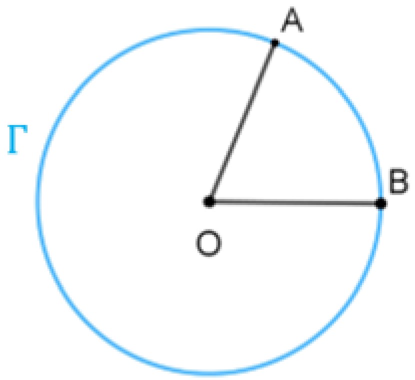


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

A.4 Ângulos e a circunferência

Ângulo central de uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. Na Figura 24, o ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo central da circunferência Γ de centro O. O arco AB situado no interior do ângulo $A\hat{O}B$ é denominado arco correspondente.

Figura 24 - Ângulo Central



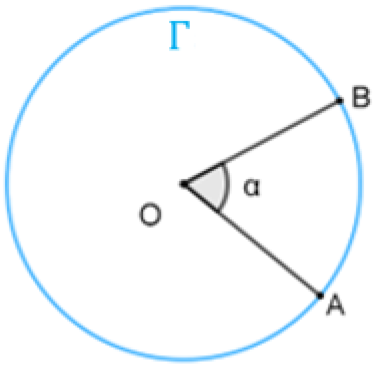
Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

Se tomarmos para unidade de arco (arco unitário) definido na circunferência por um ângulo central unitário (unidade de ângulo), tem se que a medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente.

Para simplificar a simbologia, representaremos um arco AB e a sua medida $m(AB)$ apenas por AB.

Na Figura 25 abaixo, $\alpha = AB$.

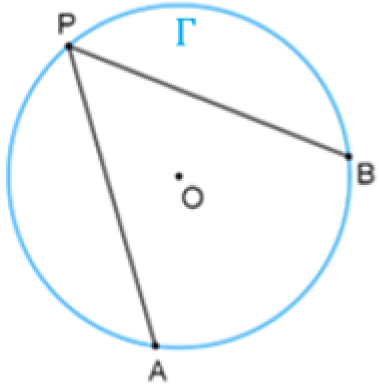
Figura 25 - Medida do ângulo central



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

Ângulo inscrito em uma circunferência é o ângulo que tem o vértice nessa circunferência e os lados secantes a mesma. Na figura 26, o ângulo $A\hat{P}B$ é inscrito na circunferência Γ. O arco AB situado no interior do ângulo $A\hat{P}B$ é denominado arco correspondente.

Figura 26 - Ângulo inscrito

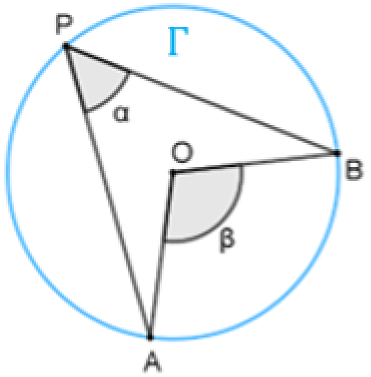


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

Teorema: Um ângulo inscrito mede a metade da medida do ângulo central correspondente.

Seja $A\hat{P}B$ o ângulo inscrito de medida α e $A\hat{O}B$ o ângulo central correspondente de medida β. Vamos demonstrar que $\alpha = \beta/2$ ou $\alpha = AB/2$.

Figura 27 - Medida do ângulo inscrito.

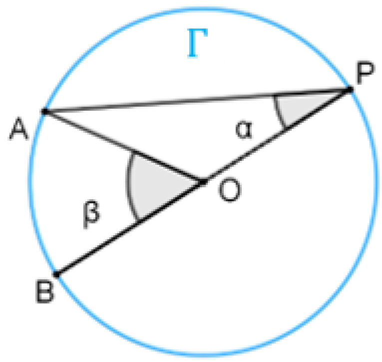


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

Três casos foram considerados:

1° caso: O centro da circunferência pertence a um dos lados do ângulo.

Figura 28 - Medida do ângulo inscrito - 1º caso

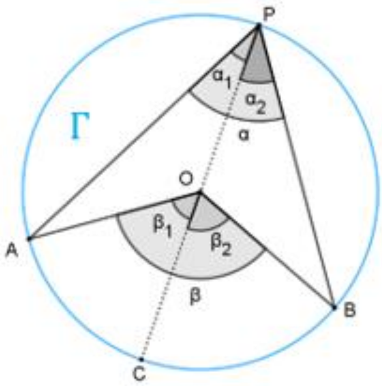


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

No primeiro caso, podemos perceber que $\overline{OP} = \overline{OA}$, uma vez que ambos são raio da circunferência Γ. Com efeito, por definição, o triângulo OPA é isósceles. Assim, como em um triângulo isósceles os ângulos da base são iguais, temos que $\hat{P} = \alpha = \hat{\mathrm{A}}$. Como β é ângulo externo no triângulo OAP, temos que $\beta = \alpha + \alpha = 2\alpha$, ou seja, $\alpha = \beta/2$ e como $\beta = AB,$ vem que $\alpha = AB/2$.

2° caso: O centro da circunferência é interior ao ângulo.

Figura 29 - Medida do ângulo inscrito - 2º caso

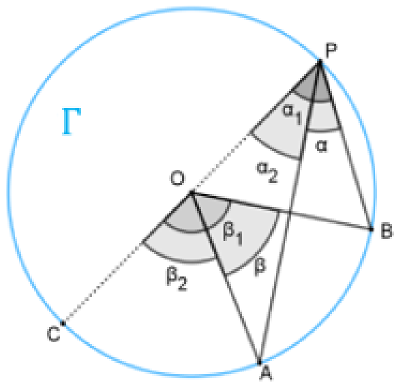


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

No segundo caso, observando que C é o ponto de interseção de $\overrightarrow{PO}$ com a circunferência Γ e sendo $A\hat{P}C = \alpha_1$, $A\hat{O}C = \beta_1$, $C\hat{P}B = \alpha_2$ e $C\hat{O}B = \beta_2$, temos pelo primeiro caso que $\beta_1 = 2\alpha_1$ e $\beta_2 = 2\alpha_2$, que implica, $\beta_1 + \beta_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$. Assim, $\beta = 2\alpha$. Logo, $\alpha = \beta/2$ e como $\beta = AB,$ vem que $\alpha = AB/2$.

3° caso: O centro da circunferência é externo ao ângulo.

Figura 30 - Medida do ângulo inscrito - 3º caso.



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

Neste caso, observando a Figura 15 vemos que C é o ponto de interseção de $\overrightarrow{PO}$ com a circunferência Γ e sendo: $B\hat{P}C = \alpha_1$, $B\hat{O}C = \beta_1$, $A\hat{P}C = \alpha_2$ e $A\hat{O}C = \beta_2$, temos pelo primeiro caso que $\beta_1 = 2\alpha_1$ e $\beta_2 = 2\alpha_2$, o que implica,

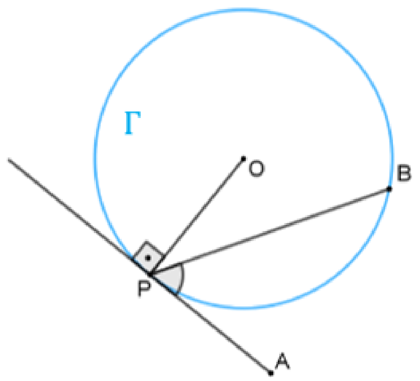
$$\beta_1 - \beta_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2)$$

e assim, $\beta = 2\alpha$. Logo, $\alpha = \beta/2$ e como $\beta = AB,$ vem que $\alpha = AB/2$. O que conclui a demonstração.

A.5 Ângulo de segmento

Definição: Ângulo de segmento é o ângulo que tem o vértice em uma circunferência, um lado secante e o outro tangente à circunferência. A Figura 31 mostra um ângulo de segmento $A\hat{P}B$.

Figura 31 - Ângulo de segmento



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

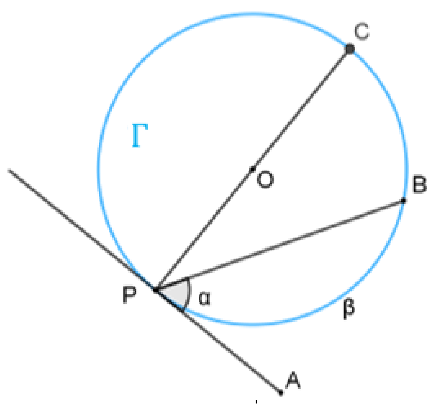
O arco PB no interior do ângulo $A\hat{P}B$ é denominado arco correspondente.

Teorema: A medida de um ângulo de segmento é igual à metade da medida do arco correspondente.

Demonstração:

Na Figura 32, seja α a medida do ângulo de segmento $A\hat{P}B$ e β a medida do arco correspondente PB, temos que mostrar que $\alpha = \beta/2$.

Figura 32 - Demonstração do teorema do ângulo de segmento



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

Vamos começar traçando o diâmetro $\overline{PC}$. Daí, temos que o ângulo $A\hat{P}C$ é reto, e como o arco PBC é uma semicircunferência, temos que

$$m\left(A\hat{P}C\right) = \frac{m(PC)}{2}.$$

Por outro lado,

$$m(BPC) = \frac{m(BC)}{2}.$$

Subtraindo as duas relações anteriores, temos que

$$m\left(A\hat{P}C\right) - m(BCP) = \frac{m(PC)}{2} - \frac{m(BC)}{2}.$$

Daí,

$$m\left(A\hat{P}B\right) = m(PB)$$

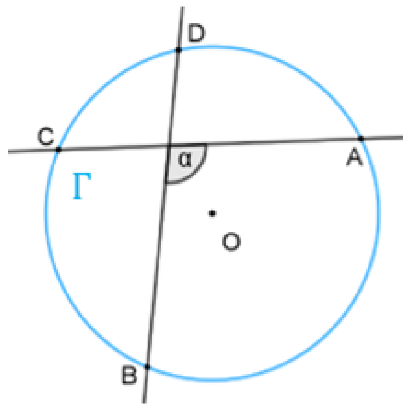
ou seja,

$$\alpha = \beta/2.$$

A.6 Ângulo excêntrico interno

Definição: Ângulo excêntrico interno é o ângulo formado por duas secantes que se interceptam no interior da circunferência, fora do centro. Na Figura 33, α é um ângulo excêntrico interno.

Figura 33 - Ângulo excêntrico interno



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

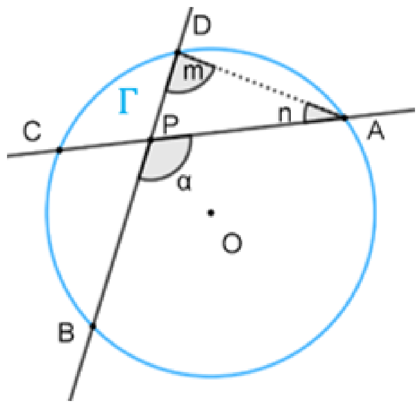
Teorema: A medida do ângulo excêntrico interno é igual à média aritmética do arco, formados pelas duas secantes internas ao ângulo e ao seu oposto pelo vértice, ou seja,

$$\alpha = \frac{AB + CD}{2}.$$

Demonstração:

Considere a Figura 34 a seguir,

Figura 34 - Demonstração do teorema do ângulo excêntrico interno



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

Seja α o ângulo excêntrico interno da circunferencia Γ. Trace o segmento AD e considere o triângulo PAD. Observe que α é ângulo externo do triângulo PAD. Considere agora os ângulos $P\widehat{D}A = m$ e $P\hat{A}D = n$, então,

$$\alpha = m + n \tag{1}$$

É possível observar também que m e n são ângulos inscritos, logo

$$m = \frac{AB}{2} \tag{2}$$

e

$$n = \frac{CD}{2} \tag{3}$$

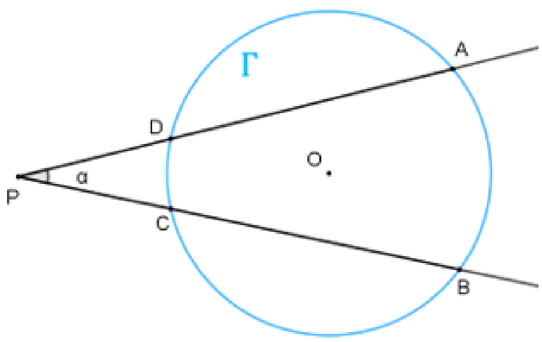
Substituindo as equações (2) e (3) na equação (1), vem:

$$\alpha = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AB + CD}{2}.$$

A.7 Ângulo excêntrico externo

Definição: Ângulo excêntrico externo é o ângulo formado por duas secantes que se interceptam no exterior da circunferência. Na Figura 35, α é um ângulo excêntrico externo.

Figura 35 - Ângulo excêntrico externo



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

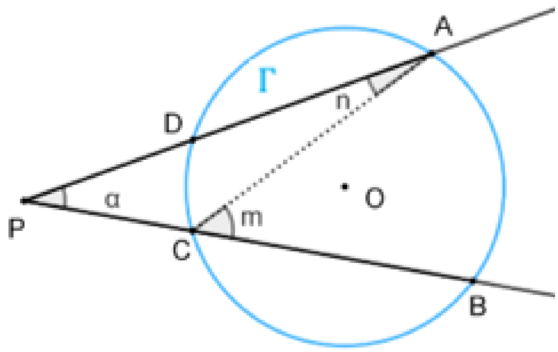
Teorema: A medida do ângulo excêntrico externo é igual a metade da diferença dos arcos formados pelas duas secantes internos ao ângulo, ou melhor,

$$\alpha = \frac{AB - CD}{2}.$$

Demonstração:

Considere a Figura 36 a seguir,

Figura 36 - Demonstração do teorema do ângulo excêntrico externo



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2019).

Seja α o ângulo excêntrico externo. Trace o segmento $\overline{AC}$ e considere o triângulo PAC. Considere agora os ângulos $B\hat{C}A = m$ e $D\hat{A}C = n$. Como m e n são ângulos inscritos e m é ângulo externo do triângulo PAC, temos

$$m = \alpha + n$$

ou seja,

$$\alpha = m - n \qquad (4)$$

Tem se que

$$m = \frac{AB}{2} \qquad (5)$$

e

$$n = \frac{CD}{2} \qquad (6)$$

Substituindo as equações (5) e (6) na equação (4) vem:

$$\alpha = \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} = \frac{AB - CD}{2}.$$

Observação: Esta relação continua válida nos casos em que um ou ambos os lados são tangentes ao círculo.

APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO DE OPINIÃO

Você gostaria que esta metodologia, investigação matemática com o auxílio de em e-book, fosse utilizada em mais aulas? Justifique sua resposta.

22 respostas

sim, pois nos dar autonomia no entendimento da matemática, além de estimular o raciocínio

Sim, quando os conhecimentos são colocados em prática, o aprendizado é muito mais rápido e descontraído.

Sim. O e-book é uma forma alternativa de ensino, fugindo da rotina de sempre. Leva o aluno a procurar o saber e fixá-lo, ao invés de esperar pelo professor.

Sim, pois melhora o entendimento dos alunos sobre determinada fórmula ou assunto abordado.

Sim, pois ela ajuda a nós alunos, a botar os conceitos aprendidos na sala em prática.

Sim, pois ajuda o aluno a indentificar melhor o problema

Sim, mostra na prática como o gráfico ia se comportar perante os cálculos.

Sim, assim teríamos mais de uma forma de analisar a situação. Tendo assim uma enorme variedade para melhor obtenção de resultados.

Sim, pois é mais uma forma de auxiliar nós alunos em nossas atividades de matemática.

Com ctz, as animações são bem legais, e se torna uma experiência um pouco mais dinâmina.

Sim. Achei prático (tirando o fato que o app é um pouco lento) e menos entediante.

Sim, é uma maneira diferente de se abordar um assunto e fica mais dinâmico. Prático e mais fácil de aprender.

Sim, pois com o auxílio do e-book se tornaria mais a compressão do assunto e fazer conjuraçoes e etc.

Sim, uma vez que com essa metodologia os alunos buscam compreender a situação proposta, ajudando no entendimento, antes do professor ensinar fórmulas que muitos apenas memorizam e não sabem sua aplicação.

Sim, acho bastante interessante essa metodologia, onde o aluno tem acesso a um assunto e pode fazer observações e investigá-lo.

Sim

Sim, isso se torna mais intuitivo com relação aos alunos, os livros didáticos as vezes não conseguem explicar com grande facilidade fenômenos matemáticos.

Sim, pois isso nos estimula a procura a resposta e a querer realmente entender como aquilo funciona

Sim, pois nos desprende do livro, e nos faz ter uma visão que vai além de fórmulas prontas, nos faz imaginar e buscar cada vez mais.

Sim, por mais que eu não seja interessada na área da matemática, parece uma forma menos cansativa e monótona de se estudar.

Sim, gostei desses desafios.

Sim. gostei dessa aula.