Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemáica em Rede Nacional

O USO DE QUESTÕES ROTINEIRAS E NÃO ROTINEIRAS DE COMBINATÓRIA E A ANÁLISE DOS REGISTROS DOS ESTUDANTES COMO INSTRUMENTOS DE REFLEXÃO PARA A PRÁTICA DOCENTE

Luana Lopes dos Santos Alves

Brasília, DF: Junho/2019

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemáica em Rede Nacional

O USO DE QUESTÕES ROTINEIRAS E NÃO ROTINEIRAS DE COMBINATÓRIA E A ANÁLISE DOS REGISTROS DOS ESTUDANTES COMO INSTRUMENTOS DE REFLEXÃO PARA A PRÁTICA DOCENTE

Luana Lopes dos Santos Alves

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Nacional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Regina da Silva Pina Neves

Brasília – DF: Junho/ 2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lu Lopes dos Santos Alves, Luana
O uso de questões rotineiras e não rotineiras de combinatória e a análise dos registros dos estudantes como instrumentos de reflexão para a prática docente / Luana Lopes dos Santos Alves; orientador Regina da Silva Pina Neves. -- Brasília, 2019.
105 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2019.

1. Questões Rotineiras e não Rotineiras de Combinatória. 2. Análise dos Registros dos Estudantes. 3. Avaliação em Matemática. 4. Um pouco da História da Análise Combinatória. I. da Silva Pina Neves, Regina , orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O uso de questões rotineiras e não-rotineiras de combinatória e a análise dos registros dos estudantes como instrumentos de reflexão para a prática docente.

por

Luana Lopes dos Santos Alves

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 28 de junho de 2019.

Comissão Examinadora:

Regina Pina

Prof. Dra. Regina da Silva Pina Neves (Orientadora)

Raquel C. Dörr

Prof. Dra. Raquel Carneiro Dörr – MAT/UnB

MSouza

Prof. Dra. Mônica Menezes de Souza

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por tornar meu desejo uma realidade, por não me deixar esmorecer e por me mostrar que com ele, eu posso ser tudo o que eu quiser.

À minha mãe, Aparecida, por me ensinar a lutar pelos meus objetivos e nunca desistir no primeiro obstáculo.

Ao meu pai, José Maria, por me passar o gosto pela matemática e me ensinar que a educação é um bem que ninguém pode tirar do outro.

Aos meus irmãos, sobrinhos e esposo por completarem minha vida e dar sentido a ela.

Aos amigos do curso, em especial Ludimila Cássia, pelas muitas horas que passamos juntas estudando.

À minha amiga querida, professora Renata Tavares, pelas muitas palavras de incentivo e pela revisão do texto.

À equipe do CEM 111 do Recanto das Emas – DF, minha segunda casa e aos meus queridos alunos.

À professora Regina, por aceitar o convite para me orientar, pelas palavras de incentivo e entusiasmo que me motivaram durante toda a pesquisa, além de apresentar-me um universo ainda tão pouco conhecido por mim: a pesquisa em Educação Matemática.

À CAPES pelo auxílio financeiro concedido durante o curso.

À Secretaria de Estado e Educação pela concessão do afastamento para estudos.

E, por fim, agradeço a todos os contratempos ocorridos durante o curso. Eles me tornaram mais forte!

Escolas que são asas não amam pássaros engaiolados.
O que elas amam são pássaros em voo.
Existem para dar aos pássaros coragem para voar.
Ensinar o voo, isso elas não podem fazer, porque o voo
já nasce dentro dos pássaros.
O voo não pode ser ensinado.
Só pode ser encorajado.

Rubem Alves

RESUMO

Amplia-se o interesse entre os pesquisadores brasileiros em Educação Matemática por compreender a conceituação matemática no Ensino Médio, tendo como instrumento de apoio o sistema oficial de avaliação, como, por exemplo, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Dessa forma, defendemos a utilização dos resultados de uma avaliação e análise dos registros dos escolares como suportes na busca pela reorientação do trabalho docente. O presente estudo tem como objetivo fazer uso da análise dos registros dos estudantes como base para identificar as principais estratégias e dificuldades apresentadas por eles, quando lidam com problemas de combinatória em questões rotineiras e não rotineiras, bem como utilizar a análise dos registros como instrumento de reflexão para a prática docente. As questões foram selecionadas em livros didáticos, usados por eles na escola e em edições anteriores do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de forma a abranger conceitos desde o princípio fundamental da contagem até agrupamentos. Num estudo inicial, participaram 246 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Distrito Federal, sendo autorizado o uso da calculadora e foi estimulada a preservação das tentativas de resolução. Os resultados mostraram que os estudantes foram mais bem-sucedidos na questão rotineira; tiveram baixa capacidade interpretativa na questão não rotineira; apresentaram capacidade interpretativa e de resolução não condizente com o final do Ensino Médio e foram evidenciadas estratégias de resolução que elucidam os processos de conceituação em curso e suas necessidades mediacionais. Um estudo posterior foi realizado com 91 estudantes do 3º ano do Ensino Médio, na mesma unidade de ensino, e que tinha por objetivo avaliar a mudança de postura dos estudantes quando estes lidavam com questões não rotineiras, fora de uma situação de prova e num ambiente colaborativo. Os resultados revelaram que, quando os estudantes são colocados num ambiente de interação e diálogo, eles apresentam respostas criativas para as questões não rotineiras e que, dependendo da forma como esse tipo de questão é apresentada, os resultados iniciais se alteram.

Palavras-chave: Análise dos registros. Análise Combinatória. Ensino Médio.

ABSTRACT

The interest among Brazilian researchers in Mathematics Education increased in understanding the mathematical conception in High School, having as a tool to support the official evaluation system, such as the Basic Education Assessment System (SAEB). Thus, we defend the use of the results of an evaluation and analysis of the student records as pillars in the search for the reorientation of the teaching work. The present study aims to make use of the analysis of student records as a basis to identify the main strategies and difficulties presented by them, when dealing with combinatorial problems in routine and non-routine questions, as well as, to use the analysis of the records as an instrument of reflection for the teaching practice. The questions were selected in textbooks, used by the students at school and in previous editions of the National High School Exam (ENEM), in order to cover concepts from the fundamental counting principle to groupings. In an initial study, 246 students from 3rd year of High School of a public school in the Federal District. The use of calculators was allowed and the maintenance of attempts at the answers was encouraged. The results showed that the students were more successful in the routine question; they had low interpretative capacity in the non-routine question; they presented an interpretative and resolution capacity which was not compatible with the end of High School; resolution strategies were presented to elucidate the ongoing conceptualization processes and their meditational needs. A subsequent study was carried out with 91 students from the 3rd year of High School, in the same teaching unit, whose objective was to evaluate the students' change of posture, when they dealt with non-routine questions, outside a test situation and in a collaborative environment. The results revealed that when students are placed in an environment of interaction and dialogue, they present creative responses to non-routine questions and that, depending on how this type of question is presented, the initial results are changed.

Keywords: Analysis of Records. Combinatorial Analysis. High school.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Problema 79 do Papiro Rhind 21

Figura 2 – O quadrado mágico Lo-Shu 22

Figura 3 – Interpretação do quadrado Lo-Shu 22

Figura 4 - *Traité du Triangle Arithmétique* 23

Figura 5 – Introdução da Análise Combinatória na versão 2001 33

Figura 6 – Introdução da Análise Combinatória na versão 2017 33

Figura 7 – Item 1 rotineiro apresentado aos estudantes. 60

Figura 8 – Resposta do estudante A1 – Estratégia 4. 60

Figura 9 – Resposta do estudante A2 – Estratégia 4 61

Figura 10 – Resposta do estudante A3 – Estratégia 4 61

Figura 11 – Resposta do estudante A4 – Estratégia 4 61

Figura 12 – Resposta do estudante A5 – Estratégia 8 62

Figura 13 – Item 5 não rotineiro apresentado aos estudantes. 62

Figura 14 – Resposta do estudante A6 – Estratégia 2. 63

Figura 15 – Resposta do estudante A7 – Estratégia 4 63

Figura 16 – Resposta do estudante A8 – Estratégia 8 64

Figura 17 – Item 2 rotineiro apresentado aos estudantes 65

Figura 18 – Resposta do estudante A9 – Estratégia 3 65

Figura 19 – Respostas de 5 estudantes – Estratégia 4 66

Figura 20 – Respostas de 2 estudantes – Estratégia 7 e 8 respectivamente 66

Figura 21 – Item 8 não rotineiro apresentado aos estudantes 66

Figura 22 – Resposta do estudante A10– Estratégia 3 67

Figura 23 – Resposta do estudante A11 – Estratégia 4 67

Figura 24 – Item 3 rotineiro apresentado aos estudantes 68

Figura 25 – Resposta do estudante A12 – Estratégia 3 69

Figura 26 – Resposta do estudante A13 – Estratégia 4 69

Figura 27 – Item 6 apresentado aos estudantes........70
Figura 28 – Resposta do estudante A14– Estratégia 4........70
Figura 29 – Resposta do estudante A15– Estratégia 4........71
Figura 30 – Item 4 rotineiro apresentado aos estudantes........71
Figura 31 – Resposta do estudante A16 – Estratégia 3........72
Figura 32 – Respostas de 4 estudantes – Estratégia 4........72
Figura 33 – Item 7 não rotineiro apresentado aos estudantes........72
Figura 34 – Respostas de 2 estudantes – Estratégia 9........73
Figura 35 – Item 1 não rotineiro apresentado aos estudantes........79
Figura 36 – Respostas dos estudantes 3G18M04 e 3G18F08 respectivamente – Estratégia 4........80
Figura 37 – Resposta do estudante 3F18F06 – Estratégia 5........81
Figura 38 – Resposta do estudante 3G18F16 – Estratégia 6........81
Figura 39 – Resposta do estudante 3H18M17– Estratégia 7........82
Figura 40 – Resposta do estudante 3H18F16 – Estratégia 9........82
Figura 41 – Item 2 não rotineiro apresentado aos estudantes........82
Figura 42 – Respostas dos estudante 3J18M07 e 3J18F19 respectivamente. Estratégia 4........83
Figura 43 – Resposta do estudante 3H18M17– Estratégia 5........84
Figura 44 – Resposta do estudante 3J18M21– Estratégia 6........84
Figura 45 – Resposta do estudante 3G18M21– Estratégia 8........85
Figura 46 – Esquema para representar a discussão de um grupo para o item 1 não rotineiro........87
Figura 47 – Esquema para representar a discussão de um grupo para o item 2 não rotineiro........88

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Sistematização dos estudos sobre Análise Combinatória 38

Quadro 2 – Dinâmica da aula de matemática tendo em vista a utilização da análise da produção escrita como estratégia de ensino 56

Quadro 3 – Exemplo de estratégias adotadas pelos estudantes na resolução dos itens 59

Quadro 4 – Resultados por estratégia do item 1 rotineiro 60

Quadro 5 – Resultados por estratégia do item 5 63

Quadro 6 – Resultados por estratégia do item 2 65

Quadro 7 – Resultados por estratégia do item 8 67

Quadro 8 – Resultados por categoria do item 3a 69

Quadro 9 – Resultados por categoria do item 3b 69

Quadro 10 – Resultados por categoria do item 6 70

Quadro 11 – Resultados por estratégia do item 4 72

Quadro 12 – Resultados por estratégias do item 7 73

Quadro 13 – Resultados por estratégia do item 1 não rotineiro 80

Quadro 14 – Resultados por estratégia do item 2 não rotineiro 83

Quadro 15 – Diálogo colhido do grupo para discussão do item 1 não rotineiro 87

Quadro 16 – Diálogo colhido do grupo para discussão do item 2 não rotineiro 89

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Sistematização dos resultados dos itens 01 e item 05 64

Gráfico 2 – Sistematização dos resultados do item 02 e do item 08 68

Gráfico 3 – Sistematização dos itens 03- a, 03- b e item 06 71

Gráfico 4 – Sistematização dos resultados dos itens 04 e 07 73

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 14
1 UM POUCO DA HISTÓRIA E CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA 20
1.1 O PAPIRO RHIND 21
1.2 O QUADRADO MÁGICO LO-SHU 22
1.3 O TRIÂNGULO ARITMÉTICO 23
1.4 COMBINATÓRIA, PROBABILIDADE E A LINGUAGEM MODERNA 24
1.5 CONCEITOS FUNDAMENTAIS SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA 25
1.5.1 Princípio Fundamental da Contagem 25
1.5.2 Fatorial 26
1.5.3 Agrupamentos simples 26
1.5.3.1 Permutações 26
1.5.3.2 Arranjos 26
1.5.3.3 Combinações 27
2 A ANÁLISE COMBINATÓRIA SOB O OLHAR DOS DOCUMENTOS OFICIAIS E O LIVRO DIDÁTICO 29
2.1 OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS 29
2.2 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR E O CONTEÚDO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA 30
2.3 O CURRÍCULO EM MOVIMENTO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DA SEEDF E A ANÁLISE COMBINATÓRIA 30
2.4 A ANÁLISE COMBINATÓRIA SOBRE O OLHAR DO LIVRO DIDÁTICO ADOTADO 31
2.5 NOSSAS PERCEPÇÕES 35
3 O QUE VEM SENDO ESTUDADO SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA? 37
3.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS TRABALHOS 48
4 AVALIAÇÃO E ANÁLISE DOS REGISTROS 50
4.1 O ATO DE AVALIAR 50
4.2 POR QUE ANALISAR O REGISTRO DOS ESTUDANTES? 52
5 O MÉTODO 58
5.1 ANALISANDO OS REGISTROS 60
5.1.1 Análise 1: item 01 versus item 05 60
5.1.2 Análise 2: item 02 versus item 08 65
5.1.3 Análise 3: item 03 versus item 06 68
5.1.4 Análise 4: item 04 versus item 07 71
5.2 REFLEXÕES PARA O PROFESSOR 74
6 O ITEM NÃO ROTINEIRO NUM CONTEXTO DIFERENTE 78
6.1 SEGUNDA ETAPA DA PESQUISA 78
6.2 A ANÁLISE DOS REGISTROS NUM AMBIENTE COLABORATIVO 85
CONCLUSÃO 92
REFERÊNCIAS 96
APÊNDICE A – Avaliação bimestral contendo questões rotineiras e não rotineiras 102
APÊNDICE B – Atividade final (questões não rotineiras) 105

INTRODUÇÃO

“Corrigir as provas, devolver para os estudantes, iniciar o próximo conteúdo”.

O ritual descrito acima retrata exatamente como tem sido a rotina da maior parte dos professores. Mas, afinal, que proveito esta prática pode trazer aos estudantes e professores? Tendo em vista que a avaliação escrita é um dos instrumentos mais utilizados para avaliar os estudantes, devemos pensar como este instrumento pode trabalhar a nosso favor. O modelo exposto acima visa priorizar muito mais o acúmulo de conhecimento e sua memorização que a reflexão acerca de sua aplicabilidade.

Logo que iniciei minha carreira como professora, percebi que os questionamentos sobre a falta de aplicabilidade dos conteúdos de matemática estudados eram constantes por parte dos estudantes. Eles sempre questionam sobre o porquê de estudarem determinados conteúdos que futuramente não terão aproveitamento em seu dia a dia. Ou seja, os estudantes cobram a todo instante a utilidade dos conteúdos. E com razão!

Todos esses questionamentos começaram a me provocar logo no início da carreira. E o interessante era que eu, enquanto aluna do Ensino Fundamental e Ensino Médio, não era tão questionadora do porquê de estudar determinados assuntos. Acredito que em minha vida escolar fui uma estudante pouco estimulada a entender a importância dos conteúdos e sua aplicabilidade na vida cotidiana; para mim o que importava era obter boas notas ao final do bimestre.

Concluí o curso de licenciatura em Matemática pela Universidade Católica de Brasília – UCB em 2008. Desde 2009, sou professora de Matemática da Secretaria de Estado e Educação do Distrito Federal – SEEDF, atualmente, leciono para turmas de 1º ano do Ensino Médio. Desde o início da minha graduação, fui instigada por várias disciplinas que cursei, que eram voltadas para a didática do professor, a sempre rever minha postura em sala de aula, a todo o momento questionar minha prática e a não me acomodar com o marasmo que a rotina de um professor pode acabar trazendo.

Durante esse período, pude acompanhar várias mudanças no meio educacional, mudanças essas que, ainda que fossem tímidas, já apontavam uma nova realidade para a sala de aula. Acompanhei, por exemplo, a força e a visibilidade que o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM – acabou conquistando. Percebi que as questões cobradas, de certo modo, estavam cada vez mais interessantes, pois além de exigirem o conteúdo do estudante, traziam em si várias informações úteis, e não só isso, tais questões apresentavam uma ideia de aproximação com a realidade e isso acabou me fascinando.

Conforme fui adquirindo experiência como professora, descobri que, enquanto professores, acabamos fazendo uma "seleção" dos conteúdos que consideramos mais importantes para os estudantes. Não que desmereçamos os outros conteúdos ou julguemos uns mais importantes que outros. A questão é: estar em sala de aula, na rede pública, requer do professor, a todo o momento sua reinvenção, por atender diversos públicos e, com isso, receber todo tipo de dificuldade de aprendizagem. Depara-se com o velho entrave: "este estudante não sabe o básico, como poderei avançar?". Consequentemente, o professor se vê obrigado a revisar os conteúdos que deveriam ter sido absorvidos pelos estudantes anteriormente. A sensação é de não avançar no conhecimento.

A matemática sempre foi estereotipada como "o terror dos estudantes". Sou extremamente incomodada com isso. Esse desconforto me põe sempre a pensar muito sobre a forma de iniciar um determinado tema com os meus estudantes. Sei que tem momentos que a matemática requer de nós aquele período de prática, de concentração, cálculos extensos e, mesmo assim, não perde sua beleza.

Muitas são as discussões acerca da necessidade de abandonar a prática de aulas meramente tradicionais, que acabam reforçando esse estereótipo. D'Ambrósi[1] (2014) pondera a necessidades de desfazer os padrões conservadores relatando que:

> [...] Há algum tempo, utilizo a metáfora "gaiolas epistemológicas" para definir conhecimento tradicional, equivalente às *torres de marfim*[2]. O conhecimento tradicional é como uma gaiola e seus cultores são como pássaros vivendo nela. Alimentam-se do que está na gaiola, voam apenas no espaço dela, só veem e sentem o que as grades permitem, comunicam-se numa linguagem conhecida por eles, procriam e repetem-se. Não podem saber de que cor a gaiola é pintada por fora.[...] Sair da gaiola – da mesma forma que sair das torres de marfim – não é fácil. A aprovação dos pares oferece vários benefícios, como segurança, promoções e salários, assim como a gaiola oferece aos pássaros segurança, abrigo, alimentação e convívio. Mas o preço por esses benefícios é alto: as grades impedem ver a realidade ampla. (D'AMBRÓSIO, 2014, p.160)

Sobre a necessidade de enxergar a matemática em outras ciências, D'Ambrósio (2014) também nos alerta que a modernidade acabou trazendo o distanciamento entre a ciência e a matemática:

---

[1] Doutor em Matemática, teórico em Educação Matemática e um dos pioneiros do estudo da Etnomatemática.
[2] Termo utilizado pelo matemático russo/francês Gromov detentor do prêmio Abel, numa entrevista em 2010 para fazer uma alusão a um lugar seguro e confortável.

> Nós matemáticos, muitas vezes temos pouca ideia sobre o que está se passando em ciência e engenharia, enquanto os cientistas experimentais e engenheiros geralmente não se apercebem das oportunidades oferecidas pelo progresso da matemática pura. Este perigoso desequilíbrio deve ser restaurado trazendo mais ciências para a educação dos matemáticos e expondo futuros cientistas e engenheiros à matemática central. Isto requer novos currículos e um grande esforço por parte dos matemáticos para trazer as técnicas e ideias matemáticas fundamentais (principalmente aquelas desenvolvidas nas últimas décadas) a uma audiência maior. Necessitamos, para isso, de uma nova geração de matemáticos profissionais capazes de trafegar entre matemática pura e ciência aplicada. A fertilização cruzada de ideias é crucial para a saúde tanto das ciências quanto da matemática. (GROMOV, p. 847, apud D'AMBRÓSIO, 2014, p. 160)

Nosso desafio é justamente este, fazer a ponte entre a matemática e as outras ciências, deixar de lado as "gaiolas" que nos aprisionam ao tradicionalismo. Conhecer mais sobre outras ciências é de fundamental importância para que possamos apresentar aos nossos estudantes uma matemática que se comunica com a realidade, com outras ciências, ou seja, uma matemática que amplia os horizontes e apresenta novas possibilidades. Não o contrário, uma matemática tradicional, que não valoriza os métodos de aprendizagem, que se baseia pura e simplesmente no certo ou errado, ou seja, a matemática deve ser articulada com outros domínios e não deve ser apresentada de forma isolada, ela precisa ser vista como atividade humana.

Há quem diga que essas discussões são inúteis e no mínimo utópicas. Muitas vezes, elas são motivo de chacota entre os colegas nas coordenações pedagógicas, quando o assunto principal são as avaliações contextualizadas. Muitos podem até pensar que jamais conseguiremos atingir o nível da teoria e da realidade, entretanto alguém já parou para pensar por que os matemáticos antigos, mais famosos, eram também, físicos, filósofos e muito mais? Por que hoje em dia um professor de matemática é só um professor de Matemática? Por que nós, os professores, nem sempre sabemos o motivo de ensinarmos determinados assuntos? Aquela resposta habitual é dada: "porque cai no vestibular", em outras palavras, o conteúdo ministrado é só para uso na resolução de provas.

Essa discussão perfaz um caminho muito mais amplo, é uma questão curricular, pois exige mudanças nos estilos de avaliações de larga escala e o tipo de conhecimento cobrado em vestibulares precisa ser discutido. E, ainda, no momento em que as disciplinas são trabalhadas de forma separadas, instaura-se o caos. Em algum momento, no meio das reformas educacionais, o modelo solitário de trabalhar as disciplinas foi proposto, aparentando certa comodidade. Nenhum professor sabe o que se passa na sala de aula do outro professor.

Todas essas discussões apontam também que mudanças relacionadas à nossa didática são indispensáveis. Desde quando me pus a pensar sobre o que eu poderia escrever, tive a certeza de que gostaria de escrever sobre algo realmente útil para, de alguma forma, contribuir positivamente para os meus colegas de profissão, seja em forma de uma reflexão, provocação ou relato de minhas experiências.

As reflexões acerca do cotidiano escolar e a busca por novas práticas que sirvam efetivamente para o desenvolvimento dos estudantes e do professor precisam ser constantes. Dentre os vários caminhos possíveis que podem contribuir para essa evolução, Nagy-Silva (2005) destaca a **análise dos registros ou análise da produção escrita** dos estudantes como uma grande aliada neste processo. Para a autora, a atitude de analisar, constantemente, a produção escrita colabora para que o docente possa redirecionar o planejamento, o desenvolvimento e a avaliar sua prática pedagógica. Ao aprofundar as pesquisas sobre o tema, descobri que o assunto tratado nesse trabalho é, na verdade, o que eu já fazia como professora, porém numa percepção menos apurada. Eu não tinha conhecimento do quanto analisar a produção dos estudantes era algo tão relevante, tão útil e que transmitia informações tão fidedignas.

Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é fazer uso da análise dos registros dos estudantes como base para identificar as principais estratégias e dificuldades apresentadas por eles, quando lidam com problemas de combinatória em questões rotineiras e não rotineiras. Ao analisar as produções, percebe-se que é impossível não enxergar as influências didáticas nas respostas apresentadas; por essa razão, são realizadas reflexões acerca da postura do professor.

Para nossa pesquisa, escolhemos o tema **Análise Combinatória**. Isso porque, assim como Oliveira e Lins (2016), consideramos que o assunto seja de extrema importância para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da interpretação, da compreensão e da elaboração de estratégias para resolver problemas.

O primeiro capítulo traz uma apresentação dos principais fatores históricos que contribuíram para o desenvolvimento da Análise Combinatória com algumas demonstrações. Ao fazer nosso estudo, consideramos relevante a abordagem histórica do conteúdo, pois percebemos que quando o professor tem algum conhecimento histórico acerca desse tópico, ele amplia a capacidade de tratá-lo didaticamente e auxilia o estudante a perceber sua importância e evolução. O capítulo tem a intenção de instigar no professor para que busque um aprofundamento do tema.

O segundo capítulo apresenta um estudo sobre os documentos oficiais que versam sobre o ensino da Análise Combinatória, em especial os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo em Movimento do Distrito Federal. Nesse capítulo, estamos interessados em apresentar as orientações presentes nesses documentos, a fim de compreender como estas recomendações podem, de fato, contribuir com o ensino e a aprendizagem deste conteúdo. Em contraste com os documentos oficiais, apresentamos uma breve análise do livro didático adotado pela escola sede da pesquisa. Ao final, trazemos algumas reflexões.

O terceiro capítulo objetiva oferecer informações atualizadas a respeito do que vem sendo discutido e estudado sobre o ensino e a aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória. Para tanto, fizemos uma revisão bibliográfica dos últimos cinco anos. Os estudos foram organizados em um quadro, destacando os objetivos, a metodologia, os principais resultados e as possíveis intervenções que teriam sido sugeridas após os pesquisadores se depararem com problemas no processo.

A fundamentação teórica é tratada no quarto capítulo. Nele, ressalta-se a importância a ser dada para o ato de avaliar e de analisar a produção escrita dos estudantes. Pretendemos, com esse capítulo, provocar a reflexão entre os professores e a comunidade escolar sobre as possibilidades de adoção da avaliação como prática de investigação e a análise de que tal prática pode promover o desenvolvimento de estudantes e professores.

O quinto capítulo apresenta os procedimentos e as metodologias adotadas no trabalho. Com o intuito de identificar as principais preferências nas escolhas dos métodos de resolução quando estes lidam com itens de combinatória em questões rotineiras e não rotineiras numa situação de prova, apresentamos alguns recortes dos registros dos estudantes, assim como sua análise. As considerações apontam as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes e também algumas sugestões para prováveis intervenções.

O sexto e último capítulo apresentam-se em forma de complementos do quinto capítulo. Após a detecção das dificuldades apresentadas pelos estudantes numa situação de prova, continuamos o estudo a título de investigação sobre o que poderia alterar, caso as estratégias mudassem e como os estudantes lidam com itens não rotineiros fora de uma situação de prova. A atividade desenvolveu-se num ambiente colaborativo, no qual a interação e o diálogo foram valorizados.

Espera-se que o material possa contribuir para a formação continuada do professor de matemática. Por meio dele, almeja-se que o professor amplie sua visão sobre a avaliação e passe a adotá-la como campo de investigação, entendendo quais as várias informações que os registros dos estudantes trazem a respeito deles e do professor.

CAPÍTULO 1

UM POUCO DA HISTÓRIA E CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A abordagem histórica dos conteúdos em sala de aula é importante e deve ser destacada, pois, de acordo com Silva et al. (2016), ao utilizarmos a contextualização histórica, aumenta-se a motivação para a aprendizagem matemática por parte dos estudantes, facilitando também a compreensão de como os conceitos se desenvolveram ao longo do tempo, além de suscitar oportunidades para a investigação em matemática. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2000, p. 54) já afirmavam que: "[...] a importância histórica das Ciências e da Matemática, contudo, tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos".

O professor não precisa ser um perito em História da Matemática, mas acreditamos que, ao relatar alguns fatos históricos sobre determinados conteúdos, ele provocará em seus estudantes o espírito investigativo e uma maior compreensão dos elementos históricos que se fizeram indispensáveis para o desenvolvimento dos conteúdos. Isso não quer dizer que seja preciso que o professor desenvolva a abordagem histórica em todas as aulas, a incorporação pode ser feita de maneira sutil; portanto:

> Não é necessário desenvolver um currículo, linear e organizado, de história da matemática. Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. [...] o bom seria que o professor tivesse uma noção da história da matemática e pudesse fazer um estudo mais sistemático e por isso recomenda-se aos professores em serviço que procurem essa formação. (D'AMBROSIO, 1996, p.13)

Sendo assim, destinamos este capítulo para destacarmos aspectos históricos relacionados à Análise Combinatória. Acreditamos que ele inspirará professores que desejarem o aprofundamento do assunto. Baseados em revisão bibliográfica, abordamos os fatos mais relevantes e para os quais existe acordo entre os autores citados, não seguindo necessariamente uma ordem cronológica. A seguir, apresentamos a formalização de alguns conceitos básicos de Análise Combinatória com algumas demonstrações.

1.1 O PAPIRO RHIND

O papiro Rhind (1650 a. C.) é um texto matemático em forma de manual prático que contém 85 problemas, foi copiado pelo escriba Ahmes para a escrita hierática (maneira de simplificar os hieróglifos). Segundo Eves (2004), o papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga. Queremos dar destaque ao problema de número 79, cuja interpretação não é tão precisa, no entanto, é possível observar vestígios do Princípio Multiplicativo e do Princípio Aditivo, ambos considerados os fundamentos da Análise Combinatória.

Figura 1 – Problema 79 do Papiro Rhind

Bens	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2 401
Hecates de grãos	16 807
	19 607

Fonte: EVES, 2004, p.75

Nesse conjunto de dados, é possível reconhecer as cinco primeiras potências de 7 e, ao final, a soma destas potências. Não se sabe ao certo quais seriam o significado das palavras casas, gatos, etc. Eves (2004) relata que, em 1907, o historiador chamado Moritz Cantor deu uma interpretação bastante plausível para elas. Ele conseguiu enxergar no problema um precursor de um problema popular da Idade Média[3]. Uma versão popular e posterior do mesmo problema é encontrada nos versos infantis ingleses: “Quando eu ia a Santo Ivo; encontrei um homem com sete mulheres; cada mulher tinha sete sacos; cada saco tinha sete gatos; cada gato tinha sete gatinhos; gatinhos, gatos, sacos e mulheres. Quantos iam para Santo Ivo?” (EVES, 2004, p.76).

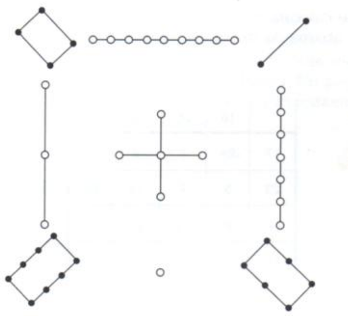
Retomando ao problema 79 do Papiro Rhind, Cantor considerou que ele poderia ser reformulado da seguinte maneira: “Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; Cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hectares de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hectares de grãos, quanto havia disso tudo?” (EVES, 2004. p.76).

[3] Há sete senhoras idosas na estrada de Roma; cada senhora tem sete mulas; cada mula transporta 7 sacos, cada saco contém 7 pães, com cada pão há 7 facas, para cada faca, 7 bainhas, entre mulheres, mulas, sacos, pães, facas e bainhas. Quantos estão na estrada de Roma? (EVES, 2004, p.76).

1.2 O QUADRADO MÁGICO LO-SHU

Para Eves (2004), ao abordarmos a matemática chinesa antiga, não podemos deixar de citar o quadrado mágico[4]Lo-Shu, que aparece no *I-King* ou *Livro das Permutações.* Conta a lenda que a primeira pessoa a vê-lo foi o imperador Yu, por volta de 2200 a.C. quando este, estando à margem do rio Amarelo, viu o quadrado decorando a carapaça de uma tartaruga divina. O diagrama numérico Lo-Shu aparece como na Figura 2, a seguir:

Figura 2 – O quadrado mágico Lo-Shu



Fonte: EVES (2004, p. 269).

Os numerais estão expressos por nós em cordas, os nós pretos representam números pares e os nós brancos números ímpares. O que podemos associar ao quadrado apresentado na Figura 3:

Figura 3 – Interpretação do quadrado Lo-Shu

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: BASTOS (2016, p.53).

Observamos que "quando fixamos condições de contagem dos arranjos, estamos considerando situações que estudamos em Análise Combinatória" (BASTOS, 2016, p. 53). Os quadrados mágicos não se limitaram apenas à China, pois chegaram ao Japão, ao Oriente

[4] Chamamos de quadrados mágicos (de ordem n) um arranjo de números $1, 2, 3, \dots, n^2$ em um quadrado $n \times n$ de forma que cada linha, coluna e diagonal deste quadrado possua a mesma soma. (Vazquez, Noguti, 2004, p. 2)

Médio, à Arábia, à Índia, à Europa. Na maioria das vezes, isso ocorreu em questões ligadas ao misticismo. Segundo Vazquez e Noguti (2014), alguns quadrados mágicos maiores que o Lo-Shu foram encontrados por um grupo de estudantes árabes, que apresentaram os quadrados de ordem 4, 5 e 6. O grupo ainda afirmou existir de ordem 7, 8, 9.

1.3 O TRIÂNGULO ARITMÉTICO

De acordo com Chaquiam (2017), Niccolo Fontana Tartaglia (1499-1557), matemático italiano, deu sua contribuição para a Análise Combinatória com o chamado Triângulo de Tartaglia. Mais tarde, Blaise Pascal (1623-1662) também deu sua contribuição para a Análise Combinatória, aperfeiçoando o Triângulo de Tartaglia, que ficou conhecido como *Triangulo de Pascal*. Chaquiam (2017, p. 142) relata que "embora haja indícios históricos de que os chineses teriam conhecimento desta técnica, foi Pascal quem aprimorou as propriedades do Triângulo". Ainda de acordo com Chaquiam (2017), o nome *Triângulo de Pascal* é a forma mais conhecida no Brasil e em outros países.

Com base em Eves (2004), o *Traité du Triangle Arithmétique* de Pascal foi escrito em 1653 e foi publicado somente em 1665. Na figura 4, podemos observar como Pascal construía seu “Triângulo Aritmético”.

Figura 4 - *Traité du Triangle Arithmétique*

$$35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1.$$

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
.	.	.	.	.	.	...

Fonte: EVES (2004, p. 364).

Embora a construção do triângulo aritmético no tempo de Pascal seja um pouco diferente da que usamos hoje, observe que as diagonais são os coeficientes da expansão binomial $(a+b)^n$ com a, b e $\in \mathbb{N}$, assim, por exemplo, “a quinta diagonal que possui os números, 1, 4, 6, 4, 1 são os coeficientes sucessivos da expansão de $(a+b)^4$ " (EVES, 2004, p. 364).

A reunião dos relatos históricos citados é fruto da necessidade que os homens tiveram de contar. No entanto, a Análise Combinatória se ocupou, desde a sua origem, com a resolução de problemas voltados aos jogos de azar. Da necessidade que os homens tiveram em calcular maneiras seguras de ganhar certos jogos de azar é que nasceu a Análise Combinatória (OLIVERIRA; LINS, 2016). O próximo tópico sintetiza bem este processo e também o desenvolvimento da linguagem moderna.

1.4 COMBINATÓRIA, PROBABILIDADE E A LINGUAGEM MODERNA

Segundo Chaquiam (2017), o terreno fértil para o desenvolvimento de novas técnicas de Contagem foi a Teoria das Probabilidades. Assim, para resolver problemas de probabilidade no qual era necessário determinar o número de combinações possíveis de n objetos tomados r a r, Pascal usava corretamente o que na linguagem moderna[5] conhecemos por:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

A contribuição de Pierre de Fermat (1601-1665) para a análise combinatória ficou conhecida por meio das correspondências que ele trocava com Pascal sobre o *problema dos pontos*[6], sobre o qual se acredita que Pacioli (1445-1517) foi um dos primeiros a introduzir o problema num trabalho matemático. O *problema dos pontos* também foi discutido por Cardano[7] e Tartaglia.

Pascal conheceu o *problema dos pontos* por meio de Chevalier Méré (1607- 1684) quando este o propôs para que fosse examinado. Pascal, demonstrando muito interesse pelo problema, também o levou ao conhecimento de Fermat. Nas correspondências, fica claro que tanto Fermat quanto Pascal o resolveram corretamente, porém de maneiras diferentes:

---

[5] A notação $n!$, chamado de fatorial de n, foi introduzida em 1808 por Christian Kramp (1760-1820) de Strasburgo, que o escolheu para contornar dificuldades gráficas verificadas com um símbolo previamente usado. (EVES, 2004, p. 365)

[6] O problema enunciava o seguinte: Suponha que duas pessoas estão participando de um jogo, com lançamento de dados, em que ambos têm a mesma chance de vencer, e o vencedor é quem atingir uma determinada quantidade de pontos. Porém, o jogo é interrompido quando um dos jogadores está na liderança. Qual a maneira mais justa de dividir o dinheiro apostado?

[7] Girolamo Cardano (1501-1576) ao participar de jogos de azar, acabou despertando interesse em estudar as possibilidades de vencer suas apostas. Dedicou-se à matemática, deixando vários livros escritos dentre eles, o *Ludo Aleae* (sobre jogos de azar) o livro é um breve manual do jogador que envolvia as primeiras noções de probabilidade (BASTOS, 2016).

"Fermat aperfeiçoou a regra geral de Cardano, baseando o cálculo de probabilidades no cálculo combinatório e Pascal ligou o estudo das probabilidades ao triângulo aritmético" (BOYER, 179 apud CHAQUIAM, 2017, p.142).

Em combinatória, Leonhard Euler (1707-1783) "contribuiu com a notação $\left[\frac{n}{p}\right]$ para representar a expressão $\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$ equivalente a $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ porém, a notação $\left[\frac{n}{p}\right]$, modernamente é $\binom{n}{p}$ (leia-se: n sobre p)" (BASTOS, 2016, p.64).

1.5 Conceitos fundamentais sobre Análise Combinatória

Pretendemos conceituar Análise Combinatória de modo adequado ao Ensino Médio. Assim, a nosso ver, as duas definições destacadas a seguir são bem pertinentes:

> A Análise Combinatória é a parte da Matemática que desenvolve técnicas e métodos de contagem. (IEZZI et al. 2017, p.226)
> A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitem contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições. (HAZZAN, 2004, p.1 apud BASTOS, 2016, p.35)

Consideramos de extrema importância que os professores conheçam o desenvolvimento dos conceitos básicos e das fórmulas apresentadas para esse conteúdo. Entendemos que quando eles não têm conhecimento da construção dos algoritmos, a dificuldade acaba sendo transmitida para o estudante também, fazendo com que discentes absorvam o conteúdo de maneira superficial e resumindo-o apenas a "tentar descobrir" qual seria a fórmula correta para cada tipo de problema. Nessa perspectiva, reunimos algumas definições, exemplos e demonstrações que complementam o estudo deste conteúdo, tendo como parâmetro as seguintes publicações: Morgado et al. (2006) e Iezzi et al. (2017).

1.5.1 Princípio Fundamental da Contagem

Considerando D_1, D_2, X, Y números naturais, o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), também chamado princípio multiplicativo diz que: "Se há X modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há Y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $X \cdot Y$" (MORGADO et al., 2006, p. 85).

1.5.2 Fatorial

Segundo Iezzi et al. (2017), o fatorial de um número natural é dado por $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ com $n \geq 2$, se $n = 0$, então $0! = 1$, se $n = 1$, então $1! = 1$.

1.5.3 Agrupamentos simples

Para Iezzi et al. (2017), o PFC é a principal técnica para a resolução de problemas de contagem. No entanto, por meio do PFC é possível desenvolver métodos de contagem para cada tipo de agrupamento. Nosso estudo está voltado para os agrupamentos simples: permutações, arranjos e combinações.

1.5.3.1 Permutações

Para Iezzi et al. (2017, p. 236) a permutação simples pode ser enunciada como segue: "Dados n elementos distintos, chama-se **permutação simples** ou simplesmente **permutação** todo **agrupamento ordenado** (sequência) formado por n elementos".

As aplicações de princípios básicos de análise combinatória aparecem com muita frequência. Seguimos com um exemplo de aplicação das permutações simples.

> *De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?*
> A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n modos; a escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de $n-1$ modos, a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de $n-2$ modos, etc ...; a escolha do objeto que ocupará o último lugar pode ser feita de 1 modo. A resposta é $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ modos. (MORGADO et al., 2006, p. 94)

1.5.3.2 Arranjos

Quanto aos arranjos, temos que: "Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo desses n elementos, tomados k a k (com $k \leq n$), qualquer agrupamento ordenado de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes" (IEZZI et al., 2017, p. 239). Utilizando o PFC, faremos o cálculo de arranjos de n elementos tomados k a k, indicado por $A_{n,k}$. Note que:

O 1º elemento será escolhido de n maneiras possíveis.

O 2º elemento da sequência será escolhido de $(n-1)$ maneiras distintas, já que fizemos a escolha anterior e não pode haver repetição de elementos.

Com as duas primeiras escolhas feitas, há $(n-2)$ maneiras diferentes para escolher o 3º elemento da sequência, lembrando que não pode haver repetição.

Utilizando o mesmo raciocínio, para a escolha dos próximos elementos, o k-ésimo elemento, a partir das $(k-1)$ escolhas anteriores será escolhido de $n-(k-1)=(n-k+1)$ maneiras.

Logo, pelo PFC, a quantidade de arranjos possíveis é:

$$A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \tag{1}$$

A fim de obter uma equação equivalente a (1), usando fatorial, multiplicando e dividindo o segundo membro da equação por $(n-k).(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3.2.1 = (n-k)!$, temos:

$$A_{n,k} = \ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

Note que $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)! = n!$, então

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{2}$$

1.5.3.3 Combinações

Segundo Iezzi et al. (2017, p. 244), a definição de combinação é enunciada como segue: “Dados n elementos distintos, chama-se combinação desses n elementos tomados k a k (com $k \leq n$) qualquer subconjunto formado por k elementos distintos, escolhidos entre os n”.

A fim de que cheguemos a um método para contar o número de combinações de certa quantidade n de elementos tomados k a k com $k \leq n$ (indicaremos por $C_{n,k}$), sigamos os passos abaixo:

Utilizamos o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados, ou seja, arranjos formados por k elementos distintos, escolhidos entre os n elementos disponíveis.

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)] = A_{n,k}$$

Ainda com o uso do PFC, contamos o número de sequências diferentes (ordens) que podemos formar com os k elementos disponíveis, ou seja, a permutação de k elementos.

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!$$

Note que qualquer permutação desses k elementos dará origem a uma única combinação, então o número de combinações dos n elementos tomados k a k é:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{k!} \Rightarrow \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}$$

Obtemos,

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Concluímos aqui as demonstrações.

Diante dos fatores históricos apresentados, percebemos que a Análise Combinatória levou vários anos para a sua construção e desenvolvimento. Hoje, muitas são as aplicações e há uma diversidade de técnicas de contagem. As contribuições para que tivéssemos a linguagem que temos hoje foram numerosas.

Levando em consideração os processos históricos, avaliamos, igualmente, a necessidade de fazer um estudo a respeito das recomendações contidas nos documentos oficiais sobre o ensino do tema, tomando as sugestões contidas neles como mote para discutir a sua atual forma de ensino. É o que faremos no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2

A ANÁLISE COMBINATÓRIA SOB O OLHAR DOS DOCUMENTOS OFICIAIS E O LIVRO DIDÁTICO

Ao ministrar qualquer conteúdo, é muito importante que os professores tenham conhecimento do que dizem os documentos oficiais. Entendemos que esses materiais, ao serem elaborados, trazem consigo a preocupação de apresentar orientações sobre as competências e habilidades que esperam ser desenvolvidas nos estudantes, ao mesmo tempo em que discutem elementos teóricos e metodológicos da área em questão.

Nesse sentido, faremos um breve passeio pelos documentos oficiais que trazem recomendações acerca do ensino da matemática, em especial nos atentaremos ao conteúdo de Análise Combinatória. Analisaremos, da mesma forma, o livro didático adotado pela unidade escolar onde a pesquisa foi desenvolvida sobre o tema Análise Combinatória.

2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais

Considerando o grande avanço da sociedade em vários aspectos nos últimos anos, principalmente com relação ao acesso à informação, torna-se necessário que a educação também volte seu olhar para o crescimento integral dos estudantes. Assim, ao elaborar parâmetros que analisam o ensino da matemática, existe a necessidade de adequá-los para o desenvolvimento e para a promoção dos estudantes de forma que as motivações, as capacidades e os interesses, a serem contemplados no ensino, sejam diversos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2000) consideram que, num mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática. E, também, ao considerar que a matemática do Ensino Médio tem valor formativo, o citado documento enxerga a matemática como uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Ao abordar o assunto de Análise Combinatória, os PCN recomendam que o assunto seja tratado de forma que o aluno consiga fazer aplicações na vida cotidiana, além de fazer conexões com outras áreas. Desse modo:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar

> as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e Probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL, 2000, p. 44-45)

2.2 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR E O CONTEÚDO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Do mesmo modo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que traz um conjunto de aprendizagens essenciais a ser trabalhadas nas escolas de educação básica públicas e privadas de todo os país. Desde 2015, o documento tem passado por várias reformulações, por isso achamos pertinente citá-la em nosso estudo. No ano 2018, foi entregue a versão final do documento com a inclusão do Ensino Médio. A versão final, além de outros pontos importantes, defende e incentiva o uso de tecnologias e o uso da resolução e formulação de problemas nas aulas de matemática.

Para a área de Matemática e suas Tecnologias, a BNCC fundamenta-se no desenvolvimento de competências específicas e relaciona a cada uma delas as habilidades a serem alcançadas pelos estudantes. O conteúdo de Análise Combinatória contempla a Competência Específica 3, que diz:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 535)

Com esta competência, espera-se que a seguinte habilidade seja desenvolvida:

> (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore. (BRASIL, 2018, p. 537)

2.3 O CURRÍCULO EM MOVIMENTO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DA SEEDF E A ANÁLISE COMBINATÓRIA

O documento Currículo em Movimento da Secretaria de Estado e Educação do Distrito Federal - SEEDF que versa sobre o Ensino Médio apoia-se na Pedagogia dos Multiletramentos, a qual exige que os conteúdos sejam trabalhados de forma a favorecer o empoderamento dos estudantes, trazendo na abordagem dos conteúdos a perspectiva de sua participação ativa na sociedade e proporcionando maior grau de autonomia para o exercício da cidadania.

A matriz curricular ficou dividida em catorze dimensões por área do conhecimento, sendo que a área de matemática subdivide-se em três eixos:

• Multiletramentos, cultura, sociedade Meio Ambiente e ética.

• Multiletramentos, tecnologia, informação e criatividade.

• Multiletramentos, lógica, análise e representação.

Segundo o documento, em sua matriz curricular, espera-se que o conteúdo de Análise Combinatória seja trabalhado na segunda série do Ensino Médio, sendo que este está enquadrado no eixo de Multiletramentos de Cultura, Sociedade, Meio Ambiente e Ética, dando a seguinte orientação para se trabalhar os conteúdos que são listados nele:

> A Matemática interfere na vida cotidiana uma vez que seus modelos procuram descrever e entender a realidade na qual está inserida, tendo como finalidade capacitar o estudante a analisar as informações criticamente. Assim sendo, os conteúdos abordados neste eixo devem proporcionar um conjunto de saberes que possibilitem interpretar informações organizadas em diferentes formatos, levando, em diferentes conjecturas, a extrair informações e inferir sobre as mesmas. (DISTRITO FEDERAL, 2018, p. 45)

2.4 A ANÁLISE COMBINATÓRIA SOBRE O OLHAR DO LIVRO DIDÁTICO ADOTADO

Entendendo que o livro didático é um dos recursos mais utilizados pelo professor, seja na preparação de suas aulas, na confecção de avaliações, de listas de exercícios ou simplesmente na aplicação de tarefas para treino dos estudantes, vemos aqui a extrema importância que deve ser dada à escolha do livro didático, pois ele pode influenciar diretamente na prática do professor em sala de aula, determinando até mesmo a ordem com que os conteúdos devem trabalhados. Nesse sentido, o livro didático tem um papel fundamental, pois ele deve ser capaz de trazer informações de forma clara e objetiva, dando ao professor e ao estudante todo o apoio necessário para que a conceituação se efetive, gerando curiosidade no estudante, desafiando-o e, além de oferecer as informações essenciais, trazer-lhe algumas ideias de aplicação do conteúdo estudado em sua realidade.

O livro didático adotado na Unidade de Ensino onde a pesquisa foi desenvolvida faz parte dos três volumes da coleção *Matemática: Ciência e Aplicações*, da editora Saraiva, 9ª edição, São Paulo 2017, volume 2, cujos autores são Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce David Degenszajn, Roberto Perigo e Nilze de Almeida. O conteúdo de Análise Combinatória é tratado exatamente nesta ordem: Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial de um número natural, Permutações, Arranjos, Combinações e Permutação com Repetição.

A obra inicia o assunto lançando alguns questionamentos que dão ao estudante a ideia de contagem como: De quantos modos distintos oito pessoas podem se sentar lado a lado em uma fila de cadeiras em um cinema? As questões levantadas servem para fazer o aluno pensar nas muitas possibilidades de resultados para um determinado problema. Nesse capítulo, em especial, não houve a preocupação dos autores em trabalhar a parte histórica da Análise Combinatória, partindo logo para a prática.

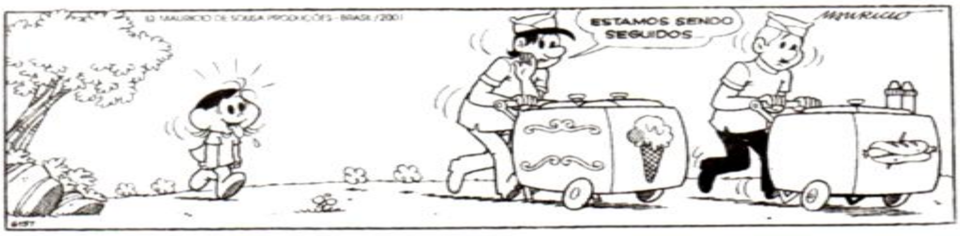
O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é enunciado logo após alguns exemplos que são resolvidos por meio da construção de um diagrama da árvore de possibilidades, seguido de exercícios resolvidos. Mais adiante, são propostos alguns exercícios de aplicação do PFC. Nos itens apresentados, existe uma preocupação dos autores em adequar as questões em forma de desafio ao aluno, forçando-o a imaginar-se nas situações apresentadas. A parte de fatorial de um número natural é abordada de forma direta e os exercícios não apresentam nenhuma aplicação, são simplesmente para fixação do conteúdo, salvo, por exemplo, um item do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) do ano de 2014.

Os autores trazem uma abordagem coerente para diferenciar os tipos de agrupamento e vários exemplos com a apresentação das fórmulas para a resolução de cada caso. Os exercícios apresentados são um misto de aplicação direta do algoritmo e aplicação no cotidiano, mas infelizmente não existe nenhuma atividade que aborde este conteúdo em outras áreas do conhecimento.

Ao observarmos a mesma coleção, lançada pela editora Atual em 2001, percebemos um tímido avanço com relação ao tipo de item cobrado. A iniciação do conteúdo é basicamente a mesma, as situações apresentadas em ambas as coleções exigem do estudante a construção de um diagrama da árvore de possibilidades. Nesse sentido, temos dois exemplos de como os autores iniciam o conteúdo, o primeiro em uma publicação de 2001 (Figura 5) e o segundo na publicação de 2017 (Figura 6):

Figura 5 – Introdução da Análise Combinatória na versão 2001

1 Introdução



(Maurício de Sousa. *O Estado de S. Paulo*, 7/1/2001.)

Quando Magali se aproximou, os vendedores rapidamente informaram a ela as seguintes opções de comida: o primeiro ofereceu *hot dog simples* (maionese, salsicha, *catchup* e mostarda) ou *completo* (simples mais purê, batata palha, vinagrete, etc.), e o segundo sugeriu sorvete de *chocolate*, *flocos* ou *morango*.

Magali, entretanto, surpreendeu os vendedores, informando-lhes que acabara de almoçar e estava sem fome. Iria apenas "forrar o estômago", servindo-se de um sanduíche e de uma bola de sorvete.

De quantos modos distintos Magali pôde fazer sua "refeição"?

Fonte: Iezzi et al. (2001, p. 306).

Figura 6 – Introdução da Análise Combinatória na versão 2017

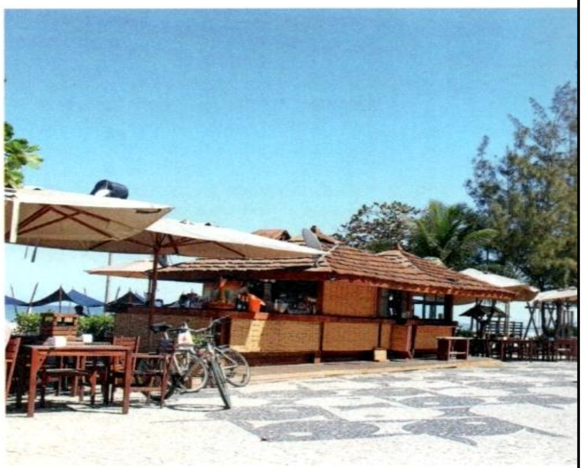
Princípio fundamental da contagem (PFC)

Veja como podemos resolver alguns problemas de contagem.

EXEMPLO 1

Um quiosque de praia, no Rio de Janeiro, lançou a seguinte promoção durante uma temporada de verão:

Combinado de sanduíche natural e suco a R$ 20,00



Para esse combinado, há quatro opções de recheio para o sanduíche (frango, atum, vegetariano e queijo branco) e três opções de suco (laranja, uva e morango).

De quantas formas distintas uma pessoa pode escolher o seu combinado?

- Em primeiro lugar, a pessoa deverá optar pelo sabor do lanche. Há quatro opções: frango (**F**), atum (**A**), vegetariano (**V**) e queijo branco (**Q**).
- Para cada uma das possibilidades anteriores, a escolha do suco pode ser feita de três maneiras possíveis: laranja (**L**), uva (**U**) ou morango (**M**).

Fonte: IEZZI et al. (2017, p. 226).

Observamos que a proposta dos autores para a introdução do conteúdo continua parecida, mesmo tendo se passado 16 anos entre uma edição e a outra. Aqui, os autores desejam que o estudante seja capaz de construir todas as possibilidades possíveis mesmo que ele não conheça nenhum algoritmo. Não há qualquer problema em iniciar o conteúdo dessa forma, porém, a repetição apresentada nos alerta para a necessidade de o professor buscar subsídios variados na preparação de suas aulas. Preocupa-nos tal questão porque sabemos da influência que o livro didático exerce entre os professores brasileiros, em especial, quando estes, por limitações de deslocamento e/ou oferta de cursos, usam os livros didáticos como única fonte de estudo para o planejamento de suas aulas.

Na coleção de 2001, percebemos mais itens com os comandos: resolva, calcule, efetue, simplifique. Ao final do capítulo, os autores apresentam alguns testes de vestibulares anteriores. Já na coleção mais atual, percebemos a inserção de uma maior quantidade de itens que exigem mais a habilidade de interpretação por parte dos estudantes, os comandos são maiores e os itens apresentam-se em forma de desafio, oferecem maior quantidade de tabelas e diagramas que facilitam a visualização e a interpretação de alguns exemplos citados.

Ao final do livro da coleção de 2017, os autores trazem em seus comentários gerais suas percepções de como a matemática deve ser trabalhada.

> Ao elaborarmos esta coleção para o Ensino Médio, procuramos proporcionar ao estudante conhecimento significativo de teoria e prática da Matemática, visando à preparação para o trabalho, ao desenvolvimento de habilidades e competência, ao exercício da cidadania e à continuação de seus estudos em outros cursos. (IEZZI et al., 2017, p. 292)

Vemos, assim, a preocupação dos autores em trabalhar a matemática de forma a trazer significado ao estudante, fato que pode ser verificado nas atividades propostas, não em sua totalidade, mas na maior parte delas. É possível identificar o esforço para aproximar teoria e aplicação.

Ao tratar do conteúdo de Análise combinatória, os autores trazem algumas sugestões de abordagem e avaliação:

> Sugerimos que o professor inicie o trabalho nesses capítulos com o princípio multiplicativo (ou princípio fundamental da contagem) e invista um bom tempo nesse assunto. Os estudantes do Ensino Médio já tiveram contato com este princípio, ainda que tenham trabalhado de maneira informal no Ensino Fundamental I e Ensino Fundamental II [...]. (IEZZI et al., 2017, p. 325)

Vale ressaltar que esta coleção foi aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), portanto não temos a intenção de classificar o livro em “bom” ou “ruim”, pois o intuito aqui é apenas trazer informações a título de apresentação da obra.

2.5 NOSSAS PERCEPÇÕES

Ao observar as recomendações contidas nos PCN, na BNCC e no Currículo em Movimento da SEEDF, percebemos a existência de consenso sobre a forma de como não só o conteúdo de Análise Combinatória deve ser trabalhado, mas também a matemática como um todo. Nos documentos, observamos o entendimento de que a matemática deve:

- traduzir a realidade;
- fazer a conexão com outras áreas;
- desenvolver o pensamento crítico e propiciar o desenvolvimento integral do estudante.

Se de um lado os documentos oficiais trazem orientações acerca do que se espera do estudante ao trabalhar o conteúdo de Análise Combinatória, por outro lado o conteúdo revela-se como um grande limitador para professores e estudantes. Em sua pesquisa, Oliveira (2015) cita uma matéria da revista *Cálculo* (VIANA, 2013, apud, OLIVEIRA, 2015) sobre os tópicos de Matemática que os professores não gostavam de ensinar. Professores experientes criaram uma espécie de *ranking* e a Análise Combinatória acabou ficando com a medalha de prata, abaixo do binômio de Newton e acima dos Polinômios.

> [...] Assim como o estudante não gosta de algumas disciplinas, ou de alguns assuntos de certa disciplina, muitos professores não gostam de ensinar certos tópicos [...] Ao perguntar para três professores experientes quais tópicos não gostam de ensinar, surge uma lista com o Binômio de Newton bem no topo, juntinho da Análise Combinatória. (VIANA, 2013, apud, OLIVEIRA, 2015, p. 27)

Quando voltamos o nosso olhar para o livro didático e reconhecemos a grande influência que ele exerce sobre a prática pedagógica do professor, compreendemos que este recurso não contempla plenamente todas as sugestões dos documentos legais; todavia, não devemos desprezar os avanços que tivemos nos últimos anos. Como vimos, os autores dos livros didáticos têm tentado apresentar tarefas que explorem o cotidiano do estudante e o faça pensar nas questões tendo uma visão mais ampla dos conteúdos, mas, muitas vezes ao desenvolver o conteúdo, eles recaem em opções mais formais e retrocedem ao tratar a matemática mais como treino do que como uma descoberta.

Outro ponto que não podemos deixar de ponderar é sobre a maneira que a matemática é avaliada em vestibulares e em concursos, pois ela ainda é apresentada de forma tradicional, sendo este um dos motivos que engessam o professor ao repassar o conhecimento. Ele, muitas vezes, recai num amontoado de algoritmos e macetes sem significado real para o estudante que, por sua vez, acaba reforçando os estereótipos relacionados ao ensino-aprendizagem da matemática.

CAPÍTULO 3

O QUE VEM SENDO ESTUDADO SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA?

Consideramos de extrema importância que os professores estejam atualizados acerca das discussões e pesquisas recentes, voltadas para a melhoria do ensino e aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória. Portanto, destinamos este capítulo para a análise e discussão de 22 estudos, sendo 95% brasileiros e 5% europeus, abrangendo o período de 2014 a 2018. Para tanto, focamos em analisar as metodologias adotadas e os resultados obtidos depois das possíveis intervenções ou as sugestões levantadas após a detecção dos problemas/falhas observadas no processo.

Das referências analisadas, 73% foram focadas nos estudantes, 23% dos estudos foram desenvolvidos com professores e 4% com ambos. Outro aspecto a ser analisado é que, dos estudos que envolveram estudantes, 6% abrangeram estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, 0% estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e 94% estudantes do Ensino Médio.

A sistematização dos estudos, em quadro, foi feita de acordo com a sugestão de Fávero e Pina Neves (2012), sendo que a primeira coluna fornece um contador relativo às referências; a segunda apresenta a referência completa do estudo, a terceira o país de origem do estudo, a quarta identifica o referencial teórico predominante em cada estudo, a quinta coluna identifica os objetivos do estudo, a sexta o método e a sétima traz os principais resultados descritos.

Quadro 1 – Sistematização dos estudos sobre Análise Combinatória

Nº	Referência	País	Referencial Teórico	Objetivos	Métodos	Resultados
01	MARTINS, SILVA (2014)	Brasil	CHEVALLARD (2007)	Investigar as perspectivas dos professores de matemática formados no CEUNES/UFES, com relação à aplicação do tema Análise Combinatória em sala de aula.	26 professores com formação inicial pelo CEUNES/UFES, no curso de Licenciatura Plena em Matemática responderam a 10 perguntas de um questionário organizado em três blocos: A) Tinha a intenção de mostrar como os participantes conceituam a Combinatória; B) Tinha a intenção de investigar a visão dos professores sobre sua formação inicial. C) Tinha a intenção de perceber se eles ensinam o assunto baseados na legislação vigente.	O professor pesquisado não se apropriou com plenitude do conceito geral de análise Combinatória, portanto abordam o tema de forma superficial, apoiando-se na maioria das vezes apenas no livro didático. A maioria dos professores pesquisados acredita que sua formação inicial em Licenciatura Plena em Matemática não foi suficiente para lecionar Análise Combinatória. O professor pesquisado não conhece o documento PCNEM, no qual se trata da Análise Combinatória. O professor pesquisado acredita em uma proposta de ensino com qualidade, mesmo que, segundo sua percepção, não esteja preparado para isso.
02	GONÇALVES (2014)	Brasil	PCN (1997)	Verificar como anda o ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio; Avaliar a aprendizagem dos estudantes com diversas metodologias observadas. Mostrar a eficácia de outra abordagem de ensino, utilizando a resolução de problemas e as técnicas do Princípio Fundamental da Contagem para desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes.	Divisão do trabalho em quatro partes: 1-Abordagem de conceitos e definições básicas da Análise Combinatória; 2- Questões Pedagógicas no que diz respeito à aprendizagem dos estudantes, principais dificuldades apresentadas pelos docentes e discentes; 3- Relato da pesquisa de campo feita com quatro turmas (ao todo 105 estudantes) do segundo ano do Ensino Médio realizada no Colégio São Paulo, situado na cidade de Teresópolis – Rio de Janeiro. Em duas turmas o conteúdo foi trabalhado utilizando o método fórmula-aplicação e nas outras duas	Os resultados das pesquisas mostraram que os professores não se sentem seguros para ministrar o conteúdo. A maioria dos estudantes tem contato com o conteúdo apenas no Ensino Médio, quando na verdade a recomendação é que eles tenham contato com o assunto desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. No geral, os estudantes se saíram bem independentemente do método adotado, mas conforme o tempo passa, estudantes dão maior preferência para o uso do PFC, pois não precisam se lembrar das fórmulas e não precisam pensar se a questão se trata de arranjo ou combinação.

					foi utilizado o PFC 4- Análise Crítica dos Resultados.	
03	TREVIZAN (2014)	Brasil	BROUSSEAU (1933)	Sugerir o uso da situação adidática, Teoria das Situações de Brousseau (1933), como ferramenta para uma aprendizagem matemática mais autônoma, ou seja, uma aprendizagem que possibilite o desenvolvimento de habilidades investigativas, interpretativas, crítica e criativas.	Análise da aplicação de uma sequência didática que tinha por finalidade proporcionar situações potencialmente adidáticas. A sequência didática se deu num contexto fictício, em que uma personagem chamada Marcela se depara constantemente com a necessidade de realizar contagens indiretas; A sequência foi dividida em três momentos e aplicada com estudantes de 2º e 3º ano do Ensino Médio em três escolas diferentes.	O contrato didático interfere bastante nas possibilidades que se abrem para uma situação adidática. Uma sequência didática pode, sim, ser privilegiada em termos de possibilidades adidáticas, favorecendo, desse modo, uma aprendizagem muito mais autônoma e muito mais próxima dos objetivos que se pretendem nos documentos oficiais. O professor que desejar trabalhar com situações adidáticas terá como principal atividade o planejamento, além de realizar a devolução e orientação das atividades dos estudantes.
04	BORBA et al. (2014)	Brasil	BORBA, BRAZ (2012) PESSOA, BORBA (2010)	Discutir a formação de professores de anos iniciais para o trabalho com situações combinatórias.	Apresentação de dois estudos: o primeiro de sondagem de concepções e conhecimentos de professores e o segundo de intervenção por intermédio de uma formação continuada proposta e vivenciada.	Professores de anos iniciais conhecem pouco de combinatória. O conhecimento de combinatória, ou a falta dele por parte do professor, pode comprometer a análise ou avaliação de estratégias evidenciadas pelos estudantes. Processos de formação podem auxiliá-los no avanço em seus conhecimentos de conteúdo e didático. Professores bem preparados têm melhores condições de auxiliarem os estudantes a desenvolverem seus raciocínios combinatórios desde os anos iniciais de escolarização. Situações combinatórias devem ser tratadas desde os anos iniciais.
05	CONTESSA et al.(2014)	Brasil	CURY (2008)	Analisar a produção matemática dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio do Instituto Federal Farroupilha – Campus – Alegrete; Utilizar os resultados dessa análise como metodologia de	Verificação e discussão dos erros na resolução de questões envolvendo o conteúdo de análise combinatória, tendo como base questões do ENEM referentes aos anos de 2010 a 2103; Foi pedido aos estudantes que	A metodologia constitui espaço de discussão, com um olhar mais individualizado para a produção matemática de cada participante, permitindo maior integração entre o professor e o aluno; Através da devolutiva dos professores, foi possível perceber nos estudantes maior

				ensino.	fizessem suas resoluções o mais detalhadas possível.	interesse na aprendizagem, uma vez que foram conduzidos a analisar suas próprias produções.
06	FONSECA, SOUZA, DIAS (2015)	Brasil	DUVAL (2003)	Investigar o potencial das transformações dos registros de representação semiótica em uma proposta de ensino de Análise Combinatória construída com base na resolução de problemas.	29 estudantes da 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de Aracajú (SE) participaram da aplicação de uma sequência didática que consistiu em cinco sessões de ensino divididas em duas partes: num primeiro momento foram verificados os registros utilizados pelos estudantes e quais conversões foram mobilizadas no conteúdo de PFC através da aplicação de três itens. No segundo momento, observou-se a mobilização dos registros semióticos relacionados a noções de arranjo e combinação. O pesquisador fez uso de dois filmes para enriquecer sua sequência didática, a saber: De malas prontas e Desejos.	Por meio das soluções apresentadas pelos estudantes, é possível notar que as atividades propostas fizeram com que houvesse uma mobilização do registro de partida, a língua natural, para os registros de chegada, o algébrico e a situação esquemática. Os estudantes desenvolveram habilidades associadas à representação do objeto matemático em estudo após a discussão estabelecida pelo pesquisador, que sustentou a importância de um trabalho no qual se considere a utilização de diferentes registros de representação semiótica e a coordenação deles; A aplicação de uma sequência didática, baseada em experiências de aulas, que estimulem a mobilização dos registros de representação semióticos e com atividades relacionadas ao cotidiano do discente, contribui de forma efetiva para o ensino e aprendizagem de Análise combinatória.
07	MAGINA, SPINILLO, SÁ MELO (2015)	Brasil	VERGNAUD (1983, 1993), PIAGET, INHELDER (1976)	Investigar estratégias utilizadas por estudantes do 3º, 4º e 5º ano do Ensino Fundamental ao resolver problemas de Análise Combinatória.	269 estudantes do 3º ao 5º ano do Ensino Fundamental foram submetidos a testes em que os pesquisadores estavam interessados em estudar a resolução dos estudantes com o uso do PFC, a professora lia em voz alta o problema e, caso necessário, esclarecia as dúvidas relativas a seu enunciado e sua diagramação.	Os estudantes dos anos iniciais têm pouco sucesso ao resolver problema de combinatória e apresentam pouca familiaridade com problemas do tipo; A aquisição de conceitos ocorre de forma gradual, formas de raciocínio mais elaboradas são mais frequentes em estudantes em anos escolares mais avançados.
08	DURO, BECKER (2015)	Brasil	PIAGET (1976)	Compreender a psicogênese do pensamento combinatório na perspectiva da Epistemologia Genética de Jean Piaget; Analisar os mecanismos utilizados por estudantes na resolução de situações	Foram selecionados entre os estudantes regularmente matriculados 18 estudantes, sendo oito da EJA e 10 do Ensino Regular de uma escola da rede pública com idades que variam entre 14 e 47 anos, os quais foram submetidos a	Os resultados mostraram que, baseado nas ideias de Piaget onde utiliza modelos lógicos para representar a estrutura do pensamento, as respostas dos estudantes puderam ser classificadas em três níveis de pensamento. A saber: **Nível 1: Ausência de Sistematização**

				experimentais de Análise Combinatória.	três experimentos aplicados individualmente. Os pesquisadores utilizaram a contra-argumentação, o que exigia dos entrevistados organizarem suas ações em nível mental, recriando-as e modificando-as quando necessário.	**multiplicativa**. Aqui o sujeito busca o resultado, não mostrando consciência do processo. Não há indícios de sistematizações multiplicativas. **Nível 2: Início da Sistematização Multiplicativa**. Neste nível o sujeito é capaz de ordenar e seriar adequadamente as variáveis, mas não consegue dissociá-las, fazendo-as variar ao mesmo tempo. Aqui ocorrem as primeiras aproximações da solução combinatória mais geral. **Nível 3: Sistematizações generalizadoras.** Os sujeitos deste nível tentam compreender o resultado dentro de um universo de possibilidades. Os sujeitos conseguem chegar à lei geral da combinatória; O uso do conflito e da contra argumentação na educação pode ajudar a desenvolver no sujeito a capacidade de assumir perspectivas diferentes frente a uma mesma situação. Alguns métodos escolares podem prejudicar a construção do raciocínio formal, justificando as dificuldades dos jovens em compreender mecanismos combinatórios.
09	BORBA, ROCHA, AZEVEDO (2015)	Brasil	VERGNAUD (1991), SHULMAN, BALL, THAMES, PHELPS (2008)	Apresentar e Discutir pesquisas desenvolvidas ao longo dos últimos cinco anos pelo grupo Geração (Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco) junto a estudantes de distintos níveis e modalidades de ensino; Debater estudos realizados com professores da Educação Básica; Possibilitar reflexões referentes a como o raciocínio combinatório se desenvolve,	Levantamento bibliográfico onde se investigou a eficácia dos recursos didáticos utilizados para o ensino da Análise Combinatória; Levantamento bibliográfico sobre o que estudantes de diferentes níveis e modalidades de ensino sabem e o que podem aprender sobre combinatória. Levantamento bibliográfico sobre o que os professores pensam e fazem referente ao ensino de Combinatória.	O uso de recursos Didáticos auxilia o desenvolvimento do raciocínio combinatório (livro didático, *softwares* e objetos de aprendizagem), mas ainda são verificadas limitações a serem sanadas pelo professor. Notou-se que o conteúdo leva um longo período para seu aprendizado. O estímulo ao uso de várias formas de representação auxilia para um eficiente desenvolvimento de raciocínio combinatório. Fazem-se necessárias propostas de formação continuada para os professores, focalizando os diferentes domínios de conhecimentos, inserindo reflexões, tanto com relação ao conhecimento especializado, como também

				quais as dificuldades a serem superadas e como práticas podem ser mais eficientes no ensino de Combinatória.		conhecimento relativo ao ensino de Combinatória.
10	ROCHA, LIMA, BORBA (2015)	Brasil	BALL, THAMES, PHELPS (2008)	Analisar conhecimentos de professores de matemática para ensinar Combinatória.	Foram analisados extratos de duas pesquisas desenvolvidas no âmbito de estudos do *Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório – Geração – UFPE*, a saber: Rocha (2011) e Lima (2015). Nas pesquisas analisadas, professores foram entrevistados e por meio dos resultados foram feitas relações com aspectos teóricos aos domínios de conhecimento para ensinar, propostos por Ball e seus colaboradores.	Mesmo com distintas formações dos professores, existem dificuldades na diferenciação de problemas combinatórios, em especial de arranjo e combinação. Professores, sem formação específica em combinatória apresentaram dúvidas em relação a alguns problemas. Os professores apresentaram diferentes domínios de conhecimento para ensinar combinatória. Os professores conseguem apontar possíveis dificuldades e/ou facilidades que os estudantes possam ter. Faz-se necessário investir na formação inicial e continuada de professores sobre este conteúdo.
11	SCHASTAI, SILVANO (2016)	Brasil	FREUDENTHAL (1968, 1973) HEUVEL (2010) STREEFLAND (1991) WIDJAJA, HECK (2003) FERREIRA (2013)	Apresentar as ideias defendidas pela Educação Matemática Realística - EMR; Clarificar/ exemplificar como se dá o papel do professor e do aluno dentro desta abordagem de ensino por meio do relato de uma prática de sala de aula de um professor do Ensino Médio para o ensino da Análise Combinatória; Mostrar as estratégias utilizadas pelos estudantes para a resolução de problemas de Combinatória.	38 estudantes do 2º ano do Ensino Médio do período noturno foram submetidos a dois momentos: discussão e análise das estratégias utilizadas, sendo que no primeiro momento, foi lançada uma pergunta sobre Análise Combinatória que deveria ser respondida a princípio individualmente, logo em seguida em dupla e por fim em grupo até que todos ficassem convencidos sobre qual seria a resposta correta.	Na atividade aplicada, foi possível perceber indícios da presença da EMR. As tarefas propostas dentro da perspectiva da EMR deram a todos os estudantes a oportunidade de se envolverem na atividade, além de aprenderem matemática fazendo matemática. A concepção da matemática como atividade humana faz toda a diferença no processo de ensino e aprendizagem matemática. Os estudantes foram capazes de se ver na situação e puderam discutir e compartilhar as estratégias utilizadas
12	CONCEIÇÃO, PEREIRA, SANTOS	Brasil	PCN	Expor os resultados de uma pesquisa feita com estudantes que já estudaram o assunto de	79 estudantes da rede pública estadual de ensino de Belém do Pará foram submetidos a um	Apesar de já terem estudado o assunto, alguns estudantes ainda permanecem com deficiência em alguns tópicos de Análise Combinatória.

	(2016)			Análise Combinatória.	questionário sobre sua relação com a matemática e um pré-teste sobre Análise Combinatória.	Os estudantes apresentam maior proficiência em fatorial e PFC. Quanto maior a inserção de fórmulas, menos capazes os estudantes se tornam para resolver problemas de análise combinatória. Os estudantes que estudaram o assunto utilizando apenas o PFC tiveram melhor desempenho.
13	MOTA, FERREIRA (2016)	Portugal	LOCKWOOD (2013)	Proporcionar aos estudantes de uma turma do 12º ano, de Matemática A, de uma escola do distrito do Porto, oportunidades para reinventarem o PFC e as fórmulas das quatro operações combinatórias básicas através de tarefas diversificadas, com ênfase nos problemas, recorrendo ao *Modelo de Pensamento Combinatório dos Estudantes*, desenvolvido por Lockwood (2013) onde estabelece relação entre três componentes: fórmulas/expressões, processos de contagem e conjunto de resultados.	31 estudantes do décimo segundo ano de uma escola do distrito de Porto foram divididos em oito grupos constituídos por 3 ou 4 estudantes, dois grupos foram selecionados diante dos desempenhos distintos para representar o trabalho desenvolvido pelo restante da turma.	Na resolução das tarefas fica claro que os estudantes deram preferência inicial para o uso de diagramas e o uso do PFC. Na medida em que a quantidade de elementos aumentou, um grupo conseguiu reinventar corretamente a fórmula do arranjo sem repetição enquanto que o outro apenas conseguiu explicar a relação entre as variáveis. Para a fórmula de combinação, apenas um grupo, de toda a turma, conseguiu reinventar corretamente a fórmula. Ao recorrer ao modelo de Lockwood, os dados colhidos apontam para a existência de uma quebra na relação entre os processos de contagem e as fórmulas/expressões, o que demonstra a importância dos processos de enumeração utilizados pelos estudantes à medida que resolvem o problema. Os resultados do trabalho sugerem a necessidade de reformular as tarefas relacionadas à combinação, apresentar aos estudantes diagramas diversificados que conduzam a fórmulas onde as quatro operações algébricas sejam aplicadas para, posteriormente, serem substituídos pelas fórmulas/expressões.
14	OLIVEIRA, LINS (2016)	Brasil	VERGNAUD (1983)	Apresentar os resultados de uma pesquisa concluída na área de Educação Matemática, que investiga o conhecimento que os estudantes das séries finais de Ensino Médio detêm sobre o conteúdo de Análise	20 estudantes da 3ª série do Ensino Médio de uma escola Pública do ensino regular, do sertão da Paraíba foram submetidos a dois questionários, sendo que o primeiro foi destinado à coleta dos dados socioculturais dos discentes, o	A maioria dos estudantes não havia tido contato com o assunto de Análise Combinatória em nenhum outro momento. Dos problemas que os estudantes conseguiram acertar, o método escolhido foi basicamente a utilização do raciocínio lógico. Os pesquisadores supõem que a dificuldade

				combinatória.	segundo buscou identificar a apropriação dos estudantes quanto aos conceitos, termos e estratégias que envolvem o estudo da análise combinatória e um pré-teste que buscou avaliar as habilidades dos estudantes em resolver problemas simples, relacionados ao pensamento combinatório e, ainda, dois professores da escola também foram entrevistados.	relatada pelos professores entrevistados com relação ao conteúdo está diretamente ligada ao desempenho dos estudantes, pois uma vez que o professor sente dificuldade com o conteúdo, ele pode, muitas vezes, não ser trabalhado em nenhuma série. Com relação à teoria de campo conceitual de Vergnaud, as pesquisadoras concluem que o pensamento multiplicativo e o raciocínio combinatório não são simples, mesmo para estudantes em fase de conclusão do Ensino Médio.
15	MAGIONI, LEMOS (2016)	Brasil	ONUCHIC, ALLEVATO (2009)	Analisar a eficácia da Metodologia da Resolução de Problemas no Ensino da Análise Combinatória, baseado no Princípio Fundamental da Contagem para estudantes do 2º ano do Ensino Médio.	40 estudantes do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Mimoso do Oeste, na cidade de Luís Eduardo Magalhães – BA participaram de oficinas de Resolução de Problemas utilizando problemas que envolviam análise combinatória. Os problemas apresentados utilizaram obras de arte e cultura regional como forma de mediação e contextualização.	A metodologia de Resolução de Problemas mostrou-se eficaz, podendo contribuir para minimizar a aversão que alguns estudantes têm em relação à disciplina de matemática, além de fazer com que os estudantes se tornem protagonistas das descobertas; Os estudantes conseguiram perceber a ligação do conteúdo com outras disciplinas; As situações problemas devem estar inseridas na rotina escolar;
16	SILVA, GUERRA (2017)	Brasil	PCN (2000) ONUCHIC et al. (2014)	Identificar as possíveis reações comportamentais e atitudinais dos estudantes, acostumados ao modo de ensino expositivo, à mudança de contrato didático. Observar como os estudantes interagem nas resoluções dos problemas. Examinar as dificuldades dos estudantes na compreensão dos enunciados dos problemas. Analisar a preferência dos estudantes no tocante à resolução dos problemas pela utilização do Princípio Fundamental da	20 estudantes do segundo ano do Ensino Médio na cidade de Maceió – Alagoas - foram submetidos a um teste diagnóstico, os resultados mostraram que os discentes deixaram quase todas as questões em branco. Diante disto, optou-se por construir uma sequência didática com base na Resolução de Problemas.	Maior apropriação dos estudantes na manipulação de estratégias presentes em problemas envolvendo o pensamento combinatório. Maior preferência dos estudantes para o uso do PFC para a resolução de problemas que envolviam diferentes tipos de agrupamentos.

				Contagem - PFC ou das fórmulas específicas cada tipo de agrupamento. Aplicar a metodologia de Resolução de Problemas no intuito de auxiliar o ensino da Análise Combinatória.		
17	SILVEIRA, ANDRADE (2017)	Brasil	PCN (1998) PCN+ (2000)	Analisar como uma abordagem em sala de aula via Resolução e Exploração de Problemas pode contribuir com o ensino aprendizagem de Análise Combinatória.	Uma turma do 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual do Município de Alagoinha – PB foi submetida a uma aplicação de uma abordagem investigativa sobre Análise Combinatória, via Resolução de problemas, a seguir, os dados foram coletados e analisados.	De modo geral, os estudantes conseguiram organizar informações ou números de forma adequada. A árvore das possibilidades e a listagem das possibilidades foram os métodos utilizados com maior frequência pelos estudantes. No decorrer do encontro, os estudantes foram melhorando seu rendimento e resolvendo os problemas com muito mais autonomia. Os estudantes foram capazes de validar e refletir sobre seus resultados.
18	MELLO (2017)	Brasil	PCN PCN+	Propor uma forma alternativa de ensinar Análise Combinatória no Ensino Médio com atividades que envolvam o raciocínio Combinatório, em detrimento da subdivisão dos conceitos em rótulos e suas fórmulas. Propor um guia de atividades para a sala de aula que estimule o desenvolvimento do raciocínio combinatório.	Apresentação de um guia para o professor, com comentários, atividades, exemplos e orientações a partir da prática docente do autor.	Os comentários, descritos ao longo de cada problema, baseados em falas colhidas dos estudantes ao longo da prática docente do autor, retratam de forma clara como os estudantes vão se apropriando do pensar combinatório, por meio da aplicação do PFC, na elaboração de suas estratégias, além de criarem o hábito de estabelecer etapas que facilitem a compreensão dos objetivos de cada problema. Os estudantes passam a enxergar de maneira diferente a aplicação de fórmulas, como consequência natural de uma estratégia que foi traçada a partir dos conceitos de PFC, não mais se prendendo a rótulos, que antes eram os norteadores das ações que se seguiram.
19	SILVA (2017)	Brasil	ONUCHIC (2008)	Apresentar os resultados de uma investigação sobre o processo de ensino aprendizagem de Análise Combinatória	Foi aplicada uma sequência didática tendo como base o Princípio Fundamental da Contagem em uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede	Os problemas geradores desempenharam uma função relevante no processo, pois serviram como base para verificação da compreensão dos estudantes, além de proporcionarem uma base interessante para a construção de

					pública estadual de Alagoas. A metodologia ensino-aprendizagem-avaliação se deu por meio da resolução de problemas	conceitos pretendidos. Um quantitativo elevado utilizou apenas o PFC como principal estratégia de resolução
20	HAHN, RETZLAFF, PRESTES (2018)	Brasil	MURCIA (2005) PCN (1997)	Utilização de jogos para concluir e auxiliar na aprendizagem dos estudantes no conteúdo de Análise Combinatória	Estudantes bolsistas do PIBID, a partir de um Plantão Tira Dúvidas de Matemática, organizaram um jogo sobre o conteúdo de Análise Combinatória chamado *Quem Arranja ou Combina mais ... Ganha para estudantes* da Escola Técnica Estadual Presidente Getúlio Vargas. As questões utilizadas envolviam o contexto vivido pelos estudantes. A atividade foi dividida em três momentos: 1- Plantão tira dúvidas. 2- Planejamento do jogo. 3- Aplicação do jogo.	A aplicação do jogo mostrou-se como um método diferente e satisfatório de abordagem para conteúdos matemáticos, podendo facilitar e melhorar o ensino/aprendizagem dos estudantes. Além disso, o jogo proporcionou ao aluno desenvolver sua capacidade de raciocínio lógico e organizado, como também a ampliação da capacidade de relacionar a matemática com problemas práticos. Percebeu-se que a maior dificuldade dos estudantes no jogo era a interpretação das questões.
21	RODA (2018)	Brasil	POZO, ECHEVERRÍA (1988)	Abordar a Análise Combinatória sem o uso de fórmulas.	Utilizando a Metodologia de Resolução de Problemas e de posse apenas do Princípio Fundamental da Contagem, foi trabalhada uma sequência didática com uma turma de estudantes do 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Professora Esmeralda Leonor Furlani Calaf, da cidade de Pederneiras do Estado de São Paulo; ao final, os estudantes foram submetidos a uma avaliação para a validação da proposta.	Apesar de o conteúdo ser considerado tanto por professores quanto por estudantes como um dos mais difíceis, o autor conclui que isto se dá pelo fato de acreditarem numa forma única para resolver exercícios do tipo, decorando fórmulas. Foi percebida grande interação com a atividade e por meio dos erros e acertos, o autor obteve o retorno desejado.
22	MARTINS (2018)	Brasil	MARCONI, LAKATOS (2011) TRIVIÑOS (1992)	Investigação acerca do ensino da Análise Combinatória.	20 Professores do Ensino Médio da rede estadual do Estado Espírito Santo que trabalham efetivamente com o conteúdo foram entrevistados e alguns deles tiveram suas aulas observadas. A entrevista ocorreu no local de trabalho deles e também utilizando o formulário *on-line* do	Todos os professores afirmaram terem recebido rápida instrução sobre o conteúdo apenas no nível básico e não estudaram o assunto no nível superior. Os entrevistados consideram o conteúdo difícil de ensinar e aprender. Os professores têm concepções erradas acerca da metodologia da resolução de problemas, em

					Google Drive. Dentre as perguntas feitas aos professores no formulário, vale ressaltar as perguntas em relação à prática dos docentes no que se refere a este conteúdo e as impressões dos professores ao analisar as respostas de estudantes sobre problemas de Análise Combinatória.	suas concepções ela acaba se resumindo em exercícios de fixação. O livro didático e a internet são as únicas fontes de consulta para a preparação das aulas. Os professores carecem de conhecimento sobre combinatória e de alternativas didáticas para ensinar este assunto, o que repercute diretamente na prática de ensino. As práticas inadequadas de ensino impactam negativamente e contribuem para o fato dos estudantes e professores acharem o conteúdo difícil. O professor que não teve a oportunidade de aprofundar o estudo do tema recorre a poucos recursos para a preparação de suas aulas.

Fonte: elaborado pela autora.

3.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS TRABALHOS

Conforme observamos, os objetivos dos estudos visaram, de maneira geral, identificar, descrever e analisar erros e estratégias de resolução em relação aos conceitos de Análise Combinatória, como também investigar aspectos predominantes na formação do professor de matemática e como ele lida com o ensino de Combinatória. Foi verificada grande diversidade de abordagens teóricas e metodológicas, dentre elas podemos destacar: o uso da Resolução de Problemas baseados em Onuchic, Allevato (2009), a investigação do pensamento combinatório de Piaget (1976), a investigação dos registros de representação semiótica de Duval (2003), o uso de situações adidáticas de Brousseau (1933), a análise da produção escrita dos estudantes, a confecção de jogos, a educação matemática realística de Freudenthal (1968) e a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1983).

As pesquisas fundamentadas na Teoria dos Campos Conceituais (MAGINA; SPINILLO; SÁ MELO, 2015; BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015; OLIVEIRA; LINS, 2016) se alinharam de fato às ideias defendidas por Vergnaud, focando em como se dá a compreensão por parte dos estudantes, levando em consideração a evolução por um determinado espaço de tempo, de modo a mostrar ao professor como ele poderá fazer seus planejamentos e intervenções sobre esse conteúdo. Há grande, preocupação por parte dos pesquisadores, em apresentar o conteúdo de forma a aproximar-se o máximo possível do cotidiano dos estudantes, além de, por meio dos resultados colhidos, foram levantadas elaborar minuciosas acerca das dificuldades enfrentadas pelos estudantes para aprenderem o conteúdo.

Os estudos do ensino e aprendizagem da Análise Combinatória mostram-nos a existência ainda de grandes desafios a serem vencidos por parte dos professores e estudantes. Nesses trabalhos, ficou evidente a grande necessidade de que o conteúdo seja trabalhado de forma eficaz ainda na graduação para que os professores possam ir para a sala de aula mais confiantes acerca desse assunto, para que, com isso, seja possível observar reflexo positivo nos desempenhos dos estudantes. Eles precisam ter seu raciocínio combinatório estimulado desde os anos iniciais, pois, conforme o estudo de Magina, Spinillo e Sá Melo (2015), a aquisição de conceitos ocorre de forma gradual.

Vale ressaltar que os estudos voltados para a resolução de problemas são unânimes em dizer que, ao abordar este conteúdo, o professor deve dar preferência ao uso do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), deixando a inserção de fórmulas para um momento posterior, quando o próprio estudante sentir a necessidade de fazer generalizações.

A partir da análise dos resultados (GONÇALVES, 2014; CONCEIÇÃO; PEREIRA; SANTOS, 2016; MOTA; FERREIRA, 2016; SILVA; GUERRA, 2017; SILVEIRA; ANDRADE, 2017; MELLO, 2017) foi possível observar que os estudantes dão maior preferência aos métodos intuitivos, à construção de diagrama de árvore, à enumeração e ao uso do PFC, revelando quais são as estratégias mais utilizadas por eles. Sendo assim, o professor, ao abordar esse conteúdo, deve dar mais ênfase nas estratégias que eles se apropriam com mais facilidade.

Os estudos revelaram que, em geral, tanto estudantes quanto professores consideram o assunto de Análise Combinatória difícil. Mello (2017) atribui parte desta dificuldade ao uso inadequado do livro didático pelo professor, pois o livro acaba definindo como serão as sequências das aulas, assim, para o aluno, o conteúdo de Análise Combinatória se resume a tentar "adivinhar" qual o tipo de caso ele está tratando: permutação, arranjo ou combinação. Assim, ele se limita a simples aplicação de fórmulas.

A revisão (CONCEIÇÃO; PEREIRA; SANTOS, 2016; OLIVEIRA; LINS, 2016) mostrou que os estudantes, mesmo em fase de conclusão do Ensino Médio, não se apropriam adequadamente do raciocínio combinatório e, a partir da análise dos erros nas resoluções (CONTESSA et al., 2014), os resultados concluíram que existe grande confusão na escolha das estratégias adotadas na resolução dos problemas de combinatória, sendo o mais visível o erro no qual o estudante trocando a fórmula de arranjo pela de combinação ou vice-versa. Esse fato mostra, mais uma vez, que o estudante acaba se restringindo à pergunta: "É arranjo ou combinação?"

A presente revisão bibliográfica nos revela que existe grande empenho quanto à inserção de novas metodologias de ensino de Análise Combinatória. No entanto, no conjunto pesquisado, foi perceptível que os anos finais do Ensino Fundamental carecem de pesquisas e investigações, pois no levantamento não foi possível identificar nenhum que estivesse voltado para esse público, pelo menos nos últimos cinco anos a contar da data deste trabalho, embora não possamos afirmar que não existam.

Outro aspecto a ser analisado são os estudos desenvolvidos com professores, que representam apenas 23%, o que deixa claro que a preocupação maior está voltada em entender os processos de aprendizagem do estudante, e a busca por entendimentos de como este conteúdo está sendo ensinado é deixada de lado. Estudos como os de Borba et al. (2014) e Oliveira e Lins (2016) revelaram que a falta de habilidade do professor com o conteúdo constitui um dos principais fatores do insucesso dos estudantes quando lidam com o referido conteúdo.

CAPÍTULO 4

AVALIAÇÃO E ANÁLISE DOS REGISTROS

A subjetividade contida no ato de avaliar é um dos pontos a serem discutidos neste estudo. Como a pesquisa está fortemente ligada ao ato de avaliar, com toda sua complexidade e especificidade, consideramos relevante abrirmos o espaço inicial deste capítulo para tratar da avaliação, em especial a avaliação em matemática, adotando como principal instrumento a avaliação escrita.

4.1 O ATO DE AVALIAR

Atribuir valor, esse é o significado da palavra latina "valere". Pavanello e Nogueira (2006) acreditam que poucos professores têm a consciência de que a avaliação é um processo contínuo e natural dos seres humanos, pois os homens se avaliam constantemente nas mais variadas situações. A rotina da avaliação é iniciada pela verificação das informações sobre determinadas situações e, a partir da análise das informações, uma decisão é tomada. Sendo assim,

> a avaliação tem um lugar natural na escola, como se o ato de ensinar-aprender ficasse mutilado sem a aplicação desse processo. As três dimensões ensinar-aprender-avaliar são consideradas indissociáveis no âmbito do ensino escolar. A cultura escolar não sabe descrever a aprendizagem do aluno sem passar pela avaliação. (MOURA; PALMA apud BURIASCO, 2008, p.13)

Segundo Amaral e Costa (2017), a avaliação consiste num retrato do autoritarismo que permeia todo o processo educativo. Tradicionalmente, ela é concebida como instrumento que atribui juízo de valor ao indivíduo, ou seja, a partir de um padrão pré-determinado, lhe são impostas a aprovação ou a reprovação. Os autores também afirmam que a avaliação é classificatória.

Amaral e Costa (2017) observam que, atualmente, o ensino está pautado nos resultados de provas e exames; assim, todo o processo educativo se reduz à obtenção de notas, concedendo ao aluno sua promoção ou reprovação. Os Sistemas de Ensino e a sociedade acabam se contentando com os resultados apresentados em notas e conceitos. Desse modo, a aprendizagem fica restrita aos dados expressos em tabelas e gráficos (LUCKESI, 2005 apud AMARAL; COSTA, 2017).

Ao acompanharmos a rotina de um professor de matemática, é muito comum que vejamos, em sua prática, atitudes que seguem basicamente esta ordem: exposição do conteúdo, resolução de problemas e, em seguida, aplicação de uma avaliação escrita. Após a correção das avaliações, inicia-se um novo ciclo para a introdução de um novo conteúdo. A grande preocupação em cobrir todos os conteúdos propostos no currículo e nos livros didáticos faz com que os professores não deem a devida atenção a um dos instrumentos de avaliação mais importantes: A Avaliação Escrita. Consideramos que se tratando de Avaliação Matemática, esse instrumento exerce papel fundamental.

O sentido dado por nós neste trabalho para o ato de avaliar é aquele que estabelece relação e articulação com o processo de ensino e aprendizagem. Para Pavanello e Nogueira (2017), a prática pedagógica da matemática está centrada na contagem de erros que seleciona os estudantes e, ao compará-los entre si, os levam a um determinado lugar numérico, levando em consideração apenas as notas obtidas. Por isso, Pavanello e Nogueira (2017) defendem que seja possível ir além da resposta final apresentada pelo estudante.

Para Pavanello e Nogueira (2017), mesmo que uma avaliação matemática seja informativa[8], é possível extrapolar o lugar comum da classificação por notas. Para que isso ocorra, as autoras relatam que é necessário que o estudante seja sujeito no processo de avaliação e não apenas o objeto a ser avaliado. Embora para alguns o processo pareça complicado, dentre as muitas possibilidades de perceber como os estudantes lidam com o saber matemático, as autoras destacam que considerar os erros dos estudantes seja uma estratégia para orientação da prática pedagógica.

Na diversidade de instrumentos de avaliação, destacamos os que serão objeto estudo da pesquisa: a prova dissertativa e a prova objetiva. A prova dissertativa:

> consiste no tipo de avaliação tradicional em que o professor propõe algumas questões para serem respondidas por escrito pelos alunos. Tanto a formulação destas questões como suas respostas são relativamente livres. A dissertação deve ser adotada quando se quer verificar a compreensão global através do raciocínio interpretativo. Consiste, geralmente, em questões que incluem instruções, tais como: comente, explique, resuma, avalie, defina, compare, contraponha, descreva. Etc. (PILETTI, 1993, p. 205 apud FILHO et al., 2012)

[8] “Quando nos referimos à matemática formativa, estamos propondo focar nossa atenção no desenvolvimento do pensamento, que embora não esteja desvinculado dos conteúdos não se reduz a eles. Enquanto a matemática informativa se prende ao conhecimento pronto e acabado” (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2017, p.36).

O objetivo de avaliações nessa modalidade, segundo Filho et al. (2012), é verificar o desenvolvimento das habilidades intelectuais dos alunos na assimilação do conteúdo, organização das ideias, clareza de expressão, originalidade, capacidade de aplicar os conhecimentos adquiridos. Já a prova objetiva diferencia-se na forma de elaboração, em vez de respostas abertas, é solicitada ao aluno a escolha de uma alternativa dentre outras. O objetivo de uma avaliação desse tipo não é muito diferente de uma prova dissertativa. Sua principal característica é a possibilidade de, na elaboração, abranger uma quantidade maior de questões.

Consideramos que os processos avaliativos não se dissociam da subjetividade pessoal do avaliador. Panavello e Nogueira (2017) ponderam que o professor desenvolve formas de avaliação em conformidade com suas opiniões intelectuais, suas atitudes sociais, seus referenciais teórico-metodológicos. Sendo assim, é na forma que o professor concebe a avaliação que enxergamos mais claramente as posições sociais e políticas que ele assume consciente ou inconscientemente.

4.2 POR QUE ANALISAR O REGISTRO DOS ESTUDANTES?

A[9] formação matemática ofertada na Educação Básica brasileira, em especial, no Ensino Médio, tem sido, cada vez mais, investigada. Isso se deve, em grande parte, às características da sociedade atual, as suas exigências em termos de formação e ao próprio desenvolvimento da pesquisa em Educação Matemática[10]. Nesse âmbito, acompanhamos as conquistas e as adversidades provenientes das atuais revoluções tecnológicas, econômicas e sociais que exigem da população o acesso a níveis maiores de escolaridade ou, pelo menos, à Educação Básica completa.

Nesse sentido, ampliam-se o interesse de pesquisadores em Educação Matemática por compreender aspectos da conceituação matemática no Ensino Médio, tendo como instrumento de apoio o próprio sistema oficial de avaliação para esse nível de escolaridade. Além disso, também são utilizados sistemas que avaliam jovens em idade compatível com o final do

[9] Recortes deste e do próximo capítulo encontram-se publicados nos anais do XVIII Encontro Baiano de Educação Matemática – EBEM2019 que ocorreu no período de 03 a 06 de julho de 2019 e tem como título *Análise Combinatória no Ensino Médio: compreensões a partir da análise da produção escrita de escolares* e também nos anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, que ocorreu no período de 14 a 17 de julho de 2019, e que tem como título *Itens rotineiros e não rotineiros de Análise Combinatória: reflexões a partir da produção escrita de estudantes do Distrito Federal.*

[10] Como mostram Anais do VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática httpp://www.sbemparana.com.br/eventos/índex.php/SIPEM/VII_SIPEM/schedConf/presentations>

Ensino Fundamental e início do Ensino Médio brasileiro, como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA[11]), entre outros.

Entendemos que tais sistemas oficiais de avaliação, seus resultados e, consequentemente, os estudos deles decorrentes podem contribuir em processos que visam investigar, compreender, criar e propor soluções para problemas educacionais. Observamos, por exemplo, em estudos como os de Perego (2005), Santos e Buriasco (2010), França, Pina Neves e Pires (2015) a replicação de itens utilizados em avaliações em larga escala nacionais e internacionais com pequenos e médios grupos de estudantes. Seus resultados confirmam o quanto a análise qualitativa da produção escrita apresentada por eles auxiliou no entendimento de suas competências e dificuldades conceituais, além de ampliar o conhecimento sobre as escolas, os professores e os gestores que lidam com a matemática, seu ensino e aprendizagem.

Como é do conhecimento da comunidade educacional, por muito tempo, a avaliação nas escolas exerceu apenas o papel de classificar os estudantes a partir de um padrão predeterminado, relacionando a diferença ao erro e a semelhança ao acerto (NAGY SILVA; BURIASCO, 2005). Observar a avaliação sob outra perspectiva é um desafio que vem sendo proposto, veementemente, pela pesquisa em Educação e em Educação Matemática, desde a década de 1980 (SANTOS; GONTIJO, 2018). Os resultados de uma avaliação, seja ela escrita ou de outra natureza, trazem consigo informações valiosas, por vezes, não observadas pelos professores. Uma avaliação que esteja a serviço da aprendizagem traz em si vários aspectos a serem considerados, entre eles:

> Para o aluno, a avaliação pode servir para regular sua aprendizagem, tornar-se subsídio capaz de orientá-lo para a autonomia de pensamento, para perceber suas dificuldades, analisá-las e descobrir caminhos para superá-las. Para o professor, contribui para que ele possa repensar e reorientar a sua prática pedagógica, além de possibilitar-lhe entender e interferir nas estratégias utilizadas pelos estudantes. (NAGY SILVA; BURIASCO, 2005, p. 500)

O erro, de modo geral, tem sido visto como algo negativo ou como ausência do saber, como já nos alertava Pinto (2000). Mas, se observarmos sob outra ótica, é possível perceber que a análise dos erros permitirá ao professor melhor compreensão sobre o aprender e o não aprender, tornando-se ferramenta vital para o melhor planejamento das suas atividades (PINA NEVES; SILVA; BACCARIN, 2015; CONTESSA et al., 2014) . Dessa forma,

---

[11] < http://portal.mec.gov.br> O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, tradução de *Programme for International Student Assessment* (PISA), é uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada de forma amostral a estudantes na faixa etária dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. O Pisa é coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Há uma coordenação nacional em cada país participante – no caso do Brasil, a responsabilidade cabe ao Inep.

> os diferentes tipos de erros exigem do professor diferentes ações. O professor deve aprender a identificá-los, distinguir qual a natureza de cada um deles bem como que ações realizar para que sejam superados. Espera-se que o erro seja visto como um meio de desenvolvimento. (NAGY SILVA; BURIASCO, 2005, p. 501)

Desse modo, entendemos que observar, investigar e compreender o que o aluno já sabe é tão importante quanto investigar o que ele ainda não sabe. Quando o professor considera os erros e os acertos do aluno numa avaliação ou atividade, ele deixa de lado a preocupação apenas com o resultado e passa a considerar, também, o processo. Assim:

> Os registros que os alunos fazem ao resolver as questões dão valiosas informações sobre o modo como compreenderam e registraram suas ideias a respeito da situação apresentada. Tais informações fornecem rico material para o professor incorporar ao seu repertório no planejamento das aulas e para orientar suas escolhas didáticas, servindo como referência para conversar sobre matemática com o aluno. (BURIASCO, 2004, p.5, apud SILVA; DALTO, 2016, p.4)

Logo, como explicam Santos e Buriasco (2016), ao investigar a produção escrita dos estudantes na resolução de um problema, o professor pode acessar, por meio dessa resolução (totalmente correta, parcialmente correta ou incorreta), informações sobre o que eles sabem do conteúdo envolvido, indícios do que serão capazes de fazer no futuro e indícios de como a mediação precisa ser reconduzida para auxiliá-los em suas aprendizagens.

A análise da produção escrita tem sido apontada como uma estratégia de avaliação (SANTOS, 2014; SANTOS; BURIASCO, 2015; SANTOS; BURIASCO, 2016 apud, SANTOS; TEIXEIRA, 2018). Qualquer tarefa de matemática que possibilite o seu registro escrito pode ser o ponto de partida para que o professor a utilize como estratégia de avaliação, podendo ser caracterizada como um conjunto de ações a serem tomadas frente à produção escrita dos alunos (SANTOS, 2014, p.22 apud SANTOS; TEIXEIRA, 2018).

O referido conjunto de ações é composto, de um modo geral, por ações tais como: leitura vertical, leitura horizontal, inferência e interpretação (SANTOS, 2014; SANTOS; BURIASCO, 2015; SANTOS; BURIASCO, 2016 apud SANTOS; TEIXEIRA, 2018). Santos e Teixeira (2018) explicam que a leitura vertical se refere à leitura das produções de um mesmo aluno. Essa leitura permite que o professor tome ciência de como o estudante lida com as tarefas, quais as estratégias que ele utiliza para resolvê-las, permite que o professor construa um perfil da maneira como ele lida com elas, possibilita a detecção de similaridades na produção.

A leitura horizontal é a leitura da produção de todos os estudantes em uma mesma tarefa. Para Santos e Teixeira (2018, p. 9), ela

> possibilita a percepção de semelhanças e diferenças entre registros, auxilia na identificação, por exemplo, de estratégias e procedimentos de resolução mais utilizados, de erros e acertos mais frequentes. Auxilia também o professor a construir um perfil dos estudantes como um todo acerca do modo como lidam com as tarefas que lhe são propostas.

Para ir além do observável no registro do estudante, o professor pode fazer uso da inferência com a intenção de completar as informações já obtidas (SANTOS, 2014; SANTOS, BURIASCO, 2015; SANTOS; BURIASCO, 2016 apud SANTOS, TEIXEIRA, 2016). Desse modo:

> Ela pode auxiliar o professor, por exemplo, na identificação do que conduziu o aluno a determinada produção, ou seja, do processo que levou a isso, da compreensão que fez do enunciado da tarefa, do conteúdo matemático, etc. Neste sentido, a inferência também poderá oportunizar ao futuro professor a mobilização/desenvolvimento do conhecimento do conteúdo e dos estudantes, ao desencadear uma reflexão acerca do que conduziu o(s) alunos à produção apresentada, e do motivo de vários alunos resolverem da mesma maneira ou cometerem os mesmos erros. (SANTOS; TEIXEIRA, 2018, p.9)

Por meio da interpretação, o professor procura atribuir significado ao registro analisado. Santos e Teixeira (2018) esclarecem que essa ação requer que o professor seja capaz de interpretar os pensamentos dos estudantes que estão expressos em seus registros, que auxiliam compreender como os alunos lidam com as questões.

Santos e Teixeira (2018) salientam que as ações destacadas para a utilização da análise da produção escrita como estratégia de avaliação não devem excluir outras possíveis ações. Os questionamentos também fazem parte da análise da produção escrita. Alguns trabalhos exemplificam as perguntas que podem ser feitas nesse processo:

> As dificuldades de interpretação estão relacionadas à linguagem utilizada no enunciado, ao conteúdo matemático envolvido, a ambos, ou a outros aspectos? Como saber se o enunciado da questão é suficientemente claro para que o aluno a resolva? O enunciado da questão pode servir de contexto para se produzir significado a partir dele? As informações presentes no enunciado da questão fazem parte do conjunto de circunstâncias que tornam a questão acessível aos alunos? (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009, p. 79 apud SANTOS; TEIXEIRA, p. 9)

Muitas são as informações que podem ser obtidas a partir da análise da produção escrita dos estudantes. Porém, Santos (2008, p.22-23 apud SANTOS; TEIXEIRA, 2018) nos alertam que:

> as informações obtidas sobre a aprendizagem dos estudantes devem ser vistas apenas como uma amostra possível, tanto das informações quanto da aprendizagem destes . Deste modo, não se pode afirmar que um estudante não sabe determinado conteúdo pelo fato de não se ter obtido uma informação sobre ele sua produção escrita. Somente pode-se dizer algo a respeito do que o estudante fez, e não do que deixou de fazer.

Com relação à dinâmica de uma aula na qual o professor adota a análise das produções como uma perspectiva de trabalho, Santos e Buriasco (2015) tecem considerações relevantes e apresentam um quadro sistematizando duas propostas de trabalhos baseadas na perspectiva da Matemática Realística que são apresentadas em forma de sugestões e não como formas rígidas para as aulas. Consideramos que a replicação do quadro trará maior compreensão.

Quadro 2 – Dinâmica da aula de matemática tendo em vista a utilização da análise da produção escrita como estratégia de ensino

Dinâmica da aula de matemática	
Possibilidade 1 [considerada a partir do trabalho de Ciani (2012)]	Possibilidade 2 [considerada a partir do trabalho de Pires (2013)]
✓ O aluno resolve uma tarefa apresentando sua produção escrita; ✓ O professor recolhe a resolução do aluno e realiza uma análise da produção presente nessa resolução; ✓ Com base nas informações obtidas na análise realizada, o professor elabora intervenções, sob a forma de uma trajetória de ensino e aprendizagem, de modo que essas possam auxiliá-lo a guiar o aluno na reinvenção; ✓ O professor traz para sala de aula informações acerca da produção do aluno para que esse possa analisá-la e discutir com os colegas; ✓ Tendo em vista as informações do professor, o aluno segue em seu processo de matematização, buscando desenvolver suas ferramentas matemáticas; ✓ O professor guia o aluno, tendo como referência a trajetória de ensino e aprendizagem elaborada, até entender que esse conseguiu desenvolver suas ferramentas matemáticas ou que conseguiu discutir aspectos matemáticos subjacentes a resolução apresentada.	✓ O aluno resolve uma tarefa apresentando sua produção escrita; ✓ O professor recolhe a resolução do aluno e realiza uma análise da produção presente nessa resolução; ✓ Com base nas informações obtidas na análise realizada, o professor intervém no trabalho do aluno por meio de comentários escritos na resolução apresentada, pedindo justificativas e/ou esclarecimentos. Inicia-se, assim, um processo de comunicação por escrito com o aluno; ✓ O aluno recebe sua resolução, agora com os comentários do professor, e busca refletir sobre sua resolução e tenta explicar, por meio de sua produção escrita, o que fez, para dar continuidade em seu trabalho; ✓ O professor recolhe novamente a produção do aluno e realiza outra análise. Caso o aluno já tenha desenvolvido ferramentas ou discutido aspectos matemáticos subjacentes a resolução apresentada a reinvenção guiada é finalizada. Caso contrário, o professor novamente intervém no trabalho do aluno; ✓ Novamente de posse de sua resolução e de outros comentários e/ou questionamentos do professor, o aluno retoma sua atividade; ✓ Esse processo repete-se até o professor entender que o aluno conseguiu desenvolver suas ferramentas matemáticas.

Fonte: SANTOS (2014 apud SANTOS; BURIASCO, 2015).

A apresentação feita a respeito das potencialidades da análise dos registros dos estudantes nos mostra que, ao adotá-la como estratégia de ensino, o professor pode utilizá-la para obter informações acerca dos processos de elaboração de intervenções, comentários e/ou questionamentos na produção do estudante para que, dessa forma, ele possa ser autor do seu próprio conhecimento (SANTOS; BURIASCO, 2015)

CAPÍTULO 5

O MÉTODO

Cientes do importante papel exercido pela avaliação escrita, destinamos este capítulo para compartilhar o que uma "simples"[12] avaliação escrita tem a nos dizer. Por meio da análise da produção escrita de estudantes do Ensino Médio sobre o conteúdo de Análise Combinatória, buscamos responder aos seguintes questionamentos: a) Qual (is) estratégia(s) é (são) escolhida(s) com maior frequência pelos estudantes? b) Quais erros eles mais comentem e qual a natureza deles? c) Como os estudantes lidam com questões rotineiras e não rotineiras[13]?

O estudo foi realizado com 246 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública, localizada na região administrativa do Recanto das Emas, no Distrito Federal, sendo 90 do sexo masculino e 156 do sexo feminino. À época da realização do estudo, eles tinham idades entre 16 e 21 anos, perfazendo as 10 turmas do 3º ano do turno matutino da escola, sendo identificadas como os terceiros anos de A ao J e estavam distribuídas igualmente entre dois professores de matemática, sendo a autora um deles. Durante o primeiro bimestre, período que se deu de 15/02 a 26/04 de 2018, foi ministrado a estes estudantes o conteúdo de Análise Combinatória, subdividido em: Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial de um número natural, permutações simples e com repetição, agrupamentos (arranjo e combinação); subdivisão esta que está em concenso com muitos livros didáticos. De acordo com o Currículo em Movimento do Distrito Federal, as orientações preveem que este conteúdo seja ministrado na 2ª série do Ensino Médio; porém, esses estudantes ainda não haviam tido contato com o referido assunto devido a problemas da própria escola. Assim, os professores, por sua vez, entenderam que o assunto é mais valorizado que outros em vestibulares e afins e optaram por ministrá-lo.

A opção metodológica adotada pelos professores para ministrar o conteúdo baseou-se no uso de aula expositiva, na apresentação de exemplos seguida de resolução das atividades

[12] Apresentamos o termo entre aspas para lembrar a subjetividade contida no ato de avaliar. Uma avaliação é pode ser fácil ou difícil para quem? Para o professor? Para o estudante? Para ambos? Tudo pode ser uma questão de opiniões intelectuais distintas.

[13] Diante da grande discussão existente em torno dos termos "item contextualizado ou não contextualizado", discussões estas, por vezes até de cunho filosófico, preferimos adotar conforme Ferreira (2013) quando ao tratar dos Enunciados de Tarefas de Matemática destaca os termos "tarefas rotineiras e não rotineiras". As tarefas rotineiras são aquelas frequentes em sala de aula e nos livros didáticos, quase sempre envolvem apenas conhecimentos memorizados e técnicas operatórias, já as tarefas não rotineiras são pouco, ou quase nunca, frequentes em sala de aula e nos livros didáticos, apresentam certo nível de complexidade.

propostas no livro didático e de algumas questões de vestibulares. Vale ressaltar que a descrição do formato das aulas é baseada nas anotações das minhas próprias aulas, no diálogo entre os dois professores nas coordenações pedagógicas, no trabalho conjunto quando da elaboração do plano de aula para essas turmas, na troca de materiais como listas de exercícios e, na medida do possível, na tentativa de aplicar a mesma avaliação para todas as turmas.

Após essa experiência, os estudantes foram submetidos a uma avaliação escrita bimestral individual (anexo) contendo oito itens, sendo autorizado o uso da calculadora e estimulada a preservação de todas as tentativas de resolução, mesmo aquelas consideradas pelos estudantes como inadequadas ou incipientes. A avaliação foi construída propositalmente, pelas pesquisadoras, da seguinte maneira: os quatro primeiros itens do tipo rotineiros, os quatro últimos itens do tipo não rotineiros, que compuseram edições anteriores do ENEM. A seleção dos itens foi feita de forma a abranger conceitos desde o princípio fundamental da contagem até agrupamentos.

Tendo a intenção de melhor compreender a produção escrita dos estudantes e considerando as semelhanças existentes entre os procedimentos/estratégias adotadas pelos estudantes para responderem às atividades propostas, construimos um quadro que ramifica as estratégias de resolução adotada por eles e as analisamos como sugerem Nagy Silva e Buriasco (2005), Bortoloti et al. (2011), Contessa et al. (2014) e Pina Neves et al. (2015). O Quadro 3, a seguir, exemplifica tal atividade.

Quadro 3 – Exemplo de estratégias adotadas pelos estudantes na resolução dos itens

1-	Instrumento em branco;
Processo (Erro)	
2-	Apenas uma resposta numérica incorreta ou anotações sem cálculo ou discussão, marcação de uma alternativa sem cálculo ou discussão;
3-	Troca o tipo de algoritmo necessário para resolver o problema;
4-	Utiliza o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), mas não chega à solução;
5-	Elege corretamente o algoritmo apropriado, mas não completa ou não conclui com o resultado esperado;
6-	Enumeração não sistemática, que permite encontrar apenas algumas soluções do problema, mas não todas, ou soluções repetidas já encontradas anteriormente, construção inconveniente de um diagrama de árvore, generalização equivocada do modelo intuitivo criado por ele;
Acerto	
7-	Elege corretamente o algoritmo adequado para a resolução do problema, chega à solução problema;
8-	Recorre ao PFC, chega à solução;
9-	Utiliza a enumeração sistemática, que permite encontrar todas as soluções, constrói corretamente um diagrama de árvore, faz generalizações, chega à solução do problema.

Fonte: dados coletados pela pesquisa.

5.1 ANALISANDO OS REGISTROS

A fim de melhor organizar a apresentação dos resultados, optamos por fazê-lo da seguinte forma: apresentação do item seguido da tabela com as estratégias encontradas e suas respectivas quantidades, gráfico comparativo entre os resultados obtidos nos dois itens (rotineiro x não rotineiro) e análise dos resultados. A ordem das análises será feita da seguinte forma: item 1 versus item 5, item 2 versus item 8, item 3 versus item 6, item 4 versus item 7.

5.1.1 Análise 1: item 01 versus item 05

Figura 7 – Item 1 rotineiro apresentado aos estudantes.

> As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Considerando o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9, quantas placas podemos formar?

Fonte: dados coletados pela pesquisa.

O enunciado propõe uma situação que aparece com frequência na sala de aula e nos livros didáticos. Para resolvê-la, é necessário que o aluno utilize seus conhecimentos sobre PFC. O Quadro 4 mostra os resultados obtidos.

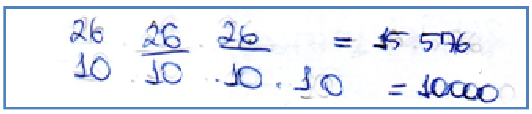
Quadro 4 – Resultados por estratégia do item 1 rotineiro

Estratégia	1	Erro-2	Erro-3	Erro-4	Erro-5	Erro-6	Acerto-7	Acerto-8	Acerto-9
Quantidade	28%	4%	4%	28%	0%	0%	0%	35%	0%

Fonte: dados coletados pela pesquisa.

As respostas obtidas na estratégia 4 foram bem variadas. Apresentamos abaixo alguns exemplos. Nessa estratégia, os estudantes perceberam que deveriam utilizar o PFC, porém não conseguiram concluir e chegar à solução do problema.

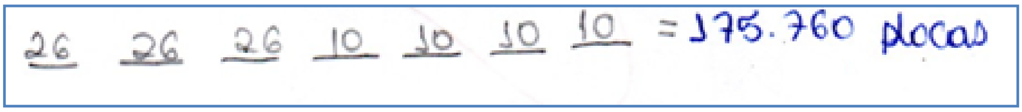
Figura 8 – Resposta do estudante A1 – Estratégia 4.



Fonte: dados coletados pela pesquisa.

Nessa estratégia, o erro observado com maior frequência foi a falta de um último zero ou dos três últimos zeros; supomos que o erro se deu devido à falta de preparo dos estudantes quanto ao manuseio da calculadora, a maioria das calculadoras simples (utilizada pelos estudantes) comporta no máximo oito dígitos. Aqui vale ressaltar a necessidade do professor, ao trabalhar com escritas numéricas maiores, discutir com os estudantes processos alternativos que recorram a uma menor quantidade de cálculos. Neste item, por exemplo, eles poderiam multiplicar os três primeiros números e acrescentar quatro zeros ao final. Tal dificuldade pode revelar baixa compreensão da escrita numérica, do Sistema de Numeração Decimal e dos princípios aditivo e/ou multiplicativo.

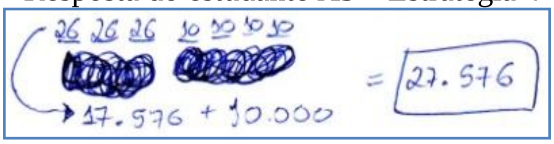
Figura 9 – Resposta do estudante A2 – Estratégia 4



Fonte: dados coletados pela pesquisa.

Um erro bastante corriqueiro foi o de somar quando deveria multiplicar e vice-versa. Aqui podemos ver a importância de o professor trabalhar o conteúdo de forma que o estudante compreenda quando as escolhas ocorrem simultaneamente ou em etapas separadas.

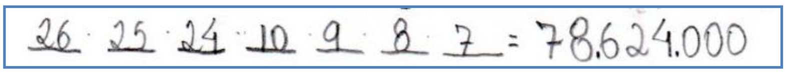
Figura 10 – Resposta do estudante A3 – Estratégia 4



Fonte: dados coletados pela pesquisa.

É importante ressaltar que, nessa estratégia, supomos que o estudante muitas vezes não percebe a existência (ou não) de restrições no enunciado, o que prejudica a interpretação de sua produção. No exemplo a seguir, o estudante cria restrições que não existem no enunciado.

Figura 11 – Resposta do estudante A4 – Estratégia 4



Fonte: dados coletados pela pesquisa.

Para a organização da produção em estratégias de resolução, foram valorizadas as diferentes maneiras de se escrever o resultado final, como podemos observar a seguir:

Figura 12 – Resposta do estudante A5 – Estratégia 8

$$\underbrace{26 \quad 26 \quad 26} \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 = 26^3 . 10^4$$

Fonte: dados coletados pela pesquisa.

De modo geral, embora nossa hipótese inicial fosse de que o item era de baixo nível de complexidade, o que se observou foi uma porcentagem baixa do quantitativo de estudantes que o responderam corretamente, o que corresponde a 35% e, por outro lado, 28% dos estudantes que nem ao menos tentaram resolver o item. Vejamos a seguir o item 5 apresentado aos estudantes.

Figura 13 – Item 5 não rotineiro apresentado aos estudantes.

Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que “L” e “D” representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é

- A I.
- B II.
- C III.
- D IV.
- E V.

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

O enunciado propõe uma situação pouco presente em sala de aula. Para que o estudante fosse bem sucedido em sua resolução, ele deveria: aplicar o PFC em cada uma das opções (I-V), atentar para a restrição contida no enunciado “cujo número de senhas distintas seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes”, ser capaz de concluir qual opção melhor se encaixa no intervalo fornecido.

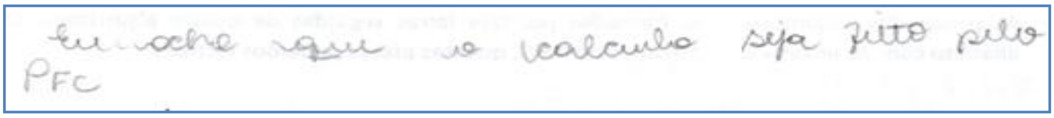
Quadro 5 – Resultados por estratégia do item 5

Estratégia	1	Erro-2	Erro-3	Erro-4	Erro-5	Erro-6	Acerto-7	Acerto-8	Acerto-9
Quantidade	22%	46%	2%	5%	0%	0%	0%	25%	0%

Fonte: dados coletados pela pesquisa.

Para esse item, tivemos elevado número da estratégia 2, que corresponde a 46%, em que a maioria possivelmente apresentou o conhecido “chute”, sem deixar indícios de pensamento de suas tentativas e/ou compreensões.

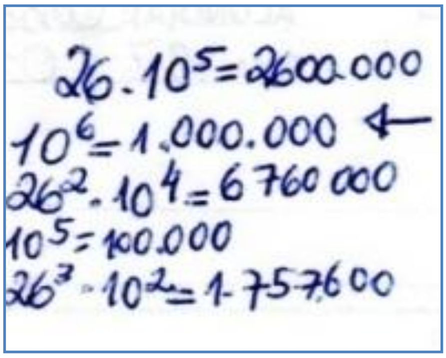
Figura 14 – Resposta do estudante A6 – Estratégia 2.



Fonte: dados coletados pela pesquisa.

A produção abaixo nos chamou a atenção, pois alguns estudantes compreenderam o comando, realizaram os cálculos corretamente para cada opção, mas não conseguiram definir qual resultado se encaixaria melhor no intervalo fornecido pelo enunciado.

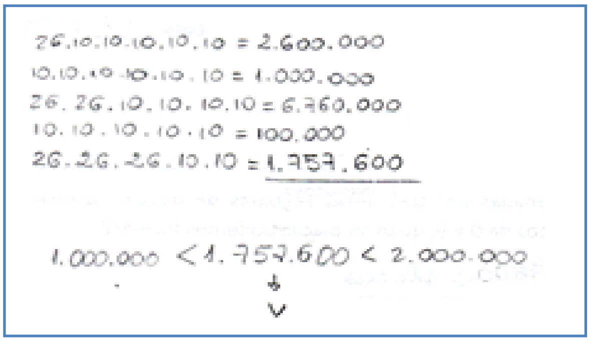
Figura 15 – Resposta do estudante A7 – Estratégia 4



Fonte: dados coletados pela pesquisa.

Por outro lado, vemos, a seguir, a produção de um estudante que mostra compreensão no julgamento e na busca pela alternativa pertinente.

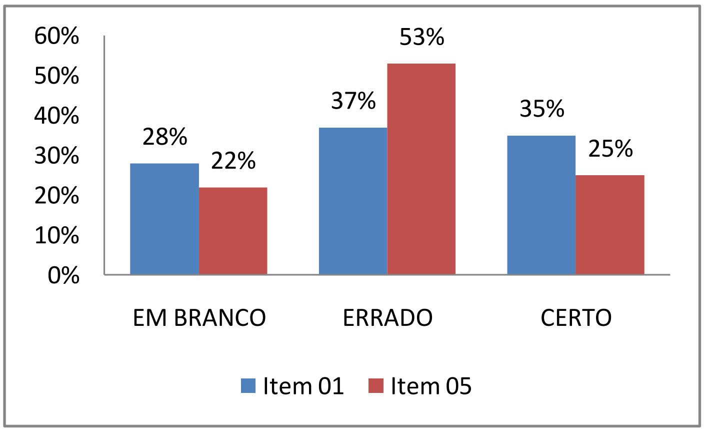
Figura 16 – Resposta do estudante A8 – Estratégia 8



Fonte: dados coletados pela pesquisa.

O Gráfico 1, a seguir, mostra as variações de resultados que ocorreram do item 1 para o item 5

Gráfico 1 – Sistematização dos resultados dos itens 01 e item 05



Fonte: dados coletados pela pesquisa.

Ao compararmos os dados do item 1 e do item 5, observamos a redução do número de acertos: a porcentagem cai de 35% para 25%. Se focarmos nosso olhar somente para a ferramenta matemática necessária para a resolução de ambos os itens, entendemos que bastaria que fosse feita a aplicação do PFC; no entanto, quando voltamos o olhar para as diferenças contidas nas habilidades exigidas, passamos a compreender que o item 5 exige que mais habilidades sejam acionadas do que no item 1.

5.1.2 Análise 2: item 02 versus item 08

Figura 17 – Item 2 rotineiro apresentado aos estudantes

De quantos modos distintos podemos organizar 5 alunos numa sala de aula, tendo à disposição 30 carteiras?

Fonte: dados da pesquisa.

É bastante comum vermos item desse tipo em livros didáticos. Para a resolução dessa questão, o estudante pode adotar o PFC ou aplicar a fórmula de arranjo.

Quadro 6 – Resultados por estratégia do item 2

Estratégia	1	Erro-2	Erro-3	Erro-4	Erro-5	Erro-6	Acerto-7	Acerto-8	Acerto-9
Quantidade	18%	3%	19 %	9%	10%	0%	25%	16%	0%

Fonte: dados da pesquisa.

Neste item, obtivemos 41% de acerto, porém com relação aos erros cometidos tivemos uma diversidade. A resposta mostrada na Figura 18 representa um dos erros mais comuns efetuados pelos estudantes, que é o de não saber o tipo de agrupamento que estão tratando, ou seja, não conseguem diferenciar se o agrupamento é ou não ordenado, consequentemente adotam o algoritmo inadequado ao modelo.

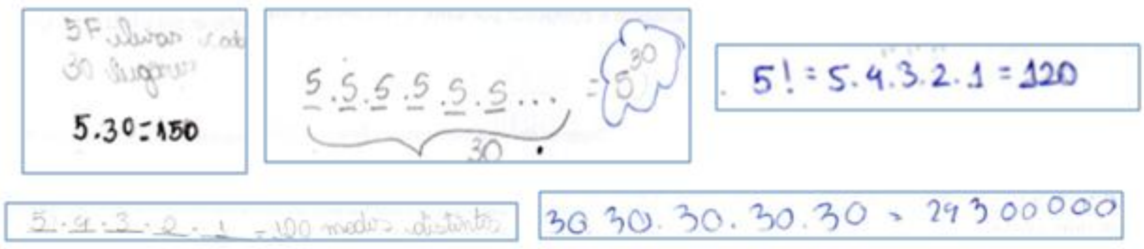
Figura 18 – Resposta do estudante A9 – Estratégia 3

$$C_{30,5} = \frac{30!}{5!(30-5)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot \cancel{25!}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{25!}} = \frac{17100720}{120} = 142.506$$

Fonte: dados da pesquisa.

Os próximos exemplos remetem à variedade de interpretações; nesta categoria, o estudante utiliza o PFC, mas não compreende quais as etapas a serem observadas para a resolução.

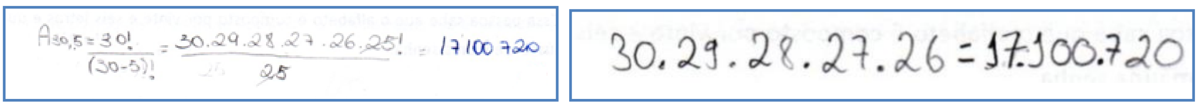
Figura 19 – Respostas de 5 estudantes – Estratégia 4



Fonte: dados da pesquisa.

A seguir temos dois exemplos de respostas corretas: na primeira o estudante dá preferência para o algoritmo, enquanto que na segunda ele prefere utilizar o PFC.

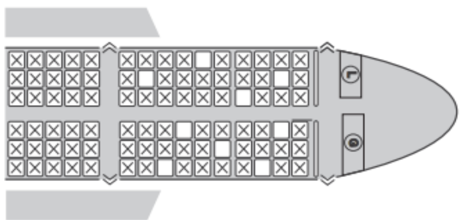
Figura 20 – Respostas de 2 estudantes – Estratégia 7 e 8 respectivamente



Fonte: dados da pesquisa.

Apresentaremos a seguir, o item 8

Figura 21 – Item 8 não rotineiro apresentado aos estudantes



Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

Ⓐ $\frac{9!}{2!}$

Ⓑ $\frac{9!}{7! \times 2!}$

Ⓒ $7!$

Ⓓ $\frac{5!}{2!} \times 4!$

Ⓔ $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

Para resolver o item, os estudantes deveriam utilizar técnicas semelhantes às usadas no item 2, portanto deveriam utilizar o PFC ou a fórmula de arranjo. A diferença do item 2 para o item 8 é que no item 2 o enunciado apresenta-se de forma direta, bastando ao aluno ser capaz de adotar o algoritmo adequado, enquanto que no item 8, por meio da interpretação, o aluno deve ser capaz de: verificar corretamente o número de lugares vazios, pensar nas várias possibilidades de escolhas para cada uma das sete pessoas, atentando-se que as escolhas são ordenadas. Os resultados nos revelam baixo rendimento dos estudantes, fato que é verificado no quadro 7 abaixo.

Quadro 7 – Resultados por estratégia do item 8

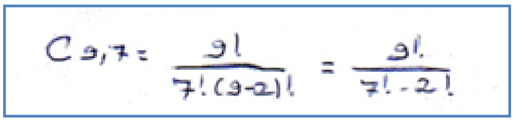
Categoria	1	Erro-2	Erro-3	Erro-4	Erro-5	Erro-6	Acerto-7	Acerto-8	Acerto-9
Quantidade	17%	46 %	16 %	6%	1%	0%	9 %	5%	0 %

Fonte: dados da pesquisa.

Neste item, a maior frequência de erros se dá para marcações no gabarito sem discussão 46%. Observamos um número pequeno de acertos, apenas 14%. Portanto, inferimos que o item apresentou-se complicado para os estudantes.

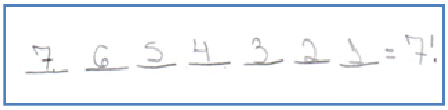
Os tipos de erros observados, são basicamente os mesmos encontrados no item 2.

Figura 22 – Resposta do estudante A10– Estratégia 3



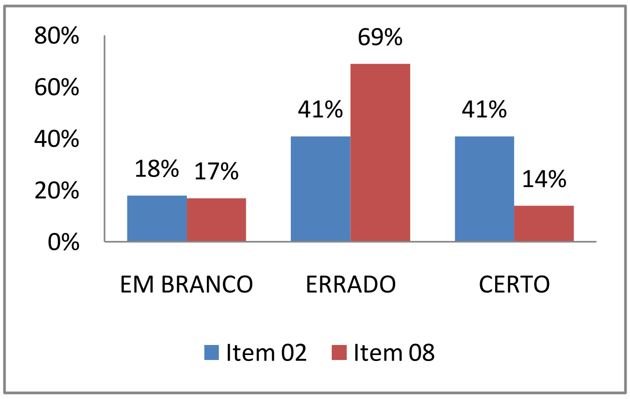
Fonte: dados da pesquisa.

Figura 23 – Resposta do estudante A11 – Estratégia 4



Fonte: dados da pesquisa.

Gráfico 2 – Sistematização dos resultados do item 02 e do item 08



Fonte: dados da pesquisa.

Podemos observar que, embora o raciocínio deva ser o mesmo para ambas as questões, existe uma queda bastante considerável para o número de acertos, caindo de 41% para 14%. O que nos mostra que, em contextos diferentes, apenas o conhecimento da utilização de algoritmos é insuficiente. Entendemos que, neste caso, não devemos pensar somente nas “falhas matemáticas” dos estudantes, o item 8 exigiu além da aplicação de algoritmos, uma boa leitura e interpretação por parte dos estudantes. Falando exclusivamente do arranjo, Morgado et al. (2006) observam que esta técnica nem mesmo é mencionada em seu capítulo que trata de Análise Combinatória. Na visão dos autores, ensinar esta técnica é totalmente desnecessária: “[...] Aliás, para que servem os arranjos?” (MORGADO et al., 2006, p.112)

5.1.3 Análise 3: item 03 versus item 06

Figura 24 – Item 3 rotineiro apresentado aos estudantes

Determine o número de anagramas da palavra:

a) ARARA
b) BATATA

Fonte: dados da pesquisa.

Item como este é considerado rotineiro, aparece com frequência nos livros didáticos. Tais itens têm a intenção de servir apenas como um estímulo para que os estudantes treinem a aplicação do algoritmo de permutações com repetição.

Quadro 8 – Resultados por categoria do item 3a

Estratégia	1	Erro-2	Erro-3	Erro-4	Erro-5	Erro-6	Acerto-7	Acerto-8	Acerto-9
Quantidade	10%	4 %	8 %	7%	17%	0%	54 %	0%	0 %

Fonte: dados da pesquisa.

Quadro 9 – Resultados por categoria do item 3b

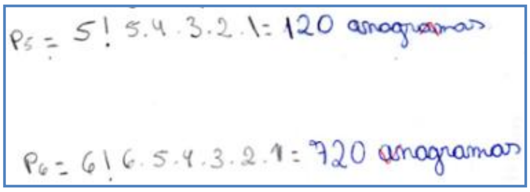
Estratégia	1	Erro-2	Erro-3	Erro-4	Erro-5	Erro-6	Acerto-7	Acerto-8	Acerto-9
Quantidade	11%	1 %	4 %	14%	13%	0%	57 %	0%	0 %

Fonte: dados da pesquisa.

Podemos observar certa coerência com relação aos resultados do item 3, embora não possamos afirmar que os estudantes que acertaram o item 3- a) sejam os mesmos que acertaram o item 3 -b). Tendo em vista os resultados anteriores, percebemos um bom desempenho dos estudantes no item.

Seguindo com as análises, aqui temos um exemplo no qual supomos que o estudante observa que haverá uma permutação entre as letras, mas não observa a existência de elementos repetidos.

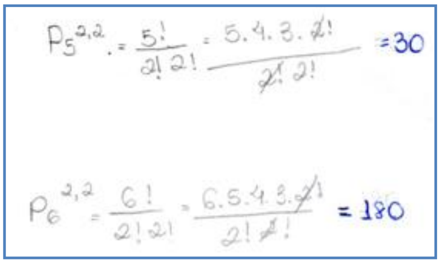
Figura 25 – Resposta do estudante A12 – Estratégia 3



Fonte: dados da pesquisa.

Acreditamos que alguns estudantes, por falta de atenção, acabam cometendo erros como este abaixo, em que não observam a quantidade correta de elementos repetidos.

Figura 26 – Resposta do estudante A13 – Estratégia 4



Fonte: dados da pesquisa.

Figura 27 – Item 6 apresentado aos estudantes

Para cadastrar-se em um *site*, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse *site* é dado por

A $10^2 \cdot 26^2$

B $10^2 \cdot 52^2$

C $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$

D $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

E $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Para que o estudante tenha sucesso na resolução deste item, ele deve ser capaz de: fazer uma boa interpretação do enunciado, observar que "letras maiúsculas se diferenciam das minúsculas", adotar o PFC além de perceber que existe uma permutação com repetição entre letras e números, pois o enunciado diz que "podem estar em qualquer ordem".

Quadro 10 – Resultados por categoria do item 6

Categoria	1	Erro-2	Erro-3	Erro-4	Erro-5	Erro-6	Acerto-7	Acerto-8	Acerto-9
Quantidade	20%	51 %	2%	17%	0%	0%	0%	10%	0 %

Fonte: dados da pesquisa.

Esse item apresentou-se difícil para os estudantes, visto que somente 10% souberam responder corretamente. Os 17% que cometeram erros na categoria 4, apresentaram erros como o de não observar a quantidade correta de letras e/ou não perceberem a existência de uma permutação com repetição entre letras e números. Esses tipos de erro apontam a plausabilidade dos distratores A, B e D, conforme se observa nos exemplos a seguir:

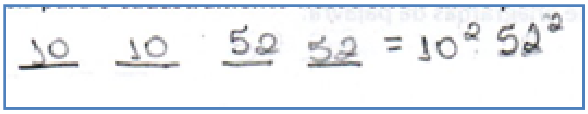
Figura 28 – Resposta do estudante A14– Estratégia 4

$$\underbrace{10 \cdot 10}_{10^2} \cdot \underbrace{26 \cdot 26}_{26^2}$$

$$100 \cdot 676 = 67.600$$

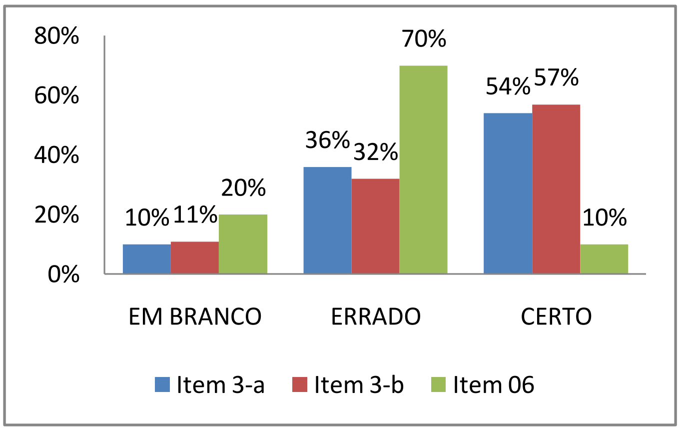
Fonte: dados da pesquisa.

Figura 29 – Resposta do estudante A15– Estratégia 4



Fonte: dados da pesquisa.

Gráfico 3 – Sistematização dos itens 03- a, 03- b e item 06



Fonte: dados da pesquisa.

Obviamente, não queremos dizer que o grau de dificuldade entre os itens 3 e 6 seja exatamente o mesmo, já que os resultados mostram o baixo desempenho no item 6; porém, vale ressaltar que esperávamos que o estudante que conseguiu responder corretamente ao item 1 e ao item 3, fosse o mesmo que responderia corretamente ao item 6, pois tratava-se da manipulação de ferramentas bastante similares. No entanto, os resultados indicam que, por mais que os itens tivessem alguma proximidade matemática, são itens distantes em outros termos.

5.1.4 Análise 4: item 04 versus item 07

Figura 30 – Item 4 rotineiro apresentado aos estudantes

Num grupo de 8 estudantes, de quantos modos podemos escolher 2 deles para ir a um passeio?

Fonte: dados da pesquisa.

O item requer que o estudante seja capaz de perceber que se trata de um agrupamento não ordenado, ou seja, uma combinação.

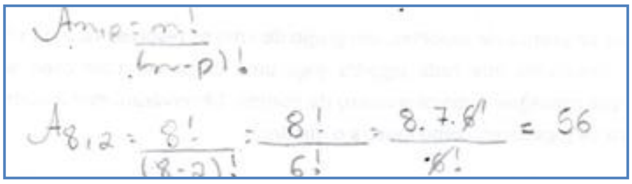
Quadro 11 – Resultados por estratégia do item 4

Estratégia	1	Erro-2	Erro-3	Erro-4	Erro-5	Erro-6	Acerto-7	Acerto-8	Acerto-9
Quantidade	20%	2%	17%	15%	4%	1%	39 %	1%	0%

Fonte: dados da pesquisa.

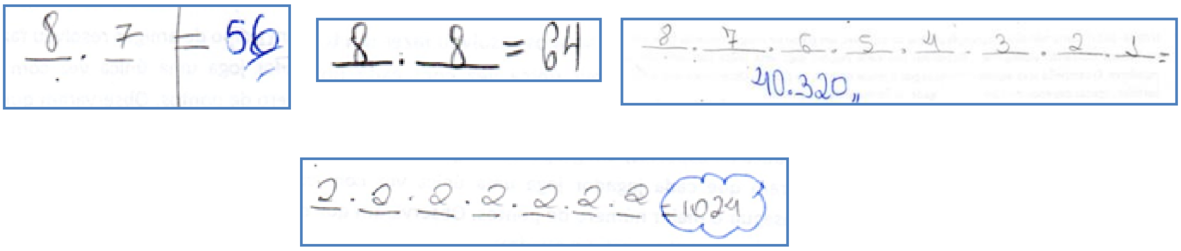
Nesse item, tivemos 40% de acerto enquanto que os erros foram 39%. Os tipos de erros apresentados foram diversos. Note que os erros com a utilização das estratégias 3 e 4 foram os mais frequentes.

Figura 31 – Resposta do estudante A16 – Estratégia 3



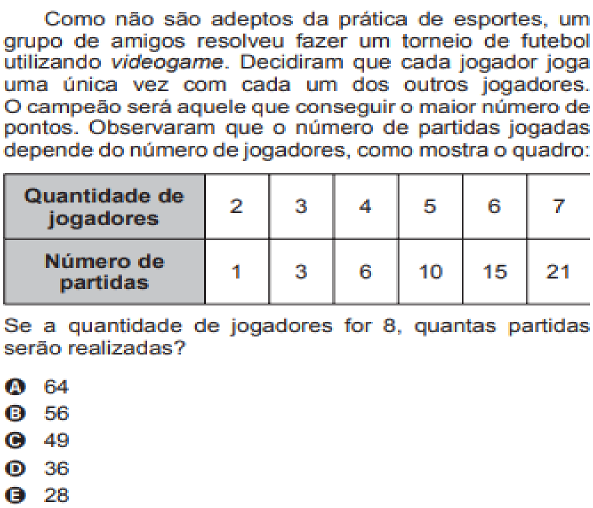
Fonte: dados da pesquisa.

Figura 32 – Respostas de 4 estudantes – Estratégia 4



Fonte: dados da pesquisa.

Figura 33 – Item 7 não rotineiro apresentado aos estudantes



Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

A 64
B 56
C 49
D 36
E 28

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

Como podemos perceber, o modelo de algoritmo adotado para o item 4 e 7 é o mesmo, inclusive os resultados são iguais. Para a resolução do item 7, esperava-se que, mesmo que o estudante não tivesse tido contato com o conteúdo de análise combinatória, ele fosse capaz de resolvê-lo utilizando métodos alternativos ou que, por meio da tabela apresentada, ele fosse capaz de perceber algum padrão. Vejamos os resultados no quadro 11.

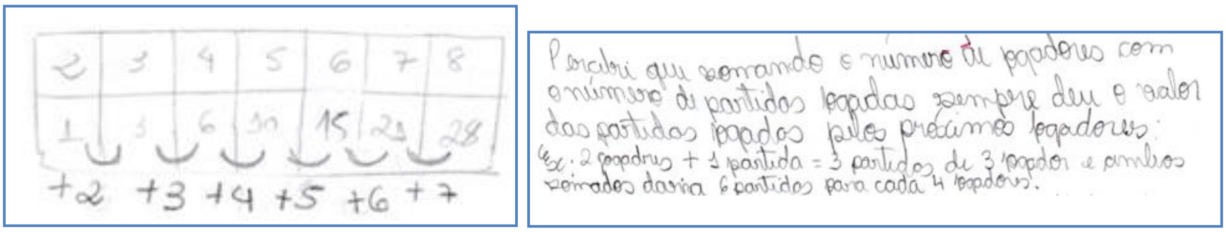
Quadro 12 – Resultados por estratégias do item 7

Estratégia	1	Erro-2	Erro-3	Erro-4	Erro-5	Erro-6	Acerto-7	Acerto-8	Acerto-9
Quantidade	14%	33%	2%	8%	0%	2%	9%	0%	32%

Fonte: dados da pesquisa.

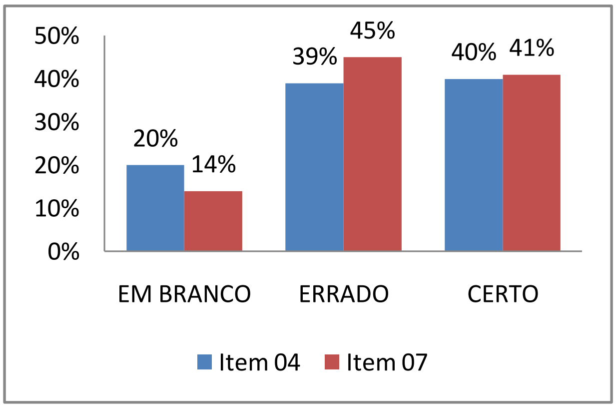
Os resultados deste item tornaram-se bastante interessantes, pois aqui, dos 41% dos estudantes que acertaram, 32% concentram-se na categoria 9. Acreditamos que a migração para esta categoria se deu pelo formato do item que permitiu ao estudante utilizar apenas a intuição e fazer generalizações, fato que até então não tínhamos percebido.

Figura 34 – Respostas de 2 estudantes – Estratégia 9



Fonte: dados da pesquisa.

Gráfico 4 – Sistematização dos resultados dos itens 04 e 07



Fonte: dados da pesquisa.

Observa-se que a porcentagem de acerto se manteve próxima nos dois itens 40% e 41%, acreditamos que o motivo seja que a questão 7 apresenta uma tabela totalmente intuitiva; sendo assim, mesmo que o estudante não soubesse utilizar a fórmula de combinação, ele poderia resolver a questão completando a lógica da tabela (como foi mostrado em exemplos acima) e, caso a tabela não fosse apresentada, acreditamos que haveria uma redução importante na quantidade de acertos.

5.2 REFLEXÕES PARA O PROFESSOR

De modo geral, foi possível perceber que os estudantes foram mais bem-sucedidos em suas tentativas de resolução nos itens rotineiros (1, 2, 3 e 4) do que nos itens não rotineiros (5, 6, 7 e 8). Além disso, nota-se, para todos os itens, baixa capacidade de resolução, por se tratar de estudantes do último ano do Ensino Médio. O que comprova os estudos de Gonçalves (2014), que registram o conteúdo de Análise Combinatória como de difícil compreensão pelos estudantes do Ensino Médio, independentemente de estar no início ou no término.

Quando comparamos os itens rotineiros com os itens não rotineiros, observamos que eles foram escolhidos de modo a facilitar possíveis conexões, ou seja, visavam promover mais entendimento em função de suas proximidades matemáticas. Todavia, são itens distantes em termos de necessidades de leitura e interpretação. Logo, os resultados obtidos se aproximam do estudo de Ribeiro e Mendes (2016), que questionam se a dificuldade dos estudantes na resolução dos itens de matemática do ENEM seria por ineficiência matemática ou ineficiência interpretativa. As autoras relatam que, em uma das questões, muitos estudantes tinham conhecimento da fórmula para o cálculo do volume de um determinado sólido, mas não concluíram a questão por falta de compreensão do que de fato era requisitado.

Acreditamos que os itens não rotineiros se apresentaram difíceis aos estudantes, pois além do conhecimento matemático, este tipo de item requer que outras habilidades sejam trabalhadas anteriormente com os estudantes, como, por exemplo, leitura e interpretação. Vimos isso claramente na comparação do item 4 com o item 7; nesses itens, os processos de cálculos são os mesmos, os resultados são os mesmos, mas a maneira como o item 7 veio "vestido" tornou-se uma barreira para os estudantes.

No estudo, foi possível perceber que respostas corretas não são o bastante para comprovar se houve de fato a aprendizagem. Nagy e Buriasco (2008) nos alertam que é possível que os estudantes resolvam problemas corretamente sem que exista uma real compreensão, isso se dá pelo uso de recursos mnemônicos, tanto sobre conceitos quanto sobre quais procedimentos devam ser apresentados para responder a determinado enunciado.

O uso do algoritmo foi a maior preferência dos estudantes, já que tinham acabado de estudá-los; porém, nem todos tiveram sucesso nas resoluções. Isso mostra certa ineficácia do amontoado de fórmulas que o professor ensina ao ministrar o conteúdo, sugerindo que se busque outros caminhos para ensinar o conteúdo. Não queremos dizer que as fórmulas não têm validade, mas queremos mostrar que até que haja certo amadurecimento do estudante com o conteúdo, as fórmulas acabam se tornando um obstáculo e não cumprem sua função de auxiliar.

Ainda sobre a inserção dos algoritmos, a recomendação é que sejam feitos aos poucos, à proporção que os estudantes sentirem a necessidade de um método mais geral. Morgado et al. (2006, p.111) nos alertam, dizendo:

> Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas. Quem troca o princípio básico da contagem por fórmulas de arranjo, permutações e combinações, tem dificuldade de resolver até mesmo nosso segundo exemplo (o das bandeiras).

A fim de minimizar a quantidade abusiva do uso de fórmulas para o ensino da Análise Combinatória, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos (GONÇALVES, 2014; LEMOS, 2016; MELLO, 2017; RODA, 2018), visando propor o ensino deste conteúdo utilizando somente o PFC. Em seu trabalho, Gonçalves (2014) apresenta o PFC como uma ferramenta muito eficaz para o ensino da Análise Combinatória. Adotando a metodologia de resolução de problemas, a autora busca mostrar que as tarefas relacionadas a esse conteúdo podem ser resolvidas, quase que exclusivamente, pelo princípio multiplicativo. Em sua pesquisa, a autora também trabalha com um espaço de tempo entre uma análise inicial e uma análise final da produção escrita dos estudantes e conclui que, com o passar do tempo, os estudantes dão preferência ao uso do PFC, pois, assim, não precisam memorizar fórmulas e também não há a necessidade inicial de julgar se o problema apresentado trata-se de permutação, arranjo ou combinação.

Gonçalves (2014, p.) também observa que, "[tomando] a utilização da resolução de problemas como ponto de partida e o PFC como ferramenta didático-pedagógica, é possível desenvolver de forma mais ampla o raciocínio combinatório dos estudantes". A autora ressalta "a necessidade de se trabalhar conceitos de análise combinatória desde as séries iniciais do Ensino Fundamental" (GONÇALVES, 2014, p.) o que facilitaria a compreensão nas diversas situações combinatórias e possibilitaria o reconhecimento da natureza multiplicativa dos problemas propostos.

Contessa et al. (2014), ao estudarem as dificuldades apresentadas pelos estudantes ao resolverem itens de análise combinatória, observam que os erros que ocorrem com maior frequência são: resposta intuitiva errada, troca do tipo de modelo (algoritmo) e enumeração não sistemática (encontram algumas soluções não todas), o que se assemelha aos resultados encontrados em nosso estudo quando associamos as estratégias 2, 3 e 6 respectivamente. Não podemos deixar de questionar a prática adotada pelos professores ao ministrarem o conteúdo. Não queremos dizer que quando o professor utiliza somente aulas expositivas o resultado seja improdutivo, pois temos muitos casos de sucessos utilizando somente aulas dessa tipologia. Porém, o que queremos problematizar é a necessidade de diversificar as estratégias de mediação do conteúdo, em especial, já incorporando ações de natureza mais investigativa, fazendo uso de itens rotineiros e não rotineiros ao longo de todo o processo e não somente nas avaliações escritas.

A atividade desenvolvida revelou minha própria falha no processo avaliativo, mostrando que eu, enquanto professora e pesquisadora da minha própria prática, não poderia supor que, ao inserir itens com mesma proximidade de resolução numa avaliação, levaria os estudantes a fazerem as conexões necessárias. A pesquisa mostrou que o processo e a avaliação precisam ter coerência; se em sala de aula o professor só trabalha com itens rotineiros e na avaliação escrita usa itens não rotineiros, é como se as regras do jogo fossem alteradas no meio da partida. Esta ação revela diferenças no trabalho em sala e na prática avaliativa. Mesmo que em algum momento eu tenha trabalhado itens que exigissem um pouco mais de leitura e interpretação, eles não foram suficientes.

Como vimos, uma avaliação pode nos trazer informações preciosas. Na maioria das vezes, ela pode ser “simples” apenas para o professor/elaborador que já possui certa experiência com o conteúdo. Muitas vezes, ele faz uso da subjetividade para classificar a avaliação em fácil ou difícil, por isso acaba colhendo resultados não condizentes com sua expectativa. Contudo, toda vez que o professor se prontifica a fazer uma análise mais apurada dos registros dos seus estudantes, ele enriquece seu conhecimento acerca daquele assunto. Bem sabemos que não basta apenas que o professor tenha domínio sobre os conteúdos, pois existe uma distância muito grande em saber e saber ensinar.

Por meio da análise da produção escrita dos estudantes, podemos colher informações que vão muito além da simples identificação do que o aluno sabe ou não sabe. Ela serve também para revermos nossa prática e, assim, cada vez que formos ministrar novamente aquele assunto, estaremos cientes das possíveis dificuldades que possam ser apresentadas pelos estudantes e podemos “atacá-las” com mais propriedade.

Registramos que depois da construção e análise dos dados aqui descritos, não foi feita nenhuma intervenção, e que isto foi proposital, pois a segunda etapa da pesquisa requer que os estudantes passem por um período de amadurecimento. Entendemos que, após a análise da produção escrita, deve haver diálogo entre o professor e o estudante, porém optamos deixá-lo para a próxima parte da pesquisa. Em termos de nota, a avaliação não trouxe prejuízo aos estudantes, pois 5 turmas fizeram a avaliação apenas como ponto extra e as outras 5 turmas valendo apenas 1 ponto.

CAPÍTULO 6

O ITEM NÃO ROTINEIRO NUM CONTEXTO DIFERENTE

De posse das compreensões obtidas no capítulo anterior, principalmente na dificuldade apresentada pelos estudantes para resolver itens não rotineiros, sentimos a necessidade de darmos continuidade à pesquisa também em caráter investigativo. Diante dos principais resultados, voltamos nossos esforços para trazer respostas para os seguintes questionamentos:

a) Como os estudantes lidam com itens não rotineiros fora da situação de prova?

b) Quais dúvidas ainda permanecem com o passar do tempo?

c) Quais mudanças podem ocorrer na adoção de estratégias de resolução com os passar do tempo?

d) Como os estudantes lidam com a análise de suas produções num ambiente colaborativo?

6.1 SEGUNDA ETAPA DA PESQUISA

Esta atividade foi desenvolvida na semana de 19 a 23 de novembro com cinco turmas do 3º ano, (3ºF ao 3ºJ). A escolha desta semana foi proposital, pois a maioria dos estudantes tinha acabado de fazer o ENEM e, para a análise dos resultados, gostaríamos de escolher alguma questão que fora cobrada no ENEM de 2018 e que tivesse relação com o tema de Análise Combinatória.

A segunda parte da pesquisa foi realizada com 91 estudantes, sendo 36 do sexo masculino e 55 do sexo feminino. Na semana em que a pesquisa foi realizada, as turmas encontravam-se um pouco esvaziadas. O motivo de ter sido escolhidas apenas 5 turmas para essa etapa, foi que, no segundo semestre, houve uma nova modulação na unidade de ensino, com a nova distribuição de turmas, o que provocou mais dificuldade para ter contato com as outras turmas, mas esse fator não influenciou a conclusão do estudo.

Antes da aplicação da atividade, os estudantes foram informados de que estariam participando de uma pesquisa e que eles teriam total liberdade para resolver as questões utilizando o método que achassem mais conveniente. Também foram informados de que teriam dois momentos: um individual e outro em grupo e, por incrível que pareça, não tivemos resistência, a maioria participou de bom grado da pesquisa. Foi permitido o uso da calculadora.

Foram propostas duas questões aos estudantes, sendo uma do PISA de 2012 e outra do ENEM de 2018 (Apêndice B). O primeiro momento ocorreu da seguinte forma: os estudantes foram separados individualmente, cada um recebeu as duas questões para resolução e não foi permitida discussões entre eles para que não fossem influenciados. Embora no momento da aplicação, os estudantes sejam tentados a chamar o professor, deixei claro que aquele era o momento dele (a) e que ele (a) respondesse da maneira que tivesse compreendido. Foi disponibilizado aos estudantes um prazo de 20 a 25 min. para a conclusão da primeira etapa. Não foi falado para os estudantes sobre qual conteúdo se tratava, apenas foi solicitado que eles que lessem com atenção e que respondessem aos itens da forma como entendessem.

Decorrido o prazo, todas as questões foram recolhidas e a pesquisadora pediu aos estudantes que se atentassem para a maneira que eles estavam resolvendo as questões e quais as respostas teriam encontrado. Assim que as questões foram recolhidas, tivemos a certeza de que havíamos feito a escolha certa, pois os estudantes estavam bastante curiosos para saberem as respostas e se haviam acertado.

A seguir, apresentaremos os dois itens que foram trabalhados com os estudantes e seus resultados. Classificamos as atividades como tarefas não rotineiras, pois acreditamos que os contextos são pouco, ou quase nunca, abordados em sala de aula. Faremos também a análise da produção escrita dos estudantes, seguindo a mesma estratégia utilizada no capítulo 5, classificando as respostas de acordo com o Quadro 2, apresentado anteriormente. As estratégias utilizadas para o desenrolar das atividades basearam-se em relatos das tarefas de Schastai e Silvano (2016) com algumas adaptações.

Figura 35 – Item 1 não rotineiro apresentado aos estudantes

Em uma pizzaria, você pode pedir uma pizza básica com duas coberturas: queijo e tomate. Você pode igualmente compor sua própria pizza com as seguintes coberturas **extras**: azeitonas, presunto, cogumelos e salame. Rose quer pedir uma pizza com duas coberturas **extras** diferentes. A partir de quantas combinações diferentes Rose pode escolher?

Resposta: ______________combinações.

Fonte: http://download.inep.gov.br/download/internacional/pisa/Itens_Liberados_Matematica.pdf

O item, apesar de ser simples (na nossa visão), requer do aluno uma leitura e interpretação cuidadosa. Ao se enxergar na situação, ele deve ser capaz de compreender que deverá escolher 2 coberturas extras dentre 4 opções, além de se atentar para o fato de que o problema trata de um agrupamento no qual os elementos são distintos entre si apenas pela espécie (por exemplo, azeitona-presunto, presunto-azeitona produzem o mesmo resultado). A resolução pode apresentar-se de várias formas. Após a análise dos resultados, foi possível observar as seguintes categorias de respostas:

Quadro 13 – Resultados por estratégia do item 1 não rotineiro

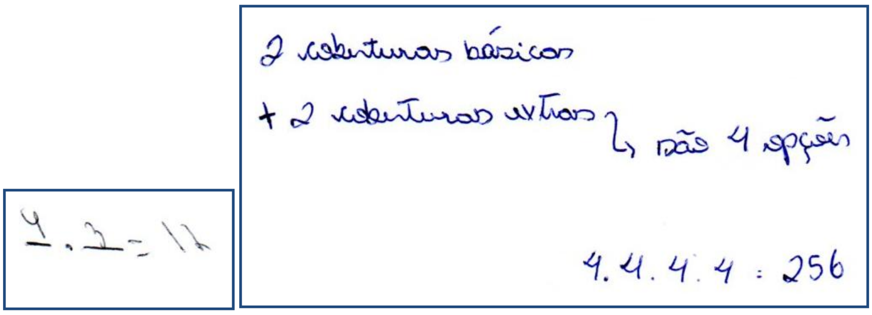
Categoria	1	Erro-2	Erro-3	Erro-4	Erro-5	Erro-6	Acerto-7	Acerto-8	Acerto-9
Quantidade	5%	8%	0%	37%	5%	23%	4 %	0%	16%

Fonte: dados da pesquisa.

No Quadro 13, podemos observar o baixo índice de respostas em branco (5%) e, para as estratégias adotadas classificadas como erro, observamos elevados números nas categorias 4 (37%) e 6 (23%). Os resultados nos mostram que houve uma movimentação nas escolhas de estratégias adotadas. Para os estudantes, o problema se mostrou ser acessível, a maioria pelo menos começou a formular a resposta e foi capaz de imaginar algo, ou seja, o problema apresentou-se com algum significado.

Para fazermos uma análise mais detalhada dos resultados, optamos por codificar os participantes da pesquisa. Sendo assim, temos, por exemplo, o código 3F18M01 no qual 3F quer dizer se trata de um estudante do 3º ano turma F, 18 quer dizer o ano 2018, M quer dizer que se trata de um aluno do sexo masculino, 01 quer dizer o número atribuído a ele no momento da contagem do quantitativo de participantes em cada turma. Apresentamos, a seguir, algumas imagens que exemplificam algumas categorias de respostas.

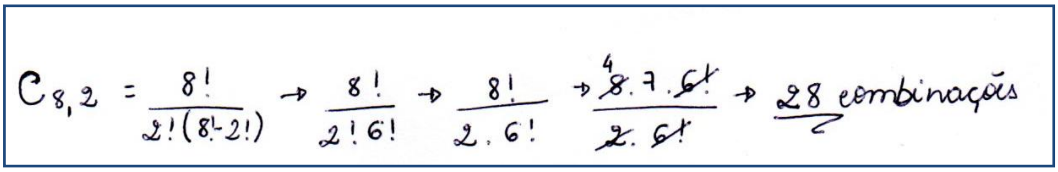
Figura 36 – Respostas dos estudantes 3G18M04 e 3G18F08 respectivamente – Estratégia 4



Fonte: dados da pesquisa.

Note que ambos os estudantes utilizaram o PFC, mas nenhum dos dois chegou à solução correta. Apesar de estar classificados na mesma categoria de erro, a natureza do erro é diferente, portanto deve ser tratada de forma diferenciada pelo professor. Enquanto o aluno 3G18M04 acredita que a resolução se dê dividindo as escolhas em duas etapas, não se atentando para as repetições, o aluno 3G18F08 organiza as escolhas em quatro etapas, mostrando não ter compreendido corretamente o enunciado.

Figura 37 – Resposta do estudante 3F18F06 – Estratégia 5

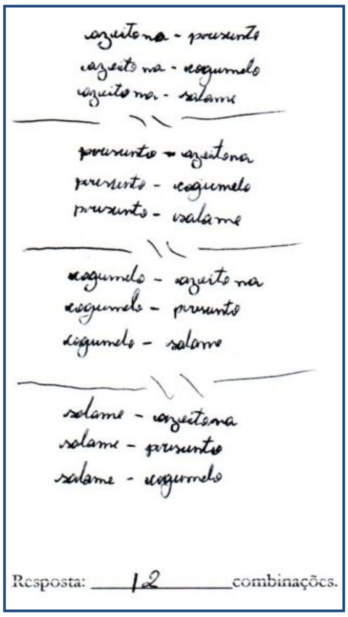


Fonte: dados da pesquisa.

Veja que o estudante elege e calcula corretamente o algoritmo a ser utilizado, porém interpreta erroneamente o comando da questão, acreditando que deva fazer 2 escolhas dentre 8.

O próximo exemplo nos remete à utilização da enumeração não sistemática. O estudante, apesar de descrever todos os resultados e fazer todas as combinações possíveis, não foi capaz de perceber que, ao escolher, por exemplo, os recheios azeitona-presunto/ presunto-azeitona, os pares de recheios eram os mesmos e que a ordem de escolha seria irrelevante.

Figura 38 – Resposta do estudante 3G18F16 – Estratégia 6



Fonte: dados da pesquisa.

Figura 39 – Resposta do estudante 3H18M17– Estratégia 7

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,2!} \rightarrow \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2}\ \ \cancel{2}} = 6$$

Fonte: dados da pesquisa.

Aqui o estudante dá preferência ao uso do algoritmo e consegue chegar à solução correta do problema.

Figura 40 – Resposta do estudante 3H18F16 – Estratégia 9

Azeitona - Presunto
Azeitona - Cogumelos
Azeitona - Salame
Presunto - Cogumelos
Presunto - Salame
Cogumelos - Salame

São 6 possibilidades de combinações diferentes.

Fonte: dados da pesquisa.

Exemplo do uso da enumeração sistemática, na qual o estudante consegue visualizar corretamente todas as possibilidades de resultados.

Figura 41 – Item 2 não rotineiro apresentado aos estudantes

O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete.

Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante. A quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é:

Resposta: ____________________maneiras.

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos (adaptada).

Nesse item, optamos por retirar as alternativas para que pudéssemos fazer uma análise mais detalhada dos resultados e para que eles fossem incentivados a buscar caminhos lógicos para a resolução e não simplesmente marcarem alguma alternativa. O item requer dos estudantes uma leitura e interpretação bastante apurada. Para chegar à solução correta, o estudante deve ser capaz de compreender que deverá dividir o problema em duas etapas (entrada e região central), cada etapa divide-se em outras duas (escolher um carro e uma caminhonete), o carro que foi usado na primeira etapa não deve ser usado na segunda, ocorrendo o mesmo para a escolha das caminhonetes e, ao final, utilizar corretamente o PFC. O item poderá ser resolvido de outras formas.

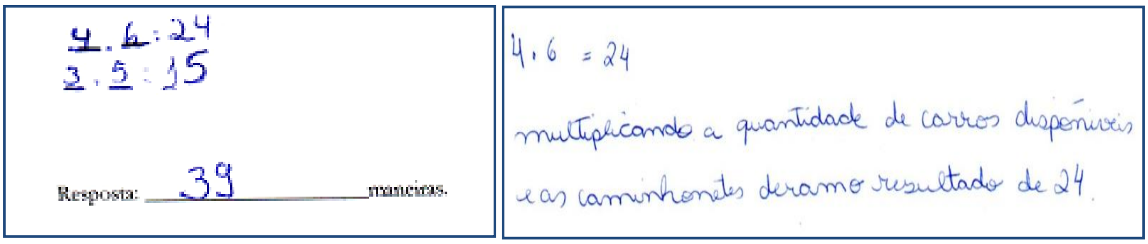
Quadro 14 – Resultados por estratégia do item 2 não rotineiro

Categoria	1	Erro-2	Erro-3	Erro-4	Erro-5	Erro-6	Acerto-7	Acerto-8	Acerto-9
Quantidade	18%	5%	0%	43%	7%	23%	2%	2%	0%

Fonte: dados da pesquisa.

O quadro nos mostra que o item apresentou-se difícil para os estudantes. No entanto, podemos perceber que apenas 18% deixaram em branco e as estratégias classificadas como erro variaram bastante, sendo a adoção do PFC a maior preferência dos estudantes para suas tentativas.

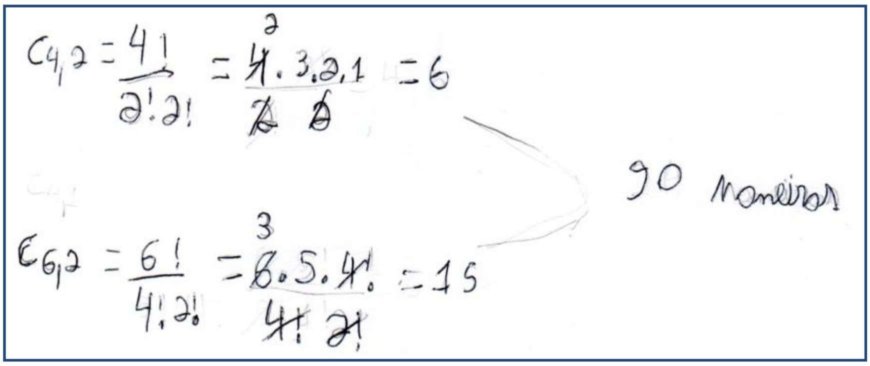
Figura 42 – Respostas dos estudante 3J18M07 e 3J18F19 respectivamente. Estratégia 4



Fonte: dados da pesquisa.

Os estudantes fazem o uso do PFC; no entanto, o estudante 3J18M07, apesar de elaborar corretamente as etapas de resolução, ao final, adiciona os resultados ao invés de fazer uso da multiplicação, nos remetendo ao mesmo tipo de erro observado no capítulo 5. Obviamente, ainda não ficou claro para este estudante quando os eventos ocorrem simultaneamente ou em etapas separadas. Já para o estudante 3J18F19 fica clara a dificuldade de interpretação do enunciado, pois ele capta apenas uma etapa de escolha, não se atenta para a informação de que deverão ser montados dois estandes.

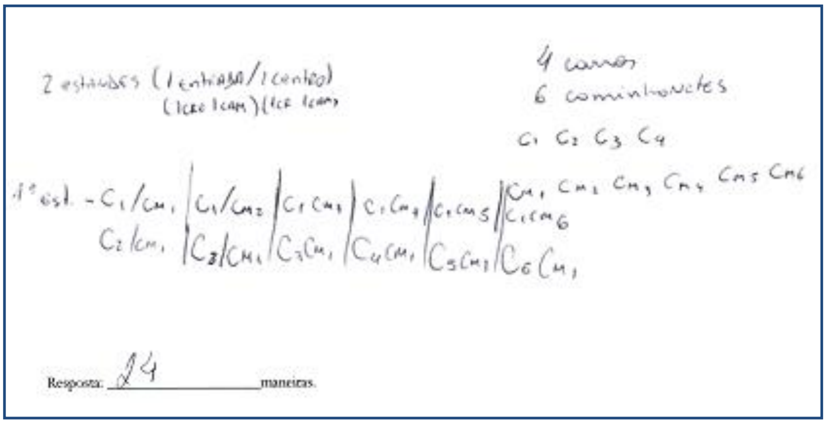
Figura 43 – Resposta do estudante 3H18M17– Estratégia 5



Fonte: dados da pesquisa.

A resposta apresentada pelo estudante 3H18M17 mostra que ele compreendeu as etapas de escolhas, elegeu e calculou corretamente o algoritmo a ser utilizado. No entanto, supomos que um pequeno erro de interpretação o fez encontrar a quarta parte da resposta correta, isso se deu, pois o estudante não se atentou que, para cada dupla de carro selecionada, existem duas disposições (entrada e região central), ocorrendo o mesmo para cada dupla de caminhonete escolhida.

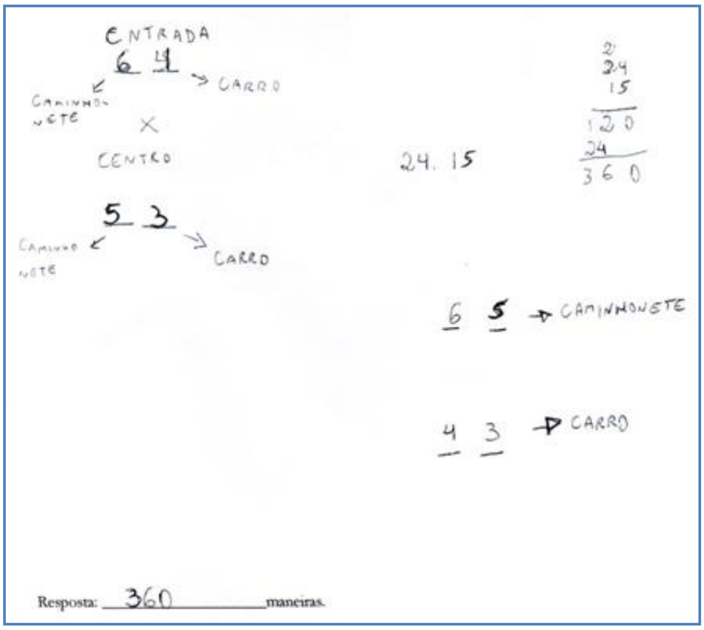
Figura 44 – Resposta do estudante 3J18M21– Estratégia 6



Fonte: dados da pesquisa.

A resposta do estudante 3J18M21 mostra que ele faz uso da enumeração. Entretanto, não consegue chegar à solução do problema, pois não se atenta para as restrições que o enunciado estabelece.

Figura 45 – Resposta do estudante 3G18M21– Estratégia 8



Fonte: dados da pesquisa.

O estudante 3G18M21 faz o uso do PFC, se atenta para as restrições do problema, consegue concluir corretamente as etapas de resolução e chega à solução do problema.

6.2 A ANÁLISE DOS REGISTROS NUM AMBIENTE COLABORATIVO[14]

Passamos, então, para o momento de compartilhamento. Nessa etapa, deixamos claro que nossa intenção não era expor ninguém, nem muito menos ridicularizá-los, disse a eles que chegaríamos juntos aos resultados. Desse modo, fui perguntando um a um qual eram os resultados encontrados em ambas as questões e fui anotando no quadro as respostas, mesmo que fossem repetidas. Obviamente eles conseguiram observar que tinham respostas que se repetiam mais vezes que outras; sendo assim, já começaram a suspeitar qual seria o resultado correto, levando-os à reflexão dos seus próprios resultados. Tomando como exemplo o terceiro ano G, as respostas indicadas para a questão 1 foram: 2, 6, 7, 10, 12, 16 e 256 e para a questão 2 os resultados encontrados foram: 5, 10, 20, 24, 28, 39, 45, 60, 184, 360, 576, 1024 e 46.912 .

[14] Entendemos que um ambiente colaborativo de aprendizagem é aquele no qual o compartilhamento do espaço de convivência dá suporte à construção, inserção e troca de informações pelos participantes. Esse tipo de ambiente é condição para que ocorra a interação entre os que dividem o mesmo espaço.

Esse momento, embora pareça um pouco constrangedor, foi um dos mais divertidos, eles riram bastante devido ao grande número de respostas variadas. Atividades do tipo ainda são vistas como barreira, pois

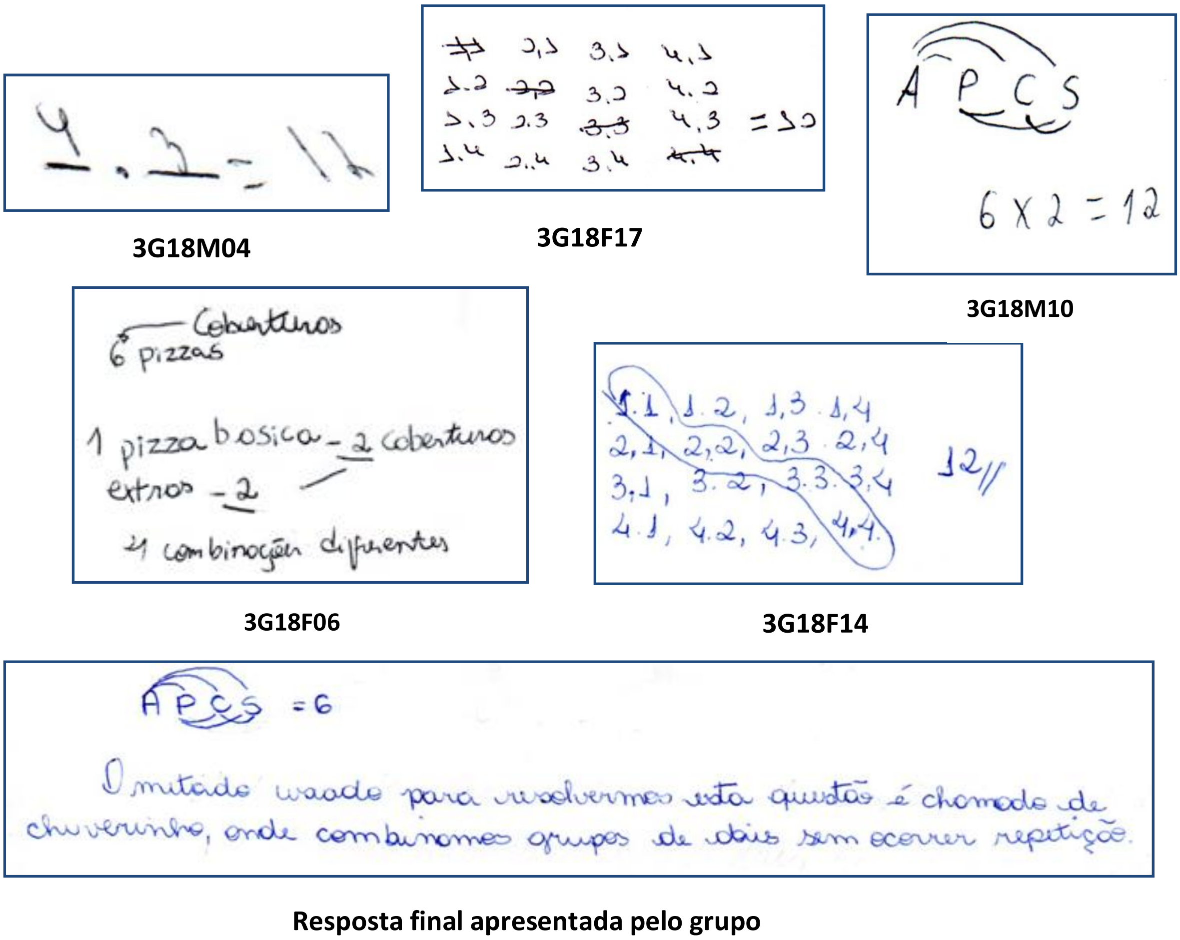
> [...] a atitude dos alunos em uma sala de aula de matemática pode ser dividida em duas categorias: orientação do ego e orientação para as tarefas (NICHOLLS; COBB; WOOD; YACKEL; PATASHNICK, 1990). Por um lado, a orientação do ego implica que o aluno está preocupado com a maneira que ele pode ser percebido pelos outros. Alunos orientados para o ego têm medo de falhar, ou parecer estúpido aos olhos dos colegas, ou do professor. Como consequência, ele pode optar por não tentar resolver um problema, a fim de evitar constrangimento. A orientação para a tarefa, implica que a preocupação do aluno é com a tarefa em si e em encontrar maneiras de resolver essa tarefa. A orientação do ego e a orientação para as tarefas podem ser influenciadas pelos professores. (GRAVEMEIJER, 2008, p. 298, tradução nossa)
> .

Logo em seguida, foi pedido aos estudantes que formassem grupos para discutirem novamente as questões. Como não foi dado nenhum critério para a formação dos grupos, a maioria formou os grupos por afinidades, com os 91 estudantes, formamos 23 grupos, variando de 3 a 5 integrantes. Naquele instante, percebi extrema concentração por parte dos grupos, pois estavam determinados a encontrar a resposta correta. Foi destinado um prazo em torno de 10 min. para essa discussão, porque, como eles já conheciam os problemas, não havia necessidade de um prazo maior.

Decorrido o prazo, as respostas dos grupos foram recolhidas e novamente pedi para que eles compartilhassem suas respostas e fui anotando no quadro. Eles ficaram surpresos ao perceberem o quanto a variedade de respostas reduziu e quanto a maioria caminhou para a resposta correta. Assim, por exemplo, o 3º ano G, que formou 6 grupos, encontrou as seguintes respostas para o item 1: 5 grupos encontraram 6 e 1 grupo 12. Para o item 2: 1 grupo deixou em branco, 1 encontrou 24 e 4 grupos encontraram 360. Obviamente, naquele momento, eles passaram a ter certeza de quais seriam as respostas corretas para os itens propostos, bastando olhar os resultados que se repetiam com maior frequência.

Observe as respostas que foram colhidas individualmente. Aqui faremos a análise da resposta de um grupo, a partir das ideias individuais e após apresentaremos as discussões as mudanças ocorridas.

Figura 46 – Esquema para representar a discussão de um grupo para o item 1 não rotineiro



Fonte: dados da pesquisa.

Abaixo fizemos a transcrição na íntegra do diálogo ocorrido entre os integrantes deste grupo.

Quadro 15 – Diálogo colhido do grupo para discussão do item 1 não rotineiro

3G18F14: Eu encontrei 12;
3G18M04: Eu também;
3G18M10: Eu também;
3G18F17: Eu também;
3G18F06: Eu achei 4 (risos)
3G18M04: Ah essa é muito fácil de 4 sabores é pra escolher 2 é só multiplicar 4 vezes 3 que dá 12;
3G18M10: Eu fiz assim, fui fazendo o “chuveirinho” com os sabores deu 6, depois é só multiplicar por 2. Ah!.... mas não pode repetir, vish! fiz errado. Não, o certo é 6.
3G18M04: Não, é 12 mesmo. Por que 6?
3G18M10: Não olha, azeitona-presunto, azeitona-cogumelo, azeitona-salame, presunto-cogumelo, presunto-salame e cogumelo-salame . Viu? 6.
3G18M04: É verdade!

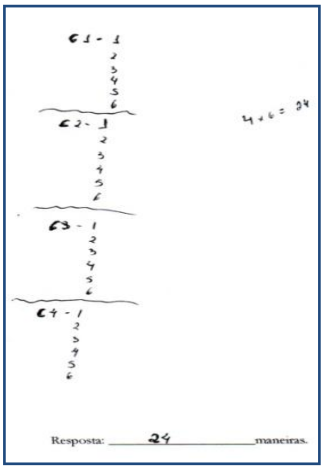
Fonte: dados da pesquisa.

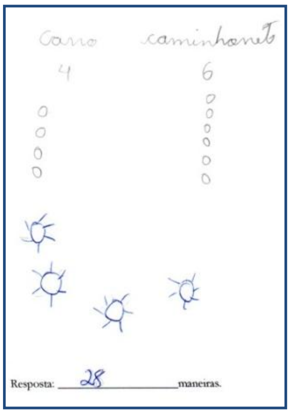
Com base no diálogo dos estudantes, percebemos que

> a análise do erro, também, pode contribuir com o aluno na medida em que o professor o incentive a analisar sua própria produção. Ao fazê-lo, o aluno terá a oportunidade de identificar e compreender seus erros, podendo, assim em outras ocasiões geri-los, isto é, desenvolver processos de verificação e autocorreção que o ajudem, se necessário, a refazer os caminhos para sua resposta. (HADJI, 1994 apud, BURIASCO, 2008, p. 39)

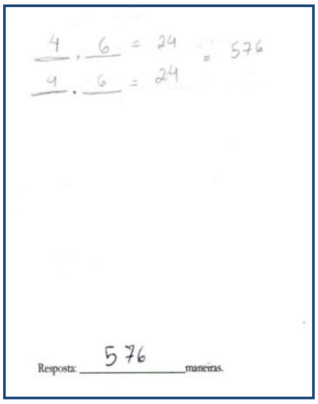
Analisando as produções, é possível identificar o(s) estudante(s) que, de certa forma, influenciou(aram) positivamente ou negativamente as resoluções. Notamos que o estudante 3G18M10 foi um dos maiores influenciadores do seu grupo, a resposta final contém as mesmas características de sua resolução individual. É importante notar que, inicialmente, mesmo com naturezas diferentes, todos erraram, porém a atividade permitiu que eles fizessem reflexões acerca de suas respostas, e eles mesmos fizeram as correções necessárias e ainda criaram um "método" de resolução. A seguir, faremos a análise da produção de um grupo para a resolução do item 2

Figura 47- Esquema para representar a discussão de um grupo para o item 2 não rotineiro.



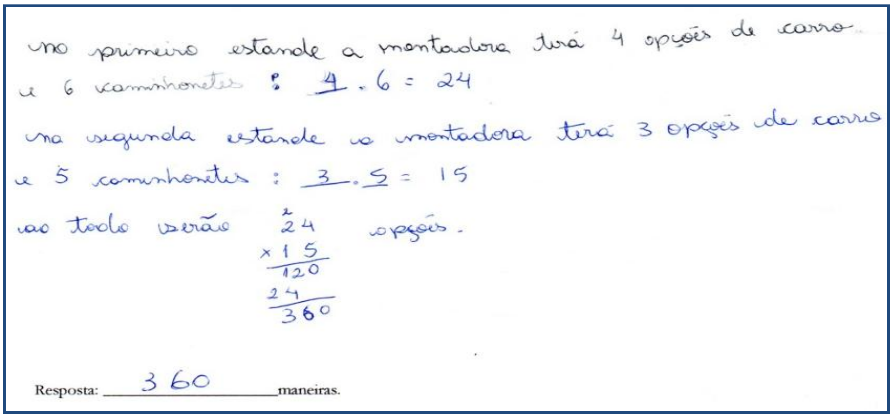


3G18F09



3G18F07

3G18F16



Resposta final apresentada pelo grupo

Fonte: dados da pesquisa.

Quadro 16 – Diálogo colhido do grupo para discussão do item 2 não rotineiro

3G18F07: Professora, essa caiu no ENEM não é? Professora: Psiu! Vai fazendo aí. 3G18F07: Ah, eu errei mesmo (risos) 3G18F09: O meu deu 28 (risos), sei lá o que eu fiz. 3G18F16: Achei 24. 3G18F07: 576 (risos) 3G18F16: 4 carros e 6 caminhotes é só multiplicar dá 24. 3G18F07: Tem dois estandes, aí na entrada tem que escolher um carro e uma caminhonete que dá 24 e no centro também, um carro e uma caminhonete deu 24 aí é só multiplicar os dois que dá 576. Não espera! Fiz errado. No primeiro estande dá pra escolher um carro dentre 4 e uma caminhonete dentre 6 que dá 24, mas no segundo fica só 3 carros e 5 caminhonetes porque já escolheu um de cada no primeiro aí fica 15, agora é só multiplicar 24 vezes 15. Acho que é isso.

Fonte: dados da pesquisa.

Os diálogos colhidos e as percepções do dia da aplicação das atividades confirmam o caráter desafiador das tarefas propostas. Segundo Lopez, Buriasco e Ferreira (2014, p. 259), "problemas desafiadores são muitas vezes, problemas não rotineiros que envolvem situações novas para os estudantes, pois precisam elaborar/utilizar estratégias para abordá-los e não simplesmente respondê-los imediatamente". Quanto mais complexos, maior a vontade de encontrar respostas e maior a alegria ao resolvê-los.

Logo após o compartilhamento dos grupos, solicitei que aquele que quisesse representar o grupo indo ao quadro compartilhar como eles pensaram que ficasse à vontade. Esse momento de compartilhamento foi muito rico, pois os estudantes puderam perceber como as ideias são variadas e puderam, juntos, discutir qual resposta estaria realmente correta. Eles questionaram alguns raciocínios utilizados e comprovaram que:

> Uma sala de aula onde os alunos criam seus próprios caminhos para resolverem as tarefas é um lugar onde eles podem até protestar ao receberem a "solução" de uma determinada tarefa, pois isto os priva da satisfação de descobrir as coisas por si mesmos. Este processo de descobrir, pode também ter caráter colaborativo, onde os estudantes se veem como uma comunidade que trabalha em direção à compreensão compartilhada. Cabe ao professor encontrar o equilíbrio entre criar liberdade para os estudantes descobrirem as coisas sozinhos e oferecer apoio. (GRAVEMEIJER, 2008, p.)

Esse momento teve um valor especial, pois muitas vezes pode ocorrer que mesmo que o professor faça uma análise bem apurada da produção do estudante em algum momento, pode ser que, mesmo assim, o professor ainda não consiga identificar o mecanismo que originou de fato os erros. Nagy e Buriasco (2008) nos alertam para a importância dos questionamentos que devem ser feitos aos estudantes, pois, assim, seremos capazes de conhecer a razão e as falhas de escolhas que foram feitas.

Foi possível perceber uma mudança na preferência dos métodos de resolução dos exercícios de combinatória. No início, tínhamos uma maior preferência por algoritmos, com o passar do tempo, eles se tornam menos utilizados, sendo priorizados meios intuitivos. Vale lembrar que havia pouco tempo que os estudantes tinham realizado as provas do ENEM, nem mesmo esse fato os fez dar preferência a algoritmos.

Neste estudo, tanto para as respostas corretas quanto para as incorretas, nota-se uma maior preferência dos estudantes pelo uso do PFC, enumerações, construções de diagramas que permitiram (ou não) encontrar a solução do problema. Esse fato se confirma quando se observa os resultados das categorias 4, 5,8 e 9.

Os itens não rotineiros, aplicados fora de uma situação de prova, mostraram-se bastante eficientes, pois, ao analisarmos as produções, percebemos respostas muito mais criativas do que as apresentadas numa situação de prova. O que queremos dizer é que, muitas vezes, o estudante numa situação que lhe ofereça certa pressão, pode não deixar fluir sua criatividade. Na avaliação anterior, supomos que as estratégias mais valorizadas pelo professor seriam também aquelas valorizadas pelos estudantes. Além disso, fora de uma situação de prova, eles buscaram seus próprios meios de resolução.

A análise das produções, num ambiente colaborativo, mostrou-se uma importante aliada para possíveis intervenções. Os estudantes, ao analisar suas produções e compartilhar com os colegas, abriram espaço para o diálogo e a reflexão. O professor, agindo apenas como mediador, gera estudantes que não se contentam com respostas prontas, mas que estão dispostos a buscar um real caminho de compreensão.

Desse modo, tornar a sala de aula um ambiente de aprendizagem colaborativa é nosso desafio. Em seu trabalho, Gravemeijer (2008) cita os trabalhos de Cobb, Yackel e Wood (1989), que fazem o relato de um estudo sobre uma sala de aula socioconstrutivista[15], na qual a orientação para as tarefas foi promovida. Parte da abordagem era mudar a cultura de

[15] Embora exista um conjunto de correntes variadas, as teorias socioconstrutivistas apresentam como ponto central a premissa de que a aprendizagem e o desenvolvimento são produtos da interação social. Desta forma, não pretendemos tratar especificamente a respeito de uma ou outra corrente, apenas fazer uso da sua ideia central.

competição da sala de aula. Os estudantes se comparavam entre si para uma cultura em que eles mediam o seu sucesso comparando com seus resultados anteriores. Nessa perspectiva, o objetivo da aula é o crescimento pessoal.

CONCLUSÃO

Os resultados revelam que muitas dificuldades ainda permaneceram em relação ao conteúdo com o passar do tempo, fazendo refletir novamente sobre a prática do professor. No capítulo 5, mostramos quais dúvidas eram mais recorrentes ao analisar as produções dos estudantes. O professor, ao adotar a avaliação como prática investigativa, é capaz de criar estratégias eficazes de intervenção, pois irá conhecer as reais dificuldades apresentadas pelos estudantes. Notamos que erros da mesma natureza ainda continuam, obviamente pelo fato de não ter havido nenhuma intervenção após a avaliação. Não podemos deixar de questionar que quantidade de conteúdo se tornou realmente significativa para o estudante. É importante observar que o prazo decorrido entre a primeira avaliação e a última atividade é de praticamente oito meses. Nota-se pouco amadurecimento com relação ao conteúdo.

Apesar desses estudantes não terem tido contato com a parte histórica da Análise Combinatória, o passeio pelos principais fatores históricos relacionados ao conteúdo permitiu perceber o quanto o uso da história da matemática como um recurso pedagógico pode contribuir para que os estudantes tenham uma visão mais ampla de como se dá a organização e a disseminação dos vários conceitos ao longo dos anos, podendo oportunizar a contextualização e fazer a interligação da matemática com outras disciplinas. Algumas demonstrações podem se tornar complexas para estudantes do Ensino Médio, no entanto, à medida que o professor estuda meios de apresentar os algoritmos aos estudantes não de uma forma pronta apenas para o uso, ele acaba estimulando o desenvolvimento do raciocínio dedutivo que é considerado um dos objetivos do ensino da Matemática no nível da educação básica.

Nas diversidades de contextos das pesquisas elencadas no terceiro capítulo, vemos a necessidade de que sejam promovidas ações voltadas para a formação continuada do professor de maneira a contribuir com as práticas docentes. Ao revisar sobre o ensino e aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória, as pesquisas são unânimes em retratar um cenário no qual a maioria dos professores se sente insegura para ministrar o conteúdo e, por isso, aborda o tema superficialmente. Problemas na formação do professor incidem diretamente sobre os resultados dos estudantes.

Uma variedade de metodologias vem sendo adotada para o ensino-aprendizagem da Análise Combinatória, entre elas destacam-se: o uso de situações que se aproximem da realidade dos estudantes, a maior inserção de recursos didáticos e a resolução de problemas, sendo esta a mais utilizada. Os trabalhos revisados apontam que o conhecimento sobre Análise Combinatória ocorre de forma gradual, por isso, a recomendação é que o conteúdo seja visto ainda nos anos iniciais. Os resultados das pesquisas revelam também alguns direcionamentos para os professores que irão trabalhar o conteúdo. O professor, ao tratar o assunto, deverá valorizar o uso de representações, os métodos de enumeração e incentivar o uso do PFC.

Quando buscamos compreender quais as estratégias de resolução são preferidas dos estudantes, conforme o tempo passa, percebemos que as estratégias mais utilizadas são o uso do PFC (mesmo que não tenham acertado) e métodos de enumeração. Portanto, por mais que na primeira prova aplicada a maior preferência tenha sido pelo uso dos algoritmos, inferimos que o fato se deu simplesmente por se tratar de uma "novidade" para os estudantes. Os recortes iniciais mostraram claramente a adoção métodos mecânicos de resolução e a repetição das técnicas mais valorizadas pelo professor.

Ficou evidente, no trabalho, que o hábito de analisar a produção dos estudantes pode ser um instrumento muito eficiente para viabilizar o diálogo entre o aluno e o professor. Os registros dos estudantes trouxeram muitas reflexões, não só acerca das dificuldades dos estudantes, mas também do professor. Quanto mais o professor adota essa prática, mais ele poderá refletir sobre a maneira que vem conduzindo o conteúdo e sobre a importância do contínuo acompanhamento da aprendizagem no cotidiano escolar (BURIASCO, 2008).

A análise dos registros deixa clara a necessidade de que sejam revisados, mesmo que rapidamente, alguns conhecimentos prévios necessários para trabalhar com o uso das fórmulas antes de introduzir o conteúdo de Análise Combinatória. Acreditamos que um trabalho voltado para a revisão de simplificação de frações, com métodos alternativos para a multiplicação de números terminados em muitos zeros e dicas quanto ao manuseio da calculadora contribuiria para resultados mais positivos pelo menos nos itens rotineiros.

Um dos erros cometidos, com mais frequência, pelos estudantes foi a troca do tipo de algoritmo para questões que envolviam arranjo ou combinação. Supomos que este erro seja recorrente, pois, conforme Morgado et al. (2006), uma forma de tornar as coisas mais complicadas para os estudantes é começar a resolução assim: "Esse é um problema de arranjo ou combinação?" O estudante que ainda não tem certo amadurecimento sobre as diferenças dos modelos, sempre fará confusão; por isso, embora a fórmula de arranjo seja apresentada nos livros didáticos, a sugestão é que o professor estimule os estudantes a darem preferência ao PFC.

Ao serem analisados itens rotineiros versus não rotineiros numa situação de prova, foi possível perceber que mesmo com a intenção de trazer alguma aproximação com relação aos métodos de resolução, a maioria dos estudantes utilizou apenas procedimentos de memorização. É como se fossem treinados a dar determinadas respostas prontas para cada tipo de pergunta.

É perceptível que o sucesso do estudante fica comprometido quando ele se depara com itens não rotineiros apenas em situação de prova. Isto mostra que não basta que o professor elabore provas e os mecanismos de resolução sejam os mesmos para itens rotineiros e não rotineiros. Foi notório que bastou o item vir “vestido” de uma maneira diferente da habitual para que as dificuldades aumentassem. Trabalhar com itens não rotineiros requer que outras habilidades sejam acionadas, principalmente a leitura e a interpretação.

Por outro lado, quando os estudantes lidam com itens não rotineiros fora de uma situação de prova e em um ambiente colaborativo, os resultados tornam-se bastante significativos, visto que, ao observar os registros, foi possível perceber respostas muito mais criativas que as anteriores (mesmo que não estivessem corretas). A interação e o diálogo promovido entre os estudantes apresentaram-se como importante ferramenta para aprendizagem. O momento de compartilhamento permitiu que eles pudessem refletir sobre seus resultados. Os estudantes, ao analisarem suas produções e compararem com a dos colegas, sentiram-se motivados a buscar a resposta correta.

Consideramos que o trabalho cumpriu sua função investigativa, respondendo a todos os questionamentos levantados e trazendo resultados importantes. Além de contribuir para a ampliação do entendimento sobre o ato de avaliar e apresentar informações valiosas sobre as dificuldades e habilidades dos estudantes sobre o conteúdo, os resultados trouxeram reflexões sobre a minha prática docente, apontando que a análise da produção dos estudantes contribui efetivamente para o redirecionamento do meu trabalho. Os resultados também indicam que uma avaliação que esteja a serviço da aprendizagem requer que nós, professores, façamos intervenções ao serem detectados erros no processo, sendo indispensável a devolutiva para os estudantes.

Como vimos, há a necessidade de que seja feito um trabalho voltado para o aprimoramento do ensino-aprendizagem do conteúdo ainda na formação inicial dos professores. Por isso, sugerimos que trabalhos como este sejam amplamente divulgados no meio acadêmico. As ideias aqui tratadas podem se estender para os diversos conteúdos de matemática, servindo como base de apoio para que os professores trabalhem os conteúdos de forma cada vez mais direcionada. O contato com experiências como esta, antes mesmo de irem para as salas de aula, evita a propagação e a perpetuação de erros no processo desde o início e auxilia para que os futuros professores já saiam das universidades com outra visão sobre avaliação.

Os problemas detectados em todo o processo podem constituir objeto de investigações futuras. Pretendemos fazer uso deste trabalho como base para estudos posteriores, como, por exemplo, a criação de um grupo de controle evidenciando a eficácia da adoção da análise dos registros como estratégia de avaliação. As informações aqui contidas podem suscitar reflexões e outros estudos no campo da Educação Matemática, como, por exemplo, investigação da produção escrita dos professores sobre Análise Combinatória.

Ao mergulhar nesse universo tão rico, acredito ter descoberto o verdadeiro sentido de trabalhos como este. Quando analiso a produção dos estudantes, consigo não só perceber o quanto eles têm ou não conhecimento sobre um determinado assunto, mas também consigo enxergar o quanto preciso melhorar minhas práticas. A análise das produções revela não só as debilidades dos estudantes, mas as minhas também. Garante que, no processo, os erros e acertos devem ser valorizados, já que nem sempre o acerto representa total compreensão e nem o erro a falta do saber.

REFERÊNCIAS

AMARAL, W. A.; COSTA, R. R. Avaliação da aprendizagem no ensino da matemática: tendências e perspectivas. *In*: XI CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO . EDUCERE. 23-26 set. 2017, Paraná-PR,. *Anais* [...]. Paraná, 2017.

BASTOS, A. C. Resolução de problemas: uma discussão sobre o ensino da Análise Combinatória. 2016. 130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em ensino das Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio, Duque de Caxias – RJ, 2016.

BATANERO, C.; GODINO, J.; NAVARRO-PELAYO, V. *Razonamiento combinatorio*. Madri: Ed. Sintesis, 1996.

BORBA, R O raciocínio combinatório na educação básica. *In*: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2010, Salvador, BA. *Anais* [...]. Salvador, 2010.

BORBA, E. de S. R.; ROCHA, C. A.; AZEVEDO, J. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1348-1368, dez. 2015.

BORBA et al. A formação de professores de anos iniciais do ensino fundamental para o ensino da análise combinatória. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, v. 3, n. 4, p. 115-137, 2014.

BORTOLOTI, R. D. M.; SANTOS-WAGNER, V. M.; FERREIRA, J. R. Formação de professores: erros em análise combinatória. *In*: XII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 26-30 jun. 2011, Recife – PE,. *Anais* [...]. Recife, 2011.

BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)* Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BURIASCO, R. L. C. *Avaliação e Educação Matemática*. Biblioteca do Educador Matemático. Recife: SBEM, 2008, 120 p.

CHAQUIAM, M. *Ensaios temáticos história e matemática em sala de aula*. Belém: SBEM - PA, 2017. 243 p.

CONCEIÇÃO, D. C.; PEREIRA, D. C.; SANTOS, M. L. S. O ensino-aprendizagem de Análise Combinatória: o desempenho de alunos de Belém do Pará. *In*: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13 a 16 jul., 2016. São Paulo –SP. Anais [...]. São Paulo, 2016.

CONTESSA, N. M. et al. Análise das dificuldades dos alunos do ensino médio em análise combinatória. *In*: 2º ENCONTRO NACIONAL PIBID MATEMÁTICA, 6-8 de ago. 2014, , Santa Maria- RS. *Anais* [...]. Santa Maria: UFSM, 2014.

D´AMBROSIO, Ubiratan. História da Matemática e Educação. In: FERREIRA, Eduardo Sebastiani (Org.). *Cadernos CEDES 40*. Campinas: Papirus, 1996.

D´AMBROSIO, Ubiratan. A educação Matemática e o estado do mundo: desafios. *Em Aberto*, Brasília, v. 27, n. 91, p. 157-169, 2014.

DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Educação. *Currículo em Movimento da Educação Básica- Secretaria de Estado e Educação*. 2ª ed. 2018. Disponível em: <http://www.se.df.gov.br/curriculo-em-movimento-da-educacao-basica-2/>. Acesso em: 30 jan. 2019.

DURO, M. L.; BECKER, F. Análise Combinatória: do método aleatório à combinatória sistemática. *Educação & Realidade*, Porto Alegre, v. 40, n.3, p. 859-882, 2015.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas –SP: UNICAMP, 2004, 844 p.

FÁVERO, M. H.; PINA NEVES, R. S. A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. *Zetetiké*, Campinas, v. 20, n. 37, p. 33-66, 2012.

FERREIRA, P. E. A. *Enunciados de tarefas de matemática:* um estudo sob a perspectiva da educação matemática realística. 2013. 121 f. Tese (Pós – Graduação em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina – PR, 2013.

FILHO, J. A. S. et al. Avaliação educacional: sua importância no processo de aprendizagem do aluno. *In*: IV FIPED FÓRUM INTERNACIONAL DE PEDAGOGIA, 2012, Parnaíba – PI. *Anais* [...]. Parnaíba, 2012

FONSECA, A. J, S; SOUZA, D. N; DIAS, M. A. O ensino da Análise Combinatória: um estudo dos registros de representações semióticas por meio de sequência didática. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, v. 8, n.4, p. 115-141, 2015.

FRANÇA, J. A.; PINA NEVES, R. da S.; PIRES, L. G. A análise da produção escrita de escolares do terceiro ano do ensino médio: atividade de formação no contexto do PIBID de matemática da Universidade de Brasília. *In*: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL DO ESPAÇO MATEMÁTICO EM LÍNGUA PORTUGUESA, 2015, Coimbra. *Anais* [...] Coimbra, 2015.

GONÇALVES, R. R. *Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio*. 2014. 111f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - IMPA, Rio de Janeiro – RJ.

GRAVEMEIJER, K. *RME theory and mathematics teacher education*. Tools and Mathematics teacher education, v. , n. , p. 283 – 302, 2008.

HAHN, A., E.; RETZLAFF, E.; RESTES, R. F. Análise Combinatória na perspectiva da utilização de jogos no processo de ensino aprendizagem. *In*: VII JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2 a 4 de abr., 2018, Passo Fundo – RS. *Anais* [...]. Passo Fundo, 2018.

IEZZI, G. et al. *Matemática ciência e aplicação*, 2º ano do Ensino Médio. Livro do professor. São Paulo: Saraiva, 2017, 416 p.

IEZZI, G. et al. *Matemática ciência e aplicação*, 2º ano do Ensino Médio. Livro do professor. São Paulo: Atual, 2001, 544 p.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISA ANÍSIO TEIXEIRA. *Provas e Gabaritos* - INEP. Brasil, 2018. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 01 mar. 2018.

LEMOS, V. M. *Análise combinatória:* uma abordagem através da resolução de problemas. 2016, 104 f. Dissertação (Mestrado Profissional – PROFMAT) – Universidade Federal de Tocantins, Palmas, 2016.

MAGINA, S. M. P.; SPINILLO, A. G.; SÁ MELO, L. M. Estratégias de estudantes dos anos iniciais na resolução de problema combinatório. *In:* VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 15 a 19 nov. 2015, Pirenópolis –GO. *Anais* [...]. Pirenópolis, 2015.

MARTINS, G. G. *Ensino de Análise Combinatória*: um estudo das representações de professores de matemática do Ensino Médio público de São Mateus, 2018, 149 f. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica), Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, 2018.

MARTINS, G. G.; SLVA, J. D. Reflexão sobre o ensino de Análise Combinatória no ensino Médio: percepções de professores formados no CEUNES – UFES. *Amazônia -Revista de Educação em Ciências e Matemática*, Belém: UFPA, v. 11, n. 21, p. 44-52, 2014.

MELLO, H. P. M. *Desmistificando o ensino da análise combinatória*. 2017, 64 f. Dissertação (Mestrado Profissional – PROFMAT) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2017.

MORGADO, A.; PITOMBEIRA, J.; CARVALHO, P.C.; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 2006.

MORGADO, A. C. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 2: Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2006, 308 p.

MOTA, B.; FERREIRA, R. A. T. A reinvenção guiada na aprendizagem de operações combinatórias. *In*: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 19 a 20 nov., 2016, Universidade de Évora, Portugal. *Anais* [...] , p. 273-287. Portugal, 2016.

NAGY SILVA, M. C.; BURIASCO, R. L. C. Análise da produção escrita em matemática: algumas considerações. *Ciência e Educação*, Bauru, v. 11, n.3, p. 499-512, 2005.

OLIVEIRA, C. A. L. S. *Análise Combinatória:* raciocínio recursivo e processos de enumeração. 2015, 104 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense, Rio de Janeiro, 2015.

OLIVEIRA, M. M.; LINS, I. M. Caracterização do conhecimento combinatório dos alunos do 3º ano do Ensino Médio. *In:* III CONEDU CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. 05 a 07 out., 2016, Natal – RN. *Anais* [...]. Natal, 2016.

PAVANELLO, R. M., NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. *Estudos em Avaliação Educacional*, Rio de Janeiro, v.17, n. 33, 2006.

PEREGO, S. C. *Questões Abertas de Matemáticas:* um estudo de registros escritos. 2005. 106f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

PINA NEVES, R. S.; SILVA, J. C.; BACCARIN, S. A. O. A produção escrita de estudantes da licenciatura em matemática em questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). *In*: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15-19 nov. 2015, Pirenópolis – GO. *Anais* [...]. Pirenópolis, 2015.

PINTO, N. B. *O Erro como Estratégia Didática*. Série Práticas Pedagógicas. Campinas/SP: Papirus, 2000.

POLYA, G. O Ensino por meio de problemas. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo: SBM, n. 7. p. 11-16, 1985.

RIBEIRO, A. G.; MENDES, A. A. A dificuldade de resolução das questões de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio: ineficiência matemática ou interpretativa? *In*: II SEMINÁRIO CIENTÍFICO DA FACIG, 17-18 de nov. 2016, Minas Gerais – MG. *Anais* [...] Minas Gerais, 2016.

ROCHA, C. A.; LIMA, A. P. B.; BORBA, R. E. S. R. Conhecimentos de Professores para ensinar combinatória: Contribuições de Pesquisas. *In*: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15-19 nov. 2015, Pirenópolis – GO. *Anais* [...]. Pirenópolis, 2015.

RODA, T. M. *Análise Combinatória*: uma abordagem diferenciada sem a utilização de fórmulas. Dissertação, 2018, 65 f. (Mestrado Profissional – PROFMAT) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2018.

SANTOS, E. R. dos. *Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões discursivas não rotineiras de matemática*. 2008. 166f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)- Universidade Estadual de Londrina, 2008.

SANTOS, E. R.; BURIASCO, R. L. C. Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em uma questão não rotineira de matemática. *Unión: Revista Iberoamericana de Educação Matemática*, n. 24, p. 103-115, 2010.

SANTOS, E. R.; BURIASCO, R. L. C. A análise da produção escrita em matemática como estratégia de avaliação: aspectos de uma caracterização a partir dos trabalhos do GEPEMA. *Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologi*a, Florianópolis, v.9, n.2, p.233-247, novembro 2016. ISSN 1982-5153.

SANTOS, E. R.; BURIASCO, R. L. C. A análise da produção escrita em matemática como uma estratégia de ensino: algumas considerações. *Educ. Matem. Pesq.,* São Paulo, v. 17, n.1, p.119-136, 2015.

SANTOS, E. R; TEIXEIRA, B. R. A análise da produção escrita em matemática como estratégia de avaliação e o conhecimento do conteúdo e dos estudantes por parte de futuros professores. *Res., Soc. Dev.* 2019.

SANTOS, V. S.; GONTIJO, C. H. *Avaliação em Matemática:* percepções docentes e implicações para o ensino e aprendizagem. 1ª. ed. Curitiba: Appris, 2018. v. Único. 187p.

SHASTAI, M. B.; SILVANO, L., S. Educação Matemática Realística: uma abordagem que pode oportunizar a aprendizagem matemática a todos os alunos. *In*: V SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 24 a 26 de nov. 2016, Paraná – PR. *Anais* [...] Paraná, 2016.

SILVA, D. P.; GUERRA, E. A. A aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio: uma proposta didática por meio da Resolução de Problemas. *REMAT,* Bento Gonçalves – RS, v. 3, n. 2, p. 40-51, 2017.

SILVA, D. P. *A aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio*. 2017, 116 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas – UFAL, Maceió, 2017.

SILVA, D. Q.; DALTO, J. O. Análise da Produção escrita: uma ferramenta de avaliação para as aulas de matemática. *In*: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13 a 16 de jul. 2016, São Paulo – SP. *Anais* [...]. São Paulo, 2016.

SILVA, V. D. M. et al. Utilizando a história da matemática no ensino da Análise Combinatória e Probabilidade. *In*: IX ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 24 a 26 nov, 2016, Campina Grande. *Anais* [...] Campina Grande – PB, 2016.

SILVEIRA, A. A. ; ANDRADE, S. Uma abordagem de análise combinatória via resolução de Problemas. *In:* IV CONEDU CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 15 a 18 nov., 2017, João Pessoa – PB,. *Anais* [...]. João Pessoa, 2017.

STURM, W. *As Possibilidades de um Ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa*. 1999. 132f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 1999.

TREVIZAN, W. A. *Ensinando matemática por meio de situações potencialmente adidáticas*: estudo de caso envolvendo Análise Combinatória. 2014, 137 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade de São Paulo –USP, São Paulo, 2014.

VAZQUEZ, C. M. R; NOGUTI, F. C. H. Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In:VII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 15 a 18 jul. 2004, Recife. *Anais* [...] Recife: UFB, 2004.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Avaliação bimestral contendo questões rotineiras e não rotineiras

GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
DIRETORIA REGIONAL DE ENSINO DO RECANTO DAS EMAS
CENTRO DE ENSINO MÉDIO 111 DO RECANTO DAS EMAS

ALUNO(A):_______________________________________ TURMA: _____

Data:_______/_______/__________.

Nota:

Análise Combinatória

Instruções:

1- Seja organizado (a)! Utilize lápis para os cálculos e caneta para a resposta final;
2- É proibido o empréstimo de materiais;
3- Os cálculos por mais simples que sejam deverão ser apresentados.
4- Nas questões objetivas, sua resposta só será validada com a apresentação dos cálculos ou do raciocínio utilizado para se chegar à solução.

1- As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Considerando o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9, quantas placas podemos formar?

2- De quantos modos distintos podemos organizar 5 alunos numa sala de aula, tendo à disposição 30 carteiras?

3- Determine o número de anagramas da palavra:

a) ARARA

b) BATATA

4- Num grupo de 8 estudantes, de quantos modos podemos escolher 2 deles para ir a um passeio?

5- (ENEM 2017) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é:

A- I

B- II

C- III

D- IV

E- V

6- (ENEM- 2016) Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por:

A- $10^2.26^2$

B- $10^2.52^2$

C- $10^2.52^2.\frac{4!}{2}$

D- $10^2.26^2.\frac{4!}{2!2!}$

E- $10^2.52^2.\frac{4!}{2!2!}$

7- (ENEM- 2017) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame* . Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

A- 64

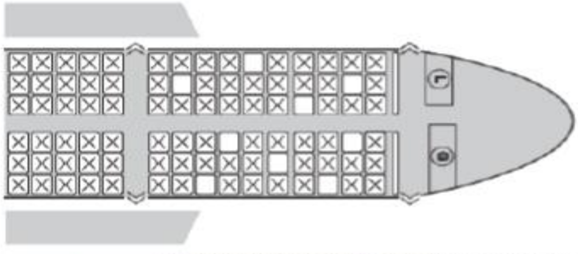
B- 56

C- 49

D- 36

E- 28

8- (ENEM- 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com **X** e as únicas poltronas disponíveis são as mostrada em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

A- $\frac{9!}{2!}$

B- $\frac{9!}{7! \times 2!}$

C- $7!$

D- $\frac{5!}{2!} \times 4!$

E- $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

APÊNDICE B – Atividade final (questões não rotineiras)

Nome:____Turma:____________

Instruções:

1- Utilize apenas **caneta azul ou preta** para a resolução.
2- Não utilize corretivo.
3- Você pode ou não utilizar fórmulas para resolver a questão.
4- Registre o raciocínio utilizado.

Questão 01- Em uma pizzaria, você pode pedir uma pizza básica com duas coberturas: queijo e tomate. Você pode igualmente compor sua própria pizza com as seguintes coberturas **extras**: azeitonas, presunto, cogumelos e salame. Rose quer pedir uma pizza com duas coberturas **extras** diferentes. A partir de quantas combinações diferentes Rose pode escolher?

Resposta: ________________combinações.

Questão 02- O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.

Disponível em: htpp://g1.globo.com
Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado)

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete.

Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante. A quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é:

Resposta: ______________________maneiras.