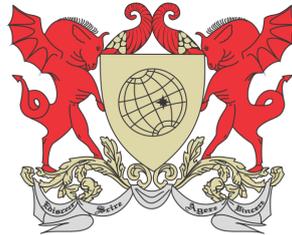


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



DAVI DE SOUZA MARQUES

TEOREMA DE BURNSIDE E ALGUMAS
APLICAÇÕES À CONTAGEM

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2019

DAVI DE SOUZA MARQUES

TEOREMA DE BURNSIDE E ALGUMAS APLICAÇÕES
À CONTAGEM

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2019

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal
de Viçosa - Câmpus Florestal**

T

M357t Marques, Davi de Souza, 2019-
2019 Teorema de Burnside e algumas aplicações à contagem /
Davi de Souza Marques. – Florestal, MG, 2019.
vii, 42 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Inclui bibliografia.

1. Grupos-teoria. 2. Matemática-Estudo e ensino.
3. Teorema de Burnside. I. Universidade Federal de Viçosa.
Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado em
Matemática - Profissional. II. Título.

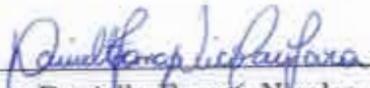
512.22

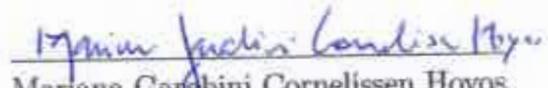
DAVI DE SOUZA MARQUES

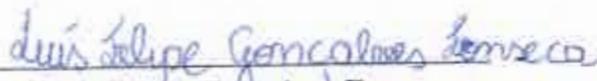
TEOREMA DE BURNSIDE E ALGUMAS APLICAÇÕES
À CONTAGEM

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de março de 2019.


Danielle Franco Nicolau Lara


Mariana Garabini Cornelissen Hoyos


Luís Felipe Gonçalves Fonseca
(Orientador)

Dedicatória

Dedico esse trabalho ao meu filho, Henrique, que é minha motivação. Que esta dissertação seja uma inspiração para ele.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe pelo apoio incondicional, que sempre foi o motivo da minha autoconfiança e da minha determinação. Sem ela eu não teria chegado até aqui. Ao meu pai por sempre me ensinar a ser um homem trabalhador e honesto. Agradeço também à minha irmã, Aline, pela confiança constante. Por fim, agradeço à minha companheira, Rossana, que sempre está ao meu lado, me dando apoio e incentivo em tudo faço.

Lista de Figuras

3.1	Simetrias do triângulo. Imagens retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicação [Bovo].	15
3.2	Simetrias do quadrado. Imagens retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicação [Bovo].	16
3.3	Eixos de Rotação do Cubo. Imagens retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicação [Bovo].	17
4.1	As 16 colorações de um tabuleiro 2 x 2, nas cores preto e branco. Essas figuras foram retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].	19
4.2	Exemplo de colorações em um tabuleiro 3 x 3, nas cores preto e branco, que não equivalentes por rotação. Essas figuras foram retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].	20
4.3	Tabuleiro 2 x 2 com regiões identificadas. Essa figura foi retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].	20
4.4	Tabuleiro 2 x 2 preto e branco. Essa figura foi retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].	20
5.1	Tabuleiro 2 x 2. Essa figura foi retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].	23
5.2	Tabuleiro 2 x 2 rotacionando noventa graus no sentido horário. Figura retirada do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].	23
5.3	Tabuleiro 2 x 2 rotacionando noventa graus no sentido horário. Figura retirada do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].	23
6.1	Tabela Elementos de X x Elementos de G. Essa figura foi retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].	32
7.1	Eixos de simetria de um tetraedro regular. Imagens retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicação [Bovo].	36

Resumo

MARQUES, Davi de Souza, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2019. **Teorema de Burnside e Algumas Aplicações à Contagem**. Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

Este projeto de pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Viçosa – Campus Florestal – tem como foco apresentar o Teorema de Burnside. O Teorema indica como fazer contagens em problemas que podem ser organizados por grupos de simetria e órbitas. Para tal são expostos os conceitos de Permutação, Grupo, Subgrupo, Subgrupo Normal, Subgrupo Quociente, Ações de Grupo, Grupos de Simetria, Órbitas e por fim Teorema de Burnside. Para confirmar a aplicabilidade do Teorema no ensino básico, foi proposta uma atividade com alunos da segunda série do ensino médio.

Abstract

MARQUES, Davi de Souza, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2019.
Burnside Theorem and Some Counting Applications. Adviser: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

This research project was undertaken as a part of the Professional Master's Degree in Mathematics in the National Network (PROFMAT) of the Federal University of Viçosa - Campus Florestal. It applies the Burnside theorem to the problem of making counts that can be classified by symmetry groups and orbits. It concepts of permutation, groups, subgroups, normal subgroups, quotient subgroups, group actions, symmetry groups, orbits, and finally the Burnside theorem to confirm the applicability of this theorem in basic education, an activity was proposed to students in their second year of high school.

Sumário

1	Introdução	1
2	Permutações, Grupos de Permutações e Ordens de Permutações	2
2.1	Cálculo de uma permutação	2
2.2	Permutação representada por um diagrama	3
2.3	$S(X)$ é um grupo de permutações	4
2.4	Axiomas de Grupo	5
2.5	Subgrupos e o Teorema de Lagrange	6
2.6	Tipo cíclico e partições de inteiros	8
2.7	Índices de ciclos	12
3	Grupos de Simetria	14
4	Colorações	18
5	Os axiomas de Ação de Grupos	22
6	Órbitas, Estabilizadores e O Teorema de Burnside	25
6.1	Relações de equivalência por ações de grupos	25
6.2	Inventários de colorações	26
7	Exemplos de aplicações	34
8	Aplicação do Teorema de Burnside em sala de aula	38

Introdução

Em Matemática o estudo de grupos é extremamente importante para entender padrões de simetrias. Os grupos são uma estrutura algébrica poderosa que resolve diversos problemas.

O estudo de grupos se iniciou essencialmente para resolver a seguinte pergunta, feita no final do século XV e que ficou sem resposta por aproximadamente 300 anos: “Quais equações algébricas são solúveis por radicais?”.

Quem respondeu a esta pergunta foi o então jovem Évariste Galois (1811 - 1832). Ele criou o conceito de Grupo em Matemática e associou a cada tipo de equação um grupo formado por permutações de suas raízes. Ele condicionou a resolubilidade por radicais a uma determinada propriedade desse grupo.

Galois concluiu que não existe uma fórmula envolvendo operações elementares (soma, subtração, multiplicação, divisão, potência e radiciação) sobre os coeficientes da equação que resolva qualquer equação de grau n , com $n > 4$. Sua conclusão se deu pelo fato de qualquer equação polinomial de grau menor ou igual a quatro possuir uma determinada propriedade necessária para que seja solúvel por radicais. Já as equações polinomiais de grau maior que quatro não têm, todas, a propriedade em questão.

Percebeu-se então a importância da Teoria de Grupos, não só para a Matemática como também em outras áreas do conhecimento, como Química e Física, com o estudo de simetria.

Com o avanço da Teoria de Grupos, foi possível relaciona-la à Análise Combinatória. As noções de grupo de permutação e ação de grupo, usadas para simplificar a contagem de conjunto de objetos, evoluíram, dando um embasamento teórico robusto ao estudo das Órbitas. A partir do desenvolvimento do Teorema de Burnside para Órbitas, foi possível estudar a resolução de problemas de contagem que possuem grupos de simetria. Um exemplo desses problemas é descobrir o número de maneiras de pintar um cubo com uma quantidade fixa de cores disponíveis.

Assim, este trabalho aborda o Teorema de Burnside para Órbitas, mostrando toda a teoria em que ele se baseia e sua importância para a Análise Combinatória.

Permutações, Grupos de Permutações e Ordens de Permutações

O conceito fundamental de permutação servirá de alicerce para o desenvolvimento deste trabalho.

Para simplificar a notação, será utilizado o símbolo $[n]$, que representa para todo número natural n o conjunto finito $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Definição 2.1: Dado um conjunto não-vazio X , uma bijeção $\sigma: X \rightarrow X$ é denominada uma permutação do conjunto X .

Exemplo 2.0.1: Considere um grupo de 12 pessoas, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{12}$, em fila na ordem numérica $A = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12})$. Uma nova reindexação conveniente dos seus índices $(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4}, p_{i_5}, p_{i_6}, p_{i_7}, p_{i_8}, p_{i_9}, p_{i_{10}}, p_{i_{11}}, p_{i_{12}})$, em que $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}\} = \{1, 2, 3, \dots, 12\} = [12]$, gerará uma determinada fila com todas as pessoas de A . Todas as possíveis filas diferentes com todas as pessoas podem ser representadas por uma sequência dos símbolos p_1, p_2, \dots, p_{12} reorganizados adequadamente, como por exemplo, $(p_{11}, p_4, p_1, p_7, p_6, p_5, p_{10}, p_8, p_9, p_{12}, p_3, p_2)$. Portanto, cada fila possível pode ser representada por uma permutação do conjunto $X = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}\}$. Ou seja, o número total de filas distintas possíveis é igual ao número total de permutações distintas que se pode fazer com os elementos do conjunto X das pessoas.

2.1 Cálculo de uma permutação

Considere o conjunto $X = [n]$ e o conjunto $S(X)$ que contém todas as permutações de todos os elementos de X . Sejam $\#X$ e $\#S(X)$ as quantidades de elementos de X e $S(X)$, respectivamente. Sabe-se que $\#X = n$ e deseja-se encontrar $\#S(X)$.

Para formar uma permutação qualquer desses n elementos, com n maior do que ou igual a dois, tem-se n possibilidades para a primeira posição da sequência. Para escolher a segunda posição, há $n - 1$ possibilidades, pois um dos elementos já foi utilizado na primeira posição. Para a terceira posição, caso n seja maior que dois, claro, há $n - 2$ possibilidades, pois dois dos n elementos já foram utilizados.

Seguindo o raciocínio, cada posição terá uma unidade a menos no número de possibilidades com relação a anterior. Conseqüentemente, a última posição terá apenas um elemento disponível, pois os outros $n - 1$ elementos foram utilizados nas $n - 1$ posições anteriores. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$. permutações distintas. Ou seja, $\#S(X) = n!$

Como os principais casos estudados serão para $X = [n]$, denotaremos $S_n = S(X)$.

2.2 Permutação representada por um diagrama

Para $\sigma \in S_n$ e $i \in [n]$, a notação $\sigma(i)$ representa o valor da função bijetora σ no número i . Assim, o diagrama a seguir pode representar a permutação σ ,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6) & \sigma(7) & \sigma(8) & \sigma(9) \end{pmatrix}$$

em que a primeira linha exibe cada elemento do domínio e a segunda linha exibe suas respectivas imagens por σ .

Exemplo 2.2.1: O diagrama

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

é uma permutação de S_9 . Pode-se perceber que os números 2, 7 e 9 não mudaram de posição, pois $\sigma(2) = 2$, $\sigma(7) = 7$ e $\sigma(9) = 9$.

Para simplificar a apresentação de uma permutação, o desenvolvimento a seguir inicia-se pelo diagrama de setas e termina na representação por ciclos.

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 5 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 6 \\ 4 \rightarrow 8 \\ 5 \rightarrow 4 \\ 6 \rightarrow 3 \\ 7 \rightarrow 7 \\ 8 \rightarrow 1 \\ 9 \rightarrow 9 \end{array} \quad \text{é o mesmo que} \quad \begin{array}{l} 1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \\ 7 \rightarrow 7 \\ 9 \rightarrow 9 \end{array}$$

e que pode ser denotado por $(1548)(2)(36)(7)(9)$.

Cada uma das sequências representadas acima é um ciclo de comprimento definido. Ou seja, (1548) é um ciclo de comprimento quatro, (2) , (7) e (9) são, cada, um ciclo de comprimento um e (36) é um ciclo de comprimento dois.

Sendo $\sigma \in S_n$ uma função bijetora, pode-se fazer sua composta quantas vezes desejar.

Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\sigma^k(j) = \underbrace{\sigma \circ (\sigma \circ (\dots \circ (\sigma(j)) \dots))}_{k \text{ vezes}}$.

Portanto, afirma-se que para todo $j \in [n]$, existe $l_j \in [n]$ de forma que $\sigma^{l_j}(j) = \underbrace{\sigma \circ (\sigma \circ (\dots \circ (\sigma(j)) \dots))}_{l_j \text{ vezes}} = j$.

De fato, essa afirmação pode ser verificada seguindo o raciocínio a seguir.

Se não existisse um l_j , então, depois de fazer n iterações, o valor resultante estaria fora do conjunto $[n]$, o que é um absurdo, já que σ é uma bijeção definida em $[n]$. Portanto, há um ciclo de σ de comprimento l_j determinado por $(j, \sigma(j), \sigma^2(j), \dots, \sigma^{l_j-1}(j))$. Como nesse ciclo foram utilizados l_j elementos, restam outros $n - l_j$ elementos de $[n]$, dos quais há l_k elementos formando outro ciclo, disjunto do primeiro, de comprimento l_k determinado por $(k, \sigma(k), \sigma^2(k), \dots, \sigma^{l_k-1}(k))$. Seguindo esse padrão, todos os elementos de $[n]$ serão utilizados. Assim, obtém-se, por meio de ciclos disjuntos, uma representação da permutação de $[n]$.

Para simplificar, chama-se um ciclo de tamanho p de um p -ciclo. Chama-se de ponto fixo um ciclo com $p = 1$. Já para $p = 2$ diz-se que o ciclo é uma transposição.

Exemplo 2.2.2: Na notação por ciclos $(1)(257)(36)(4)$, que representa a permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

o ciclo (1) , assim como o ciclo (4) , são ditos “ponto fixo da permutação”. Já o ciclo (36) é chamado de transposição.

A ordem dos ciclos $(1), (257), (36)$ e (4) em $(1)(257)(36)(4)$ é irrelevante. Ou seja, $(1)(257)(36)(4) = (257)(1)(36)(4) = (36)(257)(4)(1)$. Desconsiderando essas apresentações de ciclos, cada permutação possui apenas uma representação por ciclos. Esse resultado encontra-se no Teorema 10, nas páginas 160, 161 e 162, do livro Introdução a Álgebra de [adilson] e sua prova também está no livro Elementos de Álgebra de [garcia]. O Teorema a seguir enuncia esse resultado.

Teorema 2.1: Toda permutação $\sigma \neq \text{id} \in S_n$ pode ser escrita de modo único (a menos da ordem) como produto de ciclos disjuntos.

Para avançar nos estudos de permutações, é necessário entender os lemas sobre $S(X)$ a seguir.

2.3 $S(X)$ é um grupo de permutações

Os lemas a seguir são referentes a um conjunto não-vazio X qualquer. Em particular, X poderia ser o conjunto $[n]$.

Lema 2.1: O conjunto $S(X)$ é fechado por composição de permutações, isto é,

$$\sigma_1, \sigma_2 \in S(X) \Rightarrow \sigma_1 \circ \sigma_2 \in S(X).$$

Demonstração. Seja $\sigma_1, \sigma_2 \in S(X)$. Para que $\sigma_1(\sigma_2)$ pertença a $S(X)$ deve-se ter $\sigma_1(\sigma_2)$ bijetiva de X em X . Para tal, basta provar que $\sigma_1\sigma_2$ é bijetiva.

Injetividade:

Toma-se $x, y \in X$, com $x \neq y$. Como σ_2 é injetiva, tem-se que $\sigma_2(x) \neq \sigma_2(y)$. Como σ_1 também é injetiva, então $\sigma_1(\sigma_2(x)) \neq \sigma_1(\sigma_2(y))$. Portanto, $\sigma_1(\sigma_2)$ é injetiva.

Sobrejetividade:

Seja $z \in X$. Sabe-se que σ_1 e σ_2 são sobrejetivas. Logo, existe $y \in X$ com $\sigma_1(y) = z$. Além disso existe $x \in X$ com $\sigma_2(x) = y$. Assim, $\sigma_1(\sigma_2(x)) = z, \forall x \in X$. Portanto, $\sigma_1(\sigma_2)$ é sobrejetiva.

Como $\sigma_1(\sigma_2)$ é injetora e sobrejetora, então ela é bijetora, donde se conclui que $\sigma_1(\sigma_2)$ é fechado por composição de permutações. \square

Lema 2.2: A função $e: X \rightarrow X$ definida por $e(x) = x$ para todo $x \in X$ é uma bijeção e opera como a identidade de $S(X)$, isto é:

$$\forall \sigma \in S(x), \text{ tem-se } \sigma e = e\sigma = \sigma.$$

Há também, para qualquer permutação $\sigma \in S(x)$, uma permutação inversa $\sigma^{-1} \in S(x)$ tal que

$$\sigma(\sigma^{-1}) = \sigma^{-1}(\sigma) = e.$$

Esse último resultado é garantido pelo fato de que qualquer $\sigma \in S(X)$ é uma bijeção. Portanto, possui inversa. Conclui-se então que há os inversos em $S(X)$.

Sabe-se que a composição de funções é associativa. Logo, tem-se o seguinte lema

Lema 2.3: Dadas as permutações σ_1, σ_2 e σ_3 em $S(X)$, tem-se que

$$\sigma_1(\sigma_2(\sigma_3)) = (\sigma_1(\sigma_2))\sigma_3.$$

Os três lemas acima citados mostram que $S(X)$ é um grupo com a operação de composição de funções. Na próxima seção serão demonstrados alguns resultados importantes. Para isso, é importante saber o que é um grupo.

2.4 Axiomas de Grupo

Uma operação binária $*$ em um conjunto X é uma função $*$: $X \times X \rightarrow X$ que associa a cada par de elementos de X um elemento de X .

Definição 2.2: Um grupo é um par ordenado $(G, *)$, em que G é um conjunto e $*$ é uma operação binária em G , satisfazendo:

(G1) Identidade: Existe $e \in G$ tal que para todo $x \in G$, tem-se $x * e = e * x = x$.

(G2) Inversos: Para todo $x \in G$, existe $x^{-1} \in G$ tal que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

(G3) Associatividade: Para todos $x, y, z \in G$, tem-se $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Pelo fato de existir a associatividade, pode-se escrever a expressão $x * y * z$ sem usar os parênteses. Ou seja, $x * (y * z)$ e $(x * y) * z$ representam a mesma coisa que $x * y * z$.

Por consequência dos lemas da seção anterior, tem-se o seguinte teorema.

Teorema 2.2: Se X é um conjunto não-vazio, $(S(X), \circ)$ é um grupo chamado de grupo de permutações de X , e denotado simplesmente por $S(X)$.

Corolário 2.1: S_n é o grupo, chamado de grupo simétrico, formado por todas as permutações dos elementos de $[n]$.

Exemplo 2.4.1: Os pares a seguir são grupos:

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Q}^*, \times), (\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{C}^*, \times)$$

Observe que nos pares $(\mathbb{Q}^*, \times), (\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{C}^*, \times)$ o número zero foi excluído, pois este não possui inverso multiplicativo.

Um exemplo de par que não é grupo é (\mathbb{Z}, \times) , pois não há inverso multiplicativo de nenhum número inteiro diferente de 1 e de -1.

2.5 Subgrupos e o Teorema de Lagrange

Dado um grupo $(G, *)$, um subconjunto não vazio H de G é subgrupo de G quando $(H, *)$ é um grupo.

Como a associatividade é válida para todos os elementos de G , então a associatividade vale para todos os elementos de H .

Proposição 2.1: Dado um grupo G e $H \subseteq G$, H é um subgrupo de G se

(SG1) H é fechado sob a operação $*$, isto é, $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.

(SG2) H contém o elemento identidade e de G .

(SG3) H contém inversos, isto é, $\forall x \in H$ tem-se $x^{-1} \in H$.

Demonstração. A prova desse resultado está na proposição 1 da página 126 do livro Introdução à Álgebra de [adilson]. □

Pode-se reescrever, simplificadaamente, as condições da definição anterior por meio da proposição a seguir

Proposição 2.2: Se G é um grupo e $H \neq \emptyset$ é um subconjunto de G , então

$$H \text{ é subgrupo de } G \iff \forall g, h \in H \text{ tem-se } g * h^{-1} \in H.$$

Demonstração. A prova desse resultado está na proposição 1 (c) da página 127 do livro Introdução à Álgebra de [adilson]. □

Assim como na composição de funções, podemos omitir o símbolo $*$ na operação $x * y$. Ou seja, a partir de agora $x * y$ será representado apenas por xy .

Para a demonstração do Teorema de Lagrange, os conceitos a seguir são de extrema importância.

Definição 2.3: Seja G um grupo e H um subgrupo de G . Para cada $g \in G$, a classe lateral gH é definida como sendo o conjunto

$$gH = \{gh : h \in H\}.$$

Lema 2.4: Seja H um subgrupo de G e $g_1, g_2 \in G$. Então

$$g_1H = g_2H \iff g_2^{-1}g_1 \in H.$$

Demonstração. Inicialmente, suponha que $g_1H = g_2H$. Como a identidade $e \in H$, tem-se

$$g_1e = g_1 \in (g_1H) \Rightarrow g_1 \in (g_2H).$$

Logo, existe $h \in H$ tal que $g_1 = g_2h$, ou equivalentemente, $g_2^{-1}g_1 = h$. Então, $g_2^{-1}g_1 \in H$. Suponha agora que $g_2^{-1}g_1 \in H$. Assim, existe $h \in H$ tal que $g_2^{-1}g_1 = h$.

Para prosseguir com a demonstração, precisa-se mostrar que $g_1H \subseteq g_2H$ e $g_2H \subseteq g_1H$. Para isso, tome $x \in g_1H$. Ou seja, considere x tal que $x = g_1h_1$ para algum $h_1 \in H$. Tem-se daí

$$x = g_1h_1 = (g_2h)h_1 = g_2(hh_1) = g_2h_2, \text{ com } h_2 \in H, \text{ pois } H \text{ é subgrupo de } G$$

Assim, tem-se que $x \in g_2H$ e portanto $g_1H \subseteq g_2H$.

Como H é subgrupo de G , h possui inverso, que é denotado por h^{-1} . Portanto, pode-se escrever a expressão $g_1 = g_2h$ como $g_1h^{-1} = g_2$. Consequentemente, $g_2H \subseteq g_1H$.

Por fim, como $g_1H \subseteq g_2H$ e $g_2H \subseteq g_1H$, conclui-se que $g_1H = g_2H$. □

Lema 2.5: Se H é um subgrupo de G , então quaisquer classes laterais de H ou são idênticas, ou são disjuntas. Ou seja,

$$\forall g_1, g_2 \in H, \text{ tem-se, exclusivamente, que } g_1H = g_2H \text{ ou } g_1H \cap g_2H = \emptyset.$$

Demonstração. Suponha que $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$ e seja $x \in g_1H \cap g_2H$. Então, existem $h_1, h_2 \in H$ tais que $x = g_1h_1 = g_2h_2$, o que significa que $g_2^{-1}g_1 = h_2h_1^{-1}$. Mas $h_2h_1^{-1} \in H$, pois H é subgrupo de G , o que implica que $g_2^{-1}g_1 \in H$ e assim, pelo Lema 2.4, tem-se $g_1H = g_2H$. □

Definição 2.4: O índice de H em G é o número de classes laterais de H em G . Denotamos o índice de H em G por $|G:H|$. Ou seja,

$$|G : H| = \# \{gH: g \in G.\}$$

Tem-se agora todas as bases necessárias para a demonstração de um importante resultado sobre a ordem de subgrupos de G , o Teorema de Lagrange.

Teorema 2.3: Seja H um subgrupo de um grupo finito G , $|H|$ a ordem de H e $|G|$ a ordem de G . Tem-se então que

$$|G : H| \times |H| = |G|.$$

Demonstração. A identidade e está em H , pois H é subgrupo de G . Assim, para um g qualquer pertencente a G , tem-se $g = ge \in gH$. Portanto, cada elemento de G está em alguma classe lateral de H em G . Considere $H = \{h_1, h_2, h_3, \dots, h_m\}$ um subgrupo de G . Como $H \subseteq G$, tem-se que $|H| < \infty$.

Para todo $g \in G$, $gh_i \neq gh_j$ para quaisquer $i \neq j$. Se fosse possível ter $gh_i = gh_j$, para $i \neq j$, poderia-se cancelar g a esquerda de cada lado da igualdade e obter $h_i = h_j$, o que é absurdo.

Logo, conclui-se que para qualquer classe lateral gH , $|gH| = |H|$. De acordo com o Lema 2.5, tem-se que as diferentes classes laterais de H em G particionam G em $|G : H|$ conjuntos de cardinalidade $|H|$. Assim, o teorema está provado. \square

Com os conceitos anteriores postos, obtém-se o Teorema de Lagrange.

Teorema 2.4 (Teorema de Lagrange): Se H é subgrupo de um grupo finito G , então a ordem de H divide a ordem de G .

Demonstração. Os números $|G : H|$, $|H|$ e $|G|$ são inteiros positivos, pois G e H são grupos finitos. Logo, pela definição de divisibilidade e pela equação do teorema anterior, $|G : H| \times |H| = |G|$. Ou seja, $|G|$ é divisível por $|H|$. \square

2.6 Tipo cíclico e partições de inteiros

Com o que já foi visto no Teorema 2.1, pode-se concluir que toda permutação $\sigma \in S_n$, diferente da identidade pode ser representada por $t = t(\sigma)$ ciclos disjuntos,

$$\sigma = \left(j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)} \dots j_{l_1}^{(1)} \right) \left(j_1^{(2)} j_2^{(2)} j_3^{(2)} \dots j_{l_2}^{(2)} \right) \dots \left(j_1^{(t)} j_2^{(t)} j_3^{(t)} \dots j_{l_t}^{(t)} \right)$$

com $t \in \mathbb{N}$, $[n]$ particionado pela seguinte reunião disjunta

$$[n] = \bigcup_{i=1}^t \{j_1^{(i)}, j_2^{(i)}, j_3^{(i)}, \dots, j_{l_i}^{(i)}\}.$$

Essa representação é única a menos de permutações dos ciclos e de permutações cíclicas dos elementos internos de cada ciclo.

Definição 2.5: Considere um grupo finito G . A ordem de um elemento g é definida como o menor inteiro positivo k tal que $g^k = e$. Consequentemente para qualquer múltiplo $m = r.k$ de k , também tem-se a equação $g^m = e$.

Assim, uma permutação que seja um k -ciclo possui ordem k . Ou seja, esse k -ciclo elevado a qualquer múltiplo de k resulta na identidade. Como os ciclos da representação de σ são disjuntos, temos:

$$\sigma^k = \left(j_1^{(1)} j_2^{(1)} \dots j_{l_2}^{(1)} \right)^k \left(j_1^{(2)} j_2^{(2)} \dots j_{l_2}^{(2)} \right)^k \dots \left(j_1^{(t)} j_2^{(t)} \dots j_{l_t}^{(t)} \right)^k.$$

Portanto, para encontrar a ordem de σ , é preciso que todos os ciclos de sua representação, quando elevados a k , atinjam a identidade, o que ocorre quando o expoente k for múltiplo comum de l_1, l_2, \dots, l_t . Pela definição de ordem de um elemento, deseja-se o menor valor de k . Assim, a ordem de σ é igual a $[l_1, l_2, \dots, l_t]$, o mmc de l_1, \dots, l_t .

A seguir será definido um termo polinomial que reflete a estrutura cíclica de uma permutação $\sigma \in S_n$.

Definição 2.6: Define-se o tipo cíclico de $\sigma \in S_n$ como sendo o polinômio TC (σ) dado por

$$TC(\sigma) = \prod_{i=1}^t x_{l_i}, \tag{2.1}$$

em que l_i representa o tamanho do ciclo i .

Exemplo 2.6.1:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

= (1)(257)(36)(4) tem tipo cíclico $TC(\sigma) = x_1 x_3 x_2 x_1 = x_1^2 x_2 x_3$. A comutatividade do produto em $TC(\sigma)$ expressa a propriedade de que a ordem dos ciclos na representação de σ é irrelevante.

Exemplo 2.6.2: $\sigma = (1)(276)(3)(4589) \in S_9$ tem tipo cíclico $TC(\sigma) = x_1 x_3 x_1 x_4 = x_1^2 x_3 x_4$.

Costuma-se omitir da representação de σ os ciclos unitários. Porém, para a determinação de tipo cíclico de uma permutação é imprescindível representar todos os ciclos unitários.

No polinômio representado na equação (2.1) é possível que haja ciclos disjuntos de mesmo comprimento, como nos últimos dois exemplos. Ou seja, os números l_1, l_2, \dots, l_t podem não ser todos distintos. Sem perda de generalidade, suponha que no conjunto $\{l_1, l_2, \dots, l_t\}$ tem-se apenas $2 \leq s \leq t$ números distintos. Reordenando,

tem-se, na ordem crescente, $l_1 < l_2 < \dots < l_s$. Nessa nova organização, tem-se k_1 ciclos de comprimento l_1 , k_2 ciclos de comprimento l_2 , ..., k_s ciclos de comprimento l_s ; em que $k_j, l_j \in [n]$ para $j = 1, 2, \dots, s$. Desta forma, pode-se concluir que para toda $\sigma \in S_n$ fixada, tem-se a unicidade dos números $s(\sigma)$, $k_j(\sigma)$ e $l_j(\sigma)$, em que $j = 1, 2, \dots, s$. Assim, o tipo cíclico de σ toma a forma a seguir, que é mais explícita e intuitiva,

$$TC(\sigma) = x_{l_1}^{k_1} x_{l_2}^{k_2} \dots x_{l_s}^{k_s},$$

em que k_j é o número de ciclos de comprimento l_j para $j = 1, 2, \dots, s$. Nesse caso, o número total de ciclos na representação é $k_1 + k_2 + \dots, k_s$.

Pelo fato de $\sigma \in S_n$ ser uma permutação dos números de $[n]$, deve-se ter n símbolos distribuídos entre todos os ciclos de sua representação. Conclui-se daí que $k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_s l_s = n$. Pela ordenação $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_s \leq n$ e definições de k_j , tem-se então uma partição do inteiro $n = k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_s l_s$. De forma recíproca, se tem-se uma partição do inteiro n dada por

$$n = k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_s l_s \text{ com } k_j, l_j \in [n], l_1 < \dots < l_s$$

em que tem-se k_j partes iguais a l_j para $j = 1, 2, \dots, s$. Portanto, é possível encontrar uma permutação $\sigma \in S_n$ com tipo cíclico $TC(\sigma) = x_{l_1}^{k_1} x_{l_2}^{k_2} \dots x_{l_s}^{k_s}$. São muitas as permutações em S_n com este tipo cíclico dado, e o teorema a seguir mostra quantos são. A demonstração é devida a Cauchy.

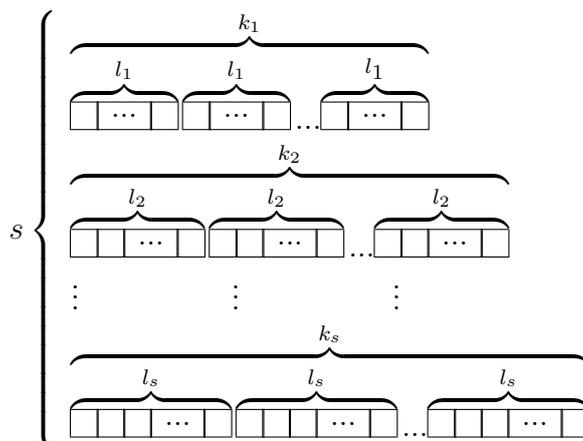
Teorema 2.5: Seja uma partição de n , dada por $n = k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_s l_s$ com $k_j l_j \in [n]$ e $l_1 < l_2 < \dots < l_s$. Então existem

$$\frac{n!}{l_1^{k_1} k_1! l_2^{k_2} k_2! \dots l_s^{k_s} k_s!}$$

permutações $\sigma \in S_n$ com tipo cíclico $x_{l_1}^{k_1} x_{l_2}^{k_2} \dots x_{l_s}^{k_s}$.

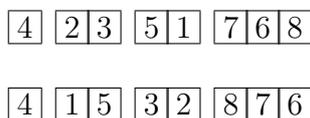
Demonstração. Seja h o número de permutações $\sigma \in S_n$ satisfazendo $TC(\sigma) = x_{l_1}^{k_1} x_{l_2}^{k_2} \dots x_{l_s}^{k_s}$, isto é, contendo k_j ciclos de comprimento l_j para $j = 1, 2, \dots, s$. Considere agora as permutações com o tipo cíclico desejado, quebradas em seus ciclos componentes.

De início lista-se os k_1 ciclos de comprimento l_1 e representam-se cada ciclo por l_1 quadrados. Feito isso, lista-se os k_2 ciclos de comprimento l_2 e representa-se cada ciclo por l_2 quadrados. Seguindo este critério até que todos os k_s ciclos de comprimento l_s e seus quadrados, tem-se a representação a seguir:



O total de quadrados acima é n , pois é a representação de uma permutação em S_n .

Inserindo cada uma das $n!$ permutações dos números $[n]$ dentro dos n quadrados, obtém-se uma aplicação do conjunto das $n!$ permutações no conjunto das permutações com tipo cíclico determinado acima. Ao preencher os quadrados, pode-se ter mais de uma permutação determinando o mesmo resultado. Por exemplo, se $n = 8$, $TC(\sigma) = x_1x_2^2x_3$, os dois preenchimentos a seguir representam a mesma permutação $(4)(23)(15)(687)$:



Seja h o número de permutações de S_n com o tipo cíclico desejado. Considere P uma dessas permutações. Para formar P no preenchimento, suas k_1 l_1 -uplas de elementos devem ser colocadas nos k_1 blocos de l_1 quadrados cada, pois P possui k_1 ciclos de comprimento l_1 . Cada l_1 -upla pode ser colocada em qualquer ordem entre os k_1 blocos. Logo, há $k_1!$ possibilidades para organizar cada l_1 -upla. Cada um dos k_1 blocos pode ser rotacionado de l_1 maneiras diferentes, pois seu comprimento é l_1 . Assim, tem-se $l_1^{k_1}$ possibilidades para rotações cíclicas dos elementos dos blocos. Portanto o número total de maneiras de se obter os k_1 ciclos de comprimento l_1 de P é $k_1!l_1^{k_1}$. Usando o mesmo raciocínio nos outros ciclos de P , há $k_j!l_j^{k_j}$ maneiras de se obter os k_j ciclos de comprimento l_j para $j = 1, 2, \dots, s$. Portanto, tem-se o total de

$$k_1!l_1^{k_1}k_2!l_2^{k_2} \dots k_s!l_s^{k_s}$$

permutações. Logo, se todas as $n!$ permutações forem plugadas nos quadrados do diagrama, cada permutação com esse tipo cíclico gera exatamente o número de vezes indicado acima. Assim, conclui-se que

$$h \cdot k_1!l_1^{k_1}k_2!l_2^{k_2} \dots k_s!l_s^{k_s} = n!,$$

de onde tem-se o resultado

$$h = \frac{n!}{l_1^{k_1} k_1! l_2^{k_2} \dots l_s^{k_s} k_s!}.$$

□

Corolário 2.2: Há uma correspondência biunívoca entre as partições do inteiro n e os tipos cíclicos dos elementos de S_n . Portanto, há $p(n)$ diferentes tipos cíclicos para as permutações de S_n , em que $p(n)$ é o número de partições do inteiro n .

A seguir há uma tabela contendo alguns valores de $p(n)$.

n	p (n)	n	p (n)
1	1	10	42
2	2	20	627
3	3	30	5604
4	5	40	37338
5	7	50	203226
6	11	60	966467
7	15	70	4087968
8	22	80	15796476
9	30	90	56634173

Para encontrar a maior ordem que um elemento de S_n pode ter, por exemplo, uma maneira é procurar nas partições de $n = x_1 + x_2 + \dots + x_s$ a que tem maior valor para $\text{mmc}(x_1, \dots, x_s)$.

2.7 Índices de ciclos

Definição 2.7: Se S_n é um grupo finito de permutações, o índice de ciclos de S_n , denotado por $Z(S_n)$, é definido como sendo o polinômio

$$Z(S_n) = \frac{1}{|S_n|} \sum_{\sigma \in S_n} TC(\sigma).$$

A soma dos coeficientes do polinômio $Z(S_n)$ deve ser igual a 1, pois há $|S_n|$ termos na soma divididos pelo fator $|S_n|$.

Exemplo 2.7.1: A seguir tem-se os polinômios $Z(S_n)$ para quando G é S_1 , S_2 e S_3 . Sendo S_n o conjunto S_1 , tem-se

$$Z(S_1) = x_1,$$

pois em S_1 há apenas a permutação identidade, que possui tipo cíclico x_1 .

Se S_n for o conjunto S_2 , tem-se

$$Z(S_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2),$$

pois há as permutações (1)(2) e (12), que possuem tipos cíclicos iguais a x_1^2 e x_2 , respectivamente.

Para S_n igual S_3 , tem-se a permutação (1)(2)(3) com tipo cíclico igual a x_1^3 , as permutações (12)(3), (13)(2) e (23)(1) com tipo cíclico x_1x_2 e as permutações (123) e (132) com tipo cíclico x_3 . Logo,

$$Z(S_3) = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3).$$

Generalizando, tem-se a fórmula fechada para os coeficientes do índice de ciclos de S_n .

Teorema 2.6: A expressão geral para o índice de ciclos do grupo simétrico S_n é

$$Z(S_n) = \sum_{k_1l_1+\dots+k_sl_s=n} \frac{1}{l_1^{k_1}k_1!l_2^{k_2}k_2!\dots l_s^{k_s}k_s!} x_{l_1}^{k_1}x_{l_2}^{k_2}\dots x_{l_s}^{k_s},$$

em que a soma é efetuada sobre todas as partições do inteiro n .

Demonstração. O resultado sai diretamente do Teorema 2.5 e da definição de índices de ciclos. Basta somar nos $p(n)$ diferentes tipos de cíclicos possíveis para as permutações de S_n .

□

Grupos de Simetria

Em Análise Combinatória, muitos problemas são dificultados pelas situações em que há casos equivalentes contados mais de uma vez. Para que não ocorra essa contagem indevida, em muitas situações é importante montar grupo que contenha apenas casos equivalentes.

Para figuras planas e espaciais, por exemplo, há casos de simetria que invaria a imagem. Assim, se faz necessário entender todas as simetrias que uma figura bidimensional ou tridimensional pode ter.

As principais simetrias são observadas a partir de certas classes de transformação, como operações de rotação, reflexão e inversão.

Afim de entendermos e quantificarmos os casos equivalentes, a seguir veremos o conceito formal de simetria.

Entendemos por uma figura um conjunto F de pontos de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Assim, considere a seguinte definição sobre simetria de figuras planas ou espaciais.

Definição 3.1: Dada uma figura F , uma simetria de F é uma aplicação $f: F \rightarrow F$ com as seguintes propriedades.

- (i) f é uma isometria, isto é, f preserva distâncias. Em outras palavras: se x e y são pontos do plano ou espaço e $\text{dist}(x,y)$ designa a distância de x a y , então $\text{dist}(x,y) = \text{dist}(f(x),f(y))$;
- (ii) f é sobrejetiva.

O contexto da definição 3.1, i) e ii) implicam que f é injetora.

Portanto, uma simetria é uma aplicação que associa a figura nela mesma, preservando distâncias.

Teorema 3.1: Seja F uma figura. O conjunto de todas as simetrias de F , com a operação de composição de funções, forma um grupo.

Demonstração. Seja G o conjunto de todas as simetrias de F . Verificamos a seguir que G munido da operação de composição de funções satisfaz os axiomas de grupo. A identidade $I_F : F \rightarrow F$ é obviamente uma simetria e, portanto, G possui um

elemento identidade. Chamando por $d(x,y)$ a distância entre os pontos x e y , considere $f, g \in G$. De início tem-se que $f \circ g$ é uma isometria, pois

$$d(f(g(x)),f(g(y))) = d(g(x),g(y)), \text{ já que } f \text{ é uma isometria.}$$

Além disso, $d(f(g(x)),f(g(y))) = d(x,y)$, pois g é uma isometria.

Como $(f \circ g)(F) = f(g(F)) = f(F) = F$, e $f \circ g$ é uma bijeção, segue então que $f \circ g$ é uma simetria e portanto está em G . Como toda simetria f é injetora, então f possui uma inversa f^{-1} . Dados $z, w \in F$, como f é sobrejetiva também,

$$d(f^{-1}(z),f^{-1}(w)) = d(f(f^{-1}(z)),f^{-1}(w)) = d(z,w).$$

Assim, f^{-1} é uma simetria e portanto pertence a G .

A partir da associatividade de composição de funções, conclui-se, diretamente, que há associatividade na composição de simetrias. \square

Para relacionar grupos de simetrias a grupos de permutações, números marcarão as figuras, facilitando a organização. Nas situações a seguir, os números serão associados aos vértices. Em outras situações, pode ser mais adequado associar os números as faces, a arestas ou a quaisquer outros elementos, dependendo da complexidade da figura.

Exemplo 3.0.1: Um triângulo equilátero possui seis simetrias: uma delas é a identidade, duas são rotações horárias centradas em seu centro de gravidade de ângulos $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ e três delas são reflexões por meio de suas medianas.

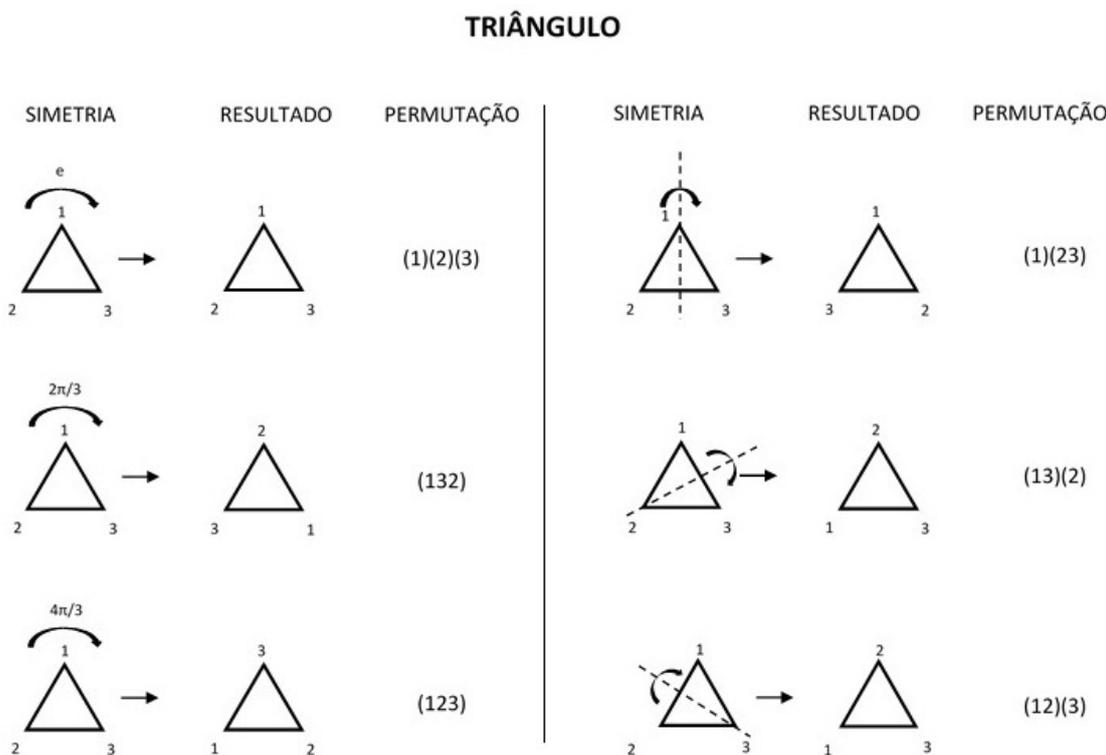


Figura 3.1: Simetrias do triângulo. Imagens retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicação [Bovo].

Exemplo 3.0.2: Um quadrado desenhado no plano possui oito simetrias: uma delas é a identidade, duas são rotações horárias centradas em seu centro de gravidade de ângulos $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$, duas são reflexões por meio de suas mediatrizes e duas são reflexões por meio de suas diagonais.

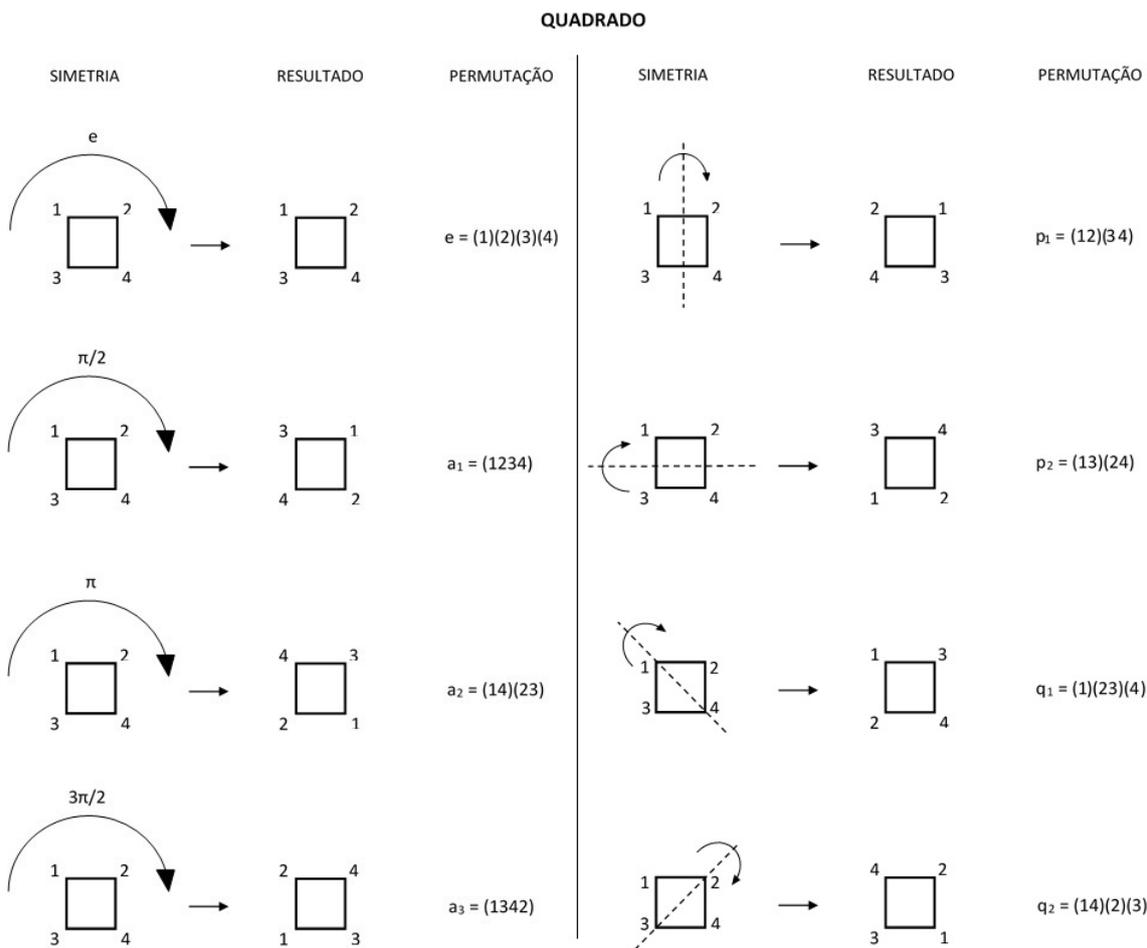


Figura 3.2: Simetrias do quadrado. Imagens retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicação [Bovo].

Exemplo 3.0.3: Para o caso do cubo, há três tipos de rotação. Essas rotações são apresentadas e explicadas a seguir.

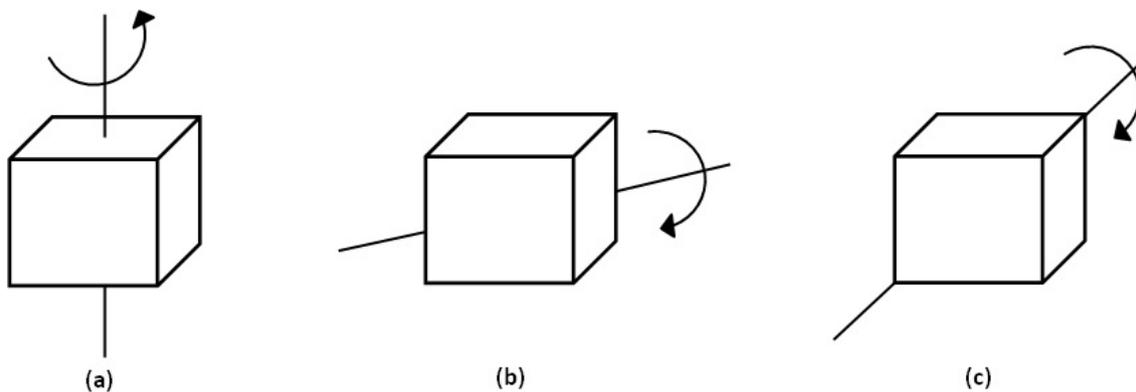


Figura 3.3: Eixos de Rotação do Cubo. Imagens retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicação [Bovo].

- (a) Rotação em torno de um eixo que passa pelos centros de faces opostas.
- (b) Rotação em torno de um eixo que passa pelos pontos médios de arestas opostas.
- (c) Rotação em torno de um eixo que passa por vértices opostos.

Logo, pode-se listar todas as 24 simetrias rotacionais de um cubo:

1. A identidade e .
2. Três rotações de um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ pelo eixo indicado em (a).
3. Três rotações de um ângulo de π pelo eixo indicado em (a).
4. Três rotações de um ângulo de $\frac{3\pi}{2}$ pelo eixo indicado em (a).
5. Seis rotações de um ângulo de π pelo eixo indicado em (b).
6. Quatro rotações de um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ pelo eixo indicado em (c).
7. Quatro rotações de um ângulo de $\frac{4\pi}{3}$ pelo eixo indicado em (c).

Perceba que um cubo possui quatro diagonais, que podem ser denominadas d_1 , d_2 , d_3 e d_4 . É possível associar cada uma das diagonais aos números 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Sabe-se que são 24 as permutações de S_4 . Assim, é possível associar cada simetria rotacional do cubo a uma permutação de S_4 .

Colorações

Para quantificarmos casos que envolvam figuras geométricas e suas cores, é necessário entender o conceito formal de Coloração.

De acordo com o site <http://mathworld.wolfram.com/Coloring.html>, tem-se a seguinte definição sobre coloração:

“Uma coloração de regiões planas, segmentos de linha, etc., é uma atribuição de uma marcação distinta (que pode ser um número, letra, cor, etc.) para cada componente. Os problemas de coloração geralmente envolvem considerações topológicas (isto é, dependem do estudo abstrato do arranjo de objetos), e os teoremas sobre as cores podem ser extremamente difíceis de provar.”

Para a parte que está relacionada a contagem em colorações, vamos nos atentar inicialmente para figuras planas, principalmente tabuleiros, que formados por quadrados justapostos. Posteriormente analisaremos a coloração de um cubo.

Assim, vamos analisar primeiramente um tabuleiro em forma de quadrado de ordem 2×2 .

Há inúmeras maneiras de colorir um tabuleiro 2×2 e a quantidade vai depender do número de cores disponíveis, além da disposição das cores em cada região. A princípio, vamos considerar que há apenas duas cores disponíveis. Por exemplo, preta e branca.

A seguir tem-se todas as $2^4 = 16$ formas de se colorir um tabuleiro 2×2 utilizando duas cores (preta e branca). Cada uma dessas 16 formas é identificada pela letra C seguida de um número, que varia de 1 a 16.

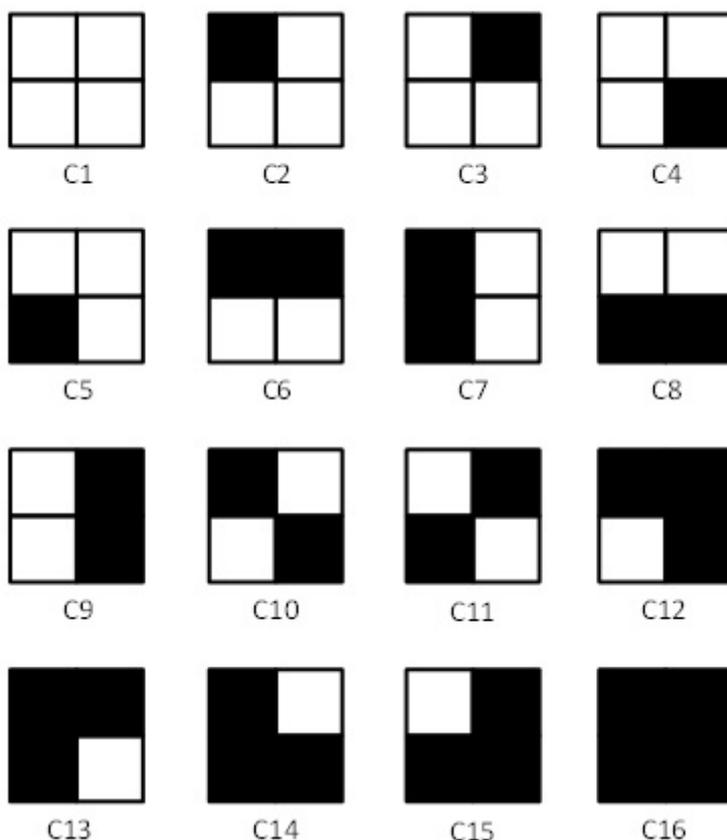


Figura 4.1: As 16 colorações de um tabuleiro 2 x 2, nas cores preto e branco. Essas figuras foram retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].

Do total listado acima, podemos inferir os seguintes conjuntos de padrões equivalentes:

$$\begin{aligned} & \{C1\}, \\ & \{C2, C3, C4, C5\}, \\ & \{C6, C7, C8, C9\}, \\ & \{C10, C11\}, \\ & \{C12, C13, C14, C15\}, \\ & \{C16\}. \end{aligned}$$

Em cada conjunto, os elementos possuem padrões equivalentes porque é possível obter um elemento a partir de outro apenas por rotação em torno do centro da figura. Assim, por exemplo, a partir de C13 é possível obter C15 fazendo uma rotação no sentido horário de um ângulo π radianos em torno do centro da figura representada por C13.

No caso do tabuleiro 2 x 2, não é necessário analisar as reflexões, pois todas elas podem ser representadas por rotações. Mas em outras organizações, como no tabuleiro 3 x 3, algumas reflexões não podem ser equivalentemente obtidas apenas por rotações. Para ilustrar uma situação, considere dois diagramas de um tabuleiro 3 x 3, em que

um não pode ser obtido pelo outro apenas por rotações. Neste caso precisaríamos também das reflexões, conforme representado a seguir.

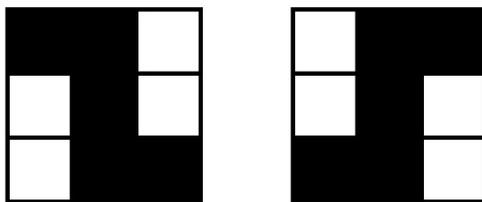


Figura 4.2: Exemplo de colorações em um tabuleiro 3 x 3, nas cores preto e branco, que não equivalentes por rotação. Essas figuras foram retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].

A seguir define-se rigorosamente o que se entende por colorações de objetos, sejam tabuleiros, contas, vértices, faces etc ...

Primeiro, considere novamente o tabuleiro de xadrez 2 x 2.

$\alpha 1$	$\alpha 2$
$\alpha 3$	$\alpha 4$

Figura 4.3: Tabuleiro 2 x 2 com regiões identificadas. Essa figura foi retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].

Então, se as cores disponíveis são preto e branco, pode-se considerar uma coloração f como uma aplicação do conjunto dos quadrados $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \alpha 4\}$ nos conjuntos das cores $\{preto, branco\}$, isto é

$$f : \{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \alpha 4\} \rightarrow \{preto, branco\}.$$

As 16 colorações diferentes correspondem então às 16 aplicações diferentes com os domínios e contradomínios definidos acima. Por exemplo, a coloração correspondente à $C10$, denotada por f_{10} , é a coloração determina da por

$$\begin{aligned} f_{10}(\alpha 1) &= f_{10}(\alpha 4) = preto, \\ f_{10}(\alpha 2) &= f_{10}(\alpha 3) = branco. \end{aligned}$$



$c10$

Figura 4.4: Tabuleiro 2 x 2 preto e branco. Essa figura foi retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].

Para facilitar o entendimento, é conveniente denotar por f_j a coloração correspondente ao diagrama C_j da figura 4.1, com $j \in \{1, 2, 3, \dots, 16\}$.

Segue-se agora o conceito geral. Sejam D e C dois conjuntos não vazios, diferentes, e $X = F(D, C)$, o conjunto de todas as funções de domínio D e contradomínio C . Dessa forma diz-se que qualquer função $f \in X$ é uma coloração de D . Este é o caso mais abstrato. Em situações em que C e D são finitos, e se $\#D = n$, $\#C = m$, temos, pelo princípio multiplicativo, um total de m^n colorações de D diferentes, isto é $\#X = m^n$.

Exemplo 4.0.1: Seja D o conjunto das oito questões de uma prova e C o conjunto das cinco alternativas possíveis em cada questão. Quantos são os gabaritos possíveis?

Como são 5 alternativas possíveis para cada uma das 8 questões, então há $5^8 = 390625$ maneiras diferentes de se preencher o gabarito.

Exemplo 4.0.2: Seja D o conjunto de quadrados de um tabuleiro 2×2 e C o conjunto das cores $\{\text{preto}, \text{branco}\}$. De quantas maneiras pode-se colorir o tabuleiro?

Como são duas cores disponíveis para cada quadrado do tabuleiro, então há $2^4 = 16$ maneiras diferentes de se pintar um tabuleiro 2×2 .

Os axiomas de Ação de Grupos

Deseja-se descrever a situação geral em que tem-se uma interação entre um grupo G e um conjunto X , não vazio.

Definição 5.1: Seja G um grupo e seja X um conjunto não vazio. Diz-se que G age em X se, para todo $g \in G$ e para todo $x \in X$, existir uma função $\varphi: G \times X \rightarrow X$, com $\varphi((g, x)) = gX$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(A1) Para todo $x \in X$, $e_G \cdot x = x$, em que, e_G é a identidade de G ;

(A2) Para todos $g, h \in G, x \in X$, temos,

$$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x.$$

O axioma A1 significa que a ação do elemento identidade de G é sempre trivial, isto é, fixa todo elemento de X .

Já o axioma A2 relaciona a ação do grupo à sua operação.

Sempre que um grupo age em um conjunto, tem-se uma *ação de grupo*, e os axiomas A1 e A2 são chamados de *axiomas de ação de grupo*.

Como as combinações são entre elementos de conjuntos diferentes (G e X), não deve-se omitir o símbolo \cdot que representa a ação de grupos.

Exemplo 5.0.1: Tome G como o grupo das simetrias do quadrado, e considere X o conjunto das colorações de um tabuleiro 2×2 nas cores preto e branca.

Exemplo 5.0.2: Tome G como um grupo das simetrias rotacionais de um cubo e X o conjunto de colorações das faces do cubo usando marrom, verde e azul.

Exemplo 5.0.3: Seja G qualquer grupo e seja X o conjunto dos elementos de G . Define-se uma ação de grupo por

$$\text{Para todos } g, x \in G, \text{ tem-se } g \cdot x = gxg^{-1}.$$

Essa ação é chamada de conjugação, o elemento do grupo gxg^{-1} é chamado de conjugado de x pelo elemento g .

Lema 5.1: Seja G um grupo que age no conjunto X . Então para todo $g \in G, x, y \in X$, tem-se

$$g \cdot x = y \iff g^{-1} \cdot y = x.$$

Demonstração. Sejam $g \in G, x, y \in X$ e suponha que $g \cdot x = y$. Dessa forma, $g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x)$. Então, $g^{-1} \cdot y = (g^{-1} \cdot g) \cdot x$. Assim, $g^{-1} \cdot y = e \cdot x$, e por fim, tem-se que $g^{-1} \cdot y = x$. \square

Voltando ao exemplo de colorações de tabuleiros 2×2 , avalia-se como uma permutação age sobre uma coloração. Considere novamente o tabuleiro 2×2 :

$\alpha 1$	$\alpha 2$
$\alpha 3$	$\alpha 4$

Figura 5.1: Tabuleiro 2×2 . Essa figura foi retirada do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].

É fácil ver que para cada simetria do quadrado aplicada no tabuleiro, existe uma permutação correspondente σ do conjunto dos quadrados $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \alpha 4\}$. Assim, ao considerar a rotação a_1 do tabuleiro por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ em sentido horário, como representada na figura 3.2, tem-se

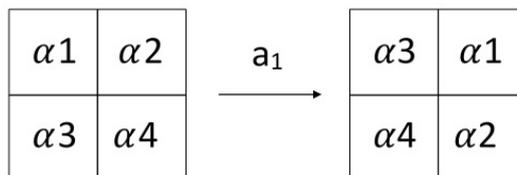


Figura 5.2: Tabuleiro 2×2 rotacionando noventa graus no sentido horário. Figura retirada do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].

que corresponde à permutação $\sigma_1 = (\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \alpha 4)$. Toma-se então o grupo G como sendo o das permutações dos símbolos $\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \alpha 4\}$ e considera-se sua ação no conjunto de colorações $X = F(\{\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \alpha 4\}, \{preto, branco\})$. Por exemplo, a permutação σ_1 agindo na coloração f_{10} resulta na coloração f_{11}

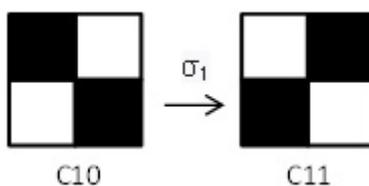


Figura 5.3: Tabuleiro 2×2 rotacionando noventa graus no sentido horário. Figura retirada do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].

e, portanto, $\sigma_1 \cdot f_{10} = f_{11}$.

Dessa forma, nota-se que $\sigma_1 \cdot f_{10}$ designa a cor branca para o quadro α_1 , porque esta é a cor que f_{10} designa para o quadrado α_3 que acabou de ser movido para o quadrado (α_1) por σ_1 . Como $\sigma_1^{-1}(\alpha_1) = \alpha_3$, pode-se concluir que este processo é equacionado por

$$\sigma_1 \cdot f_{10}(\alpha_1) = f_{10}(\sigma_1^{-1}(\alpha_1)).$$

De modo geral, pode-se aplicar essa fórmula. A seguir este conceito será desenvolvido com mais rigor.

Na notação da seção anterior, tem-se o conjunto de colorações $X = F(D, C)$. Tomando G como algum grupo de permutações de símbolos de D , isto é, G é algum subgrupo de $S(D)$, o grupo de todas as permutações do conjunto D . Define-se uma ação de G no conjunto das colorações X , por

$$\text{tem-se } \sigma \in G, \forall f \in X \rightarrow \sigma \cdot f = f \circ \sigma^{-1}$$

e verifica-se que realmente isto define uma ação de grupo.

Teorema 5.1: A fórmula acima define uma ação de grupo.

Demonstração. Seja e a identidade de G . Então e é a aplicação identidade $e : D \rightarrow D$ e para toda $f \in X$,

$$e \cdot f = f \circ e^{-1} = f \circ e = f.$$

E assim (A1) se verifica.

Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ e $f \in X$. Então, pela nossa definição, $\sigma_2 \cdot (\sigma_1 \cdot f) = \sigma_2 \cdot (f \circ \sigma_1^{-1})$. Logo, $\sigma_2 \cdot (\sigma_1 \cdot f) = (f \circ \sigma_1^{-1}) \circ \sigma_2^{-1}$ e conseqüentemente, $\sigma_2 \cdot (\sigma_1 \cdot f) = f \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1})$. Assim, $\sigma_2 \cdot (\sigma_1 \cdot f) = f \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1)^{-1}$. Por fim, tem-se que $\sigma_2 \cdot (\sigma_1 \cdot f) = (\sigma_2 \circ \sigma_1) \cdot f$ e portanto (A2) também é válido concluindo a demonstração. \square

Órbitas, Estabilizadores e O Teorema de Burnside

6.1 Relações de equivalência por ações de grupos

Pode-se estabelecer o que entende-se por diferentes padrões de coloração a partir do conceito de ação de grupos. No caso do tabuleiro, são essencialmente as mesmas colorações se a ação de uma das simetrias leva uma coloração na outra.

Definição 6.1: Seja G um grupo agindo em um conjunto não vazio X . Define-se uma relação \sim_G em X da seguinte forma:

Para todos $x, y \in X$, $x \sim_G y \iff$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$.

Lema 6.1: A relação do conjunto \sim_G no conjunto X é uma relação de equivalência.

Demonstração. Será mostrado que \sim_G é reflexiva, simétrica e transitiva.

Seja $x, y, z \in X$ e seja e sua identidade. Por (A1) segue que $e \cdot x = x$ e, portanto, tem-se que $x \sim_G x$ e \sim_G é reflexiva.

Se $x \sim_G y$, então existe $g \in G$ com $g \cdot x = y$. Como G é um grupo, existe o inverso g^{-1} e pelo Lema 5.1 tem-se que $g^{-1} \cdot y = x$ e, portanto, $y \sim_G x$. Assim \sim_G é simétrica.

Suponha agora que $x \sim_G y$ e $y \sim_G z$. Então existem $g, h \in G$ tais que $g \cdot x = y$ e $h \cdot y = z$. Como G é um grupo, tem-se que $hg \in G$ e usando (A2) obtém-se

$$(hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot y = z,$$

o que implica $x \sim_G z$. Isto mostra que \sim_G é transitiva, que encerra a demonstração do lema. \square

No exemplo envolvendo as colorações do tabuleiro de xadrez, tem-se que as classes de equivalência são aqueles conjuntos que possuem colorações com o mesmo padrão. As classes de equivalência da relação \sim_G são chamadas de órbitas da ação do grupo. A órbita à qual o elemento x pertence é denotada por O_x . Assim,

$$O_x = O_y \iff x \sim_G y.$$

E como $x \sim_G y \iff y = g \cdot x$ para algum $g \in G$, segue que

$$O_x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

No Exemplo 5.0.3, as classes de equivalência são chamadas de classes de conjugação do grupo em questão.

6.2 Inventários de colorações

A seguir, um método algébrico será desenvolvido para descrever colorações utilizando funções geradoras.

Função geradora é uma série formal cujos coeficientes codificam informações sobre uma sucessão a_n cujo índice percorre os números naturais.

O objetivo é obter uma função geradora que determine o número de padrões de cada tipo para a situação em questão. No caso do tabuleiro de xadrez 2×2 já foi visto que há um total de 16 maneiras de colori-lo tendo duas cores disponíveis, sem considerar as relações de equivalência de padrões, isto é, as órbitas não estão sendo contadas. Observe que na expansão

$$(p + b)^4 = (p + b)(p + b)(p + b)(p + b),$$

$$(p + b)^4 = pppp + pppb + ppbp + pbpp + bppp + ppbb + \dots + bbpb + bbbp + bbbb,$$

$$(p + b)^4 = p^4 + 4p^3b + 6p^2b^2 + 4pb^3 + b^4,$$

obtém-se cada coeficiente escolhendo de cada parênteses o símbolo p ou b , e isso corresponde às 16 colorações diferentes do tabuleiro xadrez 2×2 nas cores preta e branca. Além disso, cada termo do polinômio final indica o número de colorações de acordo com quantas cores brancas e pretas estão sendo utilizadas. Assim, o termo p^3b tem como coeficiente 4, que é o número de colorações (C12, C13, C14 e C15) contendo três cores pretas e uma branca. O termo p^4 tem coeficiente 1, indicando que há apenas uma coloração (C16) contendo quatro cores pretas. Embora esboce bem os casos das colorações, a expressão algébrica não diz nada acerca de quantos padrões diferentes existem por equivalência, isto é, não exibe informações sobre as órbitas das colorações.

As cores preta e branca, ambas elementos do conjunto $C = \{\text{preto}, \text{branca}\}$, são representadas, respectivamente, pelos símbolos algébricos p e b .

Definição 6.2: Uma função peso no conjunto C é uma função w que associa a cada $c \in C$, um símbolo algébrico ou um número denotado por $w(c)$, denominado peso de c .

Definição 6.3: O *enumerador de estoque* é definido por $\sum_{c \in C} w(c)$. Ele representa de maneira algébrica todos os valores que os elementos do conjunto D podem receber através das colorações de D em C .

Por exemplo, sejam $C = \{\text{vermelho claro}, \text{vermelho escuro}, \text{azul}\}$, $w(\text{vermelho claro}) = r$, $w(\text{vermelho escuro}) = R$ e $w(\text{azul}) = a$. Então, o enumerador de estoque (de tintas, ou cores, no caso) é $r + R + a$, isto é, interpretando a soma como função geradora, significa que tem-se exatamente uma cor vermelho clara, uma cor vermelho escura e uma cor azul. Assim, o enumerador de estoque é, na verdade, uma generalização do conceito de função geradora. Se $r = R$, tem-se como enumerador de estoque $2R + a$, o que significa que há duas cores vermelhas e uma cor azul para designar aos elementos de D . Mesmo que tenha sido designado o mesmo peso para as duas, os dois tipos de tinta vermelha ainda são distintos. Se os dois tipos de tinta vermelha fossem indistinguíveis, o enumerador de estoque seria dado por $R + a$, em vez de de $2R + a$.

Definição 6.4: Para cada coloração $f \in X$, define-se seu peso $W(f)$ pela equação

$$W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d)).$$

Definição 6.5: Dado um subconjunto S de X , o inventário de S é definido por

$$\sum_{f \in S} W(f).$$

Exemplo 6.2.1: De quantas maneiras pode-se pintar três bolas distintas estando disponíveis as cores vermelho claro, vermelho escuro e azul? Seja D o conjunto das três bolas, e seja C o conjunto dos três tipos de tinta mencionados. Designando os pesos para as cores como anteriormente, obtém-se o enumerador de estoque $r + R + a$, que fornece o número de maneiras que uma bola pode ser pintada nas cores presentes no conjunto C . Como as bolas são distintas, há $(r + R + a)^3$ maneiras diferentes de se pintar as três bolas com as cores escolhidas. Ou seja, $(r + R + a)^3$ é o inventário do conjunto de todas as colorações de D em C .

Para que fiquem claras as definições acima, vamos retornar ao exemplo do tabuleiro 2×2 . Lembrando que $D = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ é o conjunto dos quatro quadrados do tabuleiro, $C = \{\text{preto}, \text{branco}\}$ o conjunto das cores e $X = F(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \{\text{preto}, \text{branco}\})$ é o conjunto das colorações de D em C .

A função peso do exemplo em questão é dada por

$$\begin{aligned} \omega(\text{preto}) &= p, \\ \omega(\text{branco}) &= b. \end{aligned}$$

A coloração f_{10} é tal que

$$\begin{aligned} f_{10}(\alpha_1) &= \text{preto}, \\ f_{10}(\alpha_2) &= \text{branco}, \\ f_{10}(\alpha_3) &= \text{branco}, \\ f_{10}(\alpha_4) &= \text{preto}. \end{aligned}$$

Portanto, $W(f_{10}) = \prod_{d \in D} \omega(f_{10}(d)) = \omega(f_{10}(\alpha_1))\omega(f_{10}(\alpha_2))\omega(f_{10}(\alpha_3))\omega(f_{10}(\alpha_4))$. Logo, $W(f_{10}) = \omega(\text{preto})\omega(\text{branco})\omega(\text{preto})\omega(\text{branco})$.

Assim, $W(f_{10}) = pbbp$, ou ainda $W(f_{10}) = p^2b^2$.

O inventário de todas as 16 colorações, como visto anteriormente, é dado por

$$\sum_{f \in X} W(f) = p^4 + 4p^3b + 6p^2b^2 + 4pb^3 + b^4 = (p + b)^4.$$

O interesse maior no estudo é o de determinar o inventário das colorações que contém exatamente uma coloração de cada padrão (órbita). No caso do tabuleiro, ele seria dado por

$$p^4 + p^3b + 2p^2b^2 + pb^3 + b^4.$$

Foi determinado no capítulo 6, por meio do axioma (A1), que a identidade e de um grupo agindo em X fixa todos os elementos de X . Porém, pode-se ter, além da identidade, outros elementos de G fixando elementos de X .

Definição 6.6: Dado $x \in X$, chama-se de *estabilizador* de x o conjunto dos elementos de $G = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ que na ação de grupo fixam x .

Em símbolos, o estabilizador S_x de x é definido por

$$S_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

A seguir é mostrado que para qualquer $x \in X$, o estabilizador S_x é um subgrupo de G .

Lema 6.2: Seja G um grupo agindo em X . Então, para todo $x \in X$, tem-se que S_x é um subgrupo de G .

Demonstração. Verificaremos as condições de subgrupo para S_x . Primeiro suponha que $g, h \in S_x$. Então $g \cdot x = x$ e $h \cdot x = x$, e pelo axioma (A2) tem-se que

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x.$$

E assim $gh \in S_x$, o que mostra que S_x é fechado.

Por (A1), $e \cdot x = x$ e assim S_x contém a identidade de G .

Novamente, se $g \in S_x$, tem-se que $g \cdot x = x$ e pelo Lema 5.1 tem-se que $g^{-1} \cdot x = x$, o que mostra que g^{-1} também está em S_x . Assim S_x é um subgrupo de G . \square

A seguir tem-se um quadro, retirado do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo], com os estabilizadores e as órbitas das colorações de um tabuleiro de xadrez 2×2 . O conjunto dos possíveis estabilizadores estão representados como permutações na figura 3.2. Já os Elementos de X , foram apresentados na figura 4.1

Elemento de X	Estabilizador	Órbita
C1	$\{e, a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, q_1, q_2\}$	$\{C1\}$
C2	$\{e, q_1\}$	$\{C2, C3, C4, C5\}$
C3	$\{e, q_2\}$	
C4	$\{e, q_1\}$	
C5	$\{e, q_2\}$	
C6	$\{e, p_2\}$	
C7	$\{e, p_1\}$	$\{C6, C7, C8, C9\}$
C8	$\{e, p_2\}$	
C9	$\{e, p_1\}$	
C10	$\{e, a_2, q_1, q_2\}$	
C11	$\{e, a_2, q_1, q_2\}$	$\{C10, C11\}$
C12	$\{e, p_2\}$	
C13	$\{e, p_1\}$	$\{C12, C13, C14, C15\}$
C14	$\{e, p_2\}$	
C15	$\{e, p_1\}$	
C16	$\{e, a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, q_1, q_2\}$	

É possível observar que quanto maior o estabilizador, menor a órbita. Também é possível perceber que quanto maior a órbita, menor é o estabilizador. Sendo $|O_x| = \#\{gx : g \in G\}$, pode-se perceber que em todas as linhas (elementos de x de X) tem-se a equação $|O_x| \times |S_x| = 8$, em que o resultado, oito, é a ordem do grupo de simetrias do quadrado. Esse resultado não é coincidência.

Teorema 6.1: (O Teorema Órbita-Estabilizador)

Seja G um grupo finito que age em um conjunto não vazio X. Então, para cada $x \in X$,

$$|O_x| \times |S_x| = |G|.$$

Demonstração. Pelo Lema 10.1 , tem-se que S_x é um subgrupo de G, e pelo Teorema Lagrange segue que

$$|G : S_x| \times |S_x| = |G|.$$

Assim é preciso mostrar que

$$|O_x| = |G : S_x|. \tag{7.1}$$

Os elementos de O_x possuem a forma $g \cdot x$, para $g \in G$. As classes laterais de S_x possuem a forma gS_x . Pode-se provar a equação (7.1) mostrando que a correspondência $g \cdot x \longleftrightarrow gS_x$ é uma correspondência um-a-um entre os elementos de O_x e as classes laterais de S_x em G. Em outra palavras, basta mostrar que, que para todo $g, h \in G$,

$$gS_x = hS_x \iff g \cdot x = h \cdot x.$$

Sejam $g, h \in G$. Então, de acordo com o Lema 2.4, sabe-se que

$$gS_x = hS_x \iff h^{-1}g \in S_x.$$

Pela definição de S_x , conclui-se que

$$h^{-1}g \in S_x \iff (h^{-1}g) \cdot x = x.$$

Por (A2), tem-se que

$$(h^{-1}g) \cdot x = x \iff h^{-1} \cdot (g \cdot x) = x.$$

Assim, pelo Lema 6.1, conclui-se que

$$h^{-1} \cdot (g \cdot x) = x \iff g \cdot x = h \cdot x.$$

Portanto,

$$gS_x = hS_x \iff g \cdot x = h \cdot x.$$

□

Corolário 6.1: Seja G um grupo finito que age no conjunto não vazio X . Então o número de elementos de X em cada órbita é um divisor da ordem de G .

Demonstração. Imediata a partir da equação multiplicativa do Teorema Órbita-Estabilizador, $|O_x| \times |S_x| = |G|$. □

O Teorema Órbita-Estabilizador fornece uma relação entre o número de elementos em cada órbita e o número de elementos em cada estabilizador. A seguir é provado um teorema que modifica esta relação para encontrar uma fórmula para o número de diferentes órbitas da ação.

Teorema 6.2: Seja G um grupo finito agindo em um conjunto finito X . Então o número m de órbitas distintas é dado por

$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |S_x|.$$

Demonstração. Suponha que existam m órbitas distintas $O_{x_1}, O_{x_2}, \dots, O_{x_m}$. Se $1 \leq j \leq m$, tem-se para a j -ésima órbita que

$$\sum_{x \in O_{x_j}} |S_x| = \sum_{x \in O_{x_j}} \frac{|G|}{|O_x|}, \text{ pelo Teorema Órbita-Estabilizador.}$$

Como $O_x = O_{x_j}$ para todo $x \in O_{x_j}$, conclui-se que

$$\sum_{x \in O_{x_j}} |S_x| = |G| \sum_{x \in O_{x_j}} \frac{1}{|O_{x_j}|}.$$

Porém, todas as parcelas do somatório $\sum_{x \in O_{x_j}} \frac{1}{|O_{x_j}|}$ são iguais a $\frac{1}{|O_{x_j}|}$.

Assim, tem-se que $\sum_{x \in O_{x_j}} |S_x| = \frac{|G|}{|O_{x_j}|} \sum_{x \in O_{x_j}} 1$.

E como $\sum_{x \in O_{x_j}} 1 = |O_{x_j}|$, tem-se, que $\sum_{x \in O_{x_j}} |S_x| = |G|$.

Agora, somando para todas as órbitas obtém-se,

$$\sum_{x \in X} |S_x| = \sum_{j=1}^m \sum_{x \in O_{x_j}} |S_x| = \sum_{j=1}^m |G| = m|G|.$$

Por fim, conclui-se então que

$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |S_x|.$$

□

Na seção a seguir será demonstrado um resultado que permite obter o número de órbitas somando nos elementos de G , em vez de X .

O teorema a seguir, usualmente chamado de lema, foi primeiramente provado por Georg Frobenius em 1887. Porém, ele foi associado ao nome de William Burnside, que publicou um livro muito influente em teoria dos grupos. Pode-se encontrar mais informações sobre Burnside no livro *O Teorema de Burnside e Aplicação* [**Bovo**]. Na primeira edição desse livro, que foi o primeiro texto em inglês sobre teoria dos grupos, Burnside atribui o teorema a Frobenius. Já na segunda versão, que foi mais difundido na sociedade matemática, a atribuição do teorema a Frobenius não foi mencionada, o que pode ter sido o principal motivo para que o teorema tenha o nome de Burnside.

Para obter a versão desejada para o número de órbitas, considere a tabela a seguir,

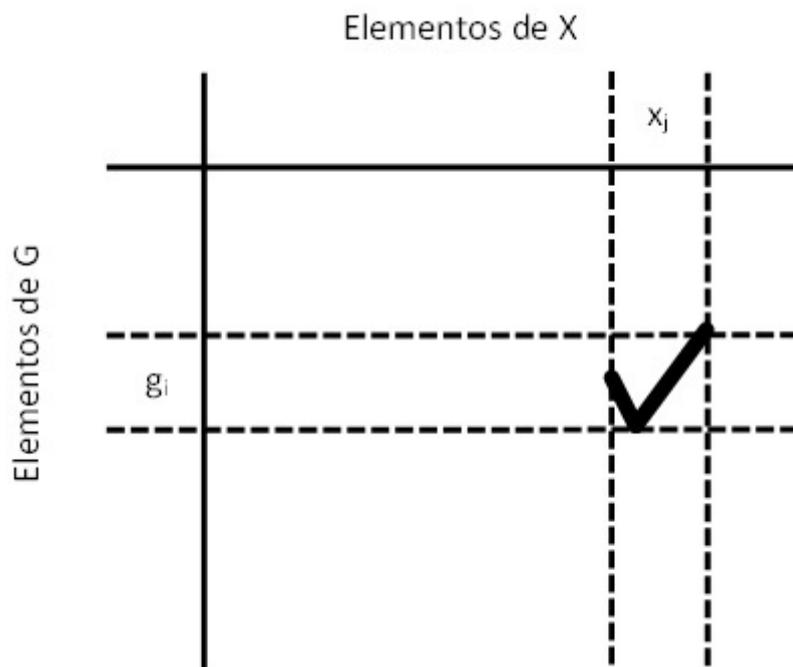


Figura 6.1: Tabela Elementos de X x Elementos de G. Essa figura foi retirada do livro O Teorema de Burnside e Aplicações de [Bovo].

em que as linhas correspondem a elementos de G e as colunas, a elementos de X. Marca-se uma entrada na tabela na interseção de uma j -ésima coluna com a i -ésima linha, isto é, da coluna de um elemento de X, com a linha de um elemento de G se, e somente se,

$$g_i \cdot x_j = x_j.$$

Isto é, se, e somente se, $g_i \in S_{x_j}$.

Desta maneira, o número de marcas em uma coluna j é $|S_{x_j}|$ e, portanto, o número total de marcas na tabela é $\sum_{x \in X} |S_x|$.

Agora, em vez das marcas serem adicionadas por colunas, elas serão adicionadas por linhas. O número de marcas na i -ésima linha é dado pelo número de elementos do conjunto

$$\{x \in X : g_i \cdot x = x\}.$$

Isto é, o número de elementos de X que são fixados pelo elemento g_i de G.

Definição 6.7: Seja G um grupo agindo em X . Define-se o *Fix* de $g \in G$ como

$$Fix(g) = \{x \in X : g \cdot x = x\}.$$

Desta forma se for somado o total de marcas de cada linha, obtém-se todas as marcas da tabela, isto é,

$$\sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{x \in X} |S_x|.$$

Logo, relacionado ao teorema 6.2, foi demonstrado o Teorema de Burnside:

Teorema 6.3: (Teorema de Burnside)

Se G é um subgrupo finito agindo em um conjunto não vazio finito X , então o número de órbitas distintas é dado por

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|.$$

Exemplos de aplicações

A seguir são apresentados alguns problemas que elucidam a aplicabilidade do teorema de Burnside. Esses problemas foram baseados nos exemplos do capítulo 11 Aplicações do livro O Teorema de Burnside e Aplicação [Bovo].

Exemplo 7.0.1: De quantas maneiras pode-se dispor n pessoas em volta de um mesa circular? Ou seja, quantas são as permutações circulares distintas de n elementos diferentes?

Associando o problema à teoria estudada, tem-se que o conjunto X de colorações é formado pelas $n!$ permutações (neste caso o domínio D e o contradomínio C são iguais a $[n]$) dos n objetos distintos. Para definir o grupo G de simetrias, basta notar que uma disposição em círculo é considerada a mesma que outra se puder ser obtida da outra por alguma rotação. Assim, o grupo G é o composto pela identidade e por $(n - 1)$ rotações. A identidade e fixa todos os $n!$ elementos de X , mas qualquer outro elemento $g \in G$ é tal que $Fix(g) = 0$. Isto porque os n elementos são todos distintos e qualquer rotação não trivial leva uma configuração de X em alguma outra diferente. Logo, pelo teorema de Burnside, tem-se que o número de permutações circulares de n elementos é dado por

$$\frac{1}{n} \left(n! + \underbrace{0 + \dots + 0}_{n-1 \text{ zeros}} \right) = (n - 1)!$$

O exemplo a seguir foi retirado da monografia “Ações de Grupos e Contagem: Teorema de Burnside” de Cinthia Marques Vieira Andretti [1].

Exemplo 7.0.2: Considere um disco dividido em n setores circulares, todos congruentes, como uma pizza. Suponha ainda que existam disponíveis q cores distintas para pintarmos os diversos setores circulares. De quantas maneiras não equivalentes podemos efetuar essa pintura?

Seja r o número que estamos procurando.

Perceba que nesse problema, dada uma configuração de cores pintadas no disco, se o rotacionarmos por um ângulo múltiplo de $\frac{2\pi}{n}$ obteremos a mesma configuração de cores. Portanto, existe uma ação do grupo cíclico $G = \langle a \rangle$ de ordem n sobre o disco, de forma que $\alpha_a(x) = R_{\frac{2\pi}{n}}(x)$ para todo x no disco. Então, cada órbita pela ação do grupo G pode ser considerada como a mesma configuração de cores. O problema é encontrar o número de órbitas existentes. É neste ponto que entra o Teorema de Burnside, e ao invés de contarmos diretamente as órbitas, vamos contar os pontos fixos de cada elemento g do grupo. Para cada divisor d de n , existe um subgrupo H de ordem d gerado pelo elemento $a^{\frac{n}{d}}$, que corresponde neste caso a uma rotação de ângulo $d \cdot \frac{2\pi}{n}$.

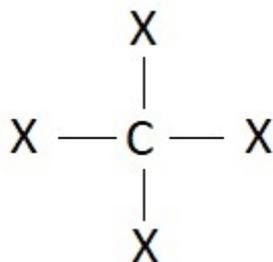
Então, neste subgrupo existem exatamente d elementos, a saber $a^{\frac{n}{d}}, a^{\frac{2n}{d}}, \dots, a^{\frac{dn}{d}} = e$. Destes, apenas $\varphi(d)$ elementos possuem ordem exatamente igual a d , isto é, $x^d = e$ e $x^k \neq e$ se $0 < k < d$, e estes são todos os elementos de ordem d no grupo. Para cada elemento de ordem d no grupo, existem $q^{\frac{n}{d}}$ configurações inequivalentes de cores. Assim, pelo Teorema de Burnside, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{X}{G} \right| \cdot |G| &= \sum_{g \in G} |Fix_g| \implies r \cdot |G| = \sum_{d|n} \varphi(d) q^{\frac{n}{d}} \\ \implies r &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) q^{\frac{n}{d}}. \end{aligned}$$

No caso especial de $q = 1$, isto é, uma única cor, r também é igual a 1. Assim temos a fórmula

$$\begin{aligned} r = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) q^{\frac{n}{d}} \implies 1 &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) \cdot 1. \\ \implies n &= \sum_{d|n} \varphi(d). \end{aligned}$$

Exemplo 7.0.3: Quantas moléculas orgânicas diferentes da forma estrutural



existem, em que C é um átomo de carbono e cada X denota um dos quatro componentes: CH_3 (metil); C_2H_5 (etil); H (hidrogênio) ou Cl (cloro)? Da Química sabe-se que cada molécula desse tipo pode ser modelada por um tetraedro regular com o carbono ocupando seu centro e os componentes X ocupando os vértices.

Para resolver o problema é importante analisar as imagens da figura a seguir, que representam os tetraedros com seus eixos de rotação.

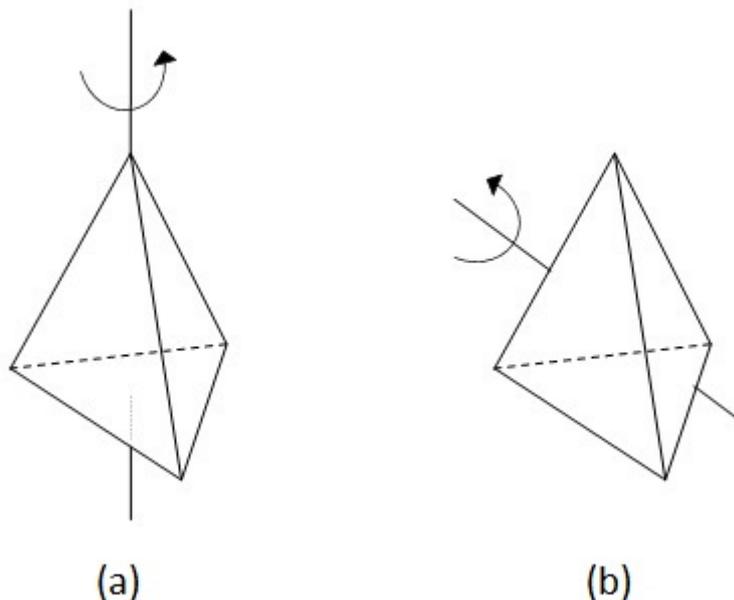


Figura 7.1: Eixos de simetria de um tetraedro regular. Imagens retiradas do livro O Teorema de Burnside e Aplicação [Bovo].

Como representado na figura anterior, há somente dois tipos de eixos de simetria diferentes: o que contém um vértice e o centro da face oposta, representado pela imagem (a); e o que contém o ponto médio de duas arestas opostas, representado pela imagem (b).

Existe um total de $4^4 = 256$ colorações diferentes no conjunto X , pois há quatro possibilidades de cor para cada uma das quatro faces. G é definido como o grupo das 12 simetrias rotacionais do tetraedro regular.

Calculando o *Fix* de cada uma delas, tem-se:

1. A identidade fixa todas as 256 colorações de X .
2. Há oito simetrias de rotação pelo tipo de eixo indicado em (a), que passa por um vértice e pelo centro da face oposta. São quatro simetrias de rotação de um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ radianos e quatro simetrias de rotação de um ângulo de $-\frac{2\pi}{3}$ radianos. Cada rotação é composta de um ciclo de comprimento 1 e um ciclo de comprimento 3.

Desta forma, há uma contribuição de $8 \cdot 4 \cdot 4 = 128$ colorações fixadas.

3. Há três simetrias de rotação de um ângulo de π radianos pelo tipo de eixo de simetria indicado em (b), que passa pelos pontos médios de arestas opostas. Cada rotação desta é composta de dois ciclos de comprimento 2. Portanto, há uma contribuição de $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ colorações fixadas.

Assim, aplicando o Teorema de Burnside, conclui-se que o número de moléculas distintas nas condições do problema é igual a

$$\frac{1}{12}(256 + 128 + 48) = 36.$$

Aplicação do Teorema de Burnside em sala de aula

Para explorar um pouco mais o Teorema de Burnside, algumas atividades podem ser apresentadas aos estudantes do ensino básico. Como os alunos estudam Análise Combinatória de forma mais consistente na segunda série do ensino médio, há como mostrar que o Teorema de Burnside resolve alguns problemas de enunciado simples e direto. Em decorrência dos exemplos e exercícios convencionais apresentados aos estudantes, cujas resoluções passam invariavelmente pelo Princípio Fundamental da Contagem, Permutações, Arranjo ou Combinação, os alunos se interessam por alguns casos mais particulares que não são resolvidos pelas técnicas de contagem citadas acima. Logo, apresentar ideias diferentes a do currículo convencional, mesmo que seja de uma forma introdutória, amplia a visão que o aluno tem do conteúdo e pode aproximar mais os estudantes da matemática. Exemplos como os do capítulo 9 mostram a importância do assunto e podem ser usados como introdução a atividades relacionadas ao Teorema de Burnside.

A seguir tem-se uma atividade com dois problemas de enunciados simples envolvendo o Teorema de Burnside e que pode ser apresentada no final do ensino médio (segunda série ou terceira série). A atividade consiste em encontrar o número de maneiras de se pintar as faces de um cubo tendo disponíveis apenas três cores distintas: azul, verde e marrom (ou quaisquer outras três cores). Para a realização da tarefa, os alunos podem ser separados por grupos de três, quatro ou cinco pessoas, dependendo da quantidade de alunos disponível. Cada equipe recebe uma quantidade de cubos maior que o número necessário (60 são suficientes) e seu desafio no primeiro exemplo é descobrir de quantas maneiras distintas é possível pintá-los utilizando-se uma duas ou três das cores que forem fornecidas. Não apenas a contagem precisa ser feita, mas também a ação de pintar todos os cubos. Isso torna a atividade mais visual e faz com que os participantes se organizem para que a teoria e a prática se completem.

Para realizar a atividade são necessários os seguintes materiais:

1. Um lápis por aluno.
2. Uma borracha por aluno.
3. Três folhas de papel A4 por grupo para registrarem os casos.
4. 60 cubos (todos brancos) por grupo.
5. Um vaso de 300 mL de tinta azul lavável (suficiente para aproximadamente 6 grupos).
6. Um vaso de 300 mL de tinta verde lavável (suficiente para aproximadamente 6 grupos).
7. Um vaso de 300 mL de tinta marrom lavável (suficiente para aproximadamente 6 grupos).
8. Um rolo para pintar por aluno.
9. Uma bacia ou algo do tipo para colocar os cubos pintados.
10. Grande quantidade jornal para forrar o ambiente em que a atividade será realizada.

Os alunos terão 60 minutos para terminarem o primeiro exemplo e indicar o número de cubos diferentes que conseguiram pintar. Após esse tempo começará o segundo exemplo.

A seguir está o enunciado do primeiro exemplo exposto aos alunos.

Exemplo 8.0.1: De quantas maneiras diferentes pode-se pintar as faces de um cubo (cada face com uma única cor, cobrindo toda a área) tendo disponíveis apenas as cores azul, verde e marrom? Pinte todas as situações possíveis.

Fazer com que os adolescentes se organizem é muito importante, pois eles não costumam fazer esse tipo de atividade com frequência, principalmente de maneira rápida, tendo que pensar na melhor estrutura em pouco tempo. Isso chama a atenção dos estudantes e torna a atividade mais atrativa. Para descobrir a quantidade total, cada grupo pode usar a tática que achar mais conveniente. Dentre as estratégias possíveis, tem-se algumas mais esperadas:

1. Dividir os integrantes, deixando um ou dois alunos escrevendo e calculando, tentando encontrar um padrão ou número total de casos, enquanto os outros alunos pintam os cubos. Quando for observado um padrão e se descobrir todos os casos, quem estava apenas pensando nas possibilidades ajuda a pintar as situações ainda não representadas.

2. Dividir os grupos de padrões possíveis entre os integrantes e cada aluno conta e pinta o total situações de cada grupo de padrão. Por exemplo, um integrante pinta todos os casos em que há uma face de uma cor, duas faces de outra cor e três faces da terceira cor. Quando um integrante finalizar, ele começa a fazer outro grupo ou ajuda alguém que ainda não terminou.
3. Todos os integrantes pensam na quantidade de situações por grupo. Depois de decidirem quantos e quais são os casos todos pintam. Após terminarem um grupo de situações, eles vão para outro grupo, até que a tarefa seja finalizada.

É bem provável que os alunos consigam resolver o problema depois de algum tempo, ainda com uma certa insegurança. Chegar a 57, que é a resposta correta, não é tão simples, mas há alguns padrões que se repetem apenas trocando as cores. Logo, um diagrama de árvore os ajudaria bastante. Ou até mesmo numerando as seis faces e associando os números a cores, tomando o devido cuidado de não contar situações aparentemente diferente mas que representam o mesmo caso.

Após concluírem o primeiro exemplo, o professor não deve revelar qual é a resposta correta, mostrando aos alunos que devem resolver a segunda parte da atividade. Ela consiste em tentar descobrir um padrão para a situação com um quantidade qualquer de cores e que no final eles mesmos vão conferir se acertaram ou não a primeira parte da atividade.

A seguir está o enunciado do segundo exemplo exposto aos alunos.

Exemplo 8.0.2: De quantas maneiras diferentes pode-se pintar as faces de um cubo (cada face com uma única cor, cobrindo toda a área) tendo disponíveis c cores distintas? Ao encontrar a expressão que relaciona o número total de maneiras com o valor de c , verifique que o resultado para $c = 3$ é o mesmo que encontrou no exemplo anterior.

Esse segundo exemplo serve para os alunos perceberem que é extremamente complicado encontrar a expressão sem uma boa base teórica, que eles não tem no momento. Isso fará, provavelmente, com que eles valorizem a parte conceitual da Matemática que está por traz da equação procurada e, depois de desistirem de encontrar a expressão, ficarão curiosos para saber como encontraram e qual é a “fórmula mágica”.

Nesse momento o professor deve endossar a importância do estudo teórico da Matemática e de maneira objetiva deve indicar como se conclui que o número de maneiras diferentes de se pintar os cubos com c cores distintas disponíveis é

$$\frac{1}{24}(c^6 + 3c^4 + 12c^3 + 8c^2)$$

e que essa relação é um caso específico do Teorema de Burnside. Para que a expressão faça mais sentido para o estudante, seria importante indicar que seus termos são

encontrados a partir da contagem de casos que se repetem por rotação. Com um cubo em mão o professor pode exemplificar alguns casos de simetria e mostrar quais são os eixos simétricos do cubo. Caso alguns alunos ainda não tenham se convencido da fórmula, o professor deve explicar aos estudantes que o desenvolvimento não é de simples entendimento, necessitando de um robusto embasamento teórico matemático e que por isso não foi mais detalhado na atividade. O professor deve ficar à disposição dos alunos para mais esclarecimentos sobre os detalhes envolvendo o desenvolvimento do Teorema de Burnside, sobre a prática realizada e outras atividades sobre o assunto.

Assim que a expressão for apresentada e explicada, os estudantes vão substituir o valor de c por 3 e concluirão se acertaram ou não o primeiro exemplo.

Após a realização dessa tarefa os alunos e o professor devem limpar o ambiente. Certamente, durante a limpeza, os alunos farão perguntas e posicionamentos sobre a atividade. Cabe ao professor, nesse momento, entender o quanto a tarefa foi produtiva para a os estudantes, orientando aqueles alunos que se interessaram para um aprofundamento no assunto.

Bibliografia

- [1] ANDRETTI, C. M. V. “Ações de Grupos e Contagem: Teorema de Burnside”. Monografia. Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.
- [2] BÔVO, E. e SANTOS, J. P. d. O. *O Teorema de Burnside e Aplicações*. 2004.
- [3] GARCIA, A. *Elementos de Álgebra*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012. URL: <https://books.google.com.br/books?id=2OrmtgAACAAJ>.
- [4] GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. URL: <https://books.google.com.br/books?id=LP1UAAAAYAAJ>.
- [5] SANTOS, J. P. d. O. *Introdução à Análise Combinatória*. Ed. por Moderna, C. quarta edição. 2007.
- [6] VIEIRA, A. C. *Teoremas de Sylow*. 10 de fev. de 2019. URL: www.pt.scribd.com/document/164963876/teosylow-2012.