



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ERIKA EDUARDA ARAÚJO SOUSA

**ALGUNS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA DE EQUAÇÕES DO  
SEGUNDO E TERCEIRO GRAUS**

Boa Vista- RR

2019

ERIKA EDUARDA ARAÚJO SOUSA

**ALGUNS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA DE EQUAÇÕES DO  
SEGUNDO E TERCEIRO GRAUS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Kelly Karina Santos

Boa Vista- RR

2019

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

S725a Sousa, Erika Eduarda Araújo.

Alguns métodos de resolução geométrica de equações do segundo e terceiro graus / Erika Eduarda Araújo Sousa. – Boa Vista, 2019.  
64 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Kelly Karina Santos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Roraima,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT.

1 - Equações quadráticas. 2 - Equações cúbicas. 3 - Resolução geométrica. I - Título. II - Santos, Kelly Karina (orientadora).

CDU - 517.95

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária/Documentalista:  
Maria de Fátima Andrade Costa - CRB-11/453-AM

ERIKA EDUARDA ARAÚJO SOUSA

## ALGUNS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO E TERCEIRO GRAUS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 31 de maio de 2019 e avaliada pela seguinte banca examinadora.



---

Profa. Dra. Kelly Karina Santos  
Orientadora - UFRR



---

Profa. Dra. Kelly Alves Marães de Almeida -  
UEA



---

Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino - UFRR

Boa Vista- RR  
2019

*A Deus, que iluminou meus passos  
e a minha família pelo  
apoio durante toda minha vida.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me presentear com o dom da vida, pela saúde e por me dar força nos momentos que mais precisei.

Aos meus pais, Jaciara Silva Araújo e Francisco Teixeira Sousa, que sempre me apoiaram nos estudos e na vida.

Aos meus irmãos, Francisco Erike Silva Sousa, Leandro Araújo Sousa, Lizandra Silva Sousa e Thiago Silva Sousa, que de forma direta ou indireta apoiaram-me para que eu pudesse concluir esta etapa em minha vida.

Ao meu noivo Deny Wilson Braz, por seu incentivo e apoio em todos os momentos dados a mim durante esta caminhada.

À professora Dra. Kelly Karina Santos, por ter me orientado e auxiliado no desenvolvimento deste trabalho, e por sua imensa dedicação à profissão por ela escolhida.

Aos professores presenciais do PROFMAT: Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda, Dr. Elzimar de Oliveira Rufino, Dr. Max Ferreira, Dr. Joselito de Oliveira, Dr. Lindeval Fernandes de Lima e Dr. Luciano Ferreira Silva, por repassarem seus conhecimentos.

Ao meu amigo Jairo Stallone Araújo Costa, por compartilhar seu conhecimento e pelo apoio nos momentos que mais precisei e a sua esposa Antonia Cleia Souza Farias, pelo apoio e compreensão nos dias de estudos em grupo.

A todos que contribuíram de forma direta e indireta para a conclusão deste trabalho.

*"Tudo posso  
naquele que me fortalece"*

*Filipenses 4:13*

## RESUMO

Neste trabalho apresentamos alguns métodos de resolução geométrica de equações do segundo grau, a saber: os métodos registrados por Euclides, os métodos de Descartes, Leslie/Carlyle, Staudt e o método das circunferências tangentes. Apresentamos ainda o método geométrico para obtenção de uma raiz positiva de uma equação cúbica devido a Omar Khayyam.

**Palavras-chave:** Equações quadráticas. Equações cúbicas. Resolução geométrica.



## **ABSTRACT**

In this work we present some geometric methods to solve quadratic equations: methods of Euclids, Descartes, Leslie/Carlyle, Staudt and method of the tangens circles. We also present the method of Omar Khayyam to find the positive solution of a cubic equation.

**Key-words:** Quadratic equations. Cubic equations. Geometric solutions.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Construção do segmento $AB$ .....	16
2	Construção do segmento $PE$ .....	16
3	Figura da proposição 28 - livro VI. ....	16
4	Resolução da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ pelo método de Euclides. ....	18
5	Construção do segmento $AB$ e do ponto $P$ . ....	18
6	Construção do segmento $BE$ .....	19
7	Figura da proposição 29 - livro VI. ....	19
8	Resolução da equação $x^2 - 6x - 16 = 0$ pelo método de Euclides. ....	20
9	Construção do quadrado $ABCD$ e o ponto $E$ . ....	21
10	Determinação do ponto $F$ .....	22
11	Figura da proposição 11 - livro II. ....	22
12	Resolução da equação $x^2 + 2x - 4 = 0$ pelo método de Euclides. ....	23
13	Construção do segmento $AB$ .....	24
14	Construção do segmento $AC$ .....	24
15	Construção da circunferência.....	25
16	Figura do Método de Descartes, 1º Caso. ....	25
17	Resolução da equação $x^2 - x - 2 = 0$ pelo método de Descartes, 1º Caso. ....	26
18	Figura do Método de Descartes, 2º Caso. ....	27
19	Resolução da equação $x^2 + 8x - 9 = 0$ pelo método de Descartes, 2º Caso. ....	28
20	Construção do segmento $AB$ .....	28
21	Construção do segmento $AC$ .....	28
22	Construção da circunferência.....	29
23	Construção do segmento $BQ$ .....	29
24	Figura do Método de Descartes, 3º Caso. ....	30
25	Resolução da equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ pelo método de Descartes, 3º Caso. ....	30
26	Construção do segmento $AB$ , com $b < 0$ e $c > 0$ .....	31
27	Construção da circunferência de diâmetro $AB$ , com $b < 0$ e $c > 0$ . ....	32
28	Figura do Método de Leslie/Carlyle, com $b < 0$ e $c > 0$ .....	32
29	Resolução da equação $x^2 - 2x - 3 = 0$ pelo método de Leslie/Carlyle. ....	33
30	Resolução da equação $x^2 + 2x + 1 = 0$ pelo método de Leslie/Carlyle. ....	34
31	Resolução da equação $x^2 - 3x + 3 = 0$ pelo método de Leslie/Carlyle. ....	34
32	Resolução da equação $2x^2 - 8x = 0$ pelo método de Leslie/Carlyle....	35
33	Construção do segmento $LT$ , com $b, c < 0$ .....	36

34	Construção da circunferência unitária de centro $(0,1)$ , com $b, c < 0$ . ....	37
35	Figura do Método de Staudt, com $b, c < 0$ . ....	37
36	Resolução da equação $x^2 - 2x - 8 = 0$ pelo método de Staudt. ....	39
37	Resolução da equação $x^2 + 2x - 3 = 0$ pelo método de Staudt. ....	39
38	Resolução da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ pelo método de Staudt. ....	40
39	Resolução da equação $x^2 + 3x + 2 = 0$ pelo método de Staudt. ....	40
40	Construção dos segmentos $MN$ , $NO$ e $OP$ . ....	42
41	Construção das circunferências tangentes. ....	42
42	Determinação do ponto $Q$ . ....	42
43	Determinação do ponto $U$ . ....	43
44	Figura do Método das Circunferências Tangentes, 1º Caso. ....	43
45	Resolução da equação $x^2 + 5x + 6 = 0$ pelo método das Circunferências Tangentes. ....	45
46	Resolução da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ pelo método das Circunferências Tangentes. ....	45
47	Resolução da equação $x^2 - x + 3 = 0$ pelo método das Circunferências Tangentes. ....	46
48	Construção dos segmentos $MN$ , $NO$ e $OP$ . ....	47
49	Construção das circunferências tangentes. ....	47
50	Determinação do ponto $Q$ . ....	47
51	Determinação do ponto $U$ . ....	48
52	Figura do Método das Circunferências Tangentes, 2º Caso. ....	48
53	Resolução da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$ pelo método das Circunferências Tangentes. ....	50
54	Resolução da equação $x^2 - x - 6 = 0$ pelo método das Circunferências Tangentes. ....	50
55	Construção do triângulo $MNP$ . ....	51
56	Construção da mediatriz da hipotenusa $MP$ . ....	51
57	Construção do segmento $NR = m$ . ....	52
58	Construção da semirreta $MP = m$ . ....	52
59	Construção do segmento $MS$ . ....	52
60	Construção do segmento $ST = n$ . ....	53
61	Construção do segmento $AC$ . ....	53
62	Construção da semicircunferência de diâmetro $\overline{AC}$ . ....	53
63	Construção do segmento $BD$ . ....	54
64	Construção da reta $EF$ . ....	54
65	Construção da semirreta $BA$ . ....	54
66	Construção do segmento $BO$ . ....	55
67	Construção do segmento $BE$ . ....	55

68	Determinação do ponto $G$ .....	55
69	Construção do segmento $BG$ .....	56
70	Determinação do ponto $N$ . ....	56
71	Determinação do ponto $J$ . ....	56
72	Determinação do ponto $L$ . ....	57
73	Resolução Geométrica de $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ .....	57
74	Construção do segmento $m = 2\sqrt{2}$ .....	59
75	Construção do segmento $n = 4$ . ....	59
76	Construção do segmento $EF$ .....	59
77	Construção do segmento $BG$ .....	60
78	Determinação dos segmentos $BL_1$ e $BL_2$ . ....	60

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>MÉTODOS GEOMÉTRICOS DE EUCLIDES.....</b>	<b>15</b>
1.1	Proposição 28 - Livro VI.....	15
1.2	Proposição 29 - Livro VI.....	18
1.3	Proposição 11 - Livro II.....	21
<b>2</b>	<b>MÉTODO DE DESCARTES.....</b>	<b>24</b>
2.1	1º Caso: Equação do tipo $x^2 - bx - c = 0$ .....	24
2.2	2º Caso: Equação do tipo $x^2 + bx - c = 0$ .....	26
2.3	3º Caso: Equação do tipo $x^2 - bx + c = 0$ .....	28
<b>3</b>	<b>MÉTODO DE LESLIE/CARLYLE.....</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>MÉTODO DE STAUDT.....</b>	<b>36</b>
<b>5</b>	<b>MÉTODO DAS CIRCUNFERÊNCIAS TANGENTES.....</b>	<b>41</b>
5.1	1º Caso: Equações do tipo $x^2 + bx + c = 0$ com $c > 0$ .....	41
5.2	2º Caso: Equações do tipo $x^2 + bx + c = 0$ com $c < 0$ .....	46
<b>6</b>	<b>MÉTODO DE OMAR KHAYYAM.....</b>	<b>51</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>61</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>62</b>
	 <b>ANEXOS</b>	 <b>63</b>
	<b>ANEXO A – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU</b>	<b>64</b>
	<b>ANEXO B – SOMA E PRODUTO.....</b>	<b>65</b>

## INTRODUÇÃO

Uma equação é dita quadrática, ou do segundo grau, quando é escrita na forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . Resolver a equação significa exibir os possíveis valores de  $x$  que tornam esta sentença verdadeira. Há muito tempo, a busca de métodos para solucionar equações do segundo grau fez parte dos estudos de mentes brilhantes da história humana.

Segundo Fragoso (2000), o primeiro registro conhecido da resolução de problemas envolvendo equação do segundo grau foi encontrado em 1700 a.C, aproximadamente, na Mesopotâmia. Essa solução era apresentada como uma "receita matemática", fornecendo apenas uma raiz positiva.

Europeus, gregos e árabes, desenvolveram métodos geométricos para obtenção da raiz de uma equação do segundo grau. Na Índia, a matemática produziu no século XII grandes personagens, dentre eles Bhaskara de Akaria e Sridhara, o primeiro usou a solução que mais se assemelha à utilizada atualmente o segundo foi o responsável pela determinação da regra que originou a fórmula atual, conhecida no Brasil como de Bhaskara, conforme descrito em Fragoso (2000).

O ensino relativo a resolução de equação do segundo grau tem se limitado, muitas vezes, à apresentação da "fórmula de Bhaskara" e, algumas vezes, às relações entre os coeficientes e as raízes.

Por mais antigo, tradicional e repisado que seja o assunto que estamos ensinando, convém sempre procurar novos ângulos para focalizá-lo, outras maneiras de abordá-lo, não somente buscando tornar mais atraentes nossas aulas, mas até mesmo para nos dar um pouco mais de entusiasmo, quebrando a monotonia de repetir todos os anos a mesma história. (LIMA, 1988, p.21).

Pensando nesse contexto e com a expectativa de auxiliar professores e alunos no ensino-aprendizagem de matemática no ensino básico a resolverem equações com outros instrumentos matemáticos, surgiu a proposta de elaborar uma coletânea de resoluções geométricas de equações do segundo grau, existentes na literatura ao longo da história da matemática. Apresentaremos também um método geométrico para a resolução de equações do terceiro grau. Para tal, faremos uma revisão bibliográfica em algumas dissertações, artigos e livros. Há vários métodos geométricos, porém priorizamos em nossa pesquisa os métodos que além de serem geométricos devem conter em sua resolução o uso de régua e compasso.

Nesse propósito, dividimos o trabalho em seis capítulos reunindo os principais métodos geométricos de resolução de tais equações.

Nos cinco primeiros capítulos apresentamos resoluções geométricas para equações do 2º grau. No capítulo 1 apresentamos o método de Euclides, no capítulo 2 o método de René Descartes, no capítulo 3 o método de Leslie, no capítulo 4 o método de Staudt e no capítulo 5 o método das circunferências tangentes.

No capítulo 6 apresentamos o método de Omar Khayyam para resolução de equações do 3º grau.

Em todos os capítulos, faremos uma descrição do método bem como sua justificativa e exemplos.

## 1 MÉTODOS GEOMÉTRICOS DE EUCLIDES

Na Grécia, segundo Fragoso (2000), acredita-se que a dificuldade com os números racionais e irracionais juntamente com a falta de praticidade do sistema de numeração grego e o gosto natural pela Geometria, levou essa civilização (500 a 200 a.C.) a desenvolver um tratamento geométrico para muitos problemas matemáticos, dentre eles a solução de equações do 2º grau.

O primeiro método de resolução geométrica de equações do segundo grau inserido neste trabalho foi apresentado por Euclides em sua obra "Os Elementos". Sua obra é composta por 13 volumes, onde reúne num sistema coerente e compreensível tudo o que se sabia sobre matemática na época. Segundo Andrade (2000), pouco se sabe da sua vida pessoal, mas acredita-se que tenha vivido no início do século III a.C.

Os referidos métodos encontram-se nas proposições 28 e 29 do livro VI e na proposição 11 do livro II. Estas proposições trazem resoluções geométricas baseadas em aplicações de áreas para equações do tipo:  $x^2 - px + q^2 = 0$ ,  $x^2 - px - q^2 = 0$  e  $x^2 + bx - b^2 = 0$ , com  $p, q$  e  $b$  positivos. Para cada proposição exibiremos uma das suas traduções por Irineu Bicudo, e a seguir sua forma escrita em linguagem mais atual e algébrica. Mostraremos também suas justificativas e exemplos.

### 1.1 Proposição 28 - Livro VI

A Proposição 28 - Livro VI, segundo tradução de Irineu Bicudo é, "À reta dada aplicar, igual à retilínea dada, um paralelogramo deficiente por uma figura paralelogrâmica semelhante à dada; mas é preciso a retilínea dada [igual à qual é preciso aplicar] não ser maior do que a descrita sobre a metade, semelhante ao déficit [a tanto sobre a metade quanto à qual é preciso o déficit ser semelhante]." (EUCLIDES, 2009, p.261).

Numa linguagem mais atual esta proposição pode ser reescrita como segue.

"Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes tenha área igual a área de um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre metade do segmento de reta dado." (EVES, 2002, p.111).

Algebricamente,  $x$  é a solução da equação  $x(p - x) = q^2$  que é equivalente a

$$x^2 - px + q^2 = 0, \tag{1.1}$$

em que  $p$  e  $q$  são as medidas dos segmentos dados, com  $q < \frac{p}{2}$ .



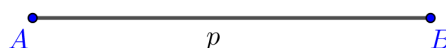
Em todos os métodos apresentaremos suas resoluções geométricas etapa por etapa, apresentando cada passo seguido de sua figura.

### Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo  $x^2 - px + q^2 = 0$ , com  $p$  e  $q \in \mathbb{R}^+$ :

1°. Trace um segmento de reta  $AB$  de medida  $p$ .

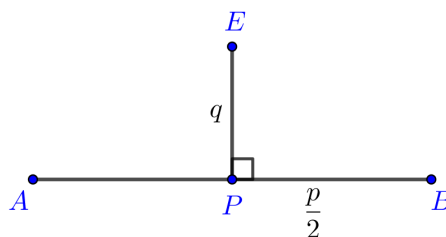
Figura 1 – Construção do segmento  $AB$ .



Fonte: Autor

2°. Por  $P$ , ponto médio de  $AB$ , levante uma reta perpendicular a  $AB$  e marque o ponto  $E$  sobre a reta de modo que  $\overline{PE} = q$ .

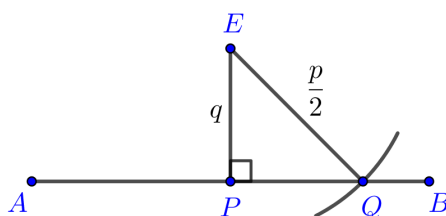
Figura 2 – Construção do segmento  $PE$ .



Fonte: Autor

3°. Com centro  $E$  e raio  $\overline{PB} = \frac{p}{2}$ , trace um arco de circunferência e marque o ponto  $Q$  na interseção com  $AB$ .

Figura 3 – Figura da proposição 28 - livro VI.



Fonte: EVES, H. (2002), adaptada.

4°. As medidas dos segmentos  $AQ$  e  $QB$  são as soluções da equação dada.

Para mostrar que  $\overline{AQ}$  e  $\overline{QB}$  são as soluções da equação (1.1), basta mostrar que  $\overline{AQ} + \overline{QB} = p$  e  $\overline{AQ} \cdot \overline{QB} = q^2$  (veja anexo B).

Denotamos  $\overline{AQ} = r$  e  $\overline{QB} = s$ . Como  $\overline{AQ} + \overline{QB} = \overline{AB}$  e  $\overline{AB} = p$ , então  $r + s = p$ .

Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo  $EPQ$ , obtemos

$$q^2 = \overline{EQ}^2 - \overline{PQ}^2. \quad (1.2)$$

Substituindo  $\overline{EQ}$  por  $\overline{PB}$  em (1.2) e sabendo que  $\overline{PA} = \overline{PB}$ , obtemos

$$q^2 = \overline{PB}^2 - \overline{PQ}^2 = (\overline{PB} + \overline{PQ}) \cdot (\overline{PB} - \overline{PQ}) = \overline{AQ} \cdot \overline{QB} = r \cdot s.$$

Portanto, como  $r + s = p$  e  $r \cdot s = q^2$ , segue-se que  $r$  e  $s$  são as soluções da equação (1.1).

Observe que as raízes da equação quadrática

$$x^2 + px + q^2 = 0 \quad (1.3)$$

são dadas por  $-\overline{AQ}$  e  $-\overline{QB}$ .

De fato, pondo  $x = -r$  em (1.3), temos  $(-r)^2 + p(-r) + q^2 = r^2 - pr + q^2 = 0$ , onde a última igualdade decorre do fato de  $r$  ser raiz de (1.1). Portanto,  $-r$  é solução de (1.3). Analogamente, verifica-se que  $-s$  é solução de (1.3).

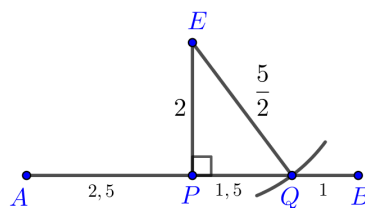
O exemplo a seguir traz uma aplicação do método.

**Exemplo 1.1.1.** Use o método de Euclides para determinar as soluções da equação  $x^2 - 5x + 4 = 0$ .

Veja que a equação  $x^2 - 5x + 4 = 0$  é equivalente a  $x^2 - 5x + 2^2 = 0$ , com  $p = 5$  e  $q = 2$ , então, podemos usar a resolução geométrica apresentada por Euclides na proposição 28 do livro VI. Primeiro, trace um segmento de reta  $AB$  de comprimento  $p = 5$  e marque o ponto  $P$  em seu ponto médio. Por  $P$  trace uma reta perpendicular a  $AB$  e marque o ponto  $E$  sobre a reta de modo que  $\overline{PE} = q = 2$ . Com centro  $E$  e raio  $\overline{PB} = \frac{p}{2} = \frac{5}{2}$ , construa um arco de circunferência e marque o ponto  $Q$  na interseção com  $\overline{AB}$ , como na Figura 4.

Medindo os segmentos  $AQ$  e  $QB$ , obtemos  $\overline{AQ} = 1$  e  $\overline{QB} = 4$ . Logo pela proposição 28, temos que 1 e 4 são as raízes da equação dada.

Figura 4 – Resolução da equação  $x^2 - 5x + 4 = 0$  pelo método de Euclides.



Fonte: Autor

### 1.2 Proposição 29 - Livro VI

A Proposição 29 - Livro VI, segundo tradução de Irineu Bicudo é, "À reta dada aplicar, igual à retilínea dada, um paralelogramo excedente por uma figura paralelogrâmica semelhante à dada."(EUCLIDES, 2009, p.262).

A mesma proposição pode ser enunciada da seguinte forma: "Prolongue um dado segmento de reta de modo que o retângulo contido pelo segmento estendido e a extensão seja igual a um quadrado dado."(EVES, 2002, p.112).

Algebricamente, escreve-se,  $x$  é a solução da equação  $x(x - p) = q^2$  que é equivalente a

$$x^2 - px - q^2 = 0 \tag{1.4}$$

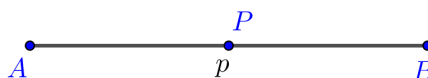
em que  $p$  e  $q$  são as medidas dos segmentos dados.

#### Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo  $x^2 - px - q^2 = 0$ , com  $p$  e  $q \in \mathbb{R}^+$ .

1°. Trace um segmento  $AB$  de medida  $p$  e marque o ponto médio  $P$  desse segmento.

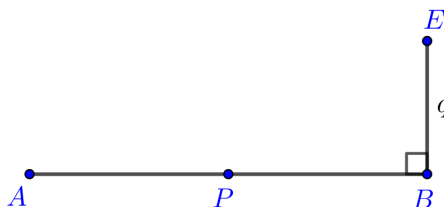
Figura 5 – Construção do segmento  $AB$  e do ponto  $P$ .



Fonte: Autor

2°. Por  $B$  levante uma reta perpendicular a  $AB$  e marque o ponto  $E$  sobre a reta de modo que  $\overline{BE} = q$ .

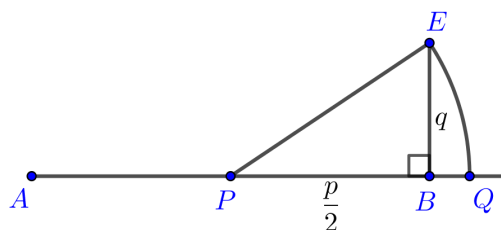
Figura 6 – Construção do segmento  $BE$ .



Fonte: Autor

3°. Com centro  $P$  e raio  $\overline{PE}$ , trace um arco de circunferência e marque o ponto  $Q$  na interseção com o prolongamento de  $AB$ .

Figura 7 – Figura da proposição 29 - livro VI.



Fonte: EVES, H. (2002), adaptada.

4°. As medidas dos segmentos  $\overline{AQ}$  e  $-\overline{BQ}$  são as raízes da equação dada.

Para mostrar que  $\overline{AQ}$  e  $-\overline{BQ}$  são as soluções de (1.4) usaremos o mesmo argumento usado na proposição anterior, ou seja, devemos mostrar que  $\overline{AQ} - \overline{BQ} = p$  e  $\overline{AQ} \cdot (-\overline{BQ}) = -q^2$ .

Denotando novamente,  $\overline{AQ} = r$  e  $\overline{BQ} = s$ , observe que  $\overline{AQ} - \overline{BQ} = \overline{AB}$  e assim  $r - s = p$ .

Para o que falta, aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo  $PBE$  e obtemos,

$$q^2 = \overline{PE}^2 - \overline{PB}^2 \tag{1.5}$$

Substituindo  $\overline{PE}$  por  $\overline{PQ}$  em (1.5) e usando que  $\overline{PA} = \overline{PB}$ , tem-se

$$q^2 = \overline{PQ}^2 - \overline{PB}^2 = (\overline{PQ} + \overline{PB}) \cdot (\overline{PQ} - \overline{PB}) = \overline{AQ} \cdot \overline{BQ} = r \cdot s$$

Por fim, veja que  $p = r - s = r + (-s)$  e  $r \cdot (-s) = -rs = -q^2$ , logo,  $r$  e  $-s$  são as soluções da equação (1.4) como queríamos mostrar.

Note que, as raízes da equação quadrática

$$x^2 + px - q^2 = 0 \quad (1.6)$$

são as mesmas de  $x^2 - px - q^2 = 0$ , apenas com sinais opostos.

De fato, fazendo  $x = -r$  em (1.6), obtemos  $(-r)^2 + p(-r) - q^2 = r^2 - pr - q^2 = 0$ , onde na última igualdade usamos que  $r$  é solução de (1.4). Portanto,  $-r$  é solução de (1.6). Analogamente, mostramos que  $s$  é solução de (1.6).

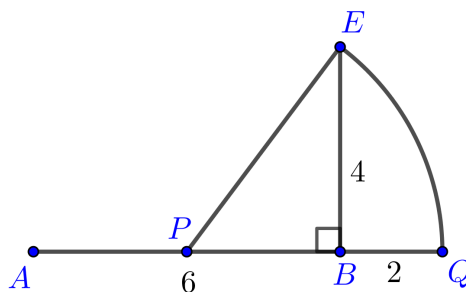
Veja a aplicação desse método no exemplo abaixo.

**Exemplo 1.2.1.** Use o método de Euclides para determinar as soluções da equação  $x^2 - 6x - 16 = 0$ .

Como a equação  $x^2 - 6x - 16 = 0$  é equivalente a  $x^2 - 6x - 4^2 = 0$ , com  $p = 6$  e  $q = 4$ , então, podemos usar a resolução geométrica apresentada na proposição 29 do livro VI de Euclides.

Trace um segmento de reta  $AB$  de comprimento  $p = 6$  e marque seu ponto médio  $P$ . Por  $B$  levante uma reta perpendicular a  $AB$  e marque o ponto  $E$  sobre a reta de modo que  $\overline{BE} = q = 4$ . Com centro  $P$  e raio  $\overline{PE}$ , construa um arco de circunferência e marque o ponto  $Q$  na interseção desse arco com o prolongamento de  $AB$ . Veja a figura a seguir.

Figura 8 – Resolução da equação  $x^2 - 6x - 16 = 0$  pelo método de Euclides.



Fonte: Autor

Medindo os segmentos  $AQ$  e  $BQ$  verificamos que  $\overline{AQ} = 8$  e  $\overline{BQ} = 2$ , como nesse caso as raízes são dadas por  $\overline{AQ}$  e  $-\overline{BQ}$ , segue-se que 8 e  $-2$  são as raízes da equação dada.

## 1.3 Proposição 11 - Livro II

A Proposição 11 do Livro II, segundo tradução de Irineu Bicudo é enunciada da seguinte forma: "Cortar a reta dada, de modo a o retângulo contido pela inteira e por um dos segmentos ser igual ao quadrado sobre o segmento restante."(EUCLIDES, 2009, p.146).

De forma equivalente, "Dividir uma linha reta em duas partes tais que o retângulo contido pelo todo e uma das partes tenha área igual à do quadrado sobre a outra parte."(PEDROSO, 2010, p.5).

Algebricamente, escreve-se,  $x$  é a solução da equação  $b(b - x) = x^2$  que é equivalente a

$$x^2 + bx - b^2 = 0, \quad (1.7)$$

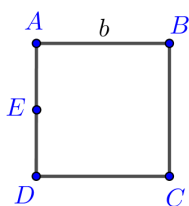
onde  $b$  é a medida do segmento dado.

**Resolução Geométrica**

Considere uma equação quadrática do tipo  $x^2 + bx - b^2 = 0$ ,  $b \in \mathbb{R}^+$ :

1°. Construa um quadrado  $ABCD$  sobre o segmento  $AB$  de medida  $b$  e marque o ponto médio  $E$  de  $AD$ .

Figura 9 – Construção do quadrado  $ABCD$  e o ponto  $E$ .



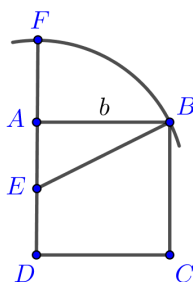
Fonte: Autor

2°. Construa um arco de circunferência com centro em  $E$  e raio  $EB$ . Na interseção desse arco com o prolongamento de  $AD$  marque o ponto  $F$ , veja a Figura 10.

3°. Construa o quadrado  $AFGX$  sobre o lado  $AF$  no mesmo semiplano de  $BC$ , como na Figura 11.

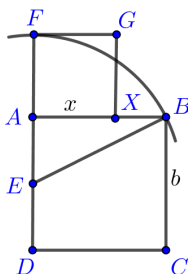
4°. A medida do segmento  $AX$  desse quadrado pertencente ao segmento  $AB$ , é solução da equação dada.

Figura 10 – Determinação do ponto  $F$ .



Fonte: Autor

Figura 11 – Figura da proposição 11 - livro II.



Fonte: Revista do professor de matemática (2010), adaptada.

Para a justificativa devemos determinar a medida do segmento  $AX$  que satisfaça a equação (1.7).

Veja que, por construção, temos que o triângulo  $EAB$  é retângulo em  $A$  com  $AB = b$  e  $AE = \frac{b}{2}$ , então, pelo teorema de Pitágoras podemos escrever

$$\overline{EB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b\sqrt{5}}{2}.$$

Por outro lado, sabendo que  $\overline{EB} = \overline{EF}$  e denotando  $\overline{AX} = x$ , temos

$$x = \overline{AX} = \overline{AF} - \overline{AE} = \overline{EF} - \overline{AE} = \overline{EB} - \overline{AE} = \frac{b\sqrt{5}}{2} - \frac{b}{2} = \frac{b(\sqrt{5} - 1)}{2},$$

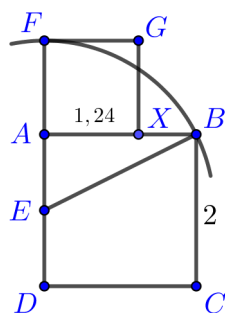
que é solução positiva de (1.7), que pode ser facilmente verificado substituindo-se esse valor em (1.7).

**Exemplo 1.3.1.** Use o método de Euclides para determinar uma solução da equação  $x^2 + 2x - 4 = 0$ .

Como  $x^2 + 2x - 4 = 0$  é equivalente a  $x^2 + 2x - 2^2$ , com  $b = 2$ , então, podemos usar a proposição 11 do livro II de Euclides.

Construa um quadrado  $ABCD$  sobre o segmento  $AB$  de medida  $b = 2$ . Marque o ponto médio  $E$  de  $AD$ . Construa também um arco de circunferência centrado em  $E$  e raio  $EB$ , na interseção desse arco com o prolongamento de  $AD$  marque o ponto  $F$ . Em seguida, construa o quadrado  $AFGX$  sobre o lado  $AF$  no mesmo semiplano de  $BC$ . A medida do segmento  $AX$  pertencente ao segmento  $AB$  é a raiz positiva da equação dada. Veja a Figura 12.

Figura 12 – Resolução da equação  $x^2 + 2x - 4 = 0$  pelo método de Euclides.



Fonte: Autor

Medindo o segmento  $AX$ , obtemos que  $\overline{AX} = 1,24$ . Logo, pela proposição 11, temos que 1,24 é a raiz positiva de  $x^2 + 2x - 4 = 0$ .



## 2 MÉTODO DE DESCARTES

O método abordado a seguir foi desenvolvido por René Descartes (1596-1650). Na Europa, “Do século XV ao XVII, muitos foram os matemáticos que desenvolveram formas distintas de representação e resolução da equação polinomial do 2º grau.” (FRAGOSO, 2000, p.23). Segundo Pedroso (2010), Descartes desenvolveu no apêndice “*A Geometria*” de sua obra “*O Discurso do Método*” um método geométrico para obtenção da raiz positiva de uma equação do segundo grau.

O método proposto por Descartes resolveu equações do tipo:  $x^2 - bx - c = 0$ ,  $x^2 + bx - c = 0$  e  $x^2 - bx + c = 0$ , com  $b$  e  $c$  positivos.

Faremos o estudo de cada caso separadamente, com descrição dos métodos, justificativas e exemplos.

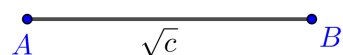
### 2.1 1º Caso: Equação do tipo $x^2 - bx - c = 0$

#### Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo  $x^2 - bx - c = 0$  com  $b$  e  $c \in \mathbb{R}^+$ :

1º. Trace um segmento de reta  $AB$  medindo  $\sqrt{c}$ .

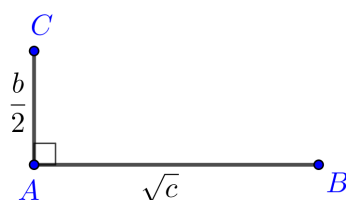
Figura 13 – Construção do segmento  $AB$ .



Fonte: Autor

2º. Por  $A$  levante uma reta perpendicular ao segmento  $AB$  e marque o ponto  $C$  sobre ela de modo que  $\overline{AC} = b/2$ .

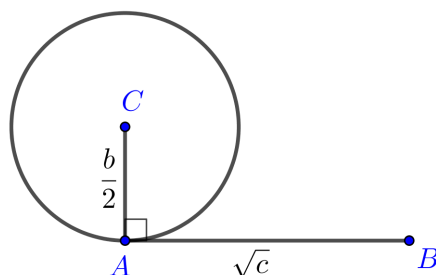
Figura 14 – Construção do segmento  $AC$ .



Fonte: Autor

3°. Construa uma circunferência de centro  $C$  e raio  $\overline{AC}$ .

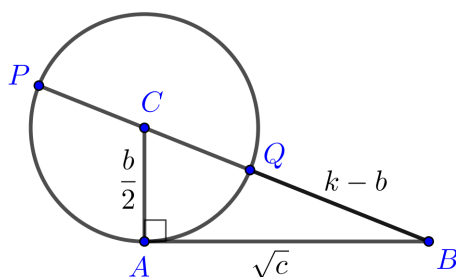
Figura 15 – Construção da circunferência.



Fonte: Autor

4°. Trace uma reta passando por  $B$  e  $C$  e marque os pontos  $P$  e  $Q$  nas interseções dessa reta com a circunferência.

Figura 16 – Figura do Método de Descartes, 1° Caso.



Fonte: PEDROSO, H. A. (2010), adaptada.

5°. A medida do segmento  $PB$  é a solução positiva da equação dada.

Com efeito, se  $\overline{PB} = k$  então,  $\overline{BC} = k - \frac{b}{2}$ . Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \\ \Rightarrow \left(k - \frac{b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (\sqrt{c})^2 \\ \Rightarrow k^2 - bk + \frac{b^2}{4} &= \frac{b^2}{4} + c \\ \Rightarrow k^2 - bk - c &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\overline{PB}$  é a raiz positiva da equação.

Segundo Fragoso (2000), a raiz negativa é representada por  $-\overline{BQ}$ , porém Descartes não a considerava.

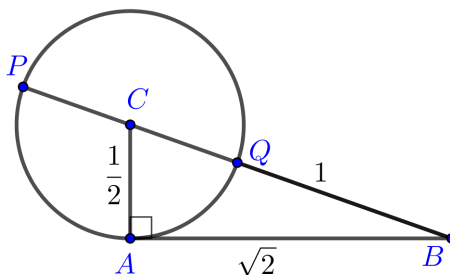
De fato, sendo  $-\overline{BQ} = b - k$  e fazendo  $x = b - k$  na equação  $x^2 - bx - c = 0$  obtemos  $(b - k)^2 - b(b - k) - c = 0$  que é equivalente a  $k^2 - bk - c = 0$ , que já sabemos ser verdadeira por ser  $k$  solução da equação dada.

**Exemplo 2.1.1.** Use o método de Descartes para resolver a equação  $x^2 - x - 2 = 0$ .

Veja que, a equação  $x^2 - x - 2 = 0$  trata-se de uma equação do tipo  $x^2 - bx - c = 0$  apresentado nesse primeiro caso, com  $b = 1$  e  $c = 2$ . Para determinarmos a solução façamos a construção a seguir.

Inicialmente, trace um segmento de reta  $AB$  medindo  $\sqrt{c} = \sqrt{2}$ . Por  $A$  levante uma reta perpendicular ao segmento  $AB$  e marque o ponto  $C$  sobre ela, de modo que  $\overline{AC} = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}$ . Em seguida construa uma circunferência de centro  $C$  e raio  $\overline{AC}$ . Por último, trace uma reta passando por  $B$  e  $C$  e marque os pontos  $P$  e  $Q$  nas interseções dessa reta com a circunferência. A medida do segmento  $PB$  é a solução positiva da equação. Veja a figura a seguir.

Figura 17 – Resolução da equação  $x^2 - x - 2 = 0$  pelo método de Descartes, 1º Caso.



Fonte: Autor

Medindo os segmentos  $PB$  e  $BQ$ , verificamos que  $\overline{PB} = 2$  e  $\overline{BQ} = 1$ , temos que as raízes de  $x^2 - x - 2 = 0$  são 2 e  $-1$ , lembrando que neste caso a raiz negativa é representada por  $-\overline{BQ}$ .

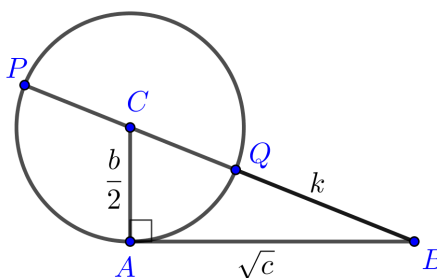
2.2 2º Caso: Equação do tipo  $x^2 + bx - c = 0$

### Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo  $x^2 + bx - c = 0$ ,  $b, c \in \mathbb{R}^+$ :

A resolução geométrica é igual ao 1º caso, no entanto agora, a medida do segmento  $BQ$  representa a solução positiva da equação dada. Veja a Figura 18.

Figura 18 – Figura do Método de Descartes, 2º Caso.



Fonte: PEDROSO, H. A. (2010), adaptada.

De fato, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{b}{2} + k\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (\sqrt{c})^2 \\ \Rightarrow k^2 + bk + \frac{b^2}{4} &= \frac{b^2}{4} + c \\ \Rightarrow k^2 + bk - c &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\overline{BQ}$  é a raiz positiva da equação dada.

Quanto à solução negativa, afirmamos ser  $-\overline{PB}$ .

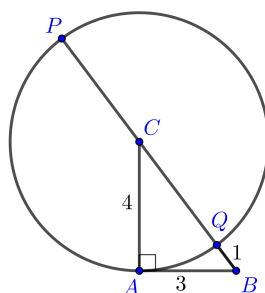
De fato, sendo  $-\overline{PB} = -b - k$  e fazendo  $x = -b - k$  na equação  $x^2 + bx - c = 0$  obtemos  $(-b - k)^2 + b(-b - k) - c = 0$  que é equivalente a  $k^2 + bk - c = 0$ , que já sabemos ser verdadeira por ser  $k$  solução da equação dada.

**Exemplo 2.2.1.** Use o método de Descartes para resolver a equação  $x^2 + 8x - 9 = 0$ .

Como  $x^2 + 8x - 9 = 0$  é do tipo de equação  $x^2 + bx - c = 0$ , com  $b = 8$  e  $c = 9$ , faremos a resolução geométrica apresentada neste segundo caso.

Para tal, trace um segmento de reta  $AB$  de comprimento  $\sqrt{c} = 3$ . Por  $A$  levante uma reta perpendicular ao segmento  $AB$  e marque o ponto  $C$  sobre ela, de modo que  $\overline{AC} = \frac{b}{2} = 4$ . Construa uma circunferência de centro  $C$  e raio  $AC$ . Por último, trace uma reta passando por  $B$  e  $C$  e marque os pontos  $P$  e  $Q$  nas interseções dessa reta com a circunferência. A medida do segmento  $BQ$  é a solução positiva da equação. Veja a Figura 19.

Figura 19 – Resolução da equação  $x^2 + 8x - 9 = 0$  pelo método de Descartes, 2º Caso.



Fonte: Autor

Medindo os segmentos  $BQ$  e  $PB$ , obtemos que  $\overline{BQ} = 1$  e  $\overline{PB} = 9$ , lembrando que neste caso a raiz negativa é representada por  $-\overline{PB}$ . Logo, as raízes de  $x^2 - x - 2 = 0$  são 1 e  $-9$ .

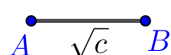
### 2.3 3º Caso: Equação do tipo $x^2 - bx + c = 0$

#### Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo  $x^2 - bx + c = 0$ ,  $b, c \in \mathbb{R}^+$ :

1º. Trace um segmento de reta  $AB$  medindo  $\sqrt{c}$ .

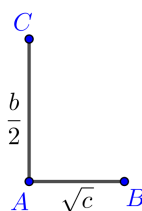
Figura 20 – Construção do segmento  $AB$ .



Fonte: Autor

2º. Por  $A$  levante uma reta perpendicular ao segmento  $AB$  e marque o ponto  $C$  sobre ela de modo que  $\overline{AC} = \frac{b}{2}$ .

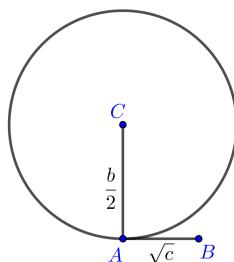
Figura 21 – Construção do segmento  $AC$ .



Fonte: Autor

3°. Construa uma circunferência de centro  $C$  e raio  $\overline{AC}$ .

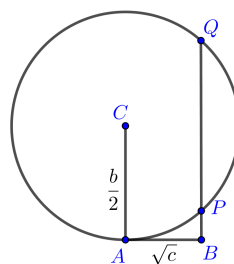
Figura 22 – Construção da circunferência.



Fonte: Autor

4°. Trace uma reta perpendicular ao segmento  $AB$  passando por  $B$  e marque os pontos  $P$  e  $Q$  nas interseções dessa reta com a circunferência.

Figura 23 – Construção do segmento  $BQ$ .



Fonte: VALE, A.F.A.d. (2013), adaptada.

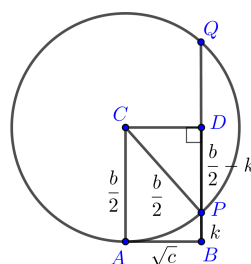
5°. A medida do segmento  $PB$  é a solução positiva da equação dada.

Para a justificativa, trace uma reta perpendicular ao segmento  $\overline{BQ}$  passando por  $C$  e marque o ponto  $D$  na interseção com  $BQ$ , (veja a Figura 24). Fazendo  $\overline{PB} = k$  e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $CDP$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{CP}^2 &= \overline{CD}^2 + \overline{DP}^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= (\sqrt{c})^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{b^2}{4} &= c + \frac{b^2}{4} - bk + k^2 \\ \Rightarrow k^2 - bk + c &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $\overline{PB}$  é uma solução positiva da equação.

Figura 24 – Figura do Método de Descartes, 3º Caso.



Fonte: Autor

A medida do segmento  $\overline{BQ}$  representa outra solução positiva da equação.

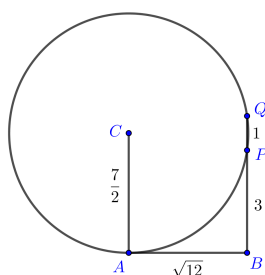
De fato, note que  $\overline{BQ} = \overline{QD} + \overline{DP} + \overline{PB} = b - k$ , fazendo  $x = b - k$  na equação  $x^2 - bx + c = 0$ , obtemos  $(b - k)^2 - b(b - k) + c = 0$  que é equivalente a  $k^2 - bk + c = 0$ , que já sabemos ser verdadeira.

Observe que neste caso, se  $\overline{AC} = \frac{b}{2} > \sqrt{c} = \overline{AB}$ , temos duas raízes reais e distintas, se  $\frac{b}{2} = \sqrt{c}$ , temos uma raiz real, se  $\frac{b}{2} < \sqrt{c}$ , não existe raiz real.

**Exemplo 2.3.1.** Use o método de Descartes para resolver a equação  $x^2 - 7x + 12 = 0$ .

Neste caso, trata-se de uma equação do tipo  $x^2 - bx + c = 0$ , com  $b = 7$  e  $c = 12$ . Trace um segmento  $AB$  medindo  $\sqrt{c} = \sqrt{12}$ . Por  $A$  levante uma reta perpendicular ao segmento  $AB$  e marque o ponto  $C$  sobre ela de modo que  $\overline{AC} = \frac{b}{2} = \frac{7}{2}$ . Em seguida, construa uma circunferência de centro  $C$  e raio  $\overline{AC}$  e trace uma reta perpendicular ao segmento  $AB$  passando por  $B$  e marque os pontos  $P$  e  $Q$  nas interseções dessa reta com a circunferência. A medida do segmento  $\overline{PB}$  é a solução positiva da equação dada. Como,  $\overline{PB} = 3$  e  $\overline{BQ} = 4$ , temos que, as raízes de  $x^2 - 7x + 12 = 0$  são 3 e 4.

Figura 25 – Resolução da equação  $x^2 - 7x + 12 = 0$  pelo método de Descartes, 3º Caso.



Fonte: Autor

### 3 MÉTODO DE LESLIE/CARLYLE

De acordo com Fragoso (2000), na Europa no século XVIII, o inglês Sir John Leslie (1766-1832), em sua obra *Elements of Geometry*, apresentou uma resolução geométrica para equações quadráticas com o seguinte problema: dada uma equação quadrática  $x^2 + bx + c = 0$ , com  $b$  e  $c \in \mathbb{R}$ , sobre um sistema cartesiano retangular de referência marque os pontos  $A(0, 1)$  e  $B(-b, c)$ , trace uma circunferência de diâmetro  $AB$ , as abscissas dos pontos em que essa circunferência cortar o eixo  $x$ , se cortar, são as raízes da equação quadrática dada.

Segundo Eves (2002), a resolução desse problema inserido no trabalho de Leslie foi sugerido por Sr. Thomas Carlyle, um jovem e engenhoso matemático, e também seu aluno. Por este motivo optamos por denominar o método Leslie/Carlyle e não apenas Leslie como muitas vezes vemos na literatura.

O mais interessante desse método, diferente dos métodos apresentados até aqui, é que ele é geral, ou seja, pode ser utilizado para o caso geral  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ). De fato, basta dividir a equação por  $a$ .

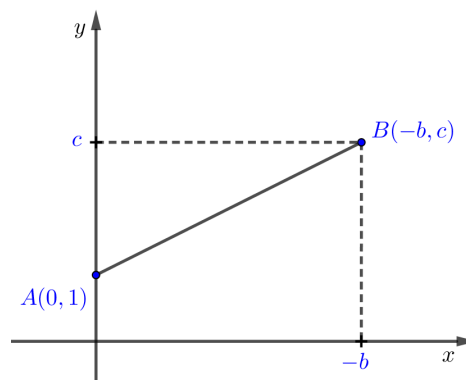
A seguir mostraremos o passo a passo da resolução geométrica do método de Leslie/Carlyle, sua justificativa e exemplos.

#### Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo  $x^2 + bx + c = 0$ , com  $b$  e  $c \in \mathbb{R}$ :

1°. Marque, num plano cartesiano, os pontos  $A(0, 1)$  e  $B(-b, c)$  e trace  $AB$ .

Figura 26 – Construção do segmento  $AB$ , com  $b < 0$  e  $c > 0$ .

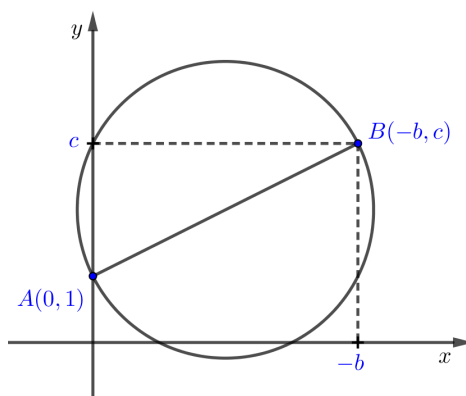


Fonte: Autor



2°. Construa uma circunferência de diâmetro  $AB$ .

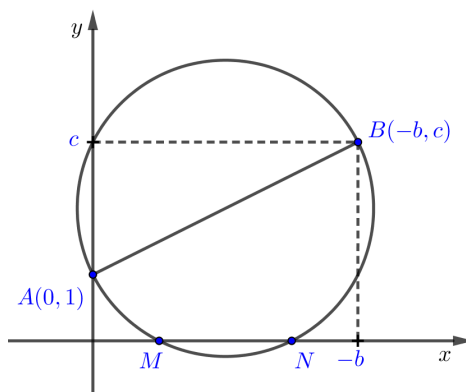
Figura 27 – Construção da circunferência de diâmetro  $AB$ , com  $b < 0$  e  $c > 0$ .



Fonte: Autor

3°. Marque os pontos  $M$  e  $N$  nas interseções de circunferência com o eixo  $x$  (caso existam).

Figura 28 – Figura do Método de Leslie/Carlyle, com  $b < 0$  e  $c > 0$ .



Fonte: FRAGOSO, W.d.C. (2000), adaptada.

4°. As abscissas dos pontos  $M$  e  $N$  serão as raízes da equação dada.

Para a justificativa considere os pontos  $M(r, 0)$  e  $N(s, 0)$ . Agora, devemos mostrar que as abscissas  $r$  e  $s$  desse pontos, satisfazem a equação  $x^2 + bx + c = 0$ .

Veja que a circunferência construída acima tem centro  $\left(\frac{-b}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$  e raio  $R = \sqrt{\left(\frac{-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2}$ . Sua equação é

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2 \quad (3.1)$$

Fazendo  $y = 0$  na equação (3.1) e desenvolvendo os quadrados, obtemos  $x^2 + bx + c = 0$ .

Como  $r$  e  $s$  são as abscissas dos pontos da circunferência em que  $y = 0$ , temos que  $r$  e  $s$  satisfazem a  $x^2 + bx + c = 0$ .

Dependendo do ponto  $(-b, c)$ , a circunferência poderá cortar o eixo  $x$  em dois pontos distintos, em um único ponto e não cortar-lo, o que ocorrerá quando  $b > 2\sqrt{c}$ ,  $b = 2\sqrt{c}$  e  $b < 2\sqrt{c}$ , respectivamente.

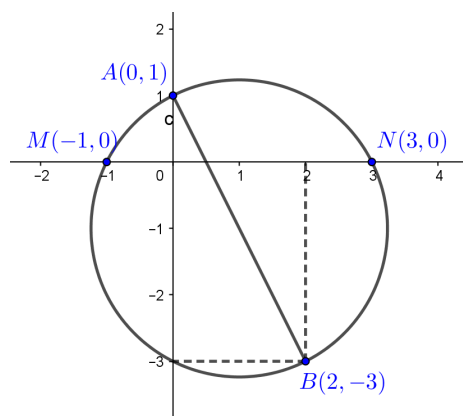
Observe que poderíamos ter considerado a equação  $x^2 - bx + c = 0$ , com  $b$  e  $c \in \mathbb{R}$  e as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  seriam  $(0, 1)$  e  $(b, c)$ , respectivamente, e a demonstração seria análoga.

A seguir, apresentamos uma lista de exercícios resolvidos para melhor compreensão do método.

**Exemplo 3.0.1.** Use o método de Leslie/Carlyle para resolver a equação  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .

Considere a equação  $x^2 - 2x - 3 = 0$ , com  $a = 1$ ,  $b = -2$  e  $c = -3$ . Para resolver essa equação pelo método de Leslie/Carlyle faremos a seguinte construção. Primeiro marque os pontos  $A(0, 1)$  e  $B(-b, c) = (2, -3)$  no plano cartesiano, em seguida construa uma circunferência com diâmetro  $AB$  e marque os pontos  $M$  e  $N$  nas interseções dessa circunferência com o eixo  $x$ . Assim, as abscissas  $-1$  e  $3$  desses pontos são as raízes da equação dada. Veja a Figura 29.

Figura 29 – Resolução da equação  $x^2 - 2x - 3 = 0$  pelo método de Leslie/Carlyle.

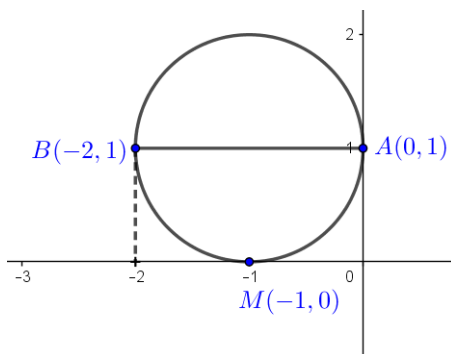


Fonte: Autor

**Exemplo 3.0.2.** Use o método de Leslie/Carlyle para resolver a equação  $x^2 + 2x + 1 = 0$ .

Neste caso, temos  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$ . Marque os pontos  $A(0, 1)$  e  $B(-2, 1)$  no plano cartesiano, construa uma circunferência com diâmetro  $AB$  e marque o ponto  $M$  na interseção dessa circunferência com o eixo  $x$ . Então, pelo método de Leslie/Carlyle a abscissa  $-1$  de  $M(-1, 0)$  é a raiz da equação dada. Veja a Figura 30

Figura 30 – Resolução da equação  $x^2 + 2x + 1 = 0$  pelo método de Leslie/Carlyle.

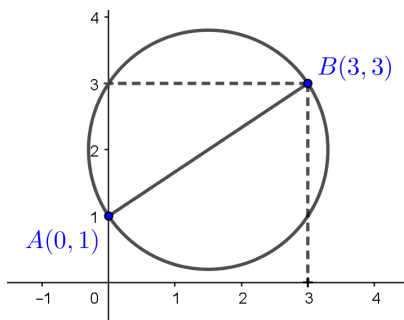


Fonte: Autor

**Exemplo 3.0.3.** Use o método de Leslie/Carlyle para resolver a equação  $x^2 - 3x + 3 = 0$ .

Dada a equação  $x^2 - 3x + 3 = 0$ , com  $a = 1$ ,  $b = -3$  e  $c = 3$ . Novamente podemos utilizar o método de Leslie/Carlyle para resolver a equação. Marque os pontos  $A(0, 1)$  e  $B(3, 3)$  no plano cartesiano. Construa uma circunferência de diâmetro  $AB$  como mostra a Figura 31. Observe que a circunferência não intersecta o eixo das abscissas, logo não existe  $x \in \mathbb{R}$  que satisfaça a equação.

Figura 31 – Resolução da equação  $x^2 - 3x + 3 = 0$  pelo método de Leslie/Carlyle.

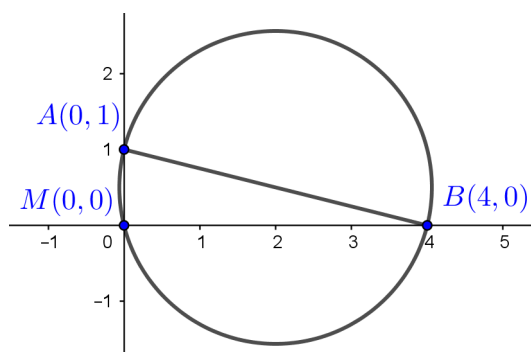


Fonte: Autor

**Exemplo 3.0.4.** Use o método de Leslie/Carlyle para resolver a equação  $2x^2 - 8x = 0$ .

Veja que neste exemplo  $a = 2$ ,  $b = -8$  e  $c = 0$ , como  $a \neq 1$  devemos dividir membro a membro da equação  $2x^2 - 8x = 0$  por  $a = 2$ , desse modo, obtemos a equação  $x^2 - 4x = 0$  equivalente à original. Agora, podemos usar o método de resolução geométrica de Leslie/Carlyle para equações quadráticas. Comece marcando os pontos  $A(0, 1)$  e  $B(4, 0)$  num plano cartesiano, em seguida construa uma circunferência de diâmetro  $AB$ . Marque o ponto  $M$  na interseção que falta entre essa circunferência e o eixo  $x$ . Assim, como  $M$  e  $B$  são os pontos de interseção dessa circunferência com o eixo  $x$ , temos que 0 e 4 são as raízes da equação dada. Veja a Figura 32.

Figura 32 – Resolução da equação  $2x^2 - 8x = 0$  pelo método de Leslie/Carlyle.



Fonte: Autor

## 4 MÉTODO DE STAUDT

Segundo Eves (2002), o próximo método geométrico para resolução geométrica de equações quadráticas foi desenvolvido pelo alemão Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867) através da resolução do seguinte problema: dada a equação quadrática  $x^2 + bx + c = 0$ , com  $b \neq 0$ , marque os pontos  $L = \left(\frac{c}{-b}, 0\right)$  e  $T = \left(\frac{4}{-b}, 2\right)$  sobre um sistema retangular de coordenadas cartesianas e suponha que o segmento de reta  $LT$  corte a circunferência unitária de centro em  $(0, 1)$  nos pontos  $R$  e  $S$  a partir do ponto  $(0, 2)$  sobre os pontos  $(r, 0)$  e  $(s, 0)$  do eixo  $x$ . As raízes da equação dada são  $r$  e  $s$ .

Observe que, o segmento  $LT$  construído como descrito acima pode ser secante, tangente ou não possuir ponto em comum com a circunferência unitária com centro em  $(0, 1)$ , o que resulta em duas raízes distintas, uma única raiz ou nenhuma raiz real, nessa ordem. Veja ainda, que poderíamos ter considerado a equação  $x^2 - bx + c = 0$ , com  $b \neq 0$  e as coordenadas dos pontos  $L$  e  $T$  seriam  $\left(\frac{c}{b}, 0\right)$  e  $\left(\frac{4}{b}, 2\right)$ , respectivamente.

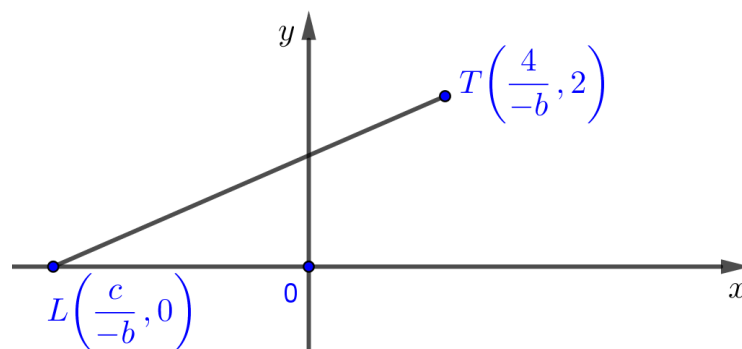
Para a compreensão do método faremos o passo a passo da resolução geométrica do método de Staudt bem como sua justificativa e exemplos.

### Resolução Geométrica

Considere uma equação do tipo  $x^2 + bx + c = 0$ , com  $b, c \in \mathbb{R}$  e  $b \neq 0$ :

1°. Sobre um plano cartesiano, marque os pontos  $L \left(\frac{c}{-b}, 0\right)$  e  $T \left(\frac{4}{-b}, 2\right)$  e trace o segmento  $LT$ .

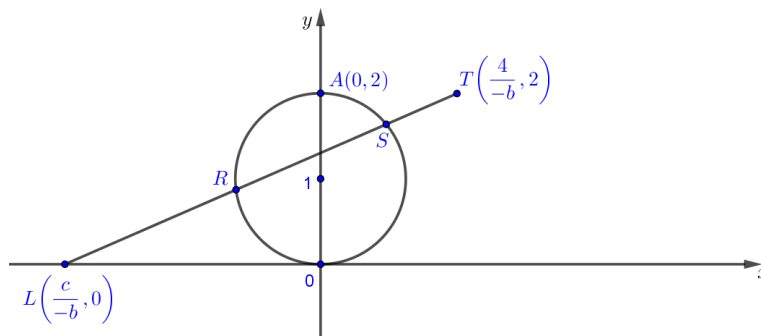
Figura 33 – Construção do segmento  $LT$ , com  $b, c < 0$ .



Fonte: Autor

2°. Suponha que o segmento de reta  $LT$  corte a circunferência unitária de centro  $(0, 1)$  nos pontos  $R$  e  $S$ .

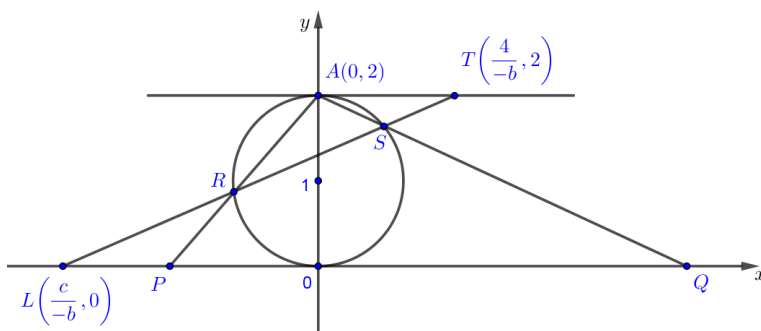
Figura 34 – Construção da circunferência unitária de centro  $(0,1)$ , com  $b, c < 0$ .



Fonte: Autor

3°. Projete os pontos  $R$  e  $S$  a partir do ponto  $A(0, 2)$  sobre os pontos  $P$  e  $Q$  do eixo  $x$ .

Figura 35 – Figura do Método de Staudt, com  $b, c < 0$ .



Fonte: Geometric Representations of Quadratic Solutions (2013), adaptada.

4°. As abscissas dos pontos  $P$  e  $Q$  são as raízes da equação dada.

Para a justificativa considere  $P(r, 0)$  e  $Q(s, 0)$ . Note que, as equações da circunferência unitária de centro  $(0, 1)$  e das retas suportes dos segmentos  $AR$  e  $AS$  são, respectivamente:

$$x^2 + y(y - 2) = 0 \tag{4.1}$$

$$2x + r(y - 2) = 0 \tag{4.2}$$

$$2x + s(y - 2) = 0 \tag{4.3}$$

Multiplicando, membro a membro as equações (4.2) e (4.3), obtemos

$$4x^2 + 2(r + s)(y - 2)x + rs(y - 2)^2 = 0 \quad (4.4)$$

Multiplicando a equação (4.1) por 4 e igualando o primeiro membro da nova equação com o primeiro membro da equação (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} 4x^2 + 2(r + s)(y - 2)x + (rs)(y - 2)^2 &= 4x^2 + 4y(y - 2) \\ (y - 2)[2x(r + s) + rs(y - 2) - 4y] &= 0 \end{aligned}$$

Dessa forma, determinamos uma equação satisfeita pelos pontos  $A$ ,  $R$  e  $S$ . Segue-se que os pontos  $A$ ,  $R$  e  $S$  devem satisfazer  $y = 2$  ou  $2x(r + s) + rs(y - 2) - 4y = 0$ . Como,  $R$  e  $S$  não satisfazem  $y = 2$ , logo devem satisfazer

$$2x(r + s) + rs(y - 2) - 4y = 0. \quad (4.5)$$

Lembramos que os pontos  $L$  e  $T$  pertencem à reta suporte do segmento  $RS$  quando  $y = 0$  e  $y = 2$ . Logo as coordenadas dos pontos de interseção da reta dada por (4.5) com  $y = 0$  e  $y = 2$  são  $(\frac{rs}{r + s}, 0)$  e  $(\frac{4}{r + s}, 2)$ , respectivamente.

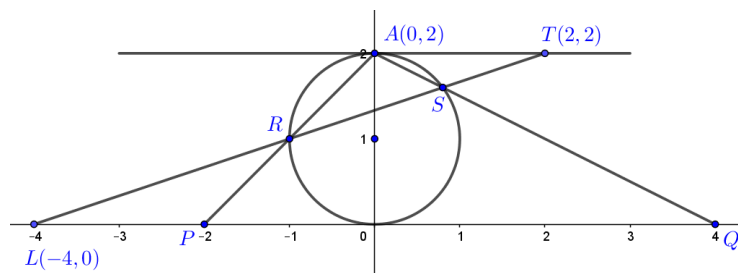
Comparando as coordenadas dos pontos  $L(\frac{c}{-b}, 0) = (\frac{rs}{r + s}, 0)$  e  $T(\frac{4}{-b}, 2) = (\frac{4}{r + s}, 2)$ , obtemos que  $r + s = -b$  e  $rs = c$ .

Note que, determinamos dois números cuja soma é  $-b$  e o produto é  $c$ , então pela propriedade de soma e produto (veja o anexo B), para  $a = 1$ , temos que  $r$  e  $s$  são as raízes de  $x^2 + bx + c = 0$ .

**Exemplo 4.0.1.** Use o método de Staudt para resolver a equação  $x^2 - 2x - 8 = 0$ .

Seja a equação quadrática  $x^2 - 2x - 8 = 0$ , com  $a = 1$ ,  $b = -2$  e  $c = -8$ . Para resolver essa equação geometricamente usando o método de Staudt, devemos executar os passos a seguir: Sobre um plano cartesiano marque os pontos  $L(\frac{c}{-b}, 0) = (-4, 0)$  e  $T(\frac{4}{-b}, 2) = (2, 2)$ , depois construa uma circunferência unitária com centro em  $(0, 1)$ . Trace o segmento de reta  $LT$  e marque os pontos  $R$  e  $S$  na interseção desse segmento com a circunferência. Projete os pontos  $R$  e  $S$  a partir do ponto  $A(0, 2)$  sobre o eixo  $x$ . Tal projeção nos fornece os pontos  $P$  e  $Q$ . As abscissas  $-2$  e  $4$  desses pontos, são as raízes da equação dada. Veja a construção na Figura 36.

Figura 36 – Resolução da equação  $x^2 - 2x - 8 = 0$  pelo método de Staudt.

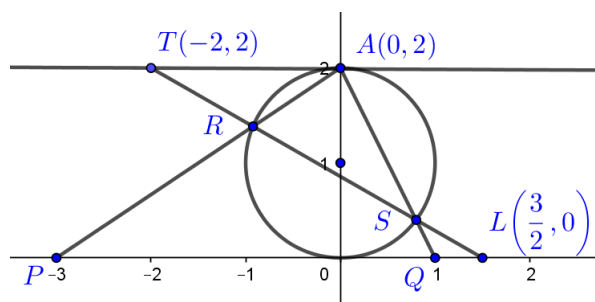


Fonte: Autor

**Exemplo 4.0.2.** Use o método de Staudt para resolver a equação  $x^2 + 2x - 3 = 0$ .

Dada a equação  $x^2 + 2x - 3 = 0$ , com  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $c = -3$ . Sobre um plano cartesiano marque os pontos  $L\left(\frac{3}{2}, 0\right)$  e  $T(-2, 2)$  em seguida construa uma circunferência unitária com centro em  $(0, 1)$ . Trace o segmento de reta  $LT$  e marque os pontos  $R$  e  $S$  na interseção desse segmento com a circunferência. Projete os pontos  $R$  e  $S$  a partir do ponto  $A(0, 2)$  sobre o eixo  $x$ . Tal projeção nos fornece os pontos  $P$  e  $Q$ . As abcissas  $-3$  e  $1$  desses pontos, são as raízes da equação dada. Veja a figura a seguir.

Figura 37 – Resolução da equação  $x^2 + 2x - 3 = 0$  pelo método de Staudt.



Fonte: Autor

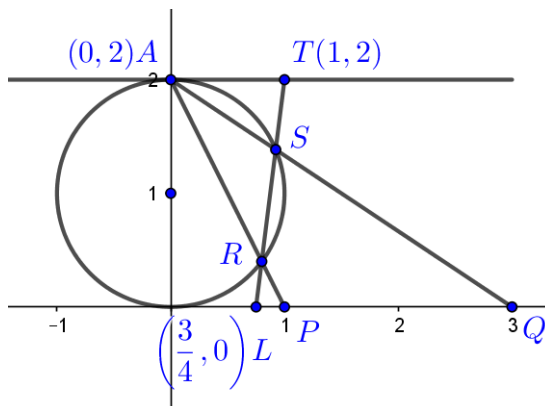
**Exemplo 4.0.3.** Use o método de Staudt para resolver a equação  $x^2 - 4x + 3 = 0$ .

Considere a equação quadrática  $x^2 - 4x + 3 = 0$ , com  $a = 1$ ,  $b = -4$  e  $c = 3$ . Marque os pontos  $L\left(\frac{3}{4}, 0\right)$  e  $T(1, 2)$  e construa uma circunferência unitária com centro em  $(0, 1)$ . Trace o segmento de reta  $LT$  e marque os pontos  $R$  e  $S$  na interseção desse segmento com a circunferência. Projete os pontos  $R$  e  $S$  a partir do ponto  $A(0, 2)$  sobre



o eixo  $x$ . Tal projeção nos fornece os pontos  $P$  e  $Q$ . As abscissas 1 e 3 desses pontos, são as raízes dessa equação. Veja a Figura 38.

Figura 38 – Resolução da equação  $x^2 - 4x + 3 = 0$  pelo método de Staudt.

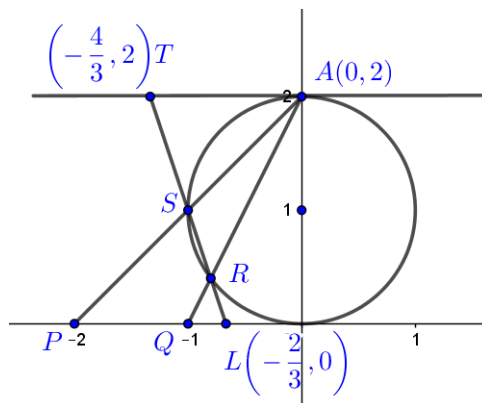


Fonte: Autor

**Exemplo 4.0.4.** Use o método de Staudt para resolver a equação  $x^2 + 3x + 2 = 0$ .

Dada a equação quadrática  $x^2 + 3x + 2 = 0$ , com  $a = 1$ ,  $b = 3$  e  $c = 2$ . Marque os pontos  $L\left(\frac{2}{-3}, 0\right)$  e  $T\left(\frac{4}{-3}, 2\right)$  e construa uma circunferência unitária com centro em  $(0, 1)$ . Trace o segmento de reta  $LT$  e marque os pontos  $R$  e  $S$  na interseção desse segmento com a circunferência. Projete os pontos  $R$  e  $S$  a partir do ponto  $A(0, 2)$  sobre o eixo  $x$ . Tal projeção nos fornece os pontos  $P$  e  $Q$ . As abscissas  $-2$  e  $-1$  desses pontos, são as raízes da equação dada. Veja a figura a seguir.

Figura 39 – Resolução da equação  $x^2 + 3x + 2 = 0$  pelo método de Staudt.



Fonte: Autor

## 5 MÉTODO DAS CIRCUNFERÊNCIAS TANGENTES

Outro método geométrico utilizado para resolver equações quadráticas é o método das circunferências tangentes, também conhecido como semicircunferências tangentes ou resolução com régua e compasso. Uma das justificativas do método pode ser encontrada na Revista do Professor de Matemática, volume 12, apresentada por Nelson Tunalá com o seguinte título *Resolução Geométrica da Equação do 2º grau*. Tunalá resolveu equações quadráticas do tipo  $x^2 + bx + c = 0$  com  $b, c \in \mathbb{R}$  e  $a = 1$ . Note que se  $a \neq 0$  e  $a \neq 1$ , basta dividir a equação por  $a$ .

Seja uma equação do tipo  $x^2 + bx + c = 0$  com  $b, c \in \mathbb{R}$  e  $a = 1$ . Suponhamos  $c \neq 0$  (se  $c = 0$ , as raízes da equação são sempre 0 e  $-b$ ). E assim, temos dois casos a considerar,  $c > 0$  e  $c < 0$ .

### 5.1 1º Caso: Equações do tipo $x^2 + bx + c = 0$ com $c > 0$

Sendo  $x_1$  e  $x_2$  as raízes de  $x^2 + bx + c = 0$ , temos que,  $x_1 + x_2 = -b$  e  $x_1 \cdot x_2 = c$  (Veja o anexo B). Portanto, para  $c > 0$  temos que  $x_1$  e  $x_2$  tem o mesmo sinal.

**Lema 5.1.1.** *Considere a equação  $x^2 + bx + c = 0$  com  $c > 0$  e sejam  $x_1$  e  $x_2$  as suas raízes. Valem as seguintes identidades*

$$|x_1| + |x_2| = |b| \quad (5.1)$$

$$|x_1| \cdot |x_2| = c. \quad (5.2)$$

De fato,

i) se  $x_1 > 0$  e  $x_2 > 0$  então,  $x_1 + x_2 = -b > 0 \Rightarrow b < 0$ ,

$$|x_1| + |x_2| = x_1 + x_2 = -b = |b| \text{ e } |x_1| \cdot |x_2| = x_1 \cdot x_2 = c.$$

ii) se  $x_1 < 0$  e  $x_2 < 0$  então,  $x_1 + x_2 = -b < 0 \Rightarrow b > 0$ ,

$$|x_1| + |x_2| = -x_1 + (-x_2) = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = -(-b) = b = |b| \text{ e}$$

$$|x_1| \cdot |x_2| = (-x_1) \cdot (-x_2) = x_1 \cdot x_2 = c.$$

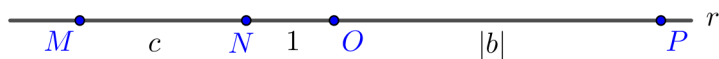
Logo, o problema consiste em determinar dois segmentos cuja soma seja  $|b|$  e cujo produto seja  $c$ . Para isso veja a construção a seguir.

### Resolução Geométrica

Considere uma equação do tipo  $x^2 + bx + c = 0$ , com  $b, c \in \mathbb{R}$  e  $c > 0$ :

1°. Trace uma reta  $r$  e marque os segmentos  $MN$ ,  $NO$  e  $OP$  sobre ela, de medidas  $c$ ,  $1$  e  $|b|$ , respectivamente.

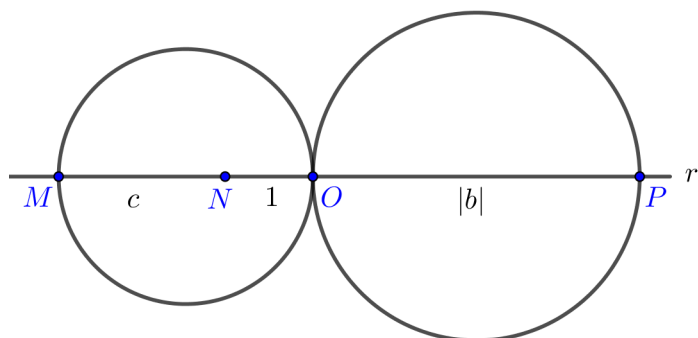
Figura 40 – Construção dos segmentos  $MN$ ,  $NO$  e  $OP$ .



Fonte: Autor

2°. Trace duas circunferências com diâmetros  $\overline{MO}$  e  $\overline{OP}$ .

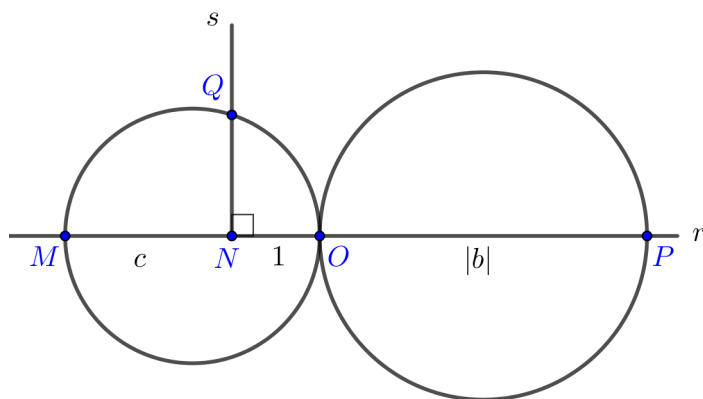
Figura 41 – Construção das circunferências tangentes.



Fonte: Autor

3°. A partir de  $N$  levante uma perpendicular  $s$  à reta  $r$  determinando o ponto  $Q$  na circunferência de diâmetro  $\overline{MO}$ .

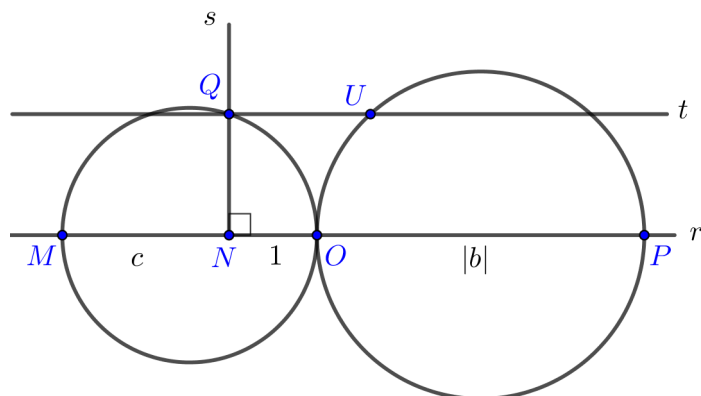
Figura 42 – Determinação do ponto  $Q$ .



Fonte: Autor

4°. Por  $Q$  trace uma reta  $t$  paralela à reta  $r$  e marque o ponto  $U$  na interseção de  $t$  com a circunferência de diâmetro  $\overline{OP}$ .

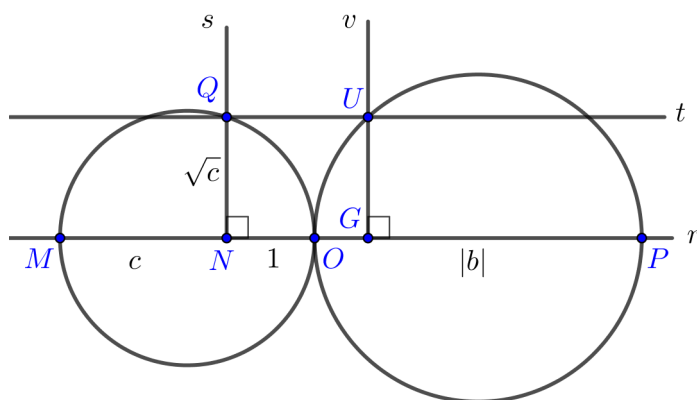
Figura 43 – Determinação do ponto  $U$ .



Fonte: Autor

5°. Trace por  $U$  uma reta  $v$  perpendicular à reta  $r$  e marque o ponto  $G$  na interseção de  $v$  com  $r$ .

Figura 44 – Figura do Método das Circunferências Tangentes, 1° Caso.



Fonte: TUNALA, N. (1988), adaptada.

6°. As medidas dos segmentos  $OG$  e  $GP$  representam os valores absolutos das raízes da equação dada.

Devemos mostrar que  $\overline{OG}$  e  $\overline{GP}$  satisfazem as equações definidas por (5.1) e (5.2).

De fato, veja que o triângulo  $MQO$  inscrito na circunferência de diâmetro  $MO$  é retângulo em  $Q$ , então, pelas relações métricas no triângulo retângulo temos

$$\overline{NQ}^2 = \overline{MN} \cdot \overline{NO}$$

$$\overline{NQ} = \sqrt{c}$$

Do mesmo modo, o triângulo  $OUP$  é retângulo em  $U$ , então, podemos escrever  $\overline{GU}^2 = \overline{OG} \cdot \overline{GP}$ . Como  $\overline{GU} = \overline{NQ}$ , por construção, temos que  $\overline{OG} \cdot \overline{GP} = c$ . Além disso,  $\overline{OG} + \overline{GP} = |b|$ .

Então,  $\overline{OG}$  e  $\overline{GP}$  são os dois segmentos cuja soma é  $|b|$  e cujo produto é  $c$ . Desse modo, podemos escrever  $|x_1| = \overline{OG}$  e  $|x_2| = \overline{GP}$ .

Assim, podemos dizer que,

- Se  $b > 0$ , então, as raízes são negativas, ou seja,  $x_1 = -\overline{OG}$  e  $x_2 = -\overline{GP}$ ,
- Se  $b < 0$ , então, as raízes são positivas, ou seja,  $x_1 = \overline{OG}$  e  $x_2 = \overline{GP}$ .

Observe que, se  $\sqrt{c} > \frac{|b|}{2}$ , então, a reta  $t$  não intercepta a circunferência de diâmetro  $\overline{OP}$  e, nesse caso, as raízes não são reais. O mesmo ocorre para o caso degenerado  $b = 0$  e  $c > 0$ .

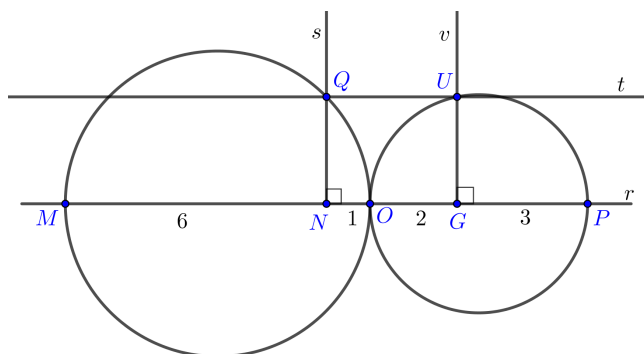
Os exemplos a seguir têm como objetivo ilustrar o método das circunferências tangentes para  $c > 0$ .

**Exemplo 5.1.1.** Use o método das circunferências tangentes para resolver a equação  $x^2 + 5x + 6 = 0$ .

Considere a equação  $x^2 + 5x + 6 = 0$ , com  $a = 1$ ,  $b = 5$  e  $c = 6$ , como  $c > 0$  a resolução geométrica segue os mesmos procedimentos apresentados no 1º caso. Primeiramente, trace uma reta  $r$  e sobre esta marque os segmentos  $MN$ ,  $NO$  e  $OP$ , com  $\overline{MN} = c = 6$ ,  $\overline{NO} = 1$ , e  $\overline{OP} = |b| = 5$ . Em seguida, trace duas circunferências com diâmetros  $\overline{MO} = c + 1 = 7$  e  $\overline{OP} = 5$ . A partir de  $N$  levante uma perpendicular  $s$  à reta  $r$  determinando o ponto  $Q$  na circunferência de diâmetro 7. Por  $Q$  trace uma reta  $t$  paralela à reta  $r$  e marque o ponto  $U$  na interseção de  $t$  com a circunferência de diâmetro 5. Por último, trace por  $U$  uma reta  $v$  perpendicular à reta  $r$  e marque o ponto  $G$  na interseção de  $v$  com  $r$ . Assim, as medidas dos segmentos  $OG$  e  $GP$  representam os valores absolutos das raízes da equação dada. Veja essa construção na Figura 45.

Neste caso, como  $c > 0$ , temos que, as raízes tem o mesmo sinal e como  $b > 0$  elas são negativas. Assim, as raízes de  $x^2 + 5x + 6 = 0$  são  $-\overline{OG}$  e  $-\overline{GP}$ , ou seja,  $x_1 = -2$  e  $x_2 = -3$ .

Figura 45 – Resolução da equação  $x^2 + 5x + 6 = 0$  pelo método das Circunferências Tangentes.

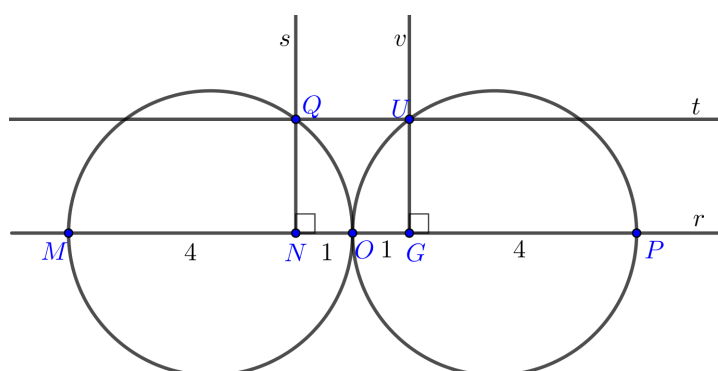


Fonte: Autor

**Exemplo 5.1.2.** Use o método das circunferências tangentes para resolver a equação  $x^2 - 5x + 4 = 0$ .

Seja a equação  $x^2 - 5x + 4 = 0$ , com  $a = 1$ ,  $b = -5$  e  $c = 4$ . Como  $c > 0$ , faremos os mesmos procedimentos geométricos apresentado no exemplo anterior, com  $\overline{MN} = 4$ ,  $\overline{NO} = 1$ ,  $\overline{OP} = 5$  e  $\overline{MO} = c + 1 = 5$ . Assim, as medidas dos segmentos  $OG$  e  $GP$  representam os valores absolutos das raízes da equação dada. Como  $c > 0$ , temos que as raízes tem o mesmo sinal e como  $b < 0$  elas são positivas. Logo as raízes da equação são  $\overline{OG}$  e  $\overline{GP}$ , ou seja,  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 4$ . Veja a figura a seguir.

Figura 46 – Resolução da equação  $x^2 - 5x + 4 = 0$  pelo método das Circunferências Tangentes.

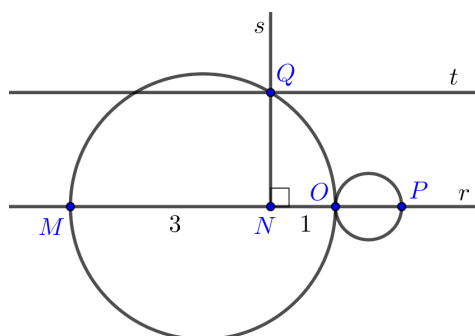


Fonte: Autor

**Exemplo 5.1.3.** Use o método das circunferências tangentes para resolver a equação  $x^2 - x + 3 = 0$ .

Note que, a equação dada não tem solução real, pois,  $\sqrt{3} > \frac{1}{2}$  e neste caso a interseção da circunferência de diâmetro  $\overline{OP} = 1$  com a reta  $t$  é vazia. Veja a Figura 47.

Figura 47 – Resolução da equação  $x^2 - x + 3 = 0$  pelo método das Circunferências Tangentes.



Fonte: Autor

## 5.2 2º Caso: Equações do tipo $x^2 + bx + c = 0$ com $c < 0$

Novamente, sendo  $x_1$  e  $x_2$  as raízes de  $x^2 + bx + c = 0$ , temos que  $x_1 + x_2 = -b$  e  $x_1 \cdot x_2 = c$ . Portanto, para  $c < 0$  temos que  $x_1$  e  $x_2$  tem sinais contrários.

**Lema 5.2.1.** Considere a equação  $x^2 + bx + c = 0$  com  $c < 0$  e sejam  $x_1$  e  $x_2$  as suas raízes. Supondo  $|x_1| > |x_2|$ , valem as seguintes identidades

$$|x_1| - |x_2| = |b| \tag{5.3}$$

$$|x_1| \cdot |x_2| = |c|. \tag{5.4}$$

De fato,

i) se  $x_1 > 0$  e  $x_2 < 0$  então,  $x_1 + x_2 = -b > 0 \Rightarrow b < 0$ ,

$$|x_1| - |x_2| = x_1 - (-x_2) = x_1 + x_2 = -b = |b| \text{ e}$$

$$|x_1| \cdot |x_2| = x_1 \cdot (-x_2) = -x_1 \cdot x_2 = -c = |c|.$$

ii) se  $x_1 < 0$  e  $x_2 > 0$  então,  $x_1 + x_2 = -b < 0 \Rightarrow b > 0$ ,

$$|x_1| - |x_2| = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = -(-b) = b = |b| \text{ e}$$

$$|x_1| \cdot |x_2| = -x_1 \cdot x_2 = -c = |c|.$$

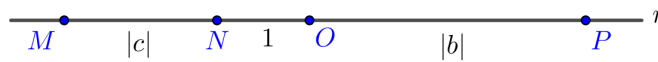
Agora, o problema consiste em determinar dois segmentos cuja diferença seja  $|b|$  e cujo produto seja  $|c|$ . Veja a construção a seguir.

**Resolução Geométrica**

Considere uma equação do tipo  $x^2 + bx + c = 0$ , com  $b, c \in \mathbb{R}$  e  $c < 0$ :

1°. Trace uma reta  $r$  e marque os segmentos  $MN$ ,  $NO$  e  $OP$  sobre ela, de medidas  $|c|$ , 1 e  $|b|$ , respectivamente.

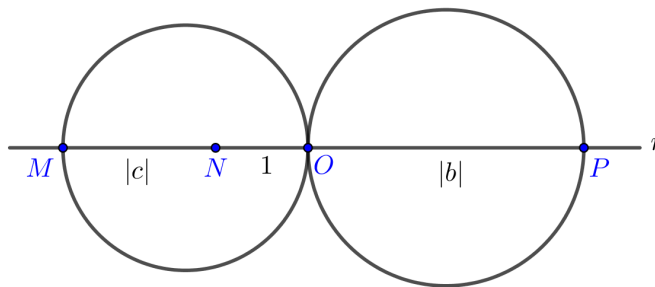
Figura 48 – Construção dos segmentos  $MN$ ,  $NO$  e  $OP$ .



Fonte: Autor

2°. Trace duas circunferências com diâmetros  $\overline{MO}$  e  $\overline{OP}$ .

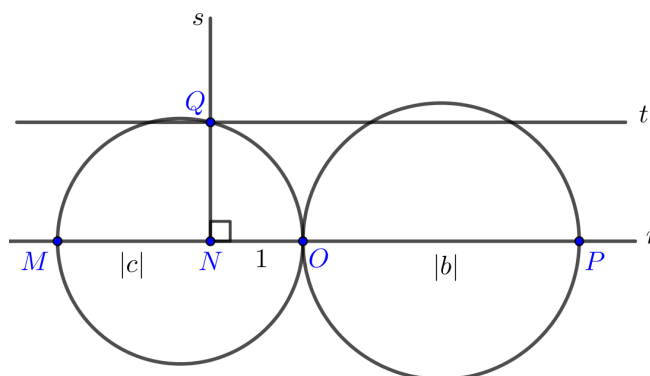
Figura 49 – Construção das circunferências tangentes.



Fonte: Autor

3°. A partir de  $N$  levante uma perpendicular  $s$  à reta  $r$  determinando o ponto  $Q$  na circunferência de diâmetro  $\overline{MO}$ . Por  $Q$  trace uma reta  $t$  paralela à reta  $r$ .

Figura 50 – Determinação do ponto  $Q$ .

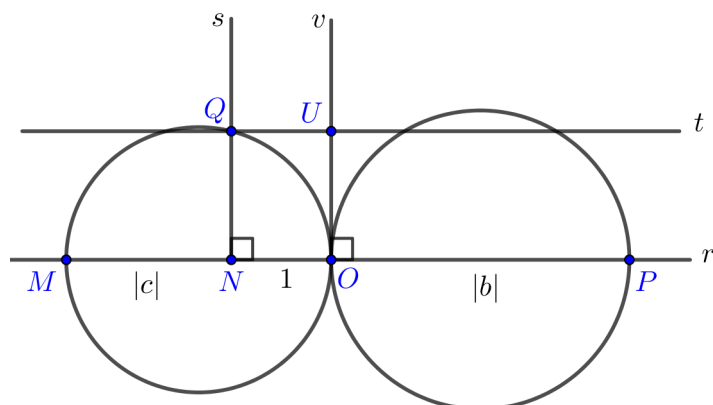


Fonte: Autor



4°. Por  $O$  levante uma perpendicular  $v$  à reta  $r$  e marque o ponto  $U$  na interseção de  $t$  com  $v$ .

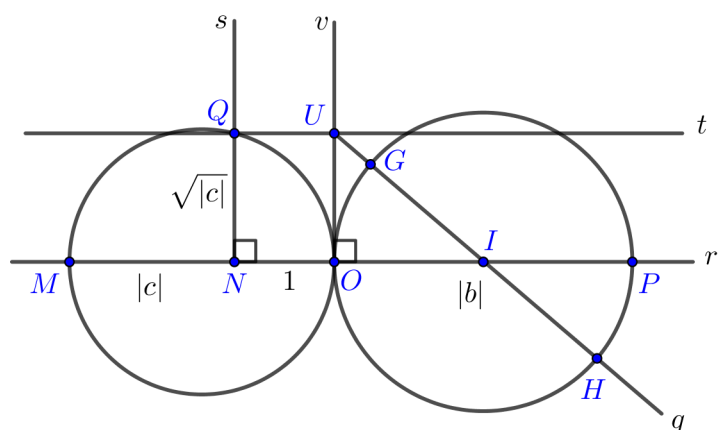
Figura 51 – Determinação do ponto  $U$ .



Fonte: Autor

5°. Trace uma reta  $q$  por  $U$  e  $I$  (sendo  $I$  o centro da circunferência de diâmetro  $\overline{OP}$ ) e marque os pontos  $G$  e  $H$  nas interseções de  $q$  com a circunferência de diâmetro  $\overline{OP}$  com  $G$  entre  $U$  e  $I$ .

Figura 52 – Figura do Método das Circunferências Tangentes, 2° Caso.



Fonte: TUNALA, N. (1988), adaptada.

6°. As medidas dos segmentos  $UH$  e  $UG$  representam os valores absolutos das raízes da equação dada.

Para justificar este caso utilizaremos um argumento análogo ao do 1° caso, ou seja, devemos mostrar que  $\overline{OG}$  e  $\overline{GP}$  satisfazem as equações definidas por (5.3) e (5.4).

Inicialmente, temos que  $\overline{UH} - \overline{UG} = |b|$ , que é o diâmetro da circunferência de diâmetro  $\overline{OP}$ . Para o que falta, note que  $\overline{OU} = \overline{NQ}$  por construção e  $OU$  e  $UH$  são tangente e secante, respectivamente, à circunferência de diâmetro  $\overline{OP}$ , logo, pelo teorema das cordas, temos,

$$\begin{aligned}\overline{OU}^2 &= \overline{UH} \cdot \overline{UG} \\ |c| &= \overline{UH} \cdot \overline{UG}\end{aligned}$$

Portanto, como  $\overline{UH}$  e  $\overline{UG}$  satisfazem as equações (5.3) e (5.4), temos que esses segmentos representam os valores absolutos das raízes da equação dada. Desse modo, podemos escrever  $|x_1| = UH$  e  $|x_2| = UG$ .

Segue, imediatamente dessa discussão que,

- Se  $b > 0$ , então,  $x_1 = -\overline{UH}$  e  $x_2 = \overline{UG}$ ,
- Se  $b < 0$ , então,  $x_1 = \overline{UH}$  e  $x_2 = -\overline{UG}$ .

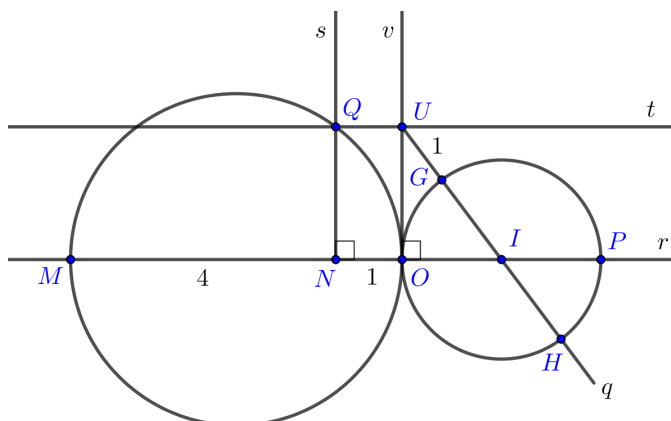
Note que, para os dois casos,  $c > 0$  e  $c < 0$ , poderíamos ter considerado duas circunferências não tangentes, e suas justificativas seriam exatamente iguais ao caso abordado.

**Exemplo 5.2.1.** Use o método das circunferências tangentes para resolver a equação  $x^2 + 3x - 4 = 0$ .

Seja a equação  $x^2 + 3x - 4 = 0$ , com  $a = 1$ ,  $b = 3$  e  $c = -4$ . Como  $c < 0$  a resolução geométrica segue os mesmos procedimentos apresentados no 2º caso. Para a construção, trace uma reta  $r$  e marque os segmentos  $MN$ ,  $NO$  e  $OP$  sobre esta, com  $\overline{MN} = |c| = 4$ ,  $\overline{NO} = 1$ ,  $\overline{OP} = |b| = 3$  e  $\overline{MO} = |c| + 1 = 5$ . Trace também duas circunferências com diâmetros  $\overline{MO} = 5$  e  $\overline{OP} = 3$ . A partir de  $N$  levante uma perpendicular  $s$  à reta  $r$  determinando o ponto  $Q$  na circunferência de diâmetro  $\overline{MO}$ . Por  $Q$  trace uma reta  $t$  paralela à reta  $r$ , em seguida por  $O$  levante uma perpendicular  $v$  à reta  $r$  e marque o ponto  $U$  na interseção de  $t$  com  $v$ . Por fim, trace uma reta  $q$  por  $U$  e pelo centro  $I$  da circunferência de diâmetro  $\overline{OP}$  e marque os pontos  $G$  e  $H$  nas interseções de  $q$  com esta circunferência, com  $G$  entre  $U$  e  $I$ . As medidas dos segmentos  $UH$  e  $UG$  representam os valores absolutos das raízes da equação dada. Veja a Figura 53.

Como  $c < 0$ , as raízes tem sinais opostos, e como  $b > 0$  temos que  $x_1 < 0$  e  $x_2 > 0$ . Daí as raízes de  $x^2 + 3x - 4 = 0$  são  $-\overline{UH}$  e  $\overline{UG}$ , ou seja,  $x_1 = -4$  e  $x_2 = 1$ .

Figura 53 – Resolução da equação  $x^2 + 3x - 4 = 0$  pelo método das Circunferências Tangentes.

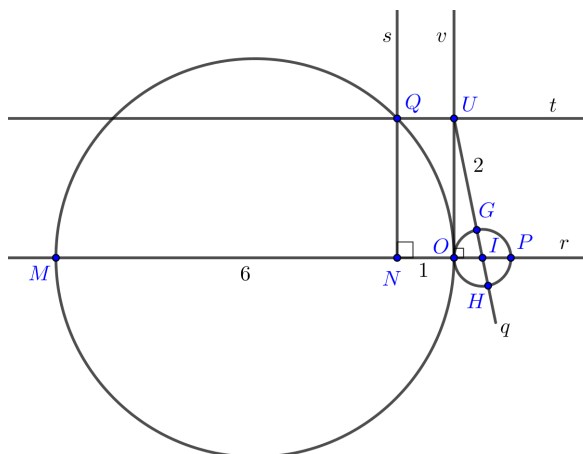


Fonte: Autor

**Exemplo 5.2.2.** Use o método das circunferências tangentes para resolver a equação  $x^2 - x - 6 = 0$ .

Considere a equação  $x^2 - x - 6 = 0$ , com  $a = 1$ ,  $b = -1$  e  $c = -6$ . Como  $c < 0$ , faremos os mesmos procedimentos geométricos no exemplo anterior, com  $\overline{MN} = |c| = 6$ ,  $\overline{NO} = 1$ ,  $\overline{OP} = |b| = 1$  e  $\overline{MO} = |c| + 1 = 7$ . Desse modo, temos que as medidas dos segmentos  $UH$  e  $UG$  representam os valores absolutos das raízes da equação dada. Como  $c < 0$ , temos que as raízes tem sinais opostos e como  $b < 0$  temos que  $x_1 > 0$  e  $x_2 < 0$ , ou seja,  $x_1 = \overline{UH} = 3$  e  $x_2 = \overline{UG} = -2$ . Veja a figura a seguir.

Figura 54 – Resolução da equação  $x^2 - x - 6 = 0$  pelo método das Circunferências Tangentes.



Fonte: Autor

## 6 MÉTODO DE OMAR KHAYYAM

Segundo EVES (2002), Omar Khayyam (1050 - 1122) foi o primeiro a trabalhar com equações cúbicas que admitisse uma raiz positiva e também acreditava ser a única forma de resolver equações cúbicas, pois, naquela época ainda não se tinha descoberto nenhum método algébrico. Omar propôs uma resolução geométrica para equações do terceiro grau escritas na forma  $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$  com  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$ , para obtenção de raiz positiva. A construção a seguir foi motivada pelo problema que se encontra no livro *Introdução à História da Matemática* de Howard Eves (2002, p. 278) que traz uma relação de passos que nos direciona à resolução de tais equações.

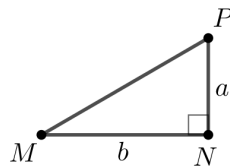
### Resolução Geométrica

Considere uma equação do tipo  $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ , com  $a, b$  e  $c$  positivos:

1° **Passo.** Construir um segmento de medida  $m = \frac{a^2}{b}$ .

Construa o triângulo  $MNP$  retângulo em  $N$  com  $MN = b$  e  $NP = a$ ,

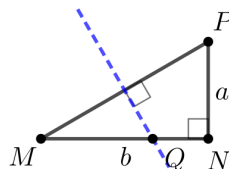
Figura 55 – Construção do triângulo  $MNP$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Trace a mediatriz da hipotenusa  $MP$  e marque o ponto  $Q$  na interseção com um dos catetos,

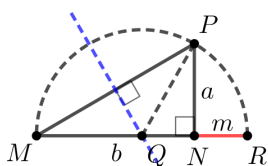
Figura 56 – Construção da mediatriz da hipotenusa  $MP$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Trace uma semicircunferência de centro  $Q$  e raio  $\overline{MQ}$  e marque o ponto  $R$  na interseção da semicircunferência com o prolongamento de  $MQ$ ,

Figura 57 – Construção do segmento  $NR = m$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

A medida do segmento  $\overline{NR} = m$  é  $\frac{a^2}{b}$ .

De fato, veja que o triângulo  $MPR$  está inscrito na semicircunferência de raio  $MQ$  e tem um de seus lados igual ao diâmetro da dela, logo,  $MPR$  é retângulo em  $P$ , assim, pelas relações do triângulo retângulo, tem-se  $\overline{NP}^2 = \overline{MN} \cdot \overline{NR}$ , ou seja,  $a^2 = bm$  donde concluímos que  $m = \frac{a^2}{b}$ .

2º **Passo.** Construir um segmento de medida  $n = \frac{a^3}{b^2}$ .

Trace uma semirreta de origem  $M$  e marque os segmentos  $MN = b$  e  $NP = a$ ,

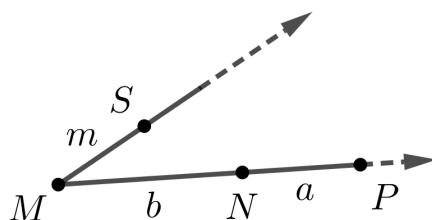
Figura 58 – Construção da semirreta  $MP = m$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Com a mesma origem trace o segmento  $MS = m$ ,

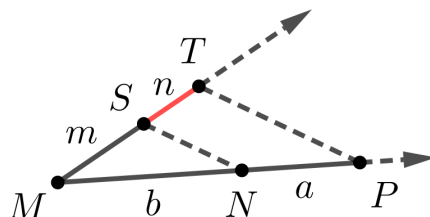
Figura 59 – Construção do segmento  $MS$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Por  $P$  trace uma reta paralela ao segmento  $NS$  interceptando a semirreta  $MS$  em  $T$ ,

Figura 60 – Construção do segmento  $ST = n$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

O segmento  $ST$  é igual a  $n = \frac{am}{b} = \frac{a^3}{b^2}$ .

De fato, pelo teorema de Tales, tem-se  $\frac{MN}{MS} = \frac{NP}{ST}$ , ou seja,  $\frac{b}{m} = \frac{a}{n}$ , fazendo  $m = \frac{a^2}{b}$  temos,  $n = \frac{a^3}{b^2}$ .

3º **Passo.** Construir uma semicircunferência de diâmetro  $AC = n + c$  e uma reta  $EF$  paralela ao diâmetro  $AC$ .

Trace os segmentos de reta  $AB$  e  $BC$  de medidas  $n$  e  $c$ , respectivamente,

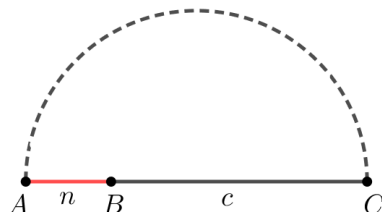
Figura 61 – Construção do segmento  $AC$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Trace uma semicircunferência de diâmetro  $\overline{AC} = n + c$ ,

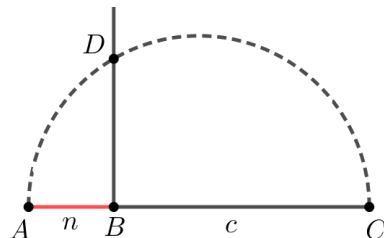
Figura 62 – Construção da semicircunferência de diâmetro  $\overline{AC}$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Por  $B$  ponto comum de  $AB$  e  $BC$  levante uma perpendicular a  $AC$  e marque o ponto  $D$  na interseção dessa com a semicircunferência,

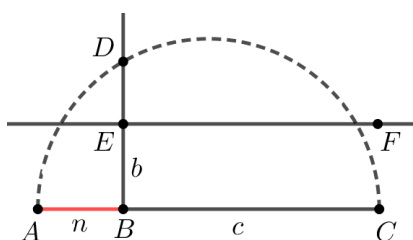
Figura 63 – Construção do segmento  $BD$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Sobre  $BD$  marque o ponto  $E$  de modo que  $\overline{BE} = b$  e trace uma reta  $EF$  paralela a  $AC$  passando por  $E$ .

Figura 64 – Construção da reta  $EF$ .

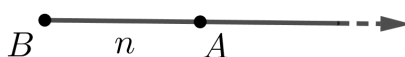


Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

4° **Passo.** Construir em  $BC$  o ponto  $G$  tal que  $\frac{\overline{BG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}}$ , para isso faremos uma construção auxiliar.

Construa uma semirreta com origem em  $B$  e marque o ponto  $A$  de modo que  $\overline{BA} = n$ ,

Figura 65 – Construção da semirreta  $BA$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Em  $BA$  marque o ponto  $O$  de modo que  $BO = ED$ ,

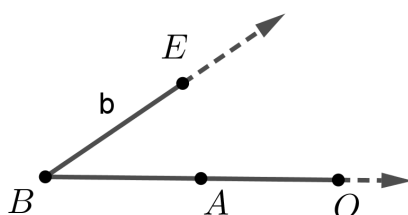
Figura 66 – Construção do segmento  $BO$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Por  $E$  ponto fora de  $BO$ , construa a semirreta  $BE = b$ ,

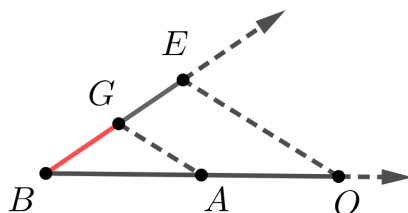
Figura 67 – Construção do segmento  $BE$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Por  $A$  trace uma reta paralela à  $EO$  encontrando  $BE$  em  $G$ .

Figura 68 – Determinação do ponto  $G$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

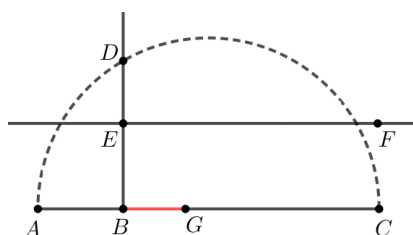
Pelo teorema de Tales, tem-se  $\frac{\overline{BG}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BO}}$ . Como  $\overline{BO} = \overline{ED}$ , temos que  $\frac{\overline{BG}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}}$  que é equivalente a

$$\overline{BG} \cdot \overline{ED} = \overline{BE} \cdot \overline{AB}$$

Agora, com o compasso centrado em  $B$  com uma abertura  $BG$  determinada na Figura 68 marque o ponto  $G$  em  $BC$ , como na figura a seguir.



Figura 69 – Construção do segmento  $BG$ .

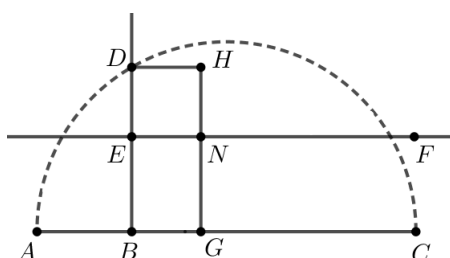


Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

5º **Passo.** Determinar o segmento  $BL$ .

Construa o retângulo  $DBGH$ , e marque o ponto  $N$  na interseção entre os segmentos  $GH$  e  $EF$ ,

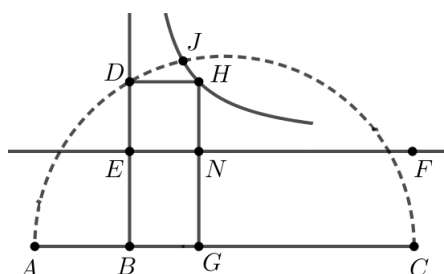
Figura 70 – Determinação do ponto  $N$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Pelo ponto  $H$  traçamos uma hipérbole equilátera com assíntotas  $EF$  e  $ED$  interceptando a semicircunferência em  $J$ .

Figura 71 – Determinação do ponto  $J$ .

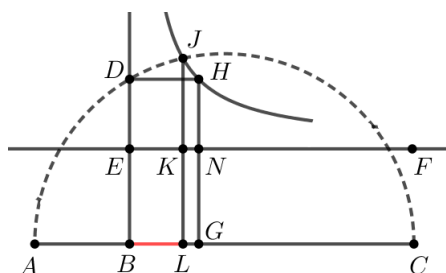


Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Por  $J$  traçamos uma reta paralela ao segmento  $BD$  interceptando os segmentos  $EF$  e  $AC$  nos pontos  $K$  e  $L$ , respectivamente.

O segmento  $BL$  é a solução da equação cúbica dada.

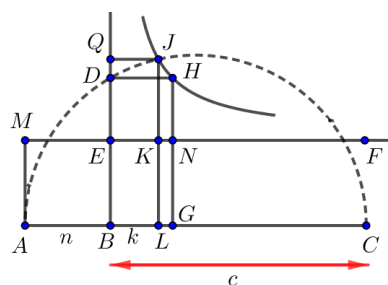
Figura 72 – Determinação do ponto  $L$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

Para justificar o método devemos mostrar que  $BL$  satisfaz a equação  $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ .

Figura 73 – Resolução Geométrica de  $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ .



Fonte: SOUZA, F.N.B.d. (2013)

De fato, fazendo  $BL = k$ , mostraremos que  $k$  é a solução de  $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ .

Primeiro completamos os retângulos  $ABEM$   $EKJQ$  determinamos os pontos  $M$  e  $Q$  em  $EF$  e  $BD$ , respectivamente, como na Figura 73. Agora, como  $J$  e  $H$  pertencem à hipérbole equilátera, temos que o produto de suas distâncias às assíntotas é uma constante, então podemos escrever que

$$\overline{QJ} \cdot \overline{KJ} = \overline{DH} \cdot \overline{NH} \tag{6.1}$$

Sabendo que  $\overline{QJ} = \overline{EK}$ ,  $\overline{DH} = \overline{BG}$  e  $\overline{NH} = \overline{ED}$  e substituindo na equação definida por (6.1), temos que  $\overline{EK} \cdot \overline{KJ} = \overline{BG} \cdot \overline{ED}$ . Além disso temos que  $\overline{BG} \cdot \overline{ED} = \overline{BE} \cdot \overline{AB}$  por construção, segue-se imediatamente dessas duas últimas igualdades que

$$\overline{EK} \cdot \overline{KJ} = \overline{BE} \cdot \overline{AB} \tag{6.2}$$

Por outro lado, o retângulo  $BLKE$  é interno aos retângulos  $ALKM$  e  $BLJQ$ . Mas, pela equação definida por (6.2), os retângulos  $ABEM$  e  $EKJQ$  têm a mesma área. Logo

$$\overline{BL} \cdot \overline{LJ} = \overline{BE} \cdot \overline{AL} \quad (6.3)$$

Do triângulo retângulo  $AJC$  inscrito na semicircunferência de raio  $\overline{AC}$ , temos

$$\overline{LJ}^2 = \overline{AL} \cdot \overline{LC} \quad (6.4)$$

Elevando a equação definida por (6.3) ao quadrado e nessa nova equação substituindo a equação definida por (6.4), obtemos

$$\overline{BL}^2 \cdot \overline{LC} = \overline{BE}^2 \cdot \overline{AL} \quad (6.5)$$

Fazendo  $\overline{BL} = k$ ,  $\overline{LC} = c - k$ ,  $\overline{BE} = b$  e  $\overline{AL} = \frac{a^3}{b^2} + k$ , na equação (6.5), obtemos  $k^2 \cdot (c - k) = b^2 \left( \frac{a^3}{b^2} + k \right)$ , que é equivalente a

$$k^3 + b^2k + a^3 = ck^2, \quad (6.6)$$

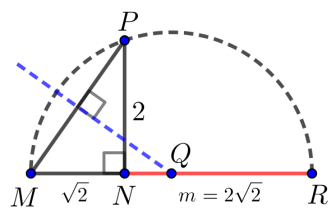
como queríamos demonstrar.

**Exemplo 6.0.1.** Use o método de Omar para determinar as raízes positivas da equação cúbica  $x^3 + 2x + 8 = 5x^2$ .

Considere a equação  $x^3 + 2x + 8 = 5x^2$ , com  $a^3 = 8$ ,  $b^2 = 2$  e  $c = 5$  e consequentemente,  $a = 2$  e  $b = \sqrt{2}$ .

Inicialmente, determine um segmento com medida  $m$  de modo que  $m = \frac{a^2}{b} = 2\sqrt{2}$  como na Figura 74.

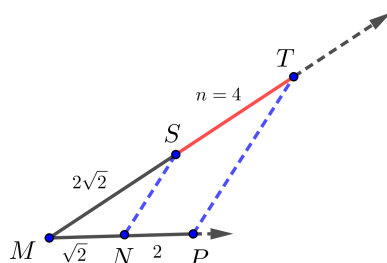
Figura 74 – Construção do segmento  $m = 2\sqrt{2}$ .



Fonte: Autor

Em seguida, determine um segmento com medida  $n$  de modo que  $n = \frac{a^3}{b^2} = 4$  como na Figura 75.

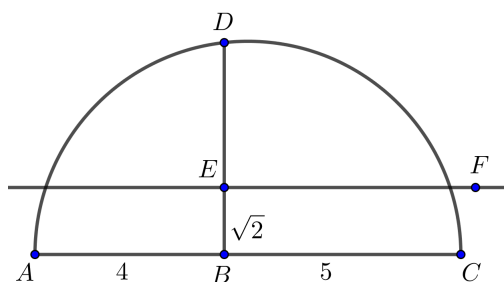
Figura 75 – Construção do segmento  $n = 4$ .



Fonte: Autor

Agora, construa uma semicircunferência de diâmetro  $\overline{AC} = n + c = 9$  e por  $B$  ponto comum de  $AB$  e  $BC$  levante uma perpendicular a esse diâmetro, na interseção dessa perpendicular com a semicircunferência marque o ponto  $D$ . Sobre  $BD$  marque o ponto  $E$  de modo que  $\overline{BE} = b = \sqrt{2}$  e trace a reta  $EF$  paralela a  $AC$  passando por  $E$  como na Figura 76.

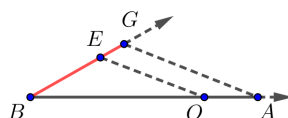
Figura 76 – Construção do segmento  $EF$ .



Fonte: Autor

Em seguida, determine em  $BC$  o ponto  $G$  tal que  $\overline{BG} \cdot \overline{ED} = \overline{BE} \cdot \overline{AB}$ . Para isso, faça a seguinte Construção. Trace uma semirreta com origem em  $B$  e marque o ponto  $A$  tal que  $\overline{BA} = n = 4$ . Na semirreta  $BA$  marque o ponto  $O$  de modo que  $\overline{BO} = \overline{ED}$ . Por  $E$  ponto fora de  $BO$ , trace uma semirreta  $\overline{BE}$ . Por  $A$  trace uma reta paralela à  $OE$  e na interseção com  $BE$  marque o ponto  $G$ . Veja essa construção na Figura 77.

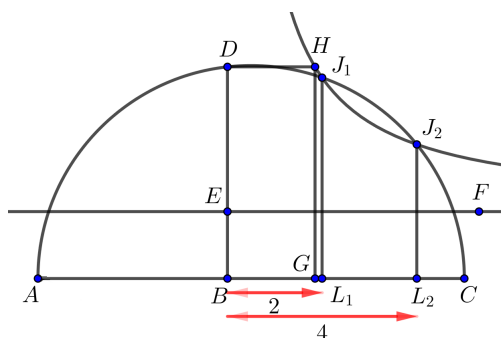
Figura 77 – Construção do segmento  $BG$ .



Fonte: Autor

Agora, com o compasso fixado em  $B$  marque em  $BC$  o ponto  $G$ , em seguida complete o retângulo  $DBGH$ . Pelo ponto  $H$  trace uma hipérbole equilátera de assíntotas  $EF$  e  $ED$  interceptando a semicircunferência em  $J_1$  e  $J_2$ . Por  $J_1$  trace uma paralela ao segmento  $BD$  e marque o ponto  $L_1$  na interseção desta com  $BC$ . O segmento  $BL_1$  é uma das raízes positiva da equação dada. Analogamente, por  $J_2$  trace uma paralela ao segmento  $BD$  e marque o ponto  $L_2$  na interseção desta com  $BC$ . O segmento  $BL_2$  é a outra raiz positiva da equação dada. Medindo os segmentos  $\overline{BL_1}$  e  $\overline{BL_2}$ , obtemos as medidas 2 e 4, respectivamente, segue-se que as raízes positivas de  $x^3 + 2x + 8 = 5x^2$  são 2 e 4. Veja a Figura a seguir.

Figura 78 – Determinação dos segmentos  $BL_1$  e  $BL_2$ .



Fonte: Autor

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de elaborar um material auxiliar para professores e alunos do ensino básico a resolverem equações com outros instrumentos matemáticos, elaboramos neste trabalho uma coletânea de métodos de resolução geométrica para equações de 2° e 3° graus. Desse modo, reunimos em um único trabalho os principais métodos de resolução geométrica, que fazem uso de régua e compasso. Primeiramente apresentamos os métodos de resolução de equações do 2° grau, a saber: o método de Euclides, Descartes, Leslie/Carlyle, Staudt e Circunferências Tangentes. Tais métodos foram dispostos em ordem cronológica. Posteriormente apresentamos um método para a resolução de equação do 3° grau devido à Omar Khayyam.

Para a melhor compreensão separamos os métodos por capítulos, fazendo referência ao matemático responsável por sua descoberta. Suas resoluções geométricas foram expostas passo a passo e cada passo contendo sua figura de construção, ao final do capítulo deixamos pelo menos um exemplo de aplicação, assim facilitando a compreensão do leitor.

Espera-se que este trabalho seja um apoio para os professores e alunos que desejam explorar esse ramo da Matemática e suas aplicações em aulas práticas, com uso de régua e compasso ou de algum software, como o Geogebra.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, B. C. d. *A Evolução Histórica da Resolução das Equações do 2º Grau*. p. 21, 2000.
- DEMETSENAERE, A. L. *Geometric Representations of Quadratic Solutions*. p. 5 – 8, 2013.
- EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: UNESP, 2009.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 3. ed. Campinas: Unicamp, 2002. Único.
- FRAGOSO, W. d. C. Uma abordagem histórica da equação do 2º grau. *Revista do Professor de Matemática-RPM*, v. 43, 2000.
- LIMA, E. L. A equação do segundo grau. *Revista do Professor de Matemática*, v. 13, 1988.
- PEDROSO, H. A. Uma breve história da equação do 2º grau. *Revista do Professor de Matemática-RPM*, v. 2, 2010.
- SOUZA, F. N. B. d. Uma abordagem geométrica para as equações cúbicas. p. 15 – 19, 2013.
- TUNALA, N. Resolução geométrica da equação do 2º grau. *Revista do Professor de Matemática-RPM*, v. 12, p. 33 – 35, 1988.
- VALE, A. F. A. d. As diferentes estratégias de resolução da equação do segundo grau. p. 44 – 48, 2013.

## **Anexos**



## A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Seja a equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ .

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por  $a$ , obtemos

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a}.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Somando  $\frac{b^2}{4a^2}$  aos dois lados da equação definida por (A.1), obtemos:

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ x &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\end{aligned}\tag{A.2}$$

fazendo  $\Delta = b^2 - 4ac$  e substituindo em (A.2), obtemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

que é a solução da equação dada.

## B SOMA E PRODUTO

Considere a equação

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (\text{B.1})$$

com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ .

Sejam  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  e  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  as raízes de (B.1). Tem-se

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \left( \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Portanto, se  $x_1$  e  $x_2$  são as raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$  então, a soma delas é  $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$  e o produto é  $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ . Em particular, se  $a = 1$ , então,  $S = -b$  e  $P = c$ .

Este resultado é bastante conhecido, no entanto vale destacar que sua recíproca é verdadeira, ou seja, se  $x_1$  e  $x_2$  são números tais que  $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$  e  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$  então,  $x_1$  e  $x_2$  são as raízes da equação definida por (B.1).

De fato, suponha que  $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$  e  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ , neste caso temos as seguintes equações equivalentes:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} ax^2 - a \left( \frac{-b}{a} \right) x + a \frac{c}{a} &= 0 \\ ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 &= 0 \\ a(x - x_1)(x - x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Portanto, a equação (B.3) é equivalente à equação (B.2). Como  $x_1$  e  $x_2$  são as raízes da equação (B.3) então, também serão raízes da equação (B.2).