

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Alexandre Goularte Cândido

**ESTUDO DE ALGUMAS FUNÇÕES ELEMENTARES DE  
UMA VARIÁVEL COMPLEXA**

Florianópolis

2019



Alexandre Goularte Cândido

**ESTUDO DE ALGUMAS FUNÇÕES ELEMENTARES DE  
UMA VARIÁVEL COMPLEXA**

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática com área de concentração PROFMAT-UFSC associado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Orientadora: Profa. Dra. Marianna Ravara Vago

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Goularte Cândido, Alexandre

Estudo de algumas funções elementares de uma variável complexa

Orientadora: Marianna Ravara Vago

Florianópolis, SC, 2019.

61 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências.

1. Matemática.
2. Números Complexos.
3. Fórmula de Euler.
4. Função Exponencial.
5. Função Logarítmica.

**ESTUDO DE ALGUMAS FUNÇÕES ELEMENTARES DE  
UMA VARIÁVEL COMPLEXA**

**por  
Alexandre Goularte CÃândido**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

---

Profa. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves  
Coordenadora do Curso

**Banca Examinadora**

---

Profa. Dra. Marianna Ravara Vago  
UFSC  
Orientadora

---

Prof. Dr. Giuliano Boava  
UFSC

---

Prof. Dr. Eliezer Batista  
UFSC

---

Prof. Dr. Eduardo Tengan  
UFSC

Florianópolis, 27 de Março 2019.



A Minha família.





## AGRADECIMENTOS

A meus pais, que sempre me apoiaram em alcançar todos os meus objetivos.

A todos os professores que de certa forma contribuíram ao longo da minha vida acadêmica para meu crescimento acadêmico e profissional.

Aos professores do PROFMAT que compartilharam vasto conhecimento e exigiram de mim muita dedicação a fim de concluir o mestrado.

A minha Orientadora, Marianna Ravara Vago, pelo empenho dedicado à elaboração deste trabalho. Foram vários encontros e muitas horas de atendimento, mostrando-se sempre comprometida e à disposição para colaborar. Destaco também, as suas palavras de incentivo em prol da conclusão dessa dissertação.

Por fim, agradeço a todos os colegas da turma que caminharam juntos nesse exigente curso. Em especial, aos colegas de Criciúma: Alexandra, Francieli, Karine e Robson. O apoio mútuo colaborou para que enfrentássemos os obstáculos apresentados ao cursar o PROFMAT. Chegar até aqui é uma grande vitória pessoal.



Venha!  
Meu coração está com pressa  
Quando a esperança está dispersa  
Só a verdade me liberta  
Chega de maldade e ilusão  
Venha!  
O amor tem sempre a porta aberta  
E vem chegando a primavera  
Nosso futuro recomeça  
Venha que o que vem é perfeição.

Renato Russo



## RESUMO

Este trabalho inicia-se com um breve histórico do surgimento de um novo conjunto numérico: o dos números complexos. Apresentamos sua definição formal, assim como suas operações básicas e propriedades. Estudaremos também a forma trigonométrica, ou polar, destes números. Após essa revisão básica das propriedades dos números complexos, avançamos para o estudo de algumas funções complexas: as funções exponencial e logarítmica. Apresentaremos definições e algumas propriedades, destacando a visualização destas funções como aplicações de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Palavras-chave:** Função Exponencial. Função Logaritmo. Números Complexos. Forma Polar. Fórmula de Euler.



## ABSTRACT

This work begins with a brief history of the origins of a new numerical set: the set of complex numbers. We will present its formal definition, as well as its basic operations and properties. We will also study another their trigonometric, or polar, form. After this basic revision of the properties of complex numbers, we move towards the study of two complex functions: the exponential and logarithmic functions. We exhibit the definitions and some properties, highlighting the visualization of these functions as maps of  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Keywords:** Exponential Function. Logarithm Function. Complex Numbers. Polar form. Euler's Formula.





## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Número complexo no Plano Cartesiano .....	23
Figura 2	Conjugado de um número complexo .....	24
Figura 3	Módulo de um número complexo .....	24
Figura 4	Representação Polar .....	26
Figura 5	Raízes cúbicas da unidade .....	31
Figura 6	Raízes da unidade de ordem 4 .....	32
Figura 7	Raízes da unidade de ordem 6 .....	33
Figura 8	$L_1, y \in [0, \pi/2]$ .....	39
Figura 9	Imagem de $L_1, y \in [0, \pi/2]$ .....	39
Figura 10	Imagem $L_1 = \{z = 1 + iy\}$ pela função $e^z, y \in [0, 2\pi]$ ..	40
Figura 11	$L_1, L_2$ e $L_3$ com $y \in [0, \pi/2]$ .....	41
Figura 12	Imagem por $e^z$ .....	41
Figura 13	$L_1, L_2$ e $L_3$ com $y \in [0, 2\pi]$ .....	42
Figura 14	Imagem por $e^z$ .....	42
Figura 15	$L_4, L_5$ e $L_6$ com $x \in [-1, 1]$ .....	44
Figura 16	Imagem por $e^z$ .....	44
Figura 17	Setor de coroa circular .....	45
Figura 18	Retângulo $R_1 = [1, 2] \times [\pi/4, \pi/2]$ .....	46
Figura 19	Setor de coroa circular $S_1$ , imagem de $R_1$ por $e^z$ .....	46
Figura 20	Retângulo $R_2 = [1, 2] \times [0, 2\pi]$ .....	47
Figura 21	Coroa circular $S_2$ , imagem de $R_2$ por $e^z$ .....	47
Figura 22	Ramo principal do logaritmo .....	53
Figura 23	Três ramos da função logaritmo .....	55



## SUMÁRIO

<b>Introdução</b> .....	17
<b>1 ORIGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS</b> .....	19
<b>2 ÁLGEBRA DOS NÚMEROS COMPLEXOS</b> .....	21
2.1 OPERAÇÕES EM $\mathbb{C}$ .....	21
2.2 FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR .....	26
2.3 POTÊNCIAS DE UM NÚMERO COMPLEXO .....	27
<b>3 A FUNÇÃO EXPONENCIAL COMPLEXA</b> .....	35
3.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES .....	36
3.2 VISUALIZANDO GEOMETRICAMENTE .....	38
3.3 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS .....	48
<b>4 A FUNÇÃO LOGARITMO COMPLEXA</b> .....	51
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	57
<b>Referências</b> .....	59



## INTRODUÇÃO

Esta dissertação objetiva estudar a função exponencial complexa e a função logarítmica complexa sob os pontos de vista algébrico e geométrico. Nos baseamos nos trabalhos de (MORGADO, 2001) e (SOARES, 2012).

No primeiro capítulo desta dissertação fazemos um breve histórico do surgimento dos números complexos.

No segundo capítulo, definimos de modo formal os números complexos e apresentamos suas propriedades algébricas básicas, bem como a representação polar de um número complexo. Também realizamos o cálculo de raízes da unidade.

No terceiro capítulo exploramos a função exponencial complexa, sua definição e propriedades. Aqui encontramos a famosa Fórmula de Euler. É dado um enfoque especial à visualização como aplicação de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , na qual são obtidas interessantes representações gráficas.

No quarto capítulo, faremos o estudo da função logarítmica complexa. Diferentemente de como é realizado no conjunto dos números reais, não se trata simplesmente de encontrar a inversa da função exponencial complexa. Apresentaremos também a visualização desta função como uma aplicação de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .



## 1 ORIGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Desde a antiguidade até os dias atuais, a busca por soluções de equações é um tema de muito interesse na matemática. No processo de resolver equações de segundo grau, frequentemente os matemáticos antigos se deparavam com raízes quadradas de números reais negativos; como não era possível extrair estas raízes, o problema era considerado sem solução. Este pensamento permaneceu por muito tempo, até que no século XVI novas ideias e técnicas foram surgindo e a difusão destes novos procedimentos posteriormente deu origem ao que hoje chamamos conjunto dos números complexos.<sup>1</sup>

O pioneiro em considerar números “não reais” como possíveis soluções de equações foi o matemático italiano Rafael Bombelli (1526 – 1573), autor da obra em três volumes *l'Algebra* (1572, Veneza). Curiosamente, isto ocorreu quando Bombelli trabalhava com uma equação de terceiro grau.

A chamada *Fórmula de Cardano-Tartaglia*, exibida abaixo, é utilizada para encontrar uma raiz de uma equação de terceiro grau do tipo  $x^3 + px + q = 0$ :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Bombelli aplicou esta fórmula à equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , obtendo

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Sabendo que  $x = 4$  é uma raiz da equação, Bombelli cogita que este valor está implícito na expressão da raiz  $x = 4$  e que portanto é possível dar um sentido às expressões  $2 + \sqrt{-121}$  e  $2 - \sqrt{-121}$ . Além disso, seria também plausível definir operações entre expressões análogas, tais como adição, multiplicação, radiciação, etc. de modo que 4 seja apenas um dos valores obtidos desta manipulação. Assim, nasce uma situação em que apesar da presença da raiz quadrada de um número negativo, existe uma solução da equação dada.

Bombelli introduziu a notação  $\sqrt{-1}$ , que chamou de *piú di meno*, supôs que poderia continuar fazendo operações aritméticas básicas com

---

<sup>1</sup>Algumas informações contidas na introdução foram retiradas das páginas de Rafael Bombelli e números complexos na Wikipedia.

este objeto, e realizou os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} + 6 \cdot (-1) - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121} .\end{aligned}$$

De maneira análoga, Bombelli encontrou

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121} .$$

Portanto, concluiu que

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

e que

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1} .$$

Finalmente,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4 .$$

Após este procedimento, Bombelli fez o seguinte comentário: *inicialmente, isto me pareceu mais sofisma do que verdade, mas continuei minhas pesquisas até encontrar a prova.*

A partir do trabalho de Bombelli, os números complexos começam a ser utilizados como um “algoritmo que funciona” para resolver equações de terceiro grau mas, ao mesmo tempo, permanecia a ideia de que tais números não poderiam existir. Uma das grandes dificuldades em admitir e compreender a existência dos números complexos era a ausência de definição formal, representação geométrica e interpretação física destes números. Esta situação foi sendo resolvida com o tempo. Ao longo dos séculos, muitos matemáticos se envolveram com o estudo das propriedades algébricas dos números complexos e, posteriormente, com a visualização destes números como pontos no plano  $\mathbb{R}^2$ , levando à compreensão que atualmente temos. Entre eles estão Leonhard Euler, Abraham de Moivre e Carl Friedrich Gauss.

Apesar de não terem aplicação imediata no cotidiano, o estudo dos números complexos permitiu obter grandes avanços nas áreas de Engenharia Elétrica, Mecânica Quântica, Aerodinâmica, Mecânica dos Fluidos, entre outros.



## 2 ÁLGEBRA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

No conjunto dos números reais, não é possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. Os números complexos nascem dessa impossibilidade. O conjunto dos números complexos é uma extensão do conjunto dos números reais, herdando assim suas operações de adição e multiplicação, porém com o acréscimo de um novo elemento  $i$ , chamado *unidade imaginária*, que satisfaz  $i^2 = -1$ .

Todo número complexo por ser escrito de uma maneira única na forma  $a + bi$ , em que  $a$  e  $b$  são números reais. Chamamos  $a$  de *parte real* e  $b$  de *parte imaginária*.

Admitindo serem conhecidas as propriedades fundamentais no conjuntos dos números reais, os *números complexos* constituem o conjunto  $\mathbb{C}$ , onde estão definidas as operações de adição e de multiplicação.

Antes de apresentarmos as operações elementares com números complexos, é importante ressaltar que elas foram definidas como extensões das operações em  $\mathbb{R}$ , de modo que fossem conservadas as propriedades dessas operações em  $\mathbb{R}$ .

### 2.1 OPERAÇÕES EM $\mathbb{C}$

Dados  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  definimos em  $\mathbb{C}$  a operação de adição por:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

em que as operações entre parênteses na última expressão são somas de números reais. Desta maneira, a adição de números complexos é comutativa por construção. No caso particular em que  $z$  e  $w$  são números reais, podemos escrever  $z = a = a + 0i$ ,  $w = c = c + 0i$ . Obtemos assim

$$z + w = (a + 0i) + (c + 0i) = (a + c) + (0 + 0)i = a + c .$$

Ou seja, se  $z$ ,  $w$  são número reais, a adição em  $\mathbb{C}$  é a adição em  $\mathbb{R}$ .

Por exemplo,

$$(2 + 4i) + (13 + i) = 15 + 5i ;$$

$$(5 - 7i) + 8i = 5 + i .$$

Temos que  $z + 0 = (a + 0) + (b + 0)i = z$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Assim o

número complexo  $0 = 0 + 0i$  é o elemento neutro da adição em  $\mathbb{C}$ .

Se  $z = a + bi$  e  $w = -a - bi$  então

$$z + w = [a + (-a)] + [b + -(b)]i = 0 .$$

Assim, todo número complexo  $z$  possui elemento inverso para a adição, ou seja, existe  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $z + w = 0$ . Denotaremos esse inverso por  $-z = -a - bi$ .

Portanto, dados  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  podemos definir em  $\mathbb{C}$  a operação de subtração por:

$$z - w = z + (-w) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i .$$

Por exemplo,

$$1 - (9 + 3i) = -8 - 3i ;$$

$$(2 + 7i) - (4 + 8i) = -2 - i .$$

Dados  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  definimos em  $\mathbb{C}$  a operação de multiplicação por:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

onde as operações entre parênteses são operações com números reais. Assim como ocorre com a adição, se  $z = a + 0i$  e  $w = c + 0i$  são reais,

$$z \cdot w = (ac - 0 \cdot 0) + i(a \cdot 0 + 0 \cdot c) = ac ,$$

isto é, o produto em  $\mathbb{C}$  é o produto em  $\mathbb{R}$ .

O produto  $z \cdot w$  é obtido pela aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, como ocorre no conjunto dos números reais, seguida da substituição de  $i^2$  por  $-1$ . Desta maneira, por construção, o produto de números complexos é comutativo. Isto é:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac + bci + adi - bd &= (ac - bd) + (ad + bc)i . \end{aligned}$$

Por exemplo,

$$6(7 + 3i) = 42 + 18i ;$$

$$(1 + i) \cdot (3 + 2i) = 3 + 3i + 2i + 2i^2 = 1 + 5i .$$

As operações em  $\mathbb{C}$  permitem a adição de um número complexo e um número real, e a multiplicação de um número complexo por um

número real. De fato, se  $z = a + bi$  e  $\lambda = \lambda + 0i \in \mathbb{R}$ , obtemos

$$\lambda + z = (\lambda + 0i) + (a + bi) = (\lambda + a) + (0 + b)i = (\lambda + a) + bi ;$$

$$\lambda z = (\lambda + 0i) \cdot (a + bi) = (\lambda a - 0 \cdot b) + (0 \cdot a + \lambda b) = \lambda a + \lambda bi .$$

Queremos agora definir o quociente de dois números complexos. Primeiramente, vamos mostrar que se  $z = a + bi$  é um número complexo não nulo então existe um número complexo  $\frac{1}{z}$  (inverso multiplicativo) tal que  $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ . Vamos determinar  $\frac{1}{z}$  na forma  $c + di$ .

Para melhor visualizar o conjunto dos números complexos, fazemos a identificação de  $\mathbb{C}$  com o plano  $\mathbb{R}^2$ . Isto é, a cada número complexo  $z = a + bi$  associamos o ponto  $P(a, b) = (a, b)$  do plano cartesiano cujas coordenadas são  $a$  e  $b$ . Também podemos associar com o *vetor* (segmento orientado) saindo da origem  $O$  e extremidade  $(a, b)$ , isto é, o complexo  $z$  é representado pelo vetor  $\overrightarrow{OP}$ .

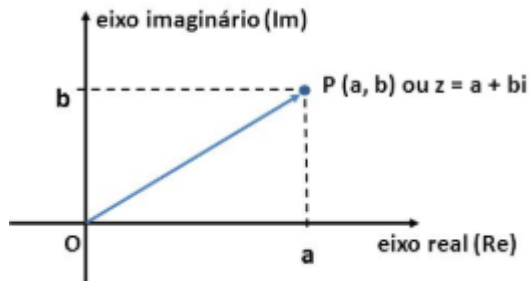


Figura 1 – Número complexo no Plano Cartesiano

Definimos o *conjugado* de um número complexo  $z = a + bi$  como o número complexo  $\bar{z} = a - bi$ . Geometricamente, o conjugado  $\bar{z}$  de  $z$  é representado pelo simétrico de  $z$  relativamente ao eixo  $Ox$ .

Observe que  $\overline{\bar{z}} = \overline{a - bi} = a - (-bi) = a + bi = z$ . Temos também a seguinte propriedade:  $z = \bar{z}$  se e somente se  $z$  é um número real. De fato, se  $z \in \mathbb{R}$ , então

$$z = a = a + 0i \Rightarrow \bar{z} = \overline{a + 0i} = a - 0i = a = z .$$

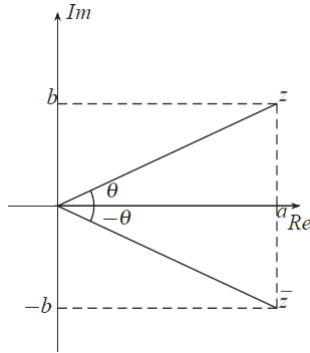


Figura 2 – Conjugado de um número complexo

Por outro lado, se  $z = \bar{z}$ , então

$$a + bi - (a - bi) = 0 \Rightarrow 2bi = 0 \Rightarrow b = 0 .$$

Dado um número  $z = a + bi$ , chama-se *módulo* de  $z$  o número real não negativo  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Pelo Teorema de Pitágoras, geometricamente  $|z|$  representa a distância de  $O$  a  $z$ , isto é, o módulo do vetor  $\overrightarrow{OP}$

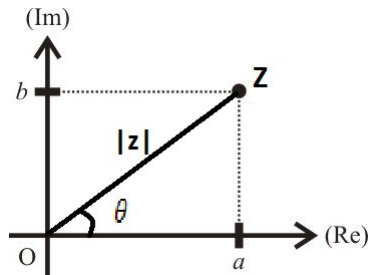


Figura 3 – Módulo de um número complexo

Temos que

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 ,$$

isto é, o produto de um complexo  $z$  pelo seu conjugado é igual ao quadrado do módulo de  $z$ , que é um número real. Agora, multiplicando

ambos os lados da igualdade acima pelo número real  $\frac{1}{|z|^2}$ , obtemos:

$$z\bar{z} \cdot \frac{1}{|z|^2} = |z|^2 \cdot \frac{1}{|z|^2} = 1.$$

Pela comutatividade do produto temos que se  $z \neq 0$ ,

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \cdot z = 1.$$

Portanto o número complexo  $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$  é o *inverso multiplicativo* de  $z$ , que

denotamos  $\frac{1}{z}$  ou  $z^{-1}$ . Observe que, como consequência, temos

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}.$$

Podemos escrever

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Por exemplo, se  $z = 1 + 2i$ , então

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i) \cdot (1-2i)} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Da mesma maneira que para número reais, dados dois complexos  $z$  e  $w \neq 0$ , definimos o *quociente*  $\frac{z}{w}$  por

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = z \cdot \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}.$$

Na prática, efetua-se a divisão multiplicando ambos os membros pelo conjugado do denominador. Por exemplo, se  $z = 2 + 4i$  e  $w = 1 + 3i$  teremos

$$\frac{z}{w} = \frac{2+4i}{1+3i} = \frac{(2+4i) \cdot (1-3i)}{(1+3i) \cdot (1-3i)} = \frac{2-6i+4i+12}{1+9} = \frac{14-2i}{10} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i.$$

## 2.2 FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR

Considere um número complexo  $z = x + iy \neq 0$ . Sejam  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$  o ângulo que o vetor correspondente a  $z$  forma com o eixo real positivo no sentido anti-horário. Da trigonometria, sabemos que  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \operatorname{sen} \theta$ ; podemos portanto escrever

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \operatorname{sen} \theta = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) .$$

A representação  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  é chamada a *forma trigonométrica* ou *polar* de  $z$ .

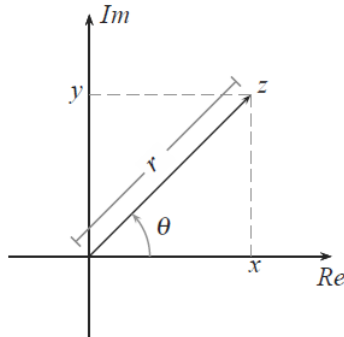


Figura 4 – Representação Polar

Como as funções cosseno e seno têm período  $2\pi$ , ao substituir  $\theta$  na expressão acima por  $\theta + 2k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ , obtemos o mesmo número  $z$ . Em muitos casos é conveniente usar a seguinte expressão mais geral:

$$z = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)) .$$

Os valores  $\theta + 2k\pi$  são os *argumentos* de  $z$ , e  $\theta$  é o *argumento principal*.

Por exemplo, se  $z = -5 + 5i$  temos que

$$|z| = 5\sqrt{2} ; \theta = \frac{3\pi}{4} .$$

Obtemos a forma polar

$$z = 5\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4))$$

ou, de maneira mais geral,

$$z = 5\sqrt{2}(\cos(3\pi/4 + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(3\pi/4 + 2k\pi)) .$$

### 2.3 POTÊNCIAS DE UM NÚMERO COMPLEXO

A forma polar dos complexos permite obter uma interpretação geométrica do produto de números complexos. Considerando  $\theta_1$  e  $\theta_2$  no intervalo  $[0, 2\pi)$ , sejam  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ . O produto será dado por

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \\ &\quad - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \\ &\quad + i(\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2)) . \end{aligned}$$

Por meio da trigonometria sabemos que

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2$$

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 .$$

Substituindo esses resultados no produto acima obtemos

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)) .$$

Portanto, para multiplicarmos números complexos na forma trigonométrica, é suficiente que multipliquemos seus módulos e adicionemos seus argumentos. Geometricamente, a multiplicação dos módulos representa uma dilatação ou contração, e a soma dos argumentos representa uma rotação. Isto é, o produto  $z_1 \cdot z_2$  provoca uma dilatação ou contração de  $|z_1|$  pelo fator  $|z_2|$ , e uma rotação de ângulo  $\theta_2$  a partir de  $z_1$ .

Por exemplo, sejam  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = -1 + i$ . Vamos escrevê-los na forma polar:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)) \\ z_2 &= \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4)) . \end{aligned}$$

Efetuando o produto, obtemos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \left( \cos(\pi/4 + 3\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4 + 3\pi/4) \right) \\ &= 2 \left( \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi \right) = -2 \end{aligned}$$

Com raciocínio análogo à multiplicação, é fácil verificar o resultado da divisão entre dois números complexos na forma polar, a saber:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left( \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) \right) .$$

Uma consequência imediata da interpretação geométrica do produto de números complexos é a seguinte expressão, conhecida como *Fórmula de De Moivre*:

$$z^n = |z|^n \left( \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) \right)$$

em que  $n \in \mathbb{N}$ . Geometricamente, a equação acima significa que multiplicar  $z$  por si próprio  $n$  vezes equivale dilatar ou contrair seu módulo por um fator de  $|z|^n$  e a dar-lhe  $n$  rotações de ângulo  $\theta$  sucessivas.

A fórmula de De Moivre nos permitirá calcular raízes de números complexos não nulos. Seja  $w \neq 0$  um número complexo e  $n$  um número natural. Queremos encontrar as raízes  $n$ -ésimas de  $w$ , isto é, encontrar as soluções da equação  $z^n = w$ . Escrevemos

$$w = |w|(\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)) ; \quad z = |z|(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) .$$

Então, usando a fórmula de De Moivre,  $z^n = w$  significa que

$$|z|^n = |w| \quad \text{e} \quad \cos(n\theta) = \cos(\varphi) ; \quad \operatorname{sen}(n\theta) = \operatorname{sen}(\varphi) .$$

Da primeira igualdade, obtemos  $|z| = \sqrt[n]{|w|}$ . Da trigonometria, sabemos que existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que

$$n\theta - \varphi = 2k\pi \Rightarrow n\theta = \varphi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} .$$

Vejam quantas soluções distintas é possível obter. Escreva  $k = nq + r$  onde  $q, r \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq r < n$ . Então

$$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2(nq + r)\pi}{n} = \frac{2nq\pi}{n} + \frac{2r\pi}{n} = 2q\pi + \frac{2r\pi}{n} .$$



Assim

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2r\pi}{n} + 2q\pi\right) = \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2r\pi}{n}\right),$$

em que  $r = 0, 1, \dots, n-1$ . Assim, para cada  $r$  obtemos

$$\theta_r = \frac{\varphi}{n} + \frac{2r\pi}{n}.$$

Portanto existem  $n$  soluções distintas, ou seja,  $n$  raízes  $n$ -ésimas de  $w$ :

$$z_r = \sqrt[n]{|w|}(\cos \theta_r + i \operatorname{sen} \theta_r) \quad \text{em que } r = 0, 1, \dots, n-1.$$

A seguir, utilizaremos este procedimento para calcular as raízes da unidade, isto é, soluções da equação  $z^n = 1$  para  $n = 3, 4$  e  $6$ . Temos que  $1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$ , logo  $\phi = 0$ .

No caso  $n = 3$ , temos  $\theta_r = \frac{2r\pi}{3}$  onde  $r = 0, 1$  e  $2$ . Obtemos assim:

$$\theta_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 1;$$

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\theta_2 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Os pontos  $z_0, z_1$  e  $z_2$  marcam em  $\mathbb{C}$  os vértices de um triângulo equilátero, como mostra a Figura 5.

Para  $n = 4$ , temos  $\theta_r = \frac{2r\pi}{4} = \frac{r\pi}{2}$  onde  $r = 0, 1, 2$  e  $3$ . Obtemos:

$$\theta_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 1;$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i;$$

$$\theta_2 = \pi \Rightarrow z_2 = \cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi) = -1;$$

$$\theta_3 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

Os pontos  $z_0, z_1, z_2$  e  $z_3$  marcam em  $\mathbb{C}$  os vértices de um quadrado, como mostra a Figura 6.

Finalmente, para  $n = 6$ , temos  $\theta_r = \frac{2r\pi}{6} = \frac{r\pi}{3}$  onde  $r = 0, 1, 2, 3, 4$

e 5. Obtemos:

$$\theta_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 1 ;$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ;$$

$$\theta_2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ;$$

$$\theta_3 = \pi \Rightarrow z_3 = \cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi) = -1 ;$$

$$\theta_4 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow z_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i ;$$

$$\theta_5 = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow z_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i .$$

Os pontos  $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4$  e  $z_5$  marcam em  $\mathbb{C}$  os vértices de um hexágono regular, como mostra a Figura 7.

Mais geralmente, as raízes  $n$ -ésimas da unidade marcam os vértices de um polígono regular de  $n$  lados. Como um destes vértices é sempre  $z_0 = 1$ , fazemos rotações de ângulo  $\frac{2\pi}{n}$  partindo de  $z_0$  e assim obtemos as demais raízes.

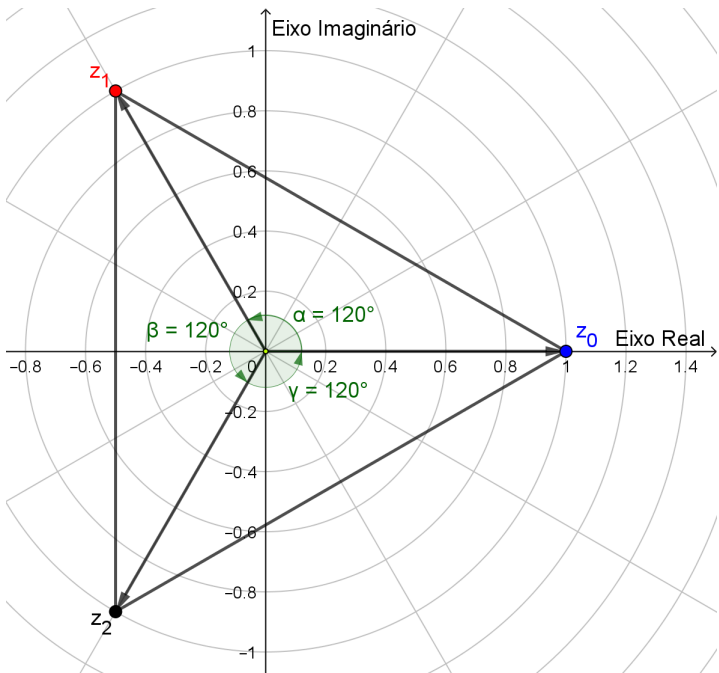


Figura 5 – Raízes cúbicas da unidade

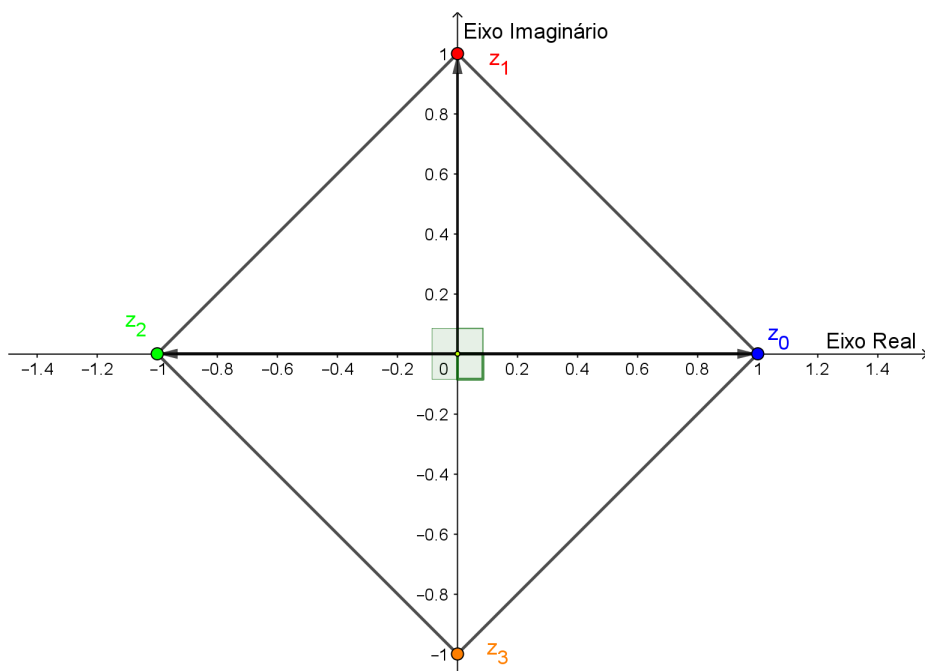


Figura 6 – Raízes da unidade de ordem 4

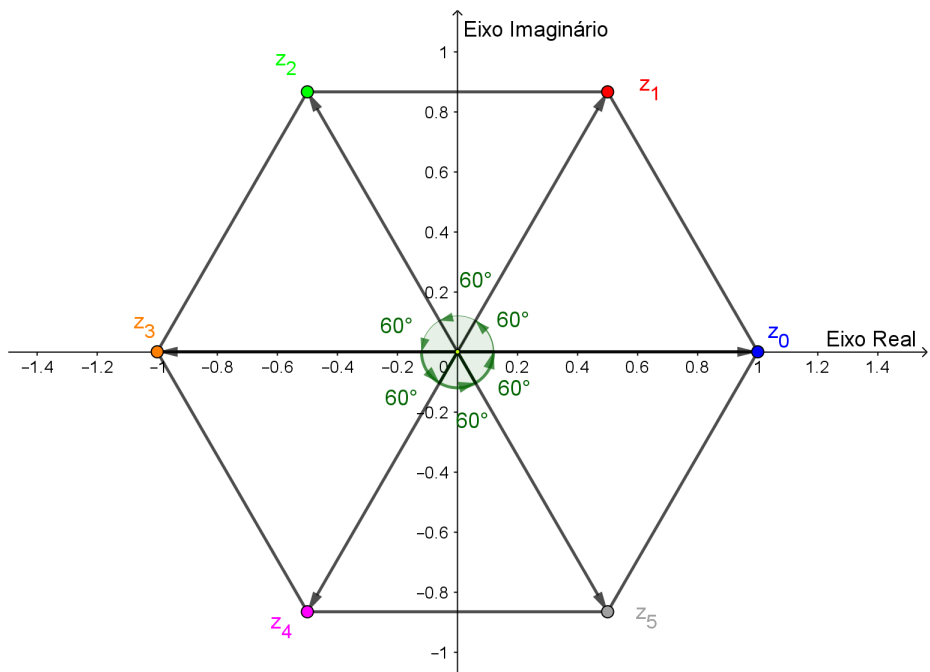


Figura 7 – Raízes da unidade de ordem 6



### 3 A FUNÇÃO EXPONENCIAL COMPLEXA

Nosso objetivo é, dado  $z$  um número complexo, definir a função exponencial complexa  $e^z$ . Para isto, é natural começarmos pela função exponencial real  $e^x$  e tentar generalizá-la para uma variável complexa. Neste texto daremos apenas a motivação para a definição de  $e^z$ ; mais detalhes podem ser encontrados em (SPIVAK, 1994).

As Séries de Taylor das funções reais  $\sin x$ ,  $\cos x$  e  $e^x$  são:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots ;$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots ;$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

Estas séries convergem para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Vamos ver o que ocorre quando substituimos  $x$  por  $iy$  na expressão de  $e^x$ . Obtemos:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots + \frac{(iy)^n}{n!} + \dots \\ &= 1 + iy + \frac{i^2 y^2}{2!} + \frac{i^3 y^3}{3!} + \frac{i^4 y^4}{4!} + \frac{i^5 y^5}{5!} + \dots + \frac{i^n y^n}{n!} + \dots . \end{aligned}$$

Agora, observe que se  $k$  é um inteiro positivo, então:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 = i^4 = i^8 = \dots = i^{4k} ; \\ i^1 &= i = i^5 = i^9 = \dots = i^{4k+1} ; \\ i^2 &= -1 = i^6 = i^{10} = \dots = i^{4k+2} ; \\ i^3 &= -i = i^7 = i^{11} = \dots = i^{4k+3} . \end{aligned}$$

Desta maneira,

$$\text{se } n = 4k = 2 \cdot 2k = 2m, \text{ então } i^n = 1 ;$$

$$\text{se } n = 4k + 2 = 2 \cdot (2k + 1) = 2m, \text{ então } i^n = -1 ;$$

$$\text{se } n = 4k + 1 = 2 \cdot 2k + 1 = 2m + 1, \text{ então } i^n = i ;$$

se  $n = 4k + 3 = 2 \cdot (2k + 1) + 1 = 2m + 1$ , então  $i^n = -i$ .

Portanto, a parte real da soma acima pode ser escrita da forma

$$1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} = \cos y ,$$

e a parte imaginária da forma

$$y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} = \operatorname{sen} y .$$

Desta maneira

$$e^{iy} = \left( 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots \right) + i \left( y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \right) ,$$

isto é,

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y .} \quad (3.1)$$

A equação 3.1 é também conhecida como *Fórmula de Euler*. Se fizermos  $y = \pi$ , obtemos

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 ,$$

identidade conhecida como *Identidade de Euler*. Observe que, usando a Fórmula de Euler, podemos reescrever a forma polar de um número complexo:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r e^{i\theta} .$$

### 3.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Seja  $z$  um número complexo. Na seção anterior, definimos  $e^z$  para um número da forma  $z = iy$  (imaginário puro). Para um número complexo  $z = x + iy$ , definimos

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) .$$

A função  $f(z) = e^z$  é chamada *função exponencial complexa*.

Se tomarmos  $z$  como número real,  $z = x + 0i$ , obtemos:

$$e^z = e^{x+0i} = e^x (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x (1 + 0i) = e^x .$$



Deste modo, a função exponencial complexa restrita ao conjunto dos números reais é a própria função exponencial real. Porém, ao contrário da função exponencial real, que é injetiva, a função  $e^z$  é periódica, com período  $2\pi i$ :

$$e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i \operatorname{sen}(y+2\pi)) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z .$$

Temos que

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)| = |e^x| \sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} = e^x .$$

Observamos assim que, como  $e^x > 0$  para todo  $x$  real,  $e^z \neq 0$ .

Vejamos as propriedades da função exponencial complexa. Sejam  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ , e

$$e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) ,$$

$$e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) .$$

I. PRODUTO:  $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$  para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

De fato,

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 \cos y_2 + i \cos y_1 \operatorname{sen} y_2 \\ &\quad - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 + i \operatorname{sen} y_1 \cos y_2) \\ &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 \\ &\quad + i(\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos(y_1+y_2) + i \operatorname{sen}(y_1+y_2)) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

e portanto

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2} (\cos(y_1+y_2) + i \operatorname{sen}(y_1+y_2)) .$$

Comparando as igualdades acima chegamos ao resultado. Aplicando esta propriedade repetidamente encontramos que

$$(e^z)^n = e^{nz} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} .$$

II. QUOCIENTE:  $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

De fato,

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2)} \\
 &= \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2)} \cdot \frac{\cos y_2 - i \operatorname{sen} y_2}{\cos y_2 - i \operatorname{sen} y_2} \\
 &= \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)(\cos y_2 - i \operatorname{sen} y_2)}{e^{x_2}(\cos^2 y_2 + \operatorname{sen}^2 y_2)} \\
 &= e^{x_1 - x_2}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)(\cos(-y_2) + i \operatorname{sen}(-y_2)) \\
 &= e^{x_1 - x_2}(\cos(y_1 - y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 - y_2)) \\
 &= e^{z_1 - z_2} .
 \end{aligned}$$

Em particular,

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z} .$$

### 3.2 VISUALIZANDO GEOMETRICAMENTE

Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa,  $f(z) = w$ . As variáveis  $z$  e  $w$  são complexas e necessitam de duas dimensões reais cada uma para serem representadas na forma cartesiana, isto é, precisaríamos de uma forma de representação que suportasse quatro dimensões reais. Como somos limitados a perceber até três dimensões reais, fica impossível a utilização das mesmas ideias que usamos no estudo de funções reais de até duas variáveis. Portanto, não é possível desenhar o gráfico de  $f(z)$ . O que podemos fazer é uma visualização como aplicação de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

É o que vamos fazer com a função exponencial complexa  $f(z) = e^z = e^{x+iy}$ . Vamos primeiramente fixar  $x$ .

Fixe  $x = 1$ . O conjunto  $L_1 = \{z = 1 + iy\}$ , com  $y$  variando entre os reais, é uma reta paralela ao eixo imaginário. Calculando a função exponencial, obtemos

$$z = 1 + iy \Rightarrow e^z = e^{1+iy} = e^1 e^{iy} = e(\cos y + i \operatorname{sen} y) .$$

Como consequência da Propriedade VI, temos que  $|e^{1+iy}| = e$  para todo  $y$ . Desta forma, a imagem de um ponto em  $L_1$  estará contida na circunferência  $|w| = e$ .

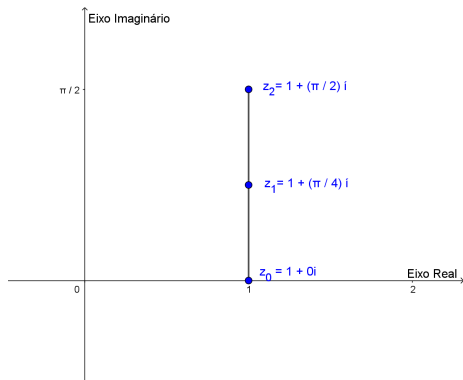


Figura 8 –  $L_1$ ,  $y \in [0, \pi/2]$

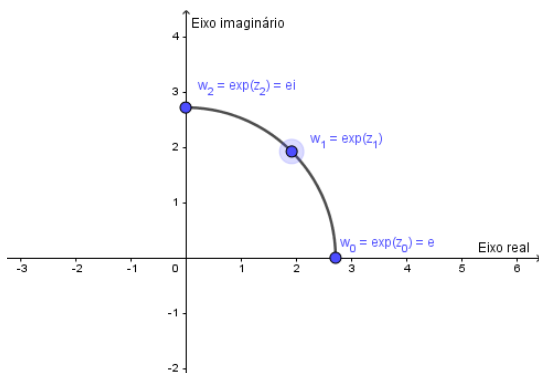


Figura 9 – Imagem de  $L_1$ ,  $y \in [0, \pi/2]$

Por exemplo, se  $y = 0$ , temos  $z = 1$  e  $e^z = e$ ; se  $y = \frac{\pi}{4}$ ,  $z = 1 + \frac{\pi}{4}i$  e  $e^z = e(\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)) = e(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ ; e se  $y = \frac{\pi}{2}$ ,  $z = 1 + \frac{\pi}{2}i$  e  $e^z = e(\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)) = ei$ . Observe que fazendo  $y$  variar no intervalo  $[0, \pi/2]$  percorremos um quarto da circunferência, como mostram as figuras 8 e 9.

Fazendo agora  $y \in [\pi/2, 2\pi]$ , completamos a circunferência. Por exemplo, se  $y = \pi$ , temos  $z = 1 + \pi i$  e  $e^z = e(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -e$ ; se  $y = \frac{3\pi}{2}$ ,  $z = 1 + \frac{3\pi}{2}i$  e  $e^z = e(\cos(3\pi/2) + i \operatorname{sen}(3\pi/2)) = -ei$ ; e se  $y = 2\pi$ ,  $z = 1 + 2\pi i$  e  $e^z = e(\cos(2\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi)) = e$ . Como era esperado,  $e^{1+2\pi i} = e^1 = e$ .

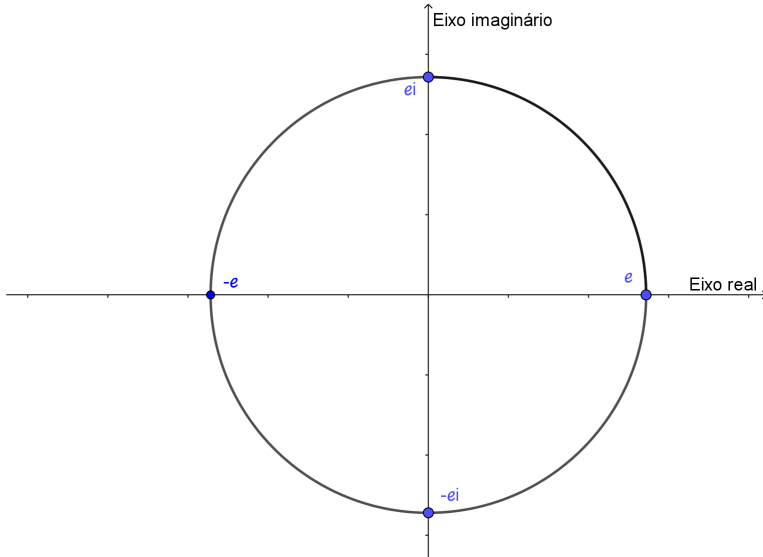


Figura 10 – Imagem  $L_1 = \{z = 1 + iy\}$  pela função  $e^z$ ,  $y \in [0, 2\pi]$

Todo o cálculo acima fizemos ao fixar  $x = 1$  e como consequência obtivemos uma circunferência centrada na origem de raio  $e$ . Para outros valores fixos de  $x$  serão retornadas circunferências centradas na origem raio  $e^x$ . Por exemplo, para  $x = 0$ , a imagem de  $L_2 = \{z = iy\}$  será a circunferência  $|w| = 1$ ; para  $x = -1$ , a imagem de  $L_3 = \{z = -1 + iy\}$  será a circunferência  $|w| = \frac{1}{e}$ .

Nas figuras 11 e 12 temos a imagem de  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  por  $e^z$  com  $y \in [0, \pi/2]$  e nas figuras 13 e 14 com  $y \in [0, 2\pi]$ .

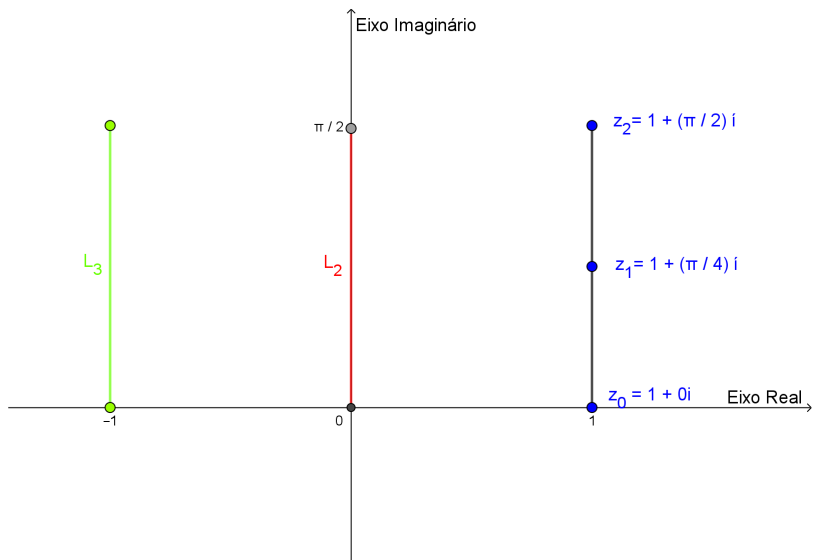


Figura 11 –  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  com  $y \in [0, \pi/2]$

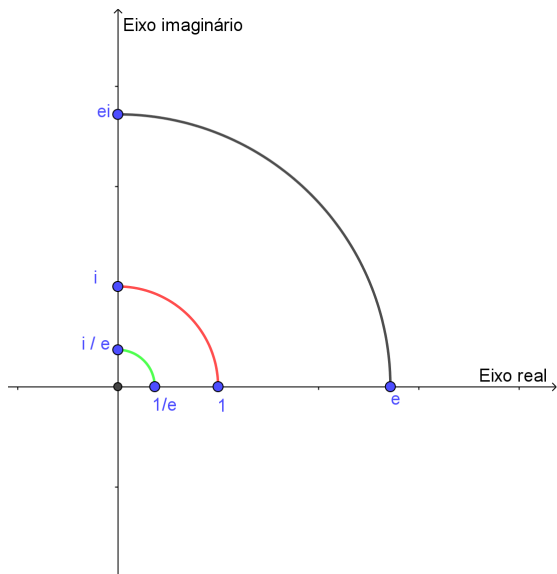


Figura 12 – Imagem por  $e^z$

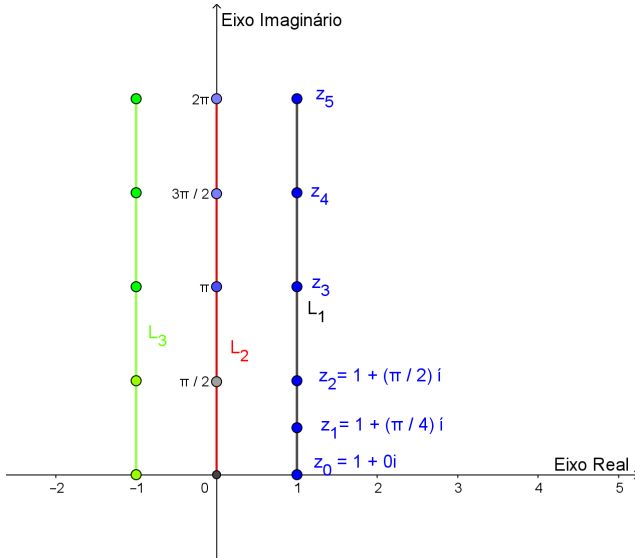


Figura 13 –  $L_1, L_2$  e  $L_3$  com  $y \in [0, 2\pi]$

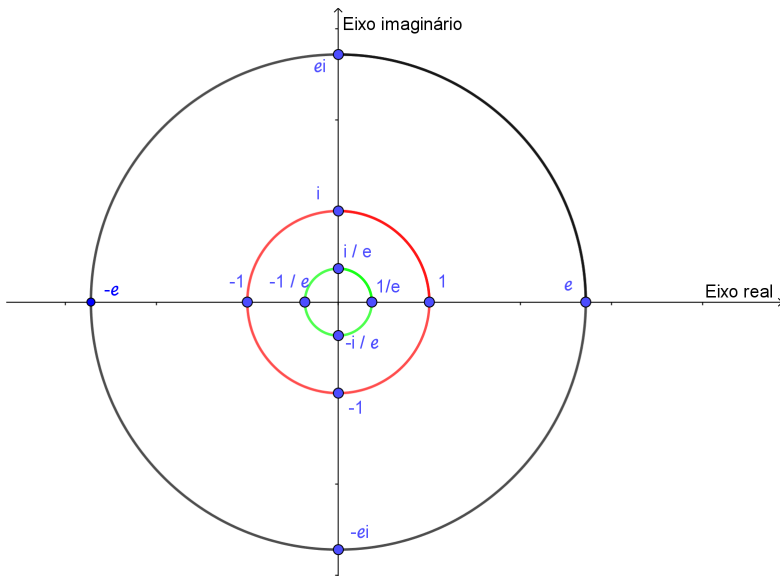


Figura 14 – Imagem por  $e^z$

Fixemos agora  $y$ . Nesse caso, o domínio será formado por linhas/segmentos de reta horizontais, paralelas ao eixo real. Se  $y = y_0$  fixo e consideramos a reta  $L = \{z = x + y_0 i\}$ , temos que

$$e^z = e^{x+y_0 i} = e^x (\cos y_0 + i \operatorname{sen} y_0) .$$

Isto é, todos os pontos da imagem de  $L$  tem o mesmo argumento  $y_0$ , variando apenas o módulo. Obtemos então que a imagem de  $L$  é uma semi-reta partindo da origem com inclinação igual a  $\tan(y_0)$ . Observe que a origem não está em contida na imagem de nenhuma reta  $L$ , já que  $e^z \neq 0$ .

Nas figuras 15 e 16 vemos alguns exemplos: fixamos  $y = 0$ ,  $y = \frac{\pi}{4}$  e  $y = \frac{\pi}{2}$ . Considere  $L_4 = \{z = x\}$ ,  $L_5 = \{z = x + \frac{\pi}{4} i\}$  e  $L_6 = \{z = x + \frac{\pi}{2} i\}$ .

A imagem de  $L_4$  é o próprio semi-eixo horizontal positivo. À medida que  $x \rightarrow \infty$ ,  $e^z = e^x \rightarrow \infty$ . Por outro lado, se  $x \rightarrow -\infty$ ,  $e^z = e^x \rightarrow 0$  (note que o semi-eixo real negativo é a imagem da reta  $y = \pi$ ). A imagem de  $L_5$  é a semi-reta com inclinação 1, e a imagem de  $L_6$  é o semi-eixo vertical positivo (o semi-eixo vertical negativo é a imagem da reta  $y = \frac{3\pi}{2}$ ).

Para referência, em cada reta consideramos três pontos tomando  $x = 1$ ,  $x = 0$  e  $x = -1$ .

- Em  $L_4$ : se  $z = 1$ ,  $e^z = e$ ; se  $z = 0$ ,  $e^z = 1$  e se  $z = -1$ ,  $e^z = \frac{1}{e}$ .
- Em  $L_5$ : se  $z = 1 + \frac{\pi}{4} i$ ,  $e^z = e^1 (\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)) = e(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i)$ ;  
se  $z = \frac{\pi}{4} i$ ,  $e^z = e^0 (\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$ ;  
e se  $z = -1 + \frac{\pi}{4} i$ ,  $e^z = e^{-1} (\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)) = \frac{1}{e} (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i)$ .
- Em  $L_6$ , se  $z = 1 + \frac{\pi}{2} i$ ,  $e^z = e^1 (\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)) = ei$ ;  
se  $z = \frac{\pi}{2} i$ ,  $e^z = e^0 (\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)) = i$ ;  
e se  $z = -1 + \frac{\pi}{2} i$ ,  $e^z = e^{-1} (\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)) = \frac{i}{e}$ .

Considerando todos os valores de  $y$  no intervalo  $[0, \pi/2]$  obtemos um setor de coroa circular, como mostra a figura 17.

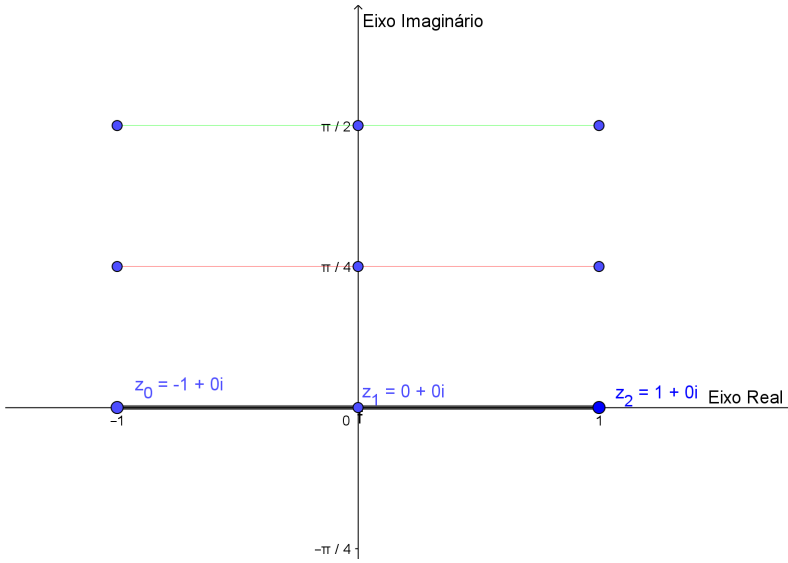


Figura 15 –  $L_4$ ,  $L_5$  e  $L_6$  com  $x \in [-1, 1]$

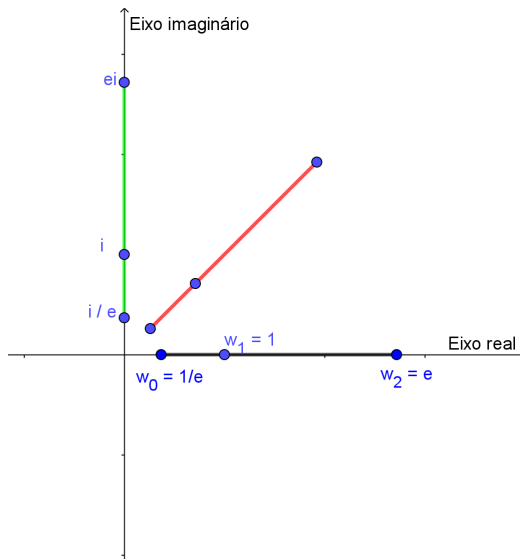


Figura 16 – Imagem por  $e^z$



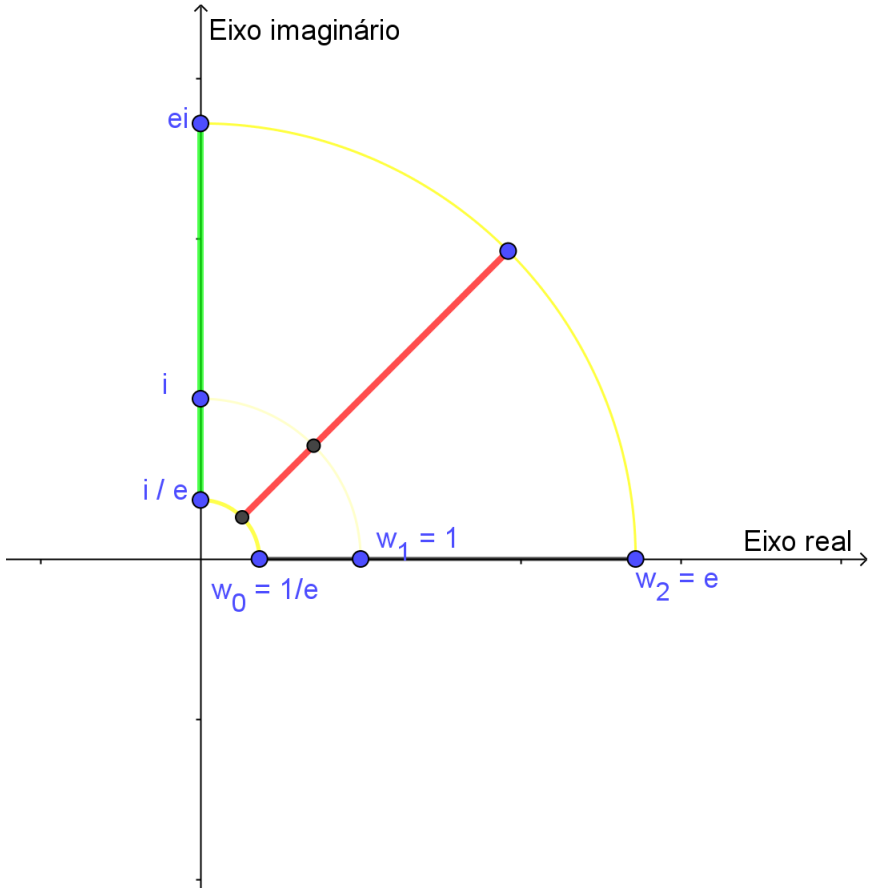


Figura 17 – Setor de coroa circular

Vejam os mais alguns exemplos. Tome o retângulo  $R_1 = [1, 2] \times [\pi/4, \pi/2]$ . Então a imagem de  $R$  por  $e^z$  é o setor de coroa circular  $S_1 = \{w \in \mathbb{C}; 1 \leq |w| \leq 2, \pi/4 \leq \arg(w) \leq \pi/2\}$ , como mostram as figuras 18 e 19.

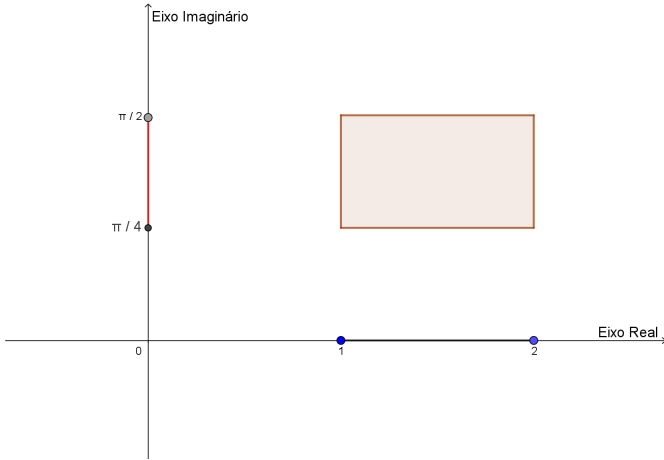


Figura 18 – Retângulo  $R_1 = [1, 2] \times [\pi/4, \pi/2]$

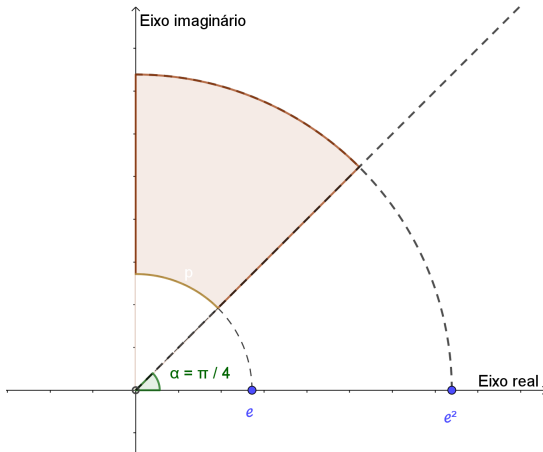


Figura 19 – Setor de coroa circular  $S_1$ , imagem de  $R_1$  por  $e^z$

Agora tome  $R_2 = [1, 2] \times [0, 2\pi]$ . A imagem de  $R_2$  por  $e^z$  é a coroa circular  $S_2 = \{w \in \mathbb{C}; 1 \leq |w| \leq 2, 0 \leq \arg(w) \leq 2\pi\}$ , como mostram as figuras 20 e 21:

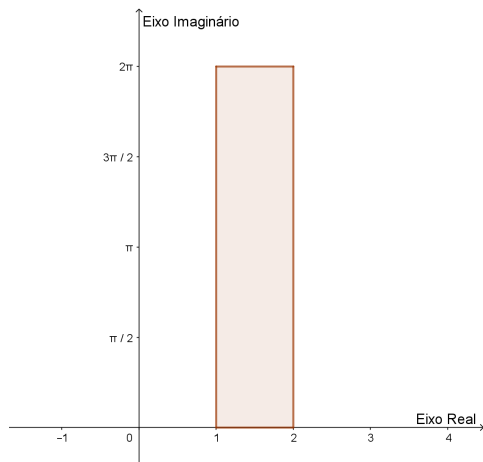


Figura 20 – Retângulo  $R_2 = [1, 2] \times [0, 2\pi]$

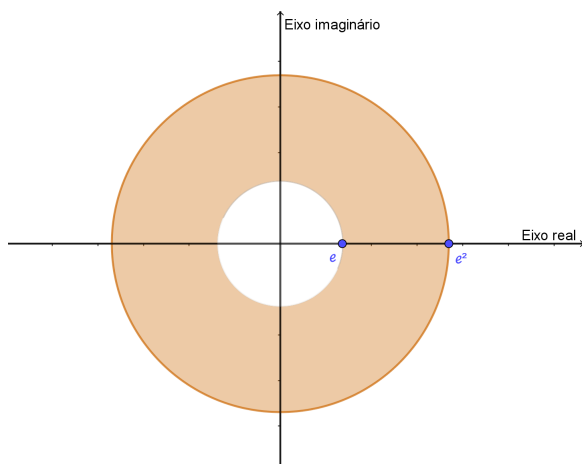


Figura 21 – Coroa circular  $S_2$ , imagem de  $R_2$  por  $e^z$

### 3.3 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Nesta seção, falaremos brevemente sobre como utilizar a Fórmula de Euler  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$  para deduzir, de maneira simples, identidades trigonométricas das funções seno e cosseno. Primeiramente, observe que

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta .$$

Então

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \Rightarrow \boxed{\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} ;$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} .$$

Vamos deduzir uma identidade para  $\cos^2 \theta$ . Temos:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} \\ &= \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} . \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{-4} \\ &= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{-4} + \frac{1}{2} = -\frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} . \end{aligned}$$

As identidades acima já são conhecidas na trigonometria. Vejamos para  $\cos^3 \theta$  e  $\operatorname{sen}^3 \theta$ :

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} \\ &= \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} = \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} + \frac{3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{8} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} \right) + \frac{3}{4} \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) = \frac{\cos 3\theta}{4} + \frac{3 \cos \theta}{4} .$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^3 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} \\ &= \frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} = \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} + \frac{3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{8i} \\ &= \frac{-1}{4} \left( \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} \right) + \frac{3}{4} \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) = \frac{-\operatorname{sen} 3\theta}{4} + \frac{3 \operatorname{sen} \theta}{4} . \end{aligned}$$

Agora, para  $\cos^4 \theta$ :

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{e^{4i\theta} + 4e^{3i\theta}e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 4e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} \\ &= \frac{e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} \\ &= \frac{\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3}{8} = \frac{\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

E, ainda, para  $\cos^5 \theta$ :

$$\begin{aligned} \cos^5 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^5 = \\ &= \frac{e^{5i\theta} + 5e^{4i\theta}e^{-i\theta} + 10e^{3i\theta}e^{-2i\theta} + 10e^{2i\theta}e^{-3i\theta} + 5e^{i\theta}e^{-4i\theta} + e^{-5i\theta}}{32} \\ &= \frac{e^{5i\theta} + 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} + 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} + e^{-5i\theta}}{32} \\ &= \frac{\cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta}{16} . \end{aligned}$$

Estes são apenas alguns exemplos. Utilizando as igualdades  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  e  $\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$  e a expansão do binômio de Newton, podemos encontrar identidades trigonométricas para quaisquer potências de seno e cosseno.



## 4 A FUNÇÃO LOGARITMO COMPLEXA

Para uma variável real, a função exponencial é injetiva e portanto é possível definir sua função inversa, a função logaritmo neperiano. Assim definimos

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x .$$

No caso das funções complexas, é necessário cautela pois a função exponencial é periódica de período  $2\pi i$ .

Considere um número complexo  $z \neq 0$  em sua forma polar:

$$z = x + yi = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) .$$

Como visto nos capítulos anteriores, sabemos que os argumentos de um número complexo  $z$  diferem por um múltiplo inteiro de  $2\pi$ :

$$\operatorname{arg}(z) = \theta_0 + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

em que  $\theta_0$  é tomado num intervalo determinado.

Por exemplo, o número complexo  $z = -1 - i$  possui as equivalentes formas polares:

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i} .$$

Note que  $\frac{5\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4} + 2\pi$ , ou seja, tomando  $\theta_0 = \frac{-3\pi}{4}$  e  $k = 1$ , isto equivale a medir o argumento de  $-1 - i$  partindo de  $\frac{-3\pi}{4}$  e dado um giro no sentido anti-horário (o sentido foi determinado aqui pelo sinal de  $k$ ). Por outro lado,  $\frac{-3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - 2\pi$ ; assim se tivéssemos tomado  $\theta_0 = \frac{5\pi}{4}$  e utilizado  $k = -1$ , teríamos medido o argumento de  $-1 - i$  partindo de  $\frac{5\pi}{4}$  e dado um giro no sentido horário.

Se  $z$  é um número complexo, o *conjunto logaritmo de  $z$*  é o conjunto dos números complexos  $w$  tais que  $e^w = z$ . Denotamos este conjunto

$$\log z = \ln |z| + i \operatorname{arg}(z) .$$

Por exemplo, suponha  $z = 1 + i$ . Um elemento do conjunto logaritmo é  $w_1 = \ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$ , onde aqui escolhemos o argumento  $\frac{\pi}{4}$ . De fato,

$$\begin{aligned} e^{w_1} &= e^{\ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}} = e^{\ln \sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 + i = z . \end{aligned}$$

Portanto,  $w_1 \in \log z$ . Se tivéssemos escolhido como argumento  $\frac{9\pi}{4}$ , teríamos obtido igualmente

$$w_2 = \ln \sqrt{2} + i \frac{9\pi}{4} \Rightarrow e^{w_2} = 1 + i = z ,$$

e assim  $w_2 \in \log z$ .

Desta forma  $\log z$  representa um *conjunto de valores*. Para obtermos uma *função*, somos obrigados a restringir o contradomínio em  $\mathbb{C}$  no qual o argumento possa ser determinado univocamente. Um intervalo de comprimento  $2\pi$  previamente determinado e dentro do qual faremos a escolha do argumento de  $z$ , é chamado de *ramo do logaritmo*.

Por convenção, o *ramo principal do logaritmo* é o intervalo  $-\pi < \arg(z) < \pi$ . Podemos incluir um dos extremos deste intervalo, porém neste caso a função logaritmo não será contínua.

Por exemplo, dados os números complexos com argumentos no ramo principal:

$$z_1 = 1 + i , \arg(z_1) = \pi/4 ;$$

$$z_2 = -1 - i , \arg(z_2) = -3\pi/4 ;$$

$$z_3 = 1 - \sqrt{3}i , \arg(z_3) = -\pi/3 ,$$

seus respectivos logaritmos são:

$$w_1 = \log z_1 = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} ;$$

$$w_2 = \log z_2 = \ln \sqrt{2} - i \frac{3\pi}{4} ;$$

$$w_3 = \log z_3 = \ln 2 - i \frac{\pi}{3} .$$

Na Figura 22 temos a função logaritmo dos números complexos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  representados no ramo principal.



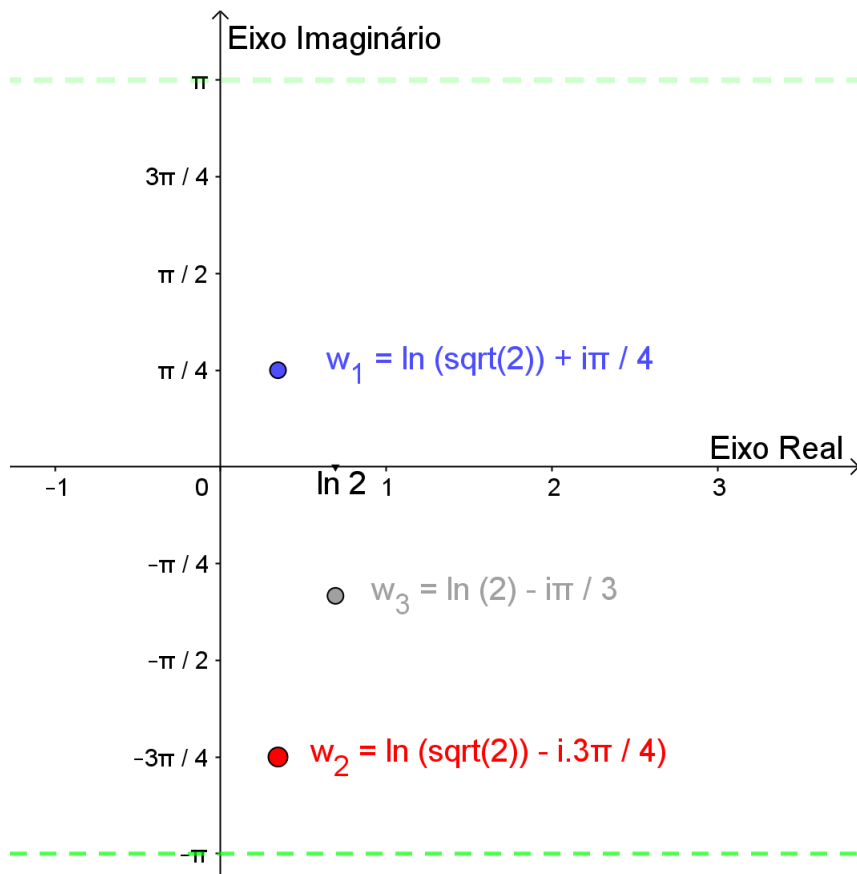


Figura 22 – Ramo principal do logaritmo

Considerando agora o ramo  $0 < \arg(z) < 2\pi$  e tomando os mesmos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  de antes, temos:

$$z_1 = 1 + i, \arg(z_1) = \pi/4;$$

$$z_2 = -1 - i, \arg(z_2) = 5\pi/4;$$

$$z_3 = 1 - \sqrt{3}i, \arg(z_3) = 5\pi/3.$$

Seus respectivos logaritmos são:

$$v_1 = \log z_1 = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4};$$

$$v_2 = \log z_2 = \ln \sqrt{2} + i \frac{5\pi}{4};$$

$$v_3 = \log z_3 = \ln 2 + i \frac{5\pi}{3}.$$

Já no ramo  $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{5\pi}{2}$ , temos:

$$z_1 = 1 + i, \arg(z_1) = 9\pi/4;$$

$$z_2 = -1 - i, \arg(z_2) = 5\pi/4;$$

$$z_3 = 1 - \sqrt{3}i, \arg(z_3) = 5\pi/3.$$

Seus respectivos logaritmos são:

$$t_1 = \log z_1 = \ln \sqrt{2} + i \frac{9\pi}{4};$$

$$t_2 = \log z_2 = \ln \sqrt{2} + i \frac{5\pi}{4};$$

$$t_3 = \log z_3 = \ln 2 + i \frac{5\pi}{3}.$$

Independentemente do ramo selecionado, o importante é que verificam-se as igualdades:

$$e^{w_1} = e^{v_1} = e^{t_1} = z_1;$$

$$e^{w_2} = e^{v_2} = e^{t_2} = z_2;$$

$$e^{w_3} = e^{v_3} = e^{t_3} = z_3.$$

Na Figura 23 exibimos que dado um número complexo qualquer (no caso  $z_1 = 1 + i$ ), quando na visualização da função logaritmo como

aplicação de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , as imagens distam nos diferentes ramos por um múltiplo inteiro de  $2\pi$ . Observe que cada ramo é delimitado por duas retas horizontais paralelas.

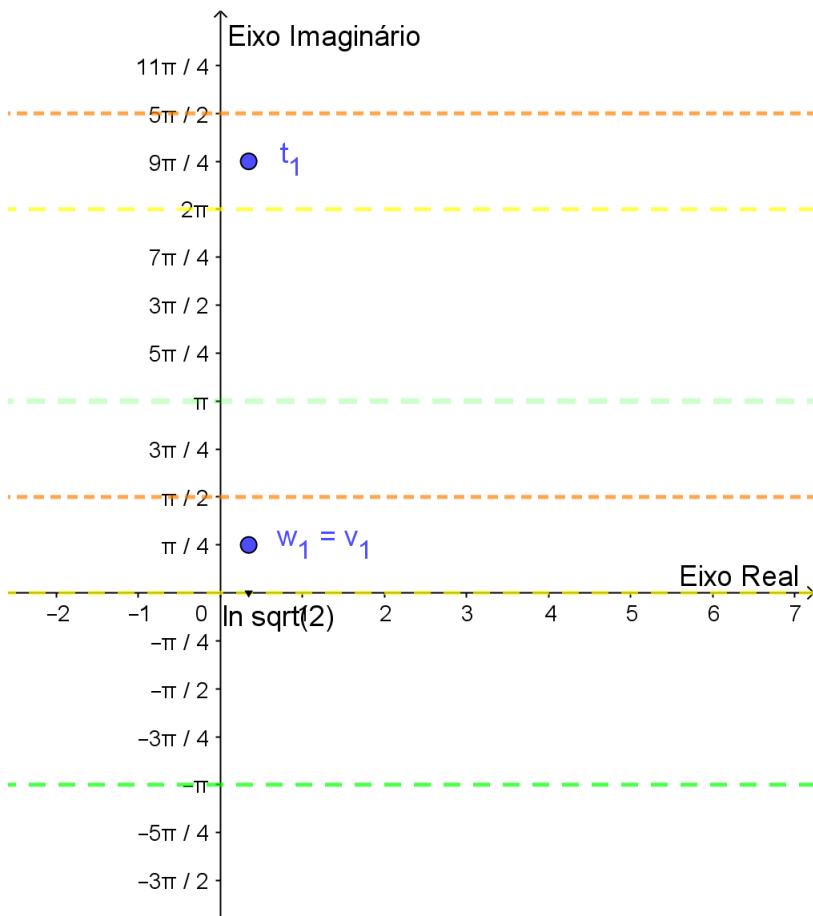


Figura 23 – Três ramos da função logaritmo



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partindo do conjunto dos números reais e introduzindo o novo número  $i$  tal que  $i^2 = -1$ , encontramos um novo conjunto numérico, o qual chamamos *números complexos*. Este conjunto possui operações semelhantes às das dos números reais, porém a introdução de  $i$  tem grandes efeitos algébricos e geométricos.

No Capítulo 2 estudamos definições e propriedades básicas dos números complexos e a representação polar. Usando a fórmula de De Moivre definimos a radiciação de números complexos e calculamos raízes da unidade.

No Capítulo 3, partimos para o estudo de algumas funções elementares de uma variável complexa. A partir das Séries de Taylor das funções reais  $e^x$ ,  $\sin x$  e  $\cos x$ , definimos a *função exponencial complexa*. A função exponencial complexa possui algumas propriedades em comum com a função exponencial real, porém possui também outras propriedades particulares que são consequência da representação polar de um número complexo. Encerramos o capítulo com representações gráficas obtidas quando se visualiza a função exponencial complexa geometricamente.

No Capítulo 4 fizemos o estudo da função logarítmica complexa. Vimos que  $\log z = \ln |z| + i \arg(z)$  representa um *conjunto de valores*, e que para obter uma função é necessário restringir o contradomínio aos chamados *ramos do logaritmo*. Apresentamos representações gráficas provenientes da escolha de diferentes ramos.

Nesta dissertação quisemos mostrar a riqueza dos números complexos, muitas vezes negligenciados no Ensino Médio e em alguns cursos de graduação. Esperamos desta forma incentivar o leitor a continuar explorando este conjunto numérico por vezes injustiçado pelo nome.



## REFERÊNCIAS

MORGADO, M. P. do Carmo e A. C. **Trigonometria e Números Complexos**. [S.l.]: SBM, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. [S.l.]: IMPA, 2012.

SPIVAK, M. **Calculus**. 3rd. ed. [S.l.]: Publish or Perish, 1994.