UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

Robson Cechinel

TEORIA DOS JOGOS E UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA DO JOGO DA VELHA

Florianópolis

2019

Robson Cechinel

TEORIA DOS JOGOS E UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA DO JOGO DA VELHA

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Leandro Batista Morgado.

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Cechinel, Robson
TEORIA DOS JOGOS E UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA DO JOGO DA VELHA / Robson Cechinel; orientador, Leandro Batista Morgado, 2019.
106 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Teoria dos Jogos. 3. Equilíbrio de Nash. 4. Forma extensiva. 5. Jogo da Velha. I. Leandro Batista Morgado. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Teoria dos Jogos e uma Aplicação em Sala de Aula do Jogo da Velha.

TEORIA DOS JOGOS E UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA DO JOGO DA VELHA

por

Robson Cechinel

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.

Profª Drª Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora

Prof. Dr. Leandro Batista Morgado
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. Leonardo Silveira Borges
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

p/

Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva (videoconferência)
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP

Florianópolis, 10 de abril de 2019.

Dedico este trabalho aos meus pais e a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Oswaldo e Otenir (*in memoriam*), que educaram-me e ensinaram-me a ter valores e ser a pessoa que sou hoje.

A minha família, sobretudo minha noiva Kellen, que soube conviver com minhas ausências semanais ao longo desses anos, que comigo compartilhou essa caminhada para titulação de mestre, e que permanentemente incentivou meus estudos.

A Deus, por dar-me saúde e condições de estudar nesses últimos anos, e que sempre acompanhou-me nas muitas viagens a Florianópolis.

Aos colegas de curso, em especial aos do Sul de Santa Catarina, que deram-me apoio e incentivo durante longas e agradáveis horas de estudos e viagens.

Aos docentes, que ajudaram-me nesta caminhada, principalmente ao orientador desta dissertação, pela disponibilidade e auxílio que demonstrou a todo momento.

A gestão da E.M.E.F. Quintino Rizzieri, que proporcionou-me a aplicação da teoria dos jogos em sala de aula no 8º ano do Ensino Fundamental.

RESUMO

Neste trabalho, destacamos a teoria dos jogos, sua construção histórica, elementos de um jogo; apresentando desde jogos simples até diversos estudos acadêmicos. Em seguida, detalhamos os jogos em sua forma extensiva, onde os jogadores realizam movimentos sequenciais, relatando ao final uma experiência de aplicação do jogo da velha em sala de aula em uma turma do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Matemática. Teoria dos jogos. Forma extensiva. Estratégias.

ABSTRACT

In this work, we highlight the game theory, its historical construction, elements of a game, ranging from simple games to various academic studies. Next, we detail the games in their extensive form, where the players make sequential moves, reporting at the end an experience of applying the game tic-tac-toe in the classroom in a class of Elementary School.

Keywords: Mathematics. Game theory. Extensive form. Strategies.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A teoria dos jogos evidencia situações de competição que envolvam um número finito de indivíduos. Esta teoria estuda decisões em situações cooperativas e não cooperativas. As situações cooperativas são aquelas em que os indivíduos podem concordar, planejando estratégias conjuntamente. As situações não cooperativas são aquelas em os indivíduos buscam um resultado que maximize seu ganho pessoal, podendo ou não concordar na adoção de estratégia mais vantajosa para todos. Nas situações não cooperativas, cada indivíduo possui algum tipo de poder onde uma decisão unilateral pode acarretar em detrimentos e reações a um ou mais indivíduos envolvidos nesta competição.

Demonstraremos neste trabalho que a teoria dos jogos não se restringe apenas a jogos no senso comum, como jogo de cartas, xadrez ou dominó; mas é aplicada em várias áreas de nossa sociedade, como administração, biologia, ciências sociais, economia, esporte e política, entre outras. Esta teoria fornece conceitos e fundamentos que se unem a outros conceitos das áreas citadas, tornando prática sua utilização.

Por exemplo, vamos aplicar a teoria dos jogos ao esporte. Considere dois jogadores de futebol, um atacante e um goleiro, em uma disputa de pênaltis. O atacante tem três escolhas: cobrar o pênalti chutando a bola no centro do gol, à esquerda ou à direita do goleiro. O goleiro também tem três escolhas: ficar no centro do gol, pular para a esquerda ou para a direita da meta. Se atacante e goleiro escolherem centro, ou ambos escolherem o mesmo lado, a chance de defesa é alta. Porém, se fizerem escolhas diferentes, a chance maior passa a ser de converter a cobrança. Esta disputa de pênaltis pode ser ilustrada pela matriz *payoff* a seguir.

		goleiro		
		esquerda	*centro*	*direita*
atacante	*esquerda*	0,07, 0,93	0,94, 0,06	0,95, 0,05
	centro	0,92, 0,08	0,04, 0,96	0,92, 0,08
	direita	0,95, 0,05	0,94, 0,06	0,07, 0,93

Tabela 1 – Matriz *payoff* da disputa de pênaltis

Neste tipo de representação, as células contêm dois valores, separados por vírgula. Tradicionalmente, o valor da esquerda refere-se ao jogador indicado na primeira coluna e o valor da direita refere-se ao jogador indicado na primeira linha. Neste caso, note que a matriz *payoff* representa a chance de cada jogador, em percentual escrito na forma de número decimal. Pode surgir a pergunta: porque quando o atacante escolhe chutar à esquerda do goleiro e este escolhe pular para a direita, a chance de converter o pênalti não é de 100%? Ou, porque quando atacante e goleiro fazem a mesma escolha, a chance de defesa não é de 100%? A resposta está na margem de erro: mesmo quando o atacante escolhe chutar para um lado e o goleiro escolhe pular para outro lado, o atacante pode errar o chute, acertando a trave ou chutando para fora, assim, o pênalti não será convertido. O mesmo pode-se afirmar quando atacante e goleiro fazem a mesma escolha. Se o atacante chutar a bola com muita força e bem no canto, o goleiro provavelmente não conseguirá defender a cobrança, ainda que escolha o mesmo canto.

Agora, ilustraremos outra situação de interesse para a teoria dos jogos. Imagine você manobrando seu carro em uma rua não movimentada. Você confunde o pedal do freio com o pedal do acelerador. Ao invés de frear, você acelera e bate no carro luxuoso à sua frente, amassando o para-choque e quebrando uma sinaleira deste veículo. Você, uma pessoa honesta, pensa em deixar um bilhete com seu número de telefone, assumindo a responsabilidade pelos danos causados. Mas, como a rua não é movimentada e ninguém mais viu, surge outro pensamento: é um carro luxuoso, e seu dono certamente tem dinheiro para arcar com o conserto; e também, por estar estacionado em uma rua não movimentada, este carro provavelmente tem um belo seguro. Para o dono do veículo luxuoso, esse conserto não pesará praticamente nada no bolso, mas, para você, custará algumas semanas de trabalho.

É uma situação em que temos dois interesses: o individual e o coletivo. Caso você opte por assumir a responsabilidade, você arcará com os custos do conserto. Se você não assumir a responsabilidade, a companhia de seguro do carro luxuoso cobre o custo do conserto, cobrando do proprietário deste veículo um valor chamado franquia. Assim, você penaliza seguradora e proprietário do veículo, que nada tiveram a ver com sua confusão de pedais. Utilizando a teoria dos jogos, você tem à sua disposição, portanto, duas estratégias.

Estes são apenas dois exemplos onde podemos ressaltar a teoria dos jogos.

No próximo capítulo, destacaremos o histórico da teoria dos jogos, seus conceitos e como são aplicados em diversas áreas. Na sequência, apresentaremos os elementos de um jogo, bem como suas possíveis resoluções. Abordaremos também estratégias dominantes e dominadas, equilíbrio de Nash, ótimo de Pareto e jogos de soma zero.

No Capítulo 3, apresentaremos com mais complexidade a forma extensiva de um jogo, exemplificando os jogos com informação perfeita e os jogos com informação imperfeita. Os temas abordados neste capítulo serão ilustrados com diversos exemplos através de árvores. Veremos o que são subjogos e o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Utilizaremos também a indução reversa para a solução de alguns casos.

Finalizando nosso trabalho, no Capítulo 4, demonstraremos a maneira que aplicamos a teoria dos jogos em sala de aula no Ensino Fundamental, com o desenvolvimento de técnicas no popular *jogo da velha*, onde, utilizando estratégias vencedoras, um jogador não pode ser derrotado.

2 ASPECTOS GERAIS DA TEORIA DOS JOGOS

Neste capítulo, destacaremos os antecedentes históricos da teoria dos jogos, seus conceitos e como são aplicados em diversas áreas de nossa sociedade. Na sequência, apresentaremos os elementos de um jogo, bem como suas possíveis resoluções. Abordaremos também estratégias dominantes e dominadas, equilíbrio de Nash, ótimo de Pareto e jogos de soma zero.

2.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

Não há uma data exata sobre sua origem, porém, encontramos indícios que a teoria dos jogos já existe há centenas de anos.

O britânico James Waldegrave, em 1713, escreveu uma carta para o matemático francês Pierre-Remond de Montmort, sobre uma versão de duas pessoas para o jogo de cartas "Le Her", fornecendo uma solução para este jogo. De Montmort, então, escreveu ao matemático suíço Nicolas Bernoulli, incluindo uma discussão sobre a solução de Waldegrave, solução esta que é um equilíbrio de estratégia mista minimax. Porém, Waldergrave não fez nenhuma extensão de seu resultado para outros jogos, expressando preocupação que a estratégia mista não estaria nas regras dos jogos de azar (THEOCHARIS, 1983). A solução de Waldegrave para o jogo de cartas "Le Her" foi redescoberta em 1934 pelo estatístico inglês Ronald Aylmer Fisher, que relatou em seu trabalho a randomização de papel em um antigo enigma do jogo de cartas (WEINTRAUB, 1992).

Mais de um século depois, em 1838, o matemático e economista francês Antoine-Augustin Cournot realizou pesquisas sobre os princípios matemáticos da teoria da riqueza, discutindo um caso especial de duopólio, onde duas empresas vendem o mesmo produto. Se juntas produzirem mais, o preço do produto será baixo; se juntas produzirem menos, o preço será alto. Cada empresa decide, independentemente, qual quantidade produzir, sem ter conhecimento da decisão da outra empresa. Cournot utilizou um conceito de solução que é uma versão restrita do equilíbrio de Nash, enunciando a Lei da Demanda: "*todas outras coisas permanecendo constantes, quanto maior o preço de um bem, menor a quantidade demandada. Isto é, a quantidade demandada é função do preço*" (VARIAN, 2006).

Já no Século XX, mais precisamente em 1913, o matemático e filósofo alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo desenvolveu uma aplicação da teoria dos conjuntos à teoria do xadrez, que ficou conhecido como Teorema de Zermelo. Este pode ser o primeiro teorema da teoria dos jogos, afirmando que o jogo de xadrez é estritamente determinado, pois é um jogo finito de informação perfeita, onde os dois jogadores movem suas peças alternadamente. Se o jogo não pode terminar empatado, então um dos dois jogadores tem uma estratégia vitoriosa (EBBINGHAUS et al., 2010).

Em 1921, o matemático e político francês Émile Borel publicou algumas notas sobre jogos estratégicos, dando a primeira formulação para uma estratégia mista com solução minimax para jogos de duas pessoas, com três ou cinco estratégias possíveis (BOREL, 1921). Sete anos depois, o matemático húngaro John von Neumann, em seu artigo "A teoria dos jogos de tabuleiro" (Zur Theorie der Gesellschaftsspiele), provou o Teorema do Minimax. Von Neumann afirmou que cada jogo de soma zero para duas pessoas, com várias estratégias puras para cada jogador, é determinado. Portanto, quando são admitidas estratégias mistas, essa variedade de jogos tem exatamente um vetor de pagamento individualmente racional (VON NEUMANN, 1928). Sua prova envolveu o uso de topologia e de cálculo funcional. Este artigo de Von Neumann introduziu a forma extensiva de um jogo, que abordaremos com mais ênfase durante este trabalho.

Anos depois, em 1944, foi publicado o livro "Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico" (The Theory of Games and Economic Behavior), escrito por John von Neumann e pelo economista austríaco Oskar Morgenstern. Os autores apresentam uma abordagem da teoria de jogos voltada para aplicações na área econômica (VON NEUMANN; MORGENSTERN, 1944). Os modelos matemáticos desenvolvidos por Von Neumann trouxeram métodos importantes para o desenvolvimento da teoria econômica.

O matemático norte-americano John Forbes Nash inicia em 1950 os estudos da teoria dos jogos, verificando a necessidade de expansão das pesquisas já realizadas. Na Universidade de Princeton, teve publicado seu artigo "Pontos de equilíbrio em jogos com n-jogadores" (Equilibrium points in n-person games) nos "Anais da Academia Nacional de Ciências" (Proceedings of the National Academy of Sciences). Este artigo contém um novo conceito de solução para jogos de não soma zero, chamado ponto de equilíbrio, que ficou conhecido como Equilíbrio de Nash, onde, em um jogo, nenhum dos jogadores tem a ganhar mudando sua estratégia unilateralmente (NASH, 1950).

Nash teve sua biografia retratada no filme "Uma Mente Brilhante" (A Beautiful Mind, 2001) e foi o vencedor do Prêmio Nobel de Economia no ano de 1994, em reconhecimento ao seu desenvolvimento da teoria dos jogos e suas aplicações econômicas.

2.2 ELEMENTOS DE UM JOGO

Os jogos devem possuir jogadores, que podem ser indivíduos, times, empresas e até nações. Inicialmente, devemos considerar um conjunto finito de n jogadores, denominado $J = \{1, 2, ..., n\}$.

Estabelecidas as regras de um jogo, que devem ser claras e definam os movimentos que os jogadores podem e quando podem realizar, cada jogador i terá seu conjunto finito de estratégias denominado como $E_i = \{e_{i1},\ e_{i2},\ ...,\ e_{im}\}$.

Para cada n-upla de estratégias, contendo uma estratégia de cada jogador, associamos um resultado, representado pela matriz *payoff* da Tabela 2:

		2			
		e_{21}	e_{22}	...	e_{2m}
1	e_{11}	$R(e_{11}, e_{21})$	$R(e_{11}, e_{22})$	$R(e_{11}, ...)$	$R(e_{11}, e_{2m})$
	e_{12}	$R(e_{12}, e_{21})$	$R(e_{12}, e_{22})$	$R(e_{12}, ...)$	$R(e_{12}, e_{2m})$
	...	$R(..., e_{21})$	$R(..., e_{22})$	$R(..., ...)$	$R(..., e_{2m})$
	e_{1m}	$R(e_{1m}, e_{21})$	$R(e_{1m}, e_{22})$	$R(e_{1m}, ...)$	$R(e_{1m}, e_{2m})$

Tabela 2 – Exemplo de matriz *payoff* para dois jogadores

No presente trabalho, nos limitaremos a utilizar soluções de jogos com dois jogadores.

2.3 NOTAÇÕES

Para formalizarmos nosso trabalho, apresentaremos algumas notações que utilizaremos doravante.

Jogador: um conjunto finito de n jogadores será escrito na forma $J = \{1, 2, ..., n\}$.

Estratégia: seja $i \in J$, e_i será uma estratégia escolhida pelo jogador i.

Conjunto das possíveis estratégias: sendo o jogador $i \in J$ e a estratégia $e_i \in E_i$, cada jogador i terá seu conjunto finito das possíveis estratégias $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{im}\}$.

Perfil de estratégia pura: em um jogo com n jogadores, o vetor e = $(e_1, e_2, ..., e_n)$ será um perfil de estratégia pura, onde e_i é uma estratégia pura para o jogador i.

Conjunto de todas as estratégias: em um jogo com n jogadores, o produto cartesiano $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ representa o conjunto de todas as estratégias deste jogo.

Estratégia de qualquer jogador, exceto o jogador *i*: utilizaremos a notação e_{-i} para destacarmos uma estratégia de outro jogador que não seja o jogador i.

Payoff* do jogador *i: A função R_i: $E_i \to \mathbb{R}$, com e $\mapsto \mathrm{R}_i(e)$, associa um número $x \in \mathbb{R}$ a cada um dos perfis de estratégias puras, representando o *payoff* do jogador i quando este opta pelo perfil de estratégia pura e_i.

Exemplo 2.1 *Considere um jogo com dois jogadores: jogador 1 e jogador 2. Considere que o jogador 1 tenha duas estratégias: estratégia w e estratégia x. Considere ainda que o jogador 2 também tenha duas estratégias: estratégia y e estratégia z. Com essas informações, montamos a matriz payoff a seguir:*

		2	
		y	z
1	w	0, 2	3, 1
	x	0, -1	2, 1

Tabela 3 – Notações

Assim, temos o conjunto de jogadores $J = \{1, 2\}$. As estratégias do jogador 1 são $e_{11} = w$ e $e_{12} = x$ e as estratégias do jogador 2 são $e_{21} = y$ e $e_{22} = z$, formando os conjuntos das possíveis estratégias $E_1 = \{w, x\}$ e $E_2 = \{y, z\}$. Assim, são definidos os payoffs $R(w, y) = (0, 2)$, $R(w, z) = (3, 1)$, $R(x, y) = (0, -1)$ e $R(x, z) =(2, 1)$.

2.4 ESTRATÉGIAS

Nesta seção, abordaremos sobre as estratégias de um jogo. Seja o conjunto finito de n jogadores $J = \{1, 2, ..., n\}$, com $i \in J$; $e_i \in E_i$ será uma estratégia escolhida pelo jogador i, que terá seu conjunto finito das possíveis estratégias $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{im}\}$. Destacaremos nesta seção as estratégias puras e mistas, bem como as estratégias dominantes e dominadas.

2.4.1 Estratégia pura

Em vários jogos, quando um jogador decide por utilizar uma determinada estratégia, buscando seu maior ganho, não havendo interesse em mudar esta estratégia, e sem cooperar com os demais jogadores, dizemos que este jogador decide por utilizar uma estratégia pura. Considere um jogo com matriz de resultados abaixo:

		2	
		l	m
1	j	3, 7	-1, 10
	k	5, 0	1, -7

Tabela 4 – Estratégia pura

Neste jogo, o jogador 1 poderá optar pela estratégia pura j ou pela estratégia pura k. Da mesma forma, o jogador 2 poderá escolher entre a estratégia pura l ou a estratégia pura m.

2.4.2 Estratégia mista

Outrossim, na Tabela 4, o jogador 1 pode optar por uma mistura de estratégias. Trata-se do caso em que este jogador atribui uma probabilidade a cada uma de suas estratégias possíveis, como por exemplo, "*jogar a estratégia j com probabilidade 40%*" e "*jogar a estratégia k com probabilidade 60%*". Nesse caso, percebemos que este jogador atribui o vetor de probabilidade (0,4, 0,6) às suas estratégias disponíveis. Trata-se de uma estratégia do tipo mista.

Portanto, uma estratégia mista é aquela em que o jogador decide por uma distribuição de probabilidade sobre suas estrategias possíveis. Vale acrescentar que escolher a primeira estratégia pura disponível é um caso particular de estratégia mista, em que o vetor de probabilidade em questão é dado por (1, 0, ..., 0).

2.4.3 Estratégia dominante

Em certos casos, percebemos que independente da escolha adotada pelos outros jogadores, uma estratégia e_{ip} de um determinado jogador i nunca é pior que outra estratégia e_{iq}. Nessa situação, dizemos que e_{ip} é dominante sobre e_{iq}, dominância essa que pode ser estrita ou fraca, conforme a discussão a seguir.

2.4.3.1 Estratégia estritamente dominante

Uma estratégia é estritamente dominante para um jogador se ela é melhor do que outra estratégia à sua disposição, ou seja, quando esta estratégia gera um resultado sempre maior, independente da estratégia escolhida pelos outros jogadores.

Definição 2.1 *Seja o conjunto de jogadores* $J = \{1, 2, ..., n\}$ *e o conjunto de estratégias* $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{im}\}$*, a estratégia* e_{id} *será estritamente dominante sobre a estratégia* e_{if} *para o jogador i, se,* $\forall\ e_a \in E_a, e_b \in E_b, ..., e_n \in E_n; R(e_a, e_b, ..., e_{id}, ..., e_n) > R(e_a, e_b, ..., e_{if}, ..., e_n)$.

Considere um jogo de matriz *payoff* a seguir, com estratégias estritamente dominantes.

		2	
		r	s
1	p	7, 4	5, -1
	q	2, 3	-1, 2

Tabela 5 – Estratégias estritamentes dominantes

Analisando a tabela, chega-se à conclusão que ambos jogadores têm uma estratégia estritamente dominante cada: a estratégia p para o jogador 1 e a estratégia r para o jogador 2, pois, independente da estratégia escolhida pelo outro jogador, estas estratégias sempre terão um resultado maior que os resultados das estratégias q e s, respectivamente.

2.4.3.2 Estratégia fracamente dominante

Uma estratégia é fracamente dominante para um jogador se ela gera um resultado ao menos igual a outra(s) estratégia(s) e se gera um resultado maior que outra(s) estratégia(s) à sua disposição, ou seja, quando esta estratégia gera um resultado sempre maior ou igual, independente da estratégia escolhida pelo outro jogador.

Definição 2.2 *Seja o conjunto de jogadores* $J = \{1, 2, ..., n\}$ *e o conjunto de estratégias* $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{im}\}$, *a estratégia* e_{ig} *será fracamente dominante sobre a estratégia* e_{ih} *para o jogador i, se,* $\forall e_a \in E_a, e_b \in E_b, ..., e_n \in E_n; R(e_a, e_b, ..., e_{ig}, ..., e_n) \geq R(e_a, e_b, ..., e_{ih}, ..., e_n)$.

Considere um jogo com a matriz *payoff* da Tabela 6. Efetuando a análise desta tabela, verifica-se que o jogador 1 tem à sua disposição uma estratégia fracamente dominante, a estratégia a, pois, independente da estratégia escolhida pelo outro jogador, esta terá um resultado maior ou igual que o resultado da estratégia b, e terá sempre um resultado maior que o resultado da estratégia c. Já o jogador 2 não possui estratégia dominante.

		2	
		d	e
1	a	6, 4	6, 3
	b	2, 1	6, 5
	c	1, 1	2, 3

Tabela 6 – Estratégia fracamente dominante

Exemplo 2.2 *Vamos destacar um clássico exemplo, que é o dilema dos prisioneiros, onde localizaremos uma estratégia dominante. Mas, o que é o dilema dos prisioneiros? Dois indivíduos suspeitos (prisioneiro 1 e prisioneiro 2) são presos pela polícia, que não tem provas suficientes para condenar nenhum deles por um suposto crime cometido. Os* *indivíduos são separados em celas diferentes, sendo oferecido aos dois exatamente o mesmo compromisso: se um cooperar e o outro permanecer em silêncio, o que cooperou sai livre enquanto o silencioso pega pena de dez anos de prisão; se ambos cooperarem, serão condenados a cinco anos de prisão cada; se ambos ficarem em silêncio, cada um leva um ano de prisão.*

		prisioneiro 2	
		coopera	*não coopera*
prisioneiro 1	*coopera*	-5, -5	0, -10
	não coopera	-10, 0	-1, -1

Tabela 7 – Matriz *payoff* do dilema dos prisioneiros

O dilema do prisioneiro está representado na matriz *payoff* da Tabela 7. Os valores mostrados representam as penas de prisão, em anos, que cada indivíduo receberá dependendo da estratégia adotada pelos prisioneiros. Ambos poderão refletir por alguns minutos sobre a escolha da estratégia: cooperar ou não cooperar. A decisão de um indivíduo é tomada sem o conhecimento da decisão do outro indivíduo. O que acontecerá? Como reagirão? Existe decisão racional? Se você fosse um dos prisioneiros, qual seria a sua decisão?

Analisando as opções de cada um dos prisioneiros verifica-se que a estratégia *cooperar* é estritamente dominante, pois ela produz resultados invariavelmente melhores que a estratégia *não cooperar*.

Sendo c a estratégia cooperar, n a estratégia não cooperar, podemos dizer matematicamente que $R(c, c) > R(n, c)$ e $R(c, n) > R(n, n)$, e isto é válido para ambos prisioneiros.

2.4.4 Estratégia dominada

Uma estratégia é chamada de dominada para um jogador quando existe uma outra estratégia melhor que esta, que sempre criará um *payoff* igual ou mais positivo, independente da estratégia escolhida pelo outro jogador.

Definição 2.3 *Seja o conjunto de jogadores* $J = \{1, 2, ..., n\}$ *e o conjunto de estratégias* $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{im}\}$, *a estratégia* e_{ij} *será domi-*

nada pela estratégia e_{ik} *para o jogador i, se,* $\forall e_a \in E_a, e_b \in E_b, ..., e_n \in E_n; R(e_a, e_b, ..., e_{ij}, ..., e_n) \leq R(e_a, e_b, ..., e_{ik}, ..., e_n)$.

Considere um jogo representado pela matriz *payoff* a seguir, com estratégias dominadas.

		2	
		g	h
1	e	6, 2	4, 2
	f	1, 3	-2, -1

Tabela 8 – Estratégias dominadas

Analisando a tabela, concluímos que ambos jogadores têm uma estratégia dominada cada: a estratégia f para o jogador 1 e a estratégia h para o jogador 2. No caso do jogador 1, independente da estratégia escolhida pelo jogador 2, a estratégia f sempre terá um resultado menor que o resultado da estratégia e. Já no caso do jogador 2, independente da estratégia escolhida pelo jogador 1, a estratégia h terá um resultado menor ou igual que o resultado da estratégia g.

Se existirem jogos com mais de duas estratégias para cada jogador, em alguns casos podemos utilizar o método de eliminação das estratégias dominadas, como no exemplo a seguir.

Exemplo 2.3 *Suponha que cada uma das duas empresas em um mercado de duopólio possa cobrar qualquer um dos três preços: alto, médio ou baixo. Suponha também que a empresa que cobra o preço mais baixo fique com todo o mercado. Mas, se ambas empresas cobrarem o mesmo preço, elas dividem o mercado igualmente. Com estes argumentos, as empresas terão lucros anuais, expressos em milhões de reais, pela matriz de resultados representada na Tabela 9.*

Analisando as opções de cada empresa, identificamos uma estratégia dominada para cada uma delas. Observe que, para a empresa 1, a estratégia *alto* produzirá resultados constantemente menores em relação à estratégia *médio*, independente da opção escolhida pela empresa 2, e isto é verdade para ambas empresas, pois, analogamente, para a empresa 2, a estratégia *alto* será regularmente superada pela estratégia *médio*, independente da opção escolhida pela empresa 1.

		empresa 2		
		alto	*médio*	*baixo*
empresa 1	*alto*	7, 7	0, 11	0, 9
	médio	11, 0	6, 6	0, 9
	baixo	9, 0	9, 0	5, 5

Tabela 9 – Eliminando estratégias dominadas

Então, podemos remover as estratégias dominadas, considerando que ambas empresas optarão por uma das suas melhores estratégias. Assim, podemos reduzir a dimensão da matriz *payoff*, conforme demonstraremos na Tabela 10.

		empresa 2	
		médio	*baixo*
empresa 1	*médio*	6, 6	0, 9
	baixo	9, 0	5, 5

Tabela 10 – Estratégias dominadas removidas

Após reduzirmos a dimensão da matriz original, uma nova avaliação é efetuada. Para ambas empresas, a estratégia *baixo* é dominante e, consequentemente, a estratégia *médio* é dominada. Chega-se a conclusão que ambas empresas escolherão a estratégia *baixo*, pois, a estratégia *médio* só seria utilizada se uma empresa acreditasse que a outra também utilizaria a estratégia *médio*, mas, em uma disputa de mercado, esta opção é descartada.

Porém, não podemos utilizar o método de eliminação das estratégias dominadas em qualquer situação. No exemplo da Tabela 11 e em muitos jogos, não existem estratégias que são dominadas, ou existem apenas algumas, e este método não nos leva a uma solução. No jogo ilustrado pela matriz *payoff* da Tabela 11, não nos é conveniente utilizar o método de eliminação das estratégias dominadas. Podemos utilizar outros conceitos para a solução deste jogo, mas este é um assunto que abordaremos posteriormente.

		2		
		esquerda	*meio*	*direita*
1	*acima*	-1, 3	3, -1	4, 2
	meio	3, -1	-1, 3	4, 2
	abaixo	2, 4	2, 4	5, 5

Tabela 11 – Matriz *payoff* sem estratégias dominadas

> "*Se uma estratégia não é dominada por nenhuma outra, é chamada de estratégia não dominada. É útil pensar em uma estratégia dominada como uma estratégia 'ruim' e uma estratégia não dominada como 'boa'. É claro que uma estratégia importante é um tipo especial de estratégia não dominada, a saber, uma que domina todas as outras estratégias. Em outras palavras, é a 'melhor' estratégia.*" (DUTTA, 1999)

2.5 FORMA NORMAL DE UM JOGO

Objetivando estudar os jogos, buscamos visualizá-los de tal maneira que possamos analisar seus elementos, entendendo perfeitamente a situação como um todo. Para a representação de um jogo existem, principalmente, duas formas: normal e extensiva.

Os jogos em forma extensiva são mais dinâmicos que os jogos em forma normal, pois as estratégias dos jogadores são escolhidas em sequência, onde cada jogador pode observar as estratégias adotadas anteriormente e todos os movimentos já efetuados são visíveis para todos os jogadores. Este será o assunto que detalharemos no próximo capítulo.

Já nos jogos na forma normal, todas as regras do jogo são definidas antes de seu início. Portanto, não é possível dialogar nem negociar com os demais jogadores envolvidos. Em jogos na forma normal, os jogadores movem-se ou definem suas estratégias simultaneamente, em um mesmo número de vezes, sem saber o que os demais jogadores fizeram ou definiram.

Cada jogador tem algumas preferências, podendo serem especificadas com *payoffs*, que são os possíveis resultados obtidos por cada jogador, variando de valor à medida que as preferências de cada jogador vão mudando. Em qualquer jogo na forma normal, são definidos os jogadores, os movimentos ou estratégias à disposição e os *payoffs*. Podemos representar um jogo na forma normal com dois jogadores por uma matriz *payoff*, destacando os resultados gerados pelas decisões dos jogadores.

Apesar do nosso trabalho abordar com mais ênfase a forma extensiva de um jogo, vamos destacar um clássico exemplo que utiliza a forma normal, que é o jogo da galinha, que ficou mais conhecido pelo filme “Grease, Nos Tempos da Brilhantina” (Grease, 1978), onde mostra o protagonista do filme, John Travolta, dentro de um carro, acelerando contra outro carro em linha reta, com os dois carros na mesma linha, apostando que, quem desviar o carro primeiro, perde seu carro para o oponente.

Os jogadores têm duas opções: desviar ou não desviar. Caso um desvie e o outro não, o que desviou perde seu carro para o outro jogador. Se os dois não desviarem, perderão seus carros e talvez suas vidas, pois ocasionarão uma colisão frontal. Outra opção é se os dois desviarem: se isso acontecer, perderão o respeito de seus amigos e talvez o amor de uma garota, que pode estar em jogo nesta disputa.

Vamos representar o jogo da galinha pela matriz *payoff* da Tabela 12, onde o valor 1 significa ganhar o carro do oponente, o valor -1 significa perder seu carro, o valor 0 significa nem ganhar nem perder e o valor -10 significa perder seu carro e talvez sua vida.

		motorista 2	
		desvia	*não desvia*
motorista 1	*desvia*	0, 0	-1, 1
	não desvia	1, -1	-10, -10

Tabela 12 – Matriz *payoff* do jogo das galinhas

2.6 EQUILÍBRIO DE NASH

Vimos que, em 1950, John Forbes Nash iniciou os estudos da teoria dos jogos, verificando a necessidade de expansão das pesquisas já realizadas. Ele apresentou um conceito de solução para jogos de não soma zero, chamado ponto de equilíbrio, em seu artigo "Pontos de equilíbrio em jogos com n-jogadores" (Equilibrium points in n-person games) nos "Anais da Academia Nacional de Ciências" (Proceedings of the National Academy of Sciences), que ficou conhecido como Equilíbrio de Nash.

Este conceito fundamenta-se na teoria onde, em um jogo, para todo jogador, já sabendo das escolhas dos outros jogadores, não há interesse em mudar sua estratégia unilateralmente, pois não existe ganho com esta mudança.

Apesar dos jogadores não colaborarem uns com os outros, a busca de cada um para seu maior lucro pode direcionar o jogo a um *payoff* que resulte no equilíbrio de Nash.

Em outras palavras, encontraremos equilíbrio de Nash quando cada resultado das estratégias adotadas pelos demais jogadores resulta em seu melhor resultado, e isso é válido para todos os jogadores (NASH, 1950).

Definição 2.4 *Seja um jogo com o conjunto de jogadores denominado* $J = \{1, 2, ..., n\}$*, o perfil de estratégias puras* $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *e o conjunto de estratégias* $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{im}\}$ *para o jogador i. Dizemos que "e" é um equilíbrio de Nash se* $R(e_1, e_2, ..., e_{i\alpha}, ..., e_n) \geq R(e_1, e_2, ..., e_{i\beta}, ..., e_n), \forall\ i \in J,\ e\ \forall\ e_i \in E_i$.

Relembraremos o Exemplo 2.3, onde duas empresas disputam em um mercado de duopólio. Cada uma dessas empresas pode cobrar qualquer um dos três preços: alto, médio ou baixo. A empresa que cobra o preço mais baixo fica com todo o mercado. Mas, se ambas empresas cobrarem o mesmo preço, elas dividem o mercado igualmente. Podemos verificar se neste jogo existe um ou mais equilíbrios de Nash, através do procedimento que realizaremos a seguir. Inicialmente, vamos rever a matriz de resultados deste jogo.

		empresa 2		
		alto	*médio*	*baixo*
empresa 1	*alto*	7, 7	0, 11	0, 9
	médio	11, 0	6, 6	0, 9
	baixo	9, 0	9, 0	5, 5

Veja as opções da empresa 1: se a empresa 2 optar por cobrar preço alto, a melhor estratégia da empresa 1 é cobrar preço médio; caso a empresa 2 opte por cobrar preço médio, a estratégia com melhor resultado para a empresa 1 é cobrar preço baixo; por último, se a empresa 2 optar por cobrar preço baixo, o melhor *payoff* para a empresa 1 será gerado pela estratégia de também cobrar preço baixo.

Em seguida, analisaremos as opções da empresa 2. Caso a empresa 1 opte por cobrar preço alto, a estratégia com melhor resultado para a empresa 2 é cobrar preço médio. Se a empresa 1 optar por cobrar preço médio, a melhor estratégia da empresa 2 é cobrar preço baixo. E, se a empresa 1 optar por cobrar preço baixo, o melhor *payoff* para a empresa 2 será gerado pela estratégia de também cobrar preço baixo.

Após efetuarmos as análises, reproduziremos matriz de resultados deste jogo, destacando as melhores opções para as duas empresas, conforme cada caso. Perceba que, se a empresa 1 soubesse que a empresa 2 escolheu a estratégia *baixo*, a melhor resposta para ela também seria escolher a estratégia *baixo*. Analogamente, se a empresa 2 soubesse que a empresa 1 escolheu a estratégia *baixo*, a melhor resposta para ela também seria escolher a estratégia *baixo*. Neste caso, a combinação de estratégias representada pelo *payoff R(baixo,baixo) = (5, 5)* é o equilíbrio de Nash para este jogo.

		empresa 2		
		alto	*médio*	*baixo*
empresa 1	*alto*	7, 7	0, 11	0, 9
	médio	11, 0	6, 6	0, 9
	baixo	9, 0	9, 0	**5**, **5**

Exemplo 2.4 *Este exemplo é conhecido como a "batalha dos sexos". Considere um casal de namorados que queira sair juntos em um sábado à noite. As opções disponíveis são duas: uma partida de futebol ou uma apresentação de balé. Ele prefere futebol, ela prefere balé.*

Se forem juntos ao local preferido de um deles, este terá maior felicidade (payoff 2). Se forem juntos ao local preferido do outro, o que não foi no local preferido terá menor felicidade, mas estará em companhia da pessoa amada (payoff 1). Se não saírem juntos, ambos ficarão infelizes (payoff 0). Vamos fazer a representação deste caso específico através da matriz *payoff* da Tabela 13.

		ela	
		futebol	*balé*
ele	*futebol*	2, 1	0, 0
	balé	0, 0	1, 2

Tabela 13 – Matriz *payoff* da batalha dos sexos

Caso ele escolha ir ao futebol, ela também deverá escolher ir ao futebol, pois esta estratégia resultará em um *payoff* maior do que a estratégia de ir ao balé. Se ele escolher ir ao balé, ela também deverá escolher ir ao balé. Analogamente, se ela optar em ir ao futebol, ele também deverá escolher ir ao futebol e, caso ela escolha ir ao balé, a melhor escolha para ele é fazer a mesma opção. Vamos reproduzir a matriz *payoff* deste jogo, destacando as melhores opções para os dois jogadores, conforme cada caso.

		ela	
		futebol	*balé*
ele	*futebol*	**2**, **1**	0, 0
	balé	0, 0	**1**, **2**

Tabela 14 – Equilíbrios de Nash na batalha dos sexos

Note que, neste caso, existem dois equilíbrios de Nash, quando o casal de namorados escolhe ir juntos na partida de futebol ou na apresentação de balé. Estes pares de escolhas são representados pelos *payoffs* $R(\textit{futebol},\textit{futebol}) = (2,\ 1)$ e $R(\textit{balé},\textit{balé}) = (1,\ 2)$.

Podemos afirmar que um equilíbrio em uma estratégia dominante é também um equilíbrio de Nash, mas não pode-se afirmar o contrário, conforme ilustraremos nas tabelas 15 e 16.

Vimos exemplos de jogos com um equilíbrio de Nash e com mais de um equilíbrio de Nash. Mas, um jogo pode não ter nenhum equilíbrio de Nash de estratégias puras. Considere o jogo com a matriz de resultados da Tabela 17. Note que, se o jogador x escolher a estratégia x_1,

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	9, 5	7, 8
	a_2	7, 1	2, 7

Tabela 15 – Equilíbrio de Nash com estratégia dominante

		D		
		d_1	d_2	d_3
C	c_1	9, 5	7, 8	4, 2
	c_2	4, 7	6, 1	5, 6

Tabela 16 – Equilíbrio de Nash sem estratégia dominante

o melhor resultado para o jogador y é a estratégia y_1. Caso o jogador x opte pela estratégia x_2, a melhor estratégia para o jogador y é a y_2.

		Y	
		y_1	y_2
X	x_1	1, 1	1, 0
	x_2	2, 1	0, 4

Tabela 17 – Jogo sem equilíbrio de Nash de estratégias puras

Note também que, se o jogador y optar pela estratégia y_1, a melhor estratégia para o jogador x é a x_2. Caso o jogador y escolha a estratégia y_2, o melhor resultado para o jogador x é a estratégia x_1.

Reproduziremos matriz de resultados deste jogo, destacando as melhores opções para os dois jogadores, conforme cada caso. Perceba que este é um jogo sem equilíbrio de Nash de estratégias puras.

		Y	
		y_1	y_2
X	x_1	1, 1	1, 0
	x_2	2, 1	0, 4

Tabela 18 – Jogo sem equilíbrio de Nash de estratégias puras

2.7 ÓTIMO DE PARETO

"*Ótimo de Pareto*" ou "*Eficiência de Pareto*" ocorre quando a situação econômica de um jogador não pode ser melhorada sem que piore a situação econômica de outro jogador, ou seja, ocorre quando os recursos são utilizados da maneira mais ideal. Este conceito é assim chamado homenageando o economista italiano Vilfredo Pareto (1848-1923), que o formulou.

Definição 2.5 *"Se, em uma dada situação, não é mais possível melhorar a situação de um agente sem piorar a de outro, diz-se que essa situação é um Ótimo de Pareto, o que significa que, dadas as circunstâncias, ganhos de eficiência não são mais possíveis." (FIANI, 2006)*

Não podemos fazer relação entre o ótimo de Pareto e o equilíbrio de Nash, pois, se os jogadores não têm interesse em mudar suas estratégias, não significa, necessariamente, que suas decisões, quando tomadas em conjunto, resultam na melhor situação socialmente possível.

É este conceito que o dilema dos prisioneiros (Exemplo 2.2) nos mostra. Como o equilíbrio de Nash nos dá a concepção que cada jogador escolha sua melhor estratégia em relação as outros jogadores, sem examinar a natureza da relação consequente, não podemos acreditar que este *payoff* seja também um ótimo de Pareto.

Já vimos que existe um único equilíbrio de Nash no dilema dos prisioneiros, que ocorre quando ambos cooperam e são condenados a cinco anos de prisão cada. Este exemplo demonstra que o equilíbrio de Nash pode ser encontrado não sendo necessariamente a melhor estratégia possível para cada jogador. Vamos relembrar a matriz de resultados do dilema do prisioneiro.

No dilema dos prisioneiros, um não pode se comunicar com o outro, devendo decidir sua estratégia sem ter conhecimento da estratégia

		prisioneiro 2	
		coopera	*não coopera*
prisioneiro 1	*coopera*	-5, -5	0, -10
	não coopera	-10, 0	-1, -1

do outro. Mas, se os prisioneiros pudessem se comunicar, ainda escolheriam a estratégia dominante de cada um, gerando o equilíbrio de Nash? A resposta é não, pois, caso pudessem se comunicar, a escolha mais correta seria não cooperar, pois, se ambos não cooperarem, serão condenados a um ano de prisão cada, gerando o melhor resultado social, que é o ótimo de Pareto.

2.8 JOGOS DE SOMA ZERO

Em um jogo de soma zero, todo valor ganho por um jogador significa necessariamente o mesmo valor perdido pelo outro jogador, ou seja, os *payoffs* somam zero em qualquer célula da matriz. Portanto, a vitória de um jogador corresponde à derrota do outro jogador. Assim sendo, nos jogos de soma zero, o interesse dos jogadores estão em conflito direto. Nestes jogos, a adição que qualquer par de *payoff* resulta em uma constante igual a zero. Em outras palavras:

Definição 2.6 *Seja um jogo com o conjunto de jogadores* $J = \{1, 2\}$*, o perfil de estratégias do jogador 1 sendo* $e_1 = (e_{11}, e_{12}, ..., e_{1m})$ *e o perfil de estratégias do jogador 2 sendo* $e_2 = (e_{21}, e_{22}, ..., e_{2p})$*. Um jogo será de soma zero se* $e_{1i} + e_{2j} = 0 \; \forall \; i \in \{1, 2, .., m\} \; \forall \; j \in \{1, 2, .., p\}$.

> "*Jogos de soma zero têm a propriedade de que a soma dos payoffs para os jogadores é igual a zero. Um jogador pode ter um resultado positivo apenas se outro tiver um resultado negativo. Poker e xadrez são exemplos de jogos de soma zero. No mundo real os jogos raramente são soma zero.*" (PRISNER, 2014)

Utilizaremos o popular jogo "*par ou ímpar*" para ilustrar um jogo de soma zero. Este jogo é um dos métodos mais tradicionais para resolver uma questão entre duas pessoas, como por exemplo, quem iniciará um jogo da velha, ou quem estacionará seu carro na vaga coberta, ou ainda quem tomará banho primeiro após chegar da praia.

As regras deste jogo são simples: os jogadores A e B apostam na soma de dois números, um aposta que a soma será um número par, outro aposta que a soma será um número ímpar.

Como é um jogo na forma normal da teoria dos jogos, os dois jogadores definem suas estratégias sem saber o que o outro jogador definiu, mostrando uma das mãos simultaneamente, escolhendo um número entre 0 e 5 para mostrar com os dedos desta mão.

Adicionando estes dois valores, teremos um terceiro valor, que será um número par ou um número ímpar, decretando o vencedor. Suponha que o jogador A escolha par e o jogador B escolha ímpar. Podemos representar este jogo em uma matriz *payoff*.

		B	
		mostra par	*mostra ímpar*
A	*mostra par*	1, -1	-1, 1
	mostra ímpar	-1, 1	1, -1

Tabela 19 – Matriz *payoff* do jogo par ou ímpar

Note que, na representação, o valor 1 significa vitória e o valor -1 significa derrota. As chances de vitória são as mesmas para cada jogador, ou seja, cada jogador tem 50% de chance de vitória e 50% de chance de derrota. Note ainda que, adicionando os valores de cada *payoff*, teremos soma zero.

Para calcularmos que cada jogador tem 50% de chance de vitória e 50% de chance de derrota, devemos supor que os jogadores A e B nunca disputaram um par ou ímpar entre eles, então, ambos não sabem qual estratégia seu adversário adotará. Caso disputem uma sequência de par ou ímpar, um jogador poderá descobrir um padrão de jogo de seu adversário.

2.9 OUTROS EXEMPLOS DE JOGOS

Para finalizarmos este capítulo, destacaremos nesta seção dois exemplos de jogos. Iniciaremos pelo jogo "pedra, papel e tesoura".

Exemplo 2.5 *O jogo chinês "pedra, papel e tesoura" ficou popular no*

Japão e hoje é conhecido no mundo inteiro. Os dois jogadores envolvidos devem esticar a mão direita ao mesmo tempo, formando um símbolo, que representa pedra ou papel ou tesoura. Após mostrarem os símbolos formados, verifica-se o vencedor, utilizando as seguintes regras:

- *Pedra ganha da tesoura (pedra quebra a tesoura);*
- *Papel ganha da pedra (papel embrulha a pedra);*
- *Tesoura ganha do papel (tesoura corta o papel).*

		2		
		pedra	*papel*	*tesoura*
1	*pedra*	0, 0	-1, 1	1, -1
	papel	1, -1	0, 0	-1, 1
	tesoura	-1, 1	1, -1	0, 0

Tabela 20 – Matriz *payoff* do jogo pedra, papel e tesoura

Este é um jogo na forma normal, pois cada jogador define sua estratégia sem saber o que o outro jogador definiu. Não há uma estratégia dominante, pois cada estratégia pode ser derrotada por uma estratégia melhor do outro jogador. Verificamos ainda que não existe equilíbrio de Nash e este é um jogo de soma zero, pois os os *payoffs* somam zero em qualquer célula da matriz abaixo, onde 1 significa vitória, 0 significa empate e -1 significa derrota.

Observe que, para qualquer estratégia adotada por cada jogador, existe uma chance de vitória, uma chance de empate e uma chance de derrota. Em outras palavras, podemos afirmar que a probabilidade de vitória de um jogador é dada por P $= \frac{1}{3}$ em cada jogada.

Antes de mostrarmos o exemplo seguinte, vale ressaltar o raciocínio a seguir. Você já observou que, em algumas ruas do centro de sua cidade existem várias lojas de eletrodomésticos e em outras ruas não existe nenhuma? Ficaria mais lucrativo para os proprietarios destas lojas se seus estabelecimentos ficassem espalhados em várias ruas do centro? Você já observou também que, às vezes, precisamos rodar vários quarteirões para encontrar um posto de combustível e, quando localizamos, existem dois, quase na mesma esquina? Podemos utilizar a teoria dos jogos para tentar uma explicação racional para isso, utilizando o próximo exemplo.

Exemplo 2.6 *No "jogo da localização", devemos supor uma praia com exatamente um quilômetro de extensão, em linha reta e que os banhistas fiquem uniformemente distribuídos ao longo dela. A prefeitura abriu uma licitação e dois sorveteiros dividem o espaço desta praia, vendendo todos os dias exatamente os mesmos sorvetes, das mesmas marcas, cobrando os mesmos preços, não havendo diferencial algum para conquistarem os clientes. Os lucros de cada sorveteiro serão dados pela posição em que eles escolherem ficar nesta praia, como veremos na Figura 1.*

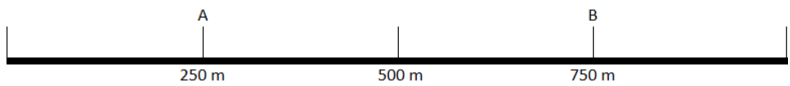

Figura 1 – Jogo da localização (posição 1)

Observamos que a barraca A encontra-se no marco 250 m e a barraca B encontra-se no marco 750 m, então, cada barraca está localizada a 250 metros de cada extremo da praia. Considerando que os banhistas procurarão a barraca mais próxima, a barraca A atenderá os banhistas do marco 1 m ao marco 500 m, e a barraca B atenderá os banhistas do marco 501 m ao marco 1.000 m. Assim, metade dos banhistas comprarão na barraca A e a outra metade dos banhistas comprarão na barraca B.

Seja n o número de banhistas na praia e m a quantidade de quilômetros coberta por cada barraca, podemos afirmar que cada barraca atenderá $m \times n$ banhistas. Portanto, temos que ambas barracas atenderão $0{,}5n$ banhistas.

Será esta localização das barracas um equilíbrio de Nash, ou é possível uma barraca aumentar seus lucros movendo-se unilateralmente?

Vamos supor que o proprietário da barraca A mova-se para o centro da praia, conforme mostrado na posição 2. Note que os banhistas do início da praia precisarão andar mais para chegar até a barraca A, mas esta ainda é a mais próxima. E alguns banhistas mais ao centro da praia, que anteriormente estavam mais próximos da barraca B, agora comprarão sorvetes na barraca A, pois esta estará mais perto.

Agora, a barraca A atenderá os banhistas do metro 0 ao metro 625, e a barraca B atenderá os banhistas do metro 626 ao metro 1.000. Em outras palavras, a barraca A atenderá *0,625n* banhistas e a barraca B atenderá *0,375n* banhistas.

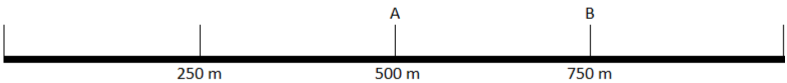

Figura 2 – Jogo da localização (posição 2)

O proprietário da barraca B, entendendo a estratégia do proprietário da barraca A, também move-se para o centro da praia, conforme mostrado na Figura 3, chegando a uma localização em que o jogo novamente se equilibra, mas desta vez, não existe outro movimento a ser feito por uma das barracas que desequilibre o jogo. Assim, novamente cada barraca atenderá *0,5n* banhistas e chegamos ao equilíbrio de Nash.

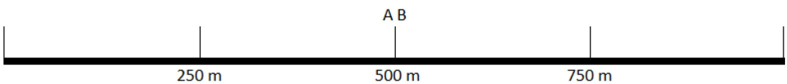

Figura 3 – Jogo da localização (posição 3)

O jogo da localização é um exemplo de jogo na forma extensiva, assunto que abordaremos no próximo capítulo.

3 FORMA EXTENSIVA: OS JOGOS COM AÇÕES SEQUENCIAIS

Daremos ênfase neste capítulo aos jogos na forma extensiva. Ideias, definições e exemplos deste capítulo foram preparados com base nos livros (DUTTA, 1999), (FIANI, 2006) e (SHOHAM; LEYTON-BROWN, 2008).

Apresentamos até agora exemplos de jogos onde os jogadores escolhem simultaneamente suas estratégias, que são os jogos em forma normal. Porém, em muitos jogos, a escolha de ações ocorre sequencialmente. Estes são os jogos em forma extensiva.

A dinâmica diferenciada dos jogos em forma extensiva despertou-nos o interesse e motivou-nos a tratar especificamente deste tipo de jogo em nosso trabalho. Em outras palavras, os jogos em forma extensiva são mais dinâmicos que os jogos em forma normal, pois as estratégias dos jogadores não são escolhidas simultaneamente, mas em sequência, onde cada jogador pode observar as estratégias adotadas anteriormente e todos os movimentos já efetuados são visíveis para todos os jogadores.

Em nosso trabalho, delimitaremos as análises aos jogos finitos, que serão exemplificados com árvores finitas, pois, os jogos estudados no âmbito econômico, bem como os jogos no mundo real, geralmente acabam após um número n de movimentos. Já alguns matemáticos não limitam-se a analisar apenas estes jogos, estudando outros jogos, que possuem um número infinito de decisões e movimentos, onde os *payoffs* terminais não são conhecidos, por serem jogos representados com árvores infinitas.

Os jogos em forma extensiva são representados por meio de grafos, diferentemente dos jogos em forma normal, onde são apresentados sob a forma de uma matriz de resultados.

Nas representações de jogos em forma extensiva, utilizando a teoria dos grafos, cada aresta simboliza uma possível ação de um jogador, cada nó simboliza uma escolha de um jogador e cada folha simboliza o *payoff* final de cada jogador.

Além das estratégias e dos movimentos dos jogadores, em um jogo na forma extensiva aceitamos a possibilidade de alterações nos *payoffs* acontecerem por eventos aleatórios, como por exemplo, em um lançamento de dado, comum em jogos de tabuleiro. Estes eventos aleatórios podem ser representados como movimentos efetuados por um outro "jogador", denominado *probabilidade* ou *chance*. Este "jogador" não tem preferência alguma sobre o *payoff* final do jogo.

Exemplo 3.1 *Vamos utilizar o "jogo da entrada" como exemplo para ilustrar a representação em forma extensiva. Neste caso, os jogadores são duas empresas, 1 e 2. A empresa 1 está cogitando a possibilidade de entrar em um mercado específico. Atualmente, apenas a empresa 2 opera neste mercado. A empresa 1 pode escolher entre duas ações: entrar ou não entrar.*

Se a empresa 1 entrar no mercado, a empresa 2, observado esta entrada, pode decidir produzir menos, onde ambas empresas tenham um lucro de R$ 100.000,00 por mês, ou pode decidir produzir mais, neste caso, ambas empresas terão prejuízo de R$ 50.000,00 mensais.

Caso a empresa 1 não entre no mercado, a empresa 2 deverá efetuar a mesma decisão: se decidir produzir menos, terá lucro de R$ 150.000,00 por mês, ou pode decidir produzir mais, tendo lucro de R$ 200.000,00 mensais. Nos dois casos, a empresa 1, estando fora do mercado, obtém lucro zero.

A empresa 1 tem apenas uma decisão a ser tomada, que consiste de duas estratégias: entrar ou não entrar no mercado. A empresa 2 terá que decidir entre produzir mais ou produzir menos. Vimos que a empresa 1 decide primeiro: entrar no mercado ou não entrar no mercado. Já a empresa 2, após ter observado a entrada ou não da empresa 1 no mercado, encontra-se em duas situações diferentes, onde pode tomar suas decisões, quais sejam, produzir mais ou produzir menos.

É importante ressaltar que nos jogos de forma extensiva, a estratégia de um jogador é um "plano de ação", ou seja, é preciso indicar a escolha a ser feita em cada nó correspondente. Assim, como no "jogo da entrada" a empresa 1 possui apenas um nó associado, ele tem duas estratégias:

1. Entrar no mercado;

2. Não entrar no mercado.

Por outro lado, a empresa 2 possui dois nós associados, e assim temos quatro estratégias possíveis:

1. Produzir mais se a empresa 1 entrou, e produzir mais se a empresa 1 não entrou;

2. Produzir mais se a empresa 1 entrou, e produzir menos se a empresa 1 não entrou;

3. Produzir menos se a empresa 1 entrou, e produzir mais se a empresa 1 não entrou;

4. Produzir menos se a empresa 1 entrou, e produzir menos se a empresa 1 não entrou.

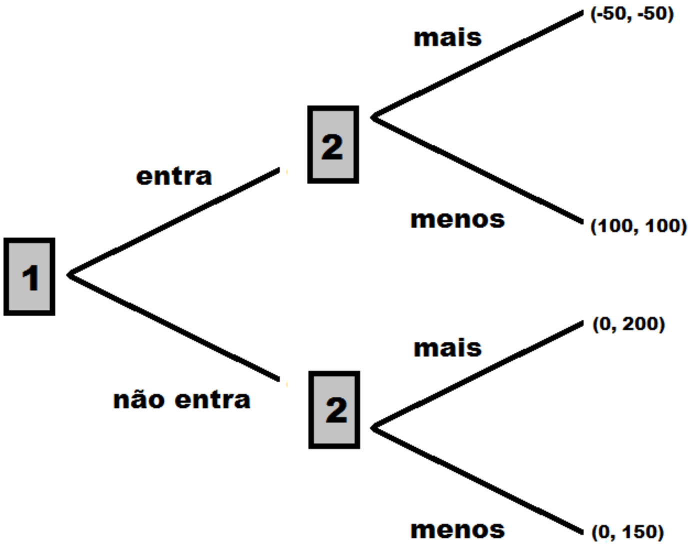

Figura 4 – Árvore do jogo da entrada

Os *payoffs* gerados são os lucros ou os prejuízos, em milhares de reais, das empresas nos diversos casos. Como é um jogo na forma extensiva, este foi representado por uma árvore, conforme podemos ver na Figura 4.

Observe que existem três pontos onde os jogadores têm que escolher uma das estratégias disponíveis. Estes pontos são chamados de nós de decisão. Neste jogo, a empresa 1 é a primeira a decidir, optando por entrar ou não no mercado. A partir desta decisão, o jogo move-se para um dos outros dois nós. Desta vez, a empresa 2 terá que decidir entre uma estratégia. Com as decisões tomadas, o jogo move-se novamente, desta vez para um dos quatro nós terminais, determinando o ganho ou a perda de cada empresa.

Após utilizarmos o exemplo do "jogo da entrada", na sequência deste capítulo faremos análises dos jogos na forma extensiva com informações perfeitas, que são aqueles em que cada jogador, antes de tomar alguma decisão ou escolher alguma estratégia, já tem conhecimento de todos os movimentos efetuados pelos demais jogadores. Em seguida, analisaremos os casos em que os jogos na forma extensiva se apresentam com informações imperfeitas.

3.1 JOGOS COM INFORMAÇÃO PERFEITA

Nesta seção efetuaremos uma descrição matemática dos jogos apresentados na forma extensiva com informações perfeitas.

Neste tipo de jogo, o jogador que escolhe sua estratégia posteriormente pode observar a estratégia escolhida pelos jogadores que efetaram seus movimentos anteriormente.

Definição 3.1 *Um jogo finito com informação perfeita na forma extensiva pode ser descrito como uma tupla* $\boldsymbol{G}$ *=* (J, A, N, T, χ, κ, ω, μ)*, onde:*

$\boldsymbol{J}$ *é um conjunto de* n *jogadores;*

$\boldsymbol{A}$ *é um conjunto de ações;*

$\boldsymbol{N}$ *é um conjunto de nós não terminais;*

$\boldsymbol{T}$ *é um conjunto de nós terminais, sendo* $N \cap T = \emptyset$*;*

$\boldsymbol{\chi}$ *é uma função* $N \to 2^A$ *que atribui um conjunto de possíveis ações em cada nó de escolha;*

$\boldsymbol{\kappa}$ *é uma função* $N \to J$ *que atribui um jogador que escolhe uma ação ao respectivo nó de escolha não terminal;*

$\boldsymbol{\omega}$ *é uma função* $N \times A \to N \cup T$ *que verifica um nó de escolha e sua respectiva ação, encaminhando para outro nó de escolha ou nó terminal, sendo que* $\forall\, n_1$, $n_2 \in N$ *e* $\forall\, a_1$, $a_2 \in A$*, se* $\omega(n_1, a_1) = \omega(n_2, a_2)$*, então* $n_1 = n_2$ *e* $a_1 = a_2$*;*

$\boldsymbol{\mu}$ = (μ_1, μ_2, ..., μ_n)*, onde* μ_i*:* $T \to \mathbb{R}$ *é uma função com payoff para o jogador* i *nos nós terminais* T*.*

Exemplo 3.2 *"Jogo do compartilhamento". Neste caso, os jogadores são dois irmãos: irmão 1 e irmão 2; eles devem decidir como compartilharão dois presentes idênticos e indivisíveis recebidos de um de seus avós. Inicialmente, o irmão 1 propõe uma divisão dos presentes: ou ele fica com os dois, ou o outro irmão fica com os dois ou cada um dos irmãos fica com um presente cada. Depois, o irmão 2 decide se concorda ou não a proposta do efetuada pelo irmão 1: caso concorde, cada um recebe o(s) presente(s) proposto(s); caso não concorde, os irmãos não recebem presente algum. Supondo que os dois irmãos gostem dos presentes de igual forma, este jogo na forma extensiva será representado por uma árvore, que ficará conforme demonstrado através da Figura 5.*

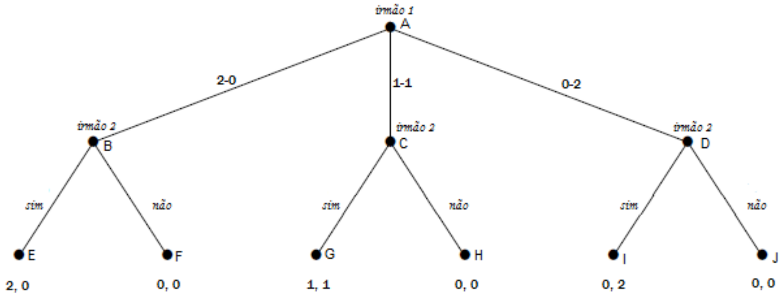

Figura 5 – Árvore do jogo do compartilhamento

Assim, conforme podemos observar na Figura 5, temos:

- Conjunto de jogadores J = {1, 2};
- Conjunto de ações A = {ficar com 2, dividir, ficar com 0, sim, não};
- Conjunto de nós não terminais N = {A, B, C, D};
- Conjunto de nós terminais T = {E, F, G, H, I, J};
- Função χ, com as opções A $\mapsto$ficar com 2, A $\mapsto$dividir, A $\mapsto$ficar com 0, B $\mapsto$sim, B $\mapsto$não, C $\mapsto$sim, C $\mapsto$não, D $\mapsto$sim, D $\mapsto$não;
- Função κ, com as opções A $\mapsto$1, B $\mapsto$2, C $\mapsto$2, D $\mapsto$2;
- Função ω com as opções (A, ficar com 2) $\mapsto$B, (A, dividir) $\mapsto$C, (A, ficar com 0) $\mapsto$D, (B, sim) $\mapsto$E, (B, não) $\mapsto$F, (C, sim) $\mapsto$G, (C, não) $\mapsto$H, (D, sim) $\mapsto$I, (D, não) $\mapsto$J;
- Função μ_1 = (E $\mapsto$2, F $\mapsto$0, G $\mapsto$1, H $\mapsto$0, I $\mapsto$0, J $\mapsto$0);
- Função μ_2 = (E $\mapsto$0, F $\mapsto$0, G $\mapsto$1, H $\mapsto$0, I $\mapsto$2, J $\mapsto$0).

Com relação aos payoff finais de cada jogador, podemos afirmar que $\mu_1(\mathrm{E}) = \mu_2(\mathrm{I}) = 2$; $\mu_1(\mathrm{G}) = \mu_2(\mathrm{G}) = 1$; $\mu_1(\mathrm{F}) = \mu_1(\mathrm{H}) = \mu_1(\mathrm{I}) = \mu_1(\mathrm{J}) = \mu_2(\mathrm{E}) = \mu_2(\mathrm{F}) = \mu_2(\mathrm{H}) = \mu_2(\mathrm{J}) = 0$.

> "*Em um jogo com informação perfeita, o processo de interação estratégica se desenvolve em etapas sucessivas, em uma ordem predeterminada, e sempre que um jogador se move ele conhece tudo que cada jogador observou ou fez em cada momento anterior do jogo.*" (MYERSON, 2013)

Vamos mostrar um segundo exemplo, simulando uma “guerra dos dentistas”. Suponha que uma pequena cidade do interior tenha apenas um dentista, que atende na principal rua desta cidade, e pratica valores um pouco maiores, pois não existe concorrência. Este dentista tem um lucro de R$ 15.000,00 mensais. Um segundo dentista planeja abrir um consultório nesta pequena cidade, na mesma rua que o outro dentista tem seu consultório. Chamaremos o dentista que já atende na cidade como dentista 1 e o novo dentista como dentista 2. Perceba que um jogador pode optar por uma das estratégias disponíveis já sabendo qual estratégia foi escolhida pelo outro jogador.

O primeiro a decidir é o dentista 2, se entra ou não entra no mercado, abrindo ou não seu consultório nesta pequena cidade do interior. Se ele entrar no mercado, praticará exatamente os mesmos preços cobrados pelo dentista 1. Caso ele opte por não entrar no mercado, o dentista 1 toma a decisão de manter os preços e seu lucro de R$ 15.000,00 mensais. Não é viável, neste caso, aumentar ou diminuir os valores, já que não existe concorrência.

Agora, se o dentista 2 resolver entrar no mercado, o dentista 1 deverá tomar uma decisão: se aumenta, mantém ou diminui seus valores. Se manter os valores, o mercado será dividindo, gerando um lucro de R$ 9.000,00 mensais para ele, que já está no mercado, e um lucro mensal de R$ 6.000,00 para o dentista 2. Se o dentista 1 praticar valores maiores que o dentista 2, ele perderá boa parte da clientela, tendo um lucro mensal de R$ 5.000,00 contra um lucro de R$ 12.000,00 mensais do dentista 2. Mas, se ele diminuir seus valores praticados, terá um lucro de R$ 11.000,00 mensais contra um lucro de apenas R$ 2.000,00 mensais do dentista 2. Os *payoffs* gerados são os lucros, em milhares de reais, dos dentistas envolvidos no jogo, sendo representado pela árvore abaixo.

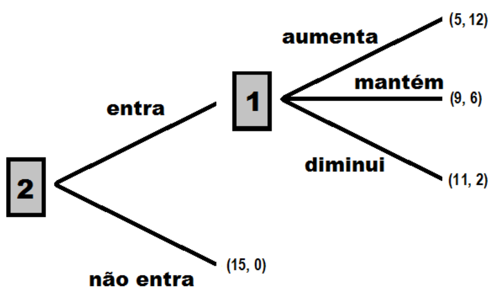

Figura 6 – Árvore da guerra dos dentistas

3.2 JOGOS COM INFORMAÇÃO IMPERFEITA

Por outro lado, os jogos com informação imperfeita são aqueles em que pelo menos um dos jogadores tem a sua disposição apenas informações parciais sobre o jogo. Nesse sentido, pode ocorrer que um dos jogadores não saiba a estratégia escolhida pelo jogador que efetuou o movimento anterior. Ademais, pode ocorrer que um dos jogadores não saiba os possíveis movimentos futuros dos outros jogadores.

O jogo de dominó é um exemplo de jogo na forma extensiva com informação imperfeita, pois, apesar de cada jogador já ter conhecimento de todos os movimentos efetuados anteriormente, a mão de um jogador está escondida do outro jogador. Os jogos de cartas também são exemplos de jogos com informação imperfeita.

Em muitos jogos, alguns jogadores não possuem nenhum conhecimento dos movimentos realizados por outros jogadores, ou ainda, em jogos mais extensos, alguns jogadores podem ter memória limitada, não lembrando sequer de alguns, ou todos seus movimentos anteriores.

De acordo com (SHOHAM; LEYTON-BROWN, 2008), um jogo de informação imperfeita na forma extensiva é um jogo no qual os nós de escolha de cada jogador são particionados em conjuntos de informações; intuitivamente, se dois nós de escolha estiverem no mesmo conjunto de informações, o agente não poderá distinguir entre eles. Do ponto de vista técnico, os jogos de informação imperfeita são obtidos sobrepondo-se a uma estrutura de partição, em conexão com modelos de conhecimento, em um jogo de informação perfeita.

A seguir, vamos apresentar o modelo matemático para este tipo de jogo:

Definição 3.2 *Um jogo finito com informação imperfeita na forma extensiva pode ser descrito como uma tupla* $\boldsymbol{L}$ = *(J, A, N, T, χ, κ, ω, μ, I), onde:*

$\boldsymbol{J}$ *é um conjunto de n jogadores;*

$\boldsymbol{A}$ *é um conjunto de ações;*

$\boldsymbol{N}$ *é um conjunto de nós não terminais;*

$\boldsymbol{T}$ *é um conjunto de nós terminais, sendo* $N \cap T = \emptyset$*;*

$\boldsymbol{\chi}$ *é uma função* $N \rightarrow 2^A$ *que atribui um conjunto de possíveis ações em cada nó de escolha;*

$\boldsymbol{\kappa}$ *é uma função* $N \rightarrow J$ *que atribui um jogador que escolhe uma ação ao respectivo nó de escolha não terminal;*

$\boldsymbol{\omega}$ *é uma função* $N \times A \rightarrow N \cup T$ *que verifica um nó de escolha e sua respectiva ação, encaminhando para outro nó de escolha ou nó* *terminal, sendo que* $\forall\, n_1,\, n_2 \in N$ *e* $\forall\, a_1,\, a_2 \in A$*, se* $\omega(n_1,\, a_1) = \omega(n_2,\, a_2)$*, então* $n_1 = n_2$ *e* $a_1 = a_2$*;*

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\, \mu_2,\, ...,\, \mu_n)$*, onde* $\mu_i\colon T \to \mathbb{R}$ *é uma função com payoff para o jogador i nos nós terminais T.*

$\boldsymbol{I} = (I_1,\, I_2,\, ...,\, I_m)$*, onde* $I_i = (I_{i,1},\, I_{i,2},\, ...,\, I_{i,q_i})$ *é um conjunto de classes de equivalência, ou seja, uma partição de* $\{n \in N : \kappa(n) = i\}$ *com a propriedade que* $\chi(n) = \chi(n')$ *e* $\kappa(n) = \kappa(n')$*, sempre que existir um j para o qual* $n \in I_{i,j}$ *e* $n' \in I_{i,j}$*.*

Cada elemento das classes de equivalência I_1, I_2, ..., I_m é denominado conjunto de informações. De acordo com (FIANI, 2006), um conjunto de informação é um conjunto constituído pelos nós que o jogador acredita poder ter alcançado em uma dada etapa do jogo, quando é sua vez de jogar. Um conjunto de informação não pode conter nós que pertençam a jogadores diferentes e não pode conter nós em sequência. Os nós de um conjunto de informação não podem apresentar diferentes conjuntos de ação.

Note que as ações possíveis em cada nó de escolha $n_i \in$ N em um conjunto de informações deve ser o mesmo para que os nós de escolha n_1, n_2, ..., $n_m \in$ N sejam necessariamente indistinguíveis, pois, caso contrário, o jogador seria capaz de identificar em que nó se encontra.

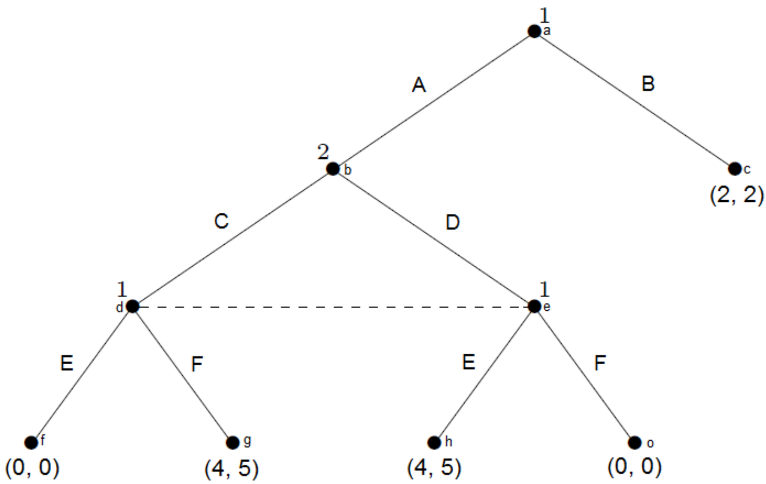

Figura 7 – Exemplo de jogo com informação imperfeita

Exemplo 3.3 *Considere o jogo ilustrado na Figura 7, onde o jogador*

1 tem dois conjuntos de informações: o conjunto incluindo o nó de escolha superior e o conjunto incluindo os nós de escolha inferiores. Note que em ambos nós de escolha inferiores são possíveis as mesmas ações. Consideremos que o jogador 1, quando escolher entre as estratégias E e F, não tem conhecimento se o jogador 2 optou pela estratégia C ou pela estratégia D. A linha tracejada indica que o jogador 1 não tem conhecimento em que parte do jogo está, portanto, sem saber qual foi a última jogada do jogador 2.

Assim, conforme pudemos observar na Figura 7, neste jogo temos:

- Conjunto de jogadores J = {1, 2};
- Conjunto de ações A = {A, B, C, D, E, F};
- Conjunto de nós não terminais N = {a, b, d, e};
- Conjunto de nós terminais T = {c, f, g, h, o};
- Função χ, com as opções a $\mapsto$A, a $\mapsto$B, b $\mapsto$C, b $\mapsto$D, d $\mapsto$E, d $\mapsto$F, e $\mapsto$E, e $\mapsto$F;
- Função κ, com as opções a $\mapsto$1, b $\mapsto$2, d $\mapsto$1, e $\mapsto$1;
- Função ω com as opções (a, A) $\mapsto$b, (a, B) $\mapsto$c, (b, C) $\mapsto$d, (b, D) $\mapsto$e, (d, E) $\mapsto$f, (d, F) $\mapsto$g, (e, E) $\mapsto$h, (e, F) $\mapsto$o;
- Vetor μ_1 = (c $\mapsto$2, f $\mapsto$0, g $\mapsto$4, h $\mapsto$4, o $\mapsto$0);
- Vetor μ_2 = (c $\mapsto$2, f $\mapsto$0, g $\mapsto$5, h $\mapsto$5, o $\mapsto$0);
- Conjunto de classes de equivalência $I_1 = \big\{\{\text{a}\}, \{\text{d,e}\}\big\}$;
- Conjunto de classes de equivalência $I_2 = \big\{\{\text{b}\}\big\}$.

Com relação aos payoff finais de cada jogador, podemos afirmar que $\mu_2(\text{g}) = \mu_2(\text{h}) = 5$, $\mu_1(\text{g}) = \mu_1(\text{h}) = 4$, $\mu_1(\text{c}) = \mu_2(\text{c}) = 2$, $\mu_1(\text{f}) = \mu_1(\text{o}) = \mu_2(\text{f}) = \mu_2(\text{o}) = 0$.

Considere novamente o jogo dilema dos prisioneiros, representado como um jogo na forma normal no Exemplo 2.2. Um jogo na forma extensiva com informação imperfeita equivalente é mostrado na Figura 8. Note que escolhemos fazer que o jogador 1 escolha antes que o jogador 2, mas poderíamos ter escolhido fazer o jogador 2 escolher primeiro que o jogador 1.

O dilema dos prisioneiros é um caso especial, pois este é um jogo com uma estratégia dominante e, em particular, um equilíbrio de Nash de estratégia pura: a estratégia de ambos cooperarem, representado pelo *payoff R(coopera,coopera) = (-5, -5)*. Mas isto não é válido em geral para jogos de informação imperfeita e este é um assunto que não vamos investigar neste trabalho.

Podemos afirmar, a partir deste exemplo, que qualquer jogo na forma normal pode ser convertido em um jogo na forma extensiva equivalente.

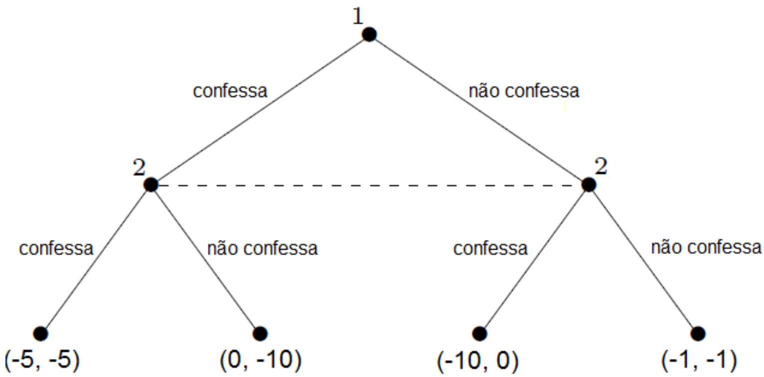

Figura 8 – Dilema dos prisioneiros na forma extensiva

3.3 SUBJOGOS

De forma intuitiva, analisando o jogo esboçado na Figura 8, podemos pensar que cada nó não terminal do jogo original, neste caso os nós de decisão dos jogadores 1 e 2, dá origem a um novo jogo, que vamos denominar subjogo. Utilizando esta ideia, podemos afirmar que um subjogo é um jogo dentro de outro jogo, e também, podemos afirmar que o jogo completo é um subjogo de si mesmo.

Definição 3.3 *Um subjogo é qualquer parte de um jogo na forma extensiva que obedece aos seguintes critérios:*

1. *Tem início em um único nó não terminal $n_i \in N$;*
2. *Contém todos os nós não terminais $n_j \in N$ que seguem o nó inicial $n_i \in N$, finalizando nos nós terminais $t_i \in T$;*

3. *Seja o conjunto de informação $C \in I_j$, para um jogador j; se algum nó não terminal $n_i \in C$ está contido no subjogo SJ_i, então SJ_i contém todos os nós não terminais n_1, n_2, ..., $n_m \in C$.*

Um sistema prático para detectar um subjogo consiste em, primeiramente, escolher um subconjunto de nós terminais $t_{i1}, t_{i2}, ..., t_{im} \in T$, que sejam antecedidos por um mesmo nó de decisão $n_i \in N$. A partir deste nó de decisão, investiga-se os três critérios definidos anteriormente. Se identificarmos um subjogo, aplicamos mais uma vez este sistema prático ao nó não terminal que antecede este nó de decisão n_i, analisando se existe a possibilidade de detectarmos um subjogo mais amplo, que inclua o primeiro subjogo identificado. Este sistema é repetido até chegarmos ao nó inicial n_1. Assim, identificaremos todos os subjogos de um jogo.

A maneira mais apropriada de visualizarmos a definição de subjogo é através da representação em forma de árvore. Considere novamente o jogo "guerra dos dentistas", que detalhamos anteriormente e está apresentado na Figura 9:

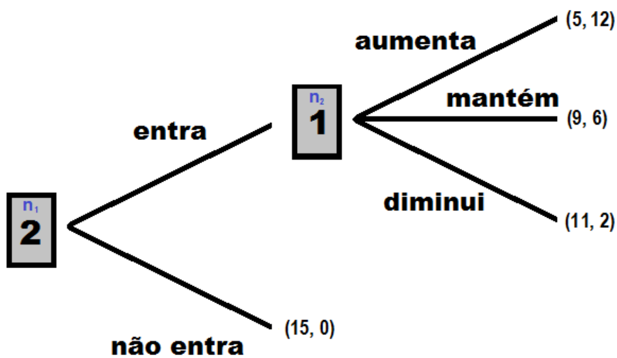

Figura 9 – Subjogos na guerra dos dentistas (1)

Vamos verificar os critérios para definirmos os subjogos deste jogo. Para tanto, aplicaremos o sistema prático no jogo representado pela Figura 9, começando pelos três nós terminais do ramo superior. Seja o nó n_2 o antecessor destes três nós terminais, verificaremos os três critérios descritos na Definição 3.3, para estabelecermos se, a partir do nó n_2, é possível começarmos um subjogo.

1. Tem início em um único nó não terminal $n_i \in$ N?

Sim, ao iniciar-se em n_2, nosso presumível subjogo inícia-se em um único nó não terminal.

2. Contém todos os nós não terminais $n_j \in$ N que seguem o nó inicial $n_i \in$ N, finalizando nos nós terminais $t_i \in$ T?
Sim, este presumível subjogo iniciando em n_2 contém todos os nós que o seguem, no caso, os três nós terminais do ramo superior.

3. Seja o conjunto de informação C $\in I_1$, para o jogador 1; se o nó não terminal $n_2 \in$ C está contido no subjogo SJ_1, então SJ_1 contém todos os nós não terminais pertencentes a C?
Sim, como o nó n_2 é elemento único do conjunto de informação que o contém, podemos afirmar que um presumível subjogo iniciando em n_2 contém todos os nós deste conjunto de informações.

Satifeitos os três critérios acima, verificamos o subjogo SJ_1 inicia no nó n_2.

Agora nos resta apenas mais um nó não terminal: o nó n_1. Perceba que este é o nó inicial do jogo, portanto, devemos incluir nos subjogos o jogo completo, que é um subjogo de si mesmo, ao qual denominaremos de SJ_2. Assim, identificamos todos os subjogos do jogo “guerra dos dentistas”.

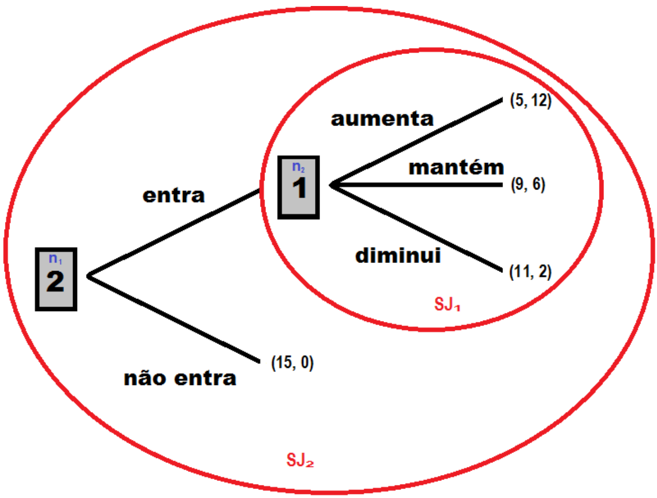

Figura 10 – Subjogos na guerra dos dentistas (2)

> *"A ideia de um subjogo é a contenção interna. Portanto, a segunda e a terceira restrições simplesmente dizem que você não pode sair do subjogo quando estiver nele e que terá, dentro do subjogo, todas as informações necessárias para tomar decisões. A primeira restrição é semelhante à exigência de que a raiz de uma árvore seja bem definida; diz que temos um ponto de partida único para o subjogo. Também é costume chamar o jogo inteiro de um subjogo (por si só)."* (DUTTA, 1999)

3.4 EQUILÍBRIO DE NASH PERFEITO EM SUBJOGOS

Na seção anterior, vimos o que são subjogos. Na presente seção veremos o que é um equilíbrio de Nash perfeito nestes subjogos. Inicialmente, devemos saber que, para um conjunto de estratégias ser um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, ele deverá atender duas condições:

1. Ser um equilíbrio de Nash para o jogo inteiro;

2. Ser um equilíbrio de Nash para cada subjogo deste jogo.

Na seção anterior, vimos também que um jogo completo é um subjogo de si mesmo. Considerando as duas condições acima, e que um jogo completo é um subjogo de si mesmo, para um conjunto de estratégias ser um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, podemos adotar a seguinte definição:

Definição 3.4 *Um equilíbrio de Nash é perfeito em subjogos se as estratégias dos jogadores constituem um equilíbrio de Nash em cada subjogo. (SELTEN, 1965)*

No Capítulo 2, denotamos que um jogador i terá seu conjunto das estratégias dado por $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{im}\}$. Podemos então denotar o conjunto das estratégias deste jogador i em um subjogo como sendo $E_i(s) = \{e_i(s)_1, e_i(s)_2, ..., e_i(s)_m\}$. Assim sendo, (SELTEN, 1965) nos apresenta que, em um jogo com n jogadores, o conjunto de estratégias $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{im}\}$ constitui um equilíbrio de Nash perfeito no subjogo se o vetor de estratégias de subjogos $e(s) = (e_1(s), e_2(s), ..., e_m(s))$ forma um equilíbrio de Nash em cada subjogo s.

Vamos rever a forma extensiva da "guerra dos dentistas", que já foi utilizada como exemplo na Seção 3.3.

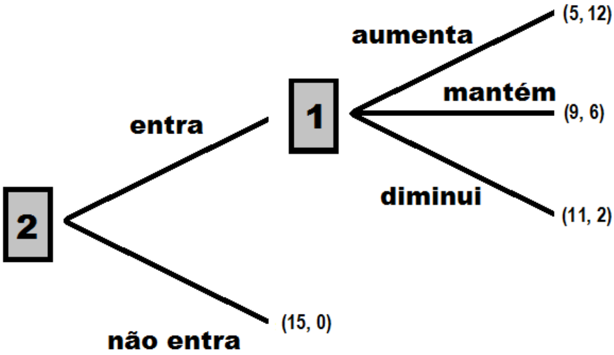

Figura 11 – Guerra dos dentistas na forma extensiva

Doravante, quando nos referirmos a um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, expressaremos simplesmente "equilíbrio perfeito" ou apenas utilizaremos a sigla "ENPS".

Para identificarmos os equilíbrios perfeitos, é necessário identificarmos todos os equilíbrios de Nash deste jogo. Para tanto, podemos reproduzir a "guerra dos dentistas" na forma normal, conforme apresentado na matriz de resultados a seguir:

		dentista 2	
		entra	*não entra*
dentista 1	*aumenta*	5, 12	15, 0
	mantém	9, 6	15, 0
	diminui	11, 2	15, 0

Tabela 21 – Guerra dos dentistas na forma normal

Devemos encontar todos os equilíbrios de Nash neste jogo. Este procedimento é necessário, pois para um conjunto de estratégias ser equilíbrio perfeito, ele também deverá ser equilíbrio de Nash, dado que, de acordo com (FIANI, 2006), todo equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é, ao mesmo tempo, um equilíbrio de Nash, mas nem todo equilíbrio de Nash em um jogo sequencial é, necessariamente, um equilíbrio perfeito em subjogos. Posteriormente, na Seção 3.6, apresentaremos um exemplo que ilustra essa possibilidade.

Lembrando que, para verificarmos se um jogo tem um ou mais equilíbrios de Nash, devemos analisar as opções de cada jogador, destacando as melhores opções de cada um deles, conforme cada caso, reproduzindo a matriz de resultados deste jogo.

		dentista 2	
		entra	*não entra*
dentista 1	*aumenta*	5, 12	15, 0
	mantém	9, 6	15, 0
	diminui	**11**, **2**	15, 0

Tabela 22 – Equilíbrio de Nash para a guerra dos dentistas

Note que, conforme podemos visualizar na matriz de resultados, existe apenas um equilíbrio de Nash neste jogo, representado pelo *payoff* $R(diminui, entra) = (11,\ 2)$.

Vimos que esse jogo possui apenas dois subjogos: um subjogo que inicia no nó não terminal n_2 e outro subjogo que é o jogo completo. O equilíbrio de Nash (*diminui*, *entra*) é o nosso candidato ao equilíbrio perfeito do jogo. Devemos testar se este equilíbrio de Nash também é equilíbrio em cada subjogo da "guerra dos dentistas".

O subjogo SJ_1 inicia no nó de decisão do dentista 1, onde ele decidirá entre aumentar, manter, ou diminuir seus preços, após o dentista 2 ter decidido entrar no mercado. Logo, devemos investigar se no equilíbrio de Nash (*diminui*, *entra*) a estratégia caracterizada por este equilíbrio para o dentista 1, na hipótese do dentista 2 decidir entrar, gera o melhor resultado. Por outro lado, caso o dentista 1 decida por diminuir seus preços, devemos investigar se o equilíbrio de Nash (*diminui*, *entra*) gera o melhor *payoff* ao dentista 2, porque, ao dedicarmos nossa análise ao subjogo SJ_1, estamos levando em consideração somente a circunstância de relação estratégica entre os dentistas 1 e 2, supondo que o dentista 2 decida entrar no mercado. Desta forma, concluímos que a combinação de estratégias (*diminui*, *entra*) é equilíbrio de Nash no subjogo SJ_1.

O equilíbrio de Nash (*diminui*, *entra*) é também equilíbrio de Nash no SJ_2. Quando consideramos o desenvolvimento completo do jogo, podemos afirmar com certeza que o dentista 2 entrar e o dentista 1 diminuir é um equilíbrio, haja visto que, se o dentista 2 decidir entrar e o dentista 1 decidir mudar sua estratégia para *mantém* ou *aumenta*, nada tem a ganhar, pelo contrário, tem seu resultado reduzido de 11 para 9 se mantiver, e de 11 para 5 se aumentar. De outro modo, dado que o dentista 1 tenha escolhido diminuir, uma mudança de estratégia do dentista 2 de *entra* para *não entra* reduziria seu *payoff* de 2 para 0. Assim, o dentista 2 não teria a ganhar se mudasse sua decisão, o que comprova que a combinação de estratégias (*diminui*, *entra*) é o equilíbrio de Nash no jogo completo.

Consequentemente, a combinação de estratégias (*diminui*, *entra*), representada pelo *payoff* *R(diminui,entra) = (11, 2)*, é o equilíbrio perfeito do jogo "guerra dos dentistas", pois é o equilíbrio de Nash nos dois subjogos: SJ_1 e SJ_2.

Na próxima seção, mostraremos um processo para solucionarmos jogos na forma extensiva: o método da indução reversa.

3.5 INDUÇÃO REVERSA

O método da indução reversa é o processo utilizado para indicar uma sequência de escolhas ótimas que um jogo na forma extensiva pode indicar. Para utilizarmos este método, devemos analisar inicialmente o final do jogo, examinando qual a última decisão a ser tomada e definir qual a escolha ótima em qualquer situação naquele instante. Utilizando essas informações e sabendo qual o *payoff* de cada jogador, examinamos qual a penúltima escolha a ser considerada, novamente definindo qual a melhor escolha em qualquer circunstância naquele momento. Este processo continua até chegarmos no primeiro nó de decisão, buscando constatar as melhores estratégias para cada jogador.

Teorema 3.1 *(Zermelo) Todo jogo finito de informação perfeita tem um equilíbrio de Nash de estratégia pura que pode ser derivado por indução reversa. Além disso, se nenhum jogador tiver os mesmos payoffs em quaisquer dois nós terminais, a indução reversa resultará em um único equilíbrio de Nash. (EBBINGHAUS et al., 2010)*

Teorema 3.2 *Todo jogo na forma extensiva com informação perfeita tem pelo menos um equilíbrio de subjogo perfeito que pode ser calculado por indução reversa. (KARLIN; PERES, 2017)*

Para ilustrarmos a utilização do método da indução reversa, vamos executá-lo na "guerra dos dentistas", que detalhamos nas seções anteriores. Neste método, selecionaremos os equilíbrios perfeitos.

Na primeira parte da utilização deste método, analisaremos a última decisão a ser tomada. Verifica-se que a melhor escolha naquele instante para o dentista 1 é diminuir seus preços, conforme vemos na Figura 12.

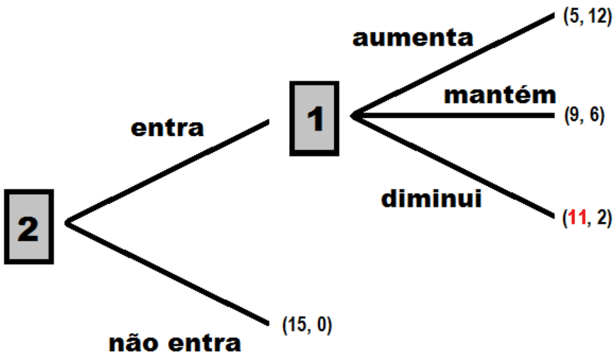

Figura 12 – Indução reversa na guerra dos dentistas (1)

Sabendo que a melhor escolha para o dentista 1 é diminuir seus preços, podemos eliminar as estratégias *aumenta* e *mantém* deste dentista naquele nó de escolha, pois o dentista 2 poderá decidir em utilizar a estratégia *entra*. Ao eliminarmos estas duas estratégias, seus *payoffs* tornaram-se insignificantes para nossa análise. Então, podemos omitir estas duas estratégias da árvore deste jogo, ficando representado da seguinte maneira:

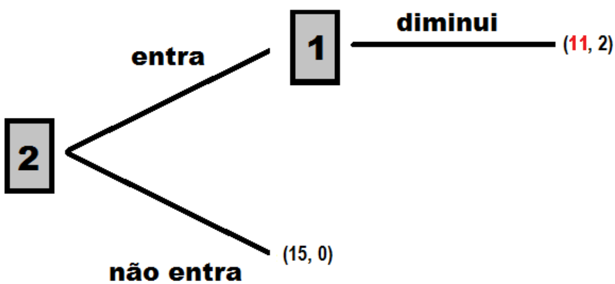

Figura 13 – Indução reversa na guerra dos dentistas (2)

Podemos agora nos dedicar com exclusividade na escolha do dentista 2, que é o primeiro nó de decisão deste jogo. Verifica-se que a melhor estratégia para ele é entrar no mercado, pois gera um *payoff* maior que a estratégia *não entra*.

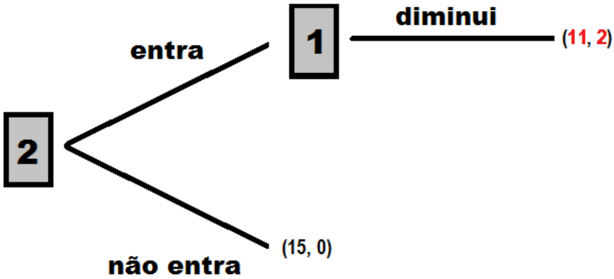

Figura 14 – Indução reversa na guerra dos dentistas (3)

Assim, completamos a análise da "guerra dos dentistas", chegando no resultado final do jogo: o dentista 2 entra no mercado e o dentista 1 diminui seus preços.

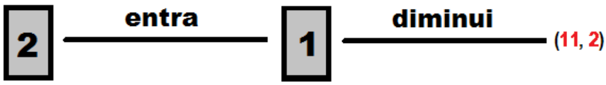

Figura 15 – Indução reversa na guerra dos dentistas (4)

> "*Em um jogo sequencial de informação perfeita, uma combinação de estratégias é um equilíbrio perfeito em subjogos se, e somente se, essa combinação é selecionada como um equilíbrio de Nash por intermédio de indução reversa.*" (FIANI, 2006)

Perceba que o resultado pelo método da indução reversa é o mesmo que alcançamos ao estudarmos os equilíbrios perfeitos deste jogo na seção anterior. Nos jogos extensivos com informação perfeita, a resposta por indução reversa condiz com o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, e isto pode ser afirmado de forma geral.

3.6 OUTROS EXEMPLOS DE JOGOS

Para finalizarmos este capítulo, destacaremos nesta seção dois exemplos de jogos.

Iniciaremos pela “batalha dos supermercados”. Neste exemplo, duas empresas detêm o duopólio de rede de lojas de supermercados em uma cidade. Os departamentos de marketing destas empresas devem decidir uma estratégia das três escolhas disponíveis cada: fazer muita publicidade, fazer pouca publicidade ou não fazer publicidade.

Este jogo é representado pela árvore abaixo, onde S1 é o supermercado 1, S2 é o supermercado 2, FM significa fazer muita publicidade, FP significa fazer pouca publicidade, e NF significa não fazer publicidade. Os *payoffs* representam os lucros mensais projetados, em milhões de reais, para cada caso.

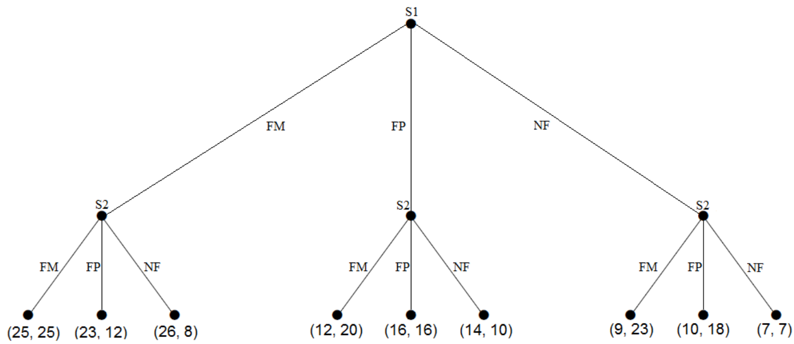

Figura 16 – Batalha dos supermercados (posição inicial)

Utilizaremos o método da indução reversa para resolvermos este jogo. Sabendo que é um jogo de informação perfeita, iniciaremos pela análise do final deste jogo, onde examinaremos a última decisão a ser tomada, neste caso, a decisão do supermercado 2.

Caso o supermercado 1 decida fazer muita publicidade, verifica-se que a melhor escolha para o supermercado 2 também é fazer muita publicidade.

Na hipótese do supermercado 1 fazer pouca publicidade, a melhor escolha para o supermercado 2 continua sendo fazer muita publicidade.

Agora, suponha que o supermercado 1 decida pela estratégia de não fazer publicidade, a melhor escolha para o supermercado 2 ainda é fazer muita publicidade.

Perceba que a estratégia fazer muita publicidade é dominante para o supermercado 2.

Após definirmos as escolhas ótimas para o supermercado 2, vamos destacá-las, reproduzindo a árvore desse jogo através da Figura 17.

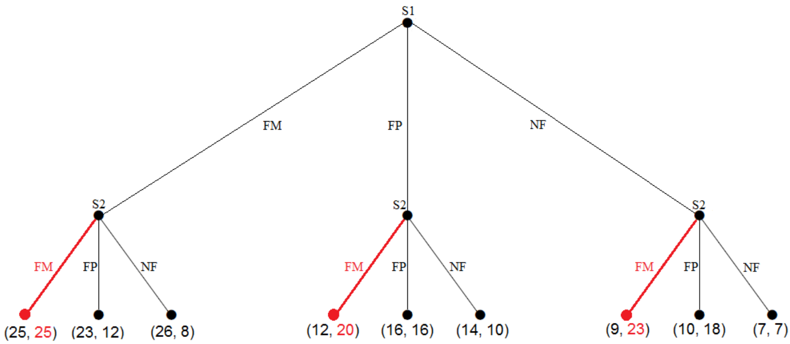

Figura 17 – Batalha dos supermercados com escolhas ótimas do S2

Sabendo que a melhor escolha para o supermercado 2 é fazer muita publicidade, nos dedicaremos agora na estratégia do supermercado 1, que é o primeiro nó de decisão deste jogo. Os *payoffs* para o supermercado 1, sabendo da escolha do supermercado 2, são: 25 fazendo muita publicidade, 12 fazendo pouca publicidade e 9 não fazendo publicidade. Verifica-se que a melhor estratégia para o supermercado 1 também é fazer muita publicidade, pois gera um *payoff* maior que as demais estratégias.

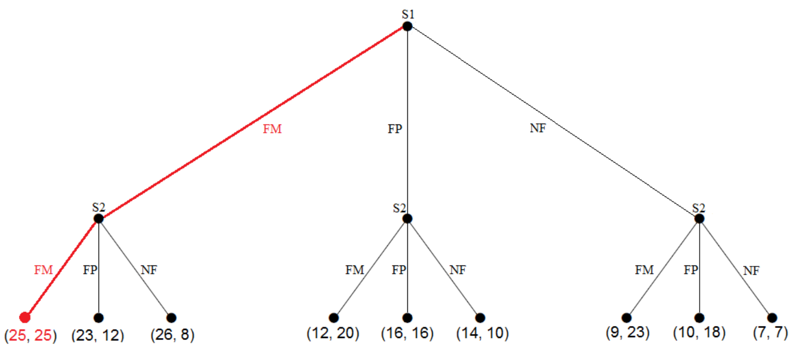

Figura 18 – Batalha dos supermercados (resultado final)

Assim, aplicando o método da indução reversa, completamos a análise da "batalha dos supermercados", chegando no resultado final deste jogo: as duas redes de supermercados devem fazer muita publicidade.

Note que, conforme podemos visualizar na árvore da Figura 18, existe apenas um equilíbrio de Nash neste jogo, representado através do *payoff R(fazer muita, fazer muita) = (25, 25).*

Nosso segundo exemplo é a "Destruição Mútua Garantida" ("Mutual Assured Destruction - MAD", em inglês), que é uma ideologia militar e política de segurança nacional cuja a utilização de armamento nuclear em grande escala por dois ou mais países poderia acarretar na completa destruição dos países envolvidos.

Dois países, que chamaremos de A e B, possuem armas nucleares. O país A é ofensivo e B é benevolente. O país A tem duas estratégias para escolher: ou escala a corrida armamentista ou simplesmente nada faz e mantém a paz. Se o país A decidir escalar, o país B tem duas opções de estratégia: retaliar ou recuar. A Figura 19 mostra a evolução do jogo em cada evento.

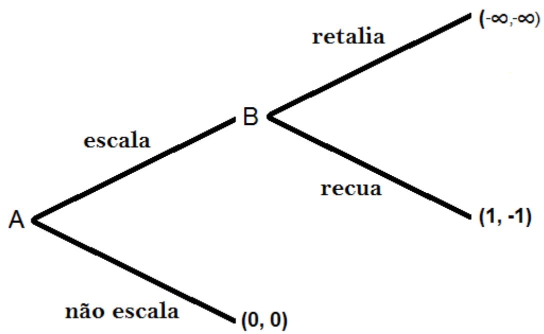

Figura 19 – Destruição Mútua Garantida

Se o país A acredita que o país B irá retaliar se ele escalar, então sua melhor ação é não escalar, mantendo a paz. Assim, a combinação de estratégias (*não escalar*, *retaliar*), resultando no *payoff* (0, 0), é um equilíbrio de Nash neste jogo, pois, uma vez armados, nenhum dos lados tem qualquer incentivo para iniciar um conflito ou desarmar. Porém, não é um equilíbrio perfeito, já que no subjogo que inicia no nó de decisão do país B, seu *payoff* é maximizado ao optar pela estratégia de recuar, ao invés de retaliar. Neste subjogo, o equilíbrio perfeito é a combinação de estratégias (*escalar*, *recuar*), a qual resulta no *payoff* (1, -1).

Qual equilíbrio faz mais sentido? A ameaça do país B de retaliar no caso de uma escalada do país A pode ou não ser credível, uma vez que irá resultar em um resultado significativamente pior para o país B do que se ele escolher por recuar. Assim, o país A pode não acreditar que o país B irá, efetivamente, responder dessa maneira. No entanto, sistemas nucleares às vezes são configurados para responder instantaneamente no caso de um ataque, justamente para assegurar que a ameaça seja credível.

Este exemplo ilustra a relevância de poder se comprometer com uma estratégia.

No próximo capítulo, vamos abordar sobre a aplicação da teoria dos jogos em sala de aula no Ensino Fundamental, com o desenvolvimento de estratégias vencedoras no popular *jogo da velha*, onde, utilizando estas estratégias, um jogador não pode ser derrotado.

4 JOGO DA VELHA

No capítulo anterior, vimos o que são os jogos com ações sequenciais, os chamados jogos na forma extensiva. No presente capítulo, utilizaremos um jogo finito na forma extensiva de informação perfeita, o "jogo da velha". Vale ressaltar que este é um jogo de soma zero, pois os nós terminais são dados pelos *payoffs* (0, 0), (1, -1) ou (-1, 1), terminando com x movimentos, sendo $\{x \in \mathbb{N} \,|\, 5 \leq x \leq 9\}$.

Na busca da aplicação da teoria dos jogos em sala de aula nos anos finais do Ensino Fundamental, escolhemos o "jogo da velha", por ser popular e conhecido dos alunos nesta faixa etária.

Joga-se em um tabuleiro de três linhas por três colunas. Denotaremos por X o primeiro jogador a escolher uma das nove casas do tabuleiro. Este primeiro jogador pode ser definido através de um jogo de par ou ímpar, ou de um jogo de cara ou coroa. O segundo jogador será denotado por O.

Os jogadores colocam *Xs* e *Os* no tabuleiro, vencendo aquele jogador que conseguir colocar três *Xs* ou três *Os* alinhados, existindo três padrões vencedores: horizontal, vertical e diagonal. No caso de nenhum dos dois jogadores colocar três caracteres em linha, o jogo termina empatado, e é chamado de *velha*.

Utilizando a teoria dos jogos, podemos determinar que, empregando as estratégias corretas, mesmo sendo jogador X ou jogador O, este jogador nunca será derrotado, sendo que seu oponente conseguirá, no máximo, o empate.

Neste jogo, ser o primeiro jogador será mais vantajoso, pois este jogador pode escolher primeiro uma das nove casas e pode jogar com estratégias de ataque. Ser o segundo jogador, em geral, será mais desfavorável, pois este terá oito casas à disposição para sua primera escolha e geralmente jogará com estratégias defensivas.

Vamos considerar neste trabalho que ambos jogadores não são ingênuos e tentarão a todo momento impedir um ao outro de colocar três letras iguais alinhadas. Então, se o jogador X pode vencer com uma ação, essa será sua melhor ação naquele momento do jogo. Se o jogador O identifica que uma ação resultará em um cenário que o oponente pode vencer no próximo movimento, e que existe outra ação que poderá levar a um cenário em que o oponente pode, no máximo, empatar, então, esta última será a melhor ação para ele naquele momento do jogo.

Quando dois jogadores experientes disputam uma partida de jogo da velha, esta geralmente terminará empatada, salvo se um dos jogadores cometer um equívoco em suas estratégias, abrindo possibilidade do seu adversário vencer. Um jogador deve colocar três caracteres alinhados sempre que possível e, se isso não for viável, deve bloquear a ameaça de seu adversário colocar três caracteres alinhados. Quando ambos jogadores utilizam estas estratégias, não comentendo erros, a partida terminará empatada.

O jogo da velha foi retratado no filme "Jogos de Guerra" (War Games, 1983), onde o protagonista, Matthew Broderick, é um hacker que invade acidentalmente um computador militar norte-americano, ligado ao sistema de controle de armas nucleares, mas incapacitado de diferenciar entre simulação ou realidade. Um ataque soviético é simulado contra os Estados Unidos, assim, o computador tenta realizar um grande contra-ataque real, o que desencadearia a Terceira Guerra Mundial.

O protagonista faz o computador jogar o jogo da velha contra si mesmo. Antes de lançar os mísseis contra a União Soviética, o computador conhece o conceito da Destruição Mútua Assegurada, concluindo que, em uma guerra nuclear, a jogada vencedora é manter a paz (FANDANGO MOVIECLIPS, 2013).

Ideias e definições deste capítulo foram preparados com base nas descrições obtidas em (DUTTA, 1999), (GARDNER, 1988), (MYERSON, 2013) e (SCHAEFER, 2002).

4.1 ESTRATÉGIAS

Vamos considerar deste ponto em diante as posições do jogo da velha enumeradas conforme Figura 20.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 20 – Jogo da velha enumerado

Utilizaremos doravante uma notação alfanumérica para nos referirmos qual jogador escolheu determinada posição de jogo, sendo que a letra indica qual jogador efetuou o movimento e o número aponta a posição escolhida por este jogador naquele momento do jogo.

Por exemplo, se o jogador X decidir pela posição 1, esta jogada será chamada de X1; caso o jogador O decidir pela posição 9, esta jogada será chamada de O9; conforme veremos na Figura 21.

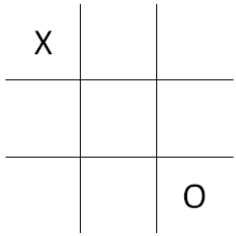

Figura 21 – Posições X1 e O9

Inicialmente, o jogo aparenta ter 9 possibilidades diferentes, correspondentes às 9 posições do tabuleiro. Contudo, ao aplicarmos as isometrias de rotação e de reflexão, verificamos que cada uma das 4 marcas de canto é estrategicamente equivalente as outras 3 marcas de canto, bem como cada uma das 4 marcas de aresta é estrategicamente equivalente as outras 3 marcas de arestas, e ainda temos o centro do tabuleiro.

Portanto, para fins de estratégia, existem apenas três marcas possíveis: canto, meio ou aresta.

Podemos representar o jogo da velha na forma extensiva, conforme mostrado na Figura 22, onde detalhamos a primeira decisão a ser tomada, e esta decisão pertence ao jogador X.

Note que, se o jogador X optar pela estratégia *canto*, o jogo é direcionado para a posição X1. Ao aplicarmos a isometria de reflexão horizontal, teremos a posição X3; se for aplicada a isometria de reflexão vertical, teremos a posição X7; e, ao aplicarmos a isometria de rotação de meia volta, teremos a posição X9. Então, as quatro marcas de canto são estrategicamente equivalentes.

Observe ainda que, ao decidir-se pela estratégia *aresta*, o jogo é direcionado para a posição X2. Ao aplicarmos a isometria de rotação de um quarto de volta no sentido anti-horário, teremos a posição X4; ao aplicarmos a isometria de rotação de um quarto de volta no sentido horário, teremos a posição X6; e ao aplicarmos a isometria de reflexão vertical, teremos a posição X8. Então, as quatro marcas de aresta são estrategicamente equivalentes.

Perceba também que, ao escolher a estratégia *meio*, existe apenas uma posição, que é a posição X5.

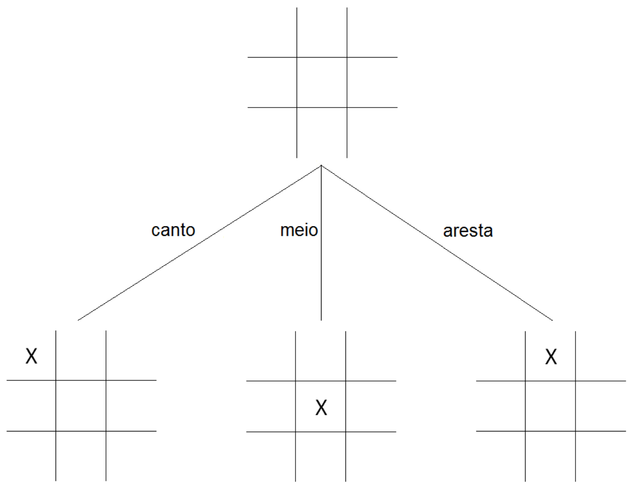

Figura 22 – Primeiras opções para o jogador X no jogo da velha

Após analisarmos as primeiras opções para o jogador X, vamos ampliar nossa representação do jogo da velha na forma extensiva através da Figura 23, agora também com a primeira decisão a ser tomada pelo jogador O.

Através das figuras 22 e 23, representamos apenas o início da árvore do jogo da velha. Ao estendermos esta árvore para perfazer todos os movimentos do jogo e seus possíveis resultados, esboçando a árvore completa, qualquer jogador pode verificar através desta árvore qual a melhor ação em qualquer momento do jogo, a partir de qualquer nó de decisão.

Mas, se esboçarmos a árvore completa, nosso desenho ficará com dimensões elevadas, não sendo possível o esboço em apenas uma página. Então, utilizaremos a numeração mostrada na Figura 20 para darmos sequência aos movimentos do jogo.

Note que utilizamos letras de A a L na Figura 23 para diferenciarmos as primeiras opções para o jogador O. Utilizaremos estas letras na sequência de nosso trabalho.

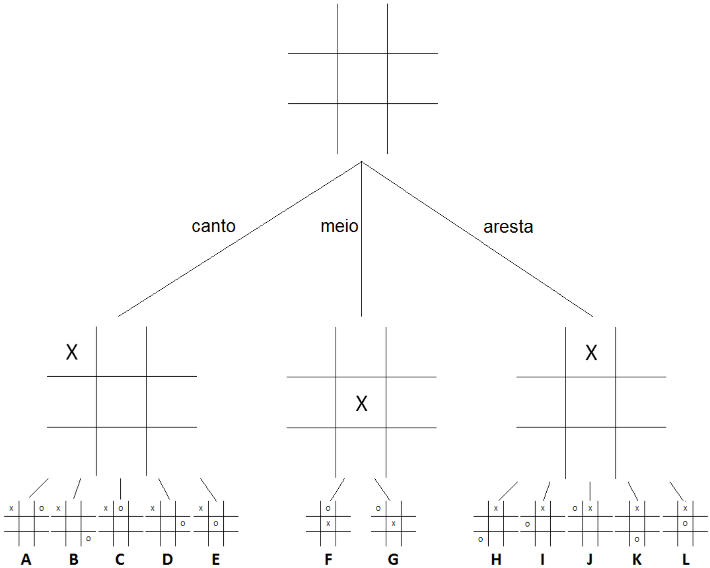

Figura 23 – Duas primeiras decisões na árvore para o jogo da velha

4.1.1 Movimento de abertura nº 1: canto

Suponha que o jogador X, em sua primeira decisão, escolheu a estratégia *canto*. Apesar do jogo aparentar ter 8 posições possíveis para o jogador O em sua primeira escolha, aplicaremos novamente as isometrias de rotação e de reflexão, reduzindo para 5 o número de estratégias disponíveis para o jogador O, as quais foram chamadas de A a E na Figura 23.

Ao optar pela estratégia A, o jogador O escolhe um canto adjacente a posição X1. Então, o jogo é direcionado para a posição O3. O jogador X, utilizando uma estratégia vencedora, escolhe marcar a posição X9. O jogador O não terá outra opção a não ser direcionar o jogo para a posição O5. Como o jogador X utilizou uma estratégia vencedora, marcará a posição X7 que, ao mesmo tempo, impede o jogador adversário colocar três Os em linha, e encaminha o jogo a vitória, pois, se o jogador O direcionar o jogo para a opção O4, o jogador X marcará a opção X8 e, se o jogador O direcionar o jogo para a opção O8, o jogador X marcará a opção X4.

A sequência de movimentos X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X7, ilustrada pela Figura 24, é vencedora para o jogador X, consequentemente, dando a vitória a este jogador.

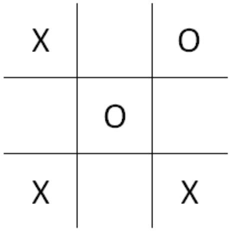

Figura 24 – Estratégia vencedora nº 1 para o jogador X

As quatro marcas de canto (X1, X3, X7 e X9) são estrategicamente equivalentes e, quando o jogador X escolhe a posição X1, pelas isometrias, a posição O3 é estrategicamente equivalente a posição O7.

Quando o jogador X escolhe inicialmente a estratégia *canto* e o jogador O opta por direcionar o jogo para um canto adjacente a esta posição, existem outras sequências vencedoras para o jogador X.

Veja outros exemplos da combinação de estratégias inicial (*canto*, *canto adjacente*) que dão a vitória ao jogador X:
X1 → O3 → X7 → O4 → X9;
X1 → O3 → X4 → O7 → X5;
X1 → O7 → X9 → O5 → X3;
X1 → O7 → X3 → O2 → X9;
X1 → O7 → X2 → O3 → X5;
X3 → O9 → X7 → O5 → X1;
X3 → O9 → X1 → O2 → X7;
X3 → O9 → X2 → O1 → X5;
X3 → O1 → X7 → O5 → X9;
X3 → O1 → X9 → O6 → X7;
X3 → O1 → X6 → O9 → X5;
X7 → O1 → X3 → O5 → X9;
X7 → O1 → X9 → O8 → X3;
X7 → O1 → X8 → O9 → X5;
X7 → O9 → X3 → O5 → X1;
X7 → O9 → X4 → O1 → X5;
X9 → O7 → X1 → O5 → X3;
X9 → O7 → X3 → O6 → X1;
X9 → O7 → X6 → O3 → X5;
X9 → O3 → X8 → O7 → X5.

Conforme demonstramos, verificamos que a combinação de estratégias inicial (*canto*, *canto adjacente*) é vencedora para o jogador X e, consequentemente, perdedora para o jogador O.

Continuamos supondo que o jogador X, em sua primeira decisão, escolha a estratégia *canto* e opte pela posição X1. Se o jogador O escolher o canto oposto (estratégia B), o jogo é direcionado para a posição O9. Mostraremos a seguir que a combinação de estratégias inicial (*canto*, *canto oposto*) também é vencedora para o jogador X.

O jogador X decide pela posição X1 (canto) enquanto o jogador O escolhe a posição O9 (canto oposto). Na sequência, o jogador X escolhe marcar a posição X7. O jogador O terá que bloquear e direcionar o jogo para a posição O4. O jogador X, ao escolher a posição X3, encaminha o jogo a vitória.

Então, conforme veremos na Figura 25, a sequência de movimentos X1 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X3 é vencedora para o jogador X.

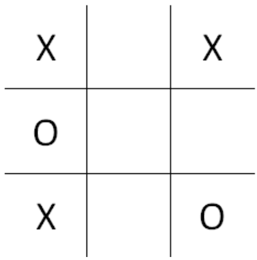

Figura 25 – Estratégia vencedora n^o 2 para o jogador X

Já vimos que as quatro marcas de canto são estrategicamente equivalentes. Assim, existem outras sequências vencedoras para o jogador X na combinação de estratégias inicial (*canto*, *canto oposto*). A seguir citamos alguns exemplos:
X1 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X7;
X1 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5;
X3 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X9;
X3 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X1;
X7 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X1 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X9;
X7 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X1;
X9 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X7;
X9 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X3.

Caso escolha a estratégia C, com o jogador X já decidido pela posição X1, o jogador O marcará o lado adjacente O2. Na sequência, o jogador X direciona o jogo para a posição X7, forçando o jogador O a efetuar um bloqueio na posição O4. No movimento seguinte, o jogador X marca a posição X5, conduzindo o jogo para a vitória. Portanto, a sequência de movimentos X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 é vencedora para o jogador X, conforme ilustramos na Figura 26:

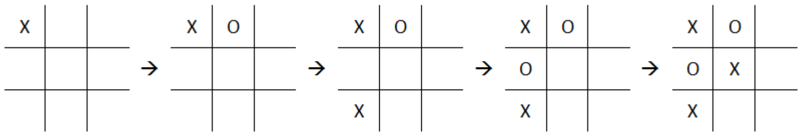

Figura 26 – Sequência vencedora nº 1 para o jogador X

Utilizando as isometrias e as posições estrategicamente equivalentes, existem dezenas de sequências vencedoras para o jogador X no caso do seu advesário decidir pela estratégia C. Vamos citar apenas alguns exemplos:
X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X4;
X1 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X5;
X3 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X5;
X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X5;
X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X8;
X7 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X1 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5;
X9 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X5.

Agora, chegamos na estratégia D, onde o jogador O decide por uma aresta oposta a posição X1. Neste caso, pelas isometrias, temos dois lados opostos a esta posição, quais sejam, os lados O6 e O8.

As três estratégias vencedoras para o jogador X, sabendo que sua primeira decisão é a posição X1 e a primeira decisão de seu adversário é a posição O6 são:
X1 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X5;
X1 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X3;
X1 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5.

Podemos destacar ainda as três estratégias vencedoras para o jogador X, quando sua primeira decisão é a posição X1 e a primeira decisão do jogador O é a posição O8:
X1 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X5;
X1 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X7;
X1 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5.

Chegamos a conclusão que a combinação de estratégias inicial (*canto*, *aresta oposta*) será geralmente vencedora para o jogador X. Representamos pela Figura 27 o primeiro caso: X1 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X5.

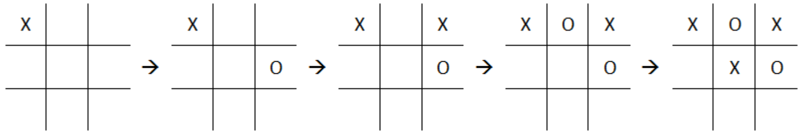

Figura 27 – Sequência vencedora nº 2 para o jogador X

A exemplo da estratégia C, ao utilizarmos as isometrias e as posições estrategicamente equivalentes na estratégia D, nos deparamos com dezenas de sequências vencedoras para o jogador X. Perceba que o jogador O, em todos os casos, tem como única alternativa em seu segundo movimento bloquear seu adversário. Abaixo, apenas alguns exemplos:
X1 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5;
X3 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X5;
X7 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X1;
X7 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X5;
X9 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X7.

Você deve estar se perguntando: não existe estratégia que evite a derrota do jogador O quando o jogador X, em sua primeira decisão, escolhe a estratégia *canto*? A resposta é: sim, existe.

Finalmente, o jogador O tem a sua disposição escolher o meio (estratégia E), que direcionará o jogo para a posição O5. Se o jogador O for experiente, vendo que o jogador X escolheu uma das quatro marcas de canto, decidirá continuamente pelo meio, assim, o jogo terminará empatado, pois estamos considerando um jogo da velha com dois jogadores não ingênuos, onde o jogador X tentará colocar três caracteres em linha e o jogador O bloqueará seu adversário. Desta maneira, quando ambos jogadores utilizam estas estratégias e não cometem erros, a partida terminará empatada.

Na sequência, veja vários exemplos da combinação de estratégias inicial (*canto*, *meio*) que levarão o jogo ao empate:

X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X9;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X8;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X9;

X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X7;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X4 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X9;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X4 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X7;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X4;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X4 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X3;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X3;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X2;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X2;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X9;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X8;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X7;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X4;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X8;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X8.

Após analisarmos as primeiras estratégias, percebemos que, se o jogador X, em sua primeira decisão, escolhe uma das quatro marcas de canto, o jogador O tem a sua disposição cinco estratégias, sendo que apenas uma levará o jogo para o empate e nas outras quatro estratégias o jogador O sairá derrotado. Se o jogador X for experiente, continuamente decidirá por um canto em sua primeira jogada, pois terá maior chance de vitória.

> "*O jogador X pode ganhar ou forçar um empate a partir de qualquer uma dessas marcas iniciais (canto, meio ou aresta); no entanto, jogar o canto dá ao adversário a menor escolha de quadrados que devem ser jogados para evitar a perda.*" (GARDNER, 1988)

4.1.2 Movimento de abertura nº 2: meio

Admita que o jogador X, em sua primeira decisão, escolha a estratégia *meio*. Apesar das aparentes oito opções possíveis para o jogador O em sua primeira escolha, aplicando as isometrias de rotação e de reflexão, reduziremos para apenas duas o número de estratégias disponíveis para o jogador O, quais sejam, a estratégia F (*aresta*) e a estratégia G (*canto*) na Figura 23.

Verificaremos que a combinação inicial de estratégias vencedora para o jogador X é (*meio*, *aresta*). Já a combinação de estratégias inicial (*meio*, *canto*) direcionará o jogo ao empate.

Quando o jogador X escolher inicialmente a estratégia *meio*, marcando a casa X5, o jogador O, ao optar pela estratégia F, escolhe uma das quatro arestas (O2, O4, O6 ou O8), que são estrategicamente equivalentes. Então, o jogador X decidirá por um dos quatro cantos (X1, X3, X5 ou X7), que também são estrategicamente equivalentes, forçando o jogador O a bloquear sua tentativa de colocar três Xs em linha. Mas, ao efetuar este bloqueio, o jogador O deixa a disposição de seu adversário outros dois cantos e três arestas, sendo que, definindo pelo canto correto ou pela aresta correta, o jogador X direciona o jogo para sua vitória.

A combinação de estratégias inicial (*meio*, *aresta*) possui dezenas de arranjos que levarão o jogo para vitória do jogador X. Vamos mencionar apenas cinco exemplos:
X5 → O2 → X1 → O9 → X4;
X5 → O4 → X7 → O3 → X9;
X5 → O6 → X3 → O7 → X1;
X5 → O6 → X3 → O7 → X2;
X5 → O8 → X3 → O7 → X9.

Veja na Figura 28 um exemplo de estratégia vencedora para o jogador X:

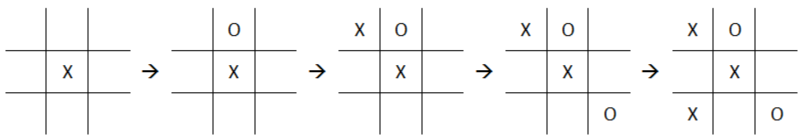

Figura 28 – Sequência vencedora nº 3 para o jogador X

Sendo os jogadores X e O experientes, a combinação de estratégias inicial (*meio*, *canto*), direcionará o jogo ao empate, pois, se o jogador O for experiente, vendo que o jogador X escolheu o meio, decidirá por uma das quatro marcas de canto. Se ambos jogadores utilizarem estratégias corretas e não cometem erros, a partida terminará empatada.

Abaixo, alguns exemplos da combinação de estratégias inicial (*meio*, *canto*) que levarão o jogo ao empate:

X5 → O1 → X2 → O8 → X4 → O6 → X3 → O7 → X9;
X5 → O3 → X2 → O8 → X9 → O1 → X4 → O6 → X7;
X5 → O3 → X6 → O4 → X2 → O8 → X9 → O1 → X7;
X5 → O7 → X4 → O6 → X8 → O2 → X1 → O9 → X3;
X5 → O7 → X8 → O2 → X1 → O9 → X6 → O4 → X3;
X5 → O9 → X8 → O2 → X6 → O4 → X7 → O3 → X1.

4.1.3 Movimento de abertura nº 3: aresta

Observamos no início desta seção que, para fins de estratégia, existem apenas três marcas possíveis: canto, centro ou aresta. Na presente subseção analisaremos a aresta como movimento de abertura de um jogo da velha.

Suponha que o jogador X, em sua primeira decisão, escolha a estratégia *aresta*. Então, o jogo é direcionado para uma das quatro arestas: X2, X4, X6 ou X8, pois as quatro marcas de aresta são estrategicamente equivalentes.

Ao executarmos as isometrias de rotação e de reflexão, reduzimos de 8 para 5 o número de estratégias disponíveis para o jogador O em sua primeira escolha, as quais foram indicadas de H a L na Figura 23.

Neste exemplo, consideramos que o jogador X escolha a posição X2. Ao optar pela estratégia H, o jogador O escolhe um canto oposto a posição X2, podendo ser o canto O7 ou o canto O9. Admita que o jogador O escolheu a posição O7. O jogador X, utilizando uma estratégia vencedora, decide marcar a posição X1, fazendo que o jogador O não tenha outra opção a não ser bloquear na posição O3. Decidindo pela posição X5, o jogador X, simultaneamente, impede o jogador adversário colocar três Os em linha, e encaminha o jogo a vitória, pois, se o jogador O direcionar o jogo para a opção O8, o jogador X marcará a opção X9 e, se o jogador O direcionar o jogo para a opção O9, o jogador X marcará a opção X8.

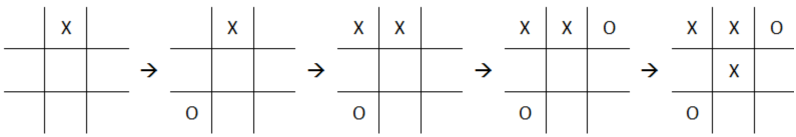

Figura 29 – Sequência vencedora nº 4 para o jogador X

A sequência de movimentos X2 → O7 → X1 → O3 → X5, ilustrada pela Figura 29, é vencedora para o jogador X, consequentemente, dando a vitória a este jogador. Esta sequência de movimentos é apenas um exemplo quando o jogador X escolhe inicialmente a estratégia *aresta* e o jogador O opta por direcionar o jogo para um canto oposto a esta posição.

Existem outras sequências vencedoras para o jogador X nesta hipótese, por exemplo, as sequências X4 → O9 → X7 → O1 → X5 e X6 → O7 → X9 → O3 → X5.

Conforme explanamos, chegamos a conclusão que a combinação de estratégias inicial (*aresta*, *canto oposto*) é vencedora para o jogador X e, consequentemente, perdedora para o jogador O.

Continuamos supondo que o jogador X escolha a estratégia *aresta* em sua primeira decisão e, neste exemplo, decida por marcar a posição X2. Caso o jogador O escolha uma aresta adjacente (estratégia I), o jogo é direcionado para a posição O4 ou para a posição O6. Mostraremos a seguir que a combinação de estratégias inicial (*aresta*, *aresta adjacente*) também é vencedora para o jogador X.

Neste caso, o jogador X decide pela posição X2 (aresta), enquanto o jogador O escolhe a posição O4 (aresta adjacente). A seguir, o jogador X marca a posição X1, então o jogador O terá que bloquear, direcionando o jogo para a posição O3. O jogador X, ao escolher o meio (posição X5), leva o jogo a vitória.

A sequência de movimentos X2 → O4 → X1 → O3 → X5, mostrada na Figura 30, é vencedora para o jogador X.

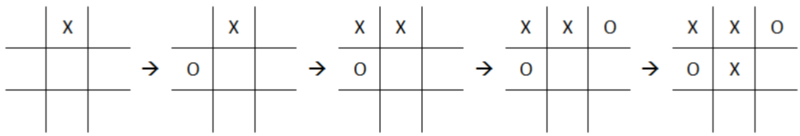

Figura 30 – Sequência vencedora nº 5 para o jogador X

Já vimos que as quatro marcas de aresta são estrategicamente equivalentes. Assim, existem outras sequências vencedoras para o jogador X na combinação de estratégias inicial (*aresta*, *aresta adjacente*). Observe a seguir alguns exemplos:

X2 → O6 → X5 → O8 → X3;
X4 → O8 → X7 → O1 → X5;
X4 → O2 → X5 → O5 → X1;
X6 → O2 → X3 → O9 → X5;
X6 → O8 → X5 → O3 → X9;
X8 → O4 → X5 → O2 → X7;
X8 → O6 → X9 → O7 → X5.

Na sequência, mostraremos que as três últimas estratégias: J, K e L, encaminham o jogo para o empate. Nas três condições, vamos admitir que ambos jogadores são experientes. Desta forma, o jogador X tentará colocar três caracteres em linha e o jogador O bloqueará seu adversário. Consequentemente, quando os dois jogadores utilizam estas estratégias e não cometem um único erro, a partida terminará empatada.

Na combinação de estratégias inicial J (*aresta*, *canto adjacente*), vamos assumir que a primeira decisão do jogador X seja escolher a posição X2 e o jogador O defina a localização O1. Neste caso, por exemplo, com a sequência X2 → O1 → X5 → O8 → X7 → O3 → X6 → O4 → X9, o jogo terminará empatado.

Na sequência, utilizando as isometrias de rotação e de reflexão, bem como as posições estrategicamente equivalentes, demonstraremos alguns exemplos da combinação de estratégias inicial (*aresta*, *aresta adjacente*) que também levarão o jogo ao empate:
X2 → O1 → X5 → O8 → X4 → O6 → X3 → O7 → X9;
X2 → O3 → X5 → O8 → X9 → O1 → X4 → O6 → X7;
X4 → O7 → X5 → O6 → X9 → O1 → X2 → O8 → X3;
X6 → O3 → X5 → O4 → X2 → O8 → X9 → O1 → X7;
X8 → O9 → X5 → O2 → X3 → O7 → X4 → O6 → X1.

Agora, suponha que o jogador O escolha a estratégia inicial K (*aresta*, *aresta oposta*). Nesta escolha, temos quatro pares de decisões iniciais: (X2, O8), (X4, O6), (X6, O4) e (X8, O2). Na sequência, destacamos alguns exemplos desta combinação de estratégias inicial que conduzirá o jogo ao empate:
X2 → O8 → X1 → O3 → X7 → O4 → X5 → O9 → X6;
X2 → O8 → X3 → O1 → X9 → O6 → X5 → O7 → X4;
X4 → O6 → X1 → O7 → X3 → O2 → X5 → O9 → X8;
X4 → O6 → X7 → O1 → X9 → O8 → X5 → O3 → X2;
X6 → O4 → X3 → O9 → X1 → O2 → X5 → O7 → X4;
X8 → O2 → X7 → O9 → X1 → O4 → X5 → O3 → X6.

Sendo os jogadores X e O experientes, nossa última hipótese, a combinação de estratégias inicial L, qual seja, a estratégia (*aresta*, *meio*), também direcionará o jogo ao empate. Nesta combinação, temos quatro pares de decisões iniciais: (X2, O5), (X4, O5), (X6, O5) e (X8, O5).

Ao decidir-se pelo meio em seu primeiro movimento, o jogador O está encaminhando a partida ao empate. Neste caso, estamos supondo que ambos jogadores decidam por ações corretas, não cometendo erros durante todo o jogo.

A seguir, destacamos alguns exemplos da combinação de estratégias inicial (*aresta*, *meio*) que levarão o jogo ao empate, sendo um exemplo para cada par de decisões citadas:

X2 → O5 → X3 → O1 → X9 → O6 → X4 → O8 → X7;
X4 → O5 → X1 → O7 → X3 → O2 → X9 → O6 → X8;
X6 → O5 → X9 → O3 → X7 → O8 → X1 → O4 → X2;
X8 → O5 → X7 → O9 → X1 → O4 → X3 → O2 → X6.

Assim, concluímos nossa explanação sobre as doze combinações de estratégias iniciais para o jogo da velha, onde a primeira decisão a ser tomada pertence ao jogador X e a segunda decisão deve ser tomada pelo jogador O. Ao aplicarmos as isometrias de rotação e reflexão, assim como considerarmos as posições estrategicamente equivalentes, vamos relembrar nossas doze combinações de estratégias iniciais:
Combinação de estratégias inicial A: (*canto*, *canto adjacente*);
Combinação de estratégias inicial B: (*canto*, *canto oposto*);
Combinação de estratégias inicial C: (*canto*, *aresta adjacente*);
Combinação de estratégias inicial D: (*canto*, *aresta oposta*);
Combinação de estratégias inicial E: (*canto*, *meio*);
Combinação de estratégias inicial F: (*meio*, *aresta*);
Combinação de estratégias inicial G: (*meio*, *canto*);
Combinação de estratégias inicial H: (*aresta*, *canto oposto*);
Combinação de estratégias inicial I: (*aresta*, *aresta adjacente*);
Combinação de estratégias inicial J: (*aresta*, *canto adjacente*);
Combinação de estratégias inicial K: (*aresta*, *aresta oposta*);
Combinação de estratégias inicial L: (*aresta*, *meio*).

De acordo com (GARDNER, 1988), das três jogadas de abertura possíveis: um canto, o centro ou uma aresta; a abertura mais forte é o canto, porque o oponente pode evitar ficar preso no próximo movimento apenas por uma das oito escolhas possíveis: o centro. Por outro lado, as armadilhas de abertura central podem ser bloqueadas apenas pela captura de um canto. A abertura de aresta, em muitos aspectos, é a mais interessante por causa de sua riqueza em armadilhas dos dois lados.

Com base nas informações anteriores, podemos afirmar que o jogo da velha será direcionado ao empate quando cada jogador, em sua primeira escolha, tomar as seguintes decisões:
1. Jogador X escolher um canto e jogador O escolher o centro;
2. Jogador X escolher centro e jogador O escolher um canto;
3. Jogador X escolher uma aresta e jogador O escolher uma posição na mesma linha ou mesma coluna.

4.2 SITUAÇÕES EM QUE UM JOGADOR COMETE ERRO

Das doze combinações de estratégias iniciais possiveis, verificamos que sete delas direcionam a vitória ao jogador X (estratégias A, B, C, D, F, H e I) e cinco conduzem o jogo a terminar empatado (estratégias E, G, J, K e L). Nestas estratégias, presumimos que os dois jogadores são experientes, utilizam estratégias corretas e não cometem erros.

Porém, em um jogo, admitimos a hipótese que um dos jogadores cometa erros e, no caso específico do jogo da velha, um único erro pode encaminhar a partida para a vitória do adversário.

Na sequência, vamos supor que um dos jogadores cometa apenas um erro em cada uma das cinco estratégias que direcionam o jogo ao empate (estratégias E, G, J, K e L).

Observamos que a combinação de estratégias inicial E (*canto*, *meio*) leva o jogo ao empate. Mas, vamos supor que jogador O não é um jogador experiente, que o jogador X marque X1 na abertura do jogo e que o jogador O escolha a posição O5. Em sua segunda decisão, se o jogador O não escolher sua melhor ação naquele momento do jogo, direcionará o jogador X para a vitória. Veja alguns exemplos:
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X3;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X3;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X7;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X3.

Suponha agora que o jogador O escolha suas melhores ações nas duas primeiras decisões, mas decide por marcar uma posição ruim no terceiro movimento, assim, também direcionará o jogador X para a vitória. Veja dois exemplos:
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X7;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X9.

A combinação de estratégias inicial G (*meio*, *canto*) também encaminha ao empate o resultado final do jogo. Todavia, assuma que o jogador O não é um jogador experiente e em sua segunda decisão não escolha sua melhor ação naquele momento do jogo. Com este movimento, direcionará o jogador X para a vitória, como por exemplo, nas sequências:
X5 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X4;
X5 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X8.

Você percebeu que na combinação de estratégias inicial J (*aresta*, *canto adjacente*), a segunda decisão do jogador X é sempre marcar a casa X5? Suponha que este jogador cometa um erro nesta ação. Na sequência X8 → O9 → X2 → O5 → X1 → O3, com este único erro do jogador X, o jogo é encaminhado para vitória de seu adversário.

Na combinação de estratégias inicial K (*aresta*, *aresta oposta*), assuma que o jogador X cometa um erro em sua segunda decisão. Desta maneira, admitimos a sequência de movimentos X4 → O6 → X5 → O7 → X1 → O9, mostrada na Figura 31, que dá a vitória ao jogador O.

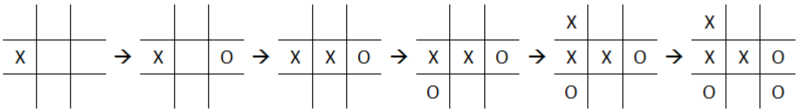

Figura 31 – Sequência vencedora nº 1 para o jogador O

Admita agora que o jogador X também cometa um erro em sua segunda decisão na combinação de estratégias inicial L (*aresta*, *meio*). Desta forma, suponha que os jogadores realizem a sequência de movimentos X8 → O5 → X2 → O1 → X9 → O7, visualizada abaixo através da Figura 32. Observe que esta sequência direciona o jogo para vitória ao jogador O.

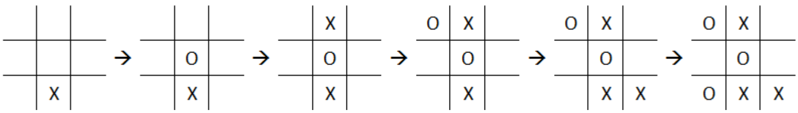

Figura 32 – Sequência vencedora nº 2 para o jogador O

Neste trabalho, não analisaremos as condições em que um jogador comete erro nas sete estratégias que direcionam o jogo para vitória do jogador X (estratégias A, B, C, D, F, H e K).

4.3 ASPECTOS COMBINATÓRIOS DO JOGO DA VELHA

Observe na Figura 20 que o jogador X, em sua primeira decisão, tem as 9 posições da à sua escolha. Já o jogador O, em sua escolha inicial, tem 8 casas disponíveis. Agora, em seu segundo lance, o jogador X pode optar por uma das 7 casas livres, e assim sucessivamente. Chega-se a conclusão que, em caso de preenchimento completo do tabuleiro, o jogo da velha teria 362.880 maneiras que as posições podem ser preenchidas, correspondente a 9! posições possíveis.

No entanto, existem ocasiões em que o jogo termina com 5, 6, 7

ou 8 movimentos, com a vitória de um dos dois jogadores. No caso do jogo terminar com 9 movimentos, podemos ter vitória do jogador X ou empate. Veja alguns casos:
X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X4;
X8 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O9;
X1 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X4;
X2 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O4;
X5 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X4 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X9.

Então, o número de 362.880 maneiras possíveis será reduzido, calculando quantos jogos terminam com 5, 6, 7, 8 ou 9 movimentos.

4.3.1 Número de jogos que terminam no quinto movimento

Existem oito possibilidades de combinação de caracteres que dão a vitória ao jogador X: três linhas verticais, três linhas horizontais e duas linhas diagonais, não importando a ordem em que os três Xs são colocados. Já os dois carateres Os podem ser colocados em qualquer das outras seis casas, em qualquer ordem. Desta forma, calculamos: $8 \times 3! \times 6 \times 5 = 8 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6 \times 5 = 1440$ maneiras possíveis para o jogo da velha terminar com vitória do jogador X no quinto movimento.

4.3.2 Número de jogos que terminam no sexto movimento

Novamente, existem oito possibilidades de combinação de caracteres que desta vez darão a vitória ao jogador O: três linhas verticais, três linhas horizontais e duas linhas diagonais, não importando a ordem em que os três Os são colocados. Já os dois carateres Xs podem ser colocados em qualquer das outras seis casas, em qualquer ordem. Assim, temos: $8 \times 3! \times 6 \times 5 \times 4 = 8 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 = 5760$ possibilidades. Porém, precisamos excluir os casos em que temos três Xs em linha e três Os em linha antes do sexto movimento: $6 \times 3! \times 2 \times 3! = 6 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 432$ possibilidades. Então, existem $5760 - 432 = 5328$ maneiras possíveis para o jogo da velha terminar com vitória do jogador O no sexto movimento.

4.3.3 Número de jogos que terminam no sétimo movimento

Mais uma vez, existem oito possibilidades de combinação de caracteres que darão a vitória ao jogador X: três linhas verticais, três linhas horizontais e duas linhas diagonais, mas desta vez a ordem em que os quatro Xs são colocados tem importância, pois o quarto caracter deve formar uma linha com outros dois Xs. Já os três carateres Os podem ser colocados em qualquer das outras cinco casas, em qualquer ordem, desde que não fiquem três caracteres em linha. Desta maneira: $8 \times 3 \times 6 \times 3! \times 5 \times 4 \times 3 = 8 \times 3 \times 6 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 = 51840$ possibilidades. Porém, precisamos excluir os casos em que temos três Xs em linha e três Os em linha antes do sétimo movimento: $6 \times 3 \times 6 \times 3! \times 3! = 6 \times 3 \times 6 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 3888$ possibilidades. Então, existem $51840 - 3888 = 47952$ maneiras possíveis para o jogo da velha terminar com vitória do jogador X no sétimo movimento.

4.3.4 Número de jogos que terminam no oitavo movimento

Novamente, existem oito possibilidades de combinação de caracteres que darão a vitória ao jogador O: três linhas verticais, três linhas horizontais e duas linhas diagonais, mas importando a ordem em que os quatro Os são colocados, pois o quarto caracter deve formar uma linha com outros dois Os, ao passo que os quatro Xs podem ser dispostos em quatro das outras cinco casas em qualquer ordem. Assim sendo: $8 \times 3 \times 6 \times 3! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 8 \times 3 \times 6 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 103680$ possibilidades. Entretanto, precisamos excluir os casos em que temos três Os em linha e três Xs em linha antes do oitavo movimento, sendo que nenhum destes caracteres iguais podem estar em diagonal e, se uma linha específica for retirada com Os, restam apenas duas possíveis linhas que possuem dois Os e um X. Assim, excluiremos: $6 \times 3 \times 6 \times 3! \times 2 \times 4! = 6 \times 3 \times 6 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 31104$ possibilidades. Logo, existem $103680 - 31104 = 72576$ maneiras possíveis para o jogo da velha terminar com vitória do jogador O no oitavo movimento.

4.3.5 Número de jogos que terminam no nono movimento

Existem duas possibilidades do jogo da velha terminar com 9 movimentos: podemos ter vitória do jogador X ou empate.

Em caso de vitória do jogador X, os cálculos levarão em consideração que não exista três Os em linha antes do quinto X ser posicionado, e que não exista uma linha com três Xs antes do nono movimento. Considerando uma vitória do jogador X em uma das duas diagonais, obrigatoriamente os outros dois Xs devem estar colocados em 8 dos 15 pares possíveis de Xs em uma mesma sequência. Assim, temos: $2 \times 3 \times 8 \times 4! \times 4! = 2 \times 3 \times 8 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 27648$ possibilidades. Agora, consideramos uma vitória do jogador X em uma das três linhas horizontais ou em uma das três linhas verticais. Note que, neste caso, os outros dois Xs devem estar posicionais em 10 dos 15 pares possíveis de Xs em uma mesma sequência. Mas, apenas 4 destes 10 pares evitam vitória do jogador O. Desta forma: $6 \times 3 \times 4 \times 4! \times 4! = 6 \times 3 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 41472$ possibilidades. A última maneira do jogador X conquistar a vitória em sua quinta decisão é quando o quinto X complete duas linhas em que elas sejam concorrentes. Verificamos que existem 22 pares possíveis quando inserirmos cinco Xs, de forma que o quinto X seja a interseção das duas linhas formadas com os outros quatro Xs. Desse modo, temos: $22 \times 4! \times 4! = 22 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 12672$ possibilidades. Assim, existem $27648 + 41472 + 12672 = 81792$ maneiras possíveis para o jogo da velha terminar com vitória do jogador X no nono movimento.

Mas ainda encontramos 16 maneiras diferentes para que os cinco Xs e os quatro Os não fiquem posicionados em linha. Assim sendo: $16 \times 5! \times 4! = 16 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 46080$ maneiras possíveis para o jogo da velha terminar terminar empatado após o preenchimento das nove posições.

Somando as possibilidades de vitória do jogador X com as possibilidades de empate, temos: $81792 + 46080 = 127872$ maneiras possíveis para que o tabuleiro do jogo da velha seja completamente preenchido.

Poderíamos também efetuar um cálculo mais rápido para determinarmos o número de jogos que terminam no nono movimento. Este número é as diferenças entre 9!, o produto entre 4! e o número de jogos que terminam no quinto movimento, o produto entre 3! e o número de jogos que terminam no sexto movimento, o produto entre 2! e o número de jogos que terminam no sétimo movimento, e o produto entre 1! e o número de jogos que terminam no oitavo movimento. Vejamos: $9! - 4! \times 1440 - 3! \times 5328 - 2! \times 47952 - 1! \times 72576 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1440 - 3 \times 2 \times 1 \times 5328 - 2 \times 1 \times 47952 - 1 \times 72576 = 362880 - 34560 - 31968 - 95904 - 72576 = 127872$ maneiras possíveis para que o tabuleiro do jogo da velha seja completamente preenchido.

4.3.6 Número total de jogos

Vimos a quantidade de jogos que terminam no quinto, sexto, sétimo, oitavo e nono movimentos:

- 1.440 jogos que terminam no quinto movimento;
- 5.328 jogos que terminam no sexto movimento;
- 47.952 jogos que terminam no sétimo movimento;
- 72.576 jogos que terminam no oitavo movimento;
- 127.872 jogos que terminam no nono movimento.

Adicionando todas as maneiras calculadas, chegamos ao total de $1440 + 5328 + 47952 + 72576 + 127872 = 255168$ maneiras possíveis de jogo.

Destes 255.168 modos possíveis de jogo, temos:

1. 131.184 jogos dão a vitória ao jogador X:
   (a) 1.440 após 5 movimentos;
   (b) 47.952 após 7 movimentos;
   (c) 81.792 após 9 movimentos;
2. 77.904 jogos dão a vitória ao jogador O:
   (a) 5.328 após 6 movimentos;
   (b) 72.576 após 8 movimentos;
3. 46.080 jogos terminam empatados.

Entretanto, note que o cálculo acima desconsidera a utilização de isometrias de rotação ou de reflexão. Após analisarmos e aplicarmos estas isometrias, considerando que os dois jogadores são ingênuos, e conforme (SCHAEFER, 2002), o número de 255.168 posições possíveis será reduzido em 99,946%, resultando em 138 posições terminais possíveis de jogo.

Estas 138 posições são distribuídas da seguinte forma:

1. 91 jogos dão a vitória ao jogador X:
    (a) 21 após 5 movimentos;
    (b) 58 após 7 movimentos;
    (c) 12 após 9 movimentos;
2. 44 jogos dão a vitória ao jogador O:
    (a) 21 após 6 movimentos;
    (b) 23 após 8 movimentos;
3. 3 jogos terminam empatados.

Importante ressaltar que o tabuleiro deste jogo tem seu centro; 4 marcas de canto, onde cada uma é estrategicamente equivalente as outras três; e 4 marcas de aresta, onde cada uma é estrategicamente equivalente as outras três. Assim, podemos considerar que dois jogos são equivalentes se as escolhas dos jogadores forem as mesmas para cada jogada.

Vamos representar a seguir as 138 posições terminais do jogo da velha descritas por (SCHAEFER, 2002) através de 138 sequências terminais.

(a) 21 jogos que dão a vitória ao jogador X após 5 movimentos:
1. X1 → O2 → X5 → O3 → X9;
2. X1 → O2 → X5 → O4 → X9;
3. X1 → O2 → X5 → O6 → X9;
4. X1 → O2 → X5 → O7 → X9;
5. X1 → O2 → X5 → O8 → X9;
6. X1 → O3 → X5 → O7 → X9;
7. X1 → O4 → X2 → O5 → X3;
8. X1 → O4 → X2 → O6 → X3;
9. X1 → O4 → X2 → O7 → X3;
10. X1 → O4 → X2 → O8 → X3;
11. X1 → O4 → X2 → O9 → X3;
12. X1 → O5 → X2 → O7 → X3;
13. X1 → O5 → X2 → O8 → X3;
14. X1 → O7 → X2 → O8 → X3;
15. X1 → O7 → X2 → O9 → X3;
16. X2 → O1 → X5 → O3 → X8;

17. X2 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X8;
18. X2 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X8;
19. X2 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X8;
20. X2 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X8;
21. X2 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X8.

(b) 21 jogos que dão a vitória ao jogador O após 6 movimentos:
22. X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O8;
23. X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O8;
24. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X4 $\rightarrow$ O7;
25. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O7;
26. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O7;
27. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O7;
28. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X4 $\rightarrow$ O9;
29. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O9;
30. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O9;
31. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O9;
32. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O9;
33. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O7;
34. X1 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O6;
35. X1 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O6;
36. X1 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X9 $\rightarrow$ O6;
37. X1 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O9;
38. X1 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O9;
39. X1 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O9;
40. X2 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X4 $\rightarrow$ O5 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O9;
41. X2 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O7;
42. X2 $\rightarrow$ O1 $\rightarrow$ X6 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X8 $\rightarrow$ O7.

(c) 58 jogos que dão a vitória ao jogador X após 7 movimentos:
43. X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X7;
44. X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X9;
45. X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X9;
46. X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X7;
47. X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X3 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O9 $\rightarrow$ X7;
48. X1 $\rightarrow$ O2 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X7 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X9;
49. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X8;
50. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O6 $\rightarrow$ X9;
51. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X8;
52. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O7 $\rightarrow$ X9;
53. X1 $\rightarrow$ O3 $\rightarrow$ X2 $\rightarrow$ O4 $\rightarrow$ X5 $\rightarrow$ O8 $\rightarrow$ X9;

54. X1 → O3 → X2 → O4 → X5 → O9 → X8;
55. X1 → O3 → X2 → O6 → X5 → O7 → X8;
56. X1 → O3 → X2 → O6 → X5 → O7 → X9;
57. X1 → O3 → X2 → O6 → X5 → O8 → X9;
58. X1 → O3 → X2 → O7 → X5 → O8 → X9;
59. X1 → O3 → X2 → O7 → X5 → O9 → X8;
60. X1 → O4 → X2 → O5 → X7 → O8 → X3;
61. X1 → O4 → X2 → O5 → X7 → O9 → X3;
62. X1 → O4 → X2 → O5 → X8 → O7 → X3;
63. X1 → O4 → X2 → O5 → X8 → O9 → X3;
64. X1 → O4 → X2 → O5 → X9 → O7 → X3;
65. X1 → O4 → X2 → O5 → X9 → O8 → X3;
66. X1 → O4 → X2 → O6 → X5 → O7 → X3;
67. X1 → O4 → X2 → O6 → X5 → O7 → X8;
68. X1 → O4 → X2 → O6 → X5 → O7 → X9;
69. X1 → O4 → X2 → O6 → X5 → O8 → X3;
70. X1 → O4 → X2 → O6 → X5 → O8 → X9;
71. X1 → O4 → X2 → O6 → X5 → O9 → X8;
72. X1 → O4 → X2 → O6 → X7 → O8 → X3;
73. X1 → O4 → X2 → O6 → X7 → O9 → X3;
74. X1 → O4 → X2 → O6 → X8 → O7 → X3;
75. X1 → O4 → X2 → O7 → X5 → O8 → X3;
76. X1 → O4 → X2 → O7 → X5 → O8 → X9;
77. X1 → O4 → X2 → O7 → X5 → O9 → X3;
78. X1 → O4 → X2 → O7 → X5 → O9 → X8;
79. X1 → O4 → X2 → O7 → X8 → O9 → X3;
80. X1 → O4 → X2 → O7 → X9 → O8 → X3;
81. X1 → O4 → X2 → O8 → X5 → O9 → X3;
82. X1 → O4 → X2 → O8 → X7 → O9 → X3;
83. X1 → O5 → X2 → O6 → X4 → O8 → X3;
84. X1 → O5 → X2 → O6 → X4 → O9 → X3;
85. X1 → O5 → X2 → O7 → X4 → O6 → X3;
86. X1 → O5 → X2 → O7 → X4 → O8 → X3;
87. X1 → O5 → X2 → O7 → X4 → O9 → X3;
88. X1 → O5 → X2 → O7 → X8 → O9 → X3;
89. X1 → O5 → X2 → O8 → X4 → O9 → X3;
90. X1 → O5 → X2 → O8 → X7 → O9 → X3;
91. X1 → O6 → X2 → O7 → X4 → O8 → X3;
92. X1 → O6 → X2 → O7 → X4 → O9 → X3;
93. X1 → O6 → X2 → O7 → X5 → O8 → X9;
94. X1 → O6 → X2 → O7 → X5 → O9 → X8;

95. X1 → O6 → X2 → O8 → X4 → O9 → X3;
96. X2 → O1 → X4 → O3 → X5 → O6 → X8;
97. X2 → O1 → X4 → O3 → X5 → O7 → X6;
98. X2 → O1 → X4 → O3 → X5 → O8 → X6;
99. X2 → O1 → X4 → O8 → X5 → O9 → X6;
100. X2 → O1 → X5 → O3 → X4 → O9 → X8.

(d) 23 jogos que dão a vitória ao jogador O após 8 movimentos:
101. X1 → O2 → X3 → O4 → X7 → O5 → X9 → O6;
102. X1 → O3 → X2 → O4 → X5 → O6 → X7 → O9;
103. X1 → O3 → X2 → O4 → X6 → O5 → X8 → O7;
104. X1 → O3 → X2 → O4 → X6 → O5 → X9 → O7;
105. X1 → O3 → X2 → O4 → X7 → O5 → X8 → O6;
106. X1 → O3 → X2 → O4 → X7 → O5 → X9 → O6;
107. X1 → O3 → X2 → O4 → X7 → O6 → X8 → O9;
108. X1 → O3 → X2 → O4 → X8 → O5 → X9 → O6;
109. X1 → O3 → X2 → O4 → X8 → O5 → X9 → O7;
110. X1 → O3 → X2 → O5 → X4 → O6 → X8 → O9;
111. X1 → O3 → X2 → O5 → X4 → O6 → X9 → O7;
112. X1 → O3 → X2 → O5 → X4 → O8 → X6 → O7;
113. X1 → O3 → X2 → O5 → X4 → O9 → X6 → O7;
114. X1 → O3 → X2 → O5 → X6 → O9 → X8 → O7;
115. X1 → O3 → X2 → O5 → X7 → O6 → X8 → O9;
116. X1 → O3 → X2 → O6 → X4 → O7 → X5 → O9;
117. X1 → O3 → X2 → O6 → X4 → O8 → X5 → O9;
118. X1 → O3 → X2 → O6 → X5 → O8 → X7 → O9;
119. X1 → O3 → X2 → O7 → X4 → O8 → X6 → O9;
120. X1 → O3 → X2 → O7 → X5 → O8 → X6 → O9;
121. X1 → O4 → X2 → O5 → X7 → O8 → X9 → O6;
122. X1 → O4 → X2 → O7 → X5 → O8 → X6 → O9;
123. X2 → O1 → X4 → O3 → X6 → O5 → X8 → O7.

(e) 12 jogos que dão a vitória ao jogador X após 9 movimentos:
124. X1 → O2 → X3 → O4 → X9 → O6 → X7 → O8 → X5;
125. X1 → O3 → X2 → O4 → X5 → O6 → X7 → O8 → X9;
126. X1 → O3 → X2 → O4 → X5 → O6 → X9 → O7 → X8;
127. X1 → O3 → X2 → O4 → X5 → O7 → X6 → O8 → X9;
128. X1 → O3 → X2 → O4 → X5 → O7 → X6 → O9 → X8;
129. X1 → O3 → X2 → O6 → X4 → O7 → X5 → O8 → X9;
130. X1 → O4 → X2 → O6 → X5 → O8 → X7 → O9 → X3;
131. X1 → O4 → X3 → O6 → X5 → O7 → X8 → O9 → X2;

132. X1 → O5 → X2 → O6 → X4 → O7 → X8 → O9 → X3;
133. X1 → O5 → X2 → O6 → X4 → O7 → X9 → O8 → X3;
134. X2 → O1 → X4 → O3 → X6 → O7 → X8 → O9 → X5;
135. X2 → O5 → X3 → O6 → X4 → O8 → X7 → O9 → X1.

(f) 3 jogos que terminam empatados após 9 movimentos:
136. X1 → O3 → X2 → O4 → X5 → O8 → X6 → O9 → X7;
137. X1 → O3 → X2 → O4 → X6 → O5 → X7 → O8 → X9;
138. X1 → O3 → X2 → O4 → X6 → O5 → X7 → O9 → X8.

Após mostrarmos completamente as 138 posições terminais possíveis do jogo da velha, vamos considerar como exemplo a posição número 7: X1 → O4 → X2 → O5 → X3, destacada na Figura 33.

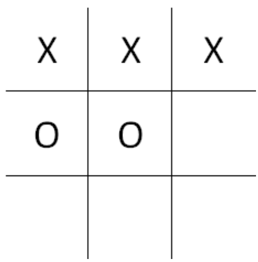

Figura 33 – Posição nº 7: X1 → O4 → X2 → O5 → X3

Perceba que a posição indicada na Figura 33 possui oito jogos equivalentes, conforme pode ser visto através da Figura 34.

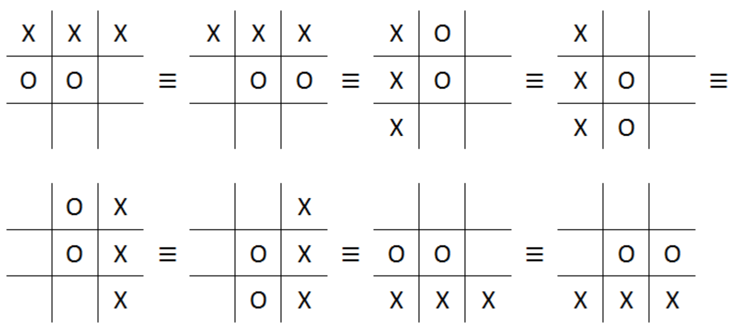

Figura 34 – Exemplo de jogos equivalentes

Cada um destes 8 jogos possuem 12 maneiras diferentes de serem construídos. Assim, o jogo da Figura 33 pode ser montado das seguintes formas:
1. X1 → O4 → X2 → O5 → X3;
2. X1 → O4 → X3 → O5 → X2;
3. X1 → O5 → X2 → O4 → X3;
4. X1 → O5 → X3 → O4 → X2;
5. X2 → O4 → X1 → O5 → X3;
6. X2 → O4 → X3 → O5 → X1;
7. X2 → O5 → X1 → O4 → X3;
8. X2 → O5 → X3 → O4 → X1;
9. X3 → O4 → X1 → O5 → X2;
10. X3 → O4 → X2 → O5 → X1;
11. X3 → O5 → X1 → O4 → X2;
12. X3 → O5 → X2 → O4 → X1.

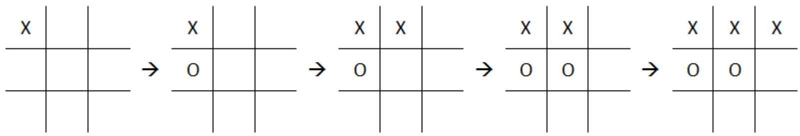

Figura 35 – Sequência vencedora nº 6 para o jogador X

Perceba na Figura 35 uma maneira de construir o jogo da Figura 33. Portanto, se cada um destes 8 jogos podem ser construídos de 12 maneiras diferentes, o jogo da posição nº 7 tem 95 outras maneiras de ser montado, desconsiderando as isometrias de rotação e de reflexão.

Este é só um exemplo de como pudemos reduzir em 99,946% o número de 255.168 posições do jogo da velha, ficando com apenas 138 posições terminais possíveis de jogo.

4.4 APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Com o objetivo de desenvolvermos modelos que podem ser objetos de estudo da teoria dos jogos em uma forma abrangente na educação básica, constatamos que nos livros didáticos utilizados no Ensino Fundamental II não há um estudo sobre a teoria dos jogos. Buscando aplicar este conceito em sala de aula, utilizamos um jogo conhecido dos alunos nesta faixa etária, o popular “jogo da velha”, aplicando a teoria dos jogos com aulas dinâmicas, atraindo assim a atenção dos estudantes.

Figura 36 – Aplicação da teoria dos jogos em sala de aula (1)

Percebemos a necessidade de estabelecer estratégias para os alunos de maior rendimento em sala de aula, com o desenvolvimento de práticas dinâmicas e educativas, ao mesmo tempo em que, por determinação do artigo 13 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), devemos estabelecer estratégias de recuperação para os alunos de menor rendimento, com os conteúdos ministrados em sala de aula, assim como o estabelecimento de ensino, que tem a incumbência de prover meios para a recuperação dos alunos de menor redimento, de acordo com o artigo 12 do mesmo diploma legal.

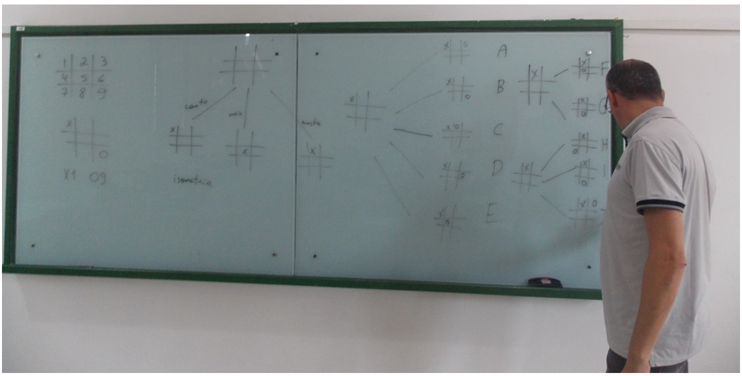

Figura 37 – Aplicação da teoria dos jogos em sala de aula (2)

Resolvemos aplicar o conceito da teoria dos jogos com alunos de maior rendimento em sala de aula no ano letivo de 2018 na E.M.E.F.

Quintino Rizzieri, estabelecimento de ensino pertencente a rede pública do Município de Içara (SC).

Selecionamos oito alunos com destaque nos rendimentos escolares do 8º ano do Ensino Fundamental: Amanda, Bianca, Isadora, Larissa, Leticia, Marcus, Maria Elisa e Maria Laura. Com estes alunos, inclusive utilizando horários no contraturno, mostramos as estratégias a serem utilizadas no jogo da velha.

Iniciamos nossa explanação explicando aos oito alunos os conceitos de isometria de rotação e de reflexão, demonstrando que, apesar do jogo da velha possuir nove posições diferentes, existem apenas três marcas possíveis para fins de estratégia: canto, meio ou aresta. Isto porque as quatro marcas de canto são estrategicamente equivalentes entre si e as quatro marcas de aresta também são estrategicamente equivalentes entre si.

Na mesma oportunidade, enumeramos as posições do jogo da velha de 1 a 9, desenhando na lousa e detalhando as doze combinações de estratégias iniciais do jogo da velha, demonstradas em nosso trabalho através da Figura 23: (*canto*, *canto adjacente*); (*canto*, *canto oposto*); (*canto*, *aresta adjacente*); (*canto*, *aresta oposta*); (*canto*, *meio*); (*meio*, *aresta*); (*meio*, *canto*); (*aresta*, *canto oposto*); (*aresta*, *aresta adjacente*); (*aresta*, *canto adjacente*); (*aresta*, *aresta oposta*); (*aresta*, *meio*).

Figura 38 – Aplicação da teoria dos jogos em sala de aula (3)

Os alunos testaram, no decorrer das primeiras aulas, todas as doze combinações de estratégias iniciais, efetuando revezamento das duplas.

Nas aulas seguintes, os alunos desenvolveram maneiras de utilizarem estratégias vencedoras nos três movimentos de abertura: canto, meio e aresta, sendo utilizado um movimento de abertura para cada dia, verificando também todas as 138 posições terminais possíveis do jogo da velha.

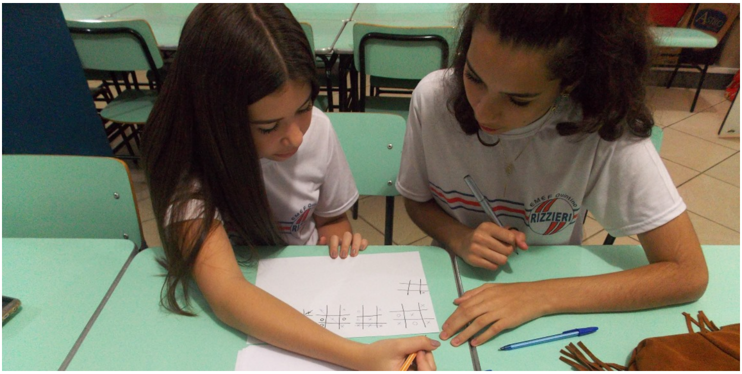

Figura 39 – Aplicação da teoria dos jogos em sala de aula (4)

Em nossas últimas aulas, os oito alunos efetuaram vários jogos entre si, revezando as duplas. Constatamos que os oito alunos progrediram em seus estudos, aprimorando cada vez mais suas estratégias, evoluindo a um nível tático em que o jogo usualmente terminava empatado entre eles, exceto quando um dos jogadores cometia um único equívoco, dando a seu adversário a chance de vitória.

Figura 40 – Aplicação da teoria dos jogos em sala de aula (4)

Finalizando nossa atividade, nos reunimos em uma sessão de cinema, onde assistimos o filme “Uma Mente Brilhante” (A Beautiful

Mind, 2001).

Figura 41 – Aplicação da teoria dos jogos em sala de aula (5)

Além de ser ilustrada através de fotos, nossa aplicação do conceito da teoria dos jogos no “jogo da velha” foi registrada em anotações do docente.

Ficamos surpresos positivamente com a maneira que estes alunos progrediram seus conhecimentos no jogo da velha, em suas estratégias, bem como no conceito da teoria dos jogos. Todos os oito alunos, bem como a gestão do estabelecimento de ensino, aprovaram esta maneira dinâmica e divertida de aprendizagem.

Figura 42 – Aplicação da teoria dos jogos em sala de aula (6)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos neste trabalho que a teoria dos jogos não se restringe apenas a jogos no senso comum, como jogo de damas, xadrez ou poker; mas é aplicada em várias áreas de nossa sociedade, como esporte, economia e política, fornecendo conceitos e fundamentos que tornam prática sua utilização, unindo-se a outros conceitos das áreas citadas.

No capítulo 2, destacamos os aspectos gerais da teoria dos jogos, tais como seus antecedentes históricos, conceitos e elementos de um jogo, bem como suas possíveis resoluções, com destaque para a utilização de estratégias dominantes e a eliminação iterada de estratégias dominadas, inclusive nos jogos de soma zero.

No decorrer daquele capítulo, nos referimos a forma normal de um jogo, onde todas as regras são definidas antes de seu início, não sendo possível negociar com os demais jogadores envolvidos, que definem suas estratégias simultaneamente, não tendo conhecimento das decisões dos demais jogadores. Utilizamos exemplos clássicos da teoria dos jogos, como o dilema dos prisioneiros e o jogo das galinhas.

Destacamos também no capítulo 2 dois conceitos importantes da teoria dos jogos: o equilíbrio de Nash, que é encontrado quando cada resultado das estratégias adotadas pelos demais jogadores é seu melhor resultado, e isso é válido para todos os jogadores (NASH, 1950), utilizando o exemplo da batalha dos sexos; e o ótimo de Pareto, onde, em uma dada situação, não é mais possível melhorar a situação de um agente sem piorar a de outro (FIANI, 2006). Ressaltamos que não podemos fazer relação entre o ótimo de Pareto e o equilíbrio de Nash.

No capítulo seguinte, executamos a investigação da forma extensiva de um jogo, no qual a escolha de ações ocorre sequencialmente e cada jogador pode observar as estratégias adotadas anteriormente e todos os movimentos já efetuados são visíveis para todos os jogadores. Foi esta dinâmica diferenciada que nos despertou o interesse e motivou-nos a tratar especificamente deste tipo de jogo em nosso trabalho, delimitando nossas análises aos jogos finitos, que foram exemplificados por meio de grafos.

Explanamos o que são jogos com informação perfeita, no qual, conforme (MYERSON, 2013), o processo de interação estratégica se desenvolve em etapas sucessivas, em uma ordem predeterminada, e sempre que um jogador se move ele conhece tudo que cada jogador observou ou fez em cada momento anterior do jogo; e esclarecemos o que são jogos com informação imperfeita, que, de acordo com (SHOHAM;

LEYTON-BROWN, 2008), são jogos que os nós de escolha de cada jogador são particionados em conjuntos de informações e, quando dois nós de escolha estiverem no mesmo conjunto de informações, o agente não poderá distinguir entre eles.

Vimos ainda o que são subjogos, com destaque para o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Utilizamos o método da indução reversa como um processo para solução de jogos na forma extensiva, pois, segundo (KARLIN; PERES, 2017), todo jogo na forma extensiva com informação perfeita tem pelo menos um equilíbrio de subjogo perfeito que pode ser calculado por indução reversa.

Empregamos naquele capítulo diversos exemplos de jogos na forma extensiva, evidenciando o jogo da entrada, a guerra dos dentistas, a batalha dos supermercados e a destruição mútua garantida.

No capítulo 4, abordamos sobre a aplicação da teoria dos jogos em sala de aula nos anos finais Ensino Fundamental, com o desenvolvimento de estratégias vencedoras no popular “jogo da velha”, por ser conhecido dos alunos nesta faixa etária. Neste jogo, o jogador que utilizar estratégias vencedoras sem cometer erros não poderá ser derrotado.

Concluímos que, quando dois jogadores experientes disputam uma partida de jogo da velha, esta geralmente terminará empatada, salvo se um dos jogadores cometer um equívoco em suas estratégias, criando possibilidade de vitória de seu adversário. Quando ambos jogadores utilizam estratégias corretas e não comentem erros, a partida termina empatada. No desdobramento do capítulo, abordamos algumas situações em que um jogador comete erro.

Destacamos também os aspectos combinatórios do jogo da velha, calculando o número possível de jogos que terminam com 5, 6, 7, 8 e 9 movimentos: 255.168 jogos. Utilizando as isometrias de rotação e reflexão, verificamos que o jogo da velha possui apenas 138 posições terminais possíveis de jogo.

Finalizando nosso trabalho, ilustramos como foi aplicado o conceito da teoria dos jogos em sala de aula, utilizando o jogo da velha com alunos de maior rendimento no 8º ano do Ensino Fundamental da E.M.E.F. Quintino Rizzieri, no Município de Içara-SC. Ficamos surpresos positivamente com o desenvolvimento das estratégias dos alunos no jogo da velha, bem como no conceito de teoria dos jogos. Alunos e a gestão do estabelecimento de ensino aprovaram a divertida maneira de aprendizagem.

Durante a execução de nosso trabalho, abordamos a utilização da teoria dos jogos em várias áreas de nossa sociedade. Apesar da busca de um texto mais amplificado sobre o tema, temos muito ainda para ser estudado, trabalhado e acrescentado a este conteúdo.

REFERÊNCIAS

BOREL, E. La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche. **Rapports hebdomadaires des sessions de l'Académie des Sciences de Paris**, Paris, v. 173, p. 1304–1308, 1921.

DUTTA, P. **Strategies and Games: Theory and Practice**. Cambridge: MIT Press, 1999.

EBBINGHAUS, H. et al. **Ernst Zermelo - Collected Works / Gesammelte Werke: Volume I / Band I - Set Theory, Miscellanea / Mengenlehre, Varia**. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2010.

FANDANGO MOVIECLIPS. **War Games: Tic Tac Toe With Joshua (1983)**. 2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=F7qOV8xonfY>. Acesso em: 04 dez. 2018.

FIANI, R. **Teoria Dos Jogos**. Rio de Janeiro: Elsevier Editora, 2006.

GARDNER, M. **Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions: The First Scientific American Book of Puzzles and Games**. Chicago: University of Chicago Press, 1988.

KARLIN, A.; PERES, Y. **Game Theory, Alive**. Providence: American Mathematical Society, 2017.

MYERSON, R. **Game Theory**. Cambridge: Harvard University Press, 2013.

NASH, J. Equilibrium points in n-person games. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, Washington, D.C., v. 36, p. 48–49, 1950.

PRISNER, E. **Game Theory Through Examples**. Washington, D.C.: MAA, The Mathematical Association of America, 2014.

SCHAEFER, S. **Mathematical Recreations: Tic-Tac-Toe Results**. 2002. Disponível em: <http://www.mathrec.org/old/2002jan/solutions.html>. Acesso em: 06 jan. 2019.

SELTEN, R. **Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit. Zeitschrift für die Gesamte Staatswissenschaft**. Tübingen: Mohr Siebeck GmbH & Co. KG, 1965.

SHOHAM, Y.; LEYTON-BROWN, K. **Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations**. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

THEOCHARIS, R. **Early Developments in Mathematical Economics**. London: Springer, 1983.

VARIAN, H. **Intermediate Microeconomics: A Modern Approach**. New York: W.W. Norton & Company, 2006.

VON NEUMANN, J. Zur theorie der gesellschaftsspiel. **Mathematische Annalen**, Berlin, v. 100, p. 295–320, 1928.

VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **Theory of games and economic behavior**. New Jersey: Princeton University Press, 1944.

WEINTRAUB, E. **Toward a History of Game Theory**. London: Duke University Press, 1992.